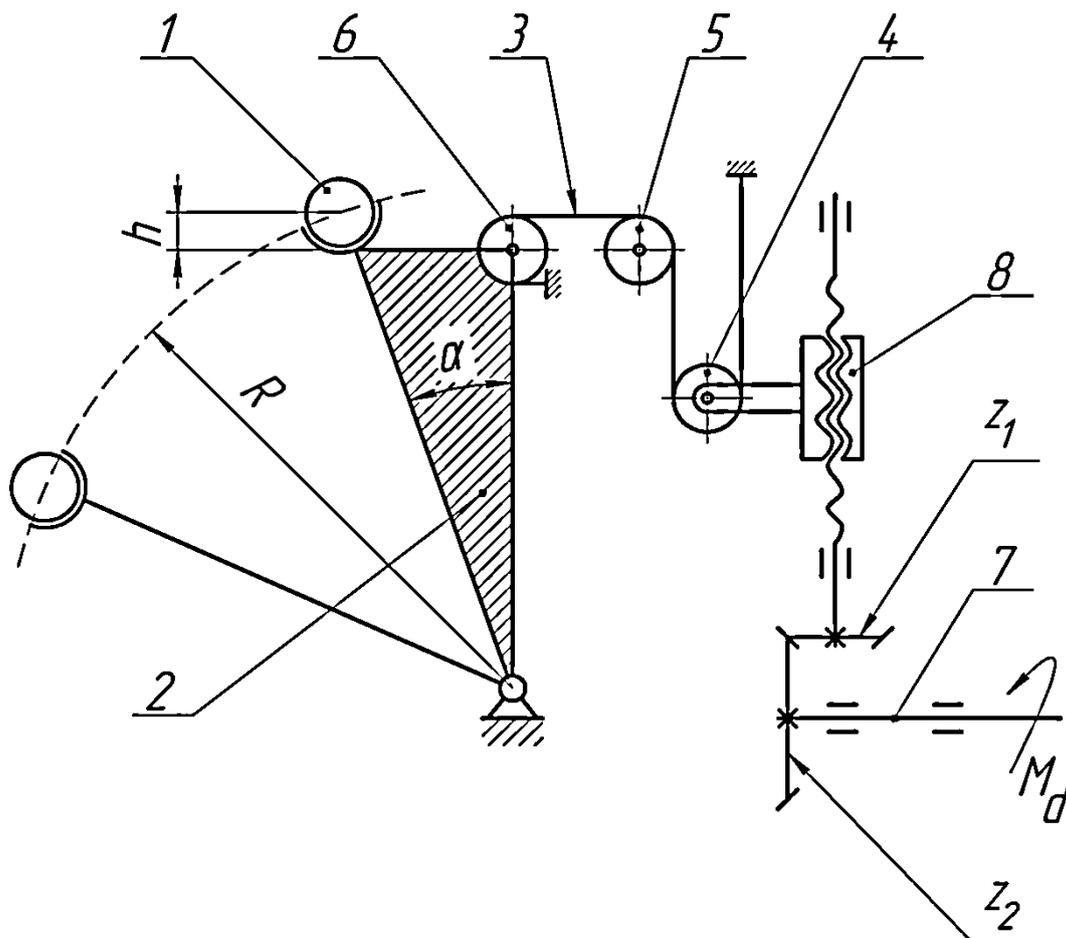


СБОРНИК ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКОЙ
СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 2

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**В.М. Мусалимов, Б.П. Тимофеев, Г.Б. Заморюев,
В.В. Биндюк, В.Д. Брицкий, М.А. Ноздрин,
С.С. Резников, Ю.С. Монахов, П.П. Коваленко,
М.В. Абрамчук**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКОЙ
СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**

ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2016

В.М. Мусалимов, Б.П. Тимофеев, Г.Б. Заморюев, В.В. Биндюк, В.Д. Брицкий, М.А. Ноздрин, С.С. Резников, Ю.С. Монахов, П.П. Коваленко, М.В. Абрамчук, Сборник задач Всероссийской студенческой олимпиады по прикладной механике. Часть 2. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 92 с.

Учебное пособие содержит условия и решения задач Всероссийской студенческой олимпиады по прикладной механике, ежегодно проводимой в Университете ИТМО. В издание вошли задачи 2005-2009 годов

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 15.03.06 (221000) «Мехатроника и робототехника», 12.03.01 (200100) «Приборостроение», 12.03.02 «Опготехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» при изучении курсов Б.3.2.5 «Прикладная механика», Б.3.1.3 «Прикладная механика», Б.3.2.2 «Теория механизмов и машин», Б.3.2.10 «Основы конструирования механизмов и машин».

Рекомендовано к печати Ученым советом мегафакультета компьютерных технологий и управления, протокол № 9 от 15 ноября 2016г.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© В.М. Мусалимов, Б.П. Тимофеев, Г.Б. Заморюев, В.В. Биндюк, В.Д. Брицкий, М.А. Ноздрин, С.С. Резников, Ю.С. Монахов, П.П. Коваленко, М.В. Абрамчук, 2016

Задача № 1

Абсолютно жесткий брус веса G подвешен на трех параллельных проволоках. Расстояния между проволоками одинаковы. Сечения проволок одинаковы, но материалы различны и имеют модули Юнга: E_1, E_2, E_3 .

Определить усилия, возникающие в проволоках.

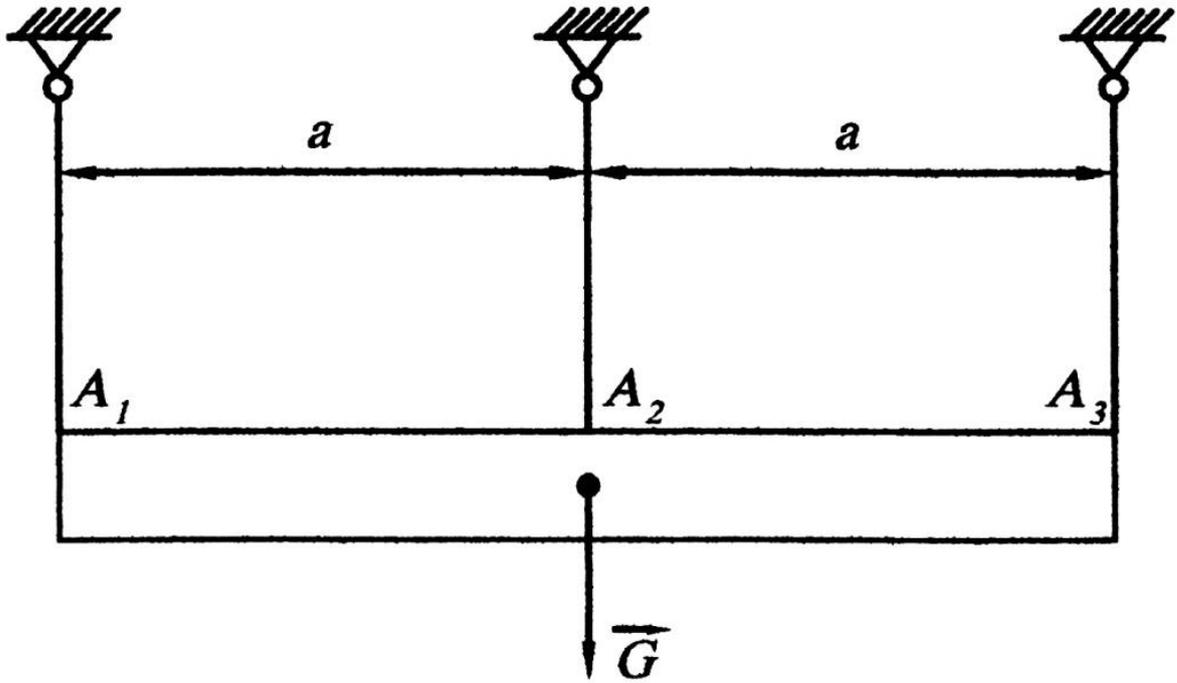


Рис.1

Решение

После подвешивания бруса проволоки должны растянуться, причем так, что точки крепления будут оставаться на одной прямой (так как брус абсолютно жесткий).

Деформированное состояние (в предположении $E_1 \geq E_2 \geq E_3$) представлено на рис. 2.

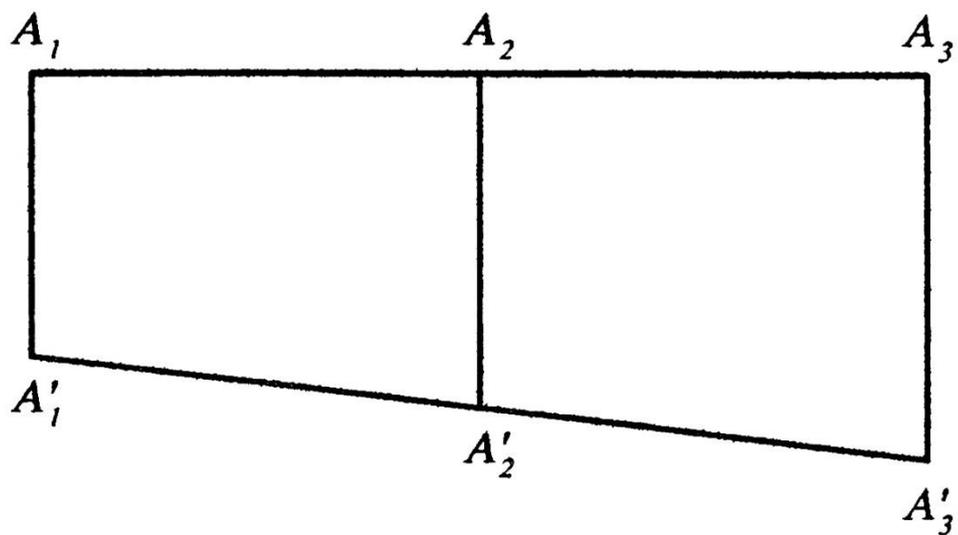


Рис.2

Геометрическое свойство трапеции дает соотношение:

$$2 \cdot A_2 A'_2 = A_1 A'_1 + A_3 A'_3.$$

Обозначая N_1 , N_2 , N_3 натяжения в проволоках, в соответствии с законом Гука, получим:

$$2 \cdot \frac{N_2}{E_2} = \frac{N_1}{E_1} + \frac{N_3}{E_3}. \quad (1)$$

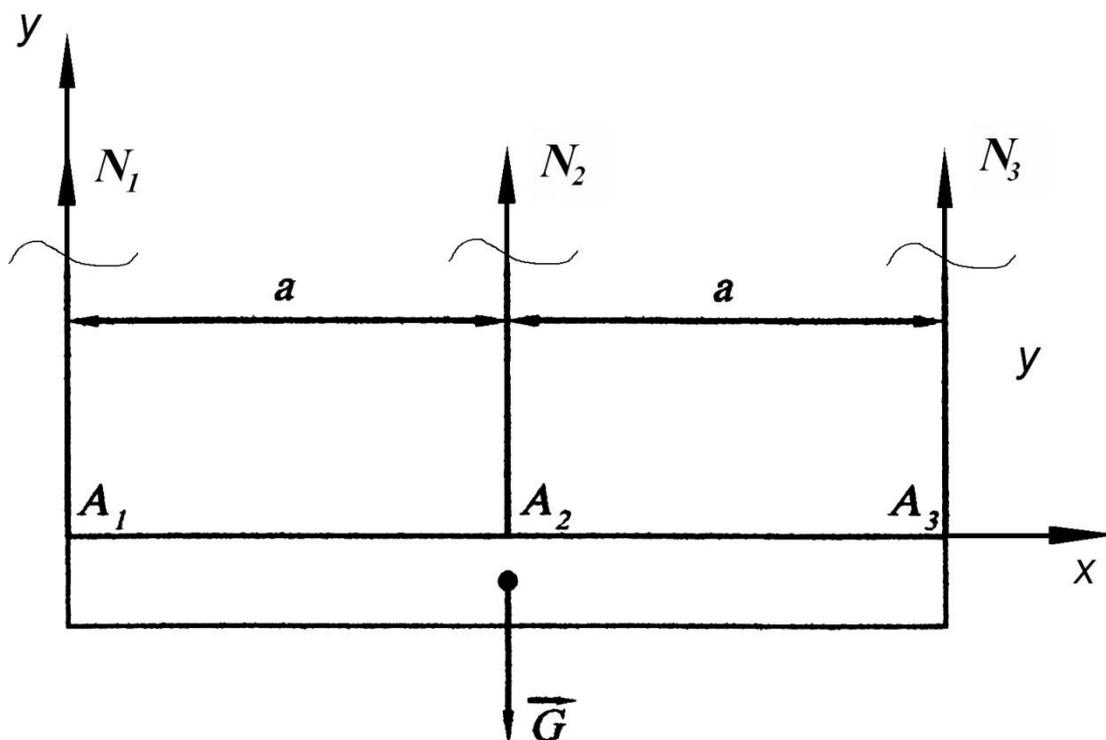


Рис.3

Присоединяя уравнения статики, записанные для деформированного состояния (уравнение проекций на вертикаль и уравнение моментов относительно точки A_1), получим:

$$\sum F_y = 0;$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - G = 0.$$

Отсюда

$$G = N_1 + N_2 + N_3. \quad (2)$$

$$\sum M_{A_1} = 0;$$

$$N_2 a + N_3 2a - Ga = 0;$$

Разделим на a :

$$N_2 + 2N_3 - G = 0.$$

Используя (2), получим:

$$N_2 + 2N_3 - (N_1 + N_2 + N_3) = 0;$$

или:

$$N_1 = N_3. \quad (3)$$

Система (1), (2), (3) легко решается:

$$N_1 = N_3 = \frac{2E_1 E_3}{4E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2} G,$$

$$N_2 = \frac{E_1 E_2 + E_2 E_3}{4E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2} G.$$

$$\text{Ответ: } N_1 = N_3 = \frac{2E_1 E_3}{4E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2} G; \quad N_2 = \frac{E_1 E_2 + E_2 E_3}{4E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2} G.$$

Задача № 2

Балка весом G опирается в двух точках. При каком отношении a/l это возможно?

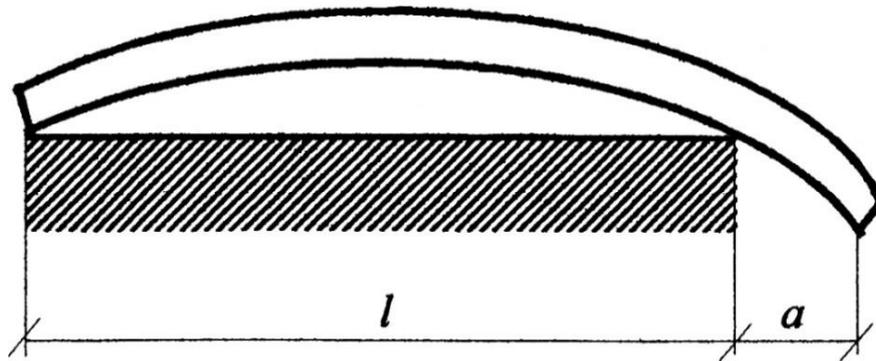


Рис.4

Решение

При условии опирания балки в двух точках, реакции опор будут следующими:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_A + F_B - G = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad F_B l - \frac{p(l+a)^2}{2} = 0;$$

Тогда $F_B = \frac{G(l+a)}{2l}$; $F_A = G - F_B = G - \frac{G(l+a)}{2} = \frac{G2l - Gl - Ga}{2l} = \frac{G(l-a)}{2l}$.

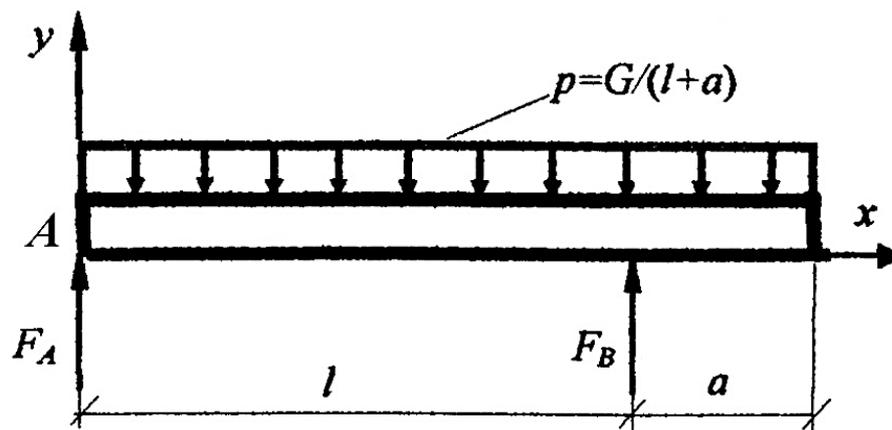


Рис. 5

I способ

На основе универсального уравнения из условия равенства нулю прогиба в точке B получим при $x = l$

$$EIy(l) = EI\varphi_0 l + \frac{G(l-0)^3}{6} - \frac{p(l-0)^4}{24} = 0 \Rightarrow EI\varphi_0 l + \frac{G(l-a)^3}{2l} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{G}{(l+a)} \cdot \frac{l^4}{24} = 0.$$

Чтобы балка опиралась только в двух точках, угол поворота на левой опоре (точка А) должен быть больше нуля (против хода часовой стрелки), т.е.

$$EI\varphi_0 l = \frac{G}{(l+a)} \cdot \frac{l^4}{24} - \frac{G(l-a)l^3}{2l \cdot 6} > 0 \Rightarrow \frac{l^2}{(l+a)2} - (l-a) > 0 \Rightarrow \frac{l}{a} < \sqrt{2}.$$

II способ. Определим угол поворота на левой опоре по Мору.

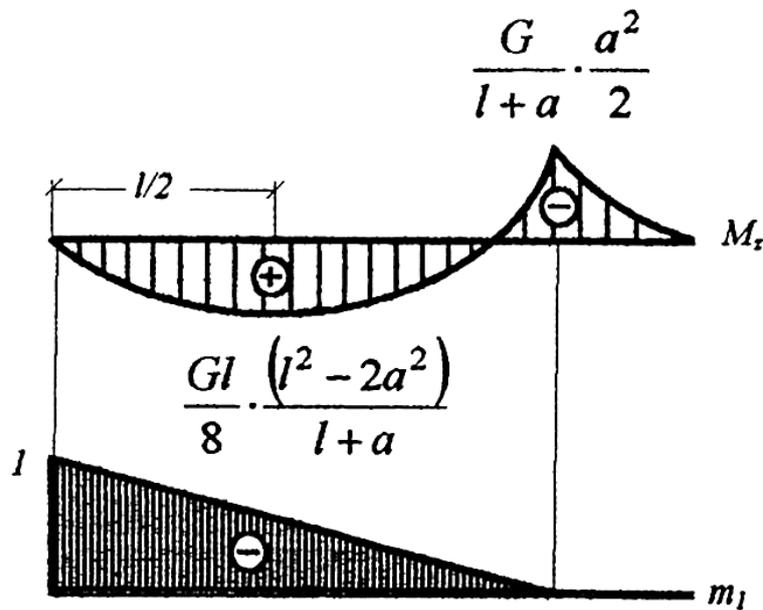


Рис. 6

Тогда угол поворота φ_0 в точке А

$$\varphi_0 = \sum_0^l \frac{M_z m_1}{EI} dx = \frac{l}{6EI} \left(0 - \frac{4Gl}{8} \cdot \frac{(l^2 - 2a^2)}{l+a} \cdot \frac{1}{2} + 0 \right) + 0 > 0,$$

откуда

$$l^2 - 2a^2 < 0 \Rightarrow l^2 < 2a^2 \Rightarrow \frac{l^2}{a^2} < 2 \Rightarrow \frac{l}{a} < \sqrt{2}.$$

PS! Эпюру от данной нагрузки можно также построить.

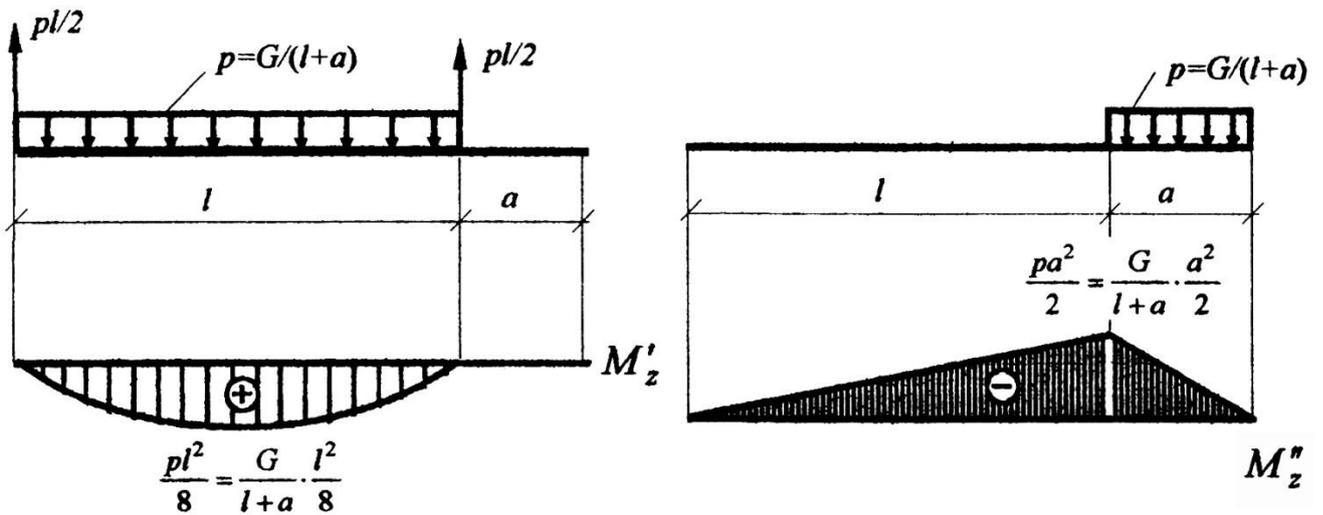


Рис. 7

Тогда $M_z = M'_z + M''_z$ и по формуле Мора имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_0^l \frac{M_z m_1}{EI} dx = \sum_0^l \frac{M'_z m_1}{EI} dx + \sum_0^l \frac{M''_z m_1}{EI} dx = \frac{l}{6EI} \left(0 - \frac{4G}{l+a} \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{2} + 0 \right) + \\ &+ \frac{l}{6EI} \left(0 + \frac{4G}{2(l+a)} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \right) + 0 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{Gl^2}{(l+a) \cdot 4} + \frac{Ga^2}{(l+a) \cdot 2} > 0 \Rightarrow \frac{l}{a} < \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{l}{a} < \sqrt{2}$.

Задача № 3

На платформе, движущейся с сортировочной горки по горизонтальному прямолинейному рельсовому пути, покоится (относительно платформы) груз – однородный цилиндр массой m и радиусом r . Цилиндр находится между двумя вертикальными стенками платформы, с которыми имеет зазоры.

При столкновении с отцепленным вагоном платформа внезапно останавливается, а цилиндр, мгновенно выведенный из состояния покоя, преодолев зазор со стенкой, ударяется о стенку в момент, когда центр масс его имеет скорость V .

Удар происходит без отрыва и проскальзывания (с последующим качением по стенке). Определить угловую скорость цилиндра в конце удара.

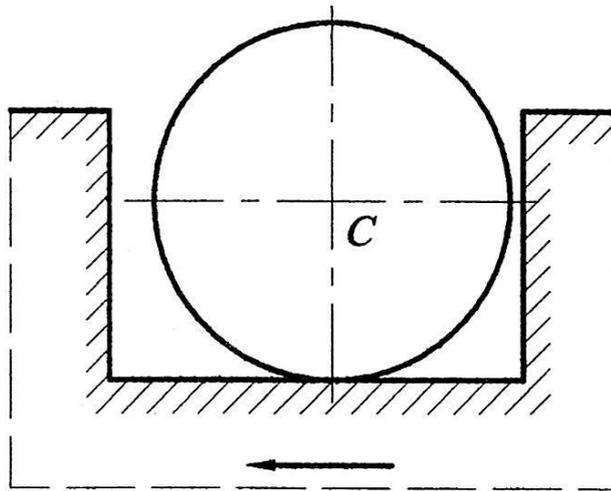


Рис. 8

Решение

Мгновенный центр скоростей цилиндра перемещается за время удара из точки A в точку B . Составим для цилиндра уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов прямую B , совпадающую с образующей цилиндра, которой он касается стенки:

$$L_B - L_B^{(0)} = \sum M_B(\vec{S}_i^E). \quad (1)$$

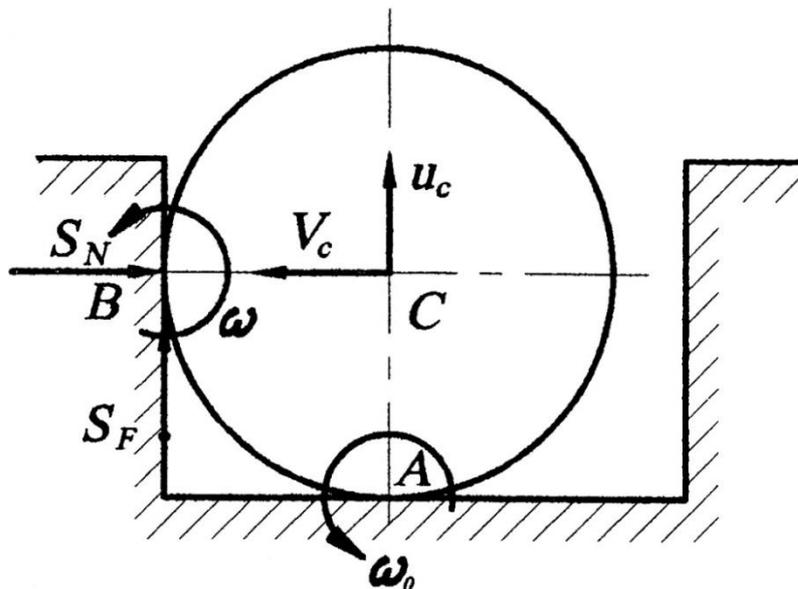


Рис. 9

При таком выборе оси моментов неизвестные составляющие ударного импульса реакции стенки в уравнение не войдут.

Найдем кинетические моменты цилиндра относительно оси B .

Кинетический момент плоской фигуры относительно некоторой оси равен алгебраической сумме момента относительно этой оси главного вектора количества движения, условно приложенного в центре масс, и кинетического момента плоской фигуры во вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс, относительно этой её оси.

Заметим, что при определении знака кинетического момента, как и знака момента внешнего ударного импульса, за положительное направление принимаем направление вращения тела (в начале или в конце удара).

Кинетический момент цилиндра относительно оси B в начале удара:

$$L_B^{(0)} = mV_c d + I_c \omega_0 = I_c \omega_0 = \frac{mr^2 \omega_0}{2},$$

где $V_c = V = \omega_0 r$ – скорость центра масс цилиндра в начале удара, $d=0$ – плечо вектора количества движения цилиндра относительно оси B в начале удара; $I_c = \frac{mr^2 \omega_0}{2}$ – момент инерции цилиндра относительно его главной центральной продольной оси инерции).

Кинетический момент цилиндра относительно оси B в конце удара:

$$L_B = m u_c r + I_c \omega = m \omega r^2 + \frac{mr^2}{2} \omega = \frac{3}{2} mr^2 \omega,$$

где $u_c = \omega r$ – скорость центра масс цилиндра в конце удара.

Сумма моментов внешних ударных импульсов относительно B :

$$\sum M_B(\vec{S}_i^E) = 0.$$

Исходное уравнение(1) имеет вид:

$$\frac{3}{2} mr^2 \omega - \frac{1}{2} mr^2 \omega_0 = 0.$$

Так что искомая угловая скорость $\omega = \frac{\omega_0}{3} = \frac{V}{3r}$.

Ответ: $\omega = \frac{\omega_0}{3} = \frac{V}{3r}$.

Задача № 4

Материальная точка M может двигаться в трубке AB , которой сообщается поступательное движение в вертикальной плоскости при

помощи кривошипов OA и O_1B одинаковой длины r , вращающихся с постоянной угловой скоростью ω . Коэффициент трения скольжения между точкой M и трубкой AB равен f . В начальный момент времени точка M находилась на конце A трубки в состоянии относительного покоя, а трубка и кривошипы располагались горизонтально. Определить перемещение точки M по трубке за время, соответствующее четверти оборота кривошипов, если $f=0,2$ и $\omega = 2\sqrt{\frac{g \cdot f}{r}}$.

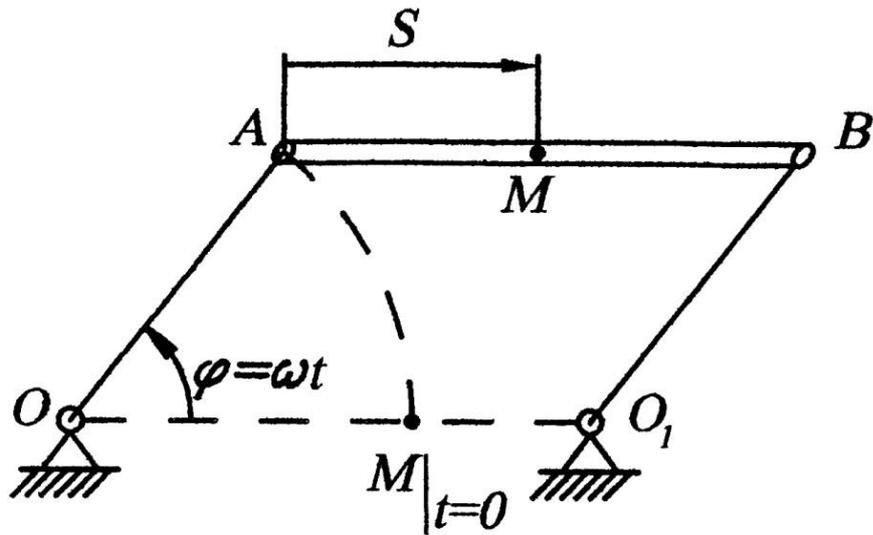


Рис. 10

Решение

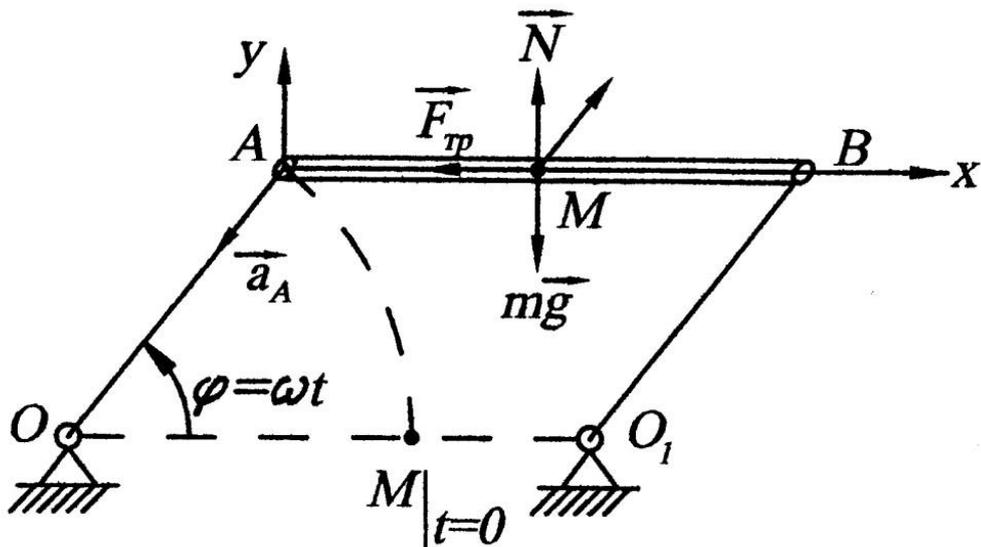


Рис. 11

Переносное ускорение $\vec{a}_e = \vec{a}_A, a_A = \omega^2 \cdot r$.

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e, |\Phi_e| = ma_e = m\omega^2 r, \vec{\Phi}_e = 0 (\omega_e = 0).$$

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{\Phi}_e.$$

В проекции на ось x : $m\ddot{x} = \Phi_e \cdot \cos \omega t - F_{mp}, F_{mp} = N \cdot f$.

В проекции на ось y : $0 = -mg + N + \Phi_e \cdot \sin \omega t, \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = mg - m\omega^2 r \sin \omega t, F_{mp} = f(mg - m\omega^2 r \sin \omega t).$$

Окончательно:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 r \cos \omega t + f m \omega^2 r \sin \omega t - fmg,$$

$$\text{или } \ddot{x} = \omega^2 r \cos \omega t + f \omega^2 r \sin \omega t - fg.$$

Интегрируя, получаем:

$$\dot{x} = \omega r \sin \omega t - f \omega r \cos \omega t + fgt + C_1,$$

$$x = -r \cos \omega t - fr \sin \omega t - \frac{1}{2} fgt^2 + C_1 t + C_2.$$

При $t = 0$: $x = 0, \dot{x} = 0$ и $C_1 = f\omega r, C_2 = r$.

Тогда: $x = -r \cos \omega t - fr \sin \omega t - \frac{1}{2} fgt^2 + f\omega r t + r$.

Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $t = \frac{\pi}{2\omega}, \left(\omega = 2\sqrt{\frac{g \cdot f}{r}} - \text{дано} \right)$ – получим

$$\begin{aligned} x &= -r \cos \frac{\pi}{2} - fr \sin \frac{\pi}{2} - \frac{fgr\pi^2}{2 \cdot 16 \cdot g \cdot f} + fr \frac{\pi}{2} + r = \\ &= r \left(1 - \frac{\pi^2}{32} \right) + fr \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = r \left[\left(1 - \frac{\pi^2}{32} \right) + 0,2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = 0,806r. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 0,806r$.

Задача № 5

На шероховатом горизонтальном столе лежит брусок (см. рис. 12, вид сверху). Какую минимальную горизонтальную силу F , перпендикулярную бруску, нужно приложить, чтобы его сдвинуть? Коэффициент трения равен μ , масса бруска m .

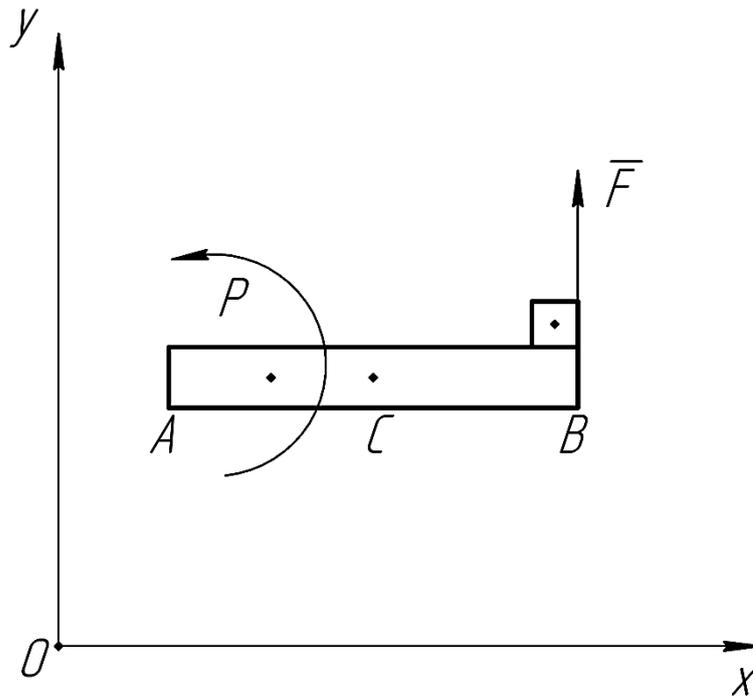


Рис. 12

Решение

Пусть ρ – линейная плотность бруска, а его длина $AB = 2l$, C – его центр масс. Начальное движение бруска, при соблюдении перпендикулярности силы \bar{F} к AB , будет:

1. либо поступательное вдоль силы \bar{F} ,
2. либо мгновенно–вращательное с МСЦ, лежащим где-то на линии AB (точка P на рис. 12).

Ясно, что в случае 1 для трогания бруска необходимо

$$F \geq \mu mg = F_{min}^{(1)}.$$

Посмотрим, что будет в случае 2. Обозначим $PC = z$. Тогда уравнение моментов для точки P с учётом сил трения будет:

$$\sum M_P = F(l+z) - \int_0^{l+z} \mu \rho g x \, dx - \int_0^{l-z} \mu \rho g x \, dx, \quad x \in [0; l],$$

или так:

$$\sum M_P = F(l+z) - \frac{\mu \rho g}{2} [(l-z)^2 + (l+z)^2] = F(l+z) - \mu \rho g (l^2 + z^2).$$

Для трогания необходимо неравенство $\sum M_p \geq 0$, отсюда

$$F \geq F_{min}^{(2)} = \min_{0 \leq x \leq l} \frac{\mu \rho g (l^2 + z^2)}{l + z}.$$

Функция $\frac{(l^2 + z^2)}{(l + z)}$ достигает \min в точке $z = l(\sqrt{2} - 1)$.

Таким образом,

$$F \geq F_{min}^{(2)} = \mu \rho g \cdot 2l \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \mu g m (\sqrt{2} - 1).$$

Ясно, что

$$F_{min}^{(2)} < F_{min}^{(1)}.$$

Так что искомая сила $F_{min} = \mu g m (\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: $F_{min} = \mu g m (\sqrt{2} - 1)$.

Задача № 6

Под действием усилия гидроцилиндра $F_{ГЦ}$ ползун перемещается в направляющих втулках, преодолевая полезное сопротивление $F_{ПС}$.

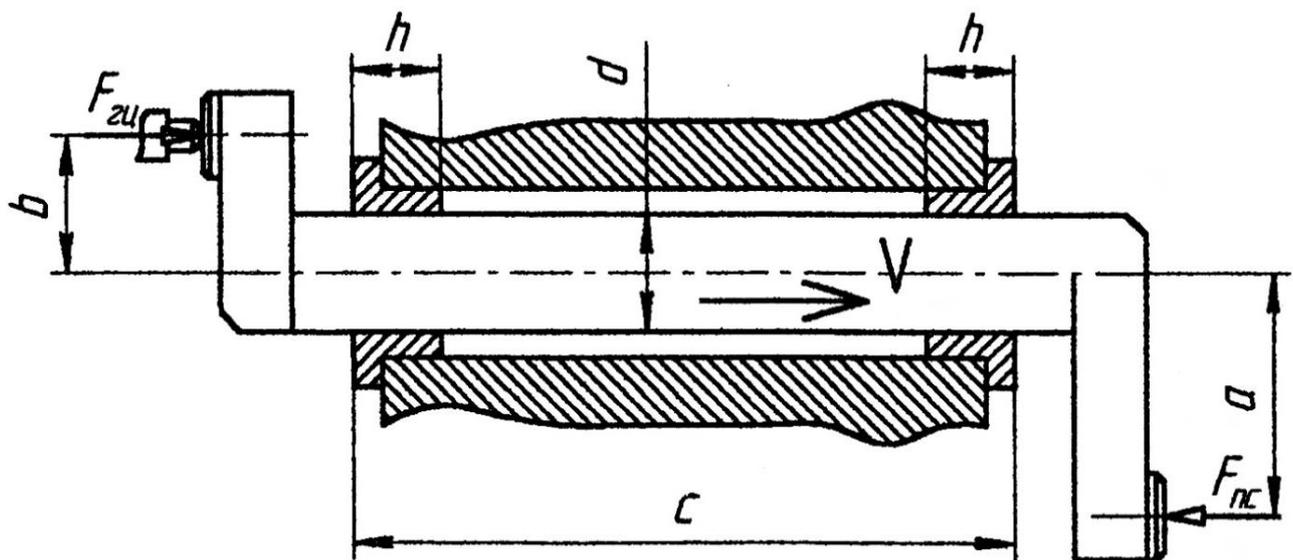


Рис. 13

Определить по критерию износостойкости втулок допустимое значение сил $F_{\text{ГЦ}}$ и $F_{\text{ГЦ}}$, полагая, что допустимое давление $[p] = 8 \text{ МПа}$; $a = 40 \text{ мм}$; $b = 30 \text{ мм}$; $c = 120 \text{ мм}$; $d = 30 \text{ мм}$; $h = 15 \text{ мм}$.

Распределение давления в контакте втулки и ползуна вдоль оси считать равномерным. Коэффициент трения принять равным $f = 0,2$.

Решение

1. Расчетная схема задачи

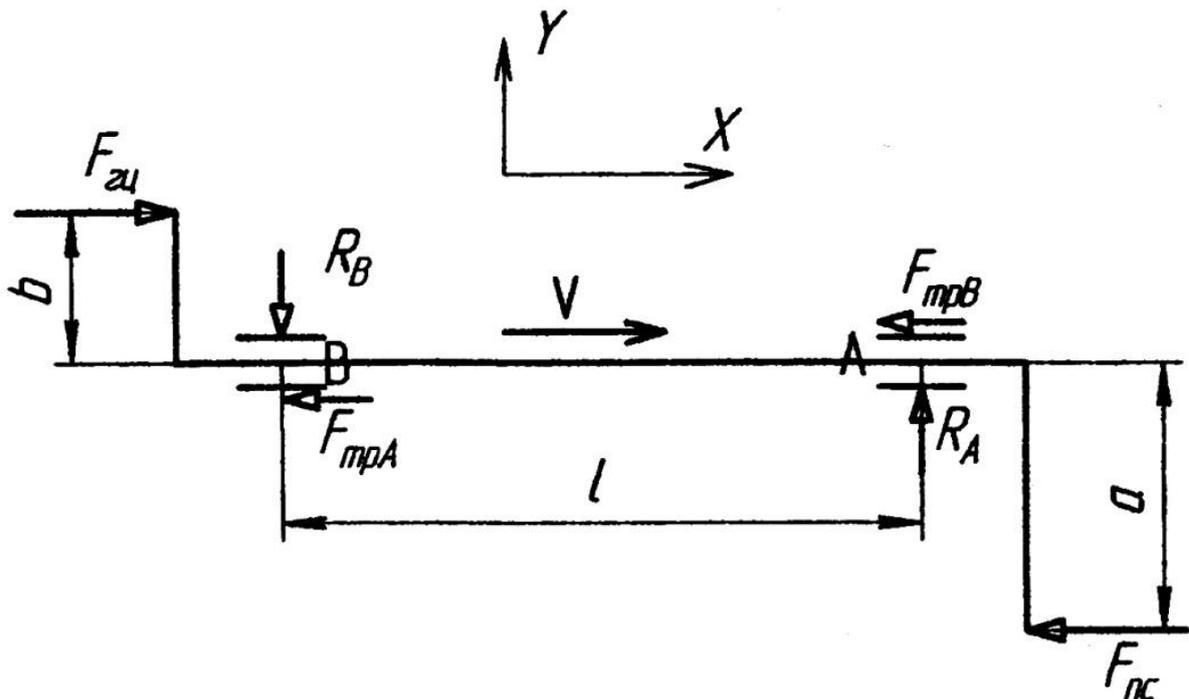


Рис. 14

$$l = c - h = 120 - 15 = 105 \text{ мм.}$$

2. Условия равновесия ползуна:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0; & -R_B + R_A = 0; & R_A = R_B = R; \\ \sum F_x = 0; & F_{\text{ГЦ}} - F_{\text{ГЦ}} - 2Rf = 0; \\ \sum M = 0; & F_{\text{ГЦ}} \cdot a + F_{\text{ГЦ}} \cdot b - R \cdot l = 0. \end{cases} \quad (1)$$

3. Условие износостойкости:

$$p = \frac{R}{dh} \leq [p], \text{ откуда } R = [p]dh.$$

Решая систему (1) с учётом условия износостойкости, получим:

$$F_{\text{ис}} = [p]dh \frac{l - 2bf}{a + b} = 8 \cdot 30 \cdot 15 \frac{105 - 2 \cdot 30 \cdot 0,2}{40 + 30} = 4782 \text{ Н};$$

$$F_{\text{гц}} = F_{\text{ис}} \frac{l + 2af}{l - 2bf} = 4782 \frac{105 + 2 \cdot 40 \cdot 0,2}{105 - 2 \cdot 30 \cdot 0,2} = 6222 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_{\text{ис}} = 4782 \text{ Н}; F_{\text{гц}} = 6222 \text{ Н}.$

Задача № 7

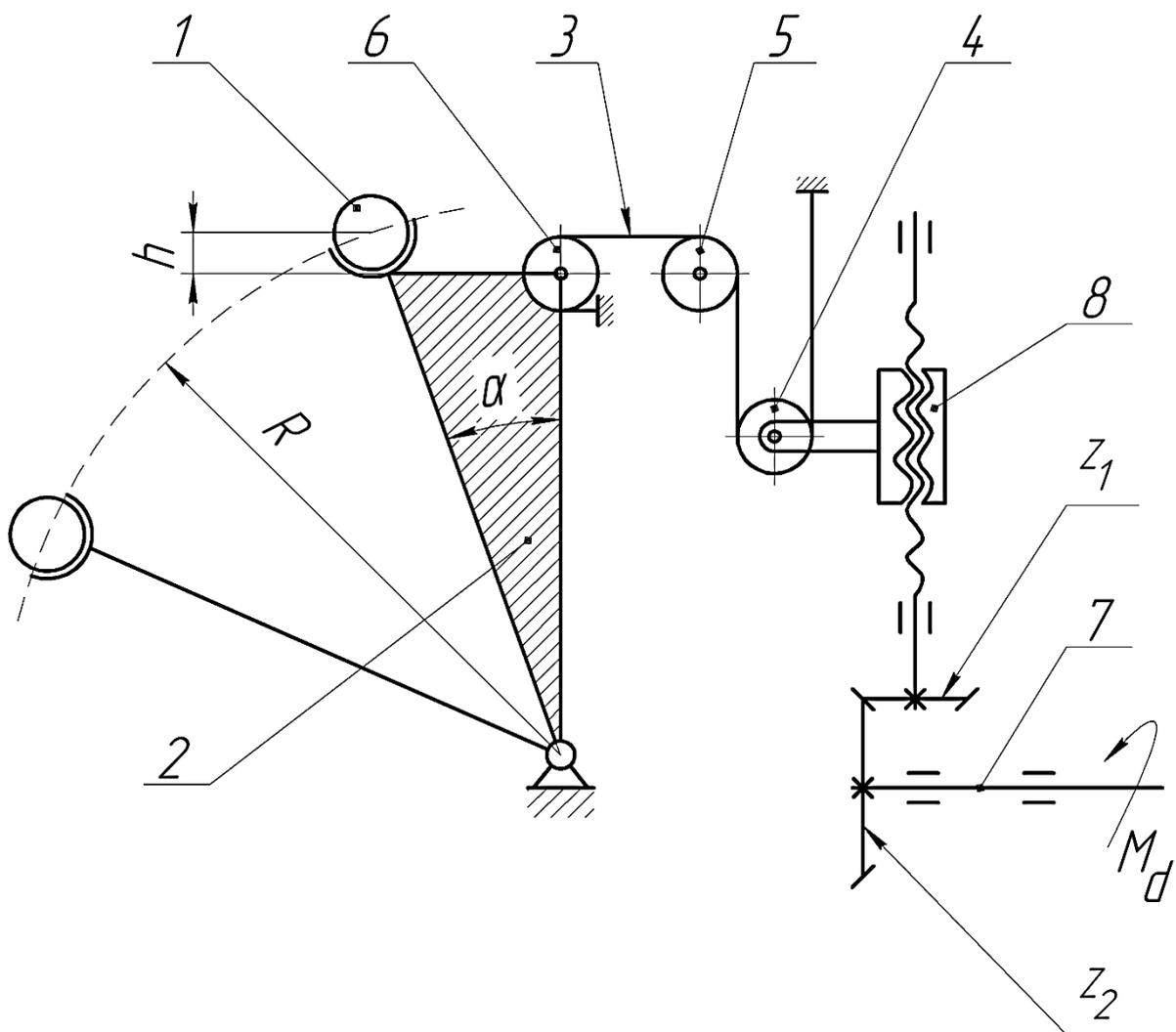


Рис. 15

Груз 1 массой m перемещается из точки A в точку B стрелой 2. Движение стрелы осуществляется гибкой нитью 3, оба конца которой закреплены на стойке. Нить огибает подвижный ролик 4, неподвижный ролик 5 и ролик 6, закреплённый на стреле 2. Движение от ведущего валика 7 через конические зубчатые колёса z_1 и z_2 , передачу винт-гайка 8 передаётся на подвижный ролик 4. Определить движущий момент M_d на ведущем валике 7 при положении груза в точке B . Силы трения учесть только в передаче винт-гайка.

Исходные данные. Масса груза $m=20$ кг. Размеры стрелы – $R=230$ мм, $h=20$ мм, $\alpha=15^\circ$. Параметры передачи винт-гайка – средний диаметр прямоугольной резьбы $d_1=15$ мм, ход резьбы $t=3$ мм, коэффициент трения $f=0,1$.

Конические зубчатые колёса – модуль $m=1,25$ мм; $z_1=64$; $z_2=20$.

Решение

Угол подъёма винтовой линии:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{t}{\pi d_1}\right) = \arctg\left(\frac{3}{\pi \cdot 15}\right) = 3,643^\circ.$$

Угол трения:

$$\rho = \arctg(f) = \arctg(0,1) = 5,711^\circ.$$

КПД механизма:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \rho)} = \frac{\operatorname{tg} 3,643^\circ}{\operatorname{tg}(3,643^\circ + 5,711^\circ)} = 0,387.$$

Длина отрезков:

$$\overline{OC} = R \cos \alpha - h = 230 \cdot \cos 15^\circ - 20 = 202,163 \text{ мм},$$

$$\overline{OM} = R \sin \alpha = 230 \cdot \sin 15^\circ = 59,528 \text{ мм}.$$

Винтовой параметр резьбы:

$$p_x = \frac{t}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} = 0,4775 \text{ мм}.$$

Вариант 1.

Мощность движущих сил и мощность сил сопротивления связаны соотношением

$$N_d = \frac{N_c}{\eta}.$$

Мощность движущих сил:

$$N_d = \omega_1 \cdot M_d.$$

Мощность сил сопротивления:

$$N_c = \omega_6 \cdot M_c.$$

Момент сил сопротивления:

$$M_c = mg \cdot O\bar{M} = 20 \cdot 9,8 \cdot 59,528 = 11667,5 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Подвижные блоки 4 и 6 перемещаются с одной скоростью, с этой же скоростью перемещается гайка:

$$V_F = V_C = \omega_6 \cdot O\bar{C}.$$

Скорость вращения винта 8:

$$\omega_2 = \frac{V_F}{p_x} = \frac{O\bar{C}}{p_x} \omega_6.$$

Скорость вращения вала 7:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{z_2}{z_1} = \frac{O\bar{C}}{p_x} \cdot \frac{z_2}{z_1} \omega_6.$$

Передаточное отношение:

$$i_m = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{O\bar{C}}{p_x} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{202,163}{0,4775} \cdot \frac{64}{20} = 1354,8.$$

Движущий момент:

$$M_d = \frac{M_c}{\eta \cdot i_m} = \frac{11667,5}{0,387 \cdot 1354,8} = 22,25 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Вариант 2.

Обозначим силу натяжения нити – Q . Из условия равновесия сил имеем:

а) на шкиве 6 (рис. 16): $N_c = 2Q = N$;

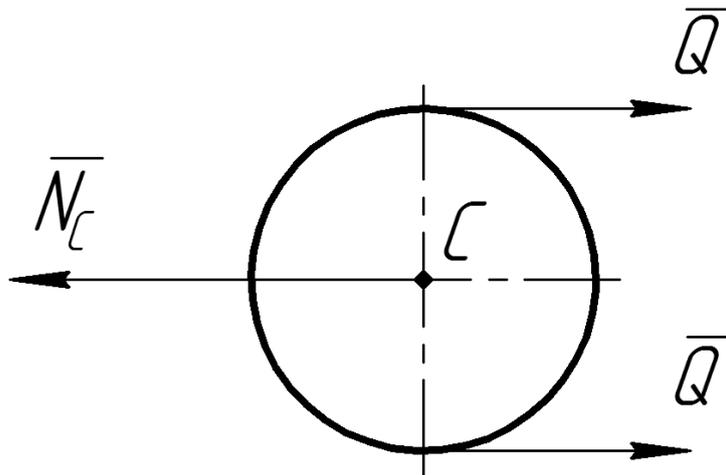


Рис. 16

б) на шкиве 4 (рис. 17): $N_F = 2Q = N$.

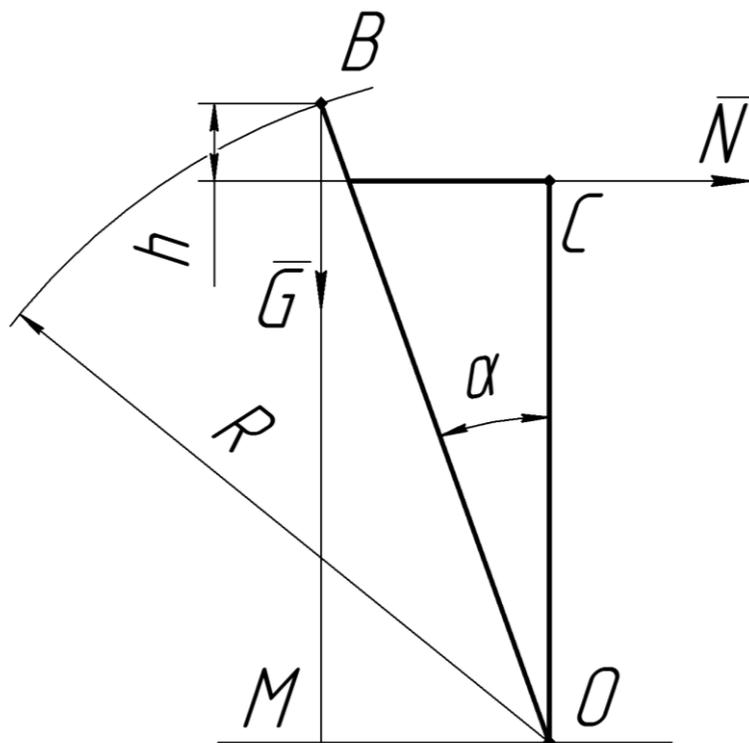


Рис. 17

Из условия равенства нулю суммы моментов сил относительно точки O стрелы 2 (рис. 18) имеем:

$$N = \frac{mg \cdot OM}{OC} = \frac{20 \cdot 9,8 \cdot 59,528}{202,163} = 57,713 \text{ Н.}$$

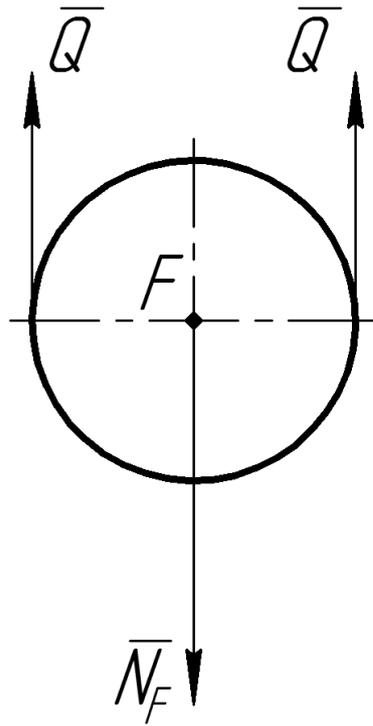


Рис. 18

Осевое усилие в передаче винт-гайка (рис. 19): $Q_0 = N = 57,713 \text{ Н}$.

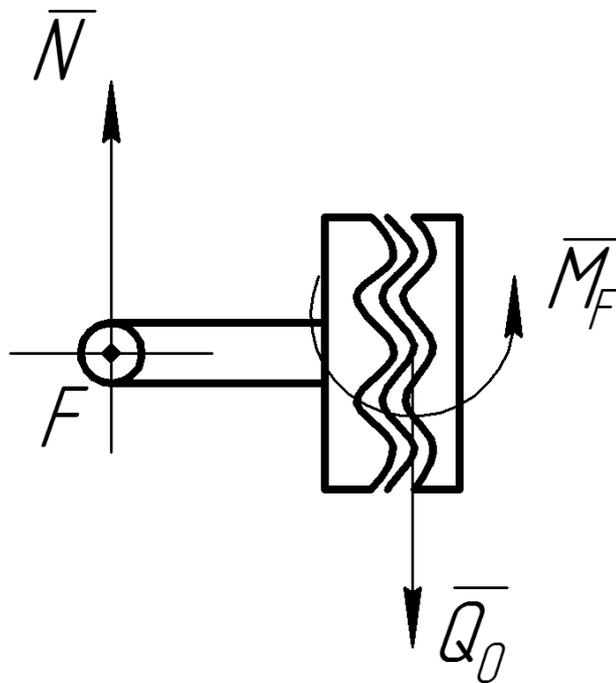


Рис. 19

Окружное усилие винта 2:

$$P_{02} = Q_0 \operatorname{tg}(\gamma + \rho) = 57,713 \cdot \operatorname{tg}(3,643^\circ + 5,711^\circ) = 9,507 \text{ Н.}$$

Крутящий момент винта 8:

$$M_2 = P_{02} \cdot \frac{d_1}{2} = 9,507 \cdot \frac{15}{2} = 71,3 \text{ Н} \cdot \text{мм.}$$

Движущий момент вала 7:

$$M_d = M_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = 71,3 \cdot \frac{20}{64} = 22,28 \text{ Н} \cdot \text{мм.}$$

Ответ: $M_d = 22,28 \text{ Н} \cdot \text{мм.}$

Задача № 8

Укажите замеченные на конструкции ошибки.

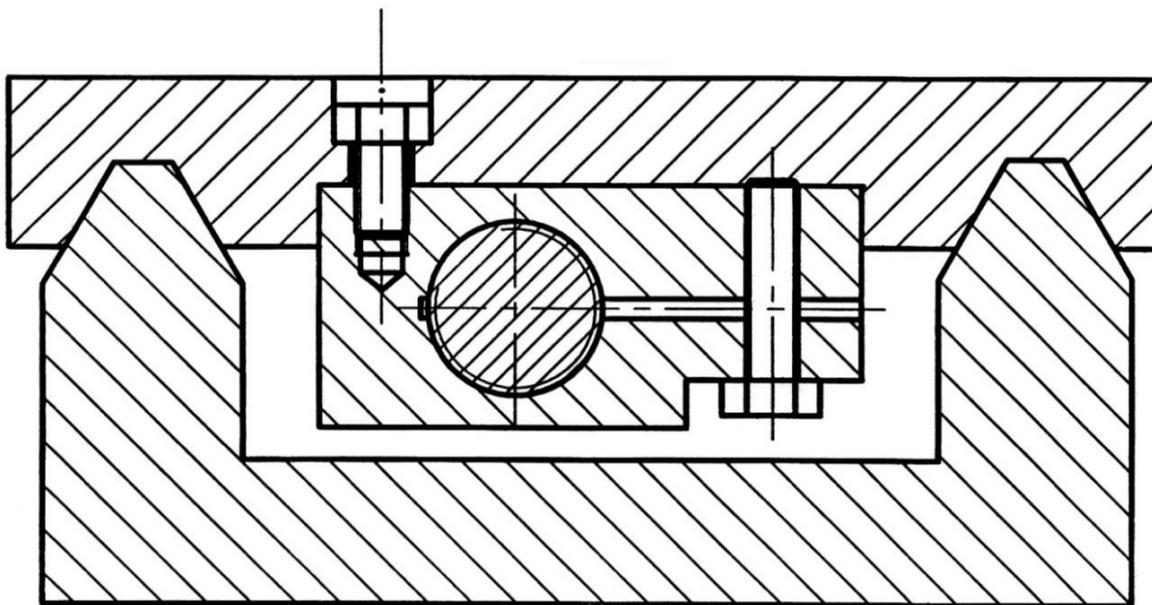


Рис. 20

Решение

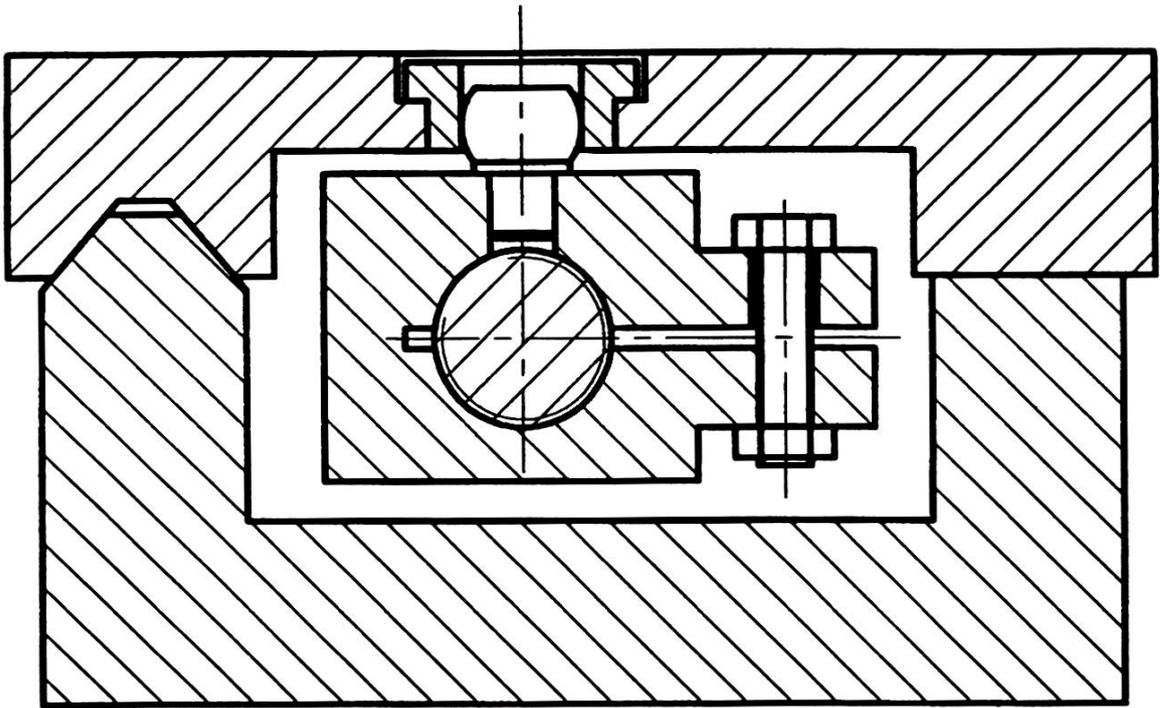


Рис. 21

Задача № 9

Наибольший прогиб балки, возникающий в момент закрытия зазора δ , соответствует силе P . При дальнейшем увеличении силы прогиб удваивается. Во сколько раз при этом возрастает сила P ?

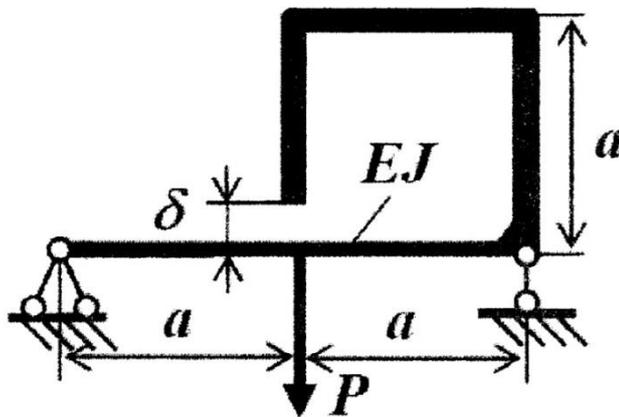


Рис. 22

Решение

1. Определим прогиб для первого состояния системы: зазор δ уменьшается до 0.

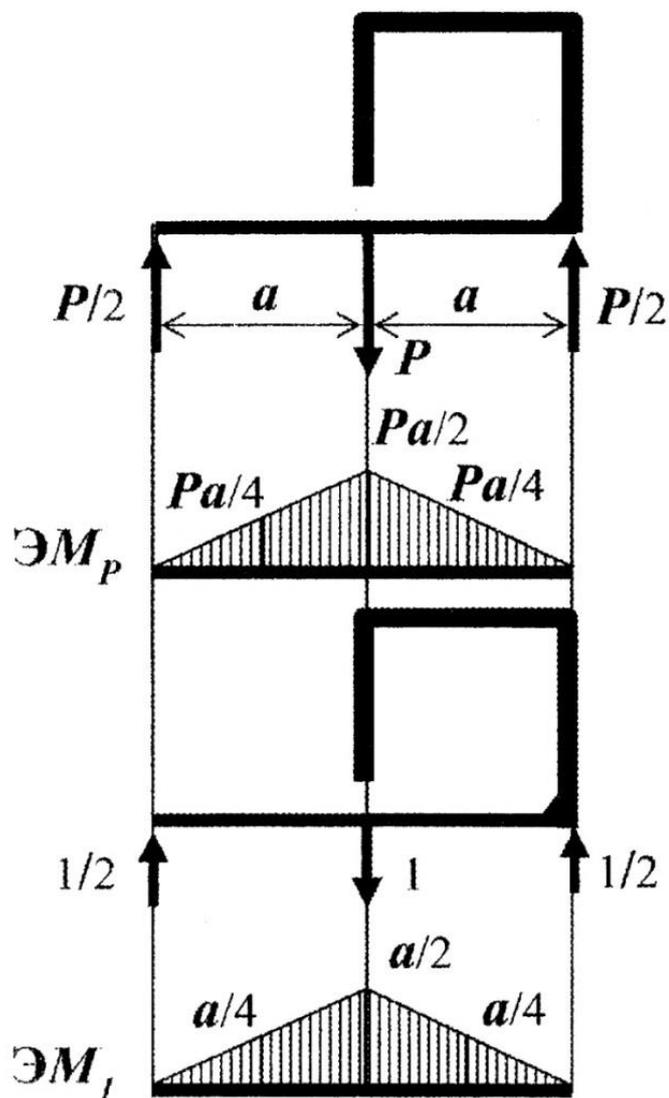


Рис. 23

$$f_{max}^I = (M_1) \times (M_2) = 2 \frac{a}{6EJ} \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{4} + \frac{Pa}{2} \cdot \frac{a}{2} \right] = \frac{Pa^3}{6EJ}.$$

2. Определим прогиб для второго состояния системы: нагрузка увеличивается при $\delta = 0$. Система стала статически неопределимой. Применим метод сил и определим X_1 .

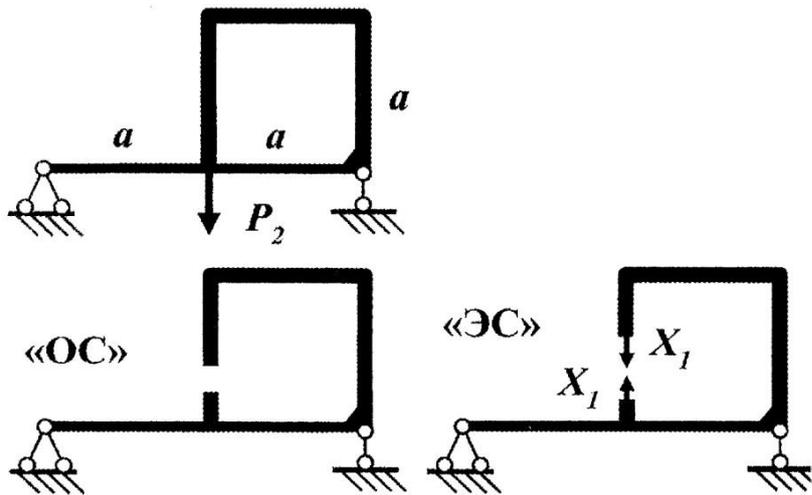


Рис. 24

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

$$\delta_{11} = (M_1^{II}) \times (M_1^{II}) = \frac{a}{6EJ} \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} + a \cdot a \right] = \frac{a^3}{3EJ}.$$

$$\Delta_{1P} = (M_1^{II}) \times (M_P^{II}) = \frac{a}{6EJ} \left[0 \cdot \frac{P_2 a}{2} + 4 \cdot \frac{P_2 a}{4} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + 0 \cdot (-a) \right] = -\frac{P_2 a^3}{12EJ}.$$

$$\frac{a^3}{3EJ} \cdot X_1 - \frac{P_2 a^3}{12EJ} = 0.$$

$$X_1 = \frac{P_2}{4}.$$

Прогиб для состояния системы II:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

$$f_{max}^{II} = (M_{\Sigma}^{II}) \times (M_2^{II}) = \frac{a}{6EJ} \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{P_2 a}{4} \cdot \frac{a}{4} + \frac{P_2 a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right] + \frac{a}{6EJ} \left[\frac{P_2 a}{2} \cdot \frac{a}{2} + 4 \cdot \frac{P_2 a}{8} \cdot \frac{a}{4} + \left(-\frac{P_2 a}{4}\right) \cdot 0 \right] = \frac{7P_2 a^3}{48EJ}.$$

3. По условию задачи перемещение f_{max}^I удваивается, следовательно:

$$f_{max}^I = f_{max}^{II};$$

$$\frac{Pa^3}{6EJ} = \frac{7P_2 a^3}{48EJ};$$

$$P_2 = \frac{8}{7}P.$$

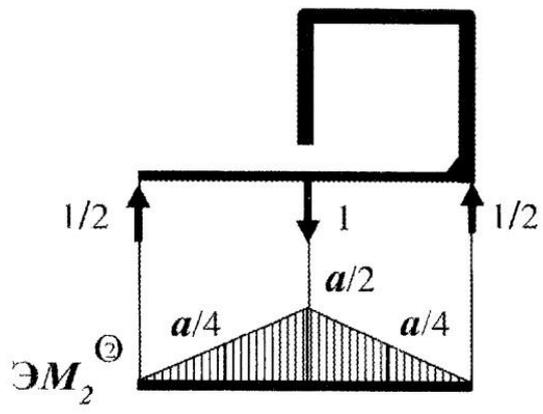
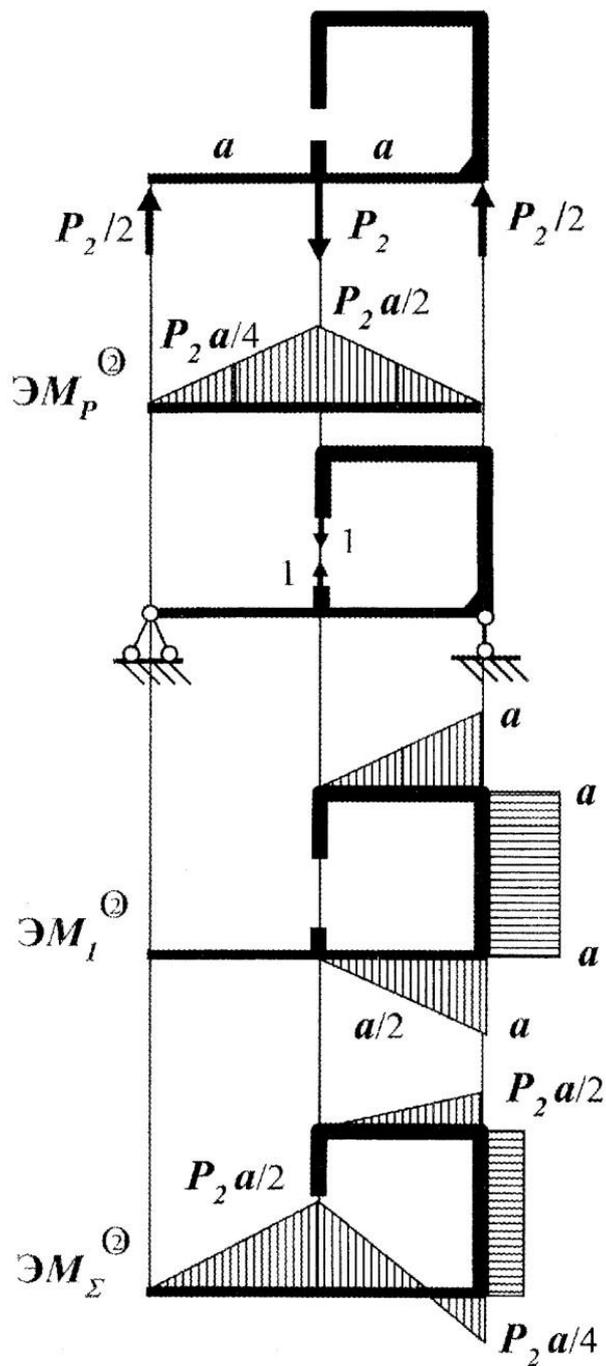


Рис. 25

Значение суммарной силы равно

$$P + P_2 = P + \frac{8}{7}P = \frac{15}{7}P,$$

что в 2,14 раза больше первоначального значения силы P .

Ответ: сила P возрастает в $\frac{15}{7}$ или 2,14 раз.

Задача № 10

В планетарном зубчатом механизме модуль зубчатых колес $m=10$ мм, числа зубьев $z_1=z_3=30$; $z_2=20$. Масса зубчатых колес $m_2=0,5$ кг; $m_3=1$ кг; центральные моменты инерции $J_{B2}=0,01$ кг·м²; $J_{C3}=0,02$ кг·м².

К водилу H прикладывается движущий момент $M_H=1$ Н·м, и механизм начинает двигаться из положения, когда линия AC горизонтальна.

Определить угловое ускорение зубчатого колеса z_2 в начальный момент движения. Массой водила и трением пренебречь.

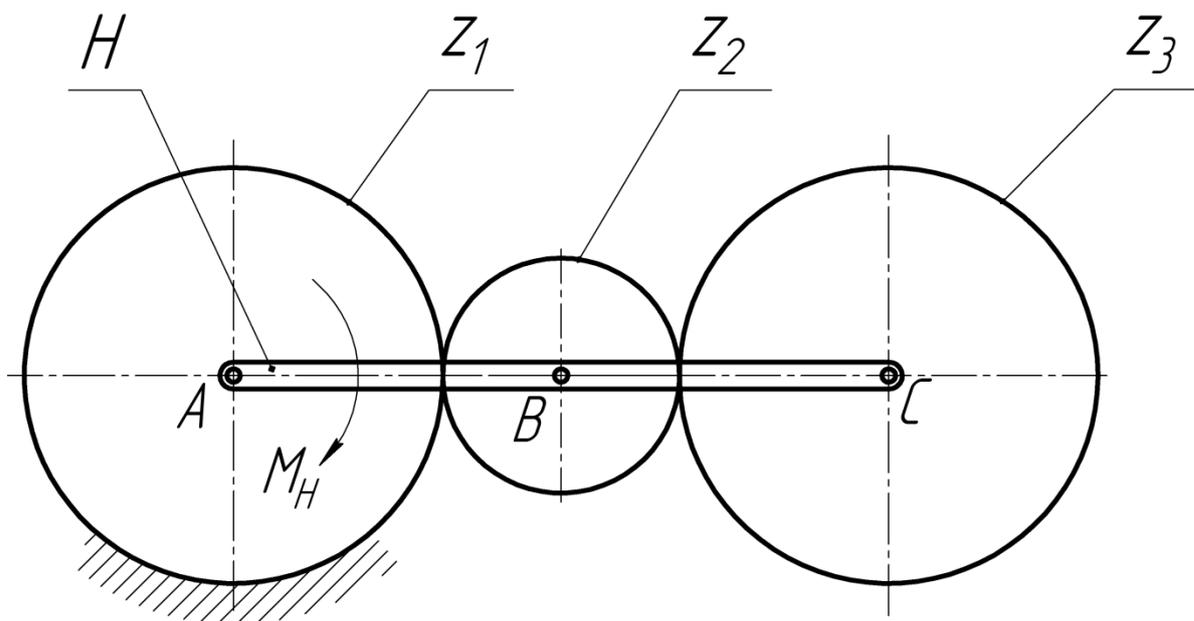


Рис. 26

Решение

Межосевое расстояние

$$a = 0,5 \cdot m \cdot (z_1 + z_2) = 0,5 \cdot 10 \cdot (30 + 20) = 250 \text{ мм.}$$

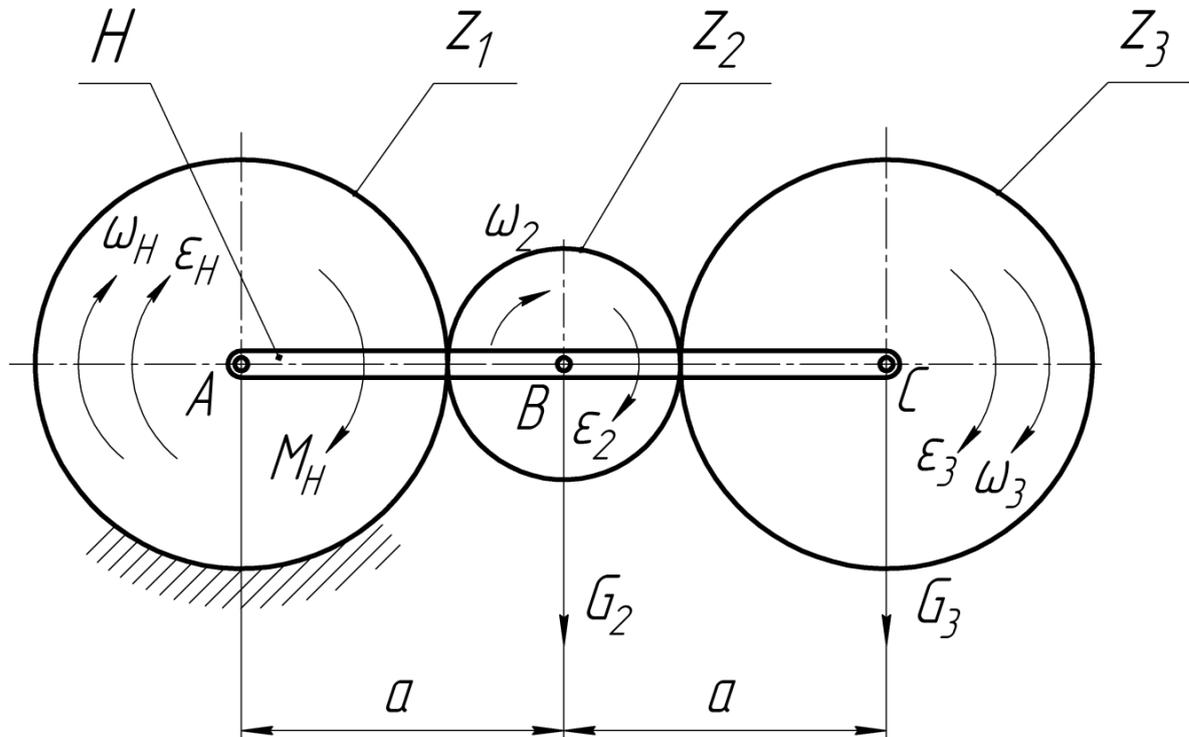


Рис. 27

Соотношение между угловыми скоростями и угловыми ускорениями:

а) водила и зубчатого колеса z2

$$\frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{30}{20} = -1,5; \quad \frac{\omega_2}{\omega_H} = 2,5; \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_H} = 2,5.$$

б) водила и зубчатого колеса z3

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = \left(-\frac{z_1}{z_2}\right) \left(-\frac{z_2}{z_3}\right) = 1; \quad \frac{\omega_3}{\omega_H} = 0; \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_H} = 0.$$

Аналог скорости точек (точки B и C центры масс зубчатых колес принадлежат водилу H, и их скорости перпендикулярны линии AC)

$$\frac{V_B}{\omega_H} = a = 0,25 \text{ м,} \quad \frac{V_C}{\omega_H} = 2a = 0,5 \text{ м.}$$

Приведенный момент инерции механизма

$$\begin{aligned} J_{np} &= m_2 \left(\frac{V_B}{\omega_H}\right)^2 + J_{B2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_H}\right)^2 + m_3 \left(\frac{V_C}{\omega_H}\right)^2 + J_{C3} \left(\frac{\omega_3}{\omega_H}\right)^2 = \\ &= 0,5 \cdot 0,25^2 + 0,01 \cdot 2,5^2 + 1 \cdot 0,5^2 + 0,02 \cdot 0 = 0,34375 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

В механизме, кроме крутящего момента M_H , действуют силы тяжести зубчатых колес $G_2 = gm_2 = 5H$ и $G_3 = gm_3 = 10H$.

Приведенный момент сил

$$M_{np} = M_H \left(\frac{\omega_H}{\omega_H} \right) + G_2 \left(\frac{V_B}{\omega_H} \right) + G_3 \left(\frac{V_C}{\omega_H} \right) = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,5 = 7,25 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Уравнение движения механизма

$$J_{np} \varepsilon_H + \frac{\omega_H^2}{2} \cdot \frac{\partial J_{np}}{\partial \varphi_H} = M_{np}.$$

В исследуемом механизме $\frac{\partial J_{np}}{\partial \varphi_H} = 0$, и при $t = 0$, $\omega_H = 0$,

поэтому угловое ускорение водила

$$\varepsilon_H = \frac{M_{np}}{J_{np}} = \frac{7,25}{0,344} = 21 \text{ с}^{-2}.$$

Угловое ускорение зубчатого колеса z_2

$$\varepsilon_2 = 2,5 \cdot \varepsilon_H = 2,5 \cdot 21 = 52,5 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $\varepsilon_2 = 52,5 \text{ с}^{-2}$.

Задача № 11

На конце балки постоянной жесткости EI приложен момент M . При каком значении жесткости пружины k изгибающий момент в заделке будет равен нулю? Построить эпюры M и Q . Дано L , a и M .

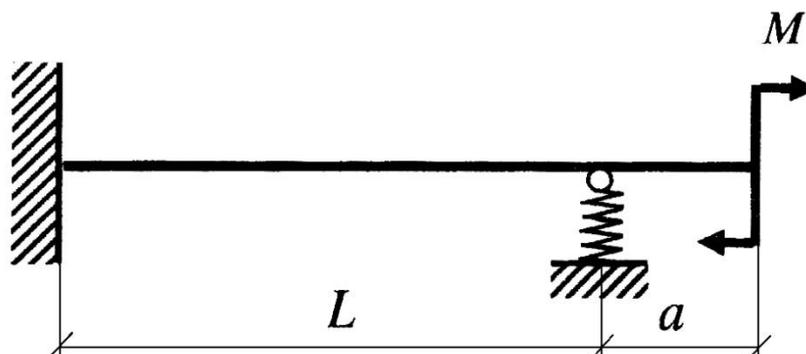


Рис. 28

Решение

Данная система является статически неопределимой. Основную систему выберем в общем виде

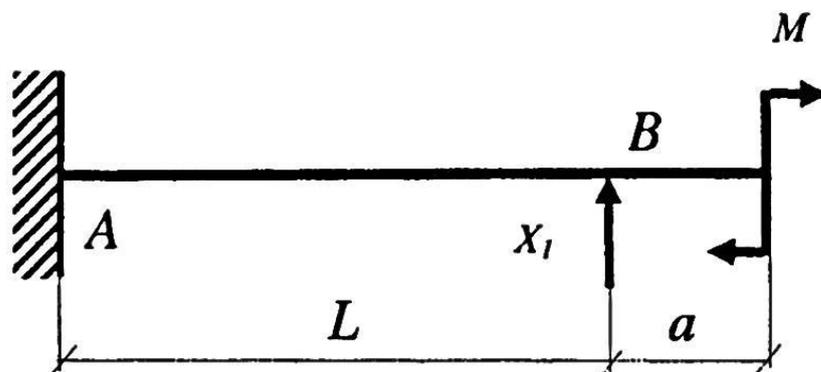


Рис. 29

где X_1 – неизвестная реакция упругой опоры.

Составим уравнения равновесия

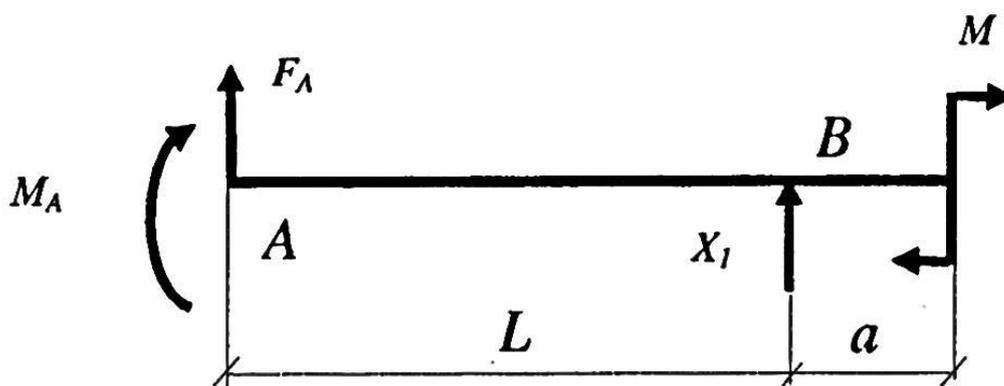


Рис. 30

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_A + X_1 = 0,$$
$$\sum M_A = 0; \quad -M + X_1 \cdot L - M_A = 0.$$

Так как $M_A = 0$, то $-M + X_1 \cdot L = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{M}{L}$ и $F_A = -X_1 = -\frac{M}{L}$.

I способ

Используем уравнение совместности деформаций для основной системы

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = y_B.$$

а) Грузовая эпюра

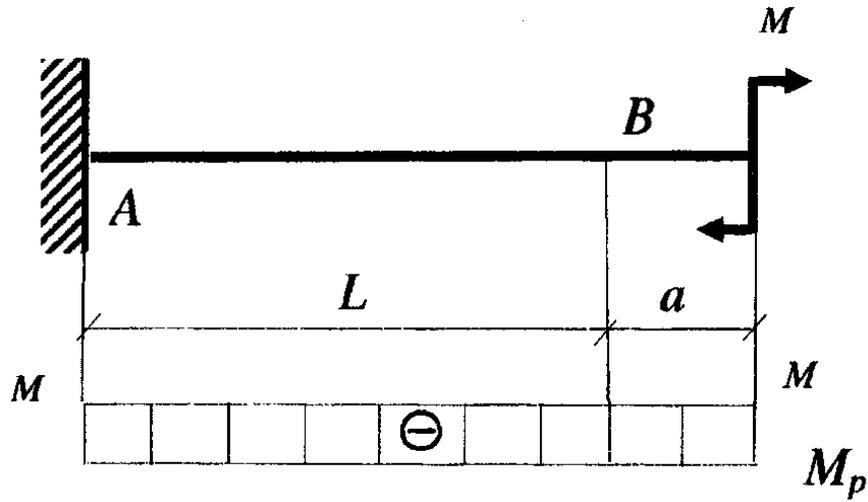


Рис. 31

б) Единичная эпюра

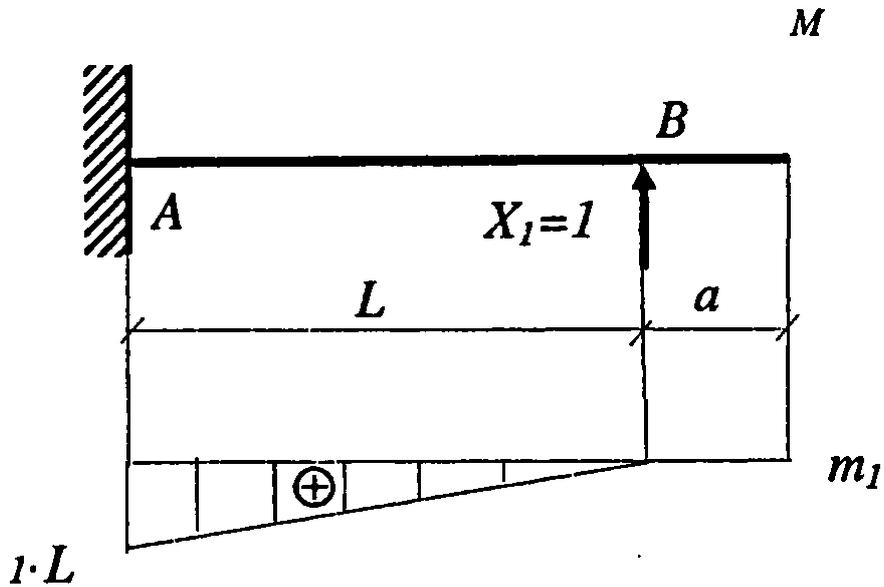


Рис. 32

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_1 m_1}{EI} dx = \frac{L}{6EI} \left[L^2 + 4 \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 + 0 \right] = \frac{L^3}{6EI},$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int_0^l \frac{m_1 M_p}{EI} dx = -\frac{L}{6EI} \left[L \cdot M + 4 \cdot M \cdot \frac{L}{2} + 0 \right] + 0 = -\frac{ML^2}{2EI}.$$

Тогда $\frac{L^3}{3EI} X_1 - \frac{ML^2}{2EI} = y_B$, учитывая $X_1 = \frac{M}{L}$, имеем

$$\frac{L^3}{3EI} \frac{M}{L} - \frac{ML^2}{2EI} = y_B \Rightarrow y_B = -\frac{ML^2}{6EI}.$$

Сила упругости пружины на сжатие

$$X_1 = -ky_B, \text{ откуда } k = -\frac{X_1}{y_B} = \frac{M6EI}{LML^2} = \frac{6EI}{L^3}. \quad \text{Т.е. } k = \frac{6EI}{L^3}.$$

Эпюры внутренних сил:

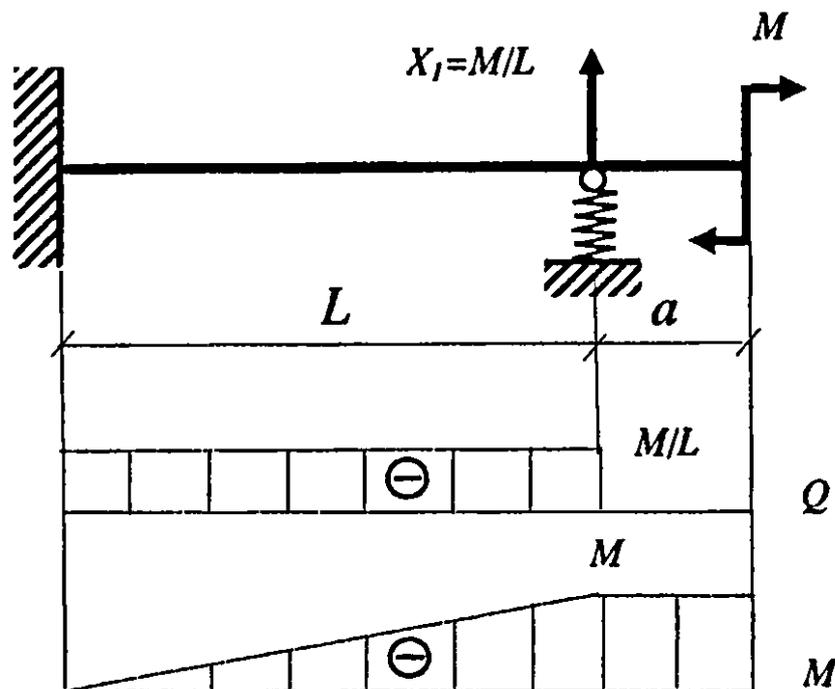


Рис. 33

Ответ: $k = \frac{6EI}{L^3}.$

II способ

Согласно универсальному уравнению

$$EIy(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{\sum M(x-a)^2}{2!} + \frac{\sum F(x-b)^3}{3!} + \frac{p(x-c)^4}{4!},$$

перемещение y_B на упругой опоре

$$EIy(L) = EIy_B = 0 + 0 + 0 + \frac{F_A(L-0)^3}{6} = -\frac{ML^2}{6}.$$

Или перемещение y_B можно найти с помощью формулы Мора. Эпюры от единичной силы и заданной нагрузки имеют вид

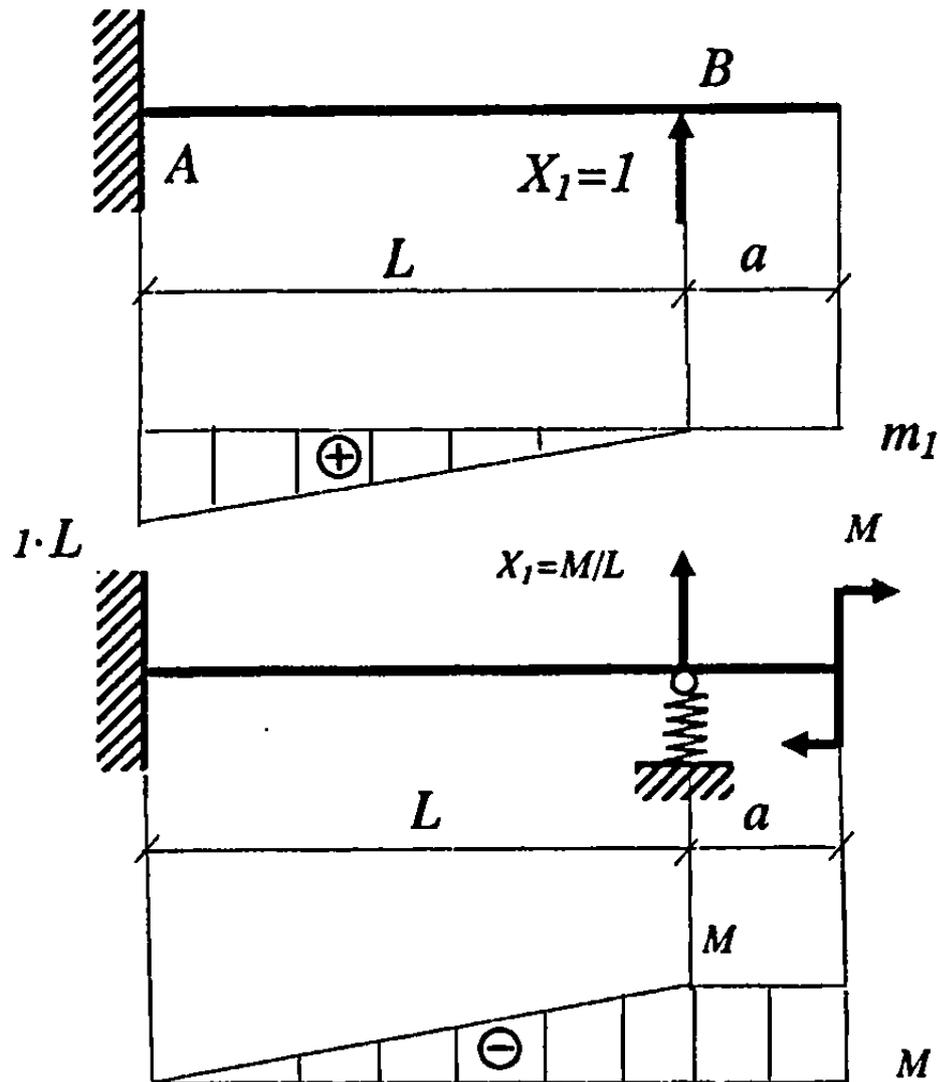


Рис. 34

Откуда

$$y_B = \sum \int_0^l \frac{m_1 M}{EI} dx = -\frac{L}{6EI} \left(0 + 4 \cdot \frac{M}{L} \cdot \frac{L}{2} + 0 \right) + 0 = -\frac{ML^2}{6EI}.$$

Сила упругости пружины на сжатие

$$X_1 = -ky_B, \text{ откуда } k = -\frac{X_1}{y_B} = \frac{M6EI}{LML^2} = \frac{6EI}{L^3}. \quad \text{Т. е. } k = \frac{6EI}{L^3}.$$

Ответ: $k = \frac{6EI}{L^3}$.

Задача № 12

Однородный шар массой m и радиуса r начинает скатываться без начальной скорости с вершины полусферы радиусом R . При каком угле α_0 между вертикалью и прямой, соединяющей центры тяжести полусферы и шара, начнется проскальзывание, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0,1$?

Примечание: задачу решить без учета проскальзывания и с его учетом.

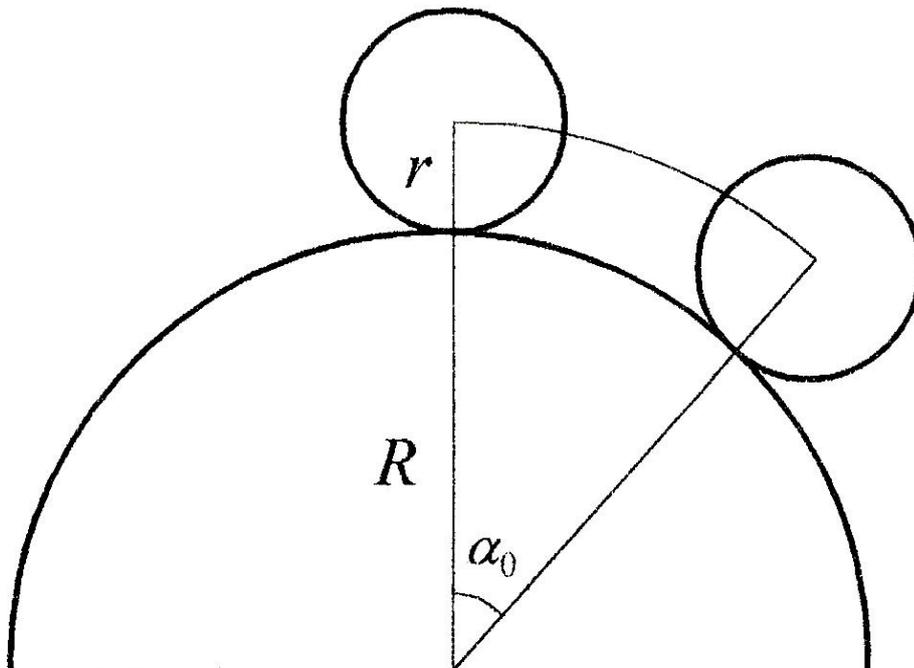


Рис. 35

Решение

1. Решение без учета проскальзывания

В большинстве сборников, где рассматривается задача о скатывании шара с поверхности сферы, вводится необоснованное предположение об отсутствии проскальзывания вплоть до самого отрыва шара. Обычно ставится вопрос: найти скорость шара в момент отрыва. Ниже приводится стандартное решение такой задачи.

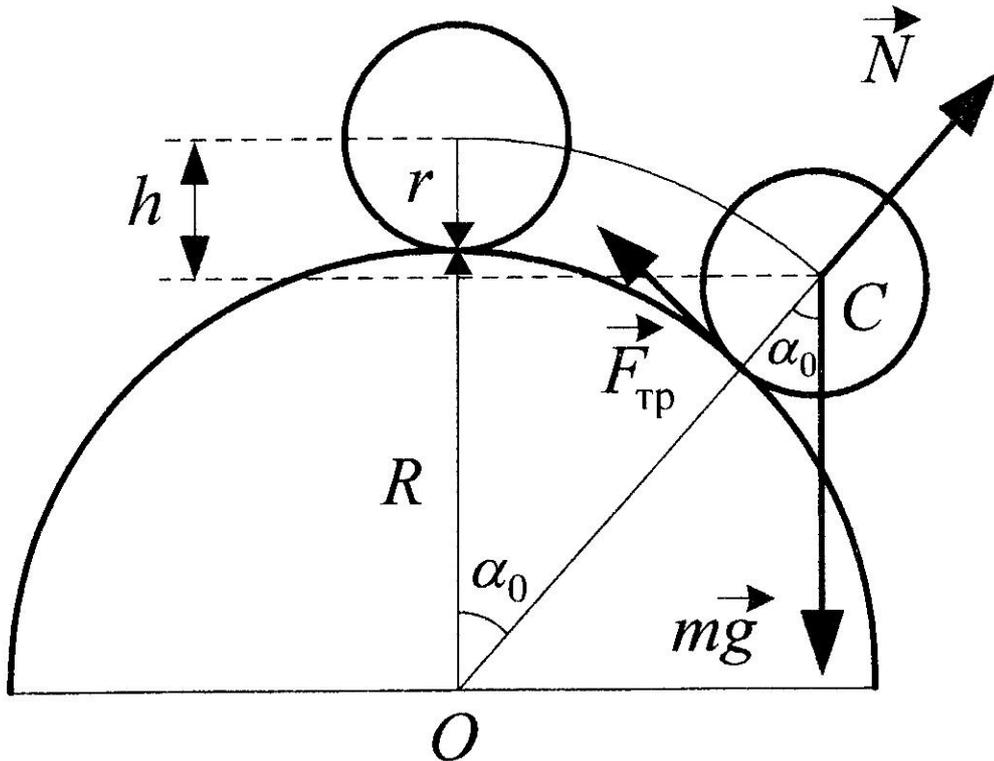


Рис. 36

В процессе скатывания с полусферы на шар действуют три силы: тяжести, реакции опоры и сила трения, причем в самый момент отрыва реакция опоры обращается в нуль.

Поскольку при скатывании центр масс шара движется по окружности радиусом $(r + R)$, его ускорение содержит центростремительную составляющую, и уравнение его движения в проекции на радиальное направление OC в момент отрыва будет иметь вид:

$$\frac{mv^2}{R + r} = mg \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\left(I_0 = \frac{2}{5} mr^2 - \text{момент инерции шара} \right)$$

где v – скорость центра шара в момент отрыва, α – угол между вертикалью и радиальным направлением в момент отрыва.

Скорость v находят из закона сохранения энергии (сила трения покоя, действующая на шар при его скатывании без проскальзывания, работы не совершает):

$$mgh = 0,7mv^2. \quad (2)$$

Здесь h – разница между начальной высотой центра масс шара и его высотой в момент отрыва.

Как видно из рис. 36,

$$h = (R + r)(1 - \cos\alpha). \quad (3)$$

Из уравнений (1) – (3) получаем:

$$v = \sqrt{\frac{10(R + r)g}{17}}.$$

Из этих же уравнений следует, что отрыв произойдет при

$$\alpha = \arccos \frac{10}{17} = 54^\circ$$

2. Решение с учетом проскальзывания

Отметим, что предположение об отсутствии проскальзывания вплоть до самого момента отрыва неверно. В самом деле, отсутствие проскальзывания обеспечивает сила трения сцепления, значение которой не может превышать μN (N – реакция опоры). При приближении к точке отрыва N стремится к нулю, а значение $F_{\text{тр}}$, необходимое для обеспечения качения без проскальзывания, наоборот, возрастает, так как возрастает угловое ускорение. Чтобы найти угол α_0 , при котором начнется проскальзывание, запишем уравнения движения в проекциях на радиальное и касательное направления и уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс шара:

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R + r}; \quad (4)$$

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma_{\tau}; \quad (5)$$

$$F_{\text{тр}} r = \frac{2}{5} m r^2 \varepsilon; \quad (6)$$

(a_{τ} – тангенциальное ускорение, ε – угловое ускорение), причем при отсутствии проскальзывания

$$a_{\tau} = \varepsilon r. \quad (7)$$

Закон сохранения энергии по-прежнему описывается уравнениями (2) и (3).

Из этой системы уравнений определим $F_{\text{тр}}$ и N как функции угла α при скатывании шара:

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} m g \sin \alpha; \quad (8)$$

$$N = \frac{1}{7} m g (17 \cos \alpha - 10). \quad (9)$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} < \mu N$, получаем уравнение для определения α_0 :

$$\frac{2}{7} \sin \alpha_0 = \frac{1}{7} \mu (17 \cos \alpha_0 - 10).$$

Можно решить это уравнение, вводя переменную

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Получаем для x квадратное уравнение:

$$27\mu x^2 + 4x - 7\mu = 0.$$

При $\mu = 0,1$ положительное решение этого уравнения $x = 0,158$; $\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} x \approx 18^\circ$. Этот угол значительно меньше того значения угла отрыва $\left(\alpha_0 = \arccos \frac{10}{17} = 54^\circ \right)$, которое было найдено в предположении об отсутствии проскальзывания вплоть до момента отрыва.

Ответ: $\alpha_0 \approx 18^\circ$.

Задача № 13

Сравнить опасность усталостного разрушения с опасностью возникновения пластических деформаций при знакопеременном нагружении стержня шатуна двигателя, если в момент вспышки в головке цилиндра вдоль оси шатуна диаметром $\varnothing 60$ мм действует сжимающая сила $P_{\min} = -52 \cdot 10^4$ Н, в момент начала впрыска топливной смеси – растягивающая сила $P_{\min} = 12 \cdot 10^4$ Н. Нормальный лабораторный образец, изготовленный из того же материала с пределом текучести $\sigma_T = 500$ МПа, что и стержень шатуна двигателя, имеет предел выносливости $\sigma_{-1} = 290$ МПа.

Справочные данные к задаче: масштабный (коэффициент) фактор при $\varnothing 60$ мм равен 1,33.

Решение

Для циклов, сильно отличающихся от симметричного, найдем коэффициент приведения асимметричного цикла к равноопасному симметричному циклу при $\sigma_0 = \sigma_T$

$$\varphi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{2 \cdot 290 - 500}{500} = 0,16.$$

Максимальное и минимальное напряжения в стержне шатуна двигателя равны:

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} = \frac{12 \cdot 10^4 \cdot 4}{\pi \cdot 0,06^2} = 42,46 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 42,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F} = \frac{-52 \cdot 10^4 \cdot 4}{\pi \cdot 0,06^2} = -184,10 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -184 \text{ МПа}.$$

Среднее напряжение и амплитуда цикла:

$$\sigma'_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{42,5 + (-184)}{2} = -70,75 \text{ МПа},$$

$$\sigma'_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{42,5 - (-184)}{2} = 113,25 \text{ МПа}.$$

Тогда коэффициент запаса прочности k_σ , с учетом только масштабного коэффициента (фактора)

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{1,33 \cdot \sigma'_a + \varphi_\sigma \cdot |\sigma'_{cp}|} = \frac{290}{1,33 \cdot 113,25 + 0,16 \cdot |-70,75|} = \frac{290}{162} = 1,79 \approx \approx 1,8.$$

Статический коэффициент запаса по пределу текучести

$$k'_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma'_{cp} + \sigma'_a} = \frac{500}{113,25 + |-70,75|} = \frac{500}{184} = 2,7.$$

Отнесем k'_σ к k_σ , получим

$$\frac{k'_\sigma}{k_\sigma} = \frac{2,7}{1,8} = 1,5.$$

Таким образом, опасность усталостного разрушения больше, чем опасность возникновения пластических деформаций.

Задача № 14

а) Эскиз подшипникового узла

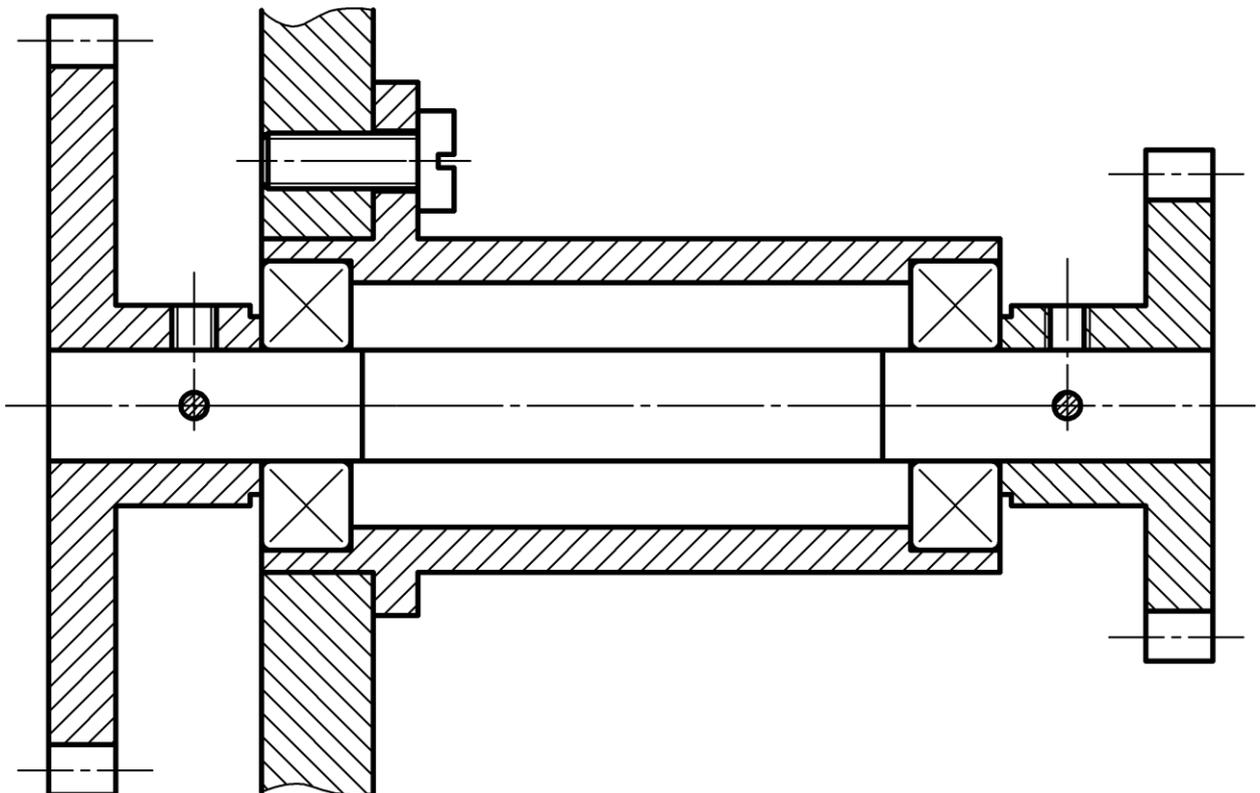


Рис. 37

б) Укажите ошибки, замеченные на рабочем чертеже втулки (рис. 38)

Задача № 15

Длинная тяжелая и гибкая веревка с массой ρ на единицу длины натянута с постоянной силой F . Внезапное движение формирует круглую петлю на одном конце веревки, и петля бежит со скоростью c .

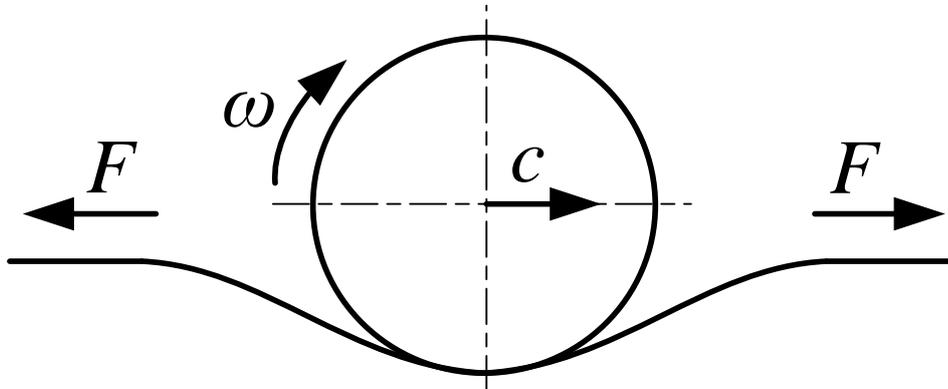


Рис. 40

Требуется:

- Вычислить скорость петли c .
- Определить энергию петли, если угловая частота вращения равна ω .

Решение

а) Исследуем движение петли в системе отсчета, которая перемещается с петлей со скоростью c . В этой системе участки круглой петли радиусом R равномерно вращаются. Часть веревки, которая стягивает центральный угол $\Delta\alpha$ и обладает массой $\rho R\Delta\alpha$, имеет центростремительное ускорение c^2/R , которое обеспечивается силой натяжения веревки.

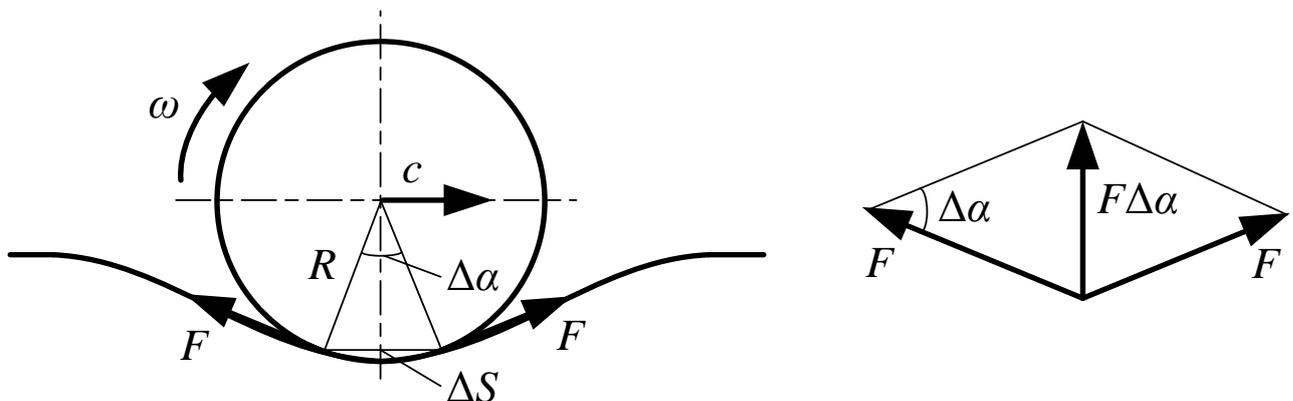


Рис. 41

Второй закон Ньютона дает

$$F\Delta\alpha = \rho R\Delta\alpha \frac{c^2}{R}.$$

Откуда

$$F = \rho c^2, \Rightarrow c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}.$$

Таким образом, «петля–волна» перемещается со скоростью $c = \sqrt{F/\rho}$.

б) Угловая скорость ω катящейся петли радиусом R равна $\omega = c/R$, а петля имеет массу $m = 2\pi R\rho$. Энергия, которую несет петля, можно записать в виде

$$E = E_g + E_h = \frac{1}{2}(2\pi R\rho)(c^2 + R^2\omega^2).$$

Ответ: скорость петли $c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$, энергия петли $E = \frac{1}{2}(2\pi R\rho)(c^2 + R^2\omega^2)$.

Задача № 16

Пластина, согнутая посередине под прямым углом, помещена на горизонтальный неподвижный цилиндр радиусом R . Каким должен быть минимально возможный коэффициент трения покоя между цилиндром и пластиной, чтобы пластина не соскользнула с цилиндра?

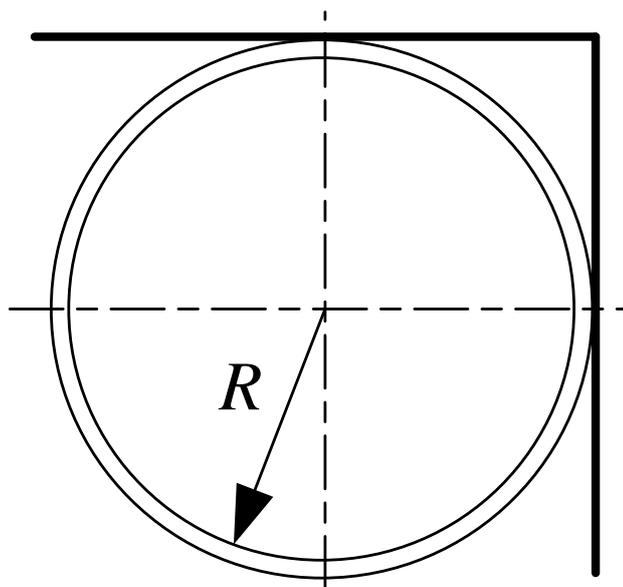


Рис. 42

Решение

Пусть $2m$ – масса пластины, N_1 , N_2 и F_1 , F_2 – нормальные силы реакции и силы трения соответственно. Уравнения равновесия для горизонтальных и вертикальных сил запишем в виде

$$N_1 + F_2 = 2mg, \quad F_1 = N_2.$$

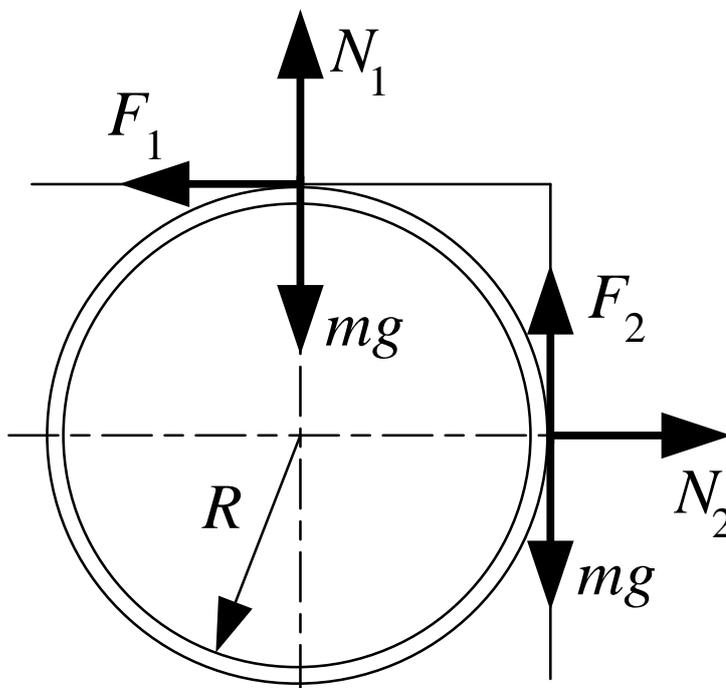


Рис. 43

Равновесие моментов относительно вершины угла пластины дает

$$(mg + N_2)R = N_1R,$$

или

$$N_1 = mg + N_2.$$

Силы трения подчиняются неравенствам:

$$F_1 \leq \mu N_1, \quad F_2 \leq \mu N_2.$$

Отсюда можно получить следующие три соотношения:

$$F_2 = mg - F_1,$$

$$F_2 \leq \mu F_1,$$

$$F_1 \leq \mu N_1 = \mu(mg + N_2) = \mu mg + \mu F_1, \text{ или } F_1 \leq \frac{\mu mg}{1 - \mu}.$$

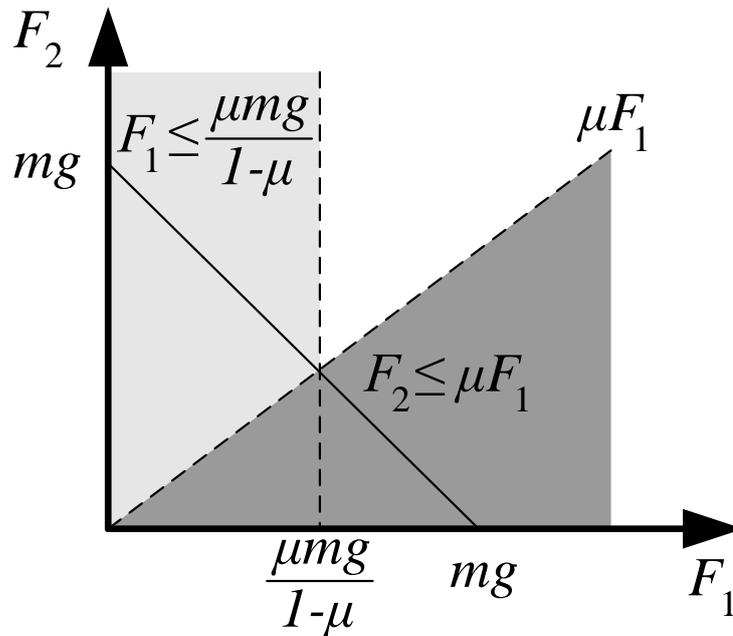


Рис. 44

Эти соотношения можно изобразить графически в системе координат F_1 , F_2 . Минимально возможное значение коэффициента трения соответствует тройному пересечению границ неравенств для F_1 и F_2 и равенства $F_2 = mg - F_1$. В этом случае вместо неравенств мы можем использовать равенства и после некоторых вычислений найдем минимальное значение коэффициента трения покоя:

$$\begin{array}{l|l} F_2 + F_1 = mg, & \mu F_1 + F_1 = mg, \\ F_2 = \mu F_1, & F_1(1 + \mu) = mg, \end{array}$$

$$F_1 = \frac{\mu mg}{1 - \mu} \Leftrightarrow F_1 = \frac{mg}{1 + \mu},$$

$$\frac{\mu}{1 - \mu} = \frac{1}{1 + \mu},$$

$$\mu^2 + 2\mu - 1 = 0,$$

$$\mu_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 + \sqrt{2},$$

$$\mu > 0 \Rightarrow \mu = -1 + \sqrt{2} \approx 0,414.$$

Ответ: минимальное значение коэффициента трения покоя $\mu \approx 0,414$.

Задача № 17

Проверить работоспособность сечения вала, имеющего шпоночный паз, выполненный торцевой фрезой (рис. 45).

Исходные данные для расчетов:

- изгибающий момент $M_u = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
- крутящий момент $T = 70 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
- нагрузка реверсивная;
- материал вала сталь 40Х (коэффициенты концентрации напряжений $K_{\sigma} = 1,63$ и $K_{\tau} = 1,262$; $\sigma_{-1} = 410 \text{ МПа}$; $\tau_{-1} = 240 \text{ МПа}$;
- коэффициенты влияния средних напряжений $\psi_{\sigma} = 0,2$ и $\psi_{\tau} = 0,1$);
- допускаемый коэффициент запаса прочности $[n] = 1,5$.

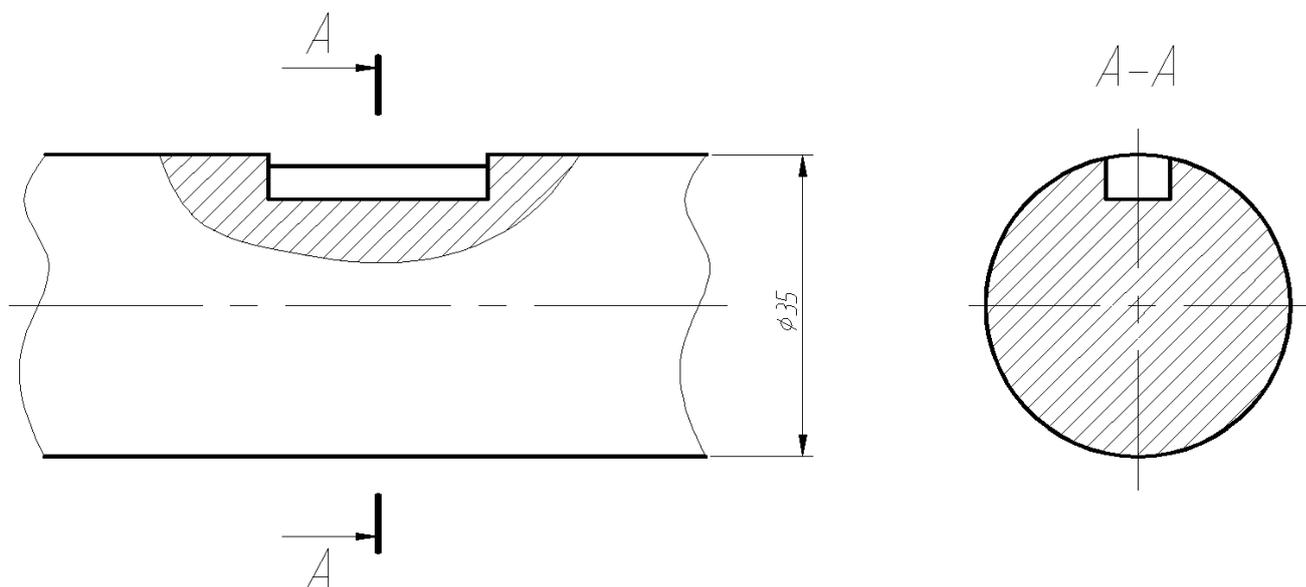


Рис. 45

Решение

Условие работоспособности вала

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n] = 1,5.$$

2. Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot K_{\sigma d} + \sigma_m \cdot \psi_{\sigma}};$$

При симметричном цикле нагружения $\sigma_m = 0$, следовательно:

$$\sigma_a = \sigma_u = \frac{M_u}{W_u}; \quad W_u = 0,1 \cdot d^3; \quad \sigma_a = \sigma_u = \frac{M_u}{W_u} = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 10^9}{0,1 \cdot 35^3} = 70 \text{ МПа}.$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot K_{\sigma d} + \sigma_m \cdot \psi_{\sigma}} = \frac{410}{70 \cdot 1,63 + 0 \cdot 0,2} = 3,594;$$

3. Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot K_{\tau d} + \tau_m \cdot \psi_{\tau}};$$

При реверсивной нагрузке $\tau_a = \tau$, $\tau_m = 0$, следовательно:

$$\tau = \frac{T}{W_{\kappa}}; \quad W_{\kappa} = 0,2 \cdot d^3.$$

$$\tau = \frac{T}{W_{\kappa}} = \frac{T}{0,2 \cdot d^3} = \frac{70 \cdot 10^9}{0,2 \cdot 35^3} = 8,163 \text{ МПа};$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot K_{\tau d} + \tau_m \cdot \psi_{\tau}} = \frac{240}{8,163 \cdot 1,262 + 0 \cdot 0,1} = 23,3.$$

4. Коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{3,594 \cdot 23,3}{\sqrt{3,594^2 + 23,3^2}} = 3,551 > [n] = 1,5.$$

Следовательно, в указанном сечении вал работоспособен.

Ответ: в указанном сечении вал работоспособен

Задача № 18

Дано: $l_1 = 80$ мм; $l_2 = 50$ мм; $h/b = 2$; $P_1 = 50$ Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 = 30$ Н; $M = 1000$ Н·мм; $[\sigma]_{1\text{уч.}} = 100$ МПа; $[\sigma]_{2\text{уч.}} = 160$ МПа.

Определить: напряжения в опасных точках прямоугольного поперечного сечения по 3 теории прочности. Указать положение нулевой линии.

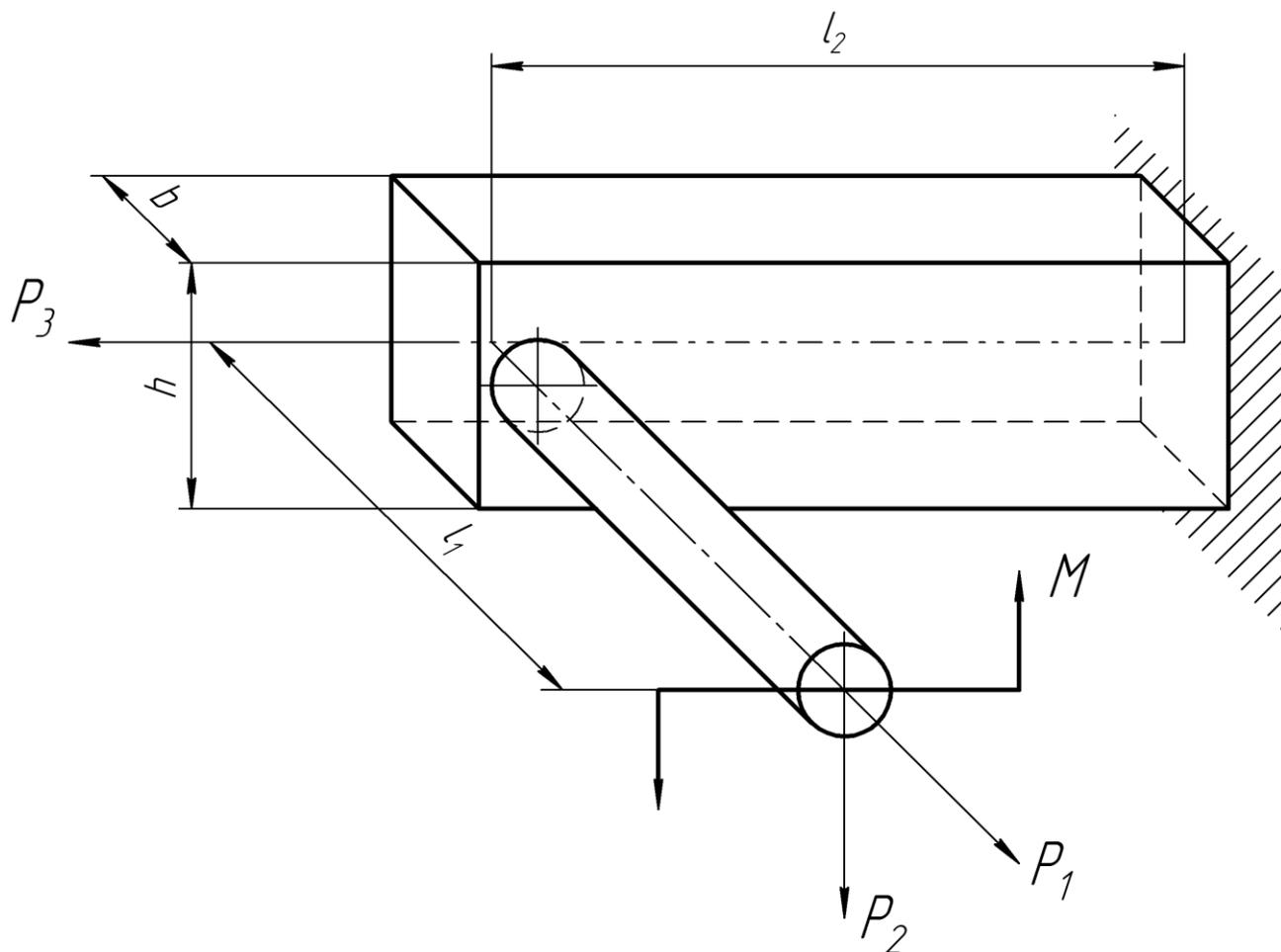


Рис. 46

Решение

1. Расчетная схема

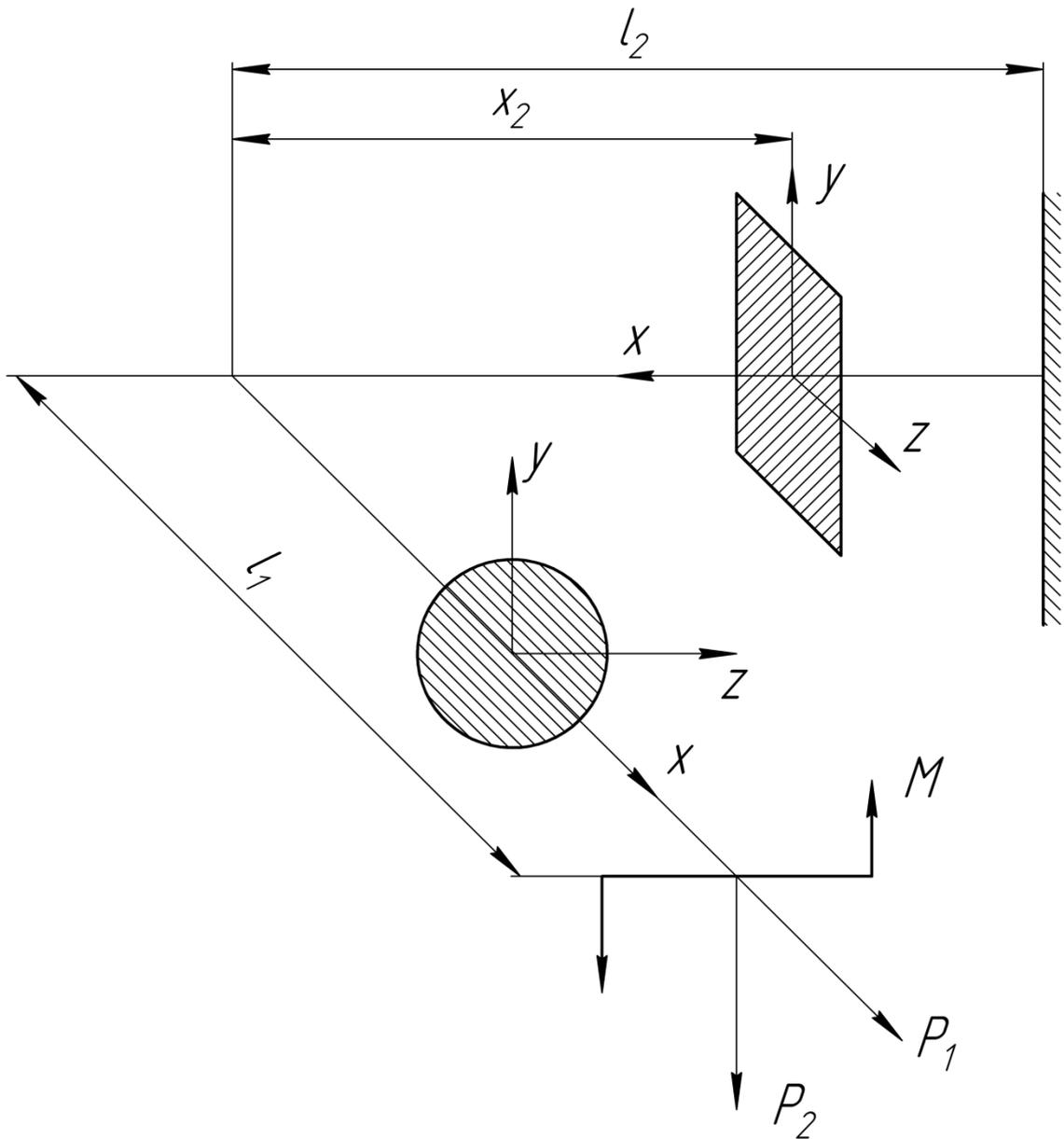


Рис. 47

2. Внутренние компоненты II сечения:

Табл.1

№ участка	Граница участка	$N_x,$ Н	$Q_y,$ Н	$Q_z,$ Н	$M_x,$ Н·мм	$M_y,$ Н·мм	$M_z,$ Н·мм
II	$0 \leq x_2 \leq l_2$	-	$-P_2$	P_1	$P_2 l_1$	$-P_1 x_2$	$-M - P_2 x_2$
II	$0 \leq x_2 \leq 50$	-	-20	50	1600	-2500	-2000

3. Эпюры напряжений от внутренних компонентов прямоугольного сечения:

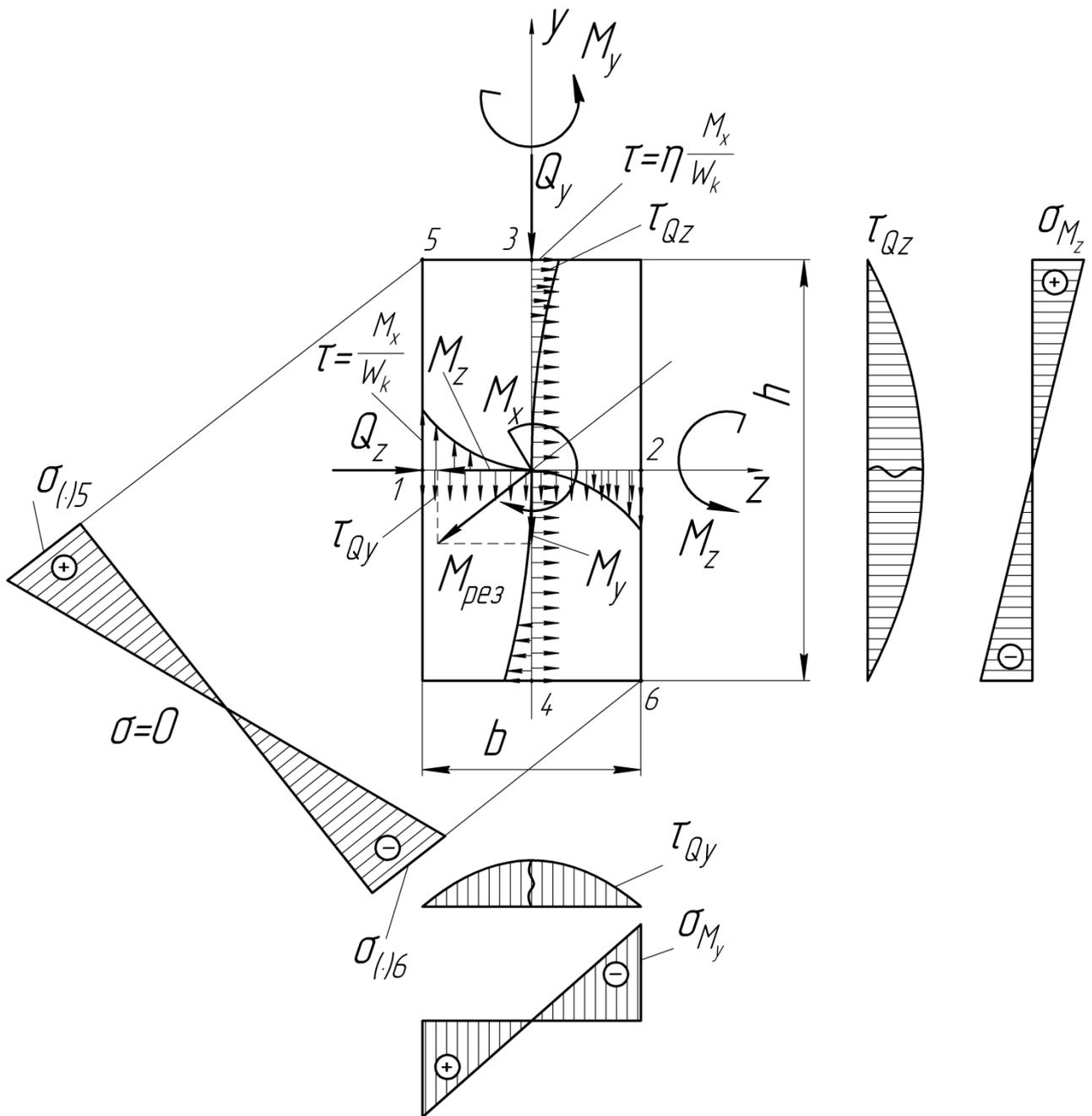


Рис. 48

4. Условие прочности для точки 5:

$$\sigma_{(5)}^{III} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

Осевые моменты сопротивления прямоугольного поперечного сечения:

$$W_y = \frac{hb^2}{6}, \text{ при } \frac{h}{b} = 2 \Rightarrow W_y = \frac{b^3}{3}.$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \text{ при } \frac{h}{b} = 2 \Rightarrow W_z = \frac{2}{3}b^3 = 2W_y.$$

тогда $\sigma_{(\cdot)5}^{III} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma],$

$$W_y = \frac{2M_y + M_z}{2[\sigma]}; \quad W_y = \frac{2 \cdot |2500| + |2000|}{2 \cdot 160} = 22 \text{ мм}^3.$$

$$W_z = 2W_y = 44 \text{ мм}^3.$$

Определим размеры сечения и площадь:

$$b = \sqrt[3]{3 \cdot W_y} = \sqrt[3]{3 \cdot 22,0} = 4 \text{ мм.}$$

$$h = 2b = 8 \text{ мм.}$$

$$F = b \cdot h = 32 \text{ мм}^2.$$

Проверка прочности в $(\cdot) 2$:

$$\sigma_{(\cdot)2}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{(\cdot)2}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k} + \frac{3Q_y}{2F}\right)^2} \leq [\sigma].$$

$$1) \sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_y}{\frac{1}{3}b^3} = \frac{3 \cdot 2500}{64} = \frac{7500}{64} = 117,2 \text{ Н/мм}^2.$$

$$2) \tau_{M_x} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{M_x}{\alpha \cdot hb^2} = \frac{1600}{0,246 \cdot 8 \cdot 16} = 50,8 \text{ Н/мм}^2.$$

$$3) \tau_{Q_y} = \frac{3Q_y}{2F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{20}{32} = 0,94 \text{ Н/мм}^2.$$

$$\sigma_{(\cdot)2}^{III} = \sqrt{117,2^2 + 4(50,8 + 0,94)^2} = 156 \text{ Н/мм}^2.$$

Вывод: $156 = \sigma_{(\cdot)2}^{III} < [\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$ – условие прочности по III теории прочности выполняется.

Проверка прочности в (·) 3:

$$\sigma_{(\cdot)3}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{(\cdot)3}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\eta \frac{M_x}{W_k} + \frac{3}{2} \frac{Q_z}{F}\right)^2} \leq [\sigma].$$

$$1) \sigma_{M_z} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z}{bh^2/6} = \frac{6 \cdot 2000}{4 \cdot 8^2} = 46,9 \text{ Н/мм}^2.$$

$$2) \tau_{Q_z} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{32} = 2,3 \text{ Н/мм}^2.$$

$$3) \tau_{M_x} = \eta \frac{M_x}{W_k} = 0,795 \cdot \frac{1600}{0,246 \cdot 8 \cdot 4^2} = 40,4 \text{ Н/мм}^2.$$

$$\text{При } \frac{h}{b} = 2 \Rightarrow \eta = 0,795.$$

$$\sigma_{(\cdot)3}^{III} = \sqrt{46,9^2 + 4(40,4 + 2,3)^2} = 97,4 \text{ Н/мм}^2.$$

Вывод: Результирующие напряжения в (·) 3 существенно меньше, чем напряжения в (·) 2.

Положение нулевой линии определено направляющими косинусами:

$$\cos \varphi_y = \frac{M_y}{M_{\text{рез}}} = \frac{M_y}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}} = \frac{-2500}{\sqrt{2500^2 + 2000^2}} = -0,78125;$$

$$\cos \varphi_z = \frac{M_z}{M_{\text{рез}}} = \frac{-2000}{10^2 \sqrt{1025}} = -0,625.$$

Относительно нулевой линии показана эпюра напряжений для точек 5 и 6. При наличии только двух моментов нулевая линия проходит через центр тяжести сечения и совпадает с вектором результирующего момента $M_{\text{рез}}$.

Задача № 19

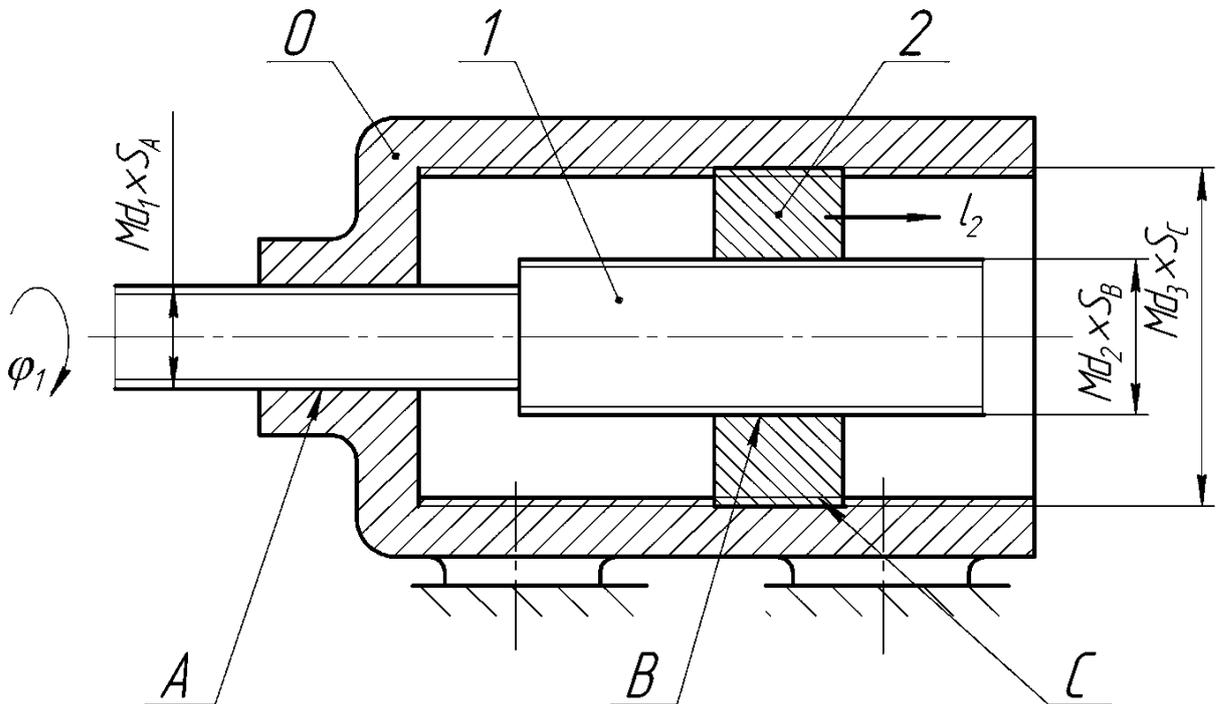


Рис. 49

В винтовом механизме звено 1 соединяется резьбовыми кинематическими парами в точке A со стойкой 0, в точке B со звеном 2, которое соединяется в точке C со стойкой 0 также резьбовой кинематической парой. Вывести функцию положения механизма $l_2 = l_2(\varphi_1, S_A, S_B, S_C)$, где φ_1 – угол поворота звена 1, l_2 – осевое перемещение звена 2; S_A, S_B, S_C – шаги резьбы в кинематических парах соответственно.

Приняв $S_A, S_B, S_C = 1,5$ мм и направление резьбы, или $S_A, S_B, S_C = 2,0$ мм и направление резьбы, при условии $S_A \leq S_B \leq S_C$, назначить шаги резьбы в кинематических парах так, чтобы при повороте звена 1 на 1 оборот получить:

- а) минимальное перемещение звена 2;
- б) максимальное перемещение звена 2.

Вычислить перемещения.

Решение

В винтовой кинематической паре угол поворота φ и линейное перемещение l связаны соотношением

$$l = \frac{S}{2\pi} \varphi = p\varphi,$$

где S – шаг резьбы, $p = S/(2\pi)$ – винтовой параметр резьбы.

Для вывода функции положения преобразуем механизм – всем звеньям механизма дадим дополнительный поворот на угол $(-\varphi_1)$. В преобразованном механизме звено 1 остановится и преобразуется в стойку.

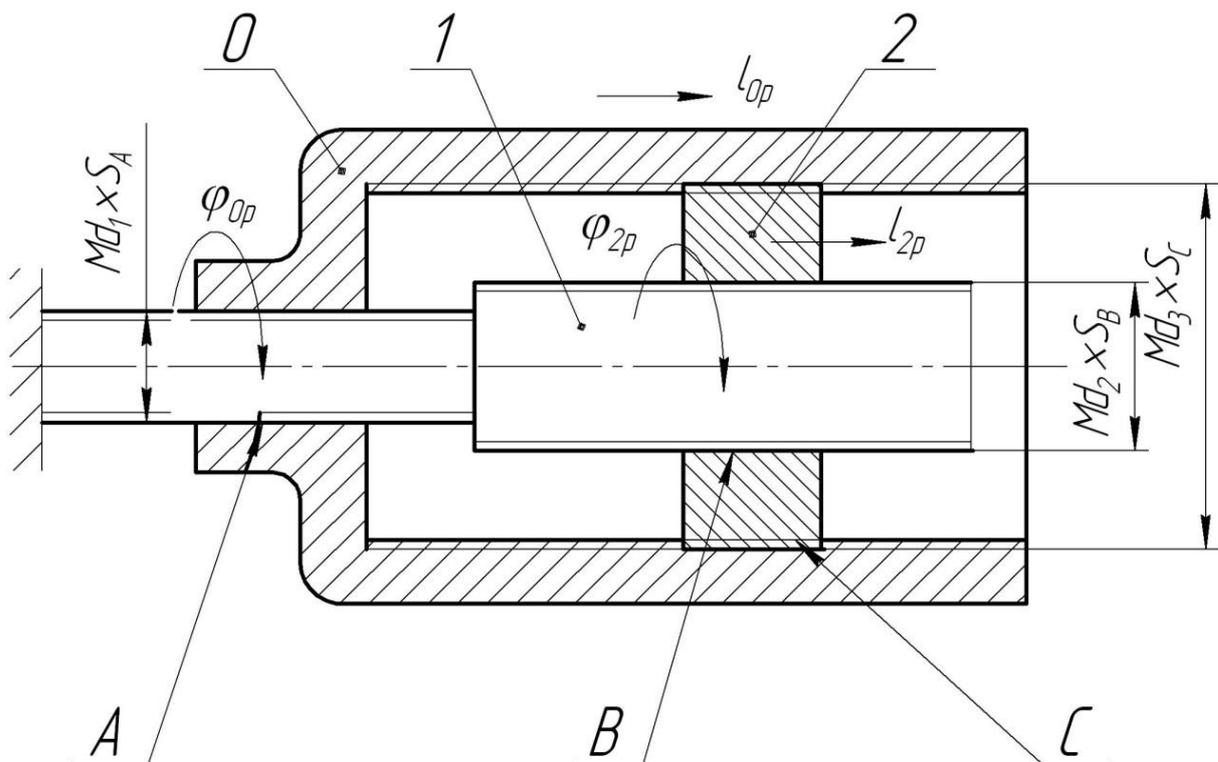


Рис. 50

Рассмотрим движение звеньев преобразованного механизма. При повороте относительно звена 1 звенья 0 и 2 совершат линейные перемещения:

$$l_{0p} = p_A \varphi_{0p}, \quad l_{2p} = p_B \varphi_{2p}. \quad (1)$$

Относительное перемещение звеньев 0 и 2 связано соотношением:

$$(l_{0p} - l_{2p}) = p_C (\varphi_{0p} - \varphi_{2p}). \quad (2)$$

Подставив значения перемещений из (1) в (2), получим:

$$(P_A \varphi_{0p} - P_B \varphi_{2p}) = P_C (\varphi_{0p} - \varphi_{2p});$$

$$\varphi_{2p} = \varphi_{0p} \frac{P_C - P_A}{P_C - P_B}. \quad (3)$$

Углы поворота преобразованного и реального механизмов связаны соотношениями:

$$\varphi_{2p} = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \varphi_{0p} = -\varphi_1.$$

Подставив их в (3), получим:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{2p} = \varphi_1 - \varphi_1 \frac{P_C - P_A}{P_C - P_B} = \varphi_1 \frac{P_A - P_B}{P_C - P_B}.$$

Линейное перемещение звена 2 (функция положения механизма):

$$l_2 = P_C \varphi_2 = \varphi_1 P_C \frac{P_A - P_B}{P_C - P_B}.$$

Выразив винтовой параметр резьбы через шаг резьбы, получим:

$$l_2 = \frac{\varphi_1}{2\pi} S_C \frac{S_A - S_B}{S_C - S_B}.$$

Перемещения звена 2 при повороте звена 1 на 1 оборот ($\varphi_1 = 2\pi$).

В винтовой кинематической паре C принимаем шаг резьбы $S_C = -2$ мм (левая резьба), в паре A – $S_A = 1,5$ мм.

А. Малое перемещение. Принимаем $S_B = 2$ мм. Перемещение звена 2

$$l_{2\min} = \left(\frac{2\pi}{2\pi} \right) (-2) \frac{1,5 - 2}{-2 - 2} = -0,25 \text{ мм.}$$

Б. Большое перемещение. Принимаем $S_B = -1,5$ мм (левая резьба).
Перемещение звена 2

$$l_{2\max} = \left(\frac{2\pi}{2\pi} \right) (-2) \frac{1,5 - (-1,5)}{-2 - (-1,5)} = 12 \text{ мм.}$$

Ответ: приняв $S_C = -2$ мм, $S_A = 1,5$ мм, получим:

а) при $S_B = 2$ мм $l_{2\min} = -0,25$ мм;

б) при $S_B = -1,5$ мм $l_{2\max} = 12$ мм.

Задача № 20

Исправьте конструкцию, устранив замеченные ошибки.

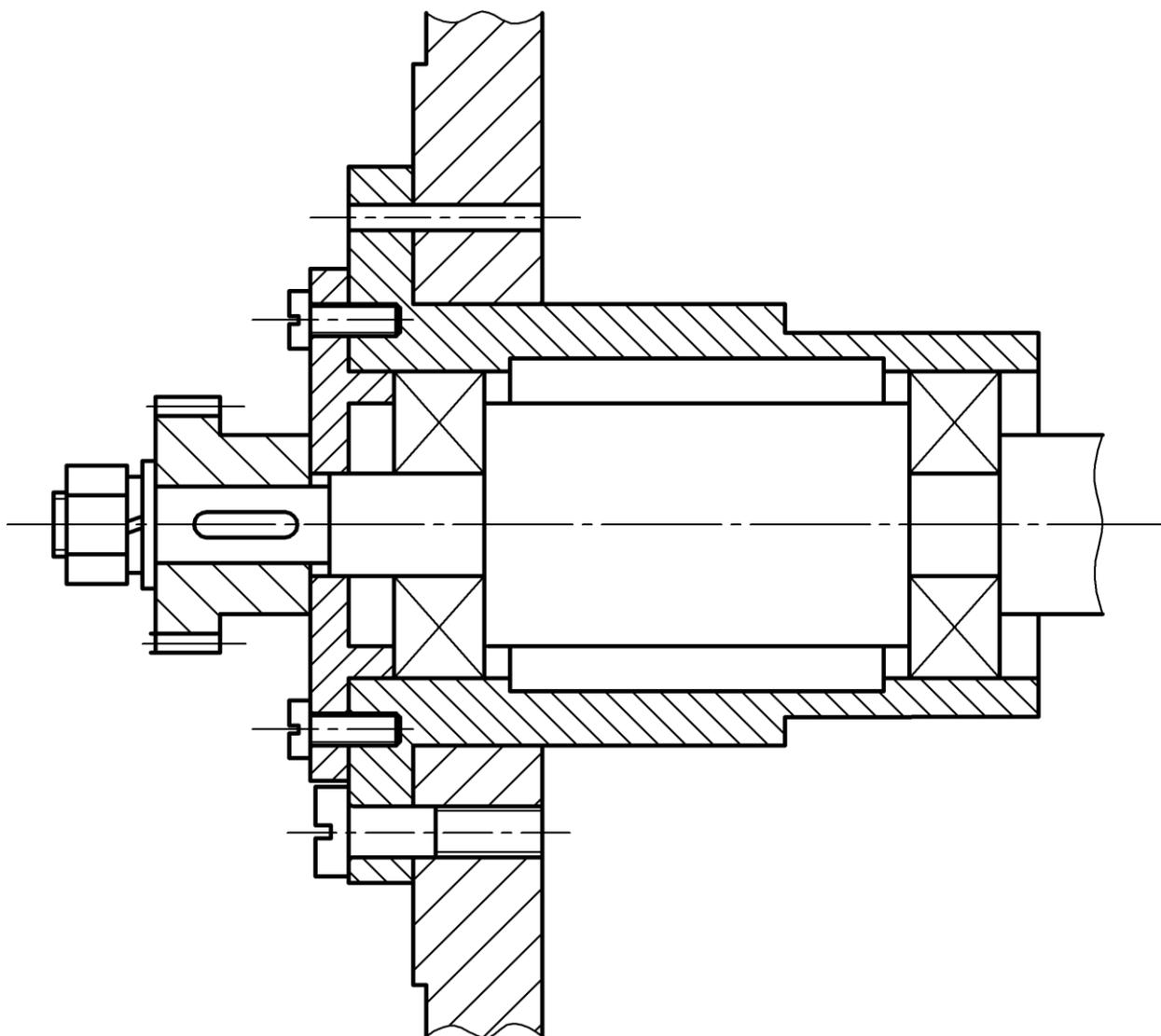


Рис. 51

Решение

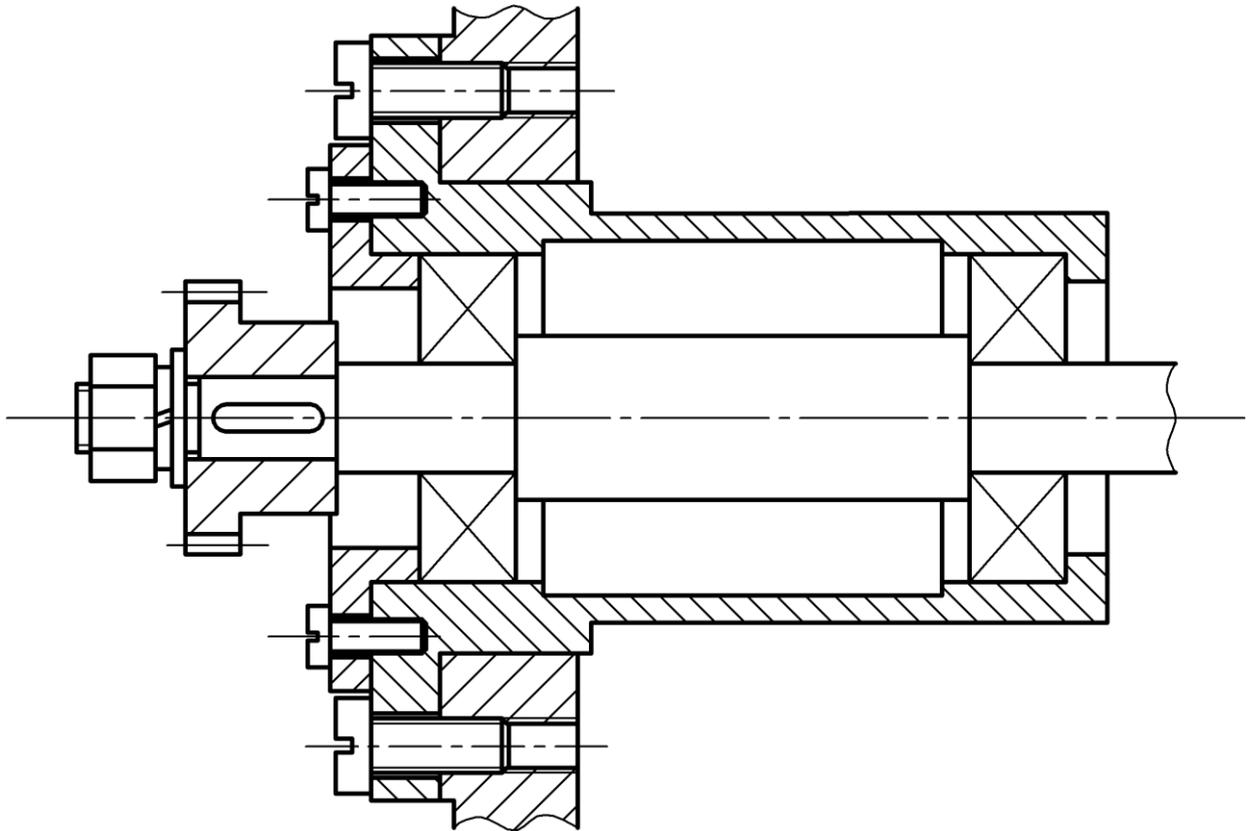


Рис. 52

Задача № 21

Решить две задачи линейной механики хрупкого разрушения:

- 1) задачу о несущей способности с трещиной заданной длины $l = 10^{-3}$ м;
- 2) задачу отбраковочного контроля с заданным усилием $q = 100$ МПа .

Рассмотреть трещину нормального отрыва для неограниченного твердого тела. Для расчета использовать силовой критерий разрушения с заданной вязкостью разрушения $K_{Ic} = 73$ МПа $\cdot\sqrt{м}$ для титанового сплава с обычной термообработкой.

Решение

1) Дано: $K_{Ic} = 73 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$, $l = 10^{-3} \text{ м}$.

Найдем предельную нагрузку q_c (решим задачу о несущей способности).

$$K_{Ic} = q_c \cdot \sqrt{2\pi l}.$$

$$\begin{aligned} q_c &= \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi l}} = \frac{73 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^{-1} \cdot \sqrt{10^{-1}}} = \frac{73 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{10^{-1}} \cdot 10}{2,5} = \frac{73 \cdot 3,16 \cdot 10^7}{2,5} = \\ &= 92,2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 9,22 \cdot 10^2 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Ответ: $q_c = 9,22 \cdot 10^2 \text{ МПа}$.

2) Дано: $K_{Ic} = 73 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$, $q = 100 \text{ МПа}$.

Найдем допустимую длину l_c трещины (решим задачу об отбраковке):

$$K_{Ic} = q \cdot \sqrt{2\pi l_c}.$$

$$K_{Ic}^2 = q^2 \cdot 2\pi l_c.$$

$$l_c = \frac{K_{Ic}^2}{2\pi \cdot q^2} = \frac{73 \cdot 73}{2\pi \cdot 100^2} = 0,0848 \text{ м} = 8,48 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Ответ: $l_c = 8,48 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Задача № 22

Абсолютно жесткий вал круглого поперечного сечения диаметром D заделан нижним концом в упругую плиту на глубину толщины плиты h (рис 53). На какой угол φ повернется вал при нагружении скручивающим моментом M , если в соединении вала с плитой проскальзывание отсутствует, а горизонтальные размеры плиты неограниченны? Модуль сдвига материала плиты G .

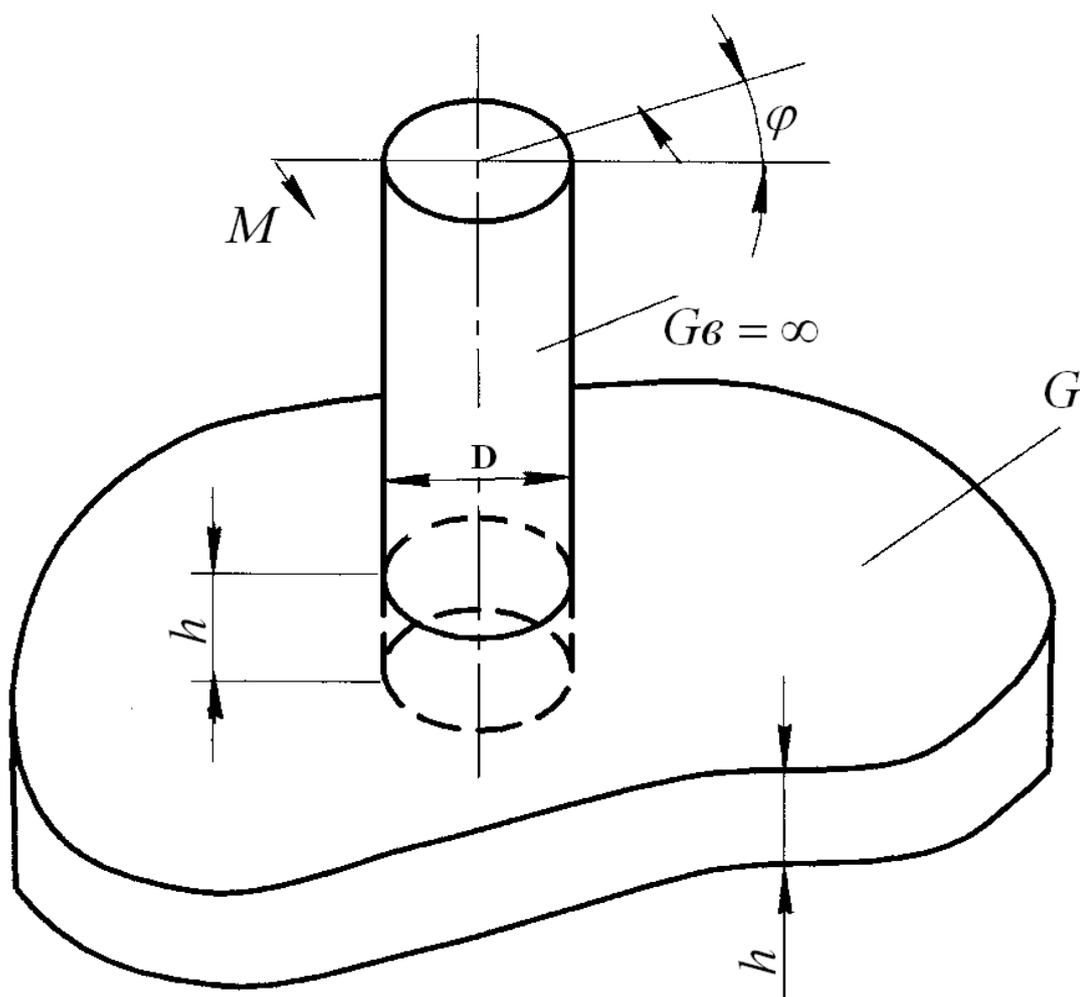


Рис. 53

Решение

В круговом сечении радиуса ρ плиты действуют касательные напряжения (рис. 54), определяемые из уравнения равновесия (в целях упрощения индексы для τ не вводим)

$$\Sigma m_{oz} = 0: M - \tau \cdot 2\pi\rho^2 h = 0,$$

$$\tau = \frac{M}{2\pi\rho^2 h}$$

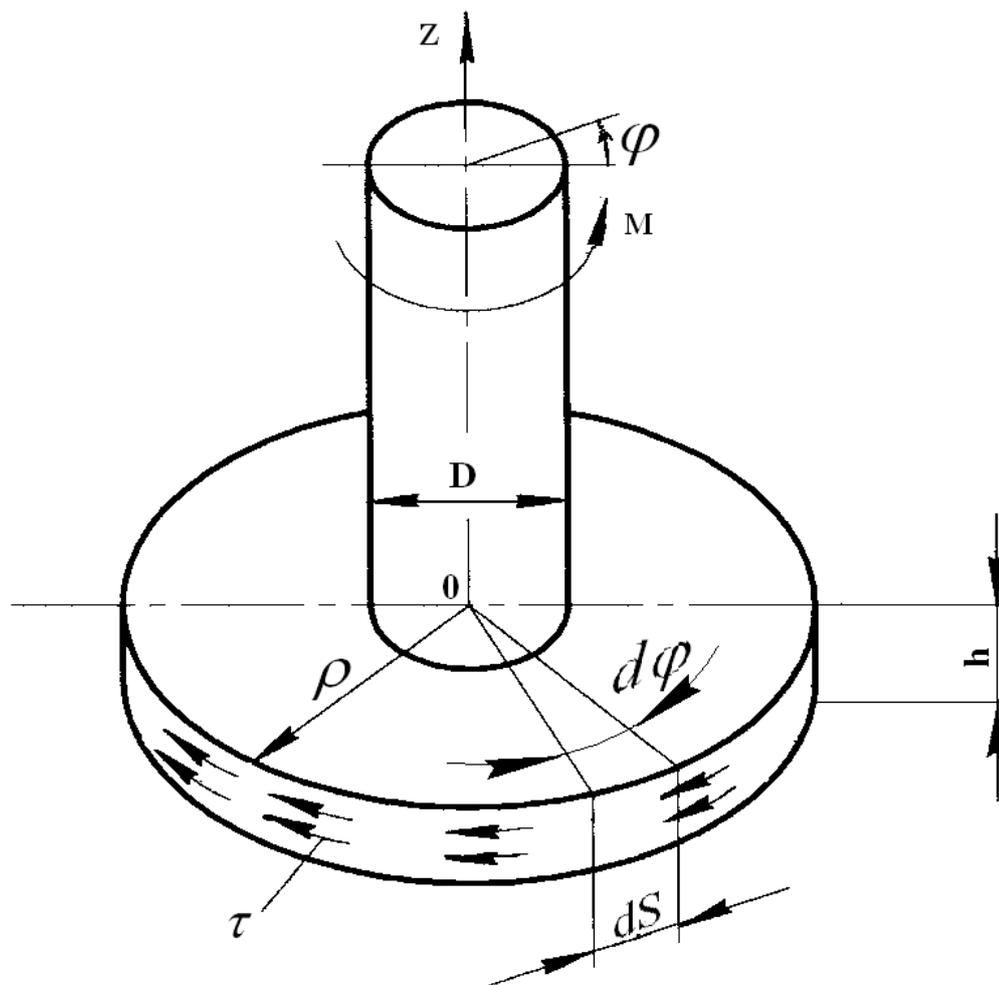


Рис. 54

Далее возможны два пути решения.

Вариант 1

Элементарный абсолютный сдвиг (рис. 55-56)

$$ds = \gamma d\rho = \frac{\tau}{G} d\rho = \frac{M}{2\pi G \rho^2 h} d\rho$$

вызывает элементарный угол закручивания вала

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} = \frac{M}{2\pi G \rho^3 h} d\rho.$$

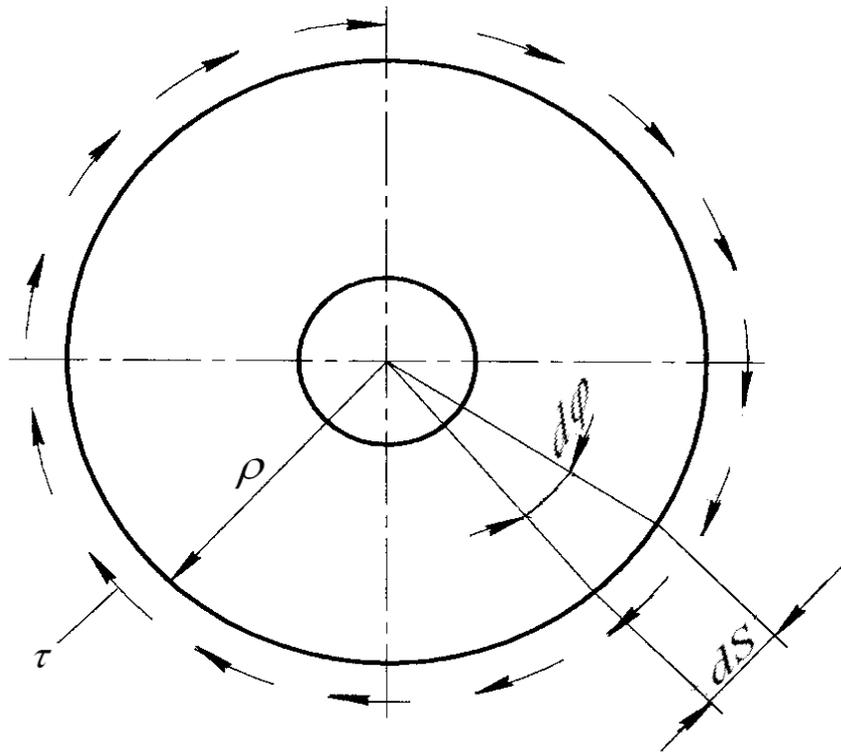


Рис. 55

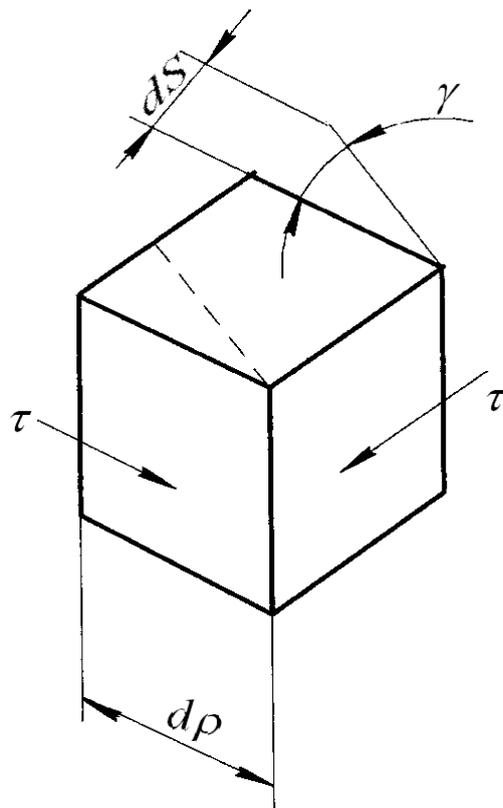


Рис.56

Тогда угол поворота вала определится следующим интегралом:

$$\varphi = \int_{\frac{D}{2}}^{\infty} \frac{M}{2\pi G \rho^3 h} d\rho = \frac{M}{\pi G D^2 h}.$$

Вариант 2

Используем энергетический метод. Запишем потенциальную энергию упругих деформаций плиты

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2G} \int_{\frac{D}{2}}^{\infty} \frac{M^2}{(2\pi \rho^2 h)^2} 2\pi \rho h d\rho = \frac{M^2}{2G\pi h D^2},$$

где элементарный объем $dV = 2\pi \rho h d\rho$.

Работа, совершаемая скручивающим моментом M на угловом перемещении φ равна:

$$A = \frac{M \cdot \varphi}{2}.$$

Приравняв $U=A$, получим то же выражение для φ , что и по варианту 1.

Задача №23

Две одинаковые гантели движутся друг к другу без вращения по горизонтальному столу на воздушной подушке (рис. 57). Каждую гантель можно рассматривать как две точечные массы m , скрепленные невесомым стержнем длиной $2l$. Опишите движение гантелей после их упругого столкновения. Изобразите зависимости скоростей центров масс гантелей от времени.

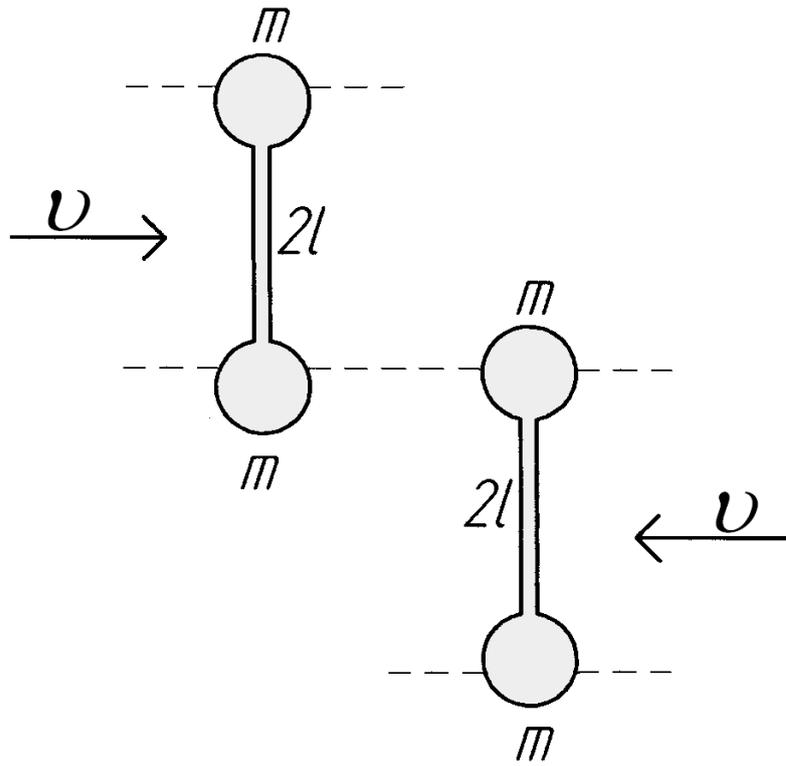


Рис. 57

Решение

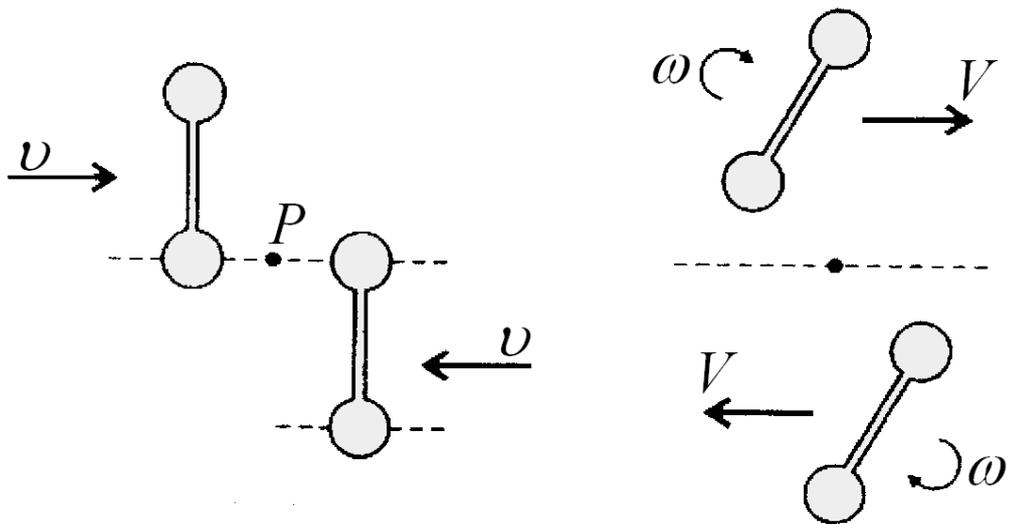


Рис. 58

Так как гантели приближаются друг к другу с одинаковыми скоростями, то в системе координат, связанной со столом, сумма их импульсов нулевая (как и у центра масс системы). Таким образом, закон сохранения импульса подразумевает, что центры масс этих гантелей всегда движутся с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях.

Когда гантели сталкиваются, энергия и суммарный момент импульса сохраняются, так как система изолирована от внешних воздействий, а столкновения абсолютно упругие. Состояния системы до и после столкновения показаны на рисунке. Перед столкновением гантели обладают только поступательной кинетической энергией, в то время как после столкновения появляется вращательная энергия. Вычислив момент импульса для гантелей относительно их точки контакта P , запишем уравнения законов сохранения энергии и момента импульса системы:

$$2\left(\frac{2m\nu^2}{2}\right) = 2\left(\frac{2mV^2}{2} + \frac{2ml^2\omega^2}{2}\right),$$

$$4m\nu l = 4mVl + 4ml^2\omega.$$

Нетривиальное решение ($V \neq \nu, \omega \neq 0$) этой системы уравнений таково:

$$V = 0, \quad \omega = \frac{\nu}{l}.$$

Это означает, что центры масс гантелей прекращают перемещаться после столкновения, сталкивающиеся точечные массы изменяют свои скорости, в то время как несталкивающиеся сохраняют свои первоначальные скорости. Ситуацию можно интерпретировать следующим образом: точечные массы, соединенные твердым, но невесомым стержнем, не ощущают присутствия друг друга в ходе мгновенного столкновения; стержень передает момент силы, возникающей из-за деформации ударяющихся шаров, когда гантель вращается относительно своего неподвижного центра масс.

Понятно, что гантели, совершив каждая пол-оборота, т.е. через время $t = \frac{\pi}{\omega}$, снова сталкиваются. Используя предыдущие результаты, дальнейшее движение гантелей можно предсказать без решения уравнений: вращение гантелей прекращается, они снова движутся поступательно с теми же самыми скоростями, как перед первым

столкновением. Их путь – та же самая прямая, только шары у гантелей поменялись местами.

Скорость гантелей как функция времени показана на рис. 59.

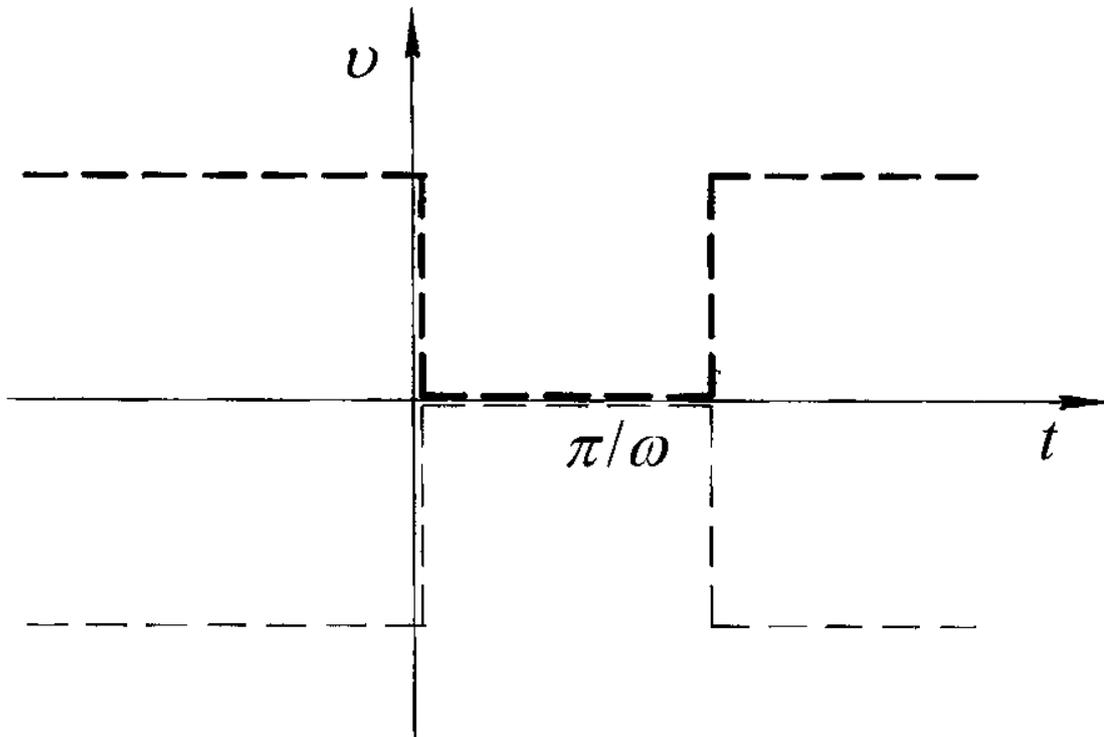


Рис. 59

Задача № 24

Волчок с неподвижной точкой опоры O , вращавшийся с угловой скоростью Ω_0 вокруг своей оси (скорость прецессии ≈ 0), в какой-то момент времени касается горизонтальной плоскости краем диска (точка K на рис. 60). J_1 – осевой момент инерции волчка, J_2 – экваториальный момент инерции (относительно точки O).

Найти угловую скорость волчка ω_1 , когда проскальзывание диска прекратится (в момент касания нутаций также не было).

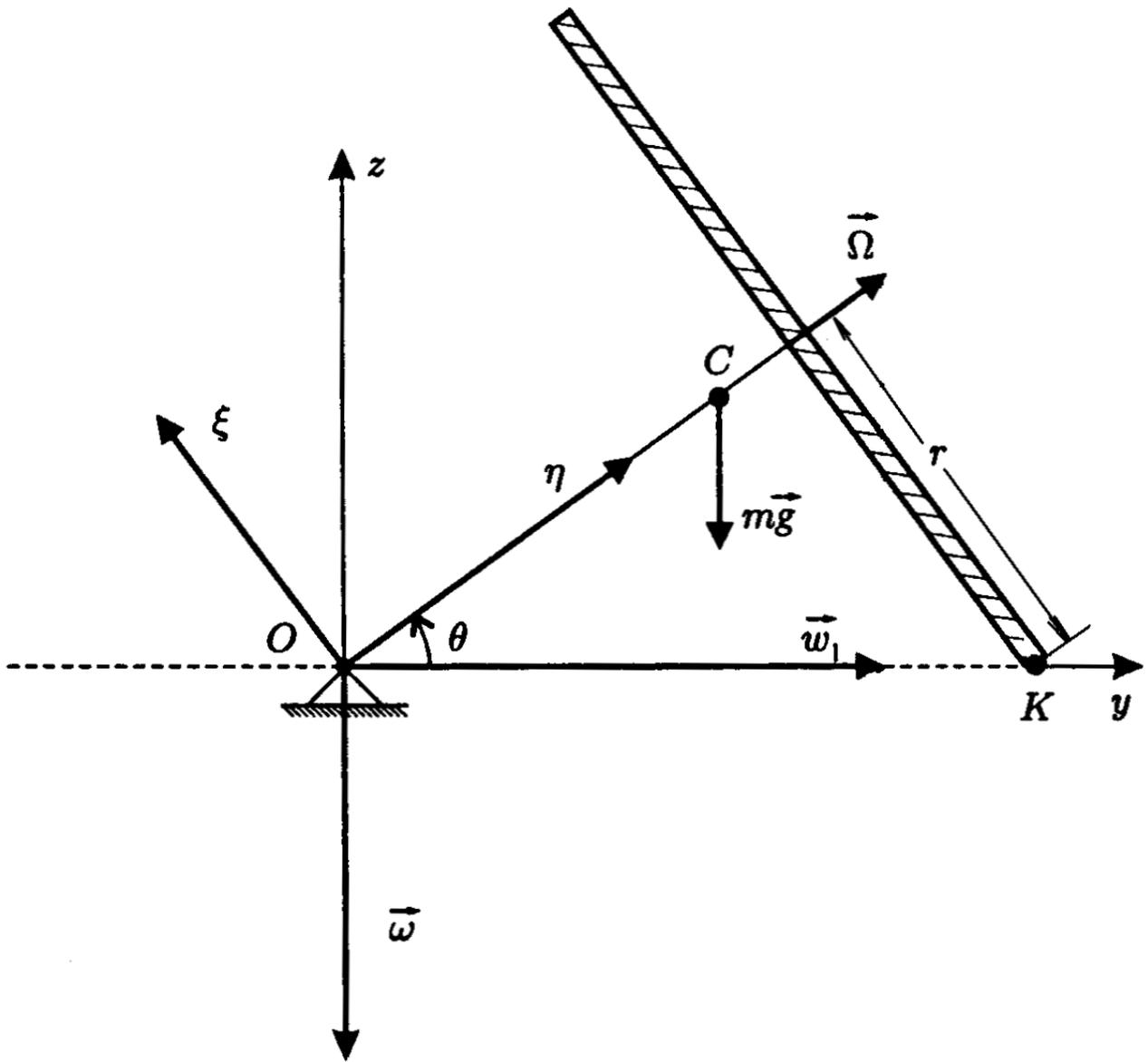


Рис. 60

Решение

Диск катится по плоскости с проскальзыванием. Введем систему $Oxyz$, ось z – вертикальна, ось y – по OK (K – точка касания), ось x – перпендикулярно z и y . Пусть r – радиус диска, тогда скорость точки K :

$$V_K = V_{Kx} = \frac{\omega r}{\sin \theta} - \Omega r.$$

При $V_K = 0$ имеем $\omega = \Omega \sin \theta$ ($\omega(0) = 0!$).

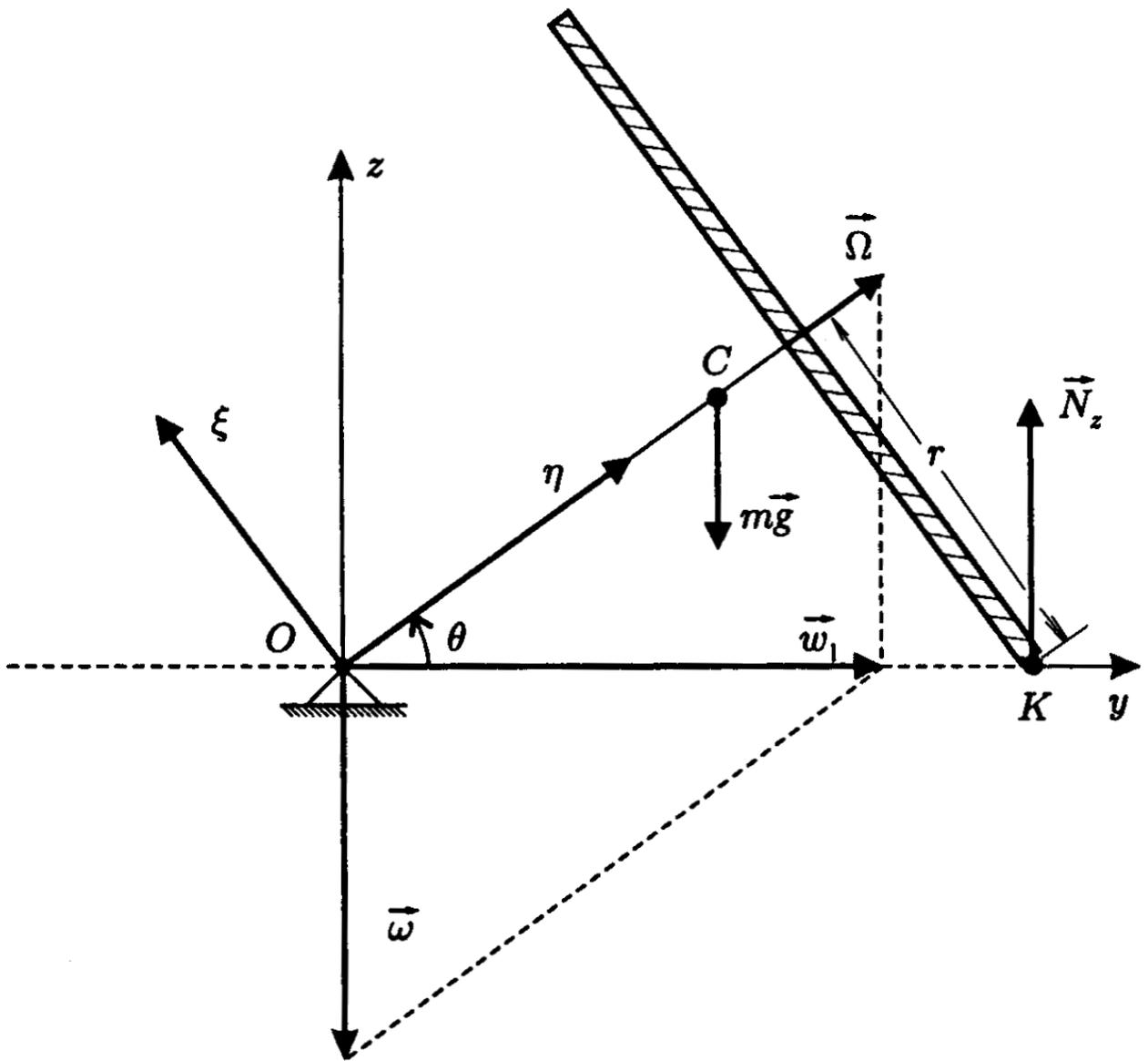


Рис. 61

В точке касания действуют две (!) силы: \vec{N}_z (нормальная реакция) и \vec{N}_x (сила трения скольжения, направленная против скорости точки K!). J_1 – осевой момент инерции волчка, J_2 – экваториальный относительно точки O. Кинетический момент волчка в главных осях $O\xi\eta\zeta$:

$$L_\xi = 0, \quad L_\eta = J_1\Omega - J_1\omega \sin \theta, \quad L_\zeta = -J_2 \cos \theta;$$

проецируем на оси x, y, z :

$$L_x = 0,$$

$$L_y = L_\eta \cos \theta - L_\zeta \sin \theta = (J_1\Omega - J_1\omega \sin \theta) \cos \theta + J_2\omega \cos \theta \cdot \sin \theta,$$

$$L_z = L_\eta \sin \theta - L_\zeta \cos \theta = (J_1 \Omega - J_1 \omega \sin \theta) \sin \theta - J_2 \omega \cos^2 \theta \cdot \sin \theta.$$

Применяем теорему о кинетическом моменте относительно точки O в осях $Oxyz$:

$$x: 0 + (\omega L_y) = \frac{N_z r}{\sin \theta} - mg \cdot OC \cdot \cos \theta,$$

$$y: \dot{L}_y + (-\omega L_x) = 0!,$$

так как $L_x = 0$, то $L_y = const = L_y(0) = J_1 \Omega_0 \cos \theta$;

$$z: \dot{L}_z + 0 = -\frac{N_x r}{\sin \theta}.$$

В этой задаче для нас важна лишь проекция на y . Имеем:

$$J_1 \Omega \cdot \cos \theta + \omega (J_2 - J_1) \cos \theta \cdot \sin \theta = J_1 \Omega_0 \cos \theta \rightarrow$$

$$\rightarrow J_1 \Omega + \omega (J_2 - J_1) \sin \theta = J_1 \Omega_0$$

Подставляем сюда $\omega = \Omega \sin \theta$ при отсутствии скольжения, получаем:

$$J_1 \Omega + (J_2 - J_1) \Omega \sin^2 \theta = J_1 \Omega_0, \quad \Omega = \frac{\Omega_0 J_1}{J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta}.$$

Угловая скорость $\vec{\omega}_1$ волчка направлена по OK и находится из параллелограмма $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega} + \vec{\Omega}$ (см. рис. 61):

$$\omega_1 = \Omega \cos \theta = \frac{\Omega_0 J_1 \cos \theta}{J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta}!$$

Задача № 25

Легкая неупругая веревка опоясывает по полуокружности неподвижный цилиндр, как показано на рисунке. Из-за трения веревка не скользит по цилиндру, когда величины сил, действующих на ее концах, удовлетворяют неравенству $\frac{F_A}{2} \leq F_B \leq 2F_A$. Определите коэффициент трения между веревкой и цилиндром.

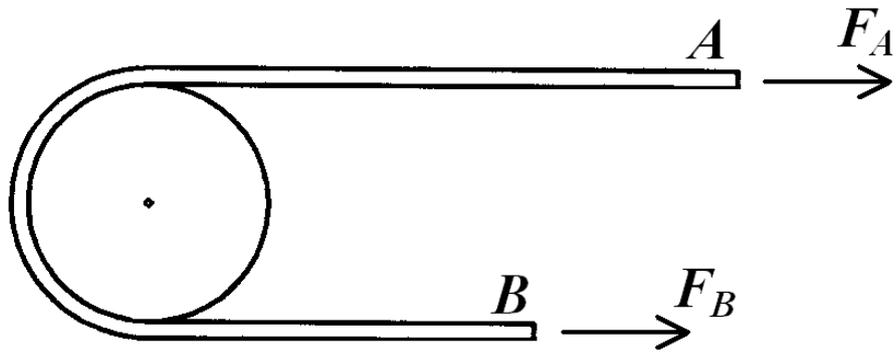


Рис. 62

Решение

Пусть F_0 – сила, с которой тянут за один конец веревки, и F_m – максимальная сила, с которой можно тянуть другой конец без возникновения проскальзывания. Выделим мысленно маленький кусочек веревки длиной $R\Delta\alpha$, которая стягивает центральный угол $\Delta\alpha$ (рис. 63).

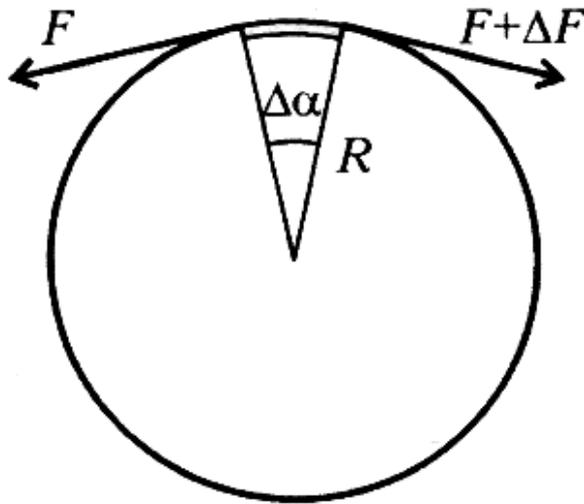


Рис. 63

Разность сил натяжения $F + \Delta F$ и F уравнивается силой трения покоя ΔF_{mp} , которая возникает при попытке сдвинуть веревку относительно цилиндра. Максимальная сила трения (на грани скольжения) равна

$$\Delta F_{mp} = \mu N ,$$

где μ – коэффициент трения, который требуется определить, N – нормальная сила реакции, равная по величине сумме проекций сил натяжения на радиус, проведенный из середины нашего маленького кусочка веревки в центр окружности (рис. 64).

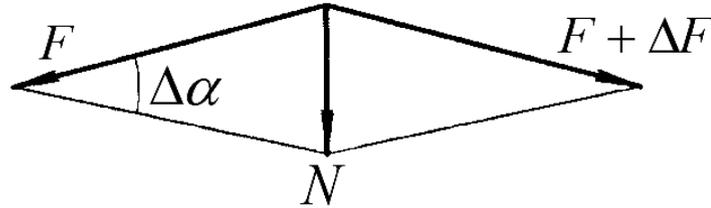


Рис. 64

Из рис. 64 видно, что (поскольку $F + \Delta F \approx F$)

$$N = 2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx F\Delta\alpha$$

а значит

$$\Delta F_{mp}(\alpha) = \Delta F(\alpha) = \mu F(\alpha)\Delta\alpha.$$

Переходя к бесконечно малым приращениям, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mu F(\alpha).$$

После разделения переменных получаем:

$$\frac{dF}{F} = \mu d\alpha, \text{ или } d(\ln F - \mu\alpha) = 0.$$

Тогда решение этого уравнения записывается в виде:

$$F(\alpha) = F_0 e^{\mu\alpha}.$$

Двойное неравенство, сформулированное в задаче $\left(\frac{F_A}{2} \leq F_B \leq 2F_A\right)$, позволяет записать уравнение:

$$2F(0) = F(\pi) = F(0)e^{\mu\pi},$$

откуда получаем выражение для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0,22.$$

Задача № 26

Кинематическая схема шестизвенного механизма изображена на рис. 65. Размеры звеньев $OA=AB=l$, $AC=DM=a$, $AD=CM=b$.

Вывести уравнение траектории точки M :

$$x_M = x_M(\varphi_1), \quad y_M = y_M(\varphi_1).$$

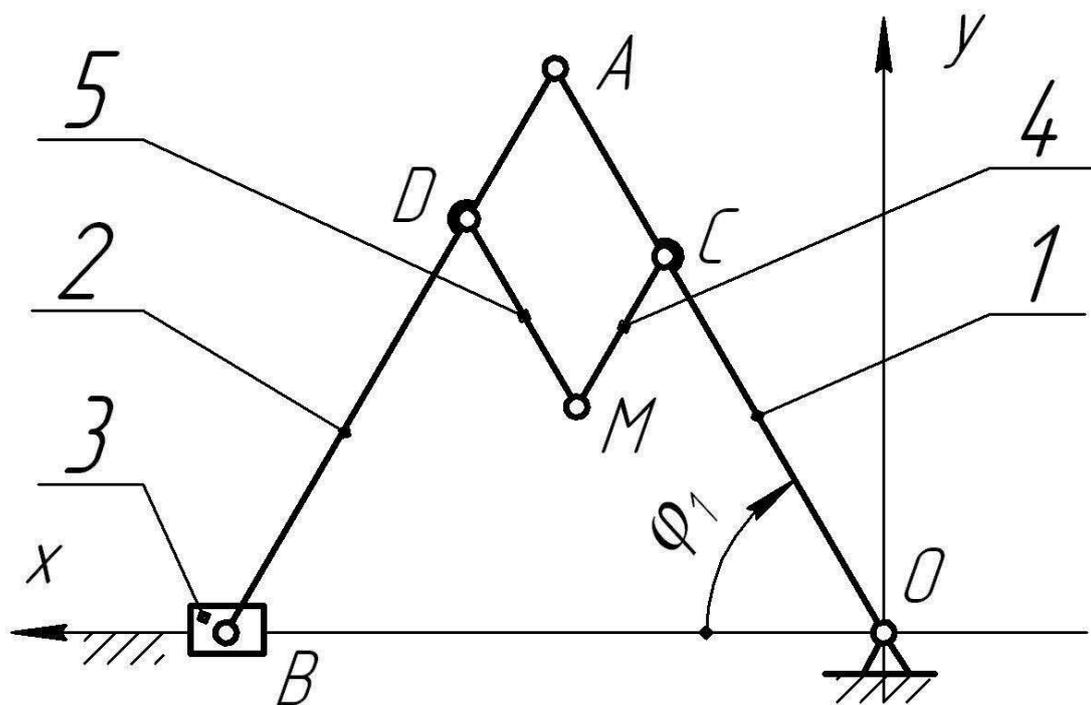


Рис. 65

Решение

Положение звена 1 зададим ортом \bar{e}_1 , а звена 2 – ортом \bar{e}_2 . Углы φ_1 и φ_2 связаны соотношением $\varphi_2=180^\circ-\varphi_1$. Проекции ортов на оси координат:

$$\bar{e}_1 = \bar{i} \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \varphi_1.$$

$$\bar{e}_2 = \bar{i} \cos \varphi_2 + \bar{j} \sin \varphi_2 = -\bar{i} \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \varphi_1.$$

Так как $AC=DM$ и $AD=CM$, то четырехугольник $ADMC$ – параллелограмм, CM параллелен AB , а DM параллелен OA . Радиус-вектор точки M представим в виде

$$\vec{r}_M = \vec{OC} + \vec{CM} = \vec{e}_1 \cdot \vec{OC} - \vec{e}_2 \cdot \vec{CM}.$$

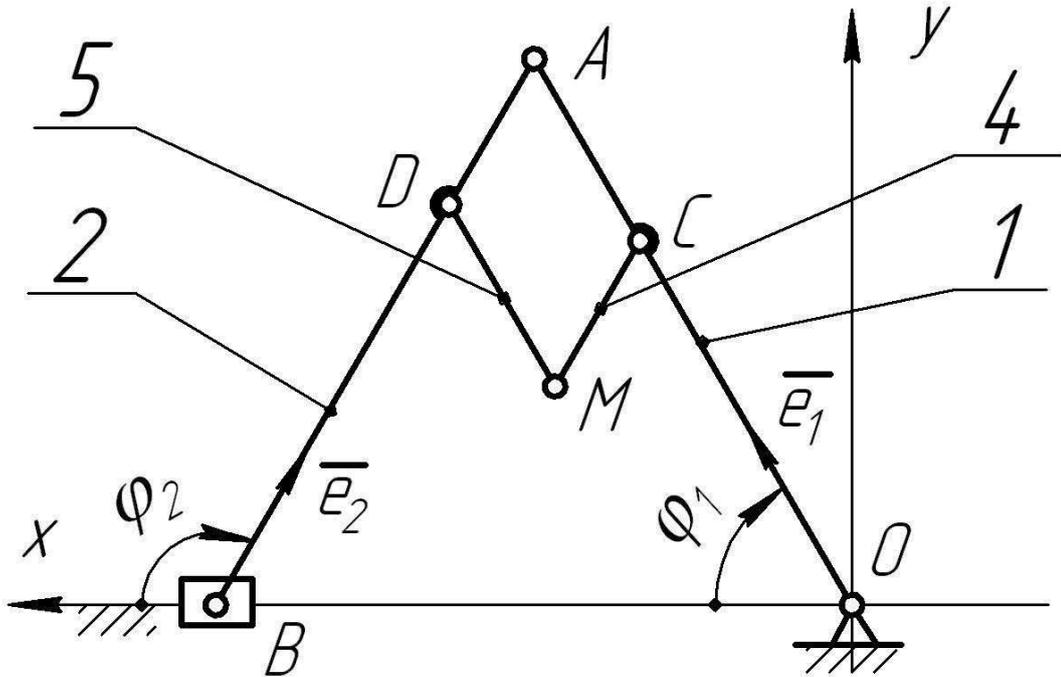


Рис. 66

Проекция радиуса-вектора на оси системы координат:

$$x_M = (l - a) \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_1 = (l - a + b) \cos \varphi_1,$$

$$y_M = (l - a) \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_1 = (l - a - b) \sin \varphi_1.$$

Это уравнение эллипса, большая полуось равна $A=(L-a+b)$, а малая полуось равна $B=(L-a-b)$.

Ответ: $x_M = A \cos \varphi_1$;

$y_M = B \sin \varphi_1$.

Задача № 27

На прилагаемом к изображению узла (рис. 67) эскизе (рис. 68):

1. Доконструировать вал (сделать необходимые разрезы и выносные элементы).
2. Проставить недостающие размеры, поля допусков и выбрать базы, проставить допуски формы и расположения поверхностей, проставить шероховатость поверхностей.

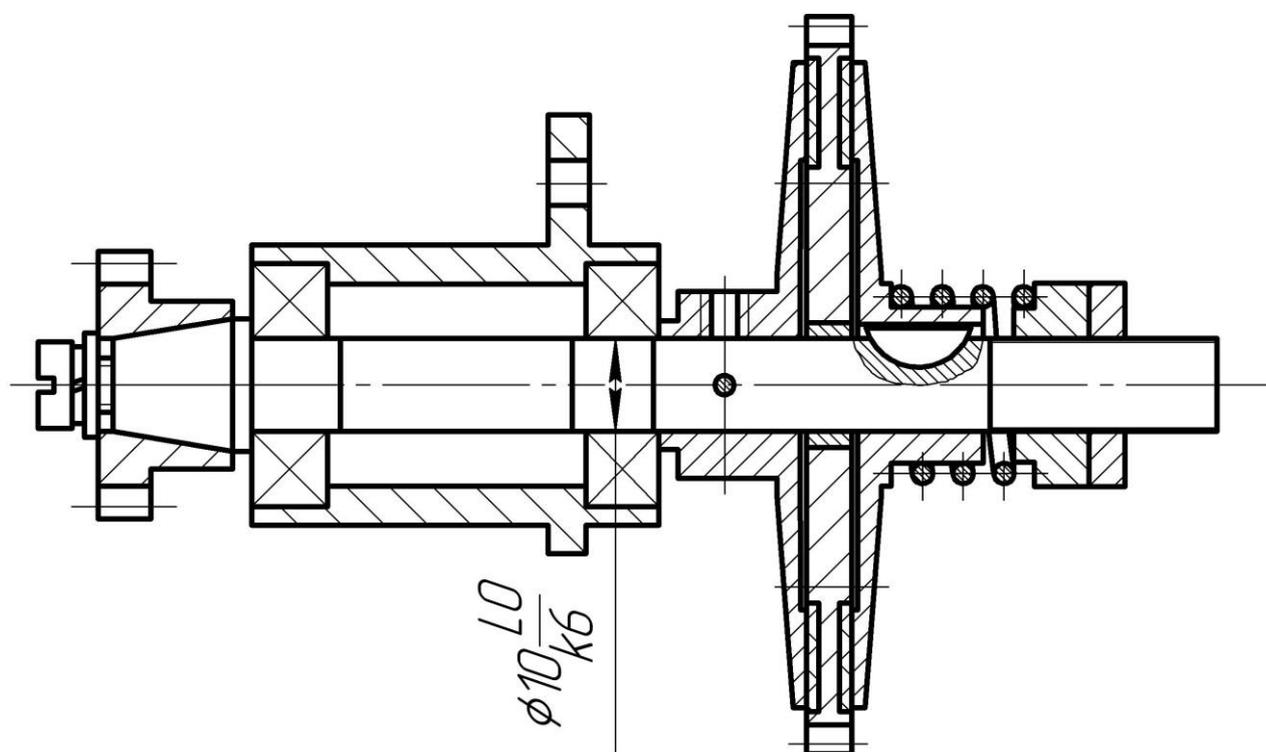


Рис. 67

Эскиз:

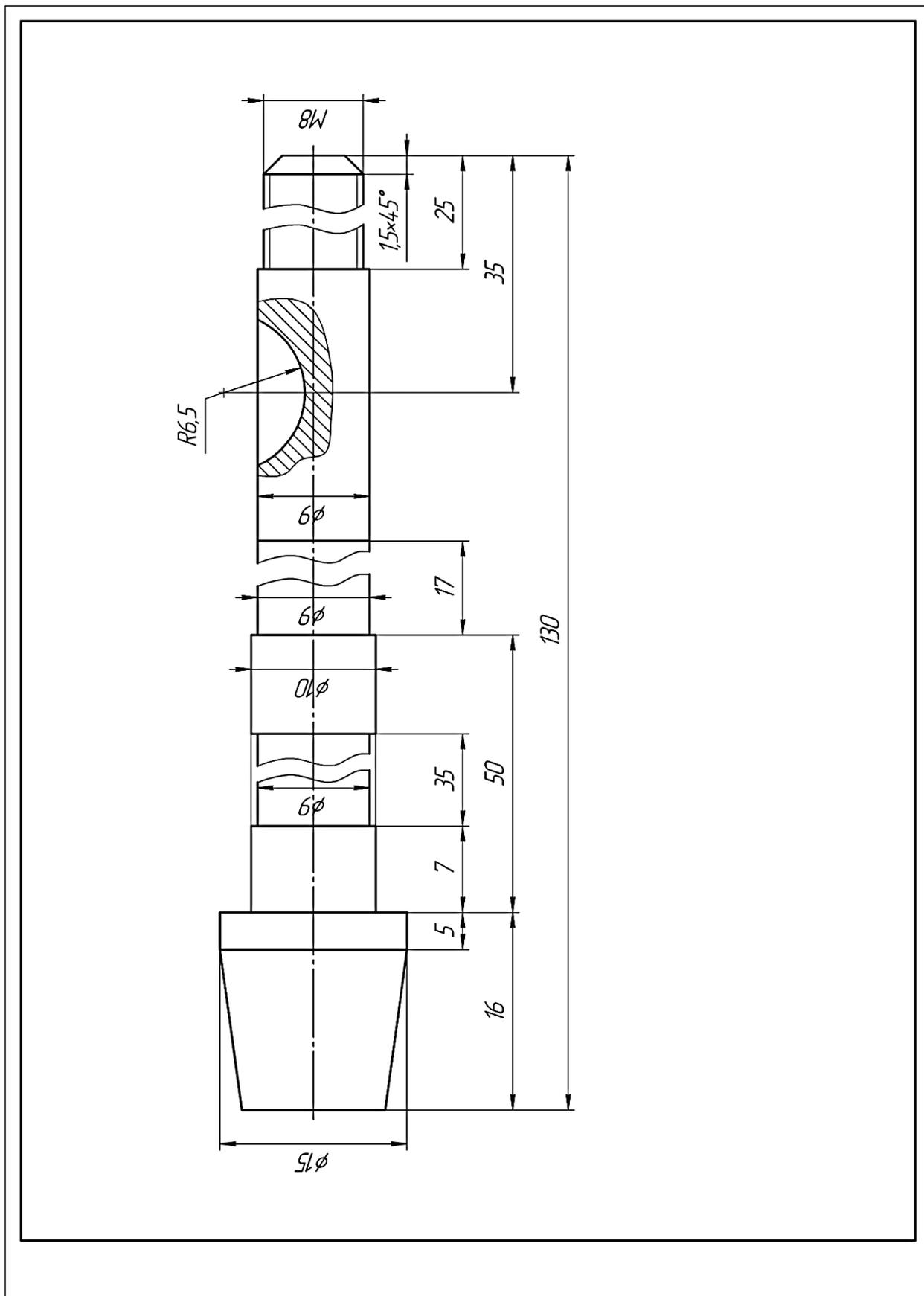


Рис. 68

Задача № 28

Рассчитайте размер замыкающего звена ΔA и его отклонения методом максимума-минимума.

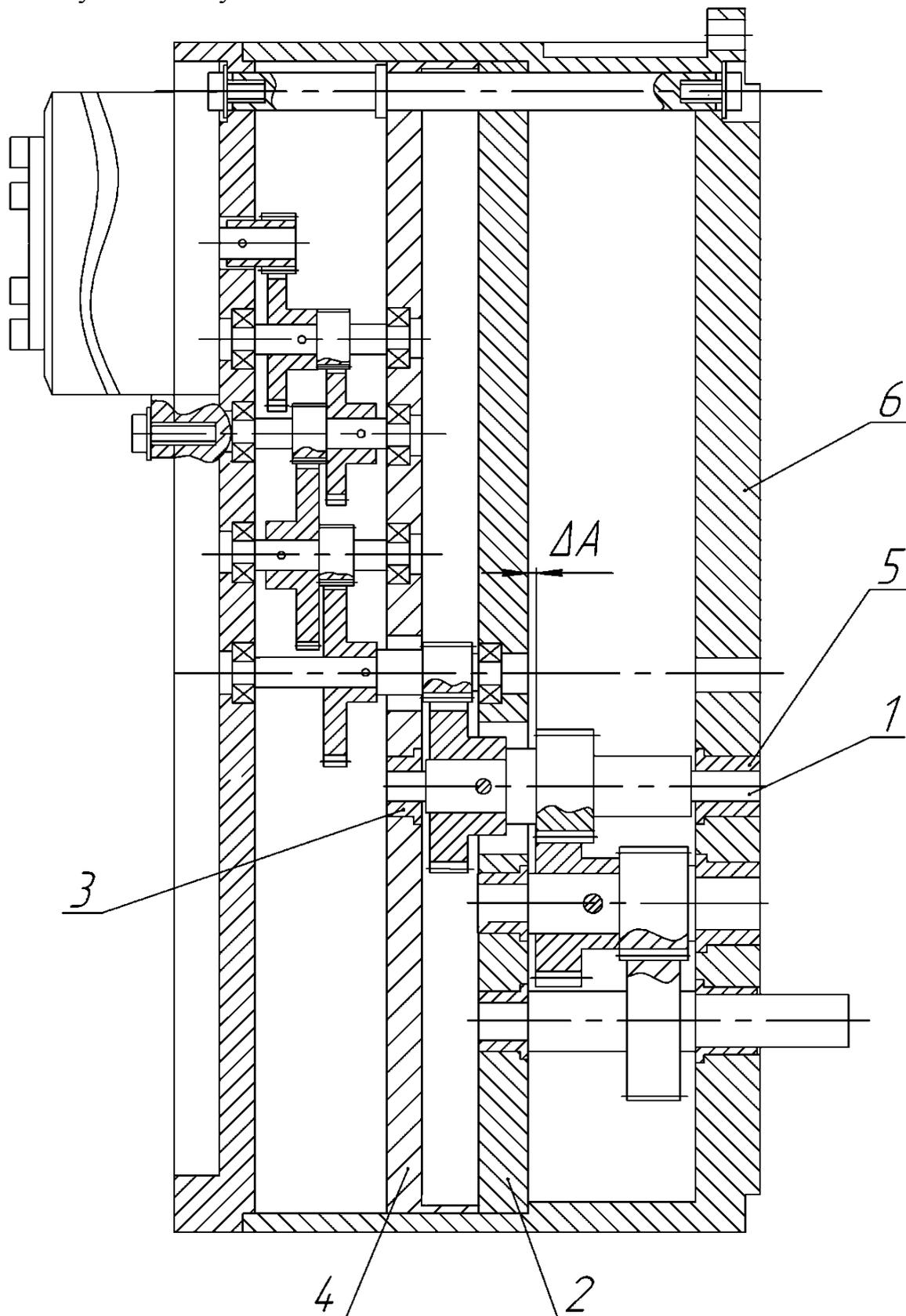


Рис. 70

Решение

Уравнения, используемые при расчете размерных цепей на максимум-минимум:

$$A_{\Delta} = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j,$$

$$A_{\Delta \max} = \sum \vec{A}_{j \max} - \sum \overleftarrow{A}_{j \min},$$

$$A_{\Delta \min} = \sum \vec{A}_{j \min} - \sum \overleftarrow{A}_{j \max},$$

где звенья стрелкой направленной вправо обозначены увеличивающие звенья, влево – уменьшающие.

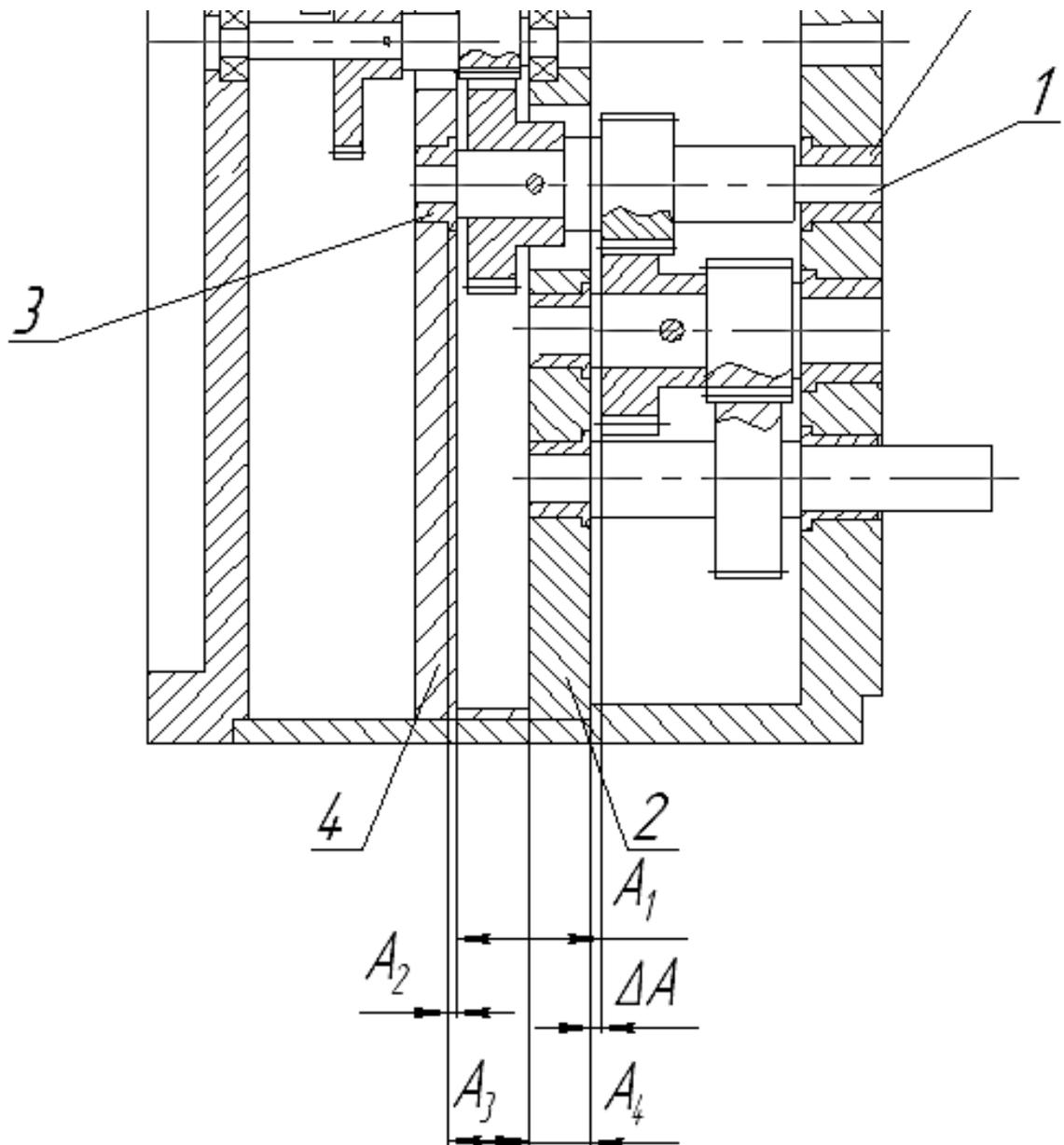


Рис. 71

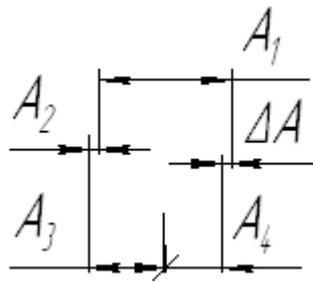


Рис. 72

Параметры составляющих звеньев находим, используя эскизы отдельных деталей.

A_1 из эскиза вала:

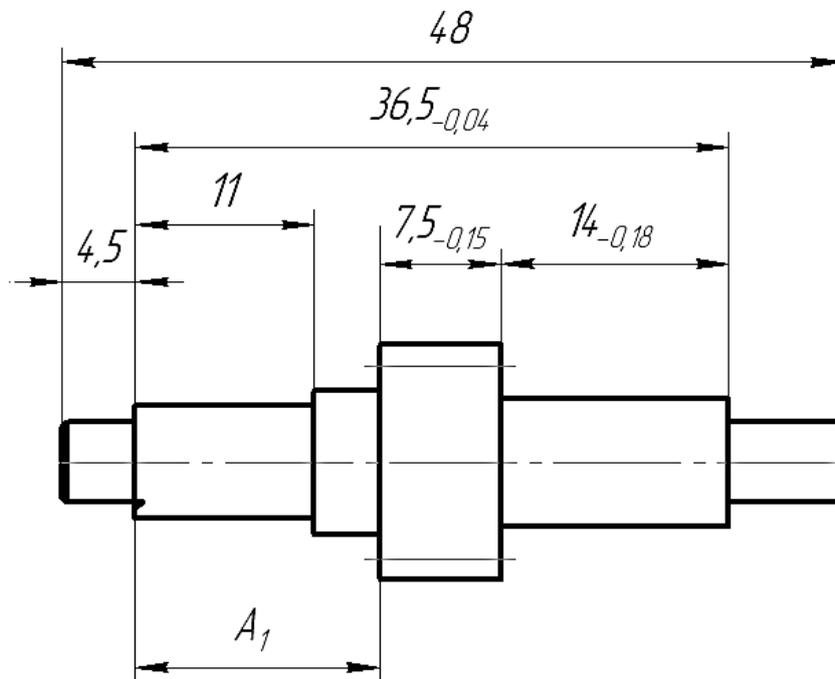


Рис. 73

Составив размерную цепь для данной детали можно определить размер A_1 :

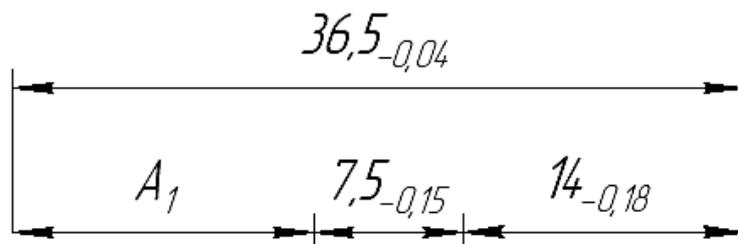


Рис. 74

Для этой размерной цепи 7,5 и 14 являются уменьшающими звеньями, а 36,5 увеличивающим. Тогда получаем следующие значения параметры звена:

$$A_1 = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 36,5 - 7,5 - 14 = 15$$

$$A_{1\max} = \sum \vec{A}_{j\max} - \sum \overleftarrow{A}_{j\min} = 0 - (-0,15 - 0,18) = 0,33$$

$$A_{1\min} = \sum \vec{A}_{j\min} - \sum \overleftarrow{A}_{j\max} = -0,04 - 0 = -0,04$$

$$A_1 = 15_{-0,04}^{0,33}$$

Параметры звена A_2 определяем из эскиза вкладыша.

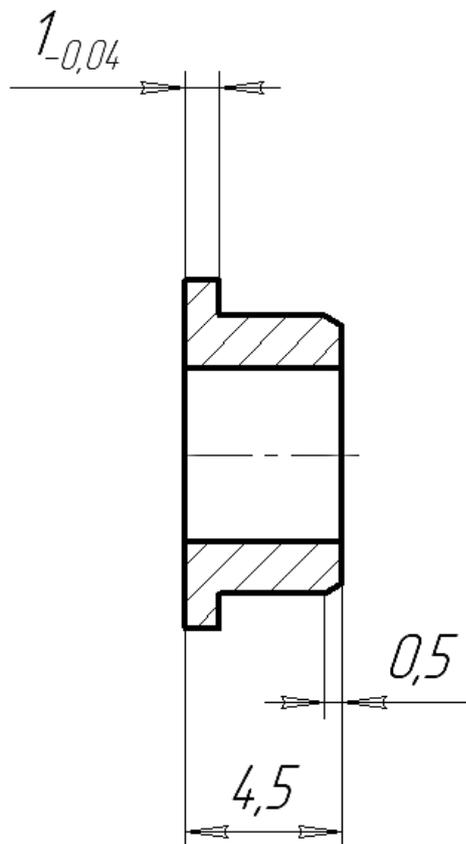


Рис. 75

$$A_2 = 1_{-0,04}$$

Параметры звена A_3 определяем из эскиза вкладыша 3

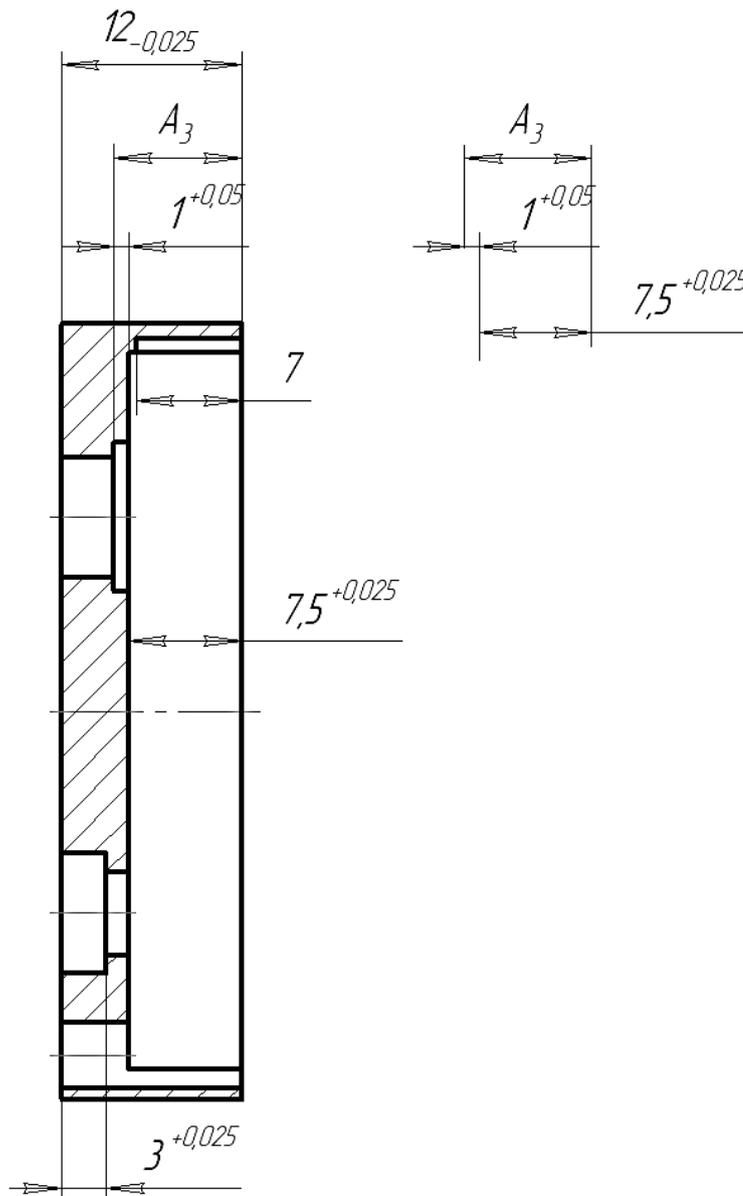


Рис. 76

Для этой размерной цепи 1 и 7,5 являются увеличивающими звеньями. Тогда получаем следующие значения параметры звена:

$$A_3 = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 7,5 + 1 = 8,5.$$

$$A_{3\max} = \sum \vec{A}_{j\max} - \sum \overleftarrow{A}_{j\min} = 0,05 + 0,025 - (0) = 0,075.$$

$$A_{3\min} = \sum \vec{A}_{j\min} - \sum \overleftarrow{A}_{j\max} = 0 - 0 = 0.$$

$$A_3 = 8,5^{0,075}$$

Параметры звена A_4 определяем из эскиза платы

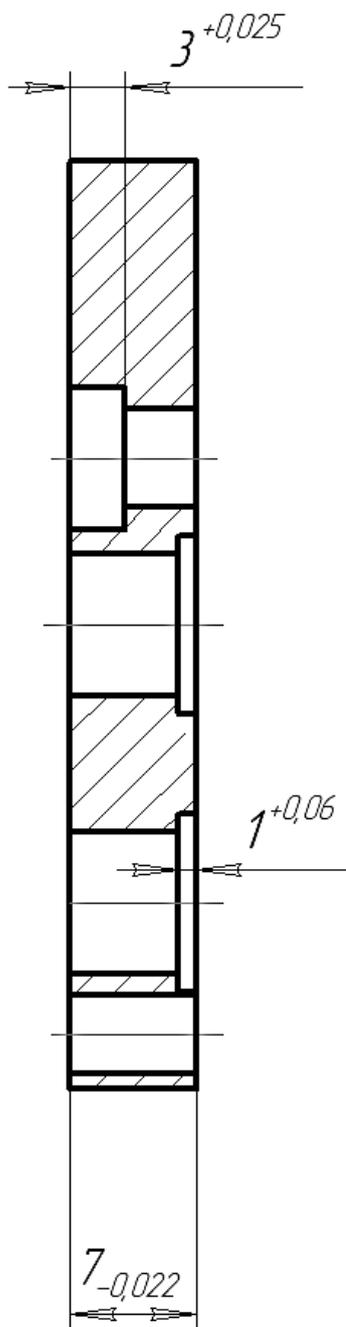


Рис. 77

$$A_4 = 7_{-0,022}$$

Таким образом, для размерной цепи сборки имеем следующие параметры составляющих звеньев

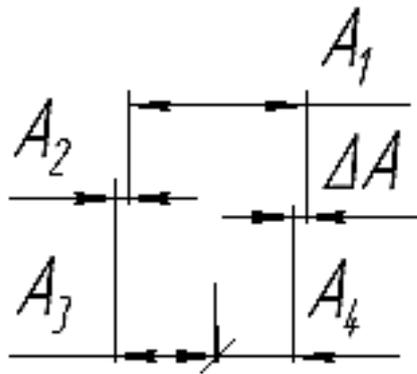


Рис. 78

$A_1 = 15_{-0,04}^{0,33}$ – увеличивающее звено.

$A_2 = 1_{-0,04}$ – увеличивающее звено.

$A_3 = 8,5^{0,075}$ – уменьшающее звено.

$A_4 = 7_{-0,022}$ – уменьшающее звено.

$$A_{\Delta} = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 15 + 1 - 8,5 - 7 = 0,5.$$

$$A_{\Delta \max} = \sum \vec{A}_{j \max} - \sum \overleftarrow{A}_{j \min} = 0,33 + 0 - (-0,022) = 0,352.$$

$$A_{\Delta \min} = \sum \vec{A}_{j \min} - \sum \overleftarrow{A}_{j \max} = -0,04 - 0,04 - (0,075 + 0) = -0,155.$$

В итоге: $A_{\Delta} = 0,5_{-0,155}^{+0,352}$.

Второй вариант расчёта.

Для составления расчётной схемы прижимаем валик 1 к вкладышу 5

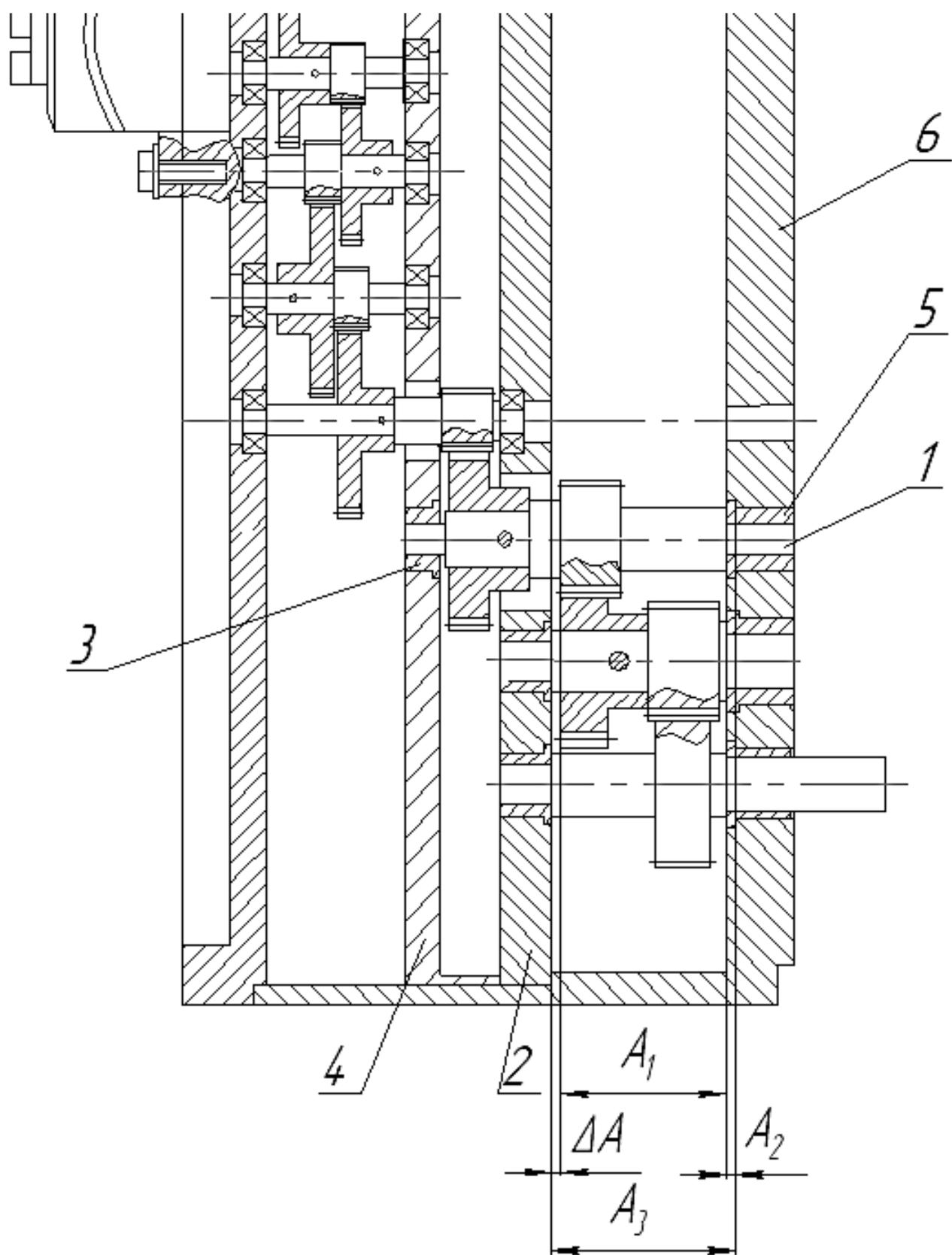


Рис. 79

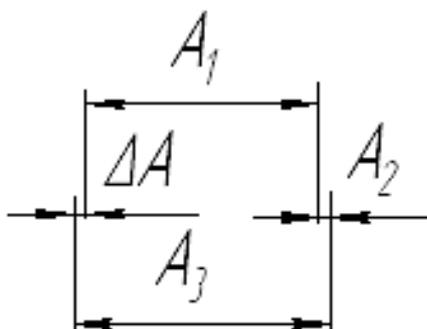


Рис. 80

Параметры составляющих звеньев находим, используя эскизы отдельных деталей.

A_1 из эскиза вала

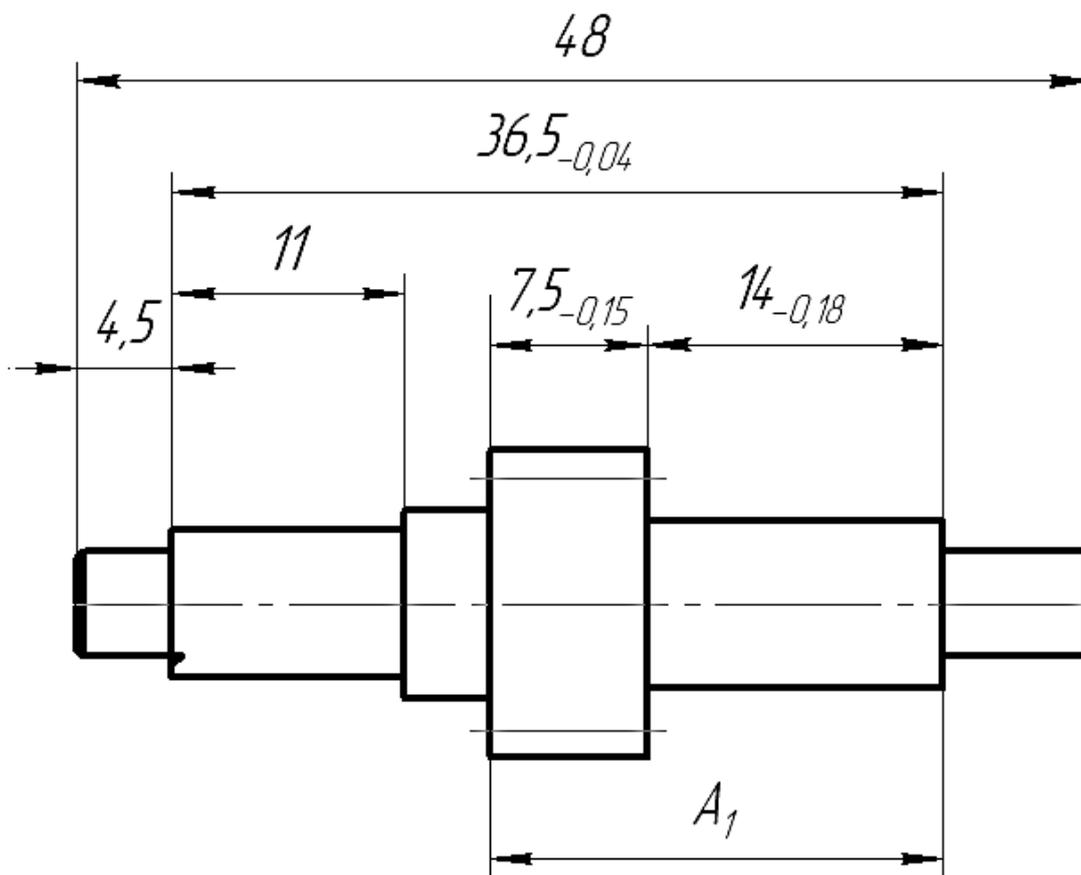


Рис. 81

Составив размерную цепь для данной детали можно определить размер A_1

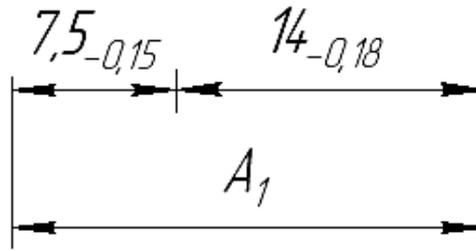


Рис. 82

Для этой размерной цепи 7,5 и 14 являются увеличивающими звеньями. Тогда получаем следующие значения параметры звена:

$$A_1 = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 7,5 + 14 = 21,5.$$

$$A_{1\max} = \sum \vec{A}_{j\max} - \sum \overleftarrow{A}_{j\min} = 0 - (0) = 0.$$

$$A_{1\min} = \sum \vec{A}_{j\min} - \sum \overleftarrow{A}_{j\max} = -0,15 - 0,18 = -0,33.$$

$$A_1 = 21,5_{-0,33}.$$

Параметры звена A_2 определяем из эскиза вкладыша 5:

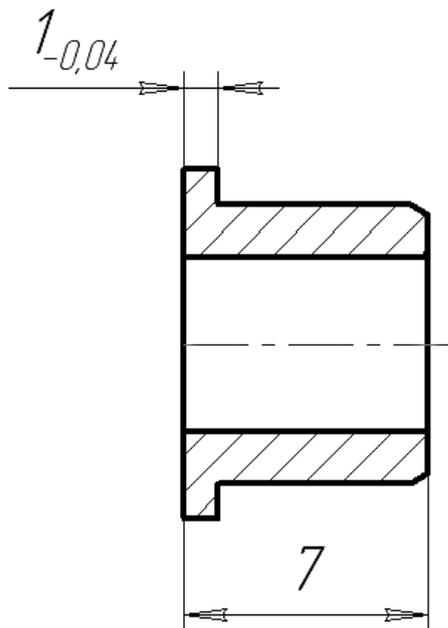


Рис. 83

$$A_2 = 1_{-0,04}$$

Параметры звена A_3 определяем из эскиза корпуса 6:

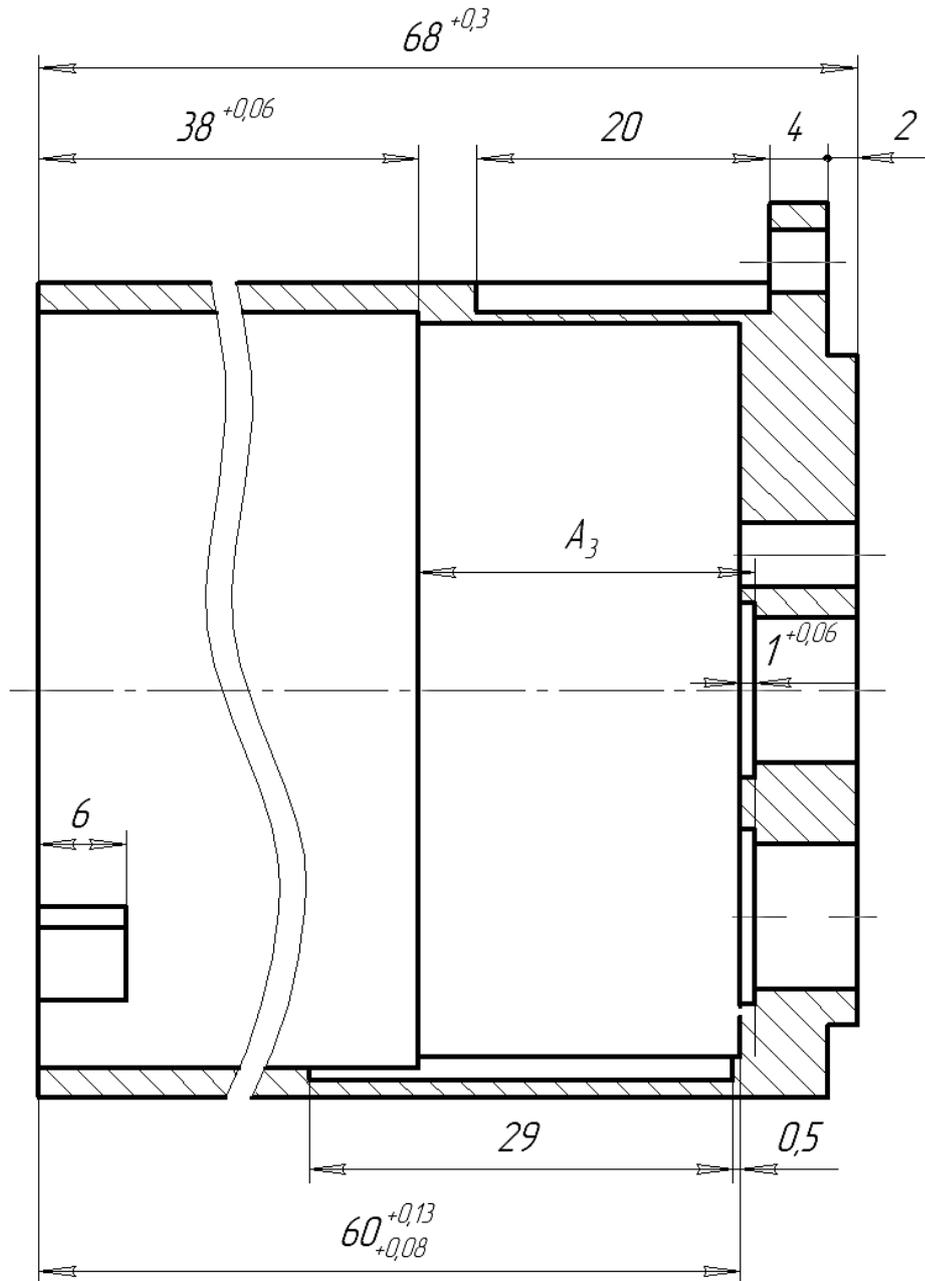


Рис. 84

Составив размерную цепь для данной детали можно определить размер A_3 :

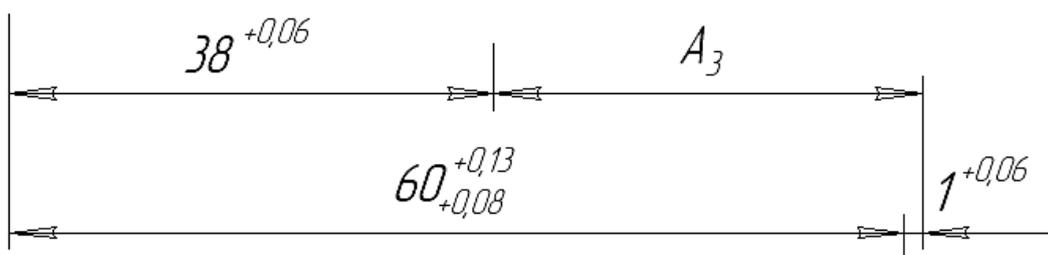


Рис. 85

Для этой размерной цепи 60 и 1 являются увеличивающими звеньями, а 38 уменьшающим. Тогда получаем следующие значения параметры звена:

$$A_3 = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 60 + 1 - 38 = 23.$$

$$A_{3\max} = \sum \vec{A}_{j\max} - \sum \overleftarrow{A}_{j\min} = 0,13 + 0,06 - (0) = 0,19.$$

$$A_{3\min} = \sum \vec{A}_{j\min} - \sum \overleftarrow{A}_{j\max} = 0,08 - 0,06 = 0,02.$$

$$A_3 = 23_{-0,02}^{+0,19}.$$

Таким образом, для размерной цепи сборки имеем следующие параметры составляющих звеньев:

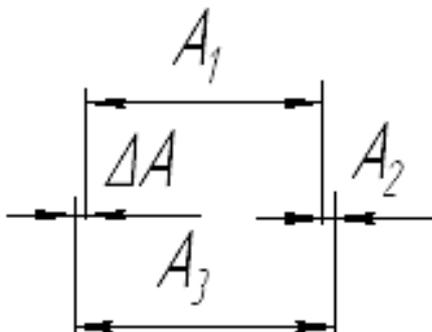


Рис. 86

$$A_1 = 21,5_{-0,33} - \text{уменьшающее звено.}$$

$$A_2 = 1_{-0,04} - \text{уменьшающее звено.}$$

$$A_3 = 23_{+0,02}^{+0,19} - \text{увеличивающее звено.}$$

$$A_{\Delta} = \sum \vec{A}_j - \sum \overleftarrow{A}_j = 23 - 1 - 21,5 = 0,5.$$

$$A_{\Delta\max} = \sum \vec{A}_{j\max} - \sum \overleftarrow{A}_{j\min} = 0,19 - (-0,33 - 0,04) = 0,56.$$

$$A_{\Delta\min} = \sum \vec{A}_{j\min} - \sum \overleftarrow{A}_{j\max} = 0,02 - 0 = 0,02.$$

В итоге: $A_{\Delta} = 0,5_{+0,02}^{+0,56}$.

Задача № 29

Брус с высотой b , шарнирно закрепленный в точке O , контактирует с круговым цилиндром в точке A , отстоящей на расстоянии a от торца бруса, на котором расположен шарнир. В точке O к брусу приложен момент M_0 , который создает усилие N_A прижатия бруса к цилиндру и приводит к появлению тормозящей силы T_A (k – коэффициент трения). Начальные условия: $t_0 = 0$, $\omega(0) = \omega_0$.

Найти время t_0 от начала торможения цилиндра до его полной остановки для случая вращения цилиндра по часовой стрелке; против часовой стрелки.

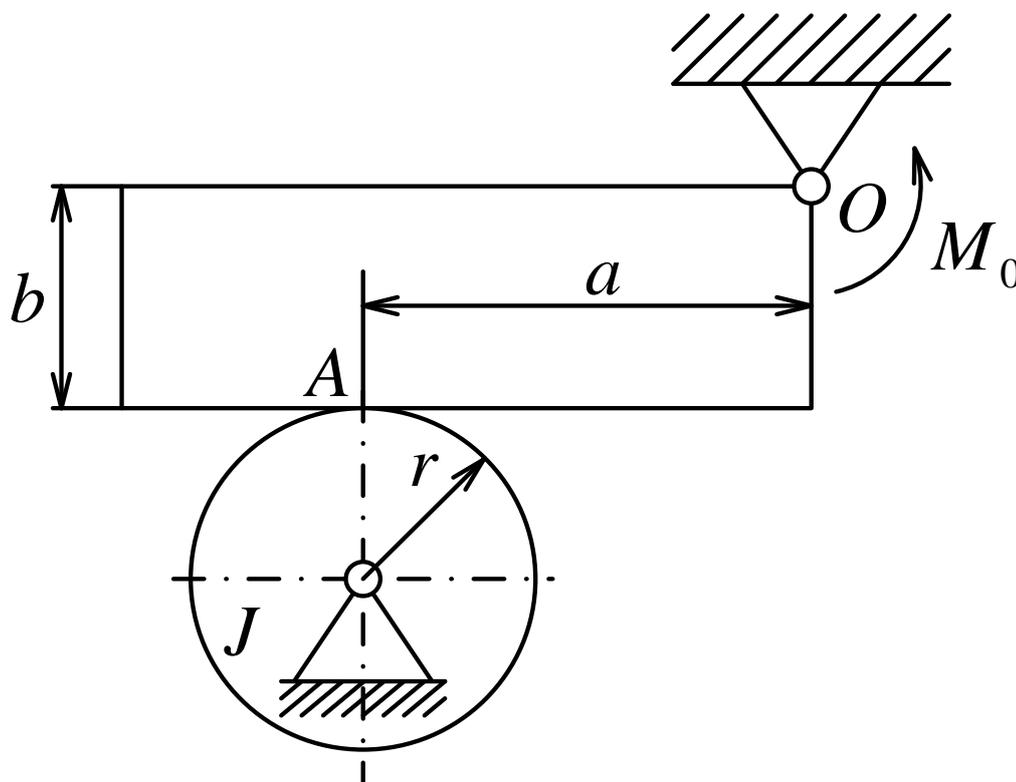


Рис. 87

Решение

Расчетная схема исследуемого механизма показана на рис. 88 (цилиндр вращается по часовой стрелке):

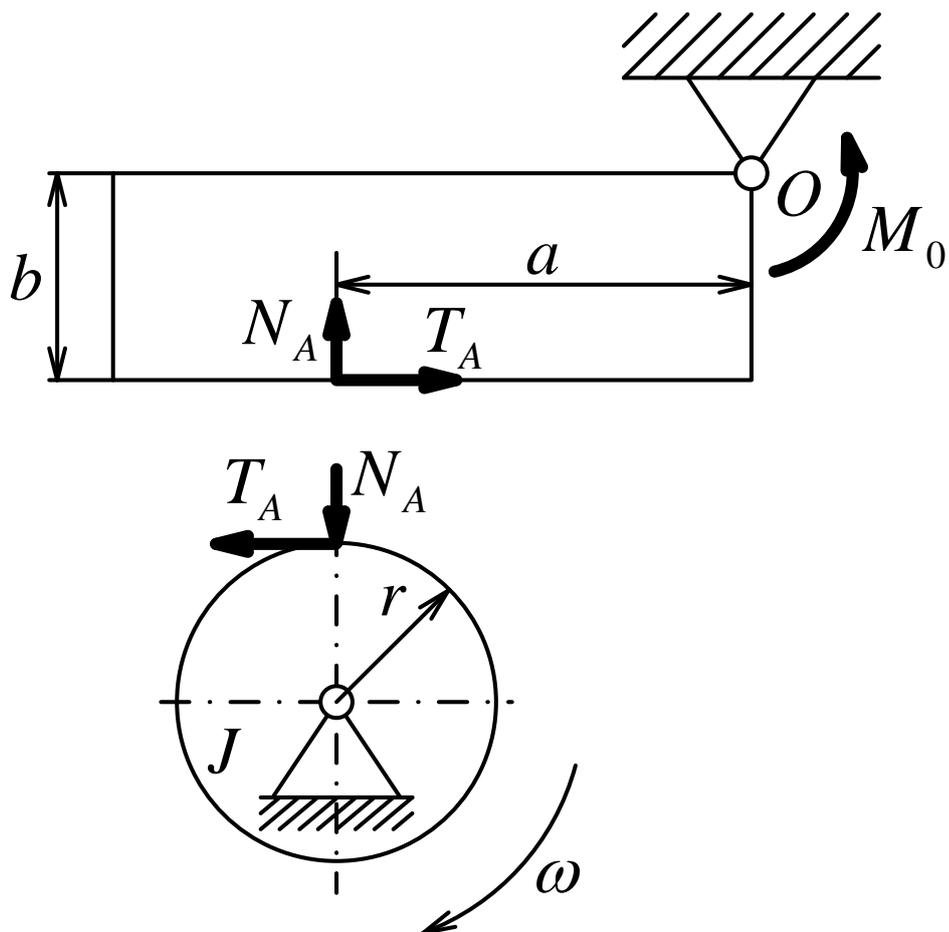


Рис. 88

Взяв сумму моментов сил, действующих на брус (весом бруса в сравнении с силами пренебрегаем) относительно точки O , и, приравняв ее нулю, имеем:

$$-N_A a + T_A b + M_0 = 0.$$

С учетом того, что $T_A = kN_A$:

$$N_A = \frac{M_0}{a - kb}.$$

Уравнение вращения цилиндра:

$$J\dot{\omega} = -T_A r = -kN_A r,$$

или

$$\dot{\omega} = -\frac{krM_0}{(a - kb)J}$$

Начальные условия: $t_0 = 0$, $\omega(0) = \omega_0$.

Решение задачи:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{krM_0}{(a - kb)J}t.$$

Из условия $\omega(t_0) = 0$ найдем время t_0 от начала торможения цилиндра до его полной остановки.

Ответ: $t = \frac{(a - kb)J\omega_0}{krM_0}$ – при вращении по часовой стрелке.

При $a > kb$ все выводы относительно времени торможения t_0 полностью согласуются с тормозящими свойствами силы трения. По мере же приближения a к kb время t_0 уменьшается. Поскольку при $a = kb$ время торможения равно нулю, а отрицательным оно быть не может, то и при $a < kb$ торможение цилиндра должно быть мгновенным, то есть – имеем удар трением. При изменении направления вращения цилиндра на противоположное время t_0 в этом случае будет:

Ответ: $t = \frac{(a + kb)J\omega_0}{krM_0}$ – при вращении против часовой стрелки.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА МЕХАТРОНИКИ



Кафедра Мехатроники, одна из старейших кафедр Университета ИТМО, история которой начинается с 30-х годов XX века. Первое упоминание о прародительнице кафедры Мехатроники содержится в приказе № 18 от 3.10.1930 по Учебному комбинату точной механики и оптики: "доцент Замыцкий Н.П. назначен с 1.10.1930 заведующим кафедрой Детали машин института точной механики и оптики". Важным этапом было существование в 30-х годах кафедры «Сопrotивление материалов и детали машин», поскольку речь шла уже не только о выборе схемы устройства (машины, прибора), но и об определении размеров и формы деталей при прочностном расчете. Руководил кафедрой в то время виднейший ученый в области строительной механики Яги Ю.И.

С 1945 г. руководство кафедрой осуществляет Н.И. Колчин, крупнейший учёный механик в самом широком смысле этого слова. Он расширил и обогатил исследовательскую и преподавательскую деятельность кафедры методами Теории машин и механизмов. Нельзя не сказать, что Н.И. Колчин был в той или иной мере учителем трех последующих заведующих кафедрой – Ф.Л. Литвина, К.И. Гуляева, Б.П. Тимофеева.

С 1951 года, заведующим кафедрой Теории механизмов и деталей машин, становится Рифтин Л.П. Именно в этот момент учебная и научная деятельность кафедры приобрела черты синтетической научной дисциплины, где выбор схем машины, прибора, устройства сопровождался учетом не только геометро-кинематических, но и динамических, прочностных характеристик.

1964 год: "Ректорат и Совет ЛИТМО поручили профессору Литвину Ф.Л. провести реорганизацию кафедры Теории механизмов и деталей машин в кафедру приборостроительного типа, закладывающую основы конструкторской подготовки специалистов, выпускаемых ЛИТМО". Во время заведования кафедрой Литвиным Ф.Л. была создана лабораторная база с оригинальными лабораторными установками, написаны многочисленные методические пособия, разработаны и изготовлены учебные стенды, макеты устройств и прозрачные модели, отвечающие современным требованиям учебного процесса в высшей школе.

Мало того, кафедра приобрела широкую известность в стране и за рубежом. Особенно массовой была подготовка научных кадров высшей квалификации для Болгарии и Эстонии. Кафедра до сих пор гордится такими бывшими аспирантами как Кольо Минков Петров – директор Института механики и биомеханики Болгарской АН, кандидат в президенты страны от Земледельческого союза в начале 90-х.

В области теории передач следует особо выделить два направления деятельности. Во-первых, проектирование червячных и глобоидных передач. В этом направлении существенных результатов добились В.И. Рыбаков и Н.Г. Линдтроп в червячных передачах, В.Д. Брицкий – в части глобоидных передач. Последний на долгое время определил основное поле своей научной деятельности – совершенствование прикладных методов теории поверхностей, отличающихся удобством проведения расчетов на ЭВМ, т.е. он совершенствовал методы анализа и синтеза передач одновременно (а иногда и с опережающим темпом) с развитием ЭВМ. Сегодня вошли в учебную практику матричные методы определения скоростей и ускорений, кривизны и геодезического кручения и пр., к созданию которых В.Д. Брицкий приступил еще в 60-х.

Во-вторых, оптимизационный синтез конических и гипоидных передач. Эта тема базировалась во многом на тесных связях с автомобильными гигантами страны – ЗИЛом, ГАЗом, ВАЗом, однако работы выходили далеко за пределы частных задач проектирования передач задних мостов автомобилей, тем более что уже после Ф.Л. Литвина кафедра много занималась этой

тематикой по договорам с предприятиями авиационной промышленности страны. Коническими и гипоидными передачами занимался большой отряд ученых кафедры: А.А. Заостровский, Л.Я. Либуркин, Б.Д. Зильберман, Б.П. Тимофеев, Ю.А. Синичкин, В.С. Смирнов, В.Н. Рубцов, Е.И. Гутман и др. занимались методами нарезания колес и оптимизацией качества передач, попутно решая глобальные задачи теории зубчатых зацеплений – "Обратную задачу", задачу синтеза передач с локализованным контактом – синтеза "локального", "двухточечного" и "четырёхточечного", синтеза с проверкой условий зацепления по всей активной действующей линии, с правкой условий ЭВМ в цикле, либо исполнителем по результатам анализа и т.д. И совсем уже оригинальную задачу решал под руководством Ф.Л. Литвина, А.М. Политавкин – образование поверхностей сопряженных гиперблоидальных винтов на скрещающихся осях с помощью двух режущих линий. Эти винты транспортировали жидкость с включением твердой фазы в замкнутом объеме. Новый метод синтеза сопряженных поверхностей в результате дал блестящий результат.

В-третьих, в 70-х на кафедре возникло направление на пересечении теории передач и механизмов и деталей приборов – это разработка теории точности механизмов и создание приборов для контроля моментов трогания и кинематической погрешности передаточных механизмов. Нельзя не отметить вклада Н.Г. Линдтропа, Б.П. Тимофеева, начавшего сотрудничество в этом направлении еще в 60-е годы с ЦНИИ Электроприбор, М.А. Ноздрин, много занимавшегося не только кинематомерами, но и специальными стендами оборонного назначения. Этой же тематикой при Ф.Л. Литвине начали заниматься В.А. Мурашев и Е.В. Шалобаев, защитившие кандидатские диссертации по мелко модульным зубчатым передачам позднее.

Весьма плодотворным было сотрудничество кафедры со столь известными профессорами нашего института как Г.А. Петухов и С.А. Родионов. С первым работа шла в русле многочисленных и исключительно плодотворных консультаций в части методов вычислительной математики, использования различных языков программирования. С профессором С.А. Родионовым особенно интенсивно сотрудничали работники кафедры в период работы над библиотекой программ автокода "Инженер", во многом предвосхитившего сегодняшнюю программу Pro-engineer.

Была начата еще одна область научных работ, темой которой являлся анализ и синтез пространственных стержневых механизмов и манипуляторов. Еще в 70-х кафедра ТМиДП подбиралась к мехатронной тематике, ведь роботы являются наиболее распространенными и типичными мехатронными устройствами, а манипуляционная система – неотъемлемый элемент промышленного робота. Пока еще не стоят вопросы интеллектуальности и антропоморфности роботов – все начинается, как и положено на кафедре теории механизмов и деталей приборов, с анализа и синтеза механизмов – манипуляционных систем, но слово синтез – создание, проектирование, дизайн, конструирование, уже присутствует.

В период заведования кафедрой ТМиДП Ф.Л. Литвин (1964-1977) являлся научным руководителем Ленинградского филиала семинара по теории механизмов и машин, действовавшего при отделении механики и процессов управления АН СССР. Он был членом Президиума научно-технического совета по ТММ МИНВУЗа СССР, членом редакции международного журнала "Mechanism and Machine Theory" (США).

В начале 1979 года заведующим кафедрой становится профессор Гуляев К.И. По своей направленности кафедра становится общеинженерной.

В 1989 году Тимофеев Б.П. приступил к заведыванию общеинженерной кафедрой Теории механизмов и деталей приборов, преобразовав её в 1991 году в выпускающую кафедру Мехатроники. Только в 1994 году специальность "Мехатроника" появилась в официальном списке специальностей.

С 2005 года кафедру возглавляет доцент Ноздрин М.А. В учебную и научную деятельность внедряются компьютерные технологии, разрабатываются инновационные образовательные программы, создаются новые лабораторные циклы и лаборатории. В 2009 году утверждена научная школа "Фундаментальные проблемы надежности и точности машин и приборов".

В 2011 году исполняющим обязанности заведующего становится Монахов Ю.С., в прошлом выпускник кафедры Мехатроники.

С 2012 года заведующим кафедрой становится профессор Мусалимов В.М.

В 2015 году кафедру Мехатроники возглавляет Монахов Ю.С.

Мусалимов Виктор Михайлович
Тимофеев Борис Павлович
Заморуев Георгий Борисович
Биндюк Владимир Владимирович
Брицкий Виталий Давыдович
Ноздрин Михаил Александрович
Резников Станислав Сергеевич
Монахов Юрий Сергеевич
Коваленко Павел Павлович
Абрамчук Михаил Владимирович

**СБОРНИК ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКОЙ
СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ
Часть 2**

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати 31.01.2017

Заказ № 3835

Тираж 75 экз.

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49