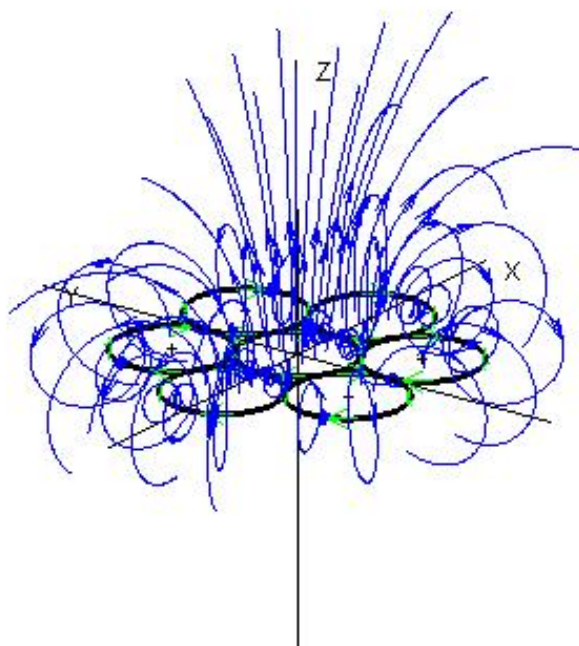


**А.С. Чирцов**  
**КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
**И КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ**  
**ПО КУРСУ «ВВЕДЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКУЮ И**  
**РЕЛЯТИВИСТСКУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ»**  
**(часть – 2)**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.С. Чирцов**

**КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
И КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ  
ПО КУРСУ «ВВЕДЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКУЮ И  
РЕЛЯТИВИСТСКУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ»  
(часть -2)**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2017

А.С. Чирцов, Краткий конспект лекций и контрольно-измерительные материалы по курсу «Введение в классическую и релятивистскую электродинамику» (часть -2)– СПб: Университет ИТМО, 2016. – 76 с.

Учебное пособие содержит сводку основных идей и их обоснования по углубленному курсу «Введение в классическую и релятивистскую электродинамику». Дополнительно включена подборка вопросов и задач по курсу для составления вариантов для рубежного тестирования и письменной части экзамена. Приведена подборка заданий для самостоятельных творческих работ учащихся с использованием компьютерного моделирования, предлагаемых для организации работы, включающей элементы научного исследования.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по углубленным программам в созданных в рамках реализации Университетом ИТМО Программы 5-100 Академических бакалавриатов: 01.03.02 – Математическое моделирование; 01.03.02 – Математические модели и алгоритмы в разработке программного обеспечения; 12.03.03 – Компьютерная фотоника; 12.03.03 – Оптические и квантовые технологии передачи, записи и обработки информации; 16.03.01 – Световая инженерия; 16.03.01 – Техническая оптика.

Рекомендовано к печати Ученым Советом Естественно-Научного Факультета № 5, 01.11.2016.

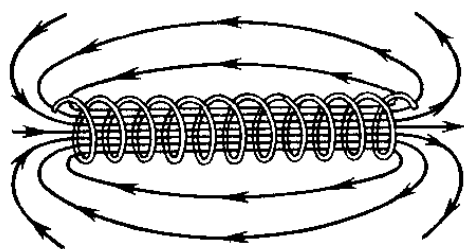


**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© Чирцов А.С., 2016

## Часть -2 МАГНИТОСТАТИКА



Вторая часть курса посвящена методам описания магнитостатических взаимодействий, возникающих в системах заряженных частиц, движущихся с постоянными скоростями относительно друг друга и относительно наблюдателя

### СОДЕРЖАНИЕ

Лекция -7. Постоянный электрический ток.....	5
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -7.....	9
Лекция- 8. Электрический ток в различных средах .....	12
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -8.....	16
Лекция- 9. Электростатическое поле равномерно движущегося заряда.....	19
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -9.....	24
Лекция- 10. Магнитное поле и векторный потенциал .....	29
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -10.....	34
Лекция- 11. Атомы и молекулы в магнитном поле .....	38
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -11.....	43
Лекция- 12. Магнитное поле в веществе .....	46
Контрольно-измерительные материалы по теме Лекции -12.....	53
Приложение. Компьютерное моделирование нелокальной плазмы .....	56
Кафедра физики .....	70

**Соотношения, которые в ходе изучения курса необходимо понять и запомнить навсегда**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{j})$$

Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \text{grad } E$$

Закон Ома для пассивного участка в дифференциальной форме

$$I = \frac{-\delta \varphi \pm E}{R}$$

Закон Ома для активного участка цепи с сосредоточенными параметрами

$$q' = q$$

Инвариантность электрического заряда

$$E'_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad E'_\tau = E_\tau$$

Релятивистский закон преобразования электрических полей при переходе к движущейся системе отсчета

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{R}) = q_k \left[ \frac{\mathbf{u}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{I}{c} \int_V \left[ d\mathbf{l}(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]$$

Магнитное поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью и макроскопически усредненное магнитное поле, создаваемое системой постоянных токов

$$\mathbf{F}_L = Q \left[ \frac{\mathbf{u}_Q}{c}, \mathbf{B} \right]$$

Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \approx \int_V dV(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

$$\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}]$$

Векторные потенциалы, создаваемые системой движущихся точечных зарядов и заданным распределением токов

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \frac{\mathbf{j}}{c}$$

Уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0,$$

$$[\nabla, \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Дифференциальная форма уравнений магнитостатики вакуума

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \equiv \hat{\mu} \mathbf{H},$$

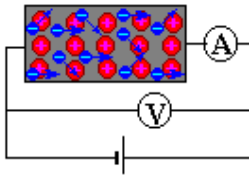
$$\hat{\mu} = 1 + 4\pi \hat{\chi}_H$$

Введение вспомогательного вектора «напряженности магнитного поля»  $\mathbf{H}$ .

$$[\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c},$$

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0$$

Дифференциальная форма уравнений магнитостатики для материальной среды



## Постоянный электрический ток

При создании в проводнике постоянной разности потенциалов в нем возникает электрическое поле, вызывающее направленное движение свободных носителей зарядов, называемое электрическим током. Для большинства проводящих сред плотность электрического тока оказывается пропорциональной напряженности электрического поля. При протекании электрического тока по проводнику силы электрического поля и сторонние силы совершают работу, что приводит к выделению тепловой энергии.

### Соотношения, которые полезно помнить

$$\mathbf{j} \equiv qn\langle \mathbf{u} \rangle$$

Определение плотности электрического тока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{j})$$

Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$$

Закон Ома для пассивного участка в дифференциальной форме

$$I = \frac{-\delta\varphi \pm E}{R}$$

Закон Ома для активного участка цепи с сосредоточенными параметрами

$$\frac{dw_Q}{dt} = (\hat{\sigma}^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{j})$$

Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца

$$\frac{dW_Q}{dt} = I^2 R$$

Закон Джоуля—Ленца в интегральной форме для однородного проводника

## 7.1 Основные определения

$$\mathbf{j} \equiv qn\langle \mathbf{v} \rangle \quad (7.1)$$

Определение вектора плотности электрического тока.  
 $n$  - концентрация свободных носителей,  $q$  - переносимый одним носителем заряд,  $\langle \mathbf{v} \rangle$  - средняя скорость направленного движения.

$$I \equiv \int_{\Gamma_2} (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = \frac{dQ}{dt} \quad (7.2)$$

Сила электрического тока, протекающего через сечение  $\Gamma_2$  проводника.

$$\frac{dQ_V}{dt} = -\frac{dQ_j}{dt} = -\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{j} d\mathbf{S}) \quad (7.3)$$

Интегральная форма записи закона сохранения заряда.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{j}) \quad (7.4)$$

Дифференциальная форма записи закона сохранения заряда.

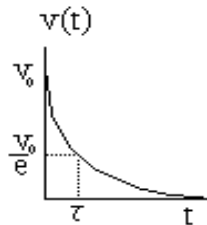
## 7.2 Закон Ома для цепи с распределенными параметрами



(7.5)

Уравнение движения свободных носителей зарядов в проводнике, полученное в рамках классической теории проводимости.

$$q\mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{v}_0 \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right) = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.6)$$



Связь коэффициента вязкого трения  $h$  и постоянной времени релаксации  $t$ .

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \frac{q}{m} \frac{\mathbf{E} + \mathbf{F}/q}{\eta} (1 - \exp(-t/\tau)) \quad (7.7)$$

Средняя скорость направленного движения носителей зарядов в проводнике при наличии электрического поля и сторонних сил.

$$\mathbf{j}(t \rightarrow \infty) = n \frac{q^2}{m\eta} (\mathbf{E} + \mathbf{F}/q) \quad (7.8)$$

Соответствующая решению (7.7) плотность тока в модельном проводнике.

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E} \quad (7.9)$$

Дифференциальная форма закона Ома

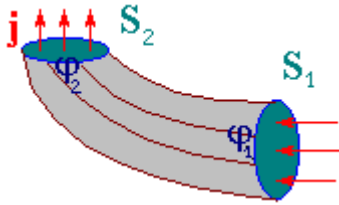


Рис.7.1 Трубка тока и обозначения, используемые для вывода интегральной формулировки закона Ома.

$$I = \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \int_S (\sigma \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \text{const} \quad (7.10) \quad \text{Сила электрического тока в трубке.}$$

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\Delta\varphi}{R} \quad (7.11) \quad \text{Интегральная форма закона Ома для пассивного участка.}$$

$$I = \frac{-\Delta\varphi \pm \Xi}{R} \quad (7.12) \quad \text{Закон Ома для активного участка (интегральная форма).}$$

U - падение напряжения,  
Ξ - ЭДС, R - сопротивление.

### Пример 7.1 Объемные токи

Рассчитать электрическое сопротивление между обкладками цилиндрического конденсатора, заполненного однородным слабо проводящим диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  и удельной проводимостью  $\sigma$ . Геометрические размеры конденсатора считать известными, краевыми эффектами пренебречь. Обобщить полученный результат на случай конденсатора произвольной формы. Найти закон убывания заряда конденсатора из-за утечки зарядов через слабо проводящий однородный диэлектрик.

#### Решение:

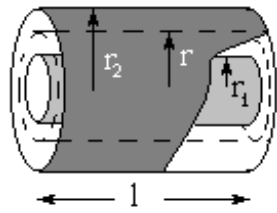
$$2\pi r l D = 4\pi Q \Rightarrow \quad (7.13) \quad \text{Расчет электрического поля в}$$

$$D(r) = \frac{2Q}{rl} \quad \text{заполненном однородным}$$

$$E(r) = \frac{2Q}{\epsilon r l} \quad \text{диэлектриком пространстве между}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2Q}{\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{обкладками цилиндрического}$$

$$I = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{\sigma}{\epsilon} \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi \frac{\sigma}{\epsilon} Q \quad \text{конденсатора.}$$



$$(7.14) \quad \text{Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора.}$$

$$(7.15) \quad \text{Ток, протекающий в слабо проводящей среде между обкладками цилиндрического конденсатора.}$$

$$R = \frac{\int_A^B (\mathbf{E}, d\mathbf{l})}{\int_{\Gamma_2} (\mathbf{j}, d\mathbf{S})} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (7.16) \quad \text{Сопротивление между обкладками цилиндрического конденсатора, заполненного слабо проводящим диэлектриком.}$$





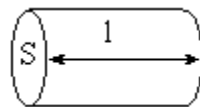
(7.17) Сопротивление утечки конденсатора произвольной формы с емкостью  $C$ .

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = U_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon}\right)$$

(7.18) Разряд конденсатора из-за наличия проводимости диэлектрика.

### 7.3 Электрический ток в цепях с сосредоточенными параметрами

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



(7.19) Сопротивление однородного проводника цилиндрической формы.

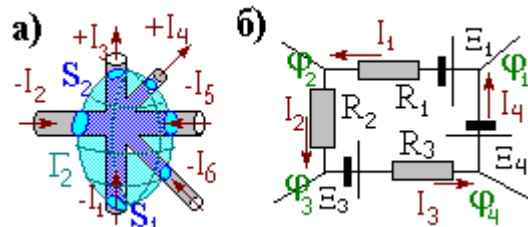


Рис.7.2 Законы Кирхгофа для цепей постоянного тока.

$$\sum_k I_k = 0$$

(7.20) Первый закон Кирхгофа

$$\begin{cases} I_k R_k = \varphi_k - \varphi_{k+1} + \Xi_k \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(7.21) Связь падений напряжения, токов и потенциалов для активных участков, составляющих изображенный на рис. 7.2 замкнутый контур

$$\sum_{k=1}^N I_k R_k = \sum_{k=1}^N \Xi_k$$

(7.22) Второй закон Кирхгофа.

#### Пример 7.2 «Лестница» сопротивлений

Рассчитать входное сопротивление схемы, состоящей из бесконечного числа одинаковых ячеек, часть которой изображена на рис. 7.3.

Решение:

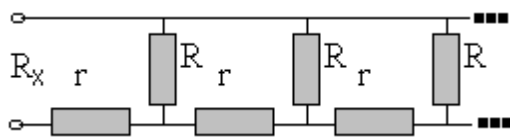
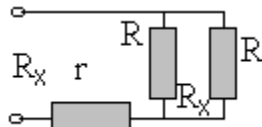


Рис. 7.3 «Лестница сопротивлений»

$$R_x = r + \frac{RR_x}{R + R_x}$$



(7.24) Эквивалентная схема «лестницы» и уравнение для нахождения входного сопротивления.

$$R_x = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR}$$

(7.25) Входное сопротивление бесконечной «лестницы» сопротивлений.

## 7.4 Закон Джоуля-Ленца

$$(q\mathbf{E}, \mathbf{u}) + (\mathbf{F}, \mathbf{u}) - \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \quad (7.25) \quad \text{Условие стационарного движения носителей тока}$$

$$\frac{dw_Q}{dt} = m\eta\mathbf{u}^2 = \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}}{q}, qn\mathbf{u} \right) \quad (7.26) \quad \text{Тепловая мощность, выделяемая в единице объема}$$

$$\frac{dw_Q}{dt} = (\sigma^{-1}\mathbf{j}, \mathbf{j}) = \rho\mathbf{j}^2 \quad (7.27) \quad \text{Закон Джоуля-Ленца (дифференциальная форма записи)}$$

$$\frac{d}{dt}W_Q = I^2R \quad (7.28) \quad \text{Закон Джоуля-Ленца (интегральная форма записи)}$$

### КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

#### Экзаменационные вопросы

##### 7.1 Постоянный электрический ток

- Определения силы тока и вектора плотности тока
- Закон Ома для объемных токов
- Закон Ома для пассивного участка цепи с сосредоточенными параметрами
- Закон Джоуля-Ленца
- Пример: расчеты разветвленных цепей с сосредоточенными параметрами

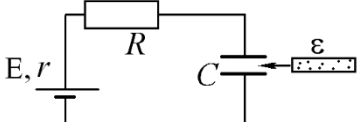
#### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.7.1	Запишите определение плотности тока
3.7.2	Дайте определение силы тока
3.7.3	Как связаны между собой электрический заряд, сила тока и плотность тока?
3.7.4	Запишите закон сохранения электрического заряда в интегральной форме.
3.7.5	Запишите закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.
3.7.6	Сформулируйте закон Ома для пассивного участка (в интегральной форме).
3.7.7	Сформулируйте закон Ома для активного участка (в интегральной форме).
3.7.8	Сформулируйте законы Кирхгофа.
3.7.9	Запишите алгоритм вычисления электрического сопротивления между двумя проводниками, помещенными в слабо проводящую среду с

	известными свойствами.
3.7.10	Сформулируйте закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.
3.7.11	Сформулируйте закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.
3.7.12	Дайте определение ЭДС.

**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях)

Р.3.7.1	Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии, получите закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме для пассивного участка цепи.
Р.3.7.2	Исходя из дифференциальной формы записи закона Джоуля—Ленца получите его интегральный аналог
Р.3.7.4*	Обобщите закон Джоуля-Ленца на случай активного участка цепи.
Р.3.7.5	$N$ одинаковых элементов с известной ЭДС и внутренним сопротивлением $r$ соединены в батарею: а) параллельно; б) последовательно. Батарея замкнута на внешнее сопротивление $R$ . В какой из двух схем на внешнем сопротивлении выделится большее количество теплоты?
Р.3.7.6	$N$ одинаковых элементов с известным внутренним сопротивлением и ЭДС соединены в кольцо. Что покажет идеальный вольтметр, подключенный к $n$ элементам этого кольца?
Р.3.7.7	Рассчитать электрическое сопротивление одиночного шара, помещенного в слабо проводящую бесконечную среду, проводимость которой известна.
Р.3.7.8*	Рассчитать электрическое сопротивление между небольшим металлическим шариком радиусом $r$ и бесконечной проводящей плоскостью, удаленной от шара на расстояние $l$ , существенно превышающее его радиус. Все пространство между шаром и плоскостью заполнено однородным слабо проводящим диэлектриком с известными электрическими свойствами.
Р.3.7.9*	Из отрезков провода с сопротивлением $r$ собрана очень большая сеть сопротивлений с квадратной ячейкой. Определить электрическое сопротивление между двумя соседними вершинами сети.
Р.3.7.10*	<p>Электромотор подключен к источнику постоянного напряжения <math>U</math>. Через работающий электромотор протекает электрический ток <math>I</math>. Если вал электромотора закрепить (не давать ему вращаться), сила тока, протекающего через его обмотку, возрастет до <math>I_0 &gt; I</math>. Какая механическая мощность развивается электромотором при работе?</p> <p>Указание. При работе электромотора электрический ток протекает по проводнику, представляющему собой рамку, вращающуюся в специально создаваемом магнитном поле. При этом движущиеся по проводнику носители зарядов (электроны) испытывают действие дополнительных (сторонних) магнитных сил, пропорциональных скорости движения проводника в магнитном поле. Именно наличие этих сил объясняет наблюдаемое различие токов, протекающих через обмотку работающего и заторможенного мотора.</p>

Р.3.7.11*	<p>При включении в электрическую цепь нескольких параллельно соединенных резисторов на них возникает одинаковое падение напряжения. Как это согласуется с хорошо известным из бытовой практики заметным уменьшением накала электрических лампочек в случае параллельного подключения к одной розетке большого их числа? Ответ подтвердите расчетом.</p> <p>Указание. Следует помнить, что и источник напряжения в осветительной сети, и провода, соединяющие его с розеткой, обладают малым, но конечным электрическим сопротивлением... Еще одна подсказка состоит в том, что попытки подключения к розетке очень большой нагрузки обычно заканчиваются «перегоранием пробок».</p>
Р.3.7.12*	<p>Какое количество теплоты выделится на сопротивлении <math>R</math> (электрическая схема приведена на рис) после того, как во внутренний объем конденсатора емкостью <math>C</math> был помещен диэлектрик с проницаемостью <math>\epsilon</math>.</p> 

**Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования**

К.3.7.1	<p>Попытайтесь разработать оригинальную «программу-конструктор», позволяющую пользователю создавать на экране дисплея электрические цепи постоянного тока, содержащие источники ЭДС, резисторы, конденсаторы и соединительные провода и определять токи и напряжения на элементах схемы, используя «виртуальные» вольтметр и амперметр.</p> <p>Указание. При составлении алгоритма расчета цепей целесообразно использовать правила Кирхгофа. При разработке современного и удобного интерфейса такой программы важно вовремя остановиться: подобное занятие весьма увлекательно, но непосредственно к физике не относится.</p>
К.3.7.2	<p>Используя готовые пакеты моделирующих программ или собственные разработки, попытайтесь научиться рассчитывать электрическое сопротивление между двумя идеальными проводниками заданной формы, помещенными в вещество с малой электропроводностью.</p>
К.3.7.3	<p>Попытайтесь разработать программу, моделирующую эволюцию во времени произвольно создаваемой пользователем 3D- системы заряженных и нейтральных частиц, некоторые из которых могут быть закреплены в пространстве. Предусмотрите корректную обработку «неприятных» для моделирования ситуаций одновременного пролета через одну точку двух разноименных частиц: частицы разумно представлять в виде шариков задаваемых размеров, при соприкосновении границ которых возникают упругие отскоки.</p>



## Электрический ток в различных средах

В реальных проводящих средах закон Ома выполняется в лучшем случае приближенно. Наряду с линейными проводящими средами существуют различные типы сред, для которых связь между силой тока и приложенным напряжением не может считаться даже приближенно линейной. Как линейные, так и нелинейные проводящие среды находят широкое практическое применение в электротехнике.

### Соотношения, которые полезно помнить

$$\rho = \frac{1}{nq^2} \sqrt{\frac{mkT}{\lambda}}$$

Классическая оценка удельного сопротивления проводника.

$$I = \text{const} \cdot \varphi^{3/2}$$

«Закон 3/2» для тока в вакууме

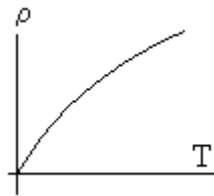
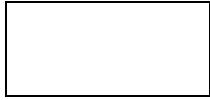
1	2	Выход
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

Логическая операция, выполняемая базовым элементом (2И-НЕ) микросхем серии ТТЛ

## 8.1. Классическая теория электропроводности металлов

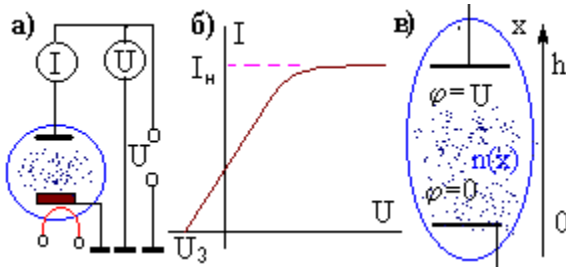
$$\langle u \rangle \approx \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (8.1)$$

Классическая оценка скорости хаотического движения электронов в проводнике.



(8.2) Классическая оценка удельного сопротивления проводника.

## 8.2. Электрический ток в вакууме



Вакуумный диод.  
 а). Схема для изучения вольт - амперной характеристики.  
 б) Вольт- амперная характеристика.  
 в) К выводу «закона 3/2»

Рис.8.1



$$I_H = const \cdot n_e = const \cdot \exp\left(-\frac{A}{kT}\right) \quad (8.3)$$

Определение напряжения запирания

$$I = q \cdot n(x) \cdot v(x) \cdot S \quad (8.4)$$

Классическая оценка величины тока насыщения.

$$\frac{mv^2}{2} - q\varphi(x) = 0 \quad (8.5)$$

Сила тока, протекающего через вакуумный диод

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -4\pi\rho = 4\pi qn(x) \quad (8.6)$$

Связь скорости электронов с потенциалом внутри диода

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi I}{S} \sqrt{\frac{m}{2q}} \varphi^{-1/2} \quad (8.7)$$

Уравнение Пуассона для потенциала в вакуумном диоде

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{4\pi I}{S} \sqrt{\frac{m}{2q}} (2\varphi^{1/2}) + 0 \quad (8.8)$$

Дифференциальное уравнение для потенциала в диоде

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 4\sqrt{\frac{\pi I}{S}} \sqrt{\frac{m}{2q}} dx \Rightarrow I = const \cdot \varphi^{3/2} \quad (8.9)$$

“Первый интеграл“ от уравнения (8.8)

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 4\sqrt{\frac{\pi I}{S}} \sqrt{\frac{m}{2q}} dx \Rightarrow I = const \cdot \varphi^{3/2} \quad (8.10)$$

Закон 3/2 (связь тока и напряжения в вакуумном диоде).

### 8.3. Электрический ток в газах

$$\begin{cases} \frac{dn_i(\mathbf{v}_i)}{dt} = -(\nabla, \mathbf{j}_i) + \\ + \sum_{k,p} \int d\mathbf{v}_k d\mathbf{v}_p \cdot \sigma_{pk}^{(+i)}(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_k) \cdot n_p(\mathbf{v}_p) \cdot n_k(\mathbf{v}_k) - \\ - \sum_k \int d\mathbf{v}_k \cdot \sigma_{ik}^{(-i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) \cdot n_i(\mathbf{v}_i) \cdot n_k(\mathbf{v}_k) + \dots \end{cases} \quad (8.11)$$

Сильно упрощенное уравнение для распределения концентрации электронов  $n$  в газоразрядной плазме. Учтены только двухчастичные столкновения.  $n_i$  - концентрации частиц различного сорта,  $\mathbf{j}_i$  - их токи,  $\sigma_{ik}$  - сечения столкновительных процессов, приводящих к образованию или гибели частиц.

#### Пример 8.3. Простейшая модель счетчика Гейгера.

Рассчитать силу электрического тока, протекающего через разрядную трубку длиной  $L$  с площадью поперечного сечения  $S$ , если известно, что внешнее  $\gamma$  излучение ежесекундно создает в единице объема трубки  $w$  электрон - ионных пар, а каждый свободный электрон на единице длины своего направленного движения создает за счет столкновений  $\alpha$  новых пар. Скорость направленного дрейфа электронов считать постоянной по всей длине трубки.

#### Решение

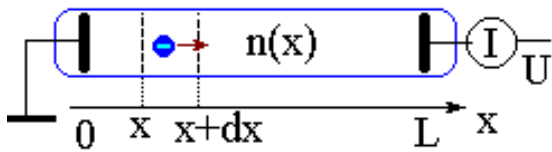


Рис. 8.2 Простейшая модель счетчика Гейгера.

$$\begin{aligned} n(x) \cdot v \cdot \delta t \cdot S + \\ + w \cdot \delta t \cdot S \cdot \delta x + \alpha \cdot \delta x \cdot n(x) \cdot v \cdot \delta t \cdot S = \\ = n(x + \delta x) \cdot v \cdot \delta t \cdot S \end{aligned} \quad (8.12)$$

Уравнение баланса для числа частиц в элементарном объеме разряда.

$$\frac{dn(x)}{dx} = \alpha n(x) + \frac{w}{v} \quad (8.13)$$

Дифференциальное уравнение для концентрации электронов в разряде.

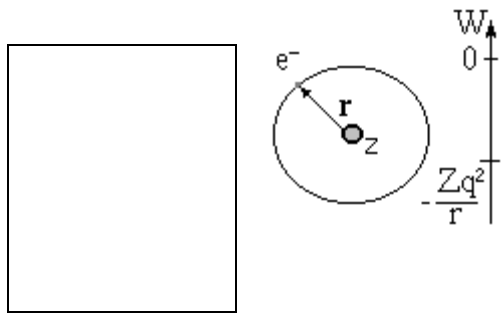
$$n(x = L) = \frac{w}{\alpha v} (e^{\alpha L} - 1) \quad (8.14)$$

Концентрация электронов вблизи анода газоразрядной трубки.

$$I = qnvS = \frac{qwS}{\alpha} (\exp(\alpha L) - 1) \quad (8.15)$$

Полный электрический ток в газоразрядной трубке.

## 8.4. Элементы зонной теории проводимости кристаллов



(8.16) Расчет полной механической энергии электрона, вращающегося вокруг ядра по круговой орбите радиуса  $r$ . Изображение движения электрона на оси энергий.

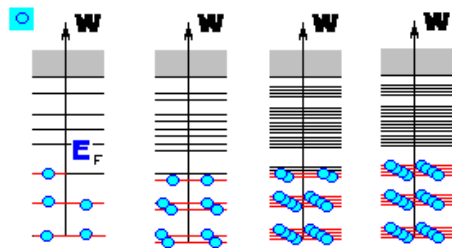


Рис. 8.3. Зонная теория проводимости.  
 А - уединенный атом  
 Б - образование ковалентной связи в двухатомной молекуле  
 В - проводящий кристалл  
 Г - непроводящий кристалл.  
 Черным цветом показаны свободные состояния, красным - занятые.

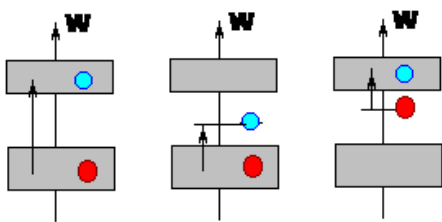


Рис.8.4. Типы полупроводников:  
 А - собственные  
 Б - акцепторные  
 В - донорные.  
 Стрелками показаны переходы электронов, голубыми и красными кружками - образующиеся при переходах электроны и дырки соответственно.

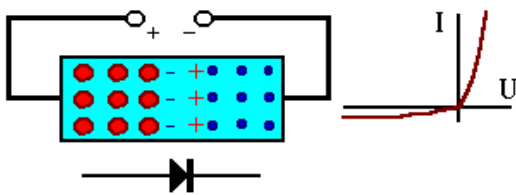


Рис.8.5. p-n - переход, его обозначение и вольт-амперная характеристика.

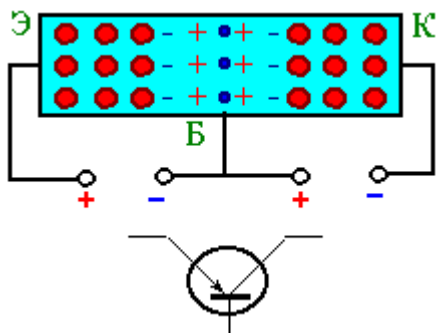


Рис.8.6. p-n-p транзистор.



## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

### Экзаменационные вопросы

#### 8.1 Электрический ток в вакууме

- Термоэлектронная эмиссия
- Вывод закона  $3/2$  для вакуумного диода
- Вольт-амперная характеристика вакуумного диода
- Выпрямитель
- Электронно-лучевая трубка

#### 8.2 Электрический ток в газах

- Планетарная модель атома Резерфорда-Бора
- Ионизация и рекомбинация
- Простейшая модель тлеющего разряда
- Понятие об элементарных процессах в плазме.
- Атмосферное электричество

#### 8.3 Механизм электропроводности металлов

- Классическая теория электропроводности металлов
- Трудности классической теории
- Энергетические спектры атомов, молекул и кристаллов
- Основы зонной теории проводимости.
- Современные представления о механизме возникновения сопротивления проводников

#### 8.5. Полупроводники

- Механизм проводимости в собственных полупроводниках
- Использование собственных полупроводников
- Механизм проводимости в примесных полупроводниках
- p-n переход
- Полупроводниковый диод и транзистор
- Цифровые и аналоговые микросхемы

### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.8.1	Оцените удельное сопротивление металлического проводника, воспользовавшись классической моделью проводимости.
3.8.2	Перечислите основные трудности классической теории электропроводности
3.8.3	Запишите выражения для стационарных орбит электрона в атоме водорода в рамках планетарной модели Резерфорда-Бора
3.8.4	Нарисуйте схему энергетических уровней для атома водорода
3.8.5	Перечислите основные механизмы ионизации атомов в тлеющем разряде.
3.8.6	Почему доминирующая роль в столкновительной ионизации атомов или молекул в газовом разряде принадлежит процессам, вызванным электронными ударами, а не столкновениями с ионами?

3.8.7	Нарисуйте примерный вид вольт-амперной характеристики вакуумного диода.
3.8.8	Нарисуйте простейшую схему выпрямителя переменного напряжения, использующего вакуумный диод.
3.8.9	Нарисуйте примерный вид распределения электронов по зонам кристаллического проводника при $T=0$ и покажите на нем положение границы Ферми.
3.8.10	Нарисуйте примерный вид распределения электронов по зонам кристаллического диэлектрика при $T=0$ и покажите на нем положение границы Ферми.
3.8.11	Нарисуйте структуру энергетических зон и распределение электронов по этим зонам при $T=0$ для собственного полупроводника.
3.8.11	Нарисуйте структуру энергетических зон и примесных уровней вместе с распределением электронов по ним при $T=0$ для полупроводника донорного типа.
3.8.12	Нарисуйте структуру энергетических зон и примесных уровней вместе с распределением электронов по ним при $T=0$ полупроводника акцепторного типа
3.8.13	Нарисуйте схему двухполупериодного выпрямителя, созданного на базе полупроводниковых диодов.
3.8.14	Нарисуйте структуру кристалла, представляющего собой <i>pnp</i> -транзистор.
3.8.15	Нарисуйте структуру кристалла, представляющего собой <i>npr</i> -транзистор.
3.8.16	Нарисуйте простейшую схему генератора высокочастотной последовательности прямоугольных импульсов, собранного на схеме 2И-НЕ
3.8.17	Нарисуйте простейшую схему триггера, собранного на схеме 2И-НЕ

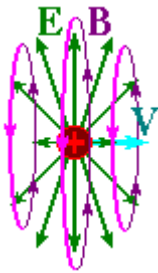
**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях )

Р.3.8.1	Пользуясь планетарной моделью атома рассчитайте энергию ионизации атома водорода из основного состояния.
Р.3.8.2	Дополнив рассмотренную на лекции простейшую модель тлеющего несамостоятельного разряда в газонаполненной трубке процессами выбивания электронов с катода при его бомбардировке ионами ( приход на катод одного иона вызывает появление свободного электрона с вероятностью $\gamma < 1$ ) покажите, то в такой системе возможно горение самостоятельного разряда.
Р.3.8.3	Рассчитайте входное сопротивление очень длинного аксона, представляющего собой помещенную в хорошо проводящую среду цилиндрическую трубку, заполненную хорошо проводящей жидкостью (удельная проводимость $\sigma$ ), стеки которых толщиной $h$ сделаны из материала с достаточно высоким удельным сопротивлением.
Р.3.8.4	Хорошо известно, что Земля является достаточно хорошим

	<p>проводником. Еще лучшим проводником является ионосфера – слой практически полностью ионизованного газа, находящегося на высоте примерно 50 км над поверхностью Земли. Весьма удивительный факт состоит в том, что между ионосферой и поверхностью Земли существует гигантская (порядка 5000000 В) разность потенциалов (механизмом, подзаряжающим «небо» являются грозы). Оцените полный ток, протекающий с «неба на Землю» и выделяющуюся при этом тепловую мощность.</p>
Р.3.8.5.	<p>Для определения качества расплава кремния, используемого для создания полупроводниковых матриц, иногда применяется следующий метод. На достаточно толстый плоский слой диэлектрика (его проводимость практически равна нулю) наносится тонкий слой исследуемого вещества, толщина которого известна. Полученная система «прокалывается» двумя проводящими зондами (цилиндрическими проводниками большой длины, ориентированными перпендикулярно поверхностям диэлектриков). Радиусы зондов и расстояние между их осями известны. Определить электрическое сопротивление между зондами, если их собственная проводимость очень велика. Постарайтесь решить задачу точно!</p> <p>8.1.</p>

### Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования

К 3.8.1	<p>Создайте простейшую компьютерную модель проводника, имеющего форму шара. Внутри шара равномерно распределен положительный заряд («кристаллическая решетка») и случайным образом расположены отрицательно заряженные частицы («электроны»), способные двигаться, взаимодействуя друг с другом и «решеткой» с помощью электростатических сил и испытывая действие сил вязкого трения (зависят от скорости линейно). Исследуйте поведение созданного Вами модельного проводника во внешнем электрическом поле и в случае сообщения ему дополнительного электрического заряда. Соответствует ли численное решение, найденное для построенной модели проводящего шара, ранее полученным решениям задач электростатики проводников?</p>
К 3.8.2	<p>. Используйте сформулированные в задаче 8.К1 идеи для создания компьютерной модели пассивного участка цепи в виде проводника, имеющего форму вытянутого цилиндра, между торцами которого течет постоянный электрический ток. Какие дополнительные элементы следует ввести в модель для источника ЭДС? Пригодна ли созданная Вами модель проводника для демонстрации законов Ома и Джоуля—Ленца?</p>



## Электрическое поле равномерно движущегося заряда

Задачи о расчете взаимодействий между равномерно движущимися электрическими зарядами могут быть сведены к электростатическим путем перехода к новой инерциальной системе отсчета, относительно которой эти заряды находятся в состоянии покоя. Возникающие при обратном переходе к исходной системе отсчета изменения сил в классической электродинамике традиционно учитывают введением дополнительных магнитных взаимодействий.

### Соотношения, которые полезно помнить

$$q' = q$$

Инвариантность электрического заряда

$$E'_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad E'_\tau = E_\tau$$

Релятивистский закон преобразования электрических полей при переходе к движущейся системе отсчета

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{R}) = q_k \left[ \frac{\mathbf{u}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3}$$

Магнитное поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \int_V \left[ d\mathbf{l}(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]$$

Макроскопически усредненное магнитное поле, создаваемое системой постоянных токов

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \int_V \left[ d\mathbf{l}(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]$$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{F}_L = Q \left[ \frac{\mathbf{u}_Q}{c}, \mathbf{B} \right]$$

Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле

$$d\mathbf{F}_A = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$$

Сила Ампера, действующая на прямолинейный отрезок провода с током

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}]$$

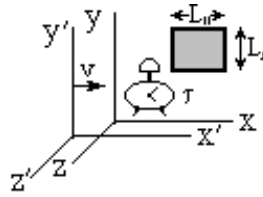
Момент сил, действующий на рамку с током с магнитным моментом  $\mathbf{m}$

## 9.1 Инвариантность электрического заряда

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$L'_{\parallel} = L_{\parallel} \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

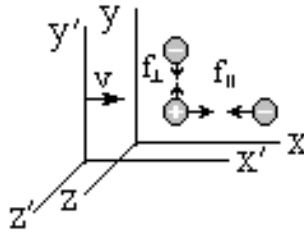
$$L'_{\perp} = L_{\perp}$$



(9.1) Релятивистские законы преобразования временных интервалов и длин отрезков.

$$f'_{\parallel} = f_{\parallel}$$

$$f'_{\perp} = f_{\perp}$$



(9.2) Релятивистские законы преобразования составляющих трехмерного вектора силы

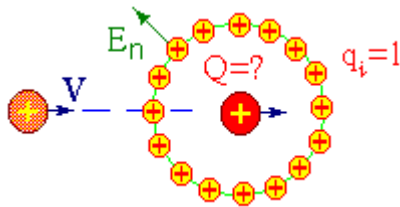


Рис. 9.1 Определение величины движущегося заряда Q.

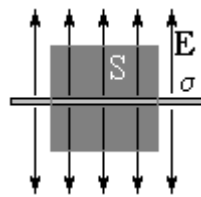
$$Q \equiv \frac{1}{4\pi} \oint E_n dS$$

(9.3) Определение величины движущегося заряда Q.

## 9.2 Поле движущегося заряда

$$2E_n S = 4\pi\sigma S \Rightarrow$$

$$E_n = 2\pi\sigma$$



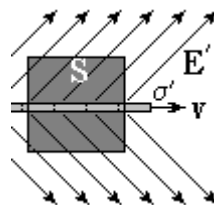
(9.4) Электрическое поле, создаваемое неподвижной равномерно заряженной плоскостью.

$$2E'_n S = 4\pi\sigma' S \Rightarrow$$

$$E'_n = 2\pi\sigma'$$

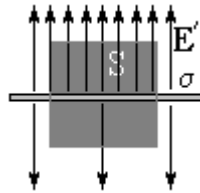
$$\frac{E'_n}{E_n} = \frac{\sigma'}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



(9.5) Расчет электрического поля, создаваемого равномерно движущейся заряженной плоскостью. (Приведен допустимый по соображениям симметрии вид поля, не соответствующий реальной ситуации).

$$E'_\tau = E_\tau$$



(9.6)

Преобразование сонаправленной со скоростью перемещения зарядов составляющий электрического поля.

$$E'_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

(9.7)

Закон преобразования составляющих вектора  $\mathbf{E}$  при переходе в систему отсчета, движущуюся относительно источников поля

$$E'_\tau = E_\tau$$

**Пример 9.2 Электрическое поле, создаваемое равномерно движущимся точечным зарядом**

Рассчитать электрическое поле, регистрируемое неподвижным наблюдателем в заданной точка пространства, создаваемое точечным зарядом, находящимся в начале координат (рис. 8.2) и движущимся с постоянной скоростью  $V$  вдоль одной из осей (например,  $X$ ).

**Решение:**

$$E_x = q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(9.8)

Электростатическое поле от неподвижного заряда, регистрируемое неподвижным наблюдателем.

$$E_y = q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E'_x = q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(9.9)

Поле неподвижного заряда с точки зрения движущегося наблюдателя, выраженное через координаты, регистрируемые неподвижным наблюдателем.

$$E'_y = \frac{q}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E'_x = q \frac{x' \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2}}{\left(\frac{(x')^2}{1 - (v/c)^2} + (y')^2\right)^{3/2}}$$

(9.10)

Окончательное решение задачи о электрическом поле равномерно движущегося заряда..

$$E'_y = \frac{q}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{y'}{\left(\frac{(x')^2}{1 - (v/c)^2} + (y')^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{E'_y}{E'_x} = \frac{y'}{x'}$$

(9.11) Ориентация вектора электрического поля.

### 9.3 Природа магнитных сил

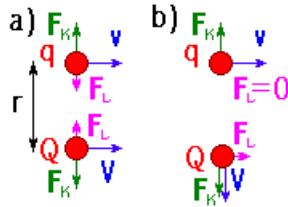


Рис. 9.3

Электромагнитные взаимодействия между двумя точечными зарядами, движущимися с одинаковыми по модулю скоростями.

$$F = \frac{qQ}{r^2}$$

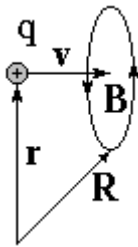
(9.12) Сила взаимодействия между двумя зарядами, неподвижными относительно наблюдателя.

$$\begin{aligned} F' &= \sqrt{1 - (v/c)^2} \frac{qQ}{r^2} = \\ &= q \frac{Q}{r^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}} - qv \frac{Qv}{r^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}} \equiv \\ &\equiv qE - qvB \end{aligned}$$

(9.13) Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами, движущимися относительно наблюдателя с одинаковыми по величине и сонаправленными скоростями.

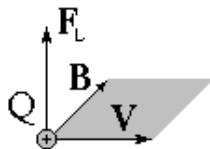
### 9.4 Сила Лоренца

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(\mathbf{R}) &= \\ &= q_k \frac{\left[ \frac{\mathbf{v}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} \end{aligned}$$

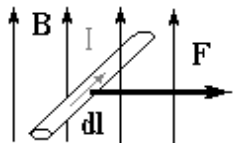


(9.14) Магнитное поле, создаваемое в точке  $\mathbf{R}$  точечным зарядом  $q$ , движущимся в точке  $\mathbf{r}$  с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ .

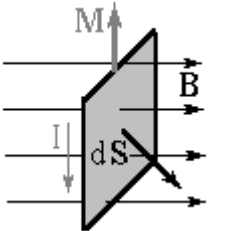
$$\mathbf{F}_L = Q \left[ \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right]$$



(9.15) Сила Лоренца, действующая на точечный заряд, движущийся с постоянной скоростью в магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

$$d\mathbf{F}_A = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] \quad (9.16)$$


Сила Ампера, действующая на небольшой участок провода с током в магнитном поле.

$$M = \frac{I}{c} S B \sin \alpha \quad (9.17)$$


Величина момента сил, действующий на рамку с током в магнитном поле. ( $\alpha$  - угол между нормалью к плоскости рамки и вектором магнитной индукции).

$$\mathbf{m} \equiv \frac{I}{c} \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}] \quad (9.18)$$

Определение магнитного момента рамки с током и выражение для вращающего момента, действующего на магнитный диполь во внешнем магнитном поле.

## 9.5 Магнитное поле системы равномерно движущихся зарядов

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = q(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \quad (9.19)$$

Электрическое поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом и магнитное поле, создаваемое равномерно движущимся точечным зарядом.

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = q \left[ \frac{\mathbf{u}_q}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}$$

$$\mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{R}) = \sum_k q_k (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (9.20)$$

Электрическое поле, создаваемое системой неподвижных точечных зарядов и магнитное поле, создаваемое системой равномерно движущихся точечных зарядов.

$$\mathbf{B}_\Sigma(\mathbf{R}) = \sum_k q_k \left[ \frac{\mathbf{u}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \quad (9.21)$$

Макроскопически усредненное электрическое поле, создаваемое системой неподвижных точечных зарядов и макроскопически

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \left[ \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]$$



усредненное магнитное поле, создаваемое системой равномерно движущихся точечных зарядов

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right] \quad (9.22)$$

Макроскопически усредненное магнитное поле, создаваемое системой постоянных токов

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \int_V \left[ d\mathbf{l}(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right] \quad (9.23)$$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u} \Rightarrow \quad (9.24)$$

$$\mathbf{B}_\Sigma(\mathbf{R}) = \sum_k q_k \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} =$$

$$= \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \sum_k q_k \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} \right] = \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{E}(\mathbf{R}) \right]$$

Связь между вектором магнитной индукции магнитного поля, создаваемого системой движущихся с одинаковой скоростью зарядов и вектором напряженности электрического поля, создаваемого этой же системой.

## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

### Экзаменационные вопросы

Электрическое поле равномерно движущегося заряда

- Определение величины движущегося заряда. Инвариантность движущегося заряда.
- Релятивистские законы преобразования напряженности электрического поля.
- Сила, действующая на электрический заряд, равномерно движущийся в электростатическом поле неподвижных относительно наблюдателя зарядов.
- Электрическое поле равномерно движущегося (с релятивистской скоростью) заряда.
- Релятивистская природа магнитных сил, возникающих между равномерно движущимися зарядами.

Магнитные взаимодействия

- Сила Лоренца. Введение вектора  $\mathbf{B}$  в рамках нерелятивистского подхода через экспериментально установленные свойства силы Лоренца.
- Сила Ампера. Введение вектора  $\mathbf{B}$  в рамках нерелятивистского подхода через экспериментально установленные свойства силы Ампера.

- Магнитный диполь. Вычисление магнитного момента элементарного магнитного диполя и конечного витка с током. Магнитный момент атома Резерфорда, обусловленный орбитальным движением электрона. Гиромагнитное отношение.
- Момент сил, действующий на магнитный диполь во внешнем магнитном поле. Введение вектора  $\mathbf{B}$  в рамках нерелятивистского подхода через экспериментально установленные свойства момента сил, действующего на магнитный момент во внешнем магнитном поле.
- Принцип работы электродвигателя и классических приборов для измерения силы тока.

Вычисление вектора индукции магнитного поля прямым суммированием

- Вычисление вектора  $\mathbf{B}$  прямым суммированием вкладов от элементарных движущихся зарядов.
- Связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  для систем зарядов, движущихся с постоянной скоростью
- Магнитное поле заданного распределения объемных токов.
- Закон Био-Савара-Лапласа
- Примеры вычислений вектора  $\mathbf{B}$

### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.9.1	Запишите выражение для силы Лоренца, действующей на движущийся заряд в магнитном поле. Проиллюстрируйте рисунком.
3.9.2	Дайте классическое определение вектора $\mathbf{B}$ через свойства силы Лоренца.
3.9.3	Запишите выражение для силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле. Проиллюстрируйте рисунком.
3.9.4	Дайте классическое определение вектора $\mathbf{B}$ через свойства силы Ампера.
3.9.5	Дайте определение магнитного момента элементарной петли с током. Проиллюстрируйте рисунком.
3.9.6	Запишите выражение для момента сил, действующих на магнитный момент в постоянном магнитном поле. Проиллюстрируйте рисунком.
3.9.7	Дайте классическое определение вектора $\mathbf{B}$ через свойства момента сил, действующих на магнитный момент в постоянном магнитном поле.
3.9.8	Дайте определение величины равномерно движущегося заряда.
3.9.9	Запишите релятивистский закон преобразования компонент электростатических полей при переходе в движущуюся СО.
3.9.10	Запишите релятивистский закон преобразования компонент сил при переходе в движущуюся СО.
3.9.11	Запишите выражение для силы, действующей на электрически заряженную релятивистскую частицу, равномерно движущуюся в однородном электрическом поле неподвижных относительно наблюдателя зарядов.
3.9.12	Нарисуйте систему силовых линий электрического поля, создаваемого равномерно движущимся с релятивистской скоростью зарядом и запишите выражение, определяющее зависимость модуля

	напряженности этого поля от расстояния до заряда и угла между вектором его скорости и направлением наблюдения.
3.9.13	Электрический заряд $q$ равномерно движется со скоростью $v$ . Нарисуйте картину линий поля $\mathbf{B}$ и запишите явное выражение для вектора $\mathbf{B}$ в произвольной точке пространства.
3.9.14.	Нарисуйте два точечных заряда $+q$ и $-Q$ , движущихся в произвольных направлениях в произвольных точках пространства и нарисуйте действующие на них электрические и магнитные силы.
3.9.15	Запишите выражение для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ , создаваемого в заданной токе пространства $\mathbf{R}$ системой зарядов $q_j$ , находящихся в заданных точках $\mathbf{r}_j$ и движущихся с заданными постоянными скоростями $v_j$ .
3.9.16	Запишите выражение для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ , создаваемого в заданной токе пространства $\mathbf{R}$ системой постоянных токов, пространственное распределение которых описывается известной функцией $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ .
3.9.17	Запишите закон Био-Савара-Лапласа.

**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях )

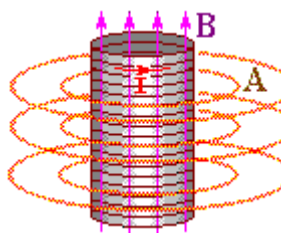
P.3.9.1	Рассчитайте электрическое поле, создаваемое пролетающим через начало координат с направленной вдоль оси $x$ постоянной скоростью $V$ зарядом $q$ в произвольной точке пространства с заданными координатами.
P.3.9.2	Релятивистская частица с начальным импульсом $p_0$ влетает в однородное электрическое поле перпендикулярно его линиям. Рассчитайте величины продольных и поперечных составляющих скорости и импульса частицы в произвольный момент времени. Постройте графики зависимостей от времени найденных величин.
P.3.9.3	Используя релятивистские законы преобразования длин отрезков, сил и электрических полей, рассчитать силу, действующую между двумя электрическими зарядами, движущимися с одинаковой заданной скоростью в направлении соединяющей их прямой.
P.3.9.4	Батарея с заданной ЭДС и внутренним сопротивлением с помощью двух очень длинных параллельно расположенных проводников цилиндрической формы подсоединена к сопротивлению. Какова величина этого сопротивления, если известно, что суммарная сила взаимодействия проводников друг с другом равна нулю. Сопротивление проводников очень мало. Их диаметры $d$ значительно меньше расстояния $L$ между их осями.
P.3.9.5	Показать, что в случае движения зарядов в одном направлении с одинаковой нерелятивистской скоростью выражение для силы их магнитного взаимодействия, полученное из релятивистского рассмотрения, совпадает с результатом расчета по формулам классической электродинамики.
P.3.9.6	Получить выражение для магнитостатического поля, создаваемого произвольным распределением электрических зарядов, движущихся с одинаковыми скоростями $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}$ , если известно электрическое поле $\mathbf{E}$ , создаваемое точно таким же статическим

	распределением.
P.3.9.7	Пользуясь результатом решения задач 1.4 и 9.6, рассчитать магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым проводом с током $I$ на заданном расстоянии $h$ от него.
P.3.9.8	Точечный заряд $q$ движется со скоростью $u$ вдоль прямого провода с током $I$ на расстоянии $L$ от него. Найти магнитную силу, действующую на этот заряд. Решить ту же задачу с позиции наблюдателя, движущегося вместе с зарядом. Указание. При переходе к движущейся вместе с зарядом системе отсчета в соответствии с релятивистским законом преобразования длин отрезков изменяются расстояния между электронами и ионами провода с током. В результате создаваемые ими электрические поля перестают компенсировать друг друга, и рассматриваемый заряд вместо магнитной силы начинает испытывать действие силы электрической.
P.3.9.9	Исходя из выражения для магнитного поля равномерно движущегося точечного заряда и принципа суперпозиции получить выражение для сглаженного макроскопического магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ , создаваемого заданным распределением плотности тока в пространстве $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ .
P.3.9.10	Используя решение задачи 9.9, получить выражение для магнитного поля, создаваемого в произвольной точке пространства, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{R}$ , небольшим участком тонкого провода с известным током $I$ , расположенным в точке, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$ ( <i>закон Био — Савара — Лапласа</i> ).
P.3.9.11	Рассчитайте величину (модуль) напряженности электрического поля релятивистской заряженной частицы в точке, расположенной на расстоянии $R$ от нее в направлении, составляющем угол $\theta$ с ее скоростью.
P.3.9.12	Один из критиков специальной теории относительности приводит аргументы, по его мнению, свидетельствующие об ошибочности этой теории: «В соответствии с результатами расчетов в рамках теории относительности при приближении скорости заряда к величине $c$ напряженность его электрического поля в плоскости, перпендикулярной скорости движения, неограниченно возрастает. В результате заряженные частицы, разгоняемые в современных ускорителях до ультрарелятивистских скоростей, своими гигантскими полями должны вырывать электроны из окружающих неподвижных атомов. Поскольку в реальности разрушений ускорителя при его работе не происходит, приведенное рассуждение свидетельствует об ошибочности теории относительности». Какие аргументы Вы можете привести в качестве опровержения подобной точки зрения?

### Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования

K.3.9.1	Составьте программу, позволяющую моделировать движение заряженных релятивистских частиц в электростатическом поле
---------	---

К.3.9.2	Разработайте компьютерную программу, моделирующую движение двух взаимодействующих друг с другом заряженных частиц. Сравните результаты моделирования движения частиц в описанной системе с данными численного эксперимента, учитывающего только электростатические взаимодействия
---------	---



## Магнитостатическое поле и векторный потенциал

Для компактной записи уравнений нерелятивистской магнитостатики оказывается весьма удобным использование оператора пространственного дифференцирования  $\nabla$ . При этом прослеживаются аналогии с соответствующими уравнениями электростатики. В качестве аналога скалярного потенциала электростатического поля выступает векторный потенциал.

### Соотношения, которые полезно помнить

$$\exists \mathbf{A}(\mathbf{R}): \quad \mathbf{B}(\mathbf{R}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{R})]$$

Определение векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

Векторные потенциалы, создаваемые системой движущихся точечных зарядов и заданным распределением токов

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \frac{\mathbf{j}}{c}$$

Уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{B}] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Дифференциальная форма уравнений магнитостатики вакуума

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0,$$

Интегральная форма записи уравнений магнитостатики вакуума

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I}{c}$$

## 10.1 Векторный потенциал

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (10.1)$$

Электростатическое и магнитостатическое поля, создаваемые дискретными распределениями зарядов.

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \sum_i q_i \left[ \frac{\mathbf{v}}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \right]$$

$$\mathbf{F}_C = Q\mathbf{E}, \mathbf{F}_L = Q \left[ \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \quad (10.2)$$

Силы Кулона и Лоренца, действующие на точечный заряд  $Q$ .

$$\exists \varphi(\mathbf{R}): \mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\nabla\varphi(\mathbf{R});$$

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \quad (10.3)$$

Определение скалярного потенциала и его явное выражение для случая дискретного распределения зарядов.

$$\exists \mathbf{A}(\mathbf{R}): \mathbf{B}(\mathbf{R}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{R})];$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{v}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \quad (10.4)$$

Определение векторного потенциала и его явное выражение для случая дискретного распределения зарядов.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i(\mathbf{R}) &= \left[ \nabla, \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \right] = \\ &= q_i \left[ \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \cdot \frac{\partial |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^{-1}}{\partial |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} = \\ &= q_i \left[ \frac{\mathbf{v}}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \right] \end{aligned} \quad (10.5)$$

Доказательство правильности выбора выражения (4) для векторного потенциала, создаваемого движущимся точечным зарядом  $q_i$ .



(10.6) Скалярный и векторный потенциалы в случае непрерывного распределения зарядов. (10.13)

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} \frac{dV}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{I}{c} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \quad (10.7)$$

Векторный потенциал, создаваемый током, протекающим по тонкому проводу, не имеющему ветвлений



(10.8) Уравнение Пуассона для скалярного и векторного потенциалов.

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\nabla(\varphi + C);$$

$$\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}] = [\nabla, \mathbf{A} + \nabla\chi]$$

(10.9) Неоднозначность определения скалярного и векторного потенциалов.

## 9.2 Дифференциальная форма уравнений магнитостатики вакуума

$$(\nabla, \mathbf{B}) = (\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]) = ([\nabla, \nabla], \mathbf{A}) = 0$$

(10.10) Источники потенциального магнитного поля отсутствуют.

$$\begin{aligned} [\nabla, \mathbf{B}] &= [\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \\ &= -\Delta \mathbf{A} = 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c} \end{aligned}$$

(10.11) Вихревое магнитное поле создается электрическими токами.

$$(\nabla, \mathbf{A}) = f(\mathbf{R}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\exists \chi(\mathbf{R}) : (\nabla, \mathbf{A} + \nabla\chi) = 0$$

$$\chi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

(10.12) Градиентное преобразование, обеспечивающее равенство нулю дивергенции векторного потенциала

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{A}) &= \left( \nabla_R, \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV \right) = \\ &= \int_V \left( -\nabla_r, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \right) dV = \\ &= \oint_{\Gamma_2} \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, d\mathbf{S} \right) = 0 \end{aligned}$$

(10.13) Доказательство чисто вихревого характера векторного поля, задаваемого выражением (10.6) для векторного потенциала ограниченного в пространстве распределения токов.

### Пример 10.1. Магнитное поле прямоугольной петли с током

Рассчитать векторный потенциал и магнитное поле прямоугольной петли  $a \times b$ , расположенной возле начала координат в плоскости  $z=0$ , в точке пространства, удаленной от начала координат на расстояние, существенно большее размеров петли. По образующему петлю проводу течет ток  $I$ .



Решение:

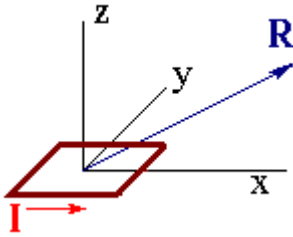
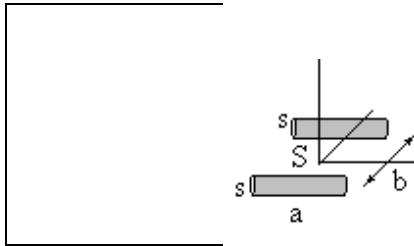


Рис. 10.1 К расчету векторного потенциала и магнитного поля магнитного диполя.



(10.14) Электрический диполь и соответствующий ему скалярный потенциал, рассчитываемый для определения X - составляющей векторного потенциала.

$$A_x = \frac{-(j/c)sS \cdot Y}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} = -\frac{(I/c)SY}{R^3}$$

(10.15) X- составляющая векторного потенциала небольшой петли с током.

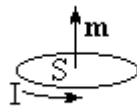
$$A_y = \frac{(I/c)SX}{R^3}$$

(10.16) y - составляющая векторного потенциала.

$$\mathbf{B} = \frac{IS}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{-Y}{R^3} & \frac{X}{R^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{IS}{c} \begin{pmatrix} \frac{XZ}{R^5} \\ \frac{YZ}{R^5} \\ 3\frac{Z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \end{pmatrix}$$

(10.17) Магнитное поле петли с током, расположенной в плоскости Z=0.

$$\mathbf{m} \equiv \frac{IS}{c}$$



(10.18) Определение магнитного момента магнитного диполя.

$$\varphi = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3}; \quad \mathbf{E} = 3\frac{\mathbf{R}(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^5} - \frac{\mathbf{d}}{R^3}$$

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{R}]}{R^3}; \quad \mathbf{B} = 3\frac{\mathbf{R}(\mathbf{m}, \mathbf{R})}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3}$$

(10.19) Аналогии между электрическим и магнитным диполями.

### 9.3. Магнитный диполь, гиромагнитное отношение

$$\Gamma \equiv \frac{m}{I} = \frac{(q/T)(\pi r^2 / c)}{m_e v r} = \frac{q}{2m_e c} \quad (10.20)$$



Вычисление гиромагнитного отношения в случае движения электрона по круговой орбите.

### 9.4. Интегральная форма уравнений магнитостатики вакуума

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \quad (10.21)$$

$$\oint_{l_i} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}_i) = \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} &= [B_x(y) - B_x(y + \delta y)]\delta x + \\ &+ [B_y(x + \delta x) - B_y(x)]\delta y = \\ &= ([\nabla, \mathbf{B}]_z)\delta x \cdot \delta y = \frac{j_z}{c} \delta S_{xy} = 4\pi \frac{\delta I}{c} \end{aligned}$$

Интегральный аналог соотношения (10.21).

Вычисление циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  по границе одной из элементарных ячеек, составляющих замкнутый контур  $\Gamma_1$ .

$\delta I$  - ток, пронизывающий рассматриваемую элементарную ячейку.

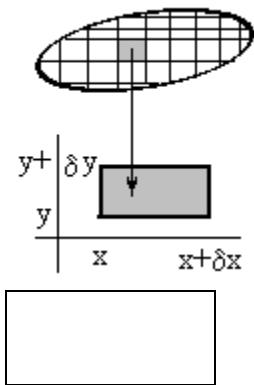


Рис. 10.2

К вычислению циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  по макроскопическому контуру.

(10.23)

Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  вдоль произвольного контура, через который протекает ток  $I$ .

### 9.5 Расчеты магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции

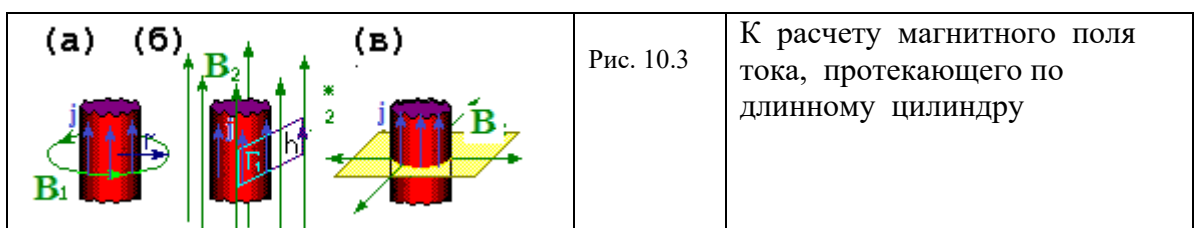
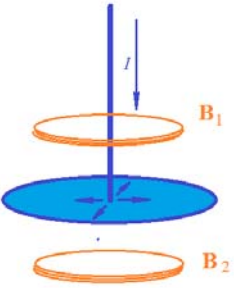


Рис. 10.3

К расчету магнитного поля тока, протекающего по длинному цилиндру

$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I}{c} \Rightarrow$ $\begin{cases} 2\pi r B = 4\pi \frac{I}{c} \Rightarrow B = \frac{2I}{rc} \\ r > R \end{cases}$	(10.24)	Магнитное поле вне цилиндра с протекающим по нему током
$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I}{c} \Rightarrow$ $\begin{cases} 2\pi r B = 4\pi \frac{I}{c} \Rightarrow B = \frac{2Ir}{R^2 c} \\ r < R \end{cases}$	(10.25)	Магнитное поле внутри цилиндра с протекающим по нему током, равномерно распределенным по сечению цилиндра.
	Рис. 10.3	К вычислению магнитного поля, создаваемого полубесконечным током, втекающим в проводящую плоскость
$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{B}_1, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I}{c} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{2I}{rc} \\ B_2 = 0 \end{cases}$	(10.26)	Магнитное поле в системе, изображенной на рис. 10.3

## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

### Экзаменационные вопросы

#### 10.1 Векторный потенциал

- Определение векторного потенциала, градиентная инвариантность.
- Векторный потенциал однородного магнитного поля
- Векторный потенциал равномерно движущегося заряда
- Векторный потенциал распределения токов
- Уравнение Пуассона для векторного потенциала

#### 10.2 Дифференциальная и интегральная формы записи уравнений магнитостатики вакуума

- Дифференциальная форма записи уравнений магнитостатики вакуума.
- Интегральная форма записи уравнений магнитостатики вакуума
- Магнитное поле прямого провода с током
- Взаимодействие двух прямых бесконечных проводников с токами.
- Магнитное поле соленоида.

#### 10.3 Электрический и магнитный диполи

- Электрический и магнитный дипольные моменты
- Скалярный и векторный потенциалы электрического и магнитного диполей.

- Пространственная конфигурация полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , создаваемых электрическим и магнитным диполями.
- Энергия электрического и магнитного диполей в постоянных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .
- Сила, действующая на электрический и магнитный диполи в пространственно неоднородных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .
- Различия между электрическими и магнитными полями электрического и магнитного диполей.

### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.10.1	Дайте определение векторного потенциала
3.10.2	Покажите, что векторный потенциал определяется с точностью до градиентного преобразования.
3.10.3	Запишите вид градиентного преобразования векторного потенциала, оставляющего неизменным соответствующее ему поле $\mathbf{B}$ .
3.10.4	Запишите выражение для векторного потенциала однородного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0 \cdot \mathbf{e}_z$ .
3.10.5	Запишите выражение для векторного потенциала $\mathbf{A}$ , создаваемого в точке $\mathbf{R}$ системой зарядов $q_j$ , движущихся в заданных точках $\mathbf{r}_j$ с известными скоростями $\mathbf{v}_j$ .
3.10.6	Запишите выражение для векторного потенциала $\mathbf{A}$ , создаваемого в точке $\mathbf{R}$ системой токов $\mathbf{j}_j$ , текущих в заданных точках $\mathbf{r}_j$ .
3.10.7	Запишите уравнение Пуассона для векторного потенциала.
3.10.8	Запишите условие поперечной калибровки для векторного потенциала и вид приводящего к выполнению этого условия градиентного преобразования в случае нарушения поперечности для известного векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{R})$ .
3.10.9	Запишите уравнения магнитостатики вакуума в дифференциальной формулировке.
3.10.10	Запишите уравнения магнитостатики вакуума в интегральной формулировке.
3.10.11	Запишите выражение для поля $\mathbf{B}$ на расстоянии $h$ от прямого бесконечного провода с постоянным током $I$ . Нарисуйте картину линий поля $\mathbf{B}$ , создаваемого этим током.
3.10.12	Запишите выражение для поля $\mathbf{B}$ на высоте $h$ на оси небольшого витка радиусом $R$ , по которому протекает ток $I$ . Нарисуйте вид линий векторного поля $\mathbf{B}$ , создаваемого этим витком.
3.10.13	Запишите явное выражение для векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем $\mathcal{R}$ в точке пространства $\mathbf{R}$ , расположенной на большом расстоянии от диполя.
3.10.14	Запишите явное выражение для магнитного поля $\mathbf{B}$ , создаваемого магнитным диполем $\mathcal{R}$ в точке пространства $\mathbf{R}$ , расположенной на большом расстоянии от диполя.
3.10.15	Запишите выражения для поля $\mathbf{B}$ внутри и вне бесконечного соленоида без сердечника, по виткам которого течет постоянный ток $I$ . Линейная плотность витков соленоида равна $n$ . Сделайте поясняющий рисунок.
3.10.16	Запишите выражения для поля $\mathbf{B}$ внутри и вне тороидальной катушки без сердечника, по виткам которой течет постоянный ток $I$ . Число витков катушки равно $N$ .

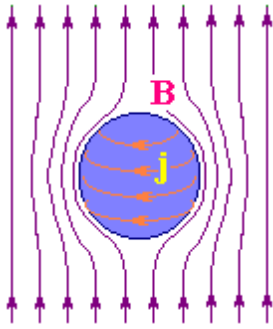
**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях)

<p>P.3.10.1</p>	<p>Исходя из определения векторного потенциала получить явное выражение для вектора <math>\mathbf{A}</math> в случае однородного магнитного поля, направленного вдоль оси <math>z</math>. Применяя хорошо известную из векторной алгебры формулу для двойного векторного произведения <math>[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})</math> для вычисления ротора от векторного произведения, рассчитать магнитное поле, соответствующее векторному потенциалу <math>\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{R}]/2</math>, где <math>\mathbf{B}</math> — постоянный вектор, направленный вдоль оси <math>z</math>.</p> <p>Указание. Если результат расчета получился отличным от значения <math>\mathbf{B}</math>, есть основания полагать, что Вы слишком смело пользуетесь аналогиями между векторами и операторами: <math>\nabla</math> является не только вектором, но и командой выполнить операцию дифференцирования!</p>
	<p>Рассчитать векторный потенциал в произвольной точке пространства и соответствующее ему магнитное поле в случае, когда его источником является ток силой <math>I</math>, протекающий:</p> <p>а) по объему;          б) по поверхности вдоль оси бесконечного цилиндра заданного радиуса.</p> <p>Указание. Воспользоваться сходством между дифференциальными уравнениями, связывающими скалярный потенциал с плотностью электрического заряда и векторный потенциал с плотностью тока.</p>
	<p>Бесконечный цилиндр радиусом <math>R</math>, равномерно заряженный по поверхности зарядом плотностью <math>\sigma</math>, равномерно вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью <math>\omega</math>. Определить векторный потенциал и магнитное поле, создаваемое описанной системой в произвольной точке пространства.</p>
	<p>Равномерно заряженный по поверхности электрическим зарядом <math>Q</math> шар с известным радиусом равномерно вращается с угловой скоростью <math>\omega</math>. Определить магнитное поле, создаваемое таким шаром.</p>
	<p>Равномерно заряженная поверхностным зарядом <math>\sigma</math> сферическая оболочка радиусом <math>R</math> расширяется во все стороны с постоянной скоростью <math>u</math>. Определить магнитное поле и векторный потенциал в произвольной точке внутри оболочки.</p>
	<p>Найти магнитное поле в произвольной точке внутри бесконечного соленоида, по виткам которого течет постоянный ток <math>I</math>. Линейная плотность числа витков соленоида равна <math>n</math>.</p> <p>Указание. Во многих учебных пособиях эта задача решается с помощью теоремы о циркуляции при допущении, что магнитное поле на бесконечном расстоянии от бесконечного соленоида равно нулю... Желательно, чтобы корректное решение либо содержало обоснование последнего утверждения, либо опиралось на какие-либо иные обоснованные соображения...</p>
	<p>На каком расстоянии от оси полубесконечного соленоида проходит линия вектора <math>\mathbf{B}</math> в точках, существенно удаленных от его торца, если известно, что она пересекает боковую поверхность этого соленоида в точке его обрыва? Найти полный поток вектора <math>\mathbf{B}</math> через боковую поверхность такого соленоида.</p>

	Указание. Если к полубесконечному соленоиду добавить еще один, развернутый на угол $180^\circ$ , то получится бесконечный соленоид.
	Сердечник, представляющий собой кольцо с прямоугольным сечением (все размеры заданы), имеет обмотку из $N$ витков провода, по которому течет постоянный ток $I$ . Определить магнитное поле в произвольной точке пространства.
	Электрический ток $I$ втекает по полубесконечному проводу в перпендикулярную ему металлическую плоскость и равномерно растекается во все стороны. Найти магнитное поле в произвольной точке пространства.

### Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования

К.3.10.1	10.К1. Используя пакеты программ численного моделирования, попытайтесь освоить технику расчетов магнитных полей и соответствующих им векторных потенциалов, создаваемых непрерывными распределениями токов. Смоделируйте магнитные поля и потенциалы, создаваемые: <ul style="list-style-type: none"> <li>а) длинным цилиндром с равномерно распределенным по его сечению электрическим током;</li> <li>б) длинным цилиндром, заряженным по объему и равномерно вращающимся вокруг своей оси;</li> <li>в) равномерно заряженным по объему шаром, вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.</li> <li>г) шарообразным облаком из заряженных частиц, разлетающихся от центра со скоростями, пропорциональными расстояниям до него (<math>\mathbf{u}_k \sim \mathbf{r}_k</math>).</li> </ul>
К.3.10.2	10.К2. Используя готовые пакеты программ или самостоятельные разработки, освоите технику моделирования магнитных полей, создаваемых отрезками прямых тонких проводников и круговыми витками с током. Смоделируйте магнитные поля соленоида, тороидальной катушки и других распределений источников, допускающих расчеты вектора $\mathbf{B}$ с помощью теоремы о циркуляции. Проследите за тем, как получаемые в процессе численного моделирования результаты приближаются к результатам идеализированных расчетов при увеличении линейной плотности витков с током.
К.3.10.3	Используя готовые пакеты программ или самостоятельные разработки, освоите технику моделирования магнитных полей, создаваемых отрезками прямых тонких проводников и круговыми витками с током. Смоделируйте магнитные поля соленоида, тороидальной катушки и других распределений источников, допускающих расчеты вектора $\mathbf{B}$ с помощью теоремы о циркуляции. Проследите за тем, как получаемые в процессе численного моделирования результаты приближаются к результатам идеализированных расчетов при увеличении линейной плотности витков с током.



## Атомы и молекулы в магнитном поле

Аналогии между электростатикой и магнитостатикой прослеживаются и при описании магнитного поля в веществе. Имеется сходство между магнитостатическими свойствами сверхпроводников и электростатическим свойствам проводников. Диамагнетики в некотором смысле аналогичны диэлектрикам с электронной поляризуемостью, парамагнетики — диэлектрикам с полярными молекулами, ферромагнетики сходны с сегнетоэлектриками и проводниками. Для построения макроскопической теории магнитных полей в веществе необходима информация о поведении в магнитном поле отдельного атома или молекулы. На указанном микроскопическом уровне между электростатикой и магнитостатикой возникают весьма значительные различия, обусловленные существенно неклассическим характером поведения микрочастиц в магнитном поле.

### Соотношения, которые полезно помнить

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \nabla)\mathbf{B}$$

Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле

$$\Gamma_l = \frac{q_e}{2m_e c}, \quad \Gamma_s = \frac{q_e}{m_e c}$$

Гиромагнитные отношения для орбитальных и спиновых моментов электрона

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$l_z = m\hbar, \quad m = -l, -l+1, \dots, l,$$

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 1/2,$$

$$s_z = \pm\hbar/2$$

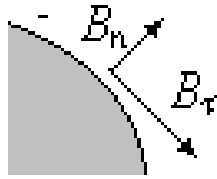
Правила квантования для орбитального и спинового моментов электрона и их проекций на выделенную ось

## 11.1. Сверхпроводники в магнитном поле

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \Rightarrow B_n =$$

$$\oint (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi I}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_\tau = 4\pi \frac{i}{c} = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{d}$$



Граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих вектора  $\mathbf{B}$  вблизи поверхности сверхпроводника.  $i$  - линейная плотность поверхностного тока.

### Пример 11.1. Сверхпроводящий цилиндр в однородном магнитном поле

Рассчитать поверхностное распределение токов, возникающих на сверхпроводящем цилиндре, внесенном в однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}_0$  так, что его ось перпендикулярна линиям поля.

#### Решение

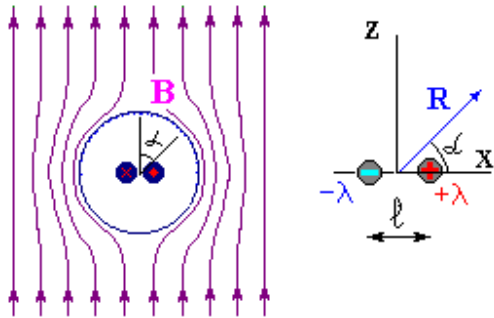


Рис. 11.1 Сверхпроводящий цилиндр в однородном магнитном поле. В центре показаны токи-изображения, образующие "двумерный магнитный диполь". Слева показан электростатический аналог токов - изображений.

$$\varphi = \lambda \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{R})}{R^2} = \lambda \frac{l \cdot x}{R^2} = \rho_s \frac{l \cdot x}{R^2}$$

Скалярный потенциал двумерного электрического диполя.

$$j_{x_0} = 0, j_y = \pm \rho_s c, j_z = 0 \Rightarrow$$

$$A_x = A_z = 0, A_y = \frac{I}{c} \cdot \frac{l \cdot x}{R^2}$$

Векторный потенциал двумерного магнитного диполя.

$$\mathbf{B}' = [\nabla, \mathbf{A}] = -\mathbf{e}_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_y}{\partial x} =$$

$$= \frac{Il}{cR^4} \begin{pmatrix} 2xz \\ 0 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Магнитное поле двумерного диполя.

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \Big|_{\substack{x=0 \\ z=\pm R}} = 0 \Rightarrow \frac{Il}{c} = -B_0 R^2$$

Величина магнитного момента диполя - изображения.



$$\mathbf{B}_\Sigma = \frac{B_0}{R^2} \begin{pmatrix} -2xz \\ 0 \\ x^2 - z^2 + R^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2B_0 \cos \alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Суммарное магнитное поле на поверхности сверхпроводящего цилиндра. (Легко видеть, что вектор суммарного поля направлен по касательной к поверхности сверхпроводника)

$$i'(\alpha) = \frac{c}{4\pi} B_\tau = -\frac{c}{2\pi} B_0 \cos \alpha$$

Распределение индуцированных токов по поверхности сверхпроводящего цилиндра.

## 10.2. Магнитный диполь над сверхпроводящей плоскостью

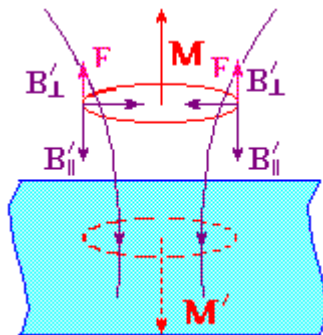
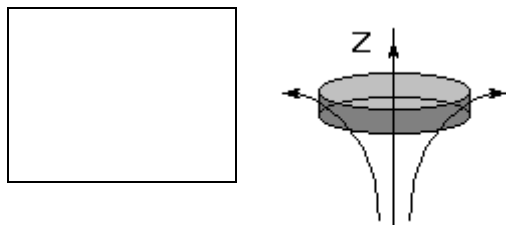
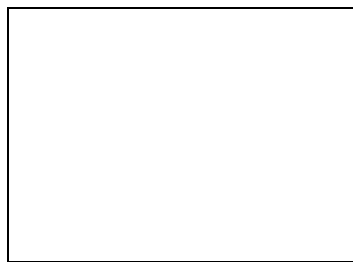


Рис. 11.1 Магнитный диполь (виток с током) над плоской поверхностью сверхпроводника. Показан диполь - изображение и создаваемое им магнитное поле.



(11.8) Подъемная сила, действующая на виток с током, помещенный во внешнее магнитное поле.



(11.9) Горизонтальная составляющая симметричного относительно вертикальной оси магнитного поля.

$$|F_z| = -\frac{\pi R^2 I}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \left| M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|$$

(11.10) Сила, действующая на магнитный диполь над сверхпроводником.

$$W = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{F} = (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{B}$$

(11.11) Энергия магнитного диполя во внешнем магнитном поле и соответствующая ей сила.

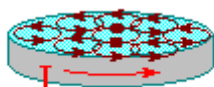


Рис. 11.2. Постоянный магнит в качестве макроскопического магнитного диполя.

### 10.3. Опыт Штерна-Герлаха



Рис. 11.3 Планетарная модель атома Бора-Резерфорда

$$\begin{cases} l = mvr \\ \mu_l = \frac{I}{c} S \end{cases} \Rightarrow \Gamma_l \equiv \frac{\mu_l}{l} = \frac{q}{2mc}$$

(11.12) Гиромагнитное отношение для орбитального магнитного и механического моментов атома

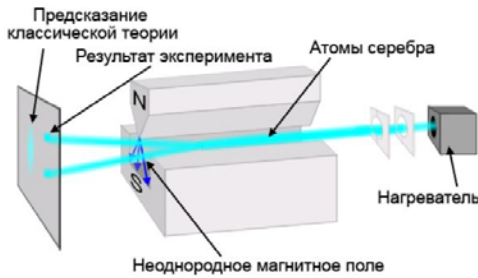


Рис. 11.3 Опыт Штерна-Герлаха

$$\Gamma_s \equiv \frac{\mu_s}{s}$$

$$\Gamma_s^{(эксн)} = 2\Gamma_s^{(теор)}$$

(11.13) Аномальная величина гиромагнитного отношения для спиновых моментов электрона

### 10.4 Парамагнетизм

$$l^2 = l(l+1)h^2 \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

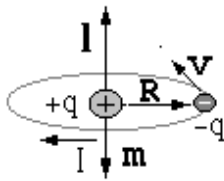
$$l_z = mh \quad (m = -l, -l+1, \dots, l-1, l)$$

(11.15) Правила квантования орбитального момента импульса электрона в атоме.

$$|l| = mvr$$

$$|m_l| = \frac{I}{c} S = \frac{q}{Tc} \pi R^2 z$$

$$\Gamma \equiv \frac{|m_l|}{|l|} = \frac{q}{2mc}$$



(11.16) Классический расчет гиромагнитного отношения для планетарной модели атома водорода.

$$\mathbf{m}_l = -\Gamma \cdot \mathbf{l},$$

$$|m_l| = \frac{q}{2mc} \sqrt{l(l+1)}h \equiv \mu_0 \sqrt{l(l+1)}h,$$

$$m_z = \mu_0 m \quad (m = -l, \dots, l)$$

(11.17) Магнитный момент, обусловленный орбитальным движением электрона и его проекция на выделенное направление в пространстве.

$$W = -(\mathbf{m}_l, \mathbf{B}) = -m_z B_z = -\mu_0 m B \quad (11.18)$$

Дополнительная энергия, возникающая в результате взаимодействия орбитального момента электрона с внешним магнитным полем.

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 1/2, \quad \mathbf{m}_s = -2\Gamma \cdot \mathbf{s} \quad (11.19)$$

$$s_z = \pm \frac{\hbar}{2}, \quad m_z = \pm \Gamma \hbar = \pm \mu_0$$

$$W = -(\mathbf{m}_s, \mathbf{B}) = m \mu_0 B$$

Дополнительная энергия, возникающая при взаимодействии спина с внешним магнитным полем.

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{M=-J}^{+J} (\mu_0 g M) \left( N \exp \frac{\mu_0 g M B}{kT} \right) \quad (11.20)$$

$$\langle \mathbf{m}(\mathbf{B} \rightarrow 0) \rangle = \text{Const} \cdot \mathbf{B}$$

Схема вычисления среднего магнитного момента ансамбля N атомов с полным механическим моментом J и гиромагнитным отношением gΓ.

## 10.5 Средний магнитный момент атомов паров щелочных металлов

$$\Delta W_{\pm} = m \mu_0 B \quad \begin{array}{c} \uparrow \mathbf{B} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow | - \rangle \\ \text{---} \\ \uparrow | + \rangle \\ \text{---} \end{array} \\ \uparrow W \end{array} \quad (11.18)$$

Добавочная энергия, приобретаемая щелочным атомом при включении внешнего магнитного поля.

$$N_{\pm} = N \cdot C \exp\left(\pm \frac{\mu_0 B}{kT}\right) \quad (11.19)$$

Концентрации щелочных атомов с различной ориентацией спиновых магнитных моментов.

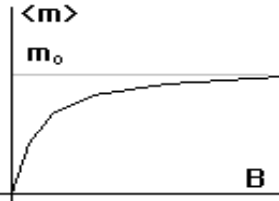
$$N = N_+ + N_- = C \cdot N \left[ \exp\left(\frac{\mu_0 B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_0 B}{kT}\right) \right] \Rightarrow \quad (11.20)$$

$$C = \frac{1}{2ch\left(\frac{\mu_0 B}{kT}\right)}$$

Расчет нормировочной константы.

$$\langle m_z \rangle = \frac{1}{N} (\mu_0 N_+ - \mu_0 N_-) = \mu_0 t h \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right) \quad (11.21)$$

Средний магнитный момент газа из атомов щелочных металлов, помещенных во внешнее магнитное поле.

$$\tilde{\alpha}_m = \frac{\mu_0^2}{2kT} \left( \frac{\langle m \rangle}{m_0} \right) \quad (11.22)$$


Расчет константы магнитной поляризуемости атома.

## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

### Экзаменационные вопросы

#### 11.1 Магнитные свойства сверхпроводников

- Механизм сверхпроводимости
- Магнитные свойства сверхпроводников.
- Проводник с током над плоской поверхностью сверхпроводника.
- Парение магнита над сверхпроводником
- Сверхпроводящий шар (цилиндр) в однородном магнитном поле

#### 11.2 Парамагнетизм

- Опыт Штерна-Герлаха и квантование z-проекции магнитного момента
- Энергия магнитного диполя во внешнем магнитном поле
- Функция распределения атомов первой группы по ориентациям спина внешнего электрона
- Средний магнитный момент атомов паров щелочных металлов во внешнем магнитном поле.
- Магнитная поляризуемость атомов парамагнетика.

### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.11.1	Бесконечный прямой провод с током $I$ расположен параллельно плоской поверхности сверхпроводника. Нарисуйте примерный вид линий поля $\mathbf{B}$ .
3.11.2	Сверхпроводящий шар помещен в однородное магнитное поле. Нарисуйте примерный вид линий поля $\mathbf{B}$ .
3.11.3	Сверхпроводящий цилиндр помещен в однородное магнитное поле. Нарисуйте примерный вид линий поля $\mathbf{B}$ .
3.11.4	Запишите граничные условия для вектора $\mathbf{B}$ вблизи поверхности сверхпроводника.
3.11.5	Бесконечный прямой провод с током $I$ расположен параллельно плоской поверхности парамагнетика. Нарисуйте примерный вид линий поля $\mathbf{B}$ .
3.11.6	Запишите выражение для энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле.
3.11.7	Запишите выражение для силы, действующей на магнитный диполь, помещенный во внешнее магнитное поле.
3.11.8	Постоянный магнит в виде короткого цилиндра парит над

	поверхностью сверхпроводника. Сделайте рисунок, поясняющий механизм появления подъемной силы.
--	---

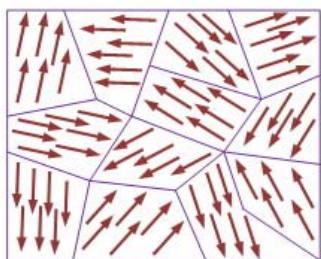
**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях )

P.3.11.1*	На частном примере прямоугольной рамки с током показать, что механическая энергия (т. е. энергия, «не учитывающая» затрат на поддержание постоянного тока в контуре) магнитного диполя во внешнем магнитном поле задается выражением $W = -(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B})$ . Исходя из приведенного соотношения, получить выражение для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.
P.3.11.2	Рассчитать распределение индуцированных токов на плоской поверхности полубесконечного сверхпроводника, параллельно которой на высоте $h$ протекает свободный ток $I_0$ .
P.3.11.3	Очень длинная цилиндрическая труба радиусом $R$ из сверхпроводника разделена внутри на четыре равных сектора двумя взаимно перпендикулярными сверхпроводящими плоскостями, линия пересечения которых совпадает с осью трубы. В одной из образовавшихся секций на расстоянии $r < R$ параллельно оси цилиндра натянут провод, по которому течет ток $I$ . Рассчитать силу, действующую на единицу длины провода.
P.3.11.4*	Сверхпроводящий шар заданного радиуса помещен в однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ . Рассчитать распределение индуцированных токов на поверхности шара.
P.3.11.5	На какой высоте над плоской поверхностью полубесконечного сверхпроводника будет «парить» постоянный магнит, представляющий собой однородно намагниченный цилиндр высотой $h$ с основанием радиусом $r$ ? Считать, что основания цилиндра параллельны поверхности сверхпроводника, вектор намагниченности $\mathbf{M}$ (магнитный момент единицы объема вещества) направлен параллельно оси цилиндра, плотность материала ферромагнетика равна $\rho$ . Указание. Для расчета магнитного поля, создаваемого поверхностными токами, индуцированными в сверхпроводнике, удобно воспользоваться методом изображений: суммарное магнитное поле вблизи сверхпроводника не должно иметь нормальной к его поверхности составляющей.
P.3.11.6	Пучок обладающих скоростью $u$ возбужденных атомов гелия (один электрон находится в $s$ -, а другой в $p$ -состоянии, спины электронов скомпенсированы) влетает в неоднородное магнитное поле, созданное на участке длиной $l$ , перпендикулярно его градиенту (величина градиента задана). На расстоянии $L$ от магнита (рис. 11.4) перпендикулярно исходному направлению пучка расположен детектор, фиксирующий долетевшие до него атомы. В какие точки детектора будут попадать атомы?
P.3.11.7	Попытайтесь решить задачу 11.6 в случае опыта Штерна—Герлаха с атомами алюминия, находящимися в невозбужденном состоянии. Указание. Невозбужденный атом алюминия имеет три

	валентных электрона ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$ ). Спины всех электронов, кроме находящегося в $3p$ -состоянии, скомпенсированы.
Р.3.11.8*	Найти связь между вектором $\mathbf{B}$ и средним магнитным моментом газа из атомов, полный механический момент которых определяется заданным квантовым числом $J$ .
Р.3.11.9	Рассчитайте гиромагнитное отношение для вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр, шара массой $M$ , равномерно распределенной по его объему. Заряд шара $Q$ также равномерно распределен по его объему. Каким будет ответ в случае заряда, распределенного по поверхности шара?

**Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования**

К.3. 11.1	11.К1. Приобретите опыт численного моделирования магнитных полей в магнитостатических системах, содержащих токи и сверхпроводники. Как и в случае электростатики (задача 3.К2), оцените результаты, сравнивая их с данными, получаемыми методом изображений.
--------------	--



## Магнитное поле в веществе

Теория макроскопического магнитного поля в линейных магнетиках могла быть построена по аналогии с теорией макроскопического поля в диэлектриках. Однако по ряду причин система определений для физических величин, предназначенных для описания магнитного поля в веществе, была построена по несколько отличному от действующего в электростатике принципу. В результате возникли и до сих пор сохранились досадные логические несоответствия в методах описания электрических и магнитных полей в веществе.

### Соотношения, которые полезно помнить

Электростатика	Магнитостатика (следовало ввести по аналогии с электростатикой)	Магнитостатика (общепринятые определения)	Примечания
$\exists \mathbf{E}: \mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля	$\exists \mathbf{B}: \mathbf{F} = Q\left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]$ $\mathbf{B}$ — «напряженность магнитного поля»	$\exists \mathbf{B}: \mathbf{F} = Q\left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]$ $\mathbf{B}$ — магнитная индукция	Поля, определяющие силы, действующие на заряды
$\mathbf{E}_m = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{R}-\mathbf{r}_i)}{ \mathbf{R}-\mathbf{r}_i ^3},$ $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{ \mathbf{R}-\mathbf{r} ^3}$	$\mathbf{B}_m = \sum_i \frac{q_i}{ \mathbf{R}-\mathbf{r}_i ^3} \left[ \frac{\mathbf{u}_i}{c}, (\mathbf{R}-\mathbf{r}_i) \right],$ $\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \int_V \frac{dV(\mathbf{r})}{ \mathbf{R}-\mathbf{r} ^3} \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c}, (\mathbf{R}-\mathbf{r}) \right]$		Микроскопические и макроскопические поля, создаваемые распределениями точечных и непрерывных источников полей
$(\nabla, \mathbf{E}) = 4\pi(\rho_0 + \rho'),$ $[\nabla, \mathbf{E}] = 0$	$[\nabla, \mathbf{B}] = 4\pi\left(\frac{\mathbf{j}_0}{c} + \frac{\mathbf{j}'}{c}\right),$ $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$	$(\nabla, \mathbf{B}) = 0,$ $[\nabla, \mathbf{B}] = 4\pi\left(\frac{\mathbf{j}_0}{c} + \frac{\mathbf{j}'}{c}\right)$	Дифференциальная форма уравнений для полей в веществе, учитывающих все источники поля
$\langle \mathbf{d} \rangle = \hat{\alpha}_E \mathbf{E}$	$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \hat{\tilde{\alpha}}_B \mathbf{B}$	$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \hat{\alpha}_H \mathbf{H}$	Индукцированные внешним полем дипольные моменты молекул

$\mathbf{P} \equiv n\langle \mathbf{d} \rangle = \widehat{\chi}_E \mathbf{E}$	$\mathbf{M} \equiv n\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \widehat{\chi}_B \mathbf{B}$	$\mathbf{M} \equiv n\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \widehat{\chi}_B \mathbf{H}$	Поляризация и намагниченность - макроскопические характеристики отклика вещества на внешнее поле
$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho'$	$[\nabla, \mathbf{M}] = \frac{\mathbf{j}'}{c}$		Связь плотности вторичных источников с поляризацией (намагниченностью)
$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \widehat{\varepsilon}\mathbf{E},$ $\widehat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\widehat{\chi}_E$	$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \equiv \widehat{\mu}\mathbf{B},$ $\widehat{\mu} = 1 - 4\pi\widehat{\chi}_B$ H- «магнитная индукция»	$\mathbf{B} \equiv \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \equiv \widehat{\mu}\mathbf{H},$ $\widehat{\mu} = 1 + 4\pi\widehat{\chi}_H$ H - напряженность магнитного поля	Вспомогательные векторные поля, вводимые для удобства расчета поля в веществе
$(\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0,$ $[\nabla, \mathbf{E}] = 0$	$[\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c},$ $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$	$(\nabla, \mathbf{B}) = 0,$ $[\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}$	Уравнения для статических полей в веществе в диф. форме
$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_0,$ $\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$	$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c},$ $\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$	$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0,$ $\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c}$	Уравнения для статических полей в веществе в интегральной форме



## 12.1 Магнитное поле при наличии линейных магнетиков

$$\mathbf{E}_M = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{r}_i) \quad (12.1)$$

$$(\nabla, \mathbf{E}) = 4\pi(\rho_0 + \rho'), [\nabla, \mathbf{E}] = 0$$

$$\mathbf{B}_M = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \left[ \frac{\mathbf{v}_i}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_i) \right]$$

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0, [\nabla, \mathbf{B}] = 4\pi \left( \frac{\mathbf{j}_0}{c} + \frac{\mathbf{j}'}{c} \right)$$

Микро- и макроскопические электростатические и магнитостатические поля в веществе, создаваемое всеми реально существующими макроскопическими источниками (свободными и наведенными зарядами и токами).

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \hat{\alpha}_e \mathbf{E}, \quad (12.2)$$

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \tilde{\alpha}_m \mathbf{B}$$

Электрическая и магнитная поляризуемость молекул.

$$\mathbf{P} \equiv n \langle \mathbf{d} \rangle \quad (12.3)$$

$$\mathbf{M} \equiv n \langle \mathbf{m} \rangle$$

Определение векторов поляризации и намагниченности.

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad (12.4)$$

$$\mathbf{M} = \tilde{\chi}_m \mathbf{B}$$

Связи векторов поляризации и намагниченности с усредненными полями в веществе.

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (12.5)$$

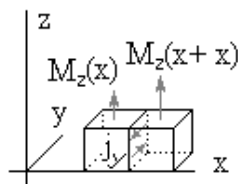
Как была определены (неудачно) магнитную поляризуемость

## 12.2 Связь вектора намагниченности с макроскопической плотностью молекулярных (индуцированных) токов

$$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho', \quad [\nabla, \mathbf{M}] = \frac{\mathbf{j}'}{c} \quad (12.6)$$

Связь вектора намагниченности с плотностью молекулярных токов..

$$\frac{j'}{c} = \frac{\delta m}{\delta S} = \quad (12.7)$$



Макроскопическая плотность молекулярных токов, циркулирующих по боковой поверхности элементарного объема намагниченного вещества.

$$\frac{j'_y(x)}{c} = \frac{\delta V}{\delta x \cdot \delta z} \cdot \frac{M_z(x) - M_z(x + \delta x)}{\delta x \cdot \delta y} \quad (12.8)$$

$$\frac{j'_y(z)}{c} = \frac{\delta V}{\delta x \cdot \delta z} \cdot \frac{M_x(z + \delta z) - M_x(z)}{\delta x \cdot \delta y}$$

$$\frac{j'_y}{c} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = [\nabla, \mathbf{M}]_y$$

Связь макроскопической плотности молекулярных токов в неоднородно намагниченном образце с вектором намагниченности.

### 12.3 Уравнения магнитостатики вакуума

$$(\nabla, \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_0 \quad (12.9)$$

$$[\nabla, \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}$$

Уравнения электростатики и магнитостатики с исключенными плотностями связанных зарядов и молекулярных токов.

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \Rightarrow (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0 \quad (12.10)$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \Rightarrow [\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}$$

Стандартная запись уравнений электростатики диэлектриков и магнитостатики магнетиков.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\chi_e \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (12.11)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\tilde{\chi}_m \mathbf{B} \equiv \tilde{\mu} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mu} = 1 - 4\pi\tilde{\chi}_m$$

Связь между основными и вспомогательными векторами в электростатике и магнитостатике.

$$\mu \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}} \quad (12.12)$$

Принятое в современной физике неудачное определение магнитной проницаемости вещества.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (12.13)$$

Принятая в современной физике неудачная связь между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

$$\langle \mathbf{m} \rangle \equiv \alpha_m \mathbf{H} \quad (12.14)$$

$$\mathbf{M} \equiv \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$$

Принятые в современной физике неудачное определение магнитной поляризуемости.

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c} \quad \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \quad (12.15)$$

$$(\nabla, \mathbf{H}) = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c} \quad \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$$

Окончательный вид уравнений магнитостатики магнетиков в дифференциальной и интегральной формах.

**Пример 12.1 Провод с током над плоской поверхностью полубесконечного магнетика**

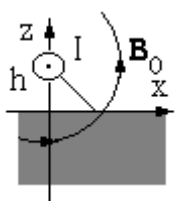
Рассчитать конфигурацию магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводом с током  $I$ , расположенным на высоте  $h$  над плоской границей полупространства, заполненного однородным магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Решение:

$$\frac{\mathbf{j}'}{c} = [\nabla, \mathbf{M}] = \left[ \nabla, \frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{4\pi} \right] = \left[ \nabla, \frac{1 - \tilde{\mu}}{4\pi} \mathbf{B} \right] = \quad (12.16) \quad \text{Отсутствие макроскопических молекулярных токов в объеме однородного магнетика без протекающих по нему свободных токов.}$$

$$= (1 - \tilde{\mu}) \frac{\mathbf{j}_0}{c} + \frac{[\nabla(1 - \tilde{\mu}), \mathbf{B}]}{4\pi} = 0$$

$$M_\tau = \tilde{\chi}_m (\mathbf{B}_0 + \mathbf{I}) \quad (12.17) \quad \text{Тангенциальная составляющая вектора намагниченности под границей магнетика с протекающим над ней свободным током.}$$

$$= \tilde{\chi}_m \left( \frac{2I_0 x}{c(x^2 + h^2)} \right)$$


$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{M}, d\mathbf{l}) = \frac{I'}{c} \Rightarrow M_\tau = \frac{i'}{c} \quad (12.18) \quad \text{Связь тангенциальных составляющих векторов намагниченности и индукции магнитного поля наведенных токов с линейной плотностью молекулярных токов на поверхности магнетика.}$$

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I'}{c} \Rightarrow B'_\tau = 2\pi \frac{i'}{c}$$

$$\frac{i'}{c} = \frac{\tilde{\chi}_m}{1 - 2\pi\tilde{\chi}_m} \frac{2I_0 x}{x^2 + h^2} = \quad (12.19) \quad \text{Линейная плотность токов, индуцируемых на плоской поверхности магнетика свободным током } I_0, \text{ протекающим параллельно этой поверхности.}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} \frac{2I_0 x}{c(x^2 + h^2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{2I_0 x}{c(x^2 + h^2)}$$

$$I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I_0 \quad (12.20) \quad \text{Величина тока - изображения, решающего задачу о магнитном поле провода с током над плоской поверхностью полубесконечного магнетика.}$$

## 12.4 Связь уравнений электростатики и магнитостатики в случае отсутствия свободных источников полей

$$\rho_0 = 0 \Rightarrow (\nabla, \mathbf{D}) = 0, \quad [\nabla, \mathbf{E}] = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (12.21)$$

$$\mathbf{j}_0 = 0 \Rightarrow (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \quad [\nabla, \mathbf{H}] = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Отсутствие свободных источников электростатических и магнитостатических полей - частный случай, соответствующий полной аналогии между парами векторов  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  и  $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$ .

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$$

$$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{M}$$

$$\varepsilon \leftrightarrow \mu$$

«Арифметические» соответствия между основными характеристиками электростатических и магнитостатических систем при отсутствии свободных источников поля.

## 10.5 Элементы теории ферромагнетизма

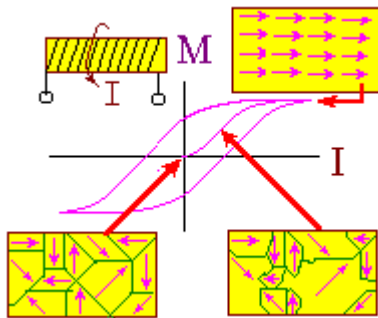


Рис.12.1 Ферромагнетизм. На графике изображена петля гистерезиса и доменная структура образца в различных точках кривой намагничивания. Слева вверху - идея эксперимента по наблюдению гистерезиса.

$$\mathbf{E}_M = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}_M = \mathbf{H}_M = \mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{M}$$

(12.23) Микроскопические поля, вызывающие поляризацию молекул диэлектрика и ориентацию атомных магнитных диполей магнетика.

$$M = n \langle m_z \rangle = n (g \mu_0) \cdot th \left( \frac{g \mu_0 B_M}{kT} \right) = n (g \mu_0) \cdot th \left( \frac{g \mu_0 \left( H + \frac{4}{3} \pi M \right)}{kT} \right)$$

(12.22) Уравнение для намагниченности образца из ферромагнетика в поле  $\mathbf{H}$ , создаваемом свободными токами.

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c} \Rightarrow H = 4\pi \frac{I_0}{c} \frac{N}{l} \quad (12.23)$$

Поле  $H$  внутри соленоида длиной  $l$ , по  $N$  виткам которого течет ток  $I_0$ .

$$\xi \equiv \frac{g\mu_0}{kT} \left( H + \frac{4}{3} \pi M \right) \Rightarrow$$

$$M = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{kT}{g\mu_0} \xi - H \right) = n(g\mu_0) \tanh \xi$$

$$\frac{3kT}{4\pi g\mu_0} \xi - \frac{3N}{cl} I = n(g\mu_0) \tanh \xi$$

(12.24) Более удобная форма трансцендентного уравнения для определения намагниченности сердечника из ферромагнетика по заданному току в соленоиде.

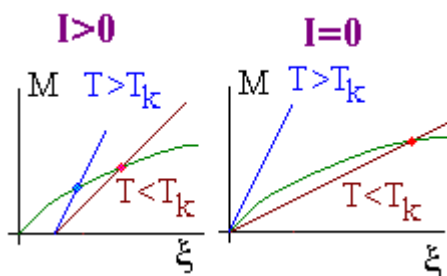


Рис.12.2 Графическое решение уравнения (10.46) для определения намагниченности сердечника из ферромагнетика. При отсутствии тока в катушке намагниченность сохраняется лишь при температуре, меньшей  $T_k$ .

**Пример 12.2** *Магнитное поле однородно намагниченного шара*

Рассчитать магнитное поле внутри и вне однородно намагниченного шара радиуса  $R$ . Вектор намагниченности равен  $\mathbf{M}$ , магнитная проницаемость материала равна  $\mu$ .

Решение:

$$\mathbf{E} = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{H} = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{M} \quad (12.25)$$

Электростатическое поле внутри однородно поляризованного шара и магнитное поле внутри однородно намагниченного шара.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = -\frac{4}{3} \pi \mu \mathbf{M}$$

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{d}, \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{d}}{R^3} \Rightarrow$$

(12.26) Электрическое поле диполя и магнитное поле вне однородно намагниченного шара.

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{4\pi(\mathbf{M}, \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^2} - \frac{4}{3} \pi \mathbf{M}$$

## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕМЕ ЛЕКЦИИ

### Экзаменационные вопросы

Интегральная и дифференциальная формы записи уравнений магнитостатики в веществе

- Молекулярные токи и их связь с вектором намагниченности. Вывод выражения для ротора  $\mathbf{M}$ .
- Вектор  $\mathbf{H}$  и его аналогия вектору  $\mathbf{D}$ . Магнитная восприимчивость вещества. Недостатки современной системы определений для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .
- Дифференциальная интегральная формы уравнений магнитостатики.
- Примеры использования вектора  $\mathbf{H}$  для расчета магнитных полей в симметричных случаях.
- Классификация магнетиков по величине  $\mu$
- Граничные условия для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Провод с током над плоской поверхностью полубесконечного магнетика (в тест 11-12 мая вопрос не включен).

Классическая теория ферромагнетизма

- Феноменологическое описание явления ферромагнетизма: связь вектора намагниченности с токами в обмотке соленоида. Гистерезис.
- Доменная структура ферромагнетиков. Температура Кюри.
- Использование аналогий между магнитостатикой и электростатикой вещества при решении задач на расчет полей в отсутствие их свободных источников.
- Классическая теория ферромагнетизма.
- Трудности классической теории ферромагнетизма. Современные представления о природе ферромагнетизма.

### Вопросы к тестам и письменной части экзамена

3.12.1	Дайте определение вектора намагниченности $\mathbf{M}$ .
3.12.2	Как связан вектор намагниченности с плотностью молекулярных токов?
3.12.3	Дайте определение вектора $\mathbf{H}$ .
3.12.4	Дайте определение магнитной проницаемости вещества $\mu$ .
3.12.5	Как связана магнитная проницаемость вещества с магнитной поляризуемостью его молекул?
3.12.6	Запишите уравнения магнитостатики вещества в дифференциальной форме
3.12.7	Запишите уравнения магнитостатики вещества в интегральной форме
3.12.8	Чему равны величины векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в очень длинном соленоиде, намотанном на сердечник с магнитной проницаемостью $\mu$ , если по его проводам течет ток $I_0$ , а линейная плотность витков равна $n$ ?
3.12.9	Чему равны величины векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в намотанной на сердечник с магнитной проницаемостью $\mu$ тороидальной катушке, имеющей $N$ витков с током $I_0$ .
3.12.10	Бесконечный прямой провод с током $I$ расположен параллельно плоской поверхности диамагнетика. Нарисуйте примерный вид

	линий поля <b>B</b> .
3.12.11	Однородный шар из диамагнетика помещен в однородное магнитное поле. Нарисуйте примерный вид линий поля <b>B</b> .
3.12.12	Бесконечный прямой провод с током $I$ расположен параллельно плоской поверхности парамагнетика. Нарисуйте примерный вид линий поля <b>B</b> .
3.12.13	Однородный шар из парамагнетика помещен в однородное магнитное поле. . Нарисуйте примерный вид линий поля <b>B</b> .
3.12.14	Бесконечный прямой провод с током $I$ расположен параллельно плоской поверхности ферромагнетика. Нарисуйте примерный вид линий поля <b>B</b> .
3.12.15	Однородный шар из ферромагнетика помещен в однородное магнитное поле. . Нарисуйте примерный вид линий поля <b>B</b> .
3.12.16	Длинный соленоид намотан на сердечник из ферромагнетика. Нарисуйте график зависимости величины вектора намагниченности от силы тока, протекающего по виткам соленоида.
3.12.17	Длинный соленоид намотан на сердечник из ферромагнетика. Нарисуйте график зависимости величины вектора <b>B</b> от силы тока, протекающего по виткам соленоида.
3.12.18	Длинный соленоид намотан на сердечник из ферромагнетика. Нарисуйте график зависимости величины вектора <b>H</b> от силы тока, протекающего по виткам соленоида.
3.12.19	Как изменяются свойства ферромагнетика при переходе через температуру Кюри?
3.12.20	Какие замены электростатических величина на магнитостатические необходимо сделать для того, чтобы из готового решения задачи электростатики диэлектриков получить решение аналогичной задачи магнитостатики в случае отсутствия свободных источников поля?

**Задачи к экзамену** (рекомендуется разобрать на практических занятиях )

P.3.12.1	Соленоид длиной $l$ , содержащий $N$ витков с током $I$ , помещен в обладающий парамагнитными свойствами газ, атомы которого обладают полным моментом импульса, определяемым квантовым числом $J$ . Рассчитать магнитное поле внутри соленоида. Множитель Ланде $g$ считать известным. Указание. $z$ -проекция магнитного момента описанных в условии атомов может принимать дискретный набор значений $\mu_0 g J_z$ , где $J_z$ пробегает набор значений от $-J$ до $+J$ через единицу.
P.3.12.2	Вывести граничные условия для векторов <b>B</b> и <b>H</b> на тонкой границе двух магнетиков.
P.3.12.3	Используя граничные условия, решить задачу о проводе с током, расположенном над плоской границей полубесконечного магнетика, методом изображений. Начертить примерный ход линий векторов <b>B</b> и <b>H</b> в случаях: $\mu = 0$ , $0 < \mu < 1$ , $\mu > 1$ и $\mu \gg 1$ .

Р.3.12.4	Решить задачу о расчете электрического поля, создаваемого равномерно заряженным проводом, расположенным параллельно границе однородного диэлектрика с заданными свойствами, методом, аналогичным использованному при расчете магнитного поля в примере 12.3.
Р.3.12.5	Коаксиальный кабель представляет собой очень длинный проводящий цилиндр радиусом $R$ со стенками толщиной $h$ («оплетка»), вдоль оси которого проходит токопроводящий провод радиусом $r$ . Центральный провод отделен от «оплетки» слоем диэлектрика, обладающего диамагнитными свойствами, токопроводящие элементы кабеля обладают парамагнитными свойствами. Начертите примерные графики зависимости модулей векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ от расстояния до оси кабеля, если известно, что по центральному проводу и «оплетке» в противоположных направлениях течет ток $I$ , равномерно распределенный по всему сечению токопроводящих элементов.
Р.3.12.6	Однородный цилиндр заданного радиуса из магнетика с известной магнитной проницаемостью помещен в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ так, что его ось расположена перпендикулярно направлению магнитной индукции. Рассчитать магнитное поле внутри цилиндра, найти распределение поверхностных токов, определить магнитное поле в произвольной точке вне цилиндра.

**Темы для самостоятельной (творческой) работы с элементами исследования**

К.3.12.1	Попытайтесь создать собственную программу, соответствующую квантовому описанию макроскопического объема ферромагнетика. Оцените с ее помощью температуру Кюри. В случае получения разумных результатов перешлите их вместе с Вашей программой в Нобелеский комитет.
----------	---



## Приложение

### Компьютерное моделирование нелокальной плазмы

#### Введение

Физика нелокальной плазмы является одним из интенсивно развивающихся направлений современных исследований. С точки зрения задач обучения и привлечения молодежи к самостоятельным научным исследованиям это направление оказывается весьма удобным как с точки зрения иллюстраций фундаментальных идей и принципов квантовой механики и ее приложений, так и с точки зрения организации самостоятельной исследовательской работы, направленной на решение актуальных задач физики низкотемпературной плазмы, плазменных технологий и многих других смежных областей. С другой стороны, наличие множества процессов, обуславливающих наблюдаемые состояния низкотемпературной плазмы, делает практически невозможным построение ее адекватного описания с помощью простых аналитических моделей и требует использования численного моделирования. Именно поэтому, в связи с происходящей «компьютерной революцией», с одной стороны, и бурным развитием плазменных технологий, с другой, в настоящее время наблюдается повторный всплеск интереса к указанной области физики, который выражается в возникновении новой волны исследований, выполняемых на принципиально новом уровне.

К числу новых объектов физики низкотемпературной плазмы XXI века в первую очередь следует отнести новый тип плазменной модели, получивший название *нелокальной плазмы*. Новая модель учитывает весьма важные, а зачастую и определяющие специфические эффекты, обусловленные существованием «нелокальности» - зависимости электронных характеристик плазмы в рассматриваемой точке от ее состояния в соседних областях, удаленных на расстояния порядка масштаба неоднородностей.

Важнейшей чертой нелокальной плазмы является специфический характер функции распределения по энергиям и присутствие в ней различных групп электронов, допускающих раздельное управление («манипулирование»). Например, было показано, что энергичные электроны могут свободно диффундировать к стенкам, в то время как медленные электроны подчиняются «классическому» приближению амбиполярной диффузии. В результате, из-за большой разницы в коэффициентах свободной и амбиполярной диффузии поток энергичных электронов

к стене может быть больше соответствующего потока ионов. Подобные нелокальные эффекты с участием энергичных электронов оказываются существенными для технологически важных плазм и допускают возможность их использования для управления свойствами плазмы и дрейфом в ней нанобъектов с целью развития технологий их адресной доставки. Новое «нелокальное» приближение оказывается весьма перспективным при решении как задач фундаментальной физики плазмы, так и для многих приложений, включая нанотехнологические задачи, проблемы описаний взаимодействий низкотемпературной плазмы с биологическими тканями и объектами, потребности плазменной медицины.

### **Физические принципы, положенные в основу алгоритмов численного моделирования газоразрядных сред в рамках гидродинамического подхода**

По-видимому, наиболее радикальный путь построения теории газового разряда состоит в его моделировании на «усредненно-микроскопическом» уровне, подразумевающим непосредственный учет совокупностей элементарных процессов, определяющих кинетику плазмы. В рамках такого подхода возможно прямое численное моделирование случайных процессов методами «Монте-Карло» или Particle-in-cell (PIC), но более реалистичным на сегодняшний день представляется вариант описания кинетики на базе гидродинамического подхода. Подразумевается численное решение самосогласованной задачи на расчет пространственных и временных распределений концентраций наиболее важных для физики системы компонент газоразрядной смеси: электронов, фотонов, ионов, атомов и молекул в различных квантовых состояниях. При этом атомы, молекулы и их ионы в основном и каждом из квантовых состояний рассматриваются как отдельные типы частиц.

Для концентраций каждого типа частиц в газовом разряде записывается дифференциальное уравнение, выражающее по сути соответствующие законы сохранения:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_j}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{J}_j^{(\alpha)}) = S_j^{(inelastic)}, \\ \mathbf{J}_j = -\nabla(D_j n_j) + \mu_j n_j q_j \mathbf{E} / |q_j|. \end{cases} \quad (1)$$

Сходное уравнение, выражающее закон сохранения энергии, записывается для объемных плотностей энергий для каждого из сортов частиц:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} (n_j T_j) + (\nabla, \mathbf{Q}_j) + q_j (\mathbf{E}, \mathbf{J}_j) = S_{T_j}^{(elastic)} + S_{T_j}^{(inelastic)} \\ \mathbf{Q}_j = -\left(\frac{5}{2} D_j\right) \nabla (n_j T_j) + \left(\frac{5}{2} \mu_j\right) \mathbf{E} n_j T_j \end{cases} \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) через  $J_j$  и  $Q_j$  обозначены соответственно плотности потоков числа частиц и связанных с ними тепловых энергий, возникающих в результате процессов диффузии ( $D_j$  - коэффициент диффузии) и дрейфа под действием сил поля ( $\mu_j$  - подвижность). Через  $S_j$  обозначены объемные плотности скоростей реакций рождения и гибели частиц каждого сорта при столкновениях, а также скоростей выделения и поглощения связанной с этими частицами тепловой энергии. Эти скорости пропорциональны концентрациям рассматриваемых частиц. Так, например, в случае учета реакций, протекающих при двухчастичных столкновениях, выражение для такой скорости имеет вид:

$$S_j^{(inelastic)} = S_j^{(+)} - S_j^{(-)} = \sum_{p,q,j'} k_{p+q \rightarrow j+\{j\}}^{(+)} n_p n_q - \sum_{p,j'} k_{j+p \rightarrow \{j\}}^{(-)} n_j n_p, \quad (3)$$

где через  $k_{pq}$  обозначены константы скоростей реакций, приводящих к рождению и гибели частиц рассматриваемого сорта. Такие константы вычисляются, исходя из сечений элементарных столкновительных процессов  $\sigma_{pq}$  и функции распределения  $f$  по скоростям относительного движения частиц, участвующих в элементарном процессе:

$$k_{p+q \rightarrow j+\{j\}} = \int dv_{pq} f(v_{pq}) \sigma_{p+q \rightarrow j+\{j\}}(v_{pq}) v_{pq}. \quad (4)$$

Константы скоростей прямых и обратных двухчастичных столкновительных процессов и соответствующие сечения связаны между собой уравнением Клейна – Росселанда, вытекающими из требования возможности нахождения системы в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ :

$$g_p k_{pq} = g_q k_{qp} \exp\left[-\frac{\delta W}{kT}\right], \quad g_p (W^{(kin)} + \delta W) \sigma_{pq}(W^{(kin)} + \delta W) = g_q (W^{(kin)}) \sigma_{qp}(W^{(kin)}).$$

В двух последних формулах индексы  $q$  и  $p$  нумеруют состояния участников элементарного столкновительного процесса до и после взаимодействия,  $g_q$  и  $g_p$  – статистические веса соответствующих состояний,  $W^{(kin)}$  – кинетическая энергия относительного движения сталкивающихся частиц,  $\delta W$  – энергия, передаваемая при неупругом столкновении.

Входящая в соотношение (4) функция распределения частиц плазмы по скоростям  $f(v)$  в первом приближении может считаться максвелловской. В

реальности они могут иметь существенные отличия функции распределения от соответствующего равновесной ситуации, которые могут определяться либо экспериментально, либо в ходе поиска самосогласованного решения описываемой задачи.

Для получения замкнутой задачи описания системы уравнения (1–4) дополняются известными из электродинамики уравнениями для квазистатического электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = -4\pi \sum_j q_j n_j, \quad (5)$$

Помимо проблем чисто вычислительного характера (учет гигантского числа типов взаимодействующих и превращающихся друг в друга частиц) задача осложнена рядом носящих принципиальный характер физических проблем. К этим проблемам относятся: алгоритмы ограничения набора учитываемых элементарных процессов и числа квантовых состояний атомов, молекул и их ионов, необходимость наличия информации о функциях распределения по скоростям и зависимостях констант скоростей элементарных процессов от энергий (или зависимостей соответствующих сечений от относительных скоростей).

Систематические приближенные квантовомеханические расчеты сечений и связанных с ними констант скоростей элементарных плазменных процессов оказываются возможными лишь в тех случаях, когда хотя бы одна из сталкивающихся частиц оказывается бесструктурной (электрон, фотон). Для столкновительных переходов между высоковозбужденными короткоживущими атомными состояниями даже в случае процессов с участием простейших атомов гелия расхождение расчетов и измерений оказывается большим по сравнению со «стандартной погрешностью метода Борна». Результаты подобных расчетов даже в случае наиболее простых для описания столкновений с простейшими из многоэлектронных атомов - гелием могут отличаться от экспериментальных данных в полтора-два раза («стандартная погрешность метода Борна»).

Что же касается столкновительных процессов между многоэлектронными атомами и/или ионами, то соответствующие расчеты носят крайне трудоемкий характер. На сегодняшний день основным источником данных для численного моделирования газоразрядной плазмы остаются данные экспериментальных измерений. К настоящему времени уже накоплены весьма объемные банки теоретических и экспериментальных значений таких констант и сечений элементарных процессов, представляющие хорошую базу исходных данных для численного моделирования газоразрядной плазмы.

## **Физические принципы, положенные в основу алгоритмов задания граничных условий для численного моделирования процессов в газоразрядных средах**

Для численного решения системы уравнений типа (1 – 5) необходимо задание граничных условий. При наличии цилиндрической симметрии в системе, соответствующей «стандартной» двумерно задаче расчета конфигурация разряда в диэлектрической трубке, на оси симметрии нормальным компонентам плотностей тока и теплового потока приписываются нулевые значения. На поглощающих стенках граничные условия для плотностей потоков частиц и связанных с ними тепловых энергий задаются в виде, подробно рассмотренному в литературе.

В случае задания граничных условий для потоков тяжелых частиц роль описывающих эмиссионные потоки коэффициентов играют скорости реакций взаимного превращения частиц, протекающих на стенках (а не в объеме). Примерами таких реакций могут служить процессы электрон-ионной рекомбинации, приводящие к исчезновению ионов и возникновению потоков нейтральных атомов в различных квантовых состояниях.

### Физические принципы, положенные в основу алгоритмов численного моделирования процессов переноса в условиях газоразрядной плазмы

Константы скоростей реакций и количественные характеристики учитываемых уравнениями (1 – 2) процессов переноса существенным образом зависят от температур составляющих газоразрядную плазму подансамблей частиц или (в случае отсутствия локального равновесия) функций распределения частиц различного сорта по энергиям или скоростям движения. В связи с этим, для построения нулевого (исходного для решения задачи (1 – 5) методом итераций) приближения необходимы априорные данные о функциях распределения основных типов частиц, присутствующих в разрядном объеме.

В отличие от электронов, обмен энергиями которых с тяжелыми частицами затруднен из-за большого различия масс, для ионов и атомов в метастабильных состояниях в большей степени применимо максвелловское приближение для распределений частиц по скоростям. В результате коэффициенты подвижности ( $\mu$ ) и

диффузии ( $D_j = kT_j \mu_j / q_e$ ) оказываются зависящими только от плотности газа. Температура ионов  $T_i$  в первом приближении может считаться равной температуре газа нейтральных частиц  $T_g$ . Более точным является учет зависимости температуры заряженных частиц от напряженности электрического поля, описываемой формулой Ванье [409].

В рамках идеологии модели нелокальной плазмы функция распределения электронов по энергиям не может считаться максвелловской и должна определяться поэтапно в ходе решения задачи описания газоразрядной системы. В качестве нулевого приближения разумно использование решения кинетического уравнения Больцмана с независимыми переменными: координатами точек в разрядном объеме  $\mathbf{r}$  и полными механическими энергиями электронов в этих точках  $W = K + q_e \varphi(t, \mathbf{r})$ :

$$(\nabla D_r, \nabla f^{(0)}(t, \mathbf{r}, W)) + \frac{\partial}{\partial W} \left( D_w(t, \mathbf{r}, W) \frac{\partial}{\partial W} f^{(0)} + V_w(t, \mathbf{r}, W) f^{(0)} \right) = S_{inel}(f^{(0)}) + S_{ee}(f^{(0)}). \quad (6)$$

В уравнении (6) использованы следующие обозначения:  $D_r$  - коэффициент диффузии в координатном пространстве,  $D_w$  и  $V_w$  - коэффициенты диффузии и динамического трения в энергетическом пространстве. Правая часть уравнения содержит члены, обеспечивающие учет неупругих и электрон-электронных столкновений.

Входящий в (6) коэффициент диффузии электронов в координатном пространстве вычисляется через частоту передачи энергии при электро-атомных столкновениях  $\nu$  и длину свободного пробега  $\lambda = \nu^{-1}$ :

$$D_r = \frac{1}{3} \lambda u = \frac{1}{3} u^2 \nu^{-1} \quad .$$

Подвижность электронов и коэффициенты диффузии в энергетическом пространстве выражаются через коэффициент  $D_r$  и нормированную на концентрацию функцию распределения электронов по энергиям:

$$\mu_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_e} \int_0^\infty D_r(\mathbf{r}, u) \sqrt{u} \frac{\partial}{\partial u} f^{(0)}(\mathbf{r}, u) du, \quad D_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_e} \int_0^\infty D_r(\mathbf{r}, u) \sqrt{u} f^{(0)}(\mathbf{r}, u) du.$$

Определяемая из кинетического уравнения Больцмана функция распределения также может использоваться для предварительных расчетов констант скоростей столкновительных переходов в плазме (4).

Физические принципы, положенные в основу алгоритмов  
полуэмпирического моделирования газовых разрядов

Накопленный за более чем вековой период развития физики низкотемпературной плазмы опыт построения полуаналитических эмпирических методов моделирования плазмы также может быть использован для построения исходных приближений для решения задачи (1-5) методом последовательных итераций. Подобные модели, как правило одномерные, дают заведомо менее качественное начальное приближение, что увеличивает время получения уточненного решения в рамках гидродинамического подхода. Вместе с тем, относительная простота полуаналитических моделей обеспечивает существенную экономию времени и ресурсов на первом этапе решения задачи.

В рамках полуаналитического подхода функция распределения электронов по энергиям предполагается максвелловской, а определению подлежит величина электронной температуры. В основу решения задачи используется соответствующее локальному приближению для квазистационарных разрядов требование равенства энергий, получаемых и отдаваемых в единицу времени электронным газом в результате взаимодействий электронов с электрическим полем и атомами в разрядном объеме:

$$\frac{e^2 E^2}{m v_{col}^2} = \delta W ,$$

где  $E$  – напряженность поля,  $v_{col}$  – частота столкновений,  $\delta W$  – энергия, отдаваемая электроном при столкновениях за время свободного пробега, связанная с энергией через коэффициент передачи энергии  $k$ , зависящий от механизма потерь при столкновениях:

$$\delta W = k \frac{3}{2} T_e .$$

В случае разрядов в газах из одноатомных молекул этот коэффициент легко оценивается из элементарной теории упругих столкновений ( $k \sim 2m/M$ ). В случае газов из многоатомных молекул основным каналом потери энергии электронами оказывается ее уход на возбуждение колебательных и вращательных степеней свободы. Данные по оценкам эффективных значений столкновительных потерь энергии электронов в молекулярных газах широко представлены в современной литературе .

Окончательная связь между напряженностью электрического поля в положительном столбе тлеющего разряда и электронной температурой имеет вид:

$$\frac{3}{2} T_e = \langle \varepsilon \rangle = 0.8 \frac{q_e}{\sigma \sqrt{k}} \frac{E}{N} , \quad (7)$$

где  $N$  – концентрация частиц газа.  $\sigma$  – транспортное сечение, связанное с длиной свободного пробега электронов

$$l = (N\sigma)^{-1}$$

В случае тлеющего разряда его основными областями являются прикатодное пространство и положительный столб. Прикатодный слой играет роль электронной пушки, эффективно разгоняющей первичные электроны и обеспечивающей возможность протекания процессов столкновительной ионизации, создающей необходимые для поддержания разряда электроны. Создаваемые в прикатодном слое электроны инжектируются в располагающиеся на пути к аноду области разрядного промежутка, обеспечивая горение разряда во всем объеме. Одновременно создаваемые в прикатодном слое и переносимые полем в направлении заземленного электрода положительные ионы инициируют процессы вторичной эмиссии затравочных для столкновительной ионизации электронов. В результате в прикатодном слое возникает саморегулирующийся самоподдерживающийся процесс генерации заряженных частиц, обеспечивающих существование разряда.

Доминирующая роль в пространстве между катодным слоем и анодом принадлежит положительному столбу – замыкающей электрическую цепь обособленной области тлеющего разряда, для которой в наибольшей степени подходит приближение низкотемпературной плазмы.

Рассмотрение разрядного промежутка как совокупности двух описанных областей позволяет получать удовлетворительное начальное приближение для описания разряда.

В простейшем одномерном случае катодный слой толщиной  $d$  может быть описан с помощью системы уравнений баланса для концентрации электронов или связанной с ней плотности электронного тока. При этом учитываются процессы ионизации электронным ударом, выбивание электронов с катода в результате его бомбардировки ионами, и генерации новых электро-ионных пар за счет дополнительных (внешних) источников ионизации:

$$\begin{cases} \frac{dj_e}{dz} = \alpha j_e + \Omega, \\ j_e(0) = j_i, \\ j_e + j_i = \text{const} \approx j_e(d). \end{cases} \quad (8)$$



В системе уравнений (2.28) через  $j_e$  и  $j_i$  - плотности электронного и ионного токов соответственно,  $\alpha = \alpha(E)$  - ионизационный коэффициент,  $\gamma$  - параметр, характеризующий вероятность выбивания электрона с катода в результате прихода на него иона,  $\Omega$  - скорость генерации на единице длины катодного слоя дополнительных токов, возникающих за счет внешних источников ионизации (например, фотоионизации), точка  $z = 0$  выбрана на поверхности катода. При этом в качестве механизма ухода носителей заряда из рассматриваемого слоя учитывается только их дрейф вдоль оси трубки.

Решение системы уравнений (8) в простейшем случае отсутствия зависимостей параметров  $\alpha$  и  $\Omega$  от координат в случае самоподдерживающегося разряда ( $\Omega = 0$ ) приводит к простому соотношению для плотности электронной составляющей тока на катоде:

$$j(0) \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma} - e^{\alpha d} \right\} = \frac{I}{\alpha} (e^{\alpha d} - 1) .$$

Из этого соотношения следует критерий существования самоподдерживающегося самостоятельного разряда, естественное обобщение которого на более соответствующий реальности случай существования зависимости ионизационного коэффициента  $\alpha$  от напряженности электрического поля приведено, например, в [433]

$$\int_0^d \alpha(E(z)) dz = \ln(1 + \gamma^{-1}) . \quad (9)$$

Зависимость входящего в обобщенный критерий самоподдержания разряда ионизационного коэффициента от напряженности поля  $E$  удовлетворительно описывается эмпирической формулой Таундсена:

$$\alpha(E) = Ap \exp(-Bp/E) , \quad (10)$$

в которой через  $p$  обозначено давление газа и введены зависящие от его химического состава подгоночные параметры  $A$  и  $B$ . Напряженность электрического поля обычно считается линейно падающей на толщине  $d$  катодного слоя от максимального значения  $E(0)$  на поверхности катода до нуля на границе слоя:

$$E(z) = E(0)(1 - z/d) , \quad (11)$$

Уравнения (8 – 11) могут быть дополнены связью между напряженностью электрического поля и плотностью заряда

$$4\pi q_e (n_i - n_e) = (\nabla, E) \approx E(0)/d ,$$

что позволяет связать плотность протекающего через катод электрического тока с падением напряжения в катодном слое и его характерной толщиной  $d$ :

$$j = (1 + \gamma)(4\pi d)^{-1} \mu_i E^2(0) . \quad (12)$$

Совокупность связей (9 – 12) в случае выполнения условия самоподдержания тлеющего разряда позволяет получить зависимости напряженности поля у катода, размера прикатодной области и падения напряжения на ней от величины плотности разрядного тока.

На рис.1 в качестве примера приведены соответствующие результаты, полученные в рамках простейшего приближения неизменного электрического поля в прикатодной области.

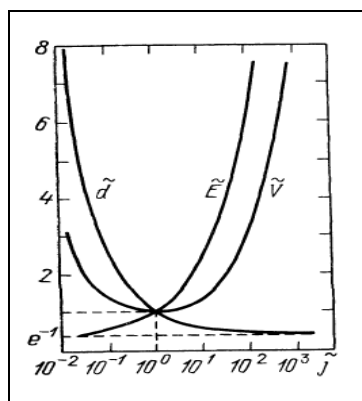


Рис. 1. Зависимость толщины катодного слоя, поля на катоде и падения катодного напряжения от плотности тока в безразмерных величинах.

Получаемая в результате решения описанной системы уравнений зависимость падения напряжения на катодном слое от плотности тока имеет точку минимума, соответствующую «нормальному значению» плотности тока  $j_n$ , являющемуся границей между двумя типами тлеющего разряда («нормальным» и «аномальным»). При малых разрядных токах плотность тока автоматически устанавливается равной  $j_n$  за счет самонастройки размеров токового пятна на катоде. При этом катодное падение напряжения остается постоянным и равным минимальному значению, обеспечивающему выполнение критерия (9). При заполнении токовым пятном всего катода плотность тока и связанное с ним катодное падение напряжения сильно зависят от силы разрядного тока – реализуется режим аномального разряда.

Упрощенная полуэмпирическая модель положительного столба разряда может быть построена на основе уравнений баланса, выражающих закон сохранения энергии и закон сохранения числа частиц. В рамках простейшей модели учитываются процессы ионизации

невозбужденных атомов и молекул при одиночном столкновении с электроном и уход носителей на стенки трубки, где происходит их рекомбинация. В этом случае уравнение баланса (1) для электронов принимает вид :

$$(\nabla, n_e u_e) = z_i n_e, \quad (13)$$

где  $n_e$  - концентрация электронов,  $u_e$  - скорость их дрейфа, а частота прямой ионизации электронным ударом  $z_i$  определяется в соответствии с распределением Саха концентрацией ионизируемых частиц  $N$  и потенциалом их ионизации  $U_i$  ( $\alpha = const$ ):

$$z_i = \alpha N \frac{6 \cdot 10^2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{3/2} \frac{m_e}{q_e} \left( 1 + \frac{q_e U_i}{kT_e} \right) \exp \left( - \frac{q_e U_i}{kT_e} \right). \quad (14)$$

В использованном для тестовых расчетов одномерном приближении в случае реализации диффузного режима движения электронов и с учетом квазинейтральности положительного столба уравнение баланса (2.29) сводится к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 n_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn_e}{dr} + \frac{z_i}{D} n_e = 0, \quad (15)$$

решение которого требует добавления граничных условий для плотности числа частиц на стенке трубки. Выбор простейшего варианта  $n_e(r=R) = 0$ , приводит к известному аналитическому решению

$$n_e(r) = n(0) J_0 \left( r \sqrt{z_i / D} \right),$$

где  $D$  – эффективный коэффициент диффузии, рассчитанный в рамках развиваемого подхода из коэффициентов диффузии ионов и электронов и коэффициентов их подвижностей. Т.о. возникает уравнение, связывающее частоту ионизации с коэффициентом диффузии и геометрическими размерами газоразрядной трубки:

$$R \sqrt{z_i / D} = 2.405. \quad (16)$$

Соотношения (14) и (16) (или его численный аналог в случае решения уравнения Бесселя с более сложными граничными условиями) приводят к трансцендентному уравнению для электронной температуры:

$$\sqrt{\frac{kT_e}{q_e U_i}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{q_e U_i}{kT_e} \right) \exp \left( - \frac{q_e U_i}{kT_e} \right) 1.16 \cdot 10^7 (CpR)^2 = 1, \quad (17)$$

где  $C$  – константа, зависящая от сорта газа. В случае газовых смесей константа  $C$  рассчитывается путем усреднения табличных значений с весами, пропорциональными концентрациям компонент. В результате электронная температура в положительном столбе

тлеющего разряда оказывается зависящей от типа чистого газа (через константу  $C$  и потенциал ионизации атомов  $U_i$ ), давления и поперечных размеров трубки. В качестве теста корректности так осуществляемой оценки электронной температуры в положительном столбе возможно использование соотношения (17), позволяющего оценить напряженность поля в этой части разрядного промежутка и сравнить со сравнительно легко определяемым падением напряжения на нем.

Алгоритмы численного моделирования газоразрядных сред  
в рамках гидродинамического подхода с учетом нелокальности

Расчёт в рамках «микроскопического усредненного» подхода, позволяющего осуществлять индивидуальный учет элементарных процессов в газоразрядных средах на базе гидродинамического приближения, осуществляется в 2 этапа. На первом этапе находится функция распределения при помощи решения уравнения Больцмана или аналитическая полуэмпирическая модель газоразрядного промежутка. Результатом решения являются зависящие от двух переменных ( $E$  и  $n_e$ ) значения функции распределения электронов по энергиям (ФРЭ). На основе ФРЭ вычисляется температура электронов, коэффициенты скоростей реакций, а также коэффициенты переноса (диффузии и подвижности электронов) как функции от напряженности поля и концентрации.

На втором этапе полученное в нулевом приближении «стартовое» решение уточняется методом последовательных приближений. В ходе каждой итерации решается система уравнений типа (1 – 5), в которой учитываемый набор частиц и список задающих конкретный вид этих уравнений элементарных процессов и плазмохимических реакций определяется пользователем в соответствии с формулируемой им физической моделью. При этом значения зависящих от функции распределения электронов коэффициентов переноса и констант скоростей реакций берутся из решений, полученных в ходе предшествующей итерации. Таким образом найденные функции распределения вводятся в систему (1 – 5) неявно, в виде вычисленных с их помощью констант скоростей реакций. На каждой итерации система дифференциальных уравнений в частных производных решается стандартными методами, реализованными в плазменном модуле моделирующей среды COMSOL. После решения системы уравнений (1 – 5) осуществляется корректировка пространственного распределения электронной температуры и

концентрации носителей зарядов, пересчитываются зависящие от этих параметров коэффициенты и осуществляется переход к следующей итерации.

Упрощенная схема алгоритма решения самосогласованной задачи моделирования нелокальной плазмы приведена на рис. 2.

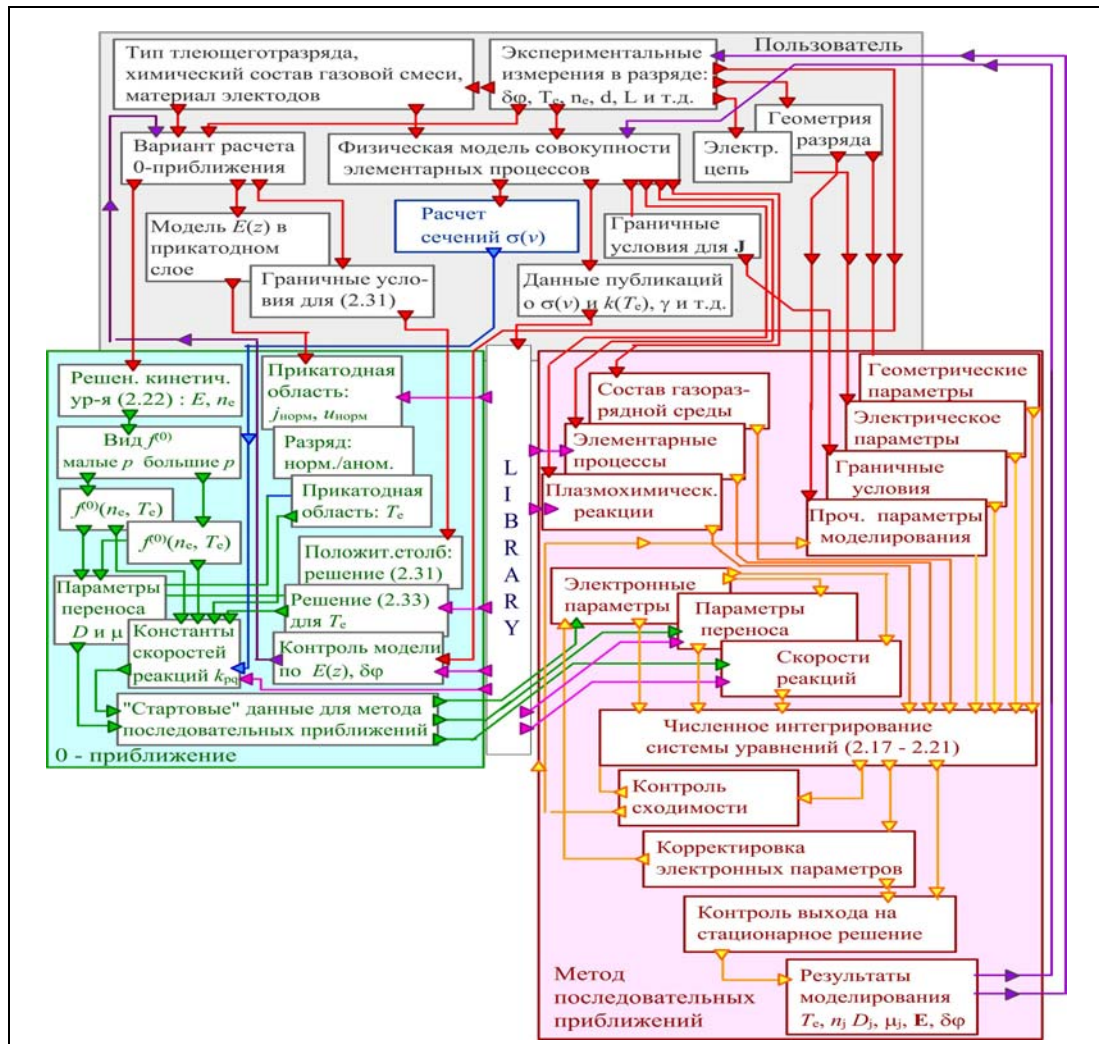


Рис. 2. Упрощенный алгоритм автоматизированного расчета параметров нелокальных газоразрядных сред с использованием плазменного модуля моделирующей оболочки.

Приведенный алгоритм по сути реализует гибридный подход к моделированию плазмы, сочетающий преимущества гидродинамических и кинетических моделей. В гидродинамических моделях характеристиками компонент плазмы (электроны, ионы, нейтралы) являются такие макроскопические параметры как концентрации, потоки, средняя энергия частиц. Изменения этих характеристик в пространстве и во времени описывается гидродинамическими уравнениями баланса. Поскольку частицы имеют заряд, для описания

их взаимодействия с электрическим полем, система решается совместно с уравнениями Максвелла (в том числе, с уравнением Пуассона).

На приведенной заведомо упрощенной схеме не нашла отражения процедура выбора сетки для решения системы дифференциальных уравнений. При решении задач описания стационарной плазмы сетка задавалась вручную с учетом геометрии разрядного промежутка и иных априорных физических соображений. При переходе к решению задач описания существенно нестационарных газоразрядных сред и протекающих в них процессов было признано целесообразным автоматизировать эту часть работ по моделированию. В результате был осуществлен переход к адаптивным методам построения сетки, параметры которой менялись в ходе решения задачи.

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## КАФЕДРА ФИЗИКИ

Кафедра Физики как общеобразовательная кафедра университета обеспечивает преподавание курса общей физики по двум (стандартной и расширенной) учебным программам в количестве 324 и 500 аудиторных часов для всех дневных факультетов, а также заочного и вечернего отделений. Лекции, практические и лабораторные занятия проводятся в течение 1-4 семестров на 1 и 2 курсах и заканчиваются сдачей зачетов и экзаменов в конце каждого семестра. Также на кафедре физики разработаны и реализуются специализированные дисциплины для студентов старших курсов – физика низких температур, биофизика, специальные и дополнительные главы физики.

Кафедра оснащена учебно-лабораторным оборудованием по всем разделам физики и имеет, помимо традиционных, специализированные компьютеризированные учебные лаборатории по электромагнетизму, колебательным процессам, волновой и квантовой оптике, физике низких температур.

В 2011 г. в соответствии с приказом Министра образования и науки Российской Федерации от 18.08.2011 г. № 2209 произошло объединение Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО) и Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ). После реорганизации в структуре Университета ИТМО с 01.01.2012 г. по 31.08.2015 г. функционировали две кафедры физики: 1) физики-1, заведующий д.т.н., профессор Стафеев Сергей Константинович; 2) физики-2, заведующий д.т.н., профессор Баранов Игорь Владимирович. С 01.09.2015 г. с целью оптимизации образовательного процесса вышеуказанные кафедры объединены в единую кафедру Физики.

Учитывая богатую и плодотворную историю педагогической и научной работы кафедр физики Университета ИТМО и СПбГУНиПТ, ниже представлена краткая историческая справка об их развитии образовательной и научной деятельности.

### Кафедра физики Университета ИТМО (1930-2011 гг.).

Преподавание физики как учебной дисциплины велось в Ремесленном училище цесаревича Николая всегда с момента его создания. Механико-оптическое и часовое отделение, а затем — Техникум точной механики и оптики имели в своем составе Физический кабинет. Преподаванию дисциплины Физика для учащихся всегда уделялось большое внимание. В

1930 году при организации вуза — Ленинградского института точной механики и оптики — была организована кафедра Физики как одна из общеобразовательных кафедр.

Организатором и первым заведующим кафедрой Физики явился профессор А.П. Ющенко. Затем в довоенные годы кафедрой возглавляли: профессора В.Ф. Трояновский, Л.С. Полак. С 1935 года кафедрой возглавил известный специалист в области рентгенометрии профессор И.В. Поройков.

В эвакуации в г. Черепаново Новосибирской области кафедрой Физики возглавил известный ученый, сотрудник Всесоюзного научно-исследовательского института метрологии (ВНИИМ), занимавшийся дозиметрией и метрологией рентгеновских лучей, профессор К.К. Аглинцев.

С 1945 года кафедрой Физики возглавил крупный специалист в области рентгенографии и физики твердого тела профессор Д.Б. Гогоберидзе. В 1946 году профессор Д.Б. Гогоберидзе стал первым деканом нового Инженерно-физического факультета.

Во второй половине 1940-ых годов на кафедре работал выдающийся советский физик-теоретик, член-корреспондент Академии наук СССР Я.И. Френкель. Впоследствии кафедрой Физики возглавляли: основоположник теплофизической школы ЛИТМО профессор Г.М. Кондратьев, профессор Н.А. Толстой, доцент С.В. Андреев, доцент А.Ф. Бегункова, профессор А.Я. Вяткин и профессор Н.А. Ярышев.

В течение 16 лет с 1957 по 1973 г. под руководством доктора физико-математических наук, профессора А.Я. Вяткина на кафедре было сформулировано научное направление по исследованию физики взаимодействия электронных пучков с веществом.

С 1973 года на кафедре под руководством профессора Н.А. Ярышева получили развитие научные исследования в области теплофизики, в частности, изучение нестационарной теплопроводности и теплотермии.

В 1987 году сотрудником кафедры стал С.А. Козлов (ныне декан факультета фотоники и оптоинформатики), Лауреат премии Ленинского комсомола по науке и технике, в 1998 году им была открыта лаборатория волновых процессов.

С конца XX века на кафедре проводится комплексная работа по совершенствованию всего учебного процесса, включая создание фронтальных компьютеризированных учебных лабораторий, банков контроля и проверки усвоения знаний, подготовку программно-методического обеспечения по дистанционному обучению студентов через компьютерные сети RUNNET и INTERNET. В этих учебно- и научно-методических направлениях деятельности кафедры принимали активное участие ведущие сотрудники кафедры доценты С.К. Стафеев (ныне профессор, декан естественнонаучного факультета), Ю.Л. Колесников (ныне профессор, проректор по учебно-организационной и административной деятельности), А.В. Смирнов, А.А. Королев, Г.Л. Башнина, ст.преподаватель С.А. Курашова.



С 2000 по 2015 годы кафедрой заведовал профессор, декан естественнонаучного факультета С.К. Стафеев. Под его руководством было сформировано научное направление, связанное с оптическими методами неразрушающего контроля, сотрудники кафедры А.А. Зинчик, Я.А. Музыченко подготовили и защитили кандидатские диссертации. С.К.Стафеев является организатором и научным руководителем первой в России интерактивной образовательной экспозиция "Музей оптики", созданной в рамках инновационной образовательной программы Национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Расположена экспозиция на стрелке Васильевского острова, на первом этаже бывшего дома купца Елисеева. Знакомит с широким кругом применений оптических и оптико-информационных технологий, стимулирует дальнейшее изучение оптики. Главная цель Музея оптики — не только произвести впечатление, но и помочь в обучении школьникам и студентам профильных вузов. Для этого действуют залы практикумов и демонстраций.

С.К. Стафеев является куратором выставки Magicoflight (Магия света) проходящей с России в рамках в рамках международного Года света, проводимого в 2015 г. в соответствии с решением Ген. Ассамблеи ООН.

#### Кафедра физики СПбГУНиПТ (1931-2011 гг.).

В составе Университета низкотемпературных и пищевых технологий кафедра физики существовала с момента его основания в 1931 г. и обеспечивала фундаментальную общенаучную подготовку инженеров по всем специальностям.

Кафедрой руководили известные в СССР и России ученые, авторы многочисленных научных работ, монографий, учебников и учебных пособий по физике: доцент А.Н. Святозаров (1931 – 1942 гг.), профессор Л.М. Розенфельд (1942-1949 гг.), доцент Е.А. Штрауф (1949-1959 гг.), доцент К.В. Струве (1960-1968 гг.), профессор Н.В. Солнцев (1969-1975 гг.), заслуженный деятель науки РФ профессор Е.С. Платунов (1975-2002 гг.), профессор С.Е. Буравой (2002-2010 гг.), профессор И.В. Баранов (2010-2011 гг.).

В 1976-1985 гг. по инициативе заведующего кафедрой Е.С. Платунова коллективом кафедры была осуществлена коренная реконструкция учебно-лабораторной базы. Была переосмыслена логика проведения лабораторных и практических занятий и их связь с лекционной теоретической частью курса. В основу реорганизации была положена идея системного объединения всех видов занятий в логически обоснованную схему фронтального обучения «лекция – практическое занятие – лабораторная работа». Было создано 5 оригинальных учебных лабораторий стендового типа, охватывающих основные разделы курса: 1) Лаборатория физической механики (авторы - профессор Е.С. Платунов, доценты В.В. Курепин, З.В. Сигалова, старший преподаватель Л.В. Соколова); 2) Лаборатория термодинамики и молекулярной физики (Е.С. Платунов, В.В. Курепин, З.В. Сигалова);

3) Лаборатория электромагнетизма (доценты Д.Ю. Иванов, Э.Л. Китанина, А.Ф. Костко, С.М. Бунин); 4) Лаборатория оптики и атомной физики (доценты Л.С. Крайнова, С.Е. Буравой, В.А. Самолетов, преподаватели В.А. Павлов, В.А. Рыков); 5) Лаборатория физики твердого тела (доцент В.И. Соловьев, профессор Н.В. Солнцев, доцент В.М. Козин).

Каждая лаборатория имеет в своем составе 15 стендов, рассчитанных на проведение от 10 до 20 различных лабораторных работ по всем основным темам соответствующего раздела курса. Многие лабораторные работы отличаются оригинальным содержанием и не имеют аналогов в других учебных заведениях. Стенды оснащены современными приборами (цифровыми вольтметрами, лазерами, монохроматорами и т. п.).

Преподавателями кафедры был выполнен большой объем методической работы: составлено и издано около 100 новых оригинальных методических указаний по выполнению лабораторных работ, В.В. Курепиным, И.В. Барановым и В.Е. Куцаковой разработано пособие по оценке погрешностей в лабораторных работах, выдержавшее более 5 изданий.

В 1995-2005 г.г. профессором Е.С. Платуновым подготовлено и дважды издано учебное пособие по курсу общей физики в четырех томах общим объемом около 80 печ. листов.

В 2002 – 2006 гг. для студентов, обучающихся по специальности «Техника и физика низких температур», и магистров всех специальностей создана не имеющая аналогов учебно-исследовательская лаборатория «Физика низких температур» (авторы проф. Е.С. Платунов, проф. И.В. Баранов, проф. В.В. Курепин, доценты В.М. Козин, С.С. Прошкин). Авторским коллективом (Е.С. Платунов, И.В. Баранов, Е.В. Тамбулатова, А.Е. Платунов) издано учебное пособие для этой лаборатории с аналогичным названием. Лаборатория оснащена 15 автоматизированными стендами каждый из которых позволяет выполнить 13 лабораторных работ по изучению физических свойств веществ в области температур от минус 196 °С до 100 °С.

В 2002 – 2004 гг. преподавателями кафедры С.С. Прошкиным, Н.В. Нименским, В.А. Самолетовым подготовлено и издано учебное пособие «Сборник задач» с методическими указаниями и примерами решения. Сборник содержит около 1700 задач в трех книгах по разделам «Молекулярная физика и термодинамика», «Электродинамика и электромагнитные волны», «Квантовая физика».

Сотрудниками кафедры (проф. Е.С. Платунов, проф. В.А. Самолетов, проф. С.Е. Буравой) подготовлен и дважды издан словарь-справочник «Физика», объемом 40 печ. листов. Доцентом С.С. Прошкиным подготовлено и издано в 2009 году учебное пособие «Физика. История и развитие» объемом около 40 печатных листов для студентов, обучающихся по специальности «Экономика и менеджмент», а также аспирантов и магистров всех специальностей.

На кафедре физики под руководством профессора Е.С. Платунова к началу 80-х годов прошлого столетия сложилась оригинальная самостоятельная научная школа теплофизиков-прибористов, получившая мировое признание и известность.

В 1977 г. при кафедре была открыта Отраслевая научная лаборатория динамических методов теплофизических измерений и приборов. Лаборатория стала базой для научного роста аспирантов и инженеров, формирования нового поколения преподавателей кафедры.

Совместно с ГСКБ теплофизического приборостроения (ГСКБ ТФП) за 15 лет функционирования лаборатории было создано более двадцати различных образцов приборов для изучения теплофизических свойств веществ, охватывающих в совокупности диапазон температур от 4,2 до 1200 К. Некоторые из них были приняты к промышленному производству и выпускались серийно на опытном производстве ГСКБ ТФП и на одном из заводов Казахстана вплоть до распада СССР в 1991 году. По своей методической сути эти разработки значительно превышали уровень таких известных фирм, как «Dynatech» (США), «Feuotron» (ФРГ), «Setaram» (Франция). Созданные приборы обладали большой производительностью, позволяя за один эксперимент изучать температурную зависимость измеряемых параметров (теплопроводность, теплоемкость, температуропроводность). В Советском Союзе основной объем информации о теплофизических свойствах твердых веществ в области от 200 до 700 К был получен на приборах, разработанных научной школой профессора Е.С. Платунова. Во многих научных и учебных лабораториях стран СНГ эти приборы успешно функционируют и в настоящее время.

По данной научной тематике к 1992 году было опубликовано свыше 150 статей, получено 40 авторских свидетельств на изобретения. Разработаны оригинальные методы исследования теплофизических свойств в области криогенных температур (от 4,2 до 300 К). Созданы средства измерения, не требовавшие специальных криостатирующих устройств, экспрессные по своей сути, что означало значительный прорыв в области техники низкотемпературного теплофизического эксперимента.

Сотрудниками кафедры проведены оригинальные исследования в области создания методов и средств неразрушающего контроля тепловых свойств материалов и изделий. Эти разработки стали основой кандидатских диссертаций Е.А. Белова и Г.Я. Соколова.

В 1976 г. на кафедре развивалась научное направление, связанное с поиском методов построения уравнений состояния и расчетом свойств индивидуальных веществ идеальных газов, имеющих широкое применение в холодильной и криогенной технике. По результатам этих исследований были защищены 4 кандидатских и 2 докторские диссертации, опубликовано более 70 научных статей в отечественных и зарубежных журналах.

С 1992 года ведется поиск новых методов определения тепловых и влажностных характеристик разнообразных групп дисперсных

влагосодержащих материалов в условиях их промерзания и размораживания. В настоящее время создан комплекс автоматизированных приборов, позволяющих изучать кинетику изменения энтальпии, дифференциальной теплоты плавления, теплопроводности и влагосодержания пищевых материалов животного и растительного происхождения в области температур от минус 30 °С до 40 °С, в условиях замораживания и размораживания продуктов, разработаны приборы, предназначенных для измерения интенсивности внутренних тепловых источников, непрерывно действующих в пищевых продуктах в условиях их производства и хранения.

При кафедре под руководством профессоров Е.С. Платунова и И.В. Баранова с 2008 г. функционирует научная лаборатория «Теплофизические измерения и приборы». В лаборатории создан комплекс методов автоматизированных приборов для изучения теплопроводности, теплоемкости, теплот структурных и фазовых переходов в различных веществах, в том числе в процессах замораживания, оттайки, исследуются свойства пищевых продуктов и конструкционных материалов холодильной и криогенной техники.

Коллективом преподавателей кафедры по этому направлению подготовлена к изданию фундаментальная монография «Теплофизические измерения», обобщающая исследования авторов за последние 30 лет.

С конца 60-х годов на кафедре проводятся экспериментальные и теоретические исследования фазовых переходов и критических явлений. Начало этим работам было положено исследованием гравитационного эффекта вблизи критической точки парообразования, проведённым доцентом Д.Ю. Ивановым. В 80-ые годы группой сотрудников кафедры были проведены работы по корреляционной спектроскопии многократно рассеянного света. По результатам этих исследований опубликована серия научных статей, сделано более 10 докладов на конференциях и защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 90-х годах совместно с одним из ведущих университетов Франции проводились исследования процессов нуклеации наночастиц в растворах. Совокупные результаты исследований критических явлений легли в основу докторской диссертации доцента Д.Ю. Ивановым (2001 г.) и его монографии «Критическое поведение неидеализированных систем».

Научные исследования в области фазовых переходов, предпереходных явлений и рассеяния света в сложных жидких системах успешно развивает доцент, кандидат физико-математических наук А.Ф. Костко. Во время многолетней стажировки в ведущих университетах США А.Ф. Костко совместно с американскими коллегами методами рассеяния света проводил исследования растворов полимеров, водных растворов электролитов, биогелей и лиотропных хромонических жидких кристаллов в широком диапазоне температур и давлений. Результаты этих исследований, проведённых А.Ф. Костко после 2000 года, опубликованы в 13 статьях в

ведущих международных научных журналах по физике и химии, а также доложены на 15 международных конференциях.

На сегодня кафедра Физики – одна из крупнейших в университете – представляет собой динамично развивающийся творческий коллектив, способный решать масштабные задачи развития и подготовки инженерных и научно-педагогических кадров. В связи с реорганизацией и объединением кафедр с 1 сентября 2015 года кафедра Физики находится под руководством доктора технических наук, профессора Игоря Владимировича Баранова.

С 2010 г. Игорь Владимирович является членом докторского диссертационного Совета Д 212.234.01. Им опубликовано 57 научных и 7 учебно-методических работ. За последние 3 года издано: 21 научная работа и 2 учебно-методических работы, в том числе в соавторстве Барановым И.В. в 2010 г. издано учебное пособие “Теплофизические измерения” с грифом УМО по политехническому образованию. Баранов И.В. выступал с докладами на 25 международных и всероссийских научных конференциях. Баранов И.В. является с 2008 г. академиком Международной академии холода. Исполняет обязанности заместителя главного редактора научно-технического журнала “Вестник МАХ”.

В настоящее время коллектив кафедры включает в себя 30 преподавателей и 10 учебно-вспомогательного персонала.

Под руководством профессора кафедры физики ИТМО Чирцова А.С. и доцента Демидова В.И. из Университета Западной Вирджинии работает Международная лаборатория «Нелокальная плазма в нанотехнологиях и медицине, которая ведет исследования по следующим направлениям:

- Исследование параметров нелокальной плазмы модифицированного короткого газового разряда постоянного тока с накаливаемым катодом
- Плазмохимическое моделирование разрядов в газах SF<sub>6</sub> и O<sub>2</sub>
- Изучение особенностей дрейфа микрочастиц в плазме, обусловленных спецификой функции распределения электронов по энергиям в нелокальной плазме
- Моделирование разряда с использованием аналитических методов

Силами профессора А.С.Чирцова и старшего преподавателя С.А.Курашовой создаются on-line курсы по физике, которые размещены в Lectorium на сайте Университета ИТМО. Являясь автором четырех мультимедийных электронных учебников по курсу физики, А.С.Чирцов вместе с его аспирантами ведет постоянную работу по раннему привлечению студентов к самостоятельной исследовательской работе в области моделирования и визуализации сложных физических систем и процессов.

Под руководством С.К.Стафеева на кафедре Физики в 2016 году открыта программа подготовки магистров по уникальному в России направлению Science-communications.

Чирцов Александр Сергеевич

**Краткий конспект лекций и контрольно-  
измерительные материалы по курсу  
«Введение в классическую  
и релятивистскую электродинамику»  
(Часть 2)**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49**