

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В. М. Мусалимов, И. И. Калапышина, К. А. Нуждин

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
(MATLAB)**

**РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» в
качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры**



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2017

Мусалимов В. М., Калапышина И. И., Нуждин К. А. Идентификация динамических систем фрикционного взаимодействия (MATLAB): учебное пособие для высших учебных заведений. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 143 с.

Рецензент: Фадин Ю. А., д.т.н., заведующий лабораторией «Трение и износ» ФГБУН ИПМаш РАН

В издании рассматриваются вопросы экспериментального исследования динамики фрикционного взаимодействия сопряженных элементов конструкций деталей машин и приборов. Раскрывается процедура идентификации полученных экспериментальных данных с использованием пакета прикладных программ MATLAB.

Данное пособие может быть полезно для студентов изучающих курс «Проектирование мехатронных устройств», а также для использования в магистерских программах «Системное моделирование в мехатронике», «Модульные технологии в биомехатронике и робототехнике».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2017

© Мусалимов В. М., Калапышина И. И., Нуждин К. А., 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
ГЛАВА 1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССА ТРИБОЛОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ.....	7
1.1. Внешняя и внутренняя динамика фрикционного взаимодействия	7
1.2. Обработка экспериментальных данных с помощью System Identification Toolbox.....	13
1.3. Оценка качества поверхности.....	24
1.3.1. Оценка качества поверхности по результатам быстрого преобразования Фурье.....	28
1.3.2. Результат непрерывного одномерного вейвлет преобразования	30
1.3.3. Результат дискретного одномерного вейвлет преобразования	32
1.3.4. Анализ с использованием вейвлета Добеши db4.....	34
ГЛАВА 2. АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТИ ТРИБОПАР.....	35
2.1. Динамические характеристики системы.....	35
2.1.1. Автокорреляционная и взаимная корреляционная функции.	35
2.1.2. Спектральные характеристики	37
2.1.3. Переходные характеристики	38
2.1.4. Частотные характеристики	38
2.2. Сопоставление эволюции динамических характеристик и эволюции качества трущихся поверхностей.....	40
ГЛАВА 3. СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ.....	61
3.1. Методы вычисления стохастических характеристик	61
3.1.1. Требования к исходным данным.....	61

3.1.2. Восстановление аттрактора по временному (пространственному) ряду.....	62
3.1.3. Выбор временной задержки (сдвига) τ	63
3.1.4. Алгоритм вычисления корреляционной размерности аттрактора.....	64
3.1.5. Алгоритм вычисления корреляционной энтропии аттрактора.....	65
3.1.6. Построение динамической модели по экспериментальным данным.....	65
3.2. Обработка экспериментальных данных с помощью программы Fractan.....	66
3.2.1. Стохастический анализ профилограммы 411.....	68
3.3. Пример последовательного вейвлет-фрактального анализа профилограммы.....	72
3.3.1. Многоуровневый вейвлет-анализ профилограммы.....	72
3.3.2. Фрактальный анализ (внутренняя динамика сигнала).....	76
3.3.3. Управляющий параметр аттрактора Лоренца.....	77
ГЛАВА 4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЭВОЛЮЦИИ ПАРАМЕТРОВ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ.....	82
4.1. Экспериментальное определение параметров фрикционного взаимодействия на примере сплава Л56.....	82
4.1.1. Параметры внешней динамики.....	83
4.1.2. Параметры внутренней динамики.....	86
4.2. Оценка параметров фрикционного взаимодействия для различных трибопар.....	89
ГЛАВА 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРЕНИЯ.....	93
5.1. Моделирование трения.....	93
5.1.1. Степенное сопротивление.....	93
5.1.2. Кулоново трение.....	94
5.1.3. Квадратичное сопротивление.....	94
5.1.4. Линейное и кубическое сопротивление.....	95
5.1.5. Линейное и кулоново трение.....	96
5.1.6. Моделирование сухого трения.....	98
5.2. Диссипативные функции.....	98

5.2.1. Сухое трение	99
5.2.2. Вязкое трение.....	101
5.2.3. Квадратичное сопротивление	102
5.3. Методы теории катастроф.....	103
5.3.1. Бифуркация Хопфа.....	103
5.3.2. Синтез нелинейной силы трения.....	106
5.4. Микроскопические модели трения	110
5.4.1. Деформационная составляющая трения (за счет пропахивания).....	110
5.4.2. Адгезионная составляющая трения	111
5.4.3. Бифуркационная составляющая трения скольжения.....	112
ГЛАВА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ MATLAB (SIMULINK/SIMMECHANICS)	117
6.1. Построение имитационной модели шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол, система плоская линза (библиотеки SimMechanics)	117
6.2. Построение имитационной модели шпиндельного блока для системы с радиусом кривизны инструмента $R>0$	126
6.3. Структурные модели, тексты управляющих программ MATLAB и опции настроек блоков в моделях SimMechanics (Simulink / MatLab).....	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	136

Введение

Проблема изучения трения и изнашивания является в настоящее время одной из наиболее важных при проектировании различных прецизионных кинематических узлов и эксплуатации машин. Экспериментальные исследования показывают, что трение представляет собой сложный комплекс механических, физических и химических явлений, причем те или иные явления преобладают в зависимости от условий, при которых происходит процесс трения. В данной работе рассматриваются явления, возникающие при сухом трении, в частности, проводится анализ бифуркационных составляющих трения скольжения.

Кроме этого, в учебном пособии излагаются новые подходы к оценке фрикционного взаимодействия трущихся поверхностей. Это, с одной стороны, модельные оценки трибологического процесса, когда узел трения рассматривается как объект автоматического регулирования. С другой стороны, это непараметрические оценки качества трущихся поверхностей. Каждая из этих сторон имеет приборное оснащение. Установка «Грибал-Т» позволяет в непрерывном режиме времени получать динамические характеристики узла трения и, таким образом, отслеживать их эволюцию. Установка «Калибр» позволяет получать одномерные профилограммы. Параллельное их использование позволяет устанавливать корреляцию «динамические характеристики – качество трущихся поверхностей». Таким образом, указанная пара приборов дает возможность поставить и решить задачу автоматизированного контроля качества поверхности.

В основу данного пособия положен цикл экспериментальных и теоретических работ авторов. Здесь проанализированы серии экспериментов по исследованию эволюции трибологического взаимодействия трибопар в режиме трения скольжения; осуществлен анализ взаимодействия на протяжении всего цикла экспериментальных работ с использованием компьютерных технологий, предоставляемых пакетом System Identification MATLAB; синтезирована нелинейная динамическая система, соответствующая исследуемому процессу.

Для исследования кинематики и динамики механизмов различного уровня сложности применялось моделирование с помощью библиотеки SimMechanics пакета Simulink, предназначенной для моделирования пространственных движений твердотельных машин и механизмов на стадии инженерного проектирования. Модели SimMechanics изображают физическую структуру механизмов, геометрические и кинематические отношения их компонентов [23].

ГЛАВА 1.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССА ТРИБОЛОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Проблема мониторинга качества трущихся поверхностей относится к разряду актуальных вследствие решения задач диагностики и задач оперативного устранения критических режимов динамики контактного взаимодействия поверхностей. В то же время, экспериментальный парк средств мониторинга не позволяет в режиме реального времени оценивать качество трущихся поверхностей. Поэтому актуальным является развитие новых экспериментальных и аналитических подходов к исследованию фрикционного взаимодействия трущихся поверхностей.

1.1. Внешняя и внутренняя динамика фрикционного взаимодействия

Внешняя динамика фрикционного взаимодействия. Экспериментальную базу составляет оригинальная установка «Трибал-2» [33], позволяющая использовать динамику привода в качестве входного сигнала системы, а в качестве выходного сигнала использовать динамику фрикционно-переданного действия контрпары. Таким образом, здесь реализуется взаимодействие, состоящее из двух стадий: сцепление-проскальзывание («stick-slip» процесс).

На рис. 1.1 представлена установка «Трибал-2». Механический блок включает в себя основание 1, на котором выполнены направляющие 2 для подвижных платформ с держателями образцов 3, катков 6, образцов и контробразцов 4. Образцы и контробразцы образуют пару трения. Держатели образцов выполнены съемными, что расширяет диапазон испытываемых элементов конструкций и материалов. Нижняя платформа приводится в возвратно-поступательное движение с помощью электропривода 11 через кривошипно-шатунный механизм 7. Верхняя платформа закреплена с помощью упругого подвеса 5, что позволяет ей совершать возвратно-поступательные движения при контакте образцов. Прижатие образцов производится за счет управления реверсивным электродвигателем 12, который через червячную передачу 9 воздействует на винтовой домкрат 8, который перемещает верхнюю направляющую.

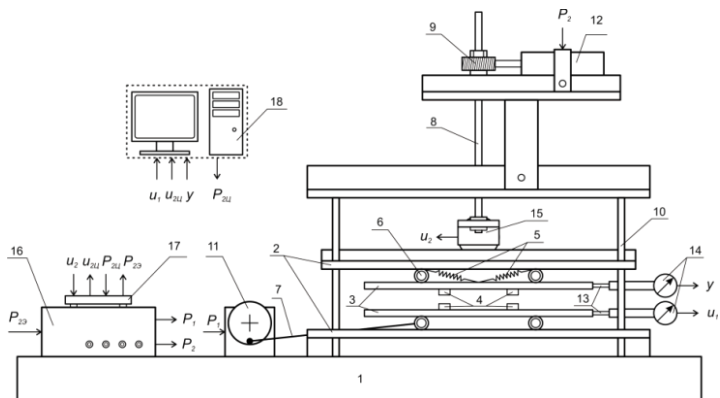


Рис. 1.1. Система «Трибал-2»

Измерительный блок, предназначенный для снятия механических характеристик, состоит из щупов 13, которые передают сигнал от платформ на датчики перемещения 14, закрепленные на стойке 10, а также динамометра 15. Последний представляет собой специальную упругую систему и механотрон. Динамометр установлен между домкратом и верхней направляющей, что позволяет непосредственно получать силу прижатия верхних образцов к нижним.

Информационно-управляющий блок позволяет управлять электроприводами установки, а также преобразовывать и обрабатывать информацию, поступающую от компонентов измерительного блока. Он состоит из блока управления установкой 16, модуля АЦП/ЦАП и цифрового ввода/вывода 17, а также компьютера 18 со специализированным программным обеспечением.

Устройством работает следующим образом: от двигателя 11 движение передается через кривошипно-ползунный механизм 7 к нижней платформе с держателями образцов 3, которая, в свою очередь, приводит в движение образцы 4. Вертикальная нагрузка на образцы создается винтовым домкратом 8, приводимым в движение реверсивным двигателем 12 посредством червячной передачи 9. Нагрузка передается через динамометр 15, показания которого вводятся в компьютер 18 через АЦП модуля ввода/вывода 17.

Управление реверсивным электродвигателем 12 осуществляется блоком управления 16. Сигнал управления P_2 поступает с блока управления непосредственно на реверсивный электродвигатель 12. В случае управления нагружением с компьютера, цифровой сигнал управления $P_{2Ц}$ поступает на модуль ввода/вывода 17 и преобразуется в электрический сигнал $P_{2Э}$. Далее он передается на блок управления 16, где формируется сигнал P_2 .

Так как верхняя платформа с держателями образцов, также как и нижняя, оборудована катками 6, она имеет возможность совершать возвратно-поступательное движение за счет сил трения между образцами. В результате движения платформ с держателями образцов 3 будут двигаться шупы 13 датчиков перемещения 14. Информация от них поступает на компьютер 18.

В установке (рис. 1.1) приводом реализовано возвратно-поступательное движение платформы, на которой закреплена одна контрпара, находящаяся в контакте с другой контрпарой. Последняя закреплена на смежной платформе, оснащенной датчиком перемещений. Нормальное нагружение трибопар осуществляется таким образом, чтобы платформа с приводом за счет трения передавала действие на смежную платформу.

В 2016 году была завершена работа по созданию усовершенствованного устройства для трибологических испытаний [34]. Прежде всего, датчики-индикаторы были заменены на высокоточные датчики линейных перемещений, разработан новый дизайн устройства, а также был усовершенствован блок управления приводом нагружения. На рис. 1.2 представлен внешний вид модернизированного экспериментального комплекса для изучения трибологических свойств материалов «Трибал-Т», на котором устанавливаются исследуемые образцы, находящиеся в режиме взаимного перемещения «slip-step».

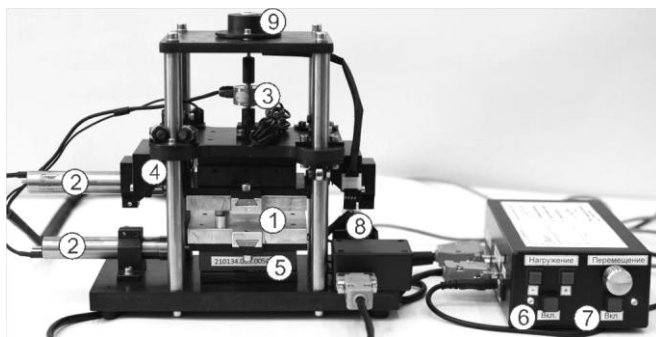


Рис. 1.2. Экспериментальный трибологический комплекс «Трибал-Т»: 1 – держатели образцов; 2 – датчики линейных перемещений; 3,4 – датчики нормальной и тангенциальной нагрузки соответственно; 5 – направляющие линейных перемещений; 6 – блок управления приводом нагружения; 7 – контроль привода возвратно-поступательного движения; 8 – привод циклического возвратно-поступательного движения; 9 – привод нагружения

Один из образцов трибопары (за счет действия внешнего привода) находится в циклическом возвратно-поступательном движении, второй

образец – (за счет сил трения) принудительно циклически перемещается. Прибор оснащен сенсорами перемещения и давления которые позволяют отслеживать абсолютные перемещения верхнего и нижнего образцов трибологической пары, а измеряемые сигналы являются входами и выходами этой системы [23, 46].

Параметрическая идентификация проводится с использованием динамической системы второго порядка. Идентифицируются коэффициенты демпфирования n и частоты собственных колебаний ω . Далее исследуется эволюция этих параметров.

Динамическая система задается в форме вход-состояние-выход:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1)$$

$$y = Cx \quad (1.2)$$

где A – матрица коэффициентов пространства состояний; B – вектор коэффициентов управления (вход u); C – вектор коэффициентов наблюдателя (выход y):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2n \end{pmatrix}; B = (0,1)^T; C = (1,0) \quad (1.3)$$

Внутренняя динамика фрикционного взаимодействия. Конечным продуктом анализа профилограмм является вектор, компонентами которого являются: R_a – мера шероховатости, h – параметр действия [24], H – показатель Херста [19]. При этом параметр действия и показатель Херста определяется на базе вейвлет-фрактального анализа [21] с последующим использованием аппарата динамических систем. По этой причине авторы говорят о «внутренней динамике» фрикционного взаимодействия.

В случае дискретного сигнала конечной длины N (временного ряда, в роли которого выступает профилограмма) вейвлет-преобразование вычисляется для дискретных значений параметров масштаба $a = 2^j$ и сдвига $d = k2^j$, где k, j – целые числа. Вейвлет- и масштабирующие функции имеют вид:

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right), \quad \Phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \quad (1.4)$$

Дискретное преобразование сигнала на j -ом уровне разложения представляет собой:

$$W_j = \sum_{k=0}^{k_{max}} a_{j,k} \Phi_{j,k}(t) + \sum_{k=0}^{k_{max}} d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (1.5)$$

Вейвлет-коэффициенты $a_{j,k}$ и $d_{j,k}$ задаются интегралами:

$$a_{j,k} = \int x(t) \Phi_{j,k}^*(t) dt, \quad d_{j,k} = \int x(t) \Psi_{j,k}^*(t) dt \quad (1.6)$$

На последнем уровне разложения m формируются наборы коэффициентов аппроксимации последнего уровня и детализирующих коэффициентов всех уровней. Для восстановления сигналов по известному набору коэффициентов используется каскадный алгоритм обратного вейвлет-преобразования. Анализируемый сигнал равен сумме сглаженного компонента последнего уровня A_m и деталей всех уровней разложения D_m, \dots, D_1 :

$$x(t_i) = A_m(t_i) + D_m(t_i) + \dots + D_1(t_i) = \sum_{k=0}^{k_{max}} a_{m,k} \Phi_{m,k}(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k_{max}} d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (1.7)$$

Для каждого из частотных уровней строятся энергетические спектры и вычисляются параметры действия.

Спектральная плотность энергии равна квадрату фурье-преобразования сигнала:

$$E(f) = |X(f)|^2 = \left| \int x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (1.8)$$

где $X(f)$ – спектр сигнала.

Кумулята в пределах полосы частот (f_1, f_2) определяется как $\varepsilon = \int_{f_1}^{f_2} E(f) df$. Размерность кумуляты: Дж·с.

В качестве характеристик спектральной плотности энергии используются номинальный и интервальный параметры действия [24]:

$$h_1 = \frac{\varepsilon^*}{(f_2 - f_1) f_{max}}, \quad h_2 = \frac{E_{max}}{f_{max}} \quad (1.9)$$

где E_{max} – максимальное значение спектральной плотности энергии, f_{max} – максимальная частота, соответствующая E_{max} , ε^* – предельное значение спектральной плотности энергии. Наиболее целесообразно использование параметра h_1 .

Нормированный размах сигнала определяется следующим образом. Пусть $x(t)$ – некоторая случайная величина, рассматриваемая в некоторые дискретные промежутки времени t_i в течение периода наблюдений τ ,

$$\langle x(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} x(t_i) \quad (1.10)$$

– ее среднее значение, а

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} [x(t_i) - \langle x(\tau) \rangle]^2} \quad (1.11)$$

– стандартное отклонение x .

Тогда

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t [x(u) - \langle x(\tau) \rangle] \quad (1.12)$$

Приведенное выражение является накопившимся отклонением значений случайной величины $x(t)$ от ее среднего значения $\langle x \rangle$ за время t . Разность между минимальным и максимальным значениями $X(t, \tau)$ называется размахом $R(\tau)$

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau), \quad (1.13)$$

где $1 < t < \tau$. Рассматриваемый размах $R(\tau)$ явно зависит от периода τ и растет вместе с ним. Безразмерное отношение R/S позволяет сравнивать размах для разных явлений. Нормированный размах R/S хорошо описывается эмпирическим соотношением [19]:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (1.14)$$

Данное соотношение получило название закона Херста, а показатель H – коэффициент Херста.

Показатель Херста H описывает вероятность того, что два соседних отчета могут быть одинаковыми. Имеет место формула $H = 2 - D_F$, где D_F – фрактальная размерность, которая определяется как предел [22]:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.15)$$

который сопоставляется с динамическими характеристиками с целью установления между ними корреляции. Далее будут приведены результаты стохастического моделирования, позволившего сделать статистические оценки параметров.

1.2. Обработка экспериментальных данных с помощью System Identification Toolbox

При обработке и анализе экспериментальных данных удобно использовать графический интерфейс пакета System Identification, который запускается из режима командной строки командой `Ident` [11]. В результате ее исполнения появляется диалоговое окно, представленное на рис. 1.3.

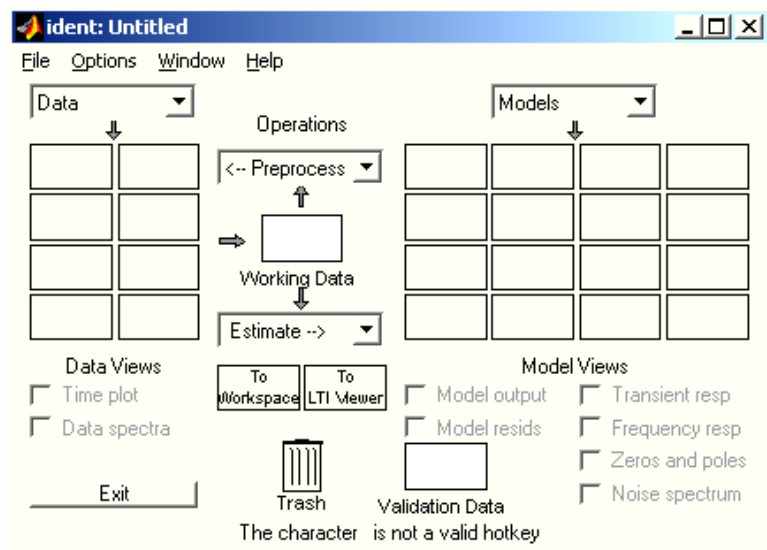


Рис. 1.3. Диалоговое окно графического интерфейса System Identification Toolbox

В режиме командной строки данные из Excel импортируются в MATLAB.

Они загружаются в рабочую среду MATLAB массивом данных u_2 (входные данные) и y_2 (выходные данные), относящихся к исследованию трибологической пары, при этом u_2 – смещение нижнего образца, а y_2 – смещение (сила трения) верхнего образца.

Загрузка в пакет идентификации осуществляется следующим образом. В верхнем левом углу окна в раскрывающемся списке выбирается Data (Данные) вариант Import. Это приводит к открытию диалогового окна, показанного на рис. 1.4.

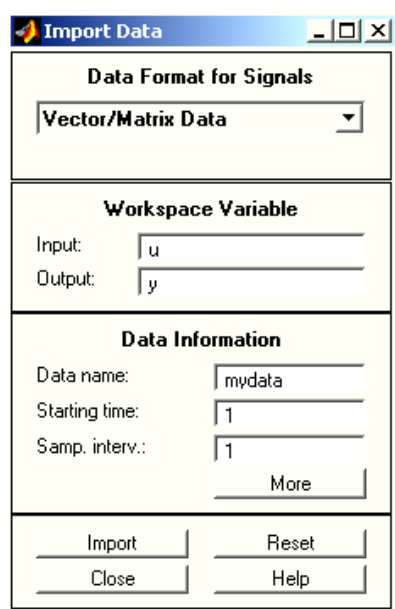


Рис. 1.4 Диалоговое окно импорта данных

Введем в нем имя u_2 в поле Input (Вход), y_2 – в поле Output (Выход), в поле Samp. interv. (Интервал дискретизации) зададим интервал дискретизации равный 0,08, в строке Data name (Имя данных) укажем произвольное название, например «Tribal», а в поле Notes (Примечания) – какой-либо поясняющий текст. Затем нажмем кнопку Import. Далее нажмем кнопки Close (Закреть) закроем окно импорта данных.

Указанные действия приведут к появлению в верхнем левом углу окна интерфейса значка в виде цветной линии, сопровождаемого надписью «Tribal». Это означает, что импортируемые данные введены в среду интерфейса. Сообщения об этих данных также появляются в значках

Working Data (Рабочие данные) и Validation Data (Данные для проверки модели).

Проведем исследование исходных данных, для чего установим флажок Time plot (Временной график) в левой нижней части окна интерфейса. Почти сразу появится графическое окно, содержащее графики сигналов $u_2(t)$ и $y_2(t)$ (рис. 1.5).

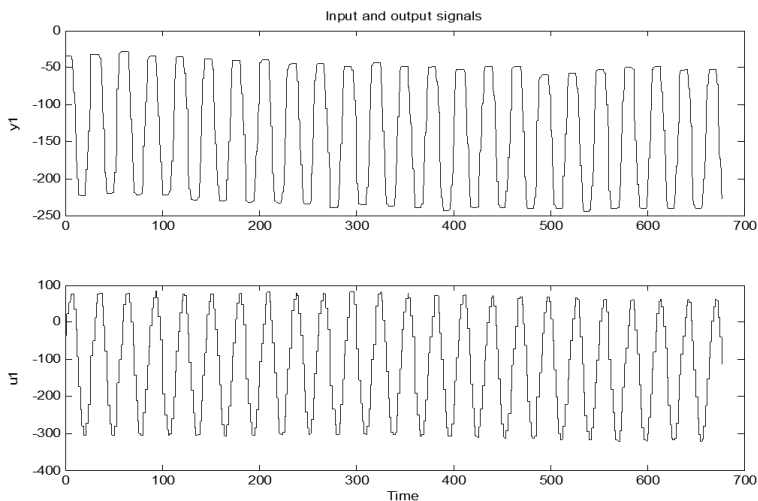


Рис. 1.5. Временные диаграммы сигналов $u_2(t)$ и $y_2(t)$

В m-файле данного примера входной и выходной сигналы обозначены через u_2 и y_2 . Однако при их отображении в окне графического интерфейса нумерация сигналов автоматически устанавливается с 1, поэтому в строке заголовка окна рисунка фигурируют обозначения u_1 и y_1 вместо u_2 и y_2 .

Можно увеличить интересующие нас места графиков, чтобы лучше их рассмотреть, для этого необходимо мышью выделить некоторую прямоугольную область. Выделенный участок сигнала сразу же увеличится в размерах так, что будет занимать все соответствующее окно. Для возвращения к исходному масштабу необходимо дважды щелкнуть мышью на увеличенном графике. А вообще, изменение масштабов графика производится однократным щелчком мыши в области графика: левой кнопкой – для увеличения изображения, правой – для его уменьшения (такое изменение масштабов возможно, только если в меню Style (Стиль) окна Time plot выбран вариант Zoom).

Проведем предварительную обработку сигналов исследуемого объекта, исключив из них постоянную составляющую. С этой целью

активируем раскрывающийся список Preprocess (Предварительная обработка) и выберем в нем вариант Remove means (Удалить среднее). Результатом операции явится появление в одном из значков Data Views (Вид данных) в левой верхней части окна интерфейса информации о новых данных с именем Tribald. Можно опять активизировать окно Time plot и увидеть, что там появилось изображение двух новых сигналов, отличающихся от исходных отсутствием постоянной составляющей. Для их более удобного просмотра целесообразно воспользоваться командой меню окна Options > Autorange (Автоматическое масштабирование). Чтобы просмотру не мешали исходные графики, можно убрать их, просто щелкнув мышью на значке с их представлением (в левой верхней части окна интерфейса), при этом сразу изменится и масштаб изображения.

Приступим теперь к построению модели, принимая в качестве данных для ее построения данные Tribald. Перетянем их мышью в область Working Data (в центре окна интерфейса). Если теперь мы хотим получить какую-то информацию об этих данных или изменить что-либо (например, их имя), щелкнем мышью дважды на соответствующем значке в группе Data Views. Появится диалоговое окно, показанное на рис. 1.6. Изменим имя данных, например, на Tribald M и закроем данное окно.

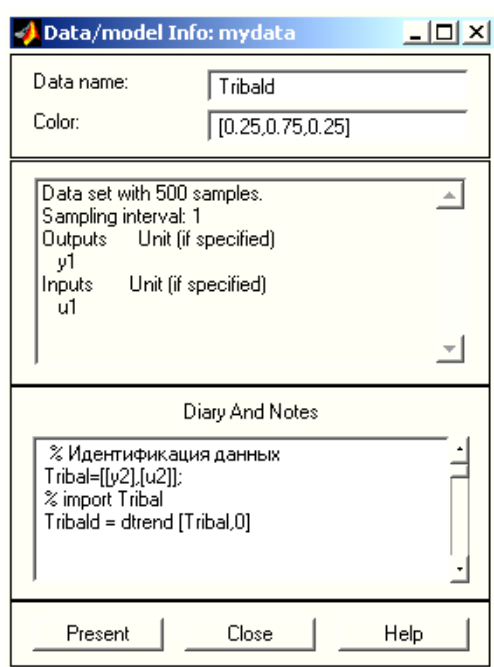


Рис. 1.6. Окно информации о выбранных данных

Активируем теперь вариант Select Range (Выбор диапазона) из списка Preprocess. Это приведет к появлению окна, показанного на рис. 1.7.

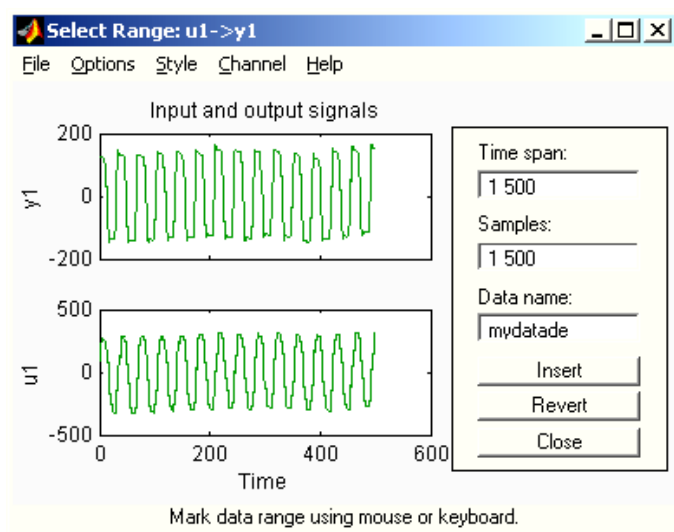


Рис. 1.7. Окно выбора диапазона

Диапазон можно задать либо в текстовом окне Time span (Временной диапазон), либо с помощью мыши – выделяя прямоугольную область точно так же, как это проводилось для окна Time plot. Любым из этих способов укажем диапазон и нажмем кнопку Insert (Вставить). Результат проделанной операции отразится появлением значка, символизирующего эти (усеченные) данные (с именем TribalMe) в окне интерфейса.

Повторим операцию задания диапазона с целью формирования данных для проверки модели – например, из оставшейся части начального диапазона, в результате чего появится еще один значок данных с именем TribalMy. Закроем окно выбора диапазона. С помощью мыши перетащим данные TribalMe в область Working Data, а данные TribalMy – в область Validation Data (заметим, что если на каком-то этапе работы с данными допущена ошибка и мы хотим удалить неправильные данные, необходимо просто перетащить их мышью на значок Trash (Мусор) в центральной нижней части окна интерфейса, и они исчезнут).

Теперь можно приступить к поиску оценки модели выбранного вида. Для этого вначале необходимо указать этот вид. Начнем с оценивания переходной функции объекта. В раскрывающемся списке Estimate (Оценивание) выберем вариант Correlation Model (Корреляционная

модель), что приведет к появлению соответствующего диалогового окна. В основном окне интерфейса в его правой части выберем Model Views (Вид моделей), при этом появится значок с надписью *grad*, означающий, что выбранная модель построена. Чтобы увидеть результат, установим флажок Transient resp (transient response – переходная функция) и увидим в появившемся окне (рис. 1.8) график переходной функции исследуемого объекта, найденной описанным выше корреляционным методом.

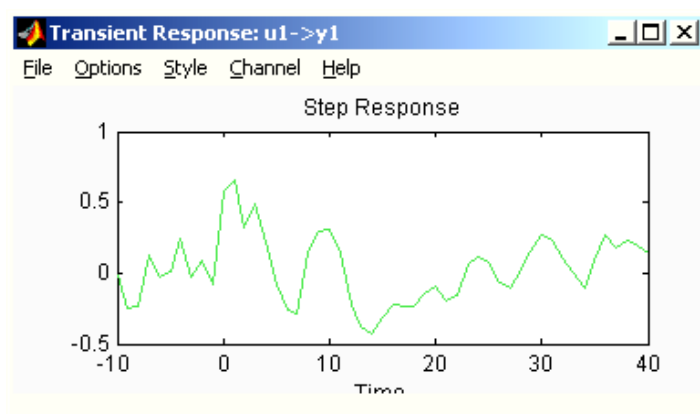


Рис. 1.8. Оценка переходной функции исследуемого объекта, найденная корреляционным методом

Можно провести детальное изучение данного графика, пользуясь доступными командами меню графического окна или с помощью мыши – так же, как это было проделано ранее при изучении входного и выходного сигналов. Но оценить качество полученной модели можно только в процессе ее сравнения с моделями других видов.

Укажем, что, используя команду Options > Impulse response меню данного окна, вместо графика переходной функции можно вывести график ИХ. Оценим модель следующего вида – «частотные характеристики объекта». Выберем в списке Estimate вариант Spectral model и повторим только что проделанные операции по нахождению оценки модели. В результате в основном окне интерфейса появится еще один значок с именем *grad*, символически представляющий модель в виде частотных характеристик найденных спектральным методом. Результат отображается активизацией графического окна Frequency resp (frequency response-частотные характеристики), показанного на рис. 1.9.

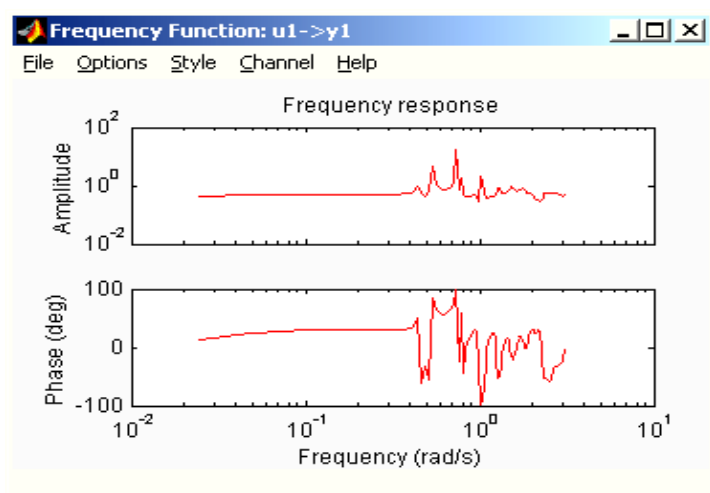


Рис. 1.9. Частотные характеристики, найденные спектральным методом

Перейдем теперь к оцениванию параметрических моделей, выбрав в Estimate вариант Parametric models. Данный выбор приведет к появлению диалогового окна задания структуры модели (рис. 1.10). По умолчанию пользователю предлагается модель типа ARX с параметрами $n_a = 4$, $n_b = 4$, $n_k = 1$. Можно согласиться или не согласиться с данными значениями. В последнем случае параметры можно изменить непосредственно в строке окна или с помощью редактора порядка модели (Order editor), вызываемого нажатием соответствующей кнопки. Можно выбрать другую параметрическую модель, воспользовавшись раскрывающимся списком в верхней части окна (возможный выбор – модели типа ARX, ARM AX OE BJ, State Space и модель, задаваемая пользователем).

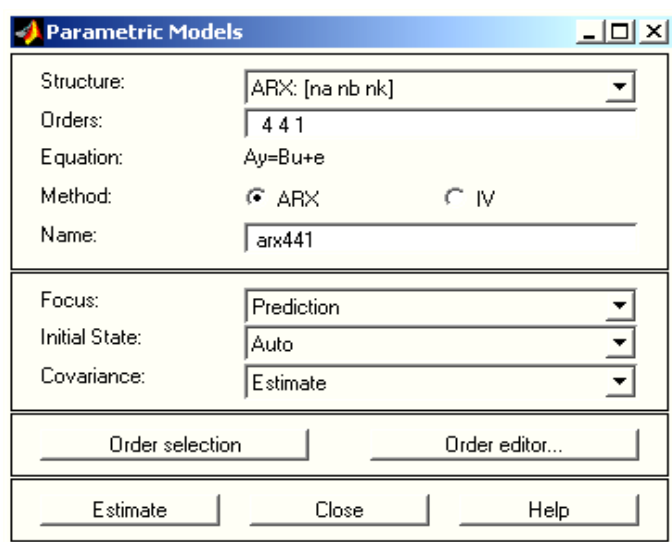


Рис. 1.10. Диалоговое окно задания структуры модели

В рассматриваемом примере сохраним значения по умолчанию (ARX, 4, 4, 1) и нажмем кнопку Estimate (Оценить). Результатом действия будет появление значка модели с названием ARX441.

Воспользовавшись далее возможностями редактора порядка модели (Order editor), зададим теперь ARX-модель с параметрами $n_a = 2$, $n_b = 2$, $n_k = 3$ (последнее означает наличие в объекте запаздывания с величиной $n_k \cdot T = 3 \cdot 0.08 = 0.24$ с) и повторим операцию оценивания. Это приведет к появлению значка еще одной модели с именем ARXqs (рис. 1.11).

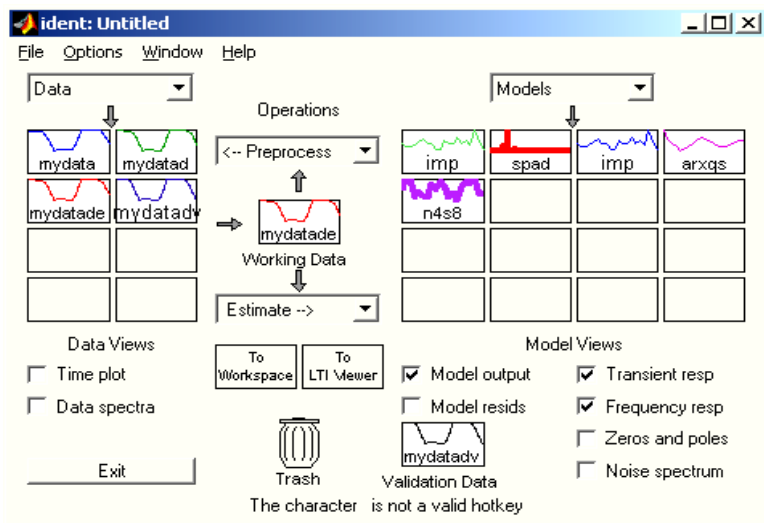


Рис. 1.11. Окно графического интерфейса с результатами построения моделей

Для сравнения полученных моделей активизируем окно Transient resp. (рис. 1.12)

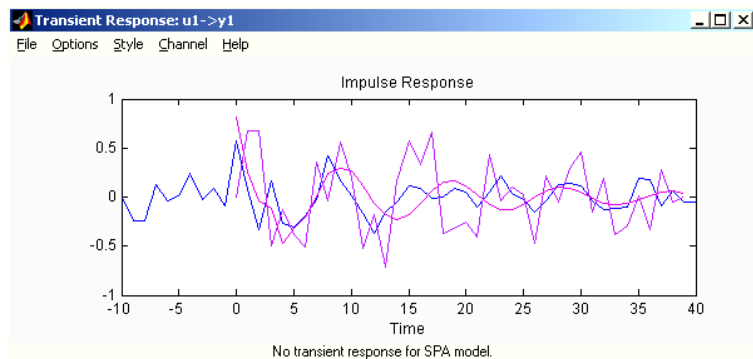


Рис. 1.12. Графики сравнения переходного процесса для трех построенных моделей

Однократный щелчок левой кнопкой мыши на графике модели в ее значке приведет к исчезновению соответствующего графика переходного процесса, повторный щелчок – восстанавливает изображение. Двойной

щелчок на значке приводит к открытию окна с информацией о модели (рис. 1.13).

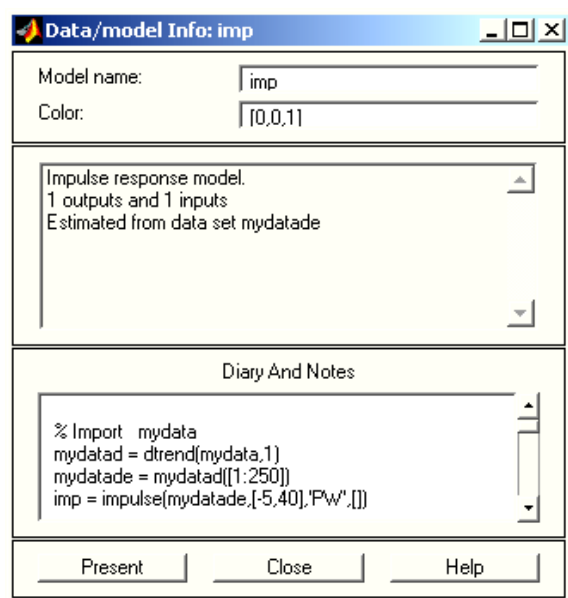


Рис. 1.13. Пример окна с информацией о модели

Вернемся к окну Transient resp. Оставляя в нем только по одному графику (то есть, убирая остальные, как это описано выше), активизируем команду меню Options > Show 99% confidence intervals (Показать 99%-й доверительный интервал). Просмотрим последовательно переходные процессы с доверительными интервалами для построенных моделей – crad, n4s8 и ARXqs. Сравнение покажет, что первая модель является наименее точной, а вторая и третья дают примерно одинаковые результаты.

Какую же модель выбрать в качестве итоговой? При прочих равных условиях, очевидно, более простую (по числу оцениваемых коэффициентов), а таковой здесь является модель ARXqs. Есть и еще один способ сравнения параметрических моделей – путем активизации графического окна Model output (соответствующий флажок расположен в средней нижней части окна интерфейса). Вид окна Model output для выбранных моделей n4s8 и ARXqs приведен на рис. 1.14.

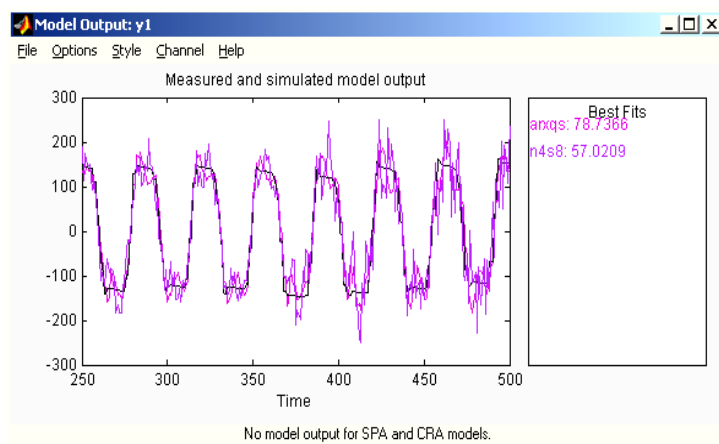


Рис. 1.14. Окно сравнения выходов моделей

В левой части данного окна приведены выходы объекта и указанных моделей, а в правой – величины, отражающие меру совпадения (среднеквадратичное рассогласование) экспериментальных и прогнозируемых данных. Как можно заметить, несколько точнее оказывается модель ARXqs.

Вообще-то для анализа моделей графический интерфейс пакета System Identification представляет весьма широкие возможности, среди которых отметим только возможность просмотра переходной функции модели с помощью программы LTI Viewer.

Хранение построенных моделей производится в два этапа:

- сначала модель вводится в рабочее пространство системы MATLAB (перемещением значка модели в область To Workspace в центре рабочего окна интерфейса), при этом модель будет фигурировать в рабочем пространстве MATLAB под тем же именем, что и в среде интерфейса;
- затем модель сохраняется командой сохранения в режиме командной строки (как любая переменная MATLAB).

Далее можно сохранить все рабочее пространство интерфейса (при его закрытии даже появится соответствующая подсказка) в виде файла с расширением (по умолчанию) «.sid», при этом в следующем сеансе работы можно загрузить все полученные результаты. Сохраненное рабочее пространство называется сессией.

1.3. Оценка качества поверхности

Необходимой частью работы является исследование процесса изменения шероховатости поверхности, а следовательно и качества поверхности подготовленных образцов.

Шероховатостью поверхности называется совокупность неровностей поверхности с относительно малыми шагами, выделенная на определенной (базовой) длине [7, 20]. Она имеет свои характеристики: геометрическую величину неровностей, способность сцепления поверхности с покрытием, отражающую способность и т.д.

Рассмотрим главную характеристику шероховатости – ее геометрическую величину.

Государственный стандарт шероховатости поверхностей устанавливает единый подход к определению величины шероховатости – основой для этого является профиль шероховатости и его параметры (рис. 1.15).

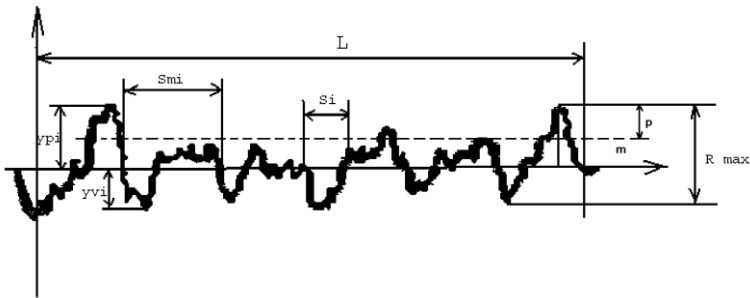


Рис. 1.15. Профилограмма шероховатости поверхности

Линия L , на которой выделяется совокупность поверхностных неровностей, называется базовой линией. Средняя линия профиля m – это базовая линия, проведенная таким образом, чтобы площади, ограниченные профилем и средней линией над ней и под ней, были одинаковы. Чем неоднороднее поверхностные неровности и чем они больше, тем больше должна быть базовая длина для того, чтобы выбранная совокупность поверхностных неровностей характеризовала состояние поверхности.

Профилограммы, характеризующие шероховатость поверхности, представляют собой сложную периодическую структуру, из которой можно выделить большое количество всевозможных характеристик для оценки неровностей. Не случайно, что в разных странах мира существуют более 40 геометрических параметров для оценки шероховатости.

Для нормируемых параметров принимаются некоторые усредненные значения неровностей. В большинстве стран мира используют

шесть параметров характеризующих как высоту поверхностных неровностей, так и линейные (шаговые) показатели этих неровностей.

Вертикальные параметры:

- R_a – среднее арифметическое отклонение профиля;
- R_z – высота неровностей профиля по десяти точкам;
- R_{max} – наибольшая высота профиля.

Горизонтальные параметры:

- S_m – средний шаг неровностей профиля;
- S – средний шаг местных выступов профиля;
- T_p – относительная опорная длина профиля.

R_a – это среднее арифметическое абсолютных значений отклонений профиля в пределах базовой длины:

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i| \quad (1.16)$$

где n – число выбранных точек профиля на базовой длине.

R_z – это сумма средних абсолютных значений высот пяти наибольших выступов профиля и глубин пяти наибольших впадин профиля в пределах базовой длины:

$$R_z = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 |y_{pi}| + \sum_{i=1}^5 |y_{vi}| \right) \quad (1.17)$$

где y_{pi} – высота i -го наибольшего профиля выступа, y_{vi} – глубина i -й наибольшей впадины профиля.

R_{max} – это сумма наибольшей высоты выступа и наибольшей глубины впадины.

S_m – это среднее значение отрезков средней линии профиля, содержащего неровности в пределах базовой длины:

$$S_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |S_{mi}| \quad (1.18)$$

Под этим параметром понимается среднее значение длин отрезков средней линии, пересекающих профиль в трех соседних точках и ограниченных двумя крайними точками.

S – это среднее значение отрезков средней линии между проекциями на нее наивысших точек соседних местных выступов профиля в пределах базовой длины:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |S_i| \quad (1.19)$$

t_p – это отношение сумм длин отрезков, отсекаемых на заданном уровне p в материале профиля линией, эквидистантой средней линии в пределах базовой длины, к базовой длине:

$$t_p = \frac{100\%}{e} \sum_{i=1}^n b_i \quad (1.20)$$

Далее приведены данные испытаний для подготовленных образцов пластин (сплав CuAl10Ni; E=700; $\rho=7,6 \text{ г/см}^3$; HB=200 (по Бриннелю)) со сформированной шероховатостью поверхности. Исходные профилограммы шероховатостей приведены на рис 1.16 – 1.18, причем верхняя часть рисунка – это профилограмма верхней контрпары, а нижняя часть – это профилограмма нижней контрпары. Из подрисуночных подписей понятно, в какое время и какая пара представлены. При этом обозначение «0» соответствует начальным замерам.

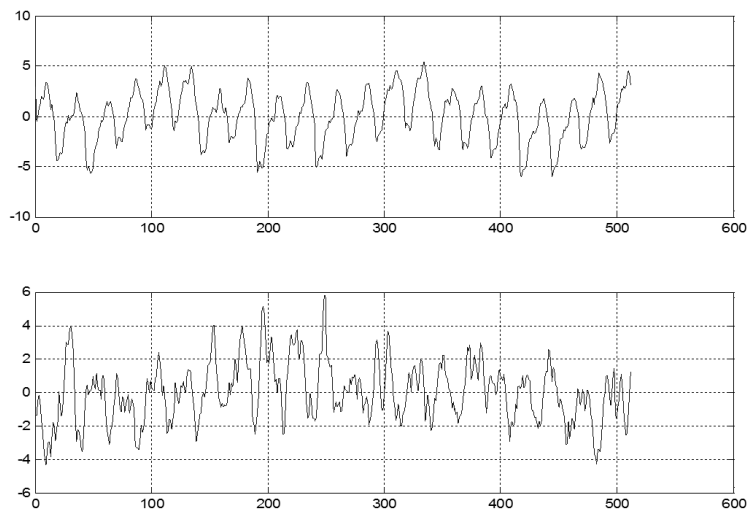


Рис. 1.16. Профилограммы шероховатости (0 мин.)

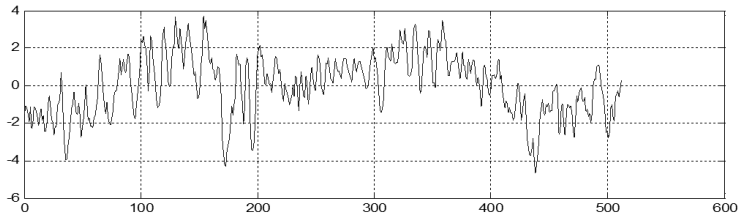
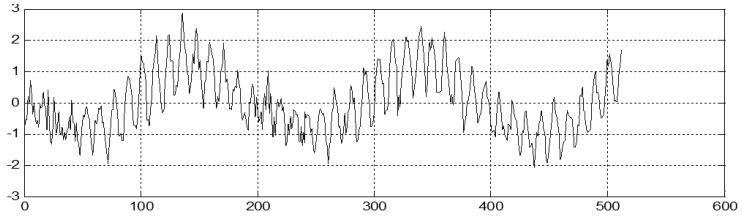


Рис. 1.17. Профилограммы шероховатости (45 мин)

На рис 1.17 приведены профилограммы шероховатости после 45 минут эксперимента.

На рис 1.18 приведены профилограммы шероховатости образцов после 90 минут эксперимента.

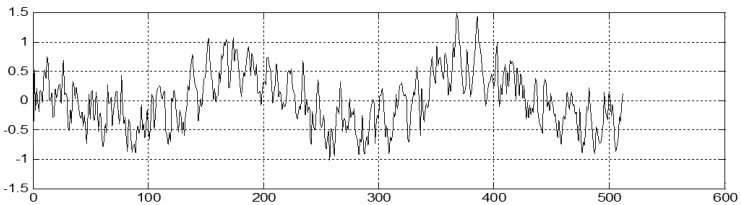
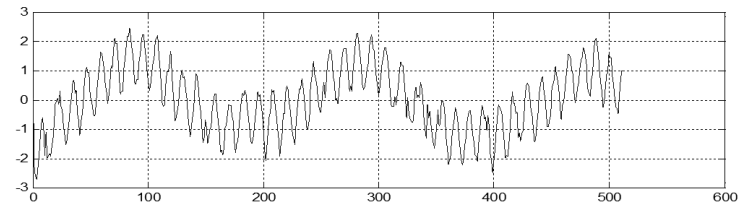


Рис. 1.18. Профилограммы шероховатости (90 мин)

Рассмотрим полученные профилограммы. Нетрудно заметить появление низкочастотной составляющей на финишных профилограммах. Неровности стали более гладкими, а пики скачков в два раза уменьшились.

1.3.1. Оценка качества поверхности по результатам быстрого преобразования Фурье

На рис. 1.19 – 1.21 представлены результаты быстрых Фурье преобразований профилограмм (0 – 45 – 90).

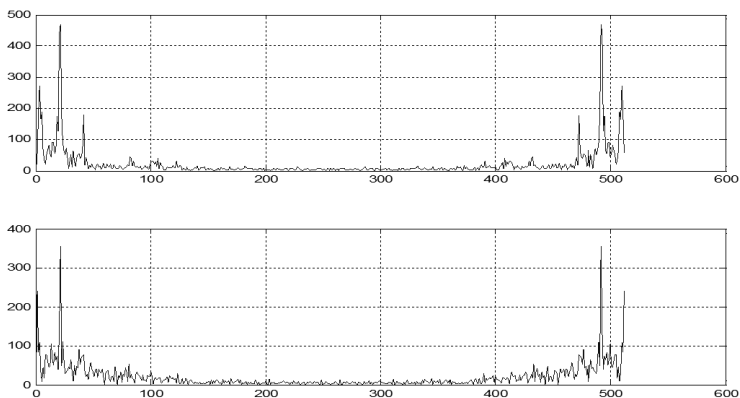


Рис. 1.19. Результат быстрого Фурье преобразования профилограмм (0 мин)

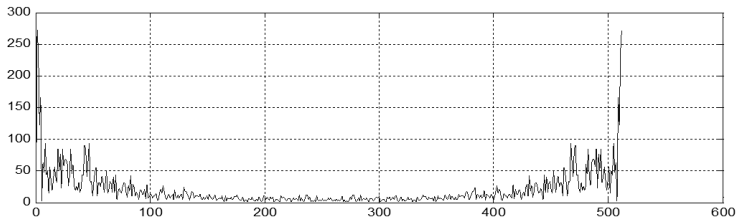
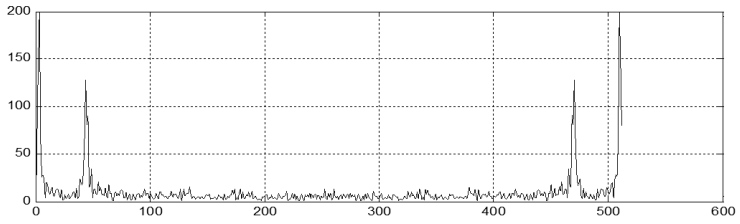


Рис. 1.20. Результат быстрого Фурье преобразования профилограмм (45 мин)

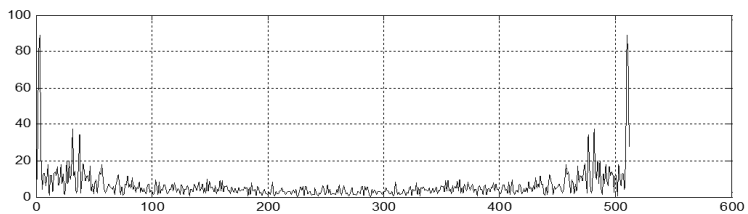
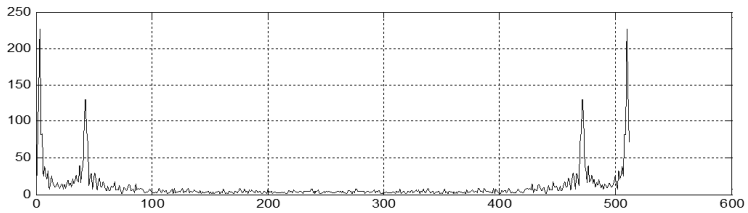


Рис. 1.21. Результат быстрого Фурье преобразования профилограмм (90 мин)

Видно, что с увеличением времени испытаний высокочастотные составляющие профиля поверхности нивелируются, а низкочастотные – начинают доминировать – появляется «несущая» частота.

1.3.2. Результат непрерывного одномерного вейвлет преобразования

Непрерывное одномерное вейвлет преобразование (НВП) лежит в основе применения вейвлетов в технике обработки сигналов [10, 29]. Уже само по себе (без реконструкции) оно используется для анализа сигналов и выявления их локальных особенностей.

На рис. 1.22 – 1.24 изображены вейвлетограммы профилограмм.

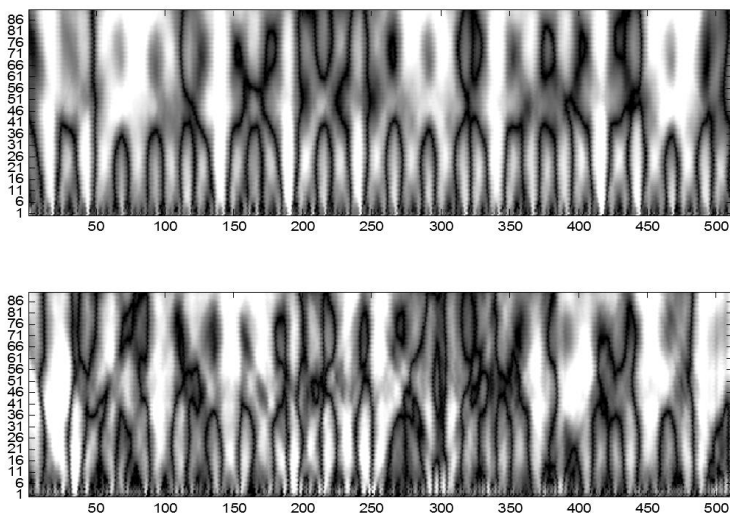


Рис. 1.22. Вейвлетограмма профилограмм (0 мин)

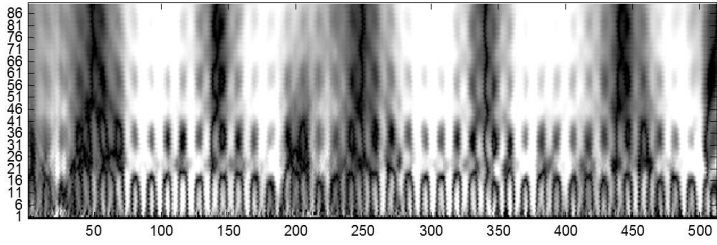


Рис. 1.23. Вейвлетограмма профилограмм (45 мин)

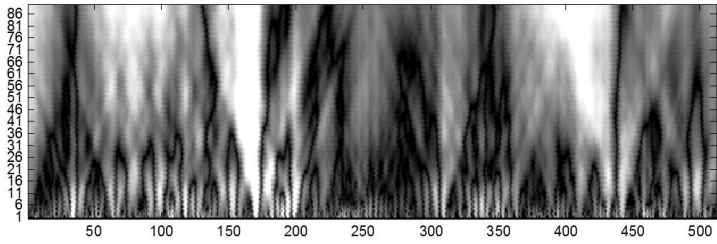


Рис. 1.24. Вейвлетограмма профилограмм (90 мин)

В нижней части спектрограмм отчетливо видны частые изменения яркости, указывающие на наличие периодических высокочастотных компонентов. В верхней части – заметны менее частые изменения яркости, соответствующие низкочастотным компонентам.

1.3.3. Результат дискретного одномерного вейвлет преобразования

Главным достоинством дискретного одномерного вейвлет-преобразования является наличие эффективных алгоритмов быстрого вейвлет-преобразования, которое отчасти напоминает быстрое преобразование Фурье. В частности, для быстрого вейвлет-преобразования (БВП) может эффективно использоваться пирамидальный алгоритм с прореживанием по частоте, используемый и в быстром преобразовании Фурье. Благодаря этому появляется возможность анализа больших выборок за вполне приемлемое для практических целей время. Правда, эти возможности реализуются не для всех типов вейвлетов.

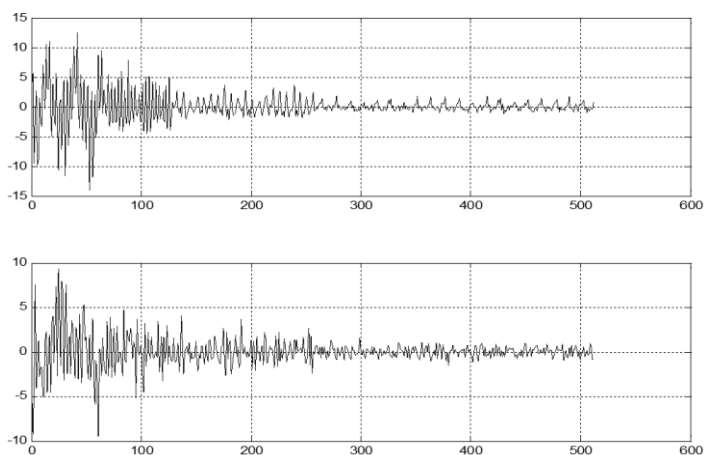


Рис. 1.25. График первого коэффициента вейвлета Добеши db1 для профилограммы верхнего образца (вверху) и для нижнего образца (внизу) (0 мин)

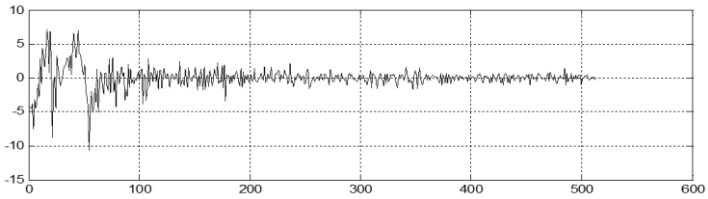
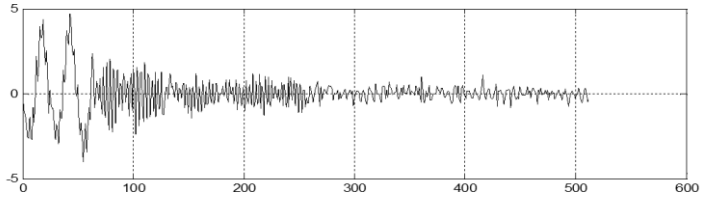


Рис. 1.26. График первого коэффициента вейвлета Добеши db1 для профилограммы верхнего образца (вверху) и для нижнего образца (внизу) (45 мин)

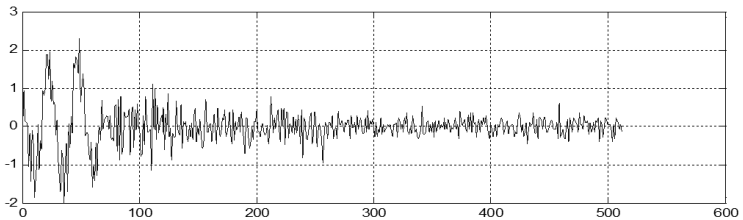
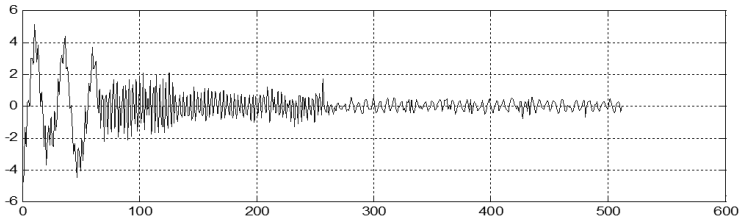


Рис. 1.27. График первого коэффициента вейвлета Добеши db1 для профилограммы верхнего образца (вверху) и для нижнего образца (внизу) (90 мин)

1.3.4. Анализ с использованием вейвлета Добеши db4

Загрузим профилограмму 311. Профилограф настроен на 512 отсчетов-точек. Примем, что частота дискретизации равна 512 отсчетов в секунду. Вейвлет Добеши имеет центральную частоту $F_r = 0.7143$ Гц, и центральная частота вейвлета, используемого для 1-го уровня разложения, равна:

$$F_{r1} = 0.7143 \cdot 512 = 365.72 \text{ Гц}$$

Для 2-го уровня разрешения частота вейвлета будет в два раза меньше

$$F_{r2} = 187.86 \text{ Гц}$$

Выберем значение масштаба a в пределах от 1 до 512 с шагом 4. Это значит, что будут отображены частоты от 365.720 Гц до 0.712 Гц. Из рис. 1.28 видно, что спектр частот сигнала хорошо локализован.

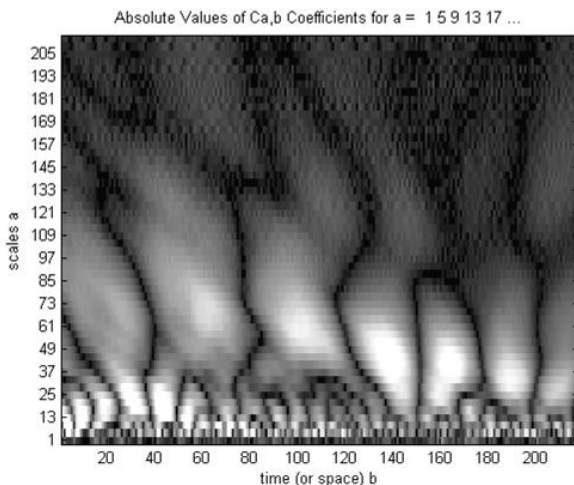


Рис. 1.28. Вейвлетограмма сигнала 311

Для большей наглядности на рис. 1.29 приведен пространственный график матрицы детализирующих коэффициентов. Из рисунков видно, что структура сигнала на самых больших частотах ($a = 1$ – горизонталь на рис.1.28 и «частокол» на пространственном графике) фрактальна и для её анализа необходимо использовать методы стохастического анализа.

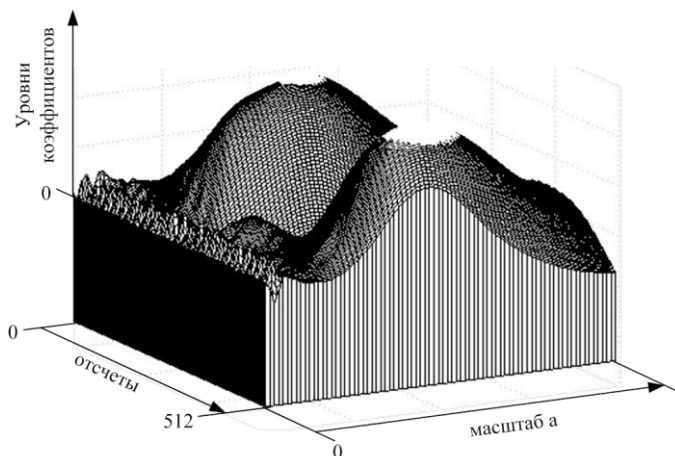


Рис. 1.29. График вейвлет-коэффициентов сигнала 311

ГЛАВА 2.

АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТИ ТРИБОПАР

2.1. Динамические характеристики системы

Установление корреляции «эволюция динамической системы – эволюция качества трущихся поверхностей» является базой автоматизации контроля качества трущихся поверхностей процесса.

2.1.1. Автокорреляционная и взаимная корреляционная функции.

По записям входного $u(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов, полученных при испытаниях образцов, можно оценить автокорреляционную и взаимно корреляционную функции согласно теории случайных процессов.

Автокорреляционная функция случайного процесса характеризует общую зависимость значений процесса в некоторый данный момент времени от значений в другой момент. Пусть мы имеем реализацию $y(t)$, приведенную на рис. 2.1.

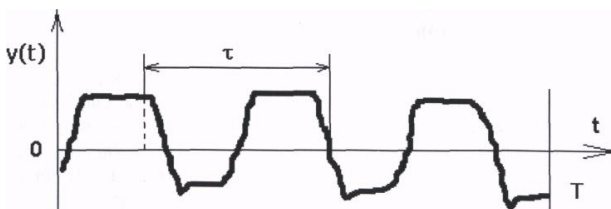


Рис. 2.1. Определение автокорреляционной функции

Оценку вида и величины автокорреляции функции, связывающей значения $y(t)$ в момент времени t и $t+\tau$, можно получить, вычисляя произведение этих ординат и среднюю величину произведения в пределах времени наблюдения T . Найденное среднее значение произведения приближается к точке значения автокорреляционной функции рассматриваемого сигнала при стремлении T к бесконечности:

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (2.1)$$

Поскольку запись входных и выходных сигналов производится в дискретном виде, то оценку автокорреляционной функции в каждом эксперименте будем определять по N значениям реализации достаточной длины T :

$$R_y(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i)y(t_i+\tau) \quad (2.2)$$

Характеристика $R_y(\tau)$ – всегда действительная четная функция с максимумом в точке $\tau = 0$;
Она может быть как положительной, так и отрицательной

$$\begin{aligned} R_y(-\tau) &= R_y(\tau) \\ R_y(0) &= |R_y(\tau)| \end{aligned}$$

при любых τ .

Взаимная корреляционная функция двух сигналов характеризует общую зависимость значений одного сигнала $y(t)$ от значений другого $u(t)$. Как и в случае автокорреляционной функции, оценку взаимной корреляционной функции можно получить по записям $y(t)$ и $u(t)$ достаточной длины:

$$R_{yn}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t+\tau)u(t) \quad (2.3)$$

Величина $R_{yn}(\tau)$ – всегда действительная функция, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Она не обязательно имеет максимум в точке $\tau = 0$ и не обязательно является четной, как это было в случае автокорреляционной функции. Функция $R_{yn}(\tau)$ обладает свойством антисимметрии: если y и n поменять местами, то $R_{yn}(\tau) = R_{yn}(-\tau)$.

Взаимная корреляционная функция используется, в частности, для определения времени задержки сигнала в исследуемой динамической системе, определения тракта сигнала, обнаружения сигналов в шуме и их восстановления.

2.1.2. Спектральные характеристики

Для исследования частотной структуры процесса трения можно использовать оценки спектральной плотности этого процесса. Спектральная плотность мощности случайного процесса описывает общую структуру процесса через спектральную плотность средней величины квадрата его значений. Среднее значение квадрата значений реализации в интервале частот ω до $\omega+\Delta\omega$ можно получить, подавая эту реализацию на вход полосового фильтра с узкой полосой пропускания и усредняя возведенную в квадрат функцию на выходе фильтра. Это осредненное значение квадрата приближается к точному его значению при стремлении длины записи реализации T к бесконечности.

Важное свойство спектральной плотности заключается в ее связи с автокорреляционной функцией. Используя автокорреляционные функции (вычисление по записям входных и выходных сигналов при испытании образцов на трение), можно вычислять оценки спектральных плотностей динамического процесса с использованием вычислительных средств системы MATLAB по следующим формулам:

$$S_n(\omega) = \sum_{-\tau=-M}^M R_u(\tau)g_M(\tau)e^{-j\omega\tau} \quad (2.4)$$

$$S_y(\omega) = \sum_{-\tau=-M}^M R_y(\tau)g_M(\tau)e^{-j\omega\tau} \quad (2.5)$$

$$S_{yn}(\omega) = \sum_{-\tau=-M}^M R_{yn}(\tau)g_M(\tau)e^{-j\omega\tau} \quad (2.6)$$

Основными применениями спектральной плотности физического процесса являются исследование его частотной структуры и вычисление передаточных характеристик.

2.1.3. Переходные характеристики

Динамические свойства линейных механических объектов и систем автоматического регулирования в целом могут быть описаны уравнениями и графическими характеристиками. В теории автоматического управления применяются два типа таких характеристик – переходные и частотные.

Эти характеристики могут быть сняты экспериментально или построены по уравнению динамического объекта. Может быть и обратная возможность – по экспериментально полученным характеристикам составить уравнение динамического объекта. Кроме того, с помощью этих характеристик можно определить реакцию объекта исследований на любое возмущение произвольного вида. Таким образом, переходные и частотные характеристики однозначно связаны с уравнением динамического объекта и наряду с ним являются исчерпывающим описанием динамических свойств исследуемого процесса, в нашем случае – процесса трения испытуемых образцов.

Переходная функция, или переходная характеристика, $h(t)$ представляет собой график изменения во времени выходной величины динамического объекта, вызванного подачей на его вход скачкообразного воздействия $l(t)$:

$$l(t) = 0 \text{ при } t < 0,$$

$$l(t) = 1 \text{ при } t \geq 0.$$

2.1.4. Частотные характеристики

Важнейшей характеристикой динамического объекта является его частотная передаточная функция. Частотные характеристики описывают установившиеся колебания на выходе объекта, вызванные гармоническим воздействием на входе

$$u = u_{max} \sin(\omega t) \tag{2.7}$$

где u_{max} – амплитуда; ω – угловая частота воздействия.

Установившиеся колебания на выходе будут иметь вид:

$$y = y_{max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.8)$$

где y_{max} – амплитуда выходных установившихся колебаний; φ – фазовый сдвиг между входным и выходным колебаниями.

При фиксированной амплитуде входных колебаний амплитуда и фаза выходных колебаний зависят от частоты. Зависимость от частоты отношения амплитуды $A(\omega) = y_{max}/u_{max}$ называется амплитудной частотной характеристикой (АЧХ), а зависимость сдвига фаз от частоты $\varphi(\omega)$ – фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

Наличие максимума у амплитудной частотной характеристики говорит о резонансных свойствах динамического объекта. Частота, соответствующая максимуму амплитудной характеристики, называется резонансной.

2.2. Сопоставление эволюции динамических характеристик и эволюции качества трущихся поверхностей

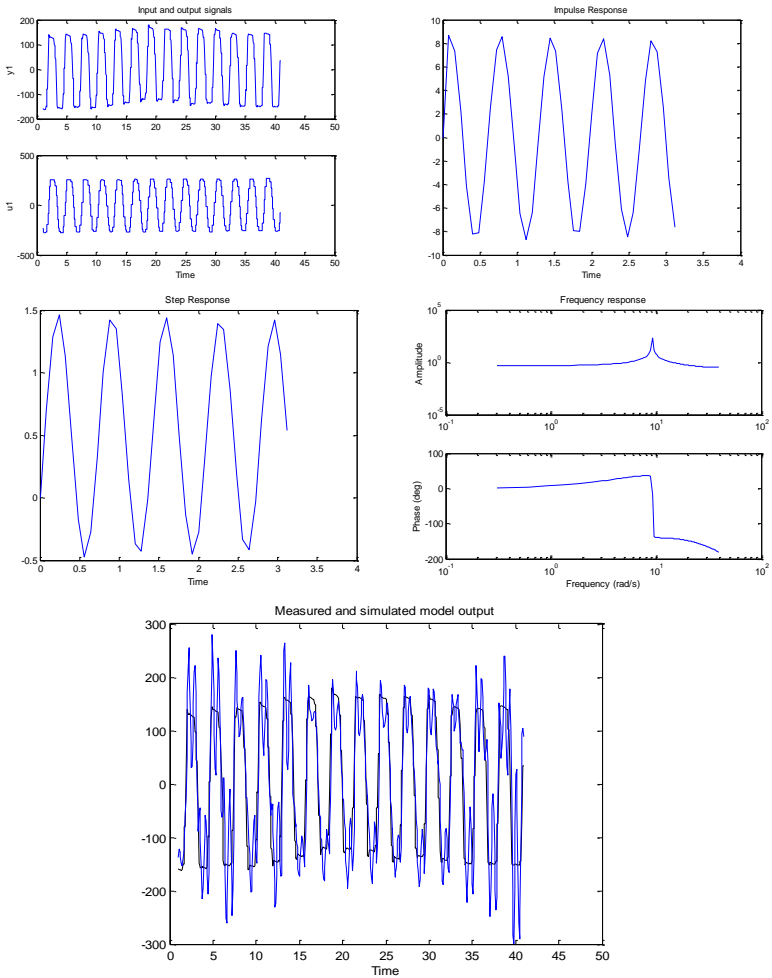


Рис. 2.2. Последовательность получения и анализа экспериментальных данных

Ниже приведены сопоставленные динамические характеристики, полученные на «Трибале», и данные по шероховатости, полученные на «Калибре». Процесс обработки осуществлялся с помощью пакета MATLAB. В качестве определяющей модели была выбрана модель второго порядка.

Динамические характеристики трибопары:

- **Время эксперимента 0 минут:**



n2s2: 50.6765

State-space model: $x(t+Ts) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$

$y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$

A =

	x1	x2
x1	0.70769	-0.78801
x2	0.57317	0.7708

```

B =
      u1
    x1 0.0010909
    x2 -0.00095839
C =
      x1  x2
    y1 362.14 -315.03

D =
      u1
    y1 0
K =
      y1
    x1 0.00098026
    x2 -0.0007025
x(0) =
    x1 0
    x2 0
>> sys=tf(n2s2)

```

Transfer function from input "u1" to output "y1":
0.697 z - 0.4417

```

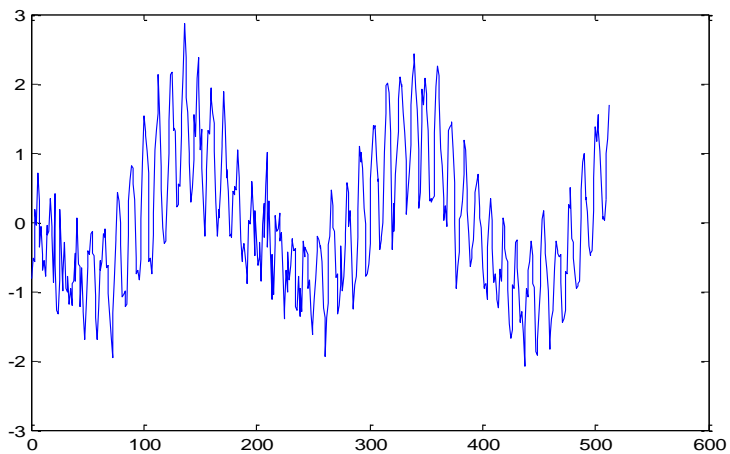
-----
z^2 - 1.478 z + 0.9971
>> damp(sys)

```

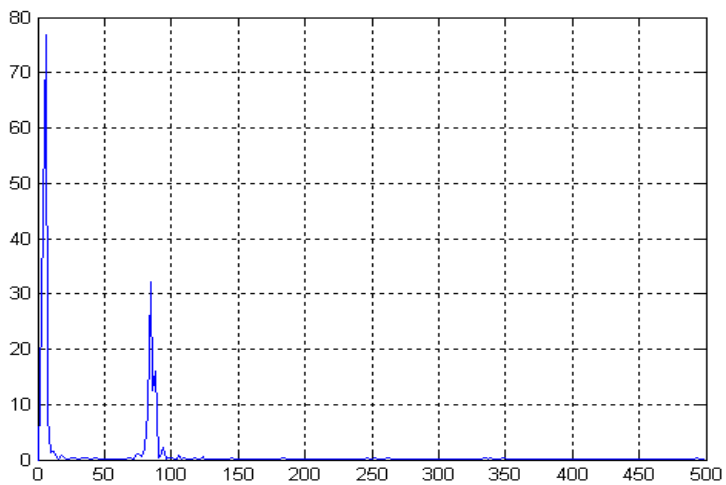
Eigenvalue	Magnitude	Equiv. Damping	Equiv. Freq. (rad/s)
7.39e-001 + 6.71e-001i	9.99e-001	1.94e-003	9.22e+000
7.39e-001 - 6.71e-001i	9.99e-001	1.94e-003	

Верхний образец трибопары:

Профилограмма:

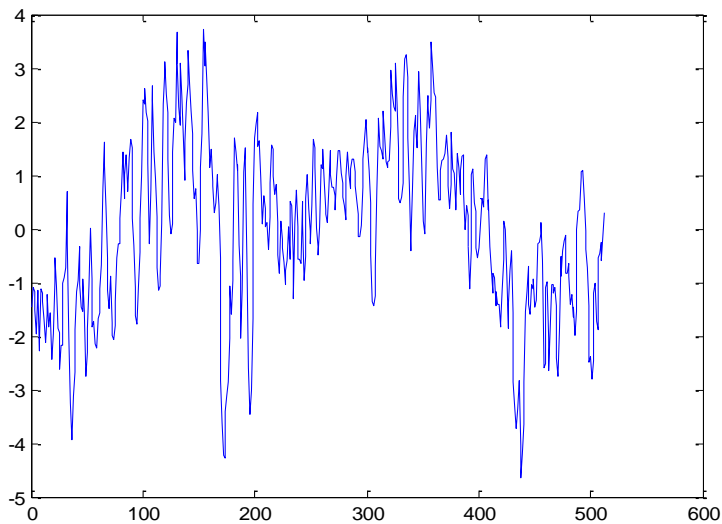


Преобразование Фурье:

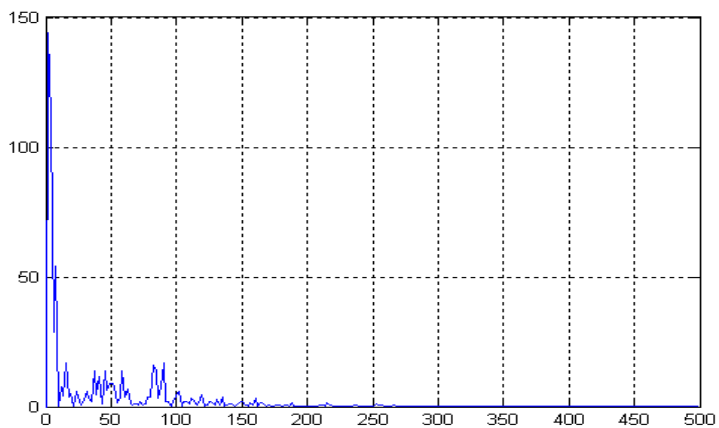


Нижний образец трибопары:

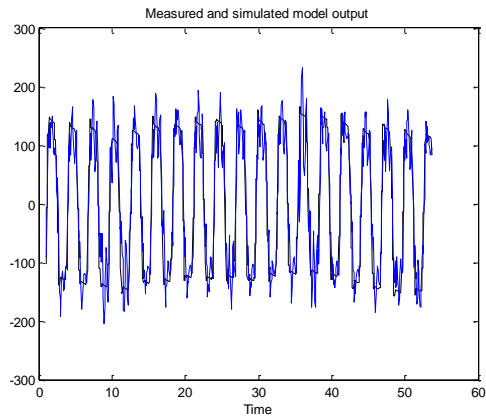
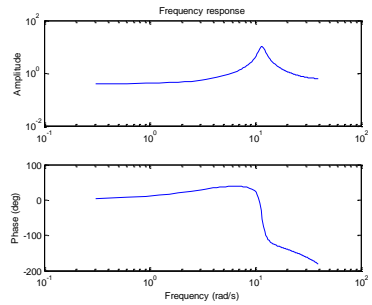
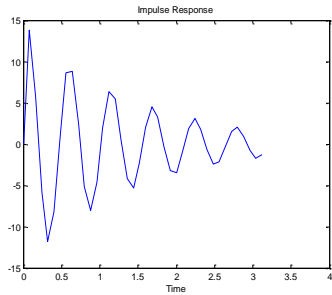
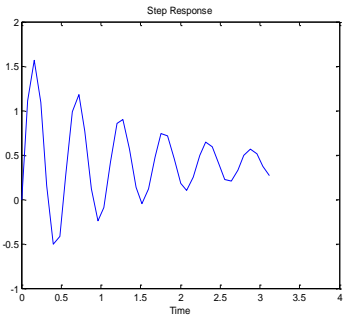
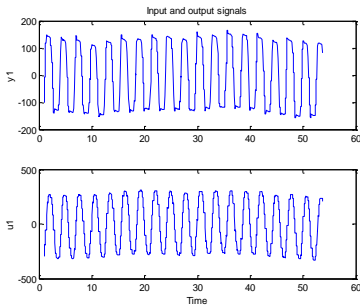
Профилограмма:



Преобразование Фурье:



- **Время эксперимента 5 минут:**



n2s2: 64.3246

State-space model: $x(t+T_s) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$$

A =

$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ x1 & 0.7957 & 0.86259 \\ x2 & -0.71587 & 0.34639 \end{array}$$

B =

$$\begin{array}{c} u1 \\ x1 & 0.0020641 \\ x2 & -0.001001 \end{array}$$

C =

$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ y1 & 523.8 & -26.582 \end{array}$$

D =

$$\begin{array}{c} u1 \\ y1 & 0 \end{array}$$

K =

$$\begin{array}{c} y1 \\ x1 & 0.0008388 \\ x2 & -0.00057457 \end{array}$$

x(0) =

$$\begin{array}{c} x1 & 0 \\ x2 & 0 \end{array}$$

>> sys=tf(n2s2)

Transfer function from input "u1" to output "y1":

$$\frac{1.108 z - 0.8087}{z^2 - 1.142 z + 0.8931}$$

>> damp(sys)

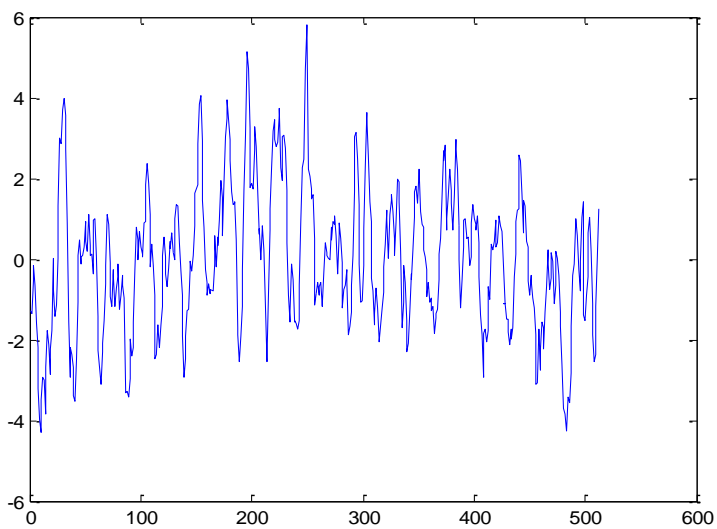
Eigenvalue Magnitude Equiv. Damping Equiv. Freq. (rad/s)

5.71e-001 + 7.53e-001i 9.45e-001 6.12e-002 1.15e+001

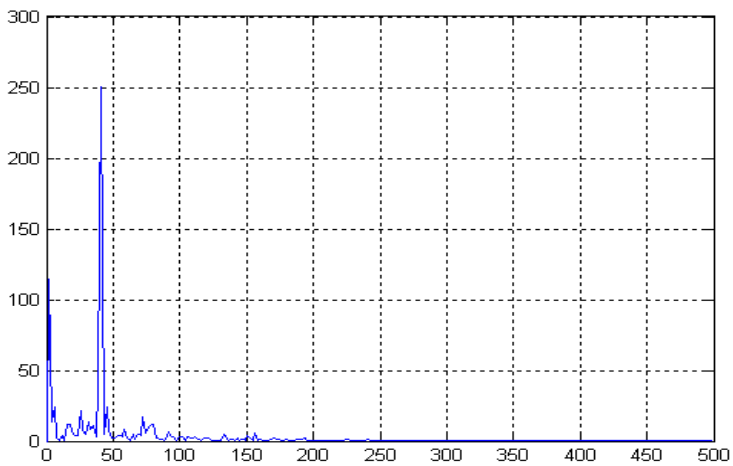
5.71e-001 - 7.53e-001i 9.45e-001 6.12e-002

Нижний образец:

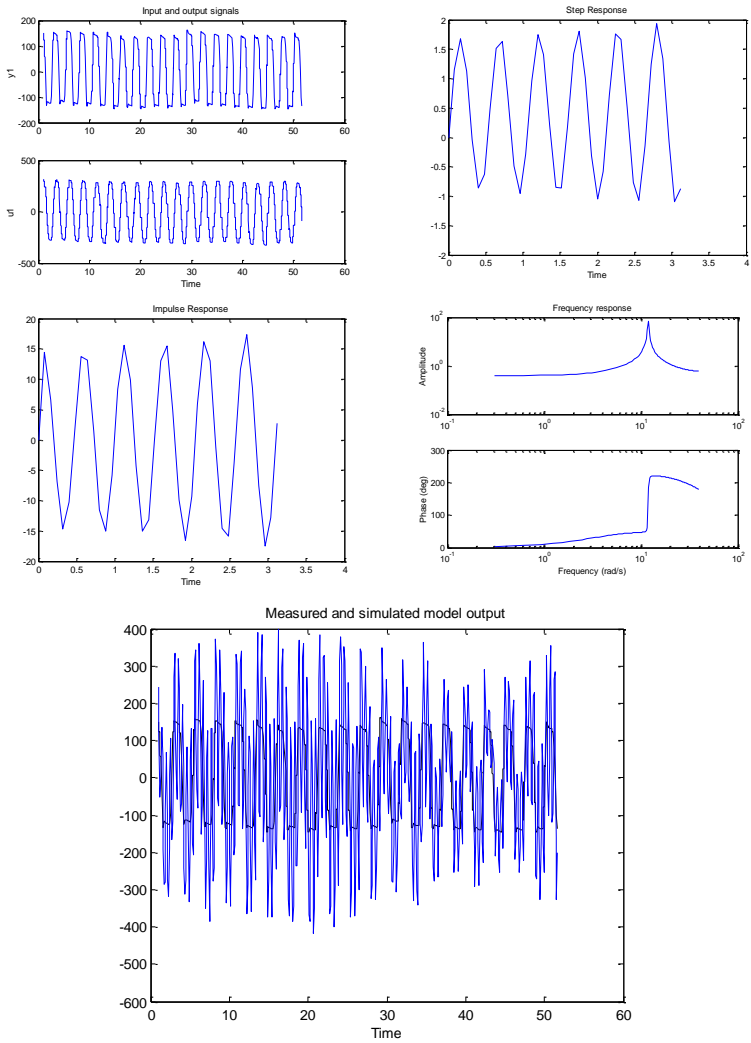
Профилограмма:



Преобразование Фурье:



- **Время эксперимента 15 минут:**



n2s2: -30.9195

State-space model: $x(t+T_s) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$$

A =

```
      x1  x2
x1  0.58454  1.0752
x2 -0.6227  0.58405
```

B =

```
      u1
x1  0.0022498
x2  0.00057548
```

C =

```
      x1  x2
y1  437.19  297.26
```

D =

```
      u1
y1  0
```

K =

```
      y1
x1  0.0010632
x2  8.1841e-006
```

x(0) =

```
      x1  0
      x2  0
```

```
>> sys=tf(n2s2)
```

Transfer function from input "u1" to output "y1":

```
1.155 z - 0.8204
```

```
z^2 - 1.169 z + 1.011
```

```
>> damp(sys)
```

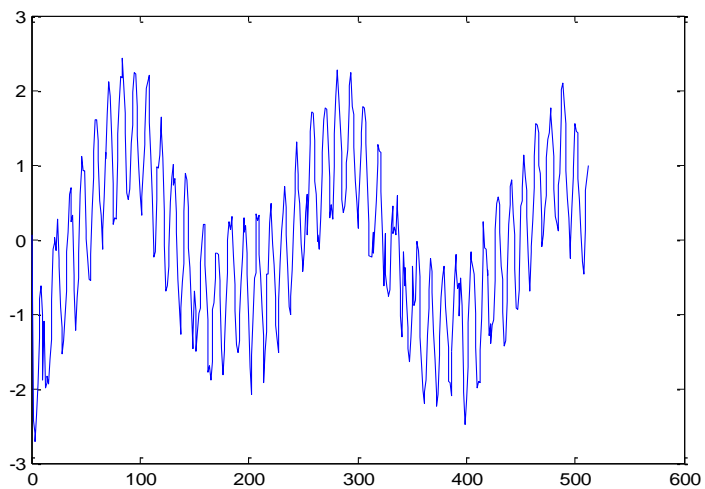
Eigenvalue Magnitude Equiv. Damping Equiv. Freq. (rad/s)

```
5.84e-001 + 8.18e-001i  1.01e+000  -5.71e-003  1.19e+001
```

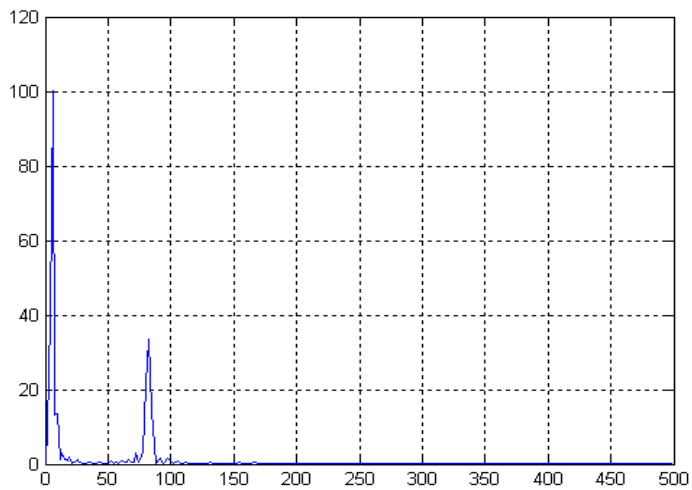
```
5.84e-001 - 8.18e-001i  1.01e+000  -5.71e-003
```

Верхний образец:

Профилограмма:

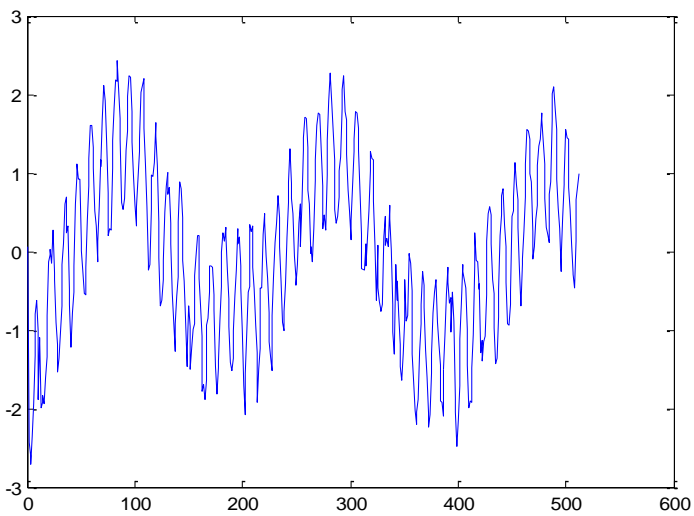


Преобразование Фурье:

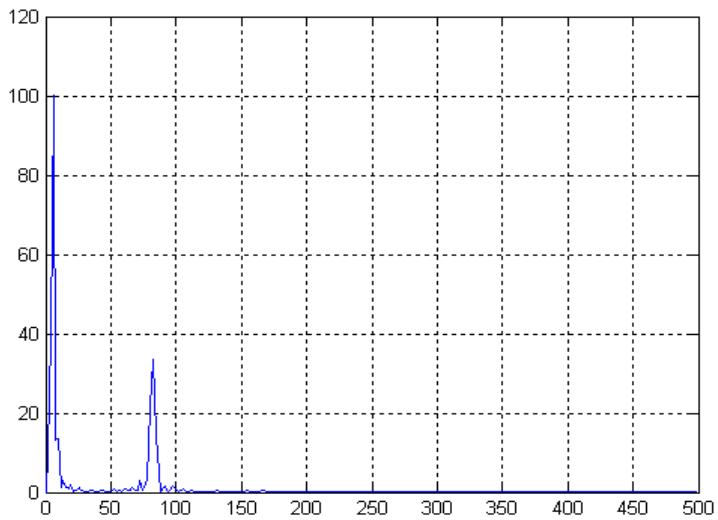


Нижний образец:

Профилограмма:

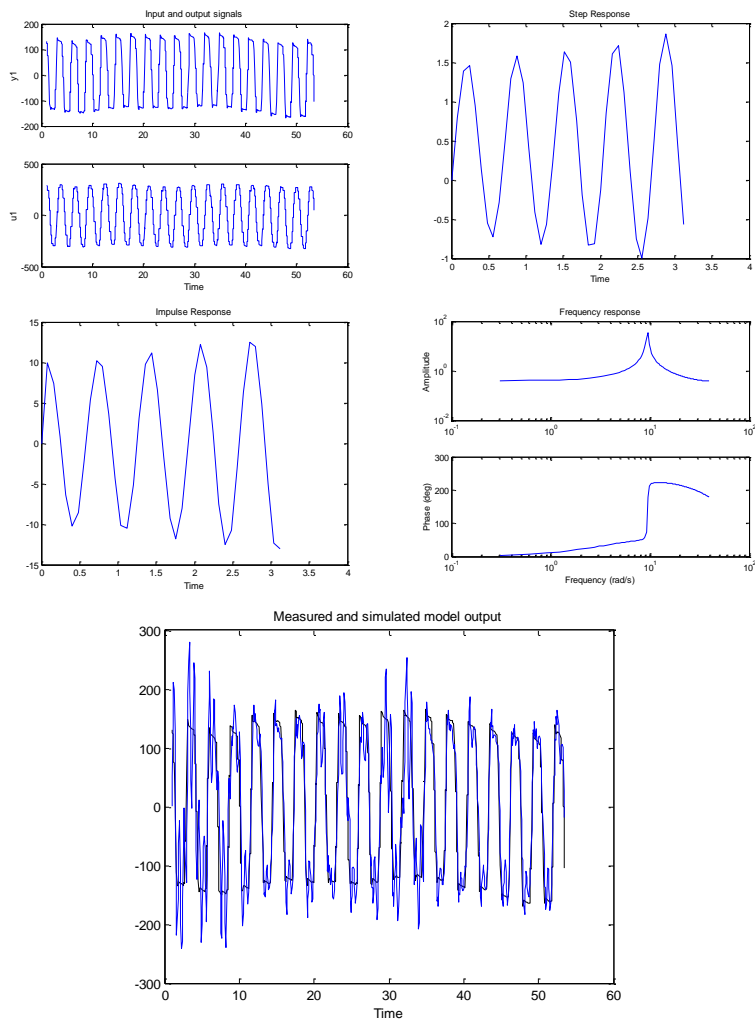


Преобразование Фурье:



Далее с 20 по 25 минуту эксперимента наблюдается эффект накопления энергии. В данном случае он обусловлен появлением дополнительной степени свободы в динамической системе.

- **Время эксперимента 20 минут:**



n2s2: 57.3317

State-space model: $x(t+T_s) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$
 $y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$

A =
 x1 x2
 x1 0.84878 0.62123
 x2 -0.78574 0.6231

B =
 u1
 x1 0.0011745
 x2 -0.00049519

C =
 x1 x2
 y1 620.5 -136.48

D =
 u1
 y1 0

K =
 y1
 x1 0.00084934
 x2 -0.00053907

x(0) =
 x1 0
 x2 0

>> sys=tf(n2s2)

Transfer function from input "u1" to output "y1":

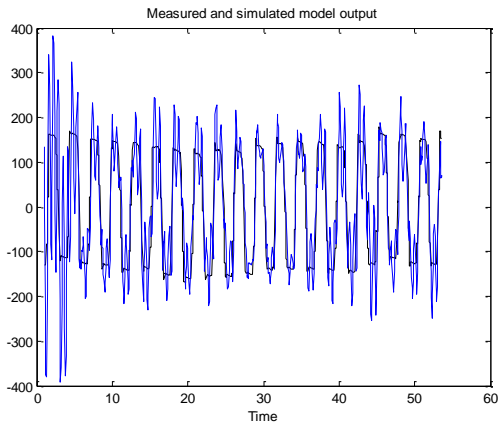
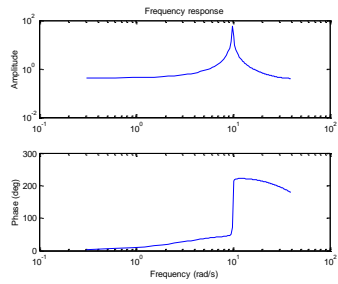
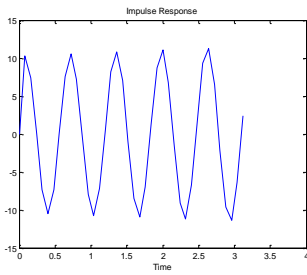
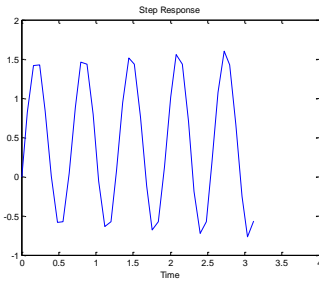
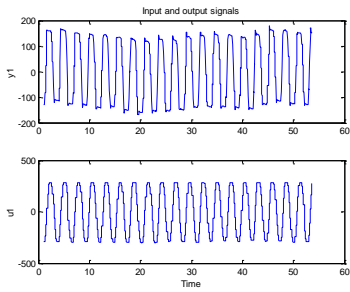
0.7964 z - 0.5764

 z^2 - 1.472 z + 1.017

>> damp(sys)

Eigenvalue	Magnitude	Equiv. Damping	Equiv. Freq. (rad/s)
7.36e-001 + 6.89e-001i	1.01e+000	-1.12e-002	9.41e+000
7.36e-001 - 6.89e-001i	1.01e+000	-1.12e-002	

- **Время эксперимента 25 минут:**



n2s2: 36.3748

State-space model: $x(t+T_s) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$$

A =

$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ x1 & 0.7727 & -0.59473 \\ x2 & 0.8643 & 0.63759 \end{array}$$

B =

$$\begin{array}{c} u1 \\ x1 & 0.0010103 \\ x2 & 0.0008846 \end{array}$$

C =

$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ y1 & 538 & 317.69 \end{array}$$

D =

$$\begin{array}{c} u1 \\ y1 & 0 \end{array}$$

K =

$$\begin{array}{c} y1 \\ x1 & 0.00056739 \\ x2 & 0.00099841 \end{array}$$

x(0) =

$$\begin{array}{c} x1 & 0 \\ x2 & 0 \end{array}$$

>> sys=tf(n2s2)

Transfer function from input "u1" to output "y1":

$$0.8245 z - 0.5693$$

$$\text{-----}$$
$$z^2 - 1.41 z + 1.007$$

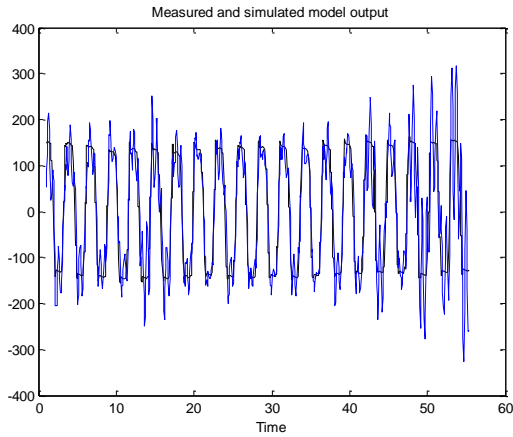
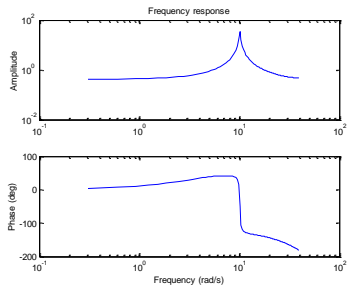
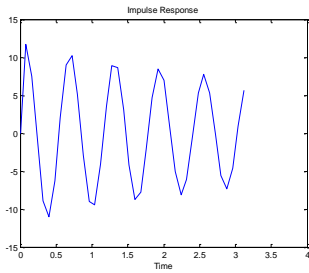
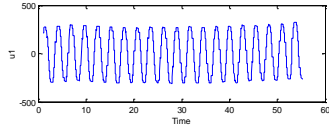
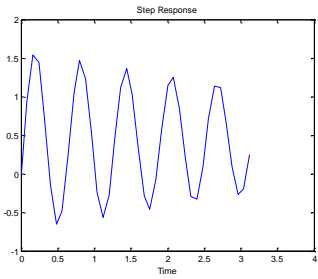
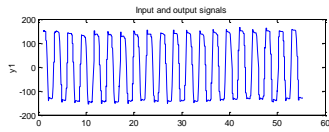
>> damp(sys)

Eigenvalue Magnitude Equiv. Damping Equiv. Freq. (rad/s)

$$7.05e-001 + 7.14e-001i \quad 1.00e+000 \quad -4.22e-003 \quad 9.89e+000$$

$$7.05e-001 - 7.14e-001i \quad 1.00e+000 \quad -4.22e-003$$

- **Время эксперимента 30 минут:**



n2s2: 52.1039

State-space model: $x(t+T_s) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$
 $y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$

A =
 x1 x2
 x1 0.74018 -0.5841
 x2 0.87766 0.62259

B =
 u1
 x1 0.0010927
 x2 0.0011369

C =
 x1 x2
 y1 529.88 314.03

D =
 u1
 y1 0

K =
 y1
 x1 0.00047495
 x2 0.00087212

x(0) =
 x1 0
 x2 0

>> sys=tf(n2s2)

Transfer function from input "u1" to output "y1":

0.936 z - 0.6754

 z^2 - 1.363 z + 0.9735

>> damp(sys)

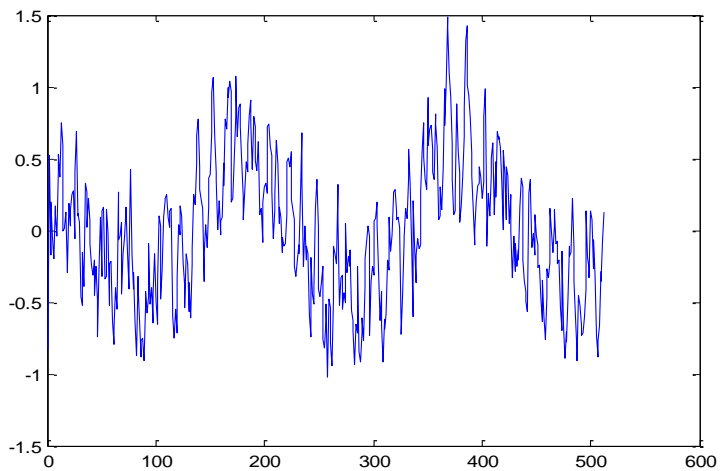
Eigenvalue	Magnitude	Equiv. Damping	Equiv. Freq. (rad/s)
------------	-----------	----------------	----------------------

6.81e-001 + 7.14e-001i	9.87e-001	1.66e-002	1.01e+001
------------------------	-----------	-----------	-----------

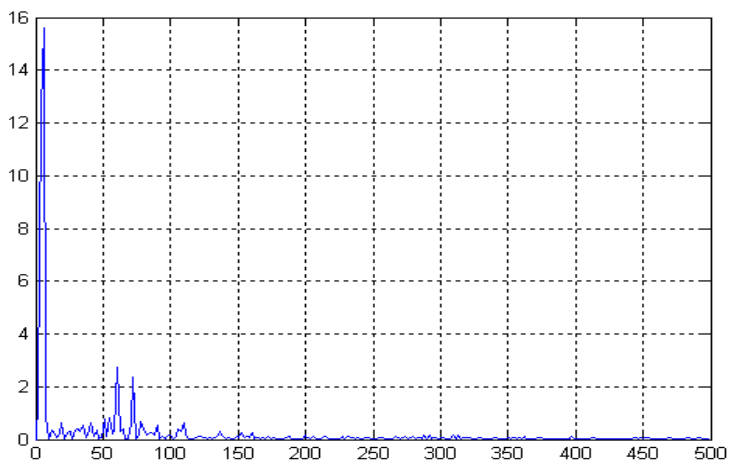
6.81e-001 - 7.14e-001i	9.87e-001	1.66e-002	
------------------------	-----------	-----------	--

Верхний образец:

Профилограмма:

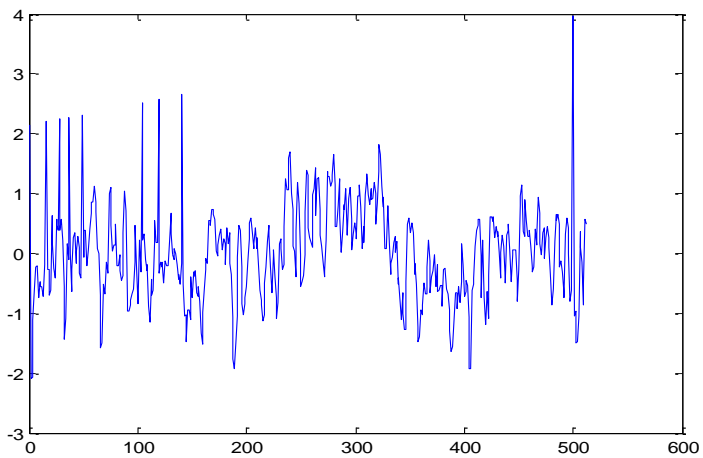


Преобразование Фурье:

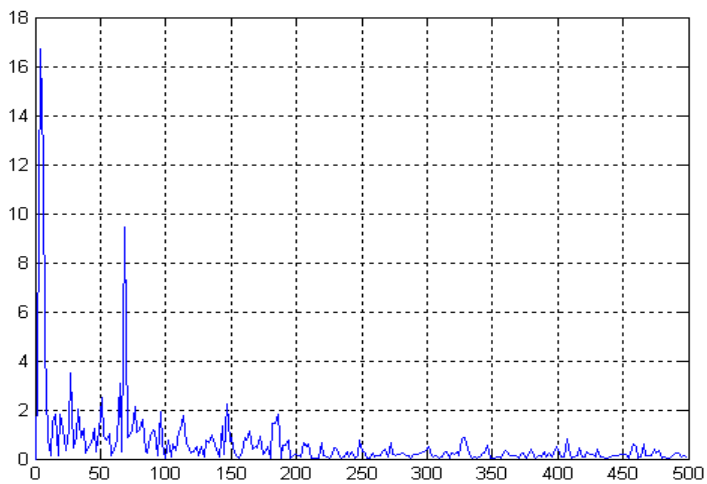


Нижний образец:

Профилограмма:



Преобразование Фурье:



Ниже приведены данные полученных результатов.

Таблица 2.1. Сводная таблица показателей, полученная в результате обработки данных моделирования

Время эксперимента, мин	Коэф. демпф., n	Частота собств. колебаний, ω	Частота БПФ		Амплитуда БПФ	
0	0,0019	9,22000	5,84	84,2	76,9	32,1
5	0,0612	11,50000	1,95	41,0	76,9	249,7
15	-0,0057	11,9	5,87	82,2	100,1	33,6
30	0,0166	10,1	5,85	62,2	15,6	2,8

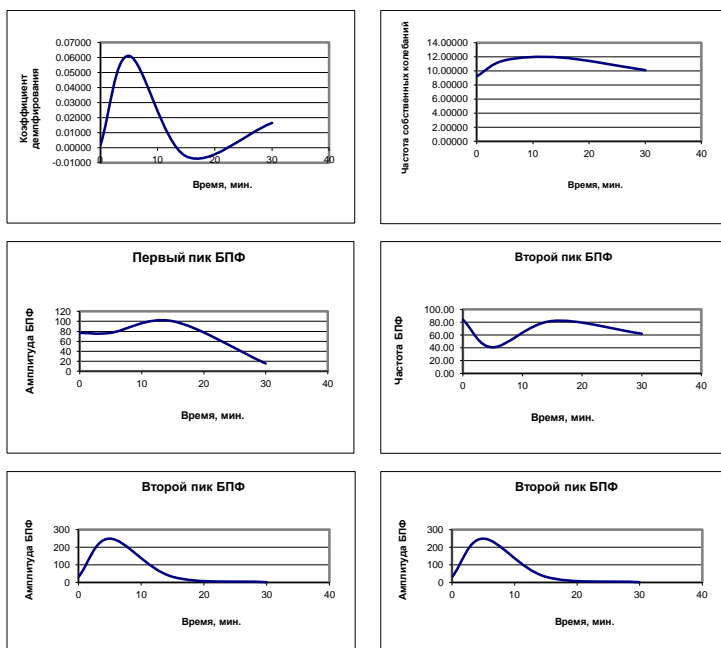


Рис. 2.3. Полученные графики

Представленные здесь окна рис. 2.3 получены из данных по анализу динамических характеристик (два горизонтальных верхних) и профилограмм (четыре нижних рисунка).

ГЛАВА 3.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Микрогеометрия поверхностей представляет собой геометрический объект, который относится к классу фракталов [31,35,38]. Поэтому в основе оценок шероховатости в данной главе лежат подходы к вычислению стохастических характеристик фрактальных геометрических объектов, которые интерпретируются как сигналы в нелинейных диссипативных динамических системах. Поэтому вся терминология заимствована из теории динамического хаоса.

До начала 60-х годов в нелинейных диссипативных динамических системах в стационарном режиме наблюдали только периодические и квазипериодические движения. Однако в 1963 году в динамической системе Лоренцем [38] было обнаружено очень сложное движение, которое воспринималось как хаотическое. Для характеристики таких движений ввели понятие "динамический хаос". Слово "динамический" означает, что отсутствуют источники флуктуаций. В статье математиков Рюэля и Такенса [38], опубликованной в 1971 году, был введен новый математический образ динамического хаоса – странный аттрактор. Слово "странный" подчеркивает два свойства аттрактора. Это, во-первых, необычность его геометрической структуры. Размерность странного аттрактора является дробной (фрактальной). Во-вторых, странный аттрактор – это притягивающая область для траекторий из окрестных областей. При этом все траектории внутри странного аттрактора динамически неустойчивы, что выражается в сильной (экспоненциальной) расходимости близких в начальный момент траекторий.

3.1. Методы вычисления стохастических характеристик

3.1.1. Требования к исходным данным

Для вычисления таких статистических средних, как размерность, энтропия, спектр показателей Ляпунова и других характеристик аттрактора, необходимо иметь множество точек, определенных в фазовом

пространстве размерности n и принадлежащих аттрактору. Число точек M в расчетах конечно, но обязано должно быть достаточно большим. Согласно формуле, предложенной в [38]:

$$M \geq M_{\min} = 10^{2+0.4D} \quad (3.1)$$

где D – размерность аттрактора. В случае, когда динамическая система задана дискретным оператором отображения, точки находятся автоматически после задания начальных условий. Если динамическая система задана системой дифференциальных уравнений, то в общем случае решение может быть найдено только численным интегрированием системы на компьютере. Однако часто требуется вычислить характеристики аттрактора некоторой реальной системы, математическая модель которой неизвестна. При этом, как правило, неизвестна и размерность ее фазового пространства. В этой ситуации мы располагаем информацией о поведении во времени какой-либо одной из динамических переменных. К тому же и интервал времени экспериментальной реализации естественно ограничен. Можно ли в таких условиях получить характеристики аттрактора? Путь к решению этой проблемы был предложен Такенсом. В работе [38] доказано, что почти для всех гладких динамических систем по имеющейся временной реализации одной наблюдаемой динамической переменной можно сконструировать новый аттрактор, основные свойства которого будут такими же, как у исходного.

3.1.2. Восстановление аттрактора по временному (пространственному) ряду

Пусть имеется временной ряд экспериментальных данных, представляющий собой отсчеты некоторой физической величины: $\{s_k\}_{k=0}^{M-1}$. Если известен шаг по времени Δt , то время $t = k \cdot \Delta t$. Предполагается, что физическая величина s является одной из переменных динамической системы. Система находится в стационарном режиме, т.е. фазовая траектория проходит внутри аттрактора. Для восстановления аттрактора Такенсом предложен метод временной задержки координат. В n -мерном фазовом пространстве строится последовательность точек вида:

$$x_k = (s_k, s_{k+\tau}, \dots, s_{k+(n-1)\tau}) \quad (3.2)$$

$$k = 0, m-1, \quad m = M - (n-1)\tau.$$

Здесь τ – временная задержка, n – размерность вложения.

Основной результат Такенса состоит в следующем. Если $M \rightarrow \infty$, то множество точек $x_k \in R^n$ задает вложение исходного аттрактора почти при

любом выборе наблюдаемой переменной, если n не меньше удвоенной размерности исходного аттрактора. Для оценки характеристик реального исследуемого аттрактора можно вычислять характеристики восстановленного аттрактора. С целью уменьшения ошибки, обусловленной конечностью набора экспериментальных точек $\{s_k\}_{k=0}^{M-1}$, необходимо проводить расчеты при нескольких различных значениях M и n , и добиваться независимости получаемых оценок характеристик от M и n в пределах заданной точности.

3.1.3. Выбор временной задержки (сдвига) τ

Для малых шагов по времени Δt значения s_k и s_{k+1} будут близкими, поэтому большое значение приобретает правильный выбор временной задержки τ . Необходимо стремиться выбрать τ так, чтобы корреляция между s_k и $s_{k+\tau}$ была по возможности минимальной. Традиционный способ выбора временной задержки состоит в вычислении автокорреляционной функции временного ряда:

$$B(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (s_k - \bar{s})(s_{k+\tau} - \bar{s}), \quad m = M - \tau \quad (3.3)$$

Задержка τ выбирается равной времени первого пересечения нуля автокорреляционной функции. Второй способ требует вычисления спектра мощности временного ряда, т.е. быстрого преобразования Фурье автокорреляционной функции. Если в спектре мощности присутствуют кратные пики, то задержка τ выбирается равной четверти периода самой высокой из доминирующих частот. Третий способ [38] основан на вычислении средней взаимной информации между двумя измерениями. Пусть даны два множества измерений A и B . Взаимная информация между элементом a_i множества A и элементом b_j множества B определяется как количество информации, которое имеют измерения a_i и b_j по отношению к друг другу:

$$I_{a_i, b_j} = \ln \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (3.4)$$

Если измерения независимы, то взаимная информация равна нулю. Усредняя по всем измерениям, получаем:

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (3.5)$$

Заменяя a_i и b_j на s_k и s_{k+1} соответственно, получаем среднюю взаимную информацию как функцию временной задержки τ . Задержка τ выбирается равной времени первого минимума во взаимной информации.

3.1.4. Алгоритм вычисления корреляционной размерности аттрактора

В случае модельных данных, когда нам известна размерность n фазового пространства динамической системы и все n координат каждой точки на аттракторе, корреляционную размерность D_2 аттрактора находят следующим образом [38]. Рассмотрим корреляционный интеграл $C(r)$, показывающий относительное число пар точек аттрактора, находящихся на расстоянии, не большем r :

$$C(r) = \frac{1}{m(m-1)/2} \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \Theta(r - \rho(x_i, x_j)) \quad (3.6)$$

здесь Θ – функция Хевисайда: $\Theta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \geq 0 \\ 0, & \alpha \leq 0 \end{cases}$; ρ – расстояние в n -мерном фазовом пространстве, m – число точек x_i на аттракторе.

Если выполняется условие

$$C(r) \sim r^{D_2} \quad (3.7)$$

то D_2 считают корреляционной размерностью аттрактора. Справедливость приведенного степенного закона ограничена значениями r , достаточно малыми по сравнению с размером аттрактора. При увеличении r величина $C(r)$ достигает насыщения $C(r) \rightarrow 1$ (при r , сравнимых с размером аттрактора). С другой стороны, при очень малых значениях r число пар точек (x_i, x_j) , расстояние между которыми не превышает r , становится малым (из-за конечности числа точек на аттракторе) и статистика становится бедной. Кроме того, приобретает решающее значение влияние инструментальных ошибок измерения сигнала. Следовательно, на практике степенной закон выполняется только в ограниченном диапазоне значений r (скейлинговом диапазоне), который и может быть использован для определения размерности аттрактора.

Учитывая, что из (3.7) следует

$$\ln C(r) \sim D_2 \ln r \quad (3.8)$$

получаем оценку размерности аттрактора как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей график корреляционного интеграла $C(r)$ в двойном логарифмическом масштабе. В случае экспериментальных данных мы обычно не знаем размерность фазового пространства системы и располагаем информацией только об одной координате точек на аттракторе. Поэтому все расчеты проводятся для нескольких размерностей фазового пространства $n = 1, 2, 3, \dots$. Для восстановления аттрактора используется метод Такенса. При этом корреляционная размерность аттрактора $D_2(n)$ сначала возрастает, но затем обычно выходит на постоянный уровень $D_2(n) \approx D_2$. Таким образом, получают искомую корреляционную размерность D_2 аттрактора и оценку размерности фазового пространства системы $n \leq 2D_2 + 1$. Если же выходной сигнал динамической системы сильно зашумлен, то размерность аттрактора постоянно растет.

3.1.5. Алгоритм вычисления корреляционной энтропии аттрактора

Корреляционная энтропия K_2 может быть вычислена достаточно просто [34]. Для этого также вычисляют корреляционный интеграл (3.6), но рассматривают не только его зависимость от расстояния r , но и от размерности фазового пространства n . При этом полагают, что

$$C(r, n) \sim r^{D_2} \exp(-nK_2) \quad (3.9)$$

откуда

$$K_2(r, n) = \ln \frac{C(r, n)}{C(r, n+1)} \quad (3.10)$$

Энтропия K_2 аппроксимируется в приемлемом диапазоне значений r и n .

3.1.6. Построение динамической модели по экспериментальным данным

В самом общем случае не известно никакой определенной модели. По одной наблюдаемой динамической переменной необходимо

восстановить систему дифференциальных уравнений (СДУ) или дискретное отображение, которые управляют поведением данного временного ряда [2]. Обычно модель задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений $dx / dt = F(x)$, где x – точка в n -мерном фазовом пространстве. Затем $F(x)$ строится с помощью полиномов от фазовых переменных [29]. В этот способ могут быть добавлены различные усовершенствования, включающие использование разложения временного ряда по некоторой системе базисных функций для облегчения эффективного выбора полиномов для СДУ и фильтрации шума в данных [10]. Можно определять параметры динамической системы по экспериментальному временному ряду и предложенному виду СДУ. Стохастические характеристики "подогнанного" аттрактора могут быть затем сравнены с характеристиками "сырого" аттрактора с целью убедиться в адекватности предложенной модели. В простейшем случае модельные параметры входят линейно в СДУ. Типичные примеры – системы Лоренца [38] и Ресслера [38]. В более сложных ситуациях, таких как физический маятник, некоторые модельные параметры входят линейно, в то время как остальные – нелинейно. Применение метода наименьших квадратов для поиска параметров дает хорошие результаты в обоих случаях. Допускается даже присутствие умеренного количества ($\leq 1\%$) аддитивного шума.

3.2. Обработка экспериментальных данных с помощью программы Fractan

Вышеприведенные характеристики можно вычислить с помощью программы, разработанной В.В. Сычевым.

Первый раз программа запускается с английским интерфейсом. Перейти на русский язык можно из меню «Options» > «Russian Interface». При открытии временного ряда отсчеты трактуются как вещественные, независимо от того, целые они или вещественные на самом деле. При последующей «загрузке» отсчеты преобразуются в целочисленные. Здесь есть два варианта в зависимости от состояния пункта меню «Параметры» > «Целочисленные исходные данные». Если там стоит галочка, либо был открыт звуковой файл, то отсчеты просто округляются до ближайшего целого. Если нет, либо, если диапазон отсчетов окажется больше 65535, то отсчеты сначала подвергаются линейному преобразованию с тем, чтобы их диапазон после округления стал стандартным: от -32768 до 32767. Открыть временной ряд можно с помощью меню «Файл» > «Открыть» или кнопки «Обработка», но перед началом расчета корреляционного интеграла или показателя Херста из этого временного ряда нужно еще загрузить отсчеты для обработки с помощью пункта меню «Обработка» > «Загрузить отсчеты» или кнопки «Обработка». При этом загружаются отсчеты от «Первый отсчет» до «Последний отсчет», поэтому эти два параметра необходимо выставить до загрузки отсчетов. Либо вручную, либо меняя

масштаб рисунка мышкой.левой кнопкой мыши можно выделять прямоугольник на рисунке и автоматически он показывается на всем окне.т.е. доступен выбор масштаба.правой кнопкой мыши можно выполнять прокрутку рисунка по горизонтали и вертикали. для этого нажимаем правую кнопку, перемещаем мышью и отпускаем. вернуться к исходному масштабу можно двойным кликом по рисунку. кстати, выбор масштаба доступен всегда, что бы ни было нарисовано: отсчеты, автокорреляционная функция, средняя взаимная информация, траектория в фазовом пространстве, корреляционная размерность, корреляционная энтропия или зависимость нормированного размаха для расчета показателя Херста. во время загрузки отсчетов вычисляются автокорреляционная функция и средняя взаимная информация для первой колонки в файле данных.

Предлагаемая автоматически оптимальная временная задержка может соответствовать времени:

- первого локального минимума средней взаимной информации;
- первого пересечения нуля автокорреляционной функции;
- первого локального минимума автокорреляционной функции.

Все зависит от того, что окажется меньше. Траектории в двумерном фазовом пространстве для одномерных временных рядов рисуются с учетом временной задержки «Оптим. задержка». То же самое применяется и для траекторий в трехмерном фазовом пространстве для одномерных и двумерных временных рядов. Если же количество колонок в исходном файле данных позволяет, то для отображения траекторий в 2D или 3D фазовом пространстве используются, соответственно, первые 2 или первые 3 колонки.

Начать расчет корреляционного интеграла можно из пункта меню «Обработка» > «Корреляционный интеграл» или нажатием кнопки «Обработка». В случае одномерного ряда данных при этом используется выставленная временная задержка «Оптим. задержка» и максимальная размерность фазового пространства «Макс. размерность». Если «Макс. размерность» не выставлена, либо меньше 2 или больше 37, то она будет найдена автоматически в процессе расчета. В любом случае размерность фазового пространства будет расти от 1 до «Макс. размерность». Однако если нажать кнопку «Стоп», то программа досчитает при текущей размерности фазового пространства и остановится. По корреляционному интегралу находят корреляционная размерность и корреляционная энтропия. Результаты записываются в два текстовых файла «*.dim» и «*.ent», которые затем могут быть открыты из меню «Файл» > «Открыть», нарисованы и сохранены как рисунок «*.bmp» (меню «Файл» > «Сохранить рисунок»). В случае многомерного ряда данных корреляционная энтропия не рассчитывается. Корреляционная размерность и энтропия рисуются из пунктов меню «Просмотр» > «Корреляционная размерность» и «Просмотр» > «Корреляционная энтропия». При этом учитывается параметр «Макс. размерность». Размерность фазового пространства не будет превышать значение этого параметра. *Минимальная длина временного ряда данных для обработки равна 512. Рекомендуемая длина не меньше $10^{(2+0.4*D)}$, где*

D – корреляционная размерность аттрактора. Однако если длина временного ряда будет больше 32768, то перед началом вычисления корреляционного интеграла выдается предупреждение, поскольку сложность расчета растет как квадрат количества отсчетов и время расчета может затянуться. Если предупреждение будет проигнорировано, то расчеты начнутся, причем использоваться будут все загруженные отсчеты, а не только первые 32768!

Минимальная размерность фазового пространства – 1.

Максимальная размерность фазового пространства – от 2 до 37.

Минимальная временная задержка – 1.

Максимальная временная задержка – не более 256.

Вычислить показатель Херста можно с помощью пункта меню «Обработка» > «Показатель Херста». После расчета на экране рисуется временная зависимость нормированного размаха в двойном логарифмическом масштабе и ее линейная аппроксимация. Наклон аппроксимирующей прямой и есть оценка показателя Херста. В файл показателя Херста пишутся только результаты аппроксимации, а сама временная зависимость нормированного размаха не сохраняется и ее можно нарисовать из пункта меню «Просмотр» > «Показатель Херста» только после соответствующего расчета. Однако после того как она нарисована, ее можно сохранить через меню «Файл» > «Сохранить».

3.2.1. Стохастический анализ профилограммы 411

FRACTAN 4.4 Correlation Dimension

Left = 0

Right = 511

Lag = 5

MaxDim = 5

Range = 12.080000

LDist -4.7 -4.7 -4.3 -3.3 -3.3

RDist -1.3 -2.7 -2.3 -1.3 -1.3

Sigma 0.115 0.300 0.562 0.402 0.505

CorrDim 0.900 1.437 1.749 1.307 1.400

PhSpDim 1 2 3 4 5

-12.7 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-12.3 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-12.0 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-11.7 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-11.3 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-11.0 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-10.7 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-10.3 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

-10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-9.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-9.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-8.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-8.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-7.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-7.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-7.0	2.000	3.000	4.000	0.000	0.000
-6.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-6.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-6.0	2.000	3.000	4.000	5.000	0.000
-5.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-5.3	1.473	2.897	4.000	5.000	6.000
-5.0	1.084	2.105	3.085	3.614	4.157
-4.7	0.888	1.707	2.627	3.530	4.566
-4.3	0.730	1.340	2.069	2.714	3.368
-4.0	1.159	1.969	2.825	3.629	4.431
-3.7	0.872	1.364	1.859	2.361	2.884
-3.3	1.017	1.430	1.803	2.128	2.454
-3.0	0.998	1.306	1.520	1.688	1.837
-2.7	0.772	0.946	1.071	1.145	1.203
-2.3	0.895	1.014	1.096	1.161	1.212
-2.0	0.843	0.931	0.977	1.014	1.047
-1.7	0.898	0.946	0.979	0.999	1.020
-1.3	0.831	0.957	0.999	1.016	1.027
-1.0	0.642	0.711	0.755	0.782	0.801
-0.7	0.551	0.590	0.607	0.619	0.625
-0.3	0.328	0.366	0.380	0.382	0.382
0.0	0.092	0.108	0.109	0.104	0.098

FRACTAN 4.4 Correlation Entropy

Left = 0
 Right = 511
 Lag = 5
 MaxDim = 5
 Range = 12.080000
 LDist -12.3 -12.3 -7.0 -6.0
 RDist -9.3 -7.7 -5.0 -4.0
 Sigma 0.000 0.000 0.227 0.344
 CorrEnt 6.708 7.911 4.959 3.610
 PhSpDim 1 2 3 4
 -12.7 6.708 7.911 0.000 0.000

-12.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-12.0	6.708	7.911	0.000	0.000
-11.7	6.708	7.911	0.000	0.000
-11.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-11.0	6.708	7.911	0.000	0.000
-10.7	6.708	7.911	0.000	0.000
-10.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-10.0	6.708	7.911	0.000	0.000
-9.7	6.708	7.911	0.000	0.000
-9.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-9.0	6.708	7.911	0.000	0.000
-8.7	6.708	7.911	0.000	0.000
-8.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-8.0	6.708	7.911	0.000	0.000
-7.7	6.708	7.911	0.000	0.000
-7.3	6.708	7.911	0.000	0.000
-7.0	4.611	5.388	6.134	0.000
-6.7	4.611	5.388	6.134	0.000
-6.3	4.611	5.388	6.134	0.000
-6.0	3.644	4.195	4.696	5.210
-5.7	3.644	4.195	4.696	5.210
-5.3	3.019	3.477	3.704	4.160
-5.0	2.568	2.935	3.212	3.610
-4.7	2.203	2.453	2.642	2.902
-4.3	1.926	2.074	2.216	2.407
-4.0	1.537	1.587	1.659	1.768
-3.7	1.283	1.282	1.301	1.352
-3.3	1.042	1.012	1.008	1.026
-3.0	0.837	0.807	0.797	0.803
-2.7	0.700	0.668	0.662	0.667
-2.3	0.569	0.537	0.528	0.531
-2.0	0.454	0.427	0.416	0.416
-1.7	0.346	0.319	0.309	0.307
-1.3	0.219	0.207	0.201	0.200
-1.0	0.130	0.120	0.115	0.113
-0.7	0.060	0.054	0.049	0.048
-0.3	0.015	0.012	0.010	0.009
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000

Значения корреляционной размерности CorrDim при различных размерностях фазового пространства PhSpDim записаны в этом файле в колонках таблицы.

В строках ниже PhSpDim слева записано значение двоичного логарифма расстояния в фазовом пространстве относительно общего размера аттрактора, а правее – соответствующие значения корреляционной размерности. В строке CorrDim записаны значения корреляционной

размерности, которые программа автоматически получает по соответствующей колонке, но не всегда это дает хороший результат. В столбце находится участок, на котором значения размерности более менее одинаковы и затем значения корреляционной размерности из этого участка усредняются.

Далее, теоретически нужно смотреть получившуюся строку значений слева направо, пока значения размерности не перестанут расти. Этот предел и есть искомое значение корреляционной размерности. Если предела не существует, то исходные данные представляли собой не динамический ряд, а просто шум. Смысл остальных записей в этом файле следующий:

Data – Имя исходного файла данных;
Left – Номер первого отсчета;
Right – Номер последнего отсчета;
Lag – Временная задержка (в отсчетах);
MaxDim – Максимальная размерность фазового пространства;
Range – Диапазон значений отсчетов в исходном файле данных;
LDist – Левая граница наилучшего интервала расстояний;
RDist – Правая граница наилучшего интервала расстояний;
Sigma – Погрешность вычисления корреляционной размерности.

Содержание файла корреляционной энтропии аналогично. Только в строке Sigma выводится погрешность вычисления энтропии, деленная на значение энтропии. Файл показателя Херста содержит совсем немного информации:

```
FRACTAN 4.4 Hurst Exponent
Data = C:\Sychyov\Examples\OneDim\Lorenz.dat
Left = 0
Right = 512
Hurst = 0.5385
HDelta = 0.0446
```

Здесь Hurst – собственно показатель Херста, HDelta – погрешность его вычисления,

Фрактальная размерность $D = 2 - H = 1,4615$ с погрешностью 0.0446.

3.3. Пример последовательного вейвлет-фрактального анализа профилограммы

3.3.1. Многоуровневый вейвлет-анализ профилограммы

Рассмотрим одну из реальных профилограмм (обозначим ее как *сигнал 111*), которая представлена на рис. 3.1. Частота дискретизации равна 512 отсчетов в секунду.

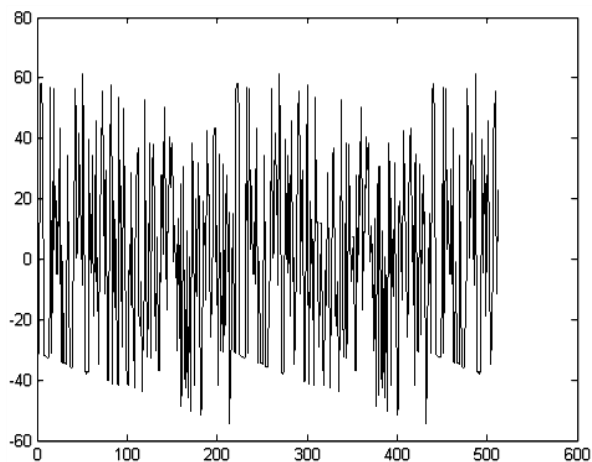


Рис. 3.1. Профилограмма сигнала 111

Для вейвлет-разложения применим вейвлет Добеши db4, имеющий носитель на промежутке $[0, 7]$. С помощью ППП Matlab проведем разложение сигнала 111 до уровня №3 (рис. 3.2).

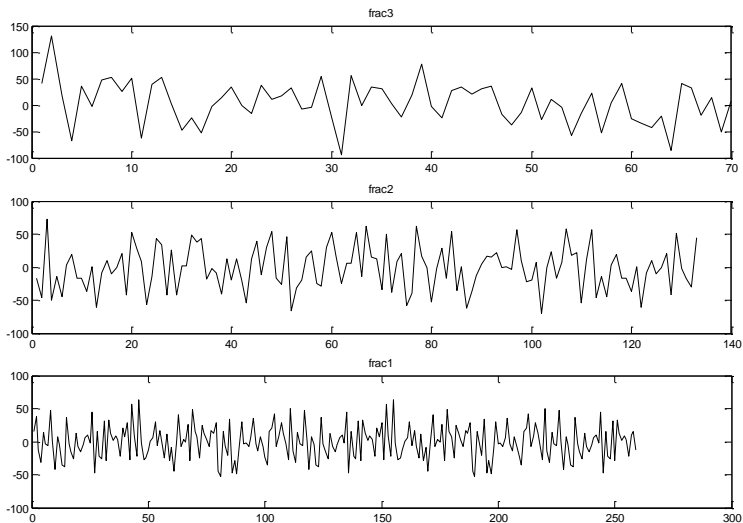


Рис. 3.2. Детализирующие коэффициенты

Первый, второй и третий уровни разложения – это детализирующие вейвлет-коэффициенты $cD1$, $cD2$, $cD3$, отражающие характеристики сигнала на соответствующих частотах: 365 Гц, 182.5 Гц; 91.25 Гц. С точки зрения физики процесса больший интерес представляют компоненты сигнала, которые соответствуют прямому восстановлению отдельно по каждому набору детализирующих коэффициентов – это компоненты сигнала $ScD1$, $ScD2$, $ScD3$ на указанных частотах. Результаты восстановления представлены на рис. 3.3.

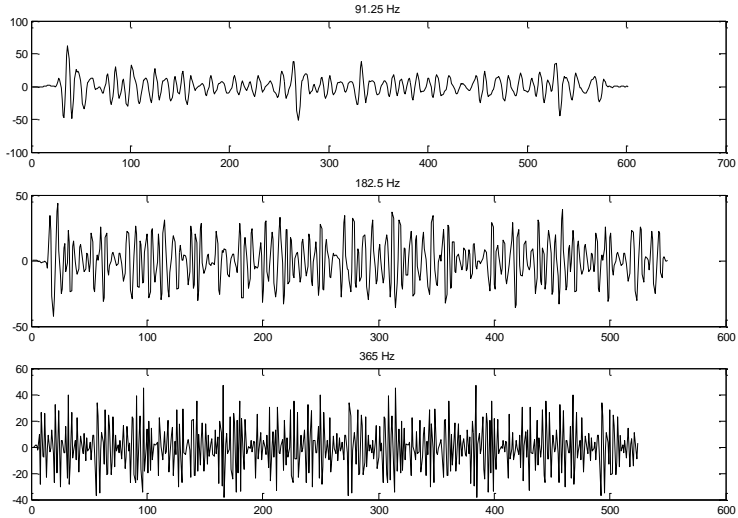


Рис. 3.3. Восстановленный сигнал 111 по частотам

На рис. 3.4 представлен энергетический спектр компонентов ScD1, ScD2, ScD3, на рис. 3.5 – вейвлетограмма, на рис. 3.6 – матрица вейвлет-коэффициентов.

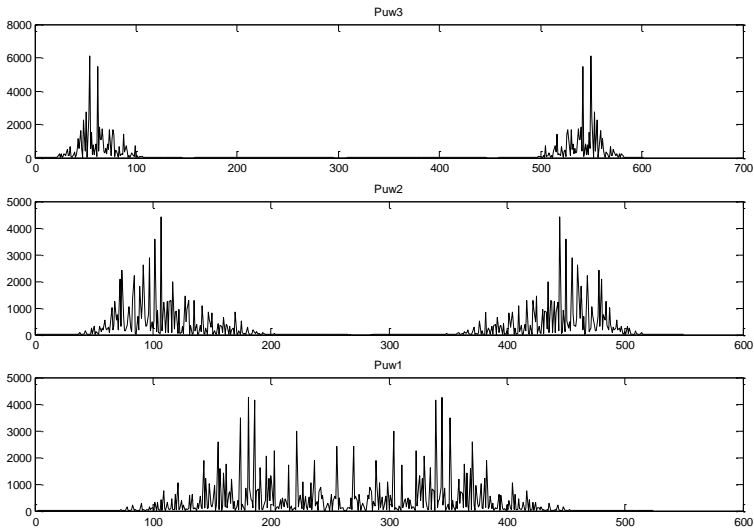


Рис. 3.4. Энергетический спектр компонентов ScD1, ScD2, ScD3

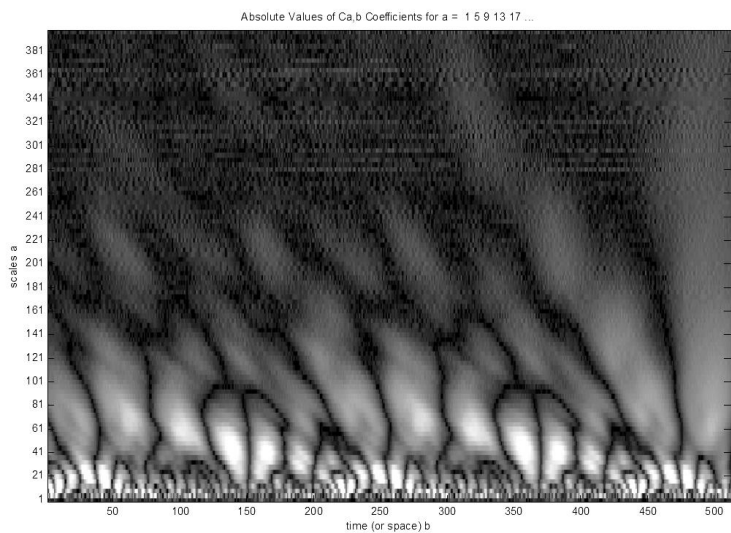


Рис. 3.5. Вейвлетограмма сигнала

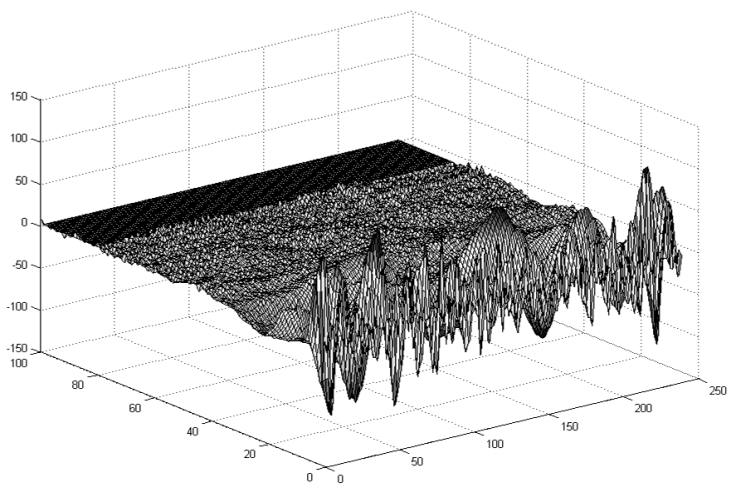


Рис. 3.6. График матрицы коэффициентов вейвлет-разложения

Из анализа результатов, представленных на рис. 3.3 – 3.6, следует, что самая высокочастотная компонента сосредоточила в себе основные особенности сигнала, связанные с особенностями его как динамической системы (его внутреннюю динамику). В низкочастотных компонентах проявляются признаки периодических составляющих сигнала.

3.3.2. Фрактальный анализ (внутренняя динамика сигнала)

Как видно на рис. 3.3 и рис. 3.4, поведение компонент сигналов имеет характер хаотичности. Мы отмечали, что по имеющимся одномерным данным можно построить динамическую систему в многомерном фазовом пространстве, для которой наблюдаемая переменная будет одной из координат. Метод построения был предложен Такенсом в 1981 г. Для оценки хаотичности сигнала (и, соответственно, особенности профилограммы) в настоящее время успешно используются такие характеристики как фрактальная размерность, показатель Херста, корреляционная размерность и размерность фазового пространства. Размерность фазового пространства есть минимальная размерность пространства, в которое можно вложить ряд значений сигнала в виде динамической системы – странного аттрактора. Наша задача состоит в том, чтобы идентифицировать эту существенно нелинейную динамическую систему. Здесь уровень идентификации отличается от уровня идентификации линейных систем, как это было использовано в разделе «внешняя динамика». Для анализа были выбраны:

- А) Сигнал 111;
- В) Компонента ScD1;
- С) Компонента ScD2.

Приведем некоторые результаты расчета:

```
FRACTAN 4.4 Hurst Exponent
Data      = D:\mydoc\tribal\K1)a111plus.txt
Left      = 0
Right     = 511
Hurst     = 0.213273
HDelta    = 0.110530
HAlpha    = 4.237848
```

```
FRACTAN 4.4 Hurst Exponent
Data      = D:\mydoc\tribal\K1(ScD1).txt
Left      = 0
Right     = 523
Hurst     = 0.091166
HDelta    = 0.069670
```

HAlpha = 2.185308

FRACTAN 4.4 Hurst Exponent

Data = D:\mydoc\tribal\K1(ScD2).txt

Left = 0

Right = 549

Hurst = 0.048417

HDelta = 0.065326

HAlpha = 5.092101

В таблице 3.1 представлены сводные данные.

Таблица 3.1. Сводные данные.

Данные	Максимальная размерность ФП MaxDim	Показатель Херста H	Фрактальная размерность D ₂
A	9	0.213	1.787
B	3	0.091	1.909
C	3	0.048	1.952

Эти расчеты показывают, что в максимальную размерность фазового пространства (MaxDim = 3) можно вложить ряд значений сигнала в виде динамической системы «Странный аттрактор Лоренца».

3.3.3. Управляющий параметр аттрактора Лоренца

Аттрактор Лоренца был предметом исследования многих ученых. При этом в качестве управляющего параметра выбирался параметр r :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.11)$$

Введем ряд обозначений с учетом опыта использования физических параметров линейных систем:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma_1 x + r_1^2 y, \\ \dot{y} = r_2^2 x - \sigma_2 y - xz, \\ \dot{z} = -\sigma_3 z + xy. \end{cases} \quad (3.12)$$

Примем $r_1 = r_2 = r > 0$ – частотные параметры; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$, $\sigma_3 = b > 0$ – параметры демпфирования.

По аналогии с линейными системами введем управляющий параметр:

$$\lambda = 2r^2 - (2\sigma + b)^2 \quad (3.13)$$

Каждая из групп параметров $-2r^2$ и $(2\sigma + b)^2$ – меняются по конкурирующему сценарию так, чтобы была обеспечена самоорганизация процесса. В частности, эти изменения для обоих слагаемых могут быть сигмоидного типа (рис. 3.7).

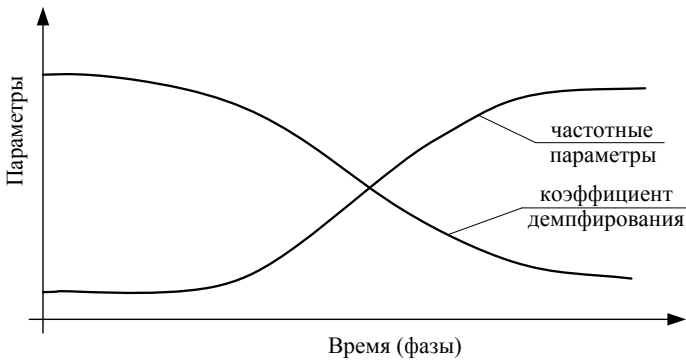


Рис. 3.7. Сигмоидные кривые конкурирующих параметров

Эти соображения выходят за рамки данной монографии и поэтому мы только их отметим. Рассмотрим некоторые предельные случаи значений управляющего параметра (УП).

- УП:

$$\begin{aligned} 2\sigma + b = 0 &\Rightarrow 2\sigma = -b; \\ \lambda = 2r^2 &> 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Система (3.12) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{b}{2}x + r^2y, \\ \dot{y} = r^2x + \frac{b}{2}y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.15)$$

Имеет смысл рассматривать только случаи положительных значений коэффициентов демпфирования и, значит, вместо (3.15) запишем

$$\begin{cases} \dot{x} = r^2y, \\ \dot{y} = r^2x - xz, \\ \dot{z} = xy, \end{cases} \quad (3.16)$$

что дает в линейном приближении на плоскости xOy интегральных кривых гиперболу

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad (3.17)$$

- УП2:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad &\Rightarrow 2r^2 = (2\sigma + b)^2; \\ [r\sqrt{2} - (2\sigma + b)][r\sqrt{2} + (2\sigma + b)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

- УП2-1:

$$\begin{aligned} r\sqrt{2} &= 2\sigma + b; \\ b &= r\sqrt{2} - 2\sigma \end{aligned} \quad (3.19)$$

Система (3.12) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + r^2y, \\ \dot{y} = r^2x - \sigma y - xz, \\ \dot{z} = -(r\sqrt{2} - 2\sigma)z + xy. \end{cases} \quad (3.20)$$

- УП2-2:

$$\begin{aligned} r\sqrt{2} &= -2\sigma - b; \\ b &= -r\sqrt{2} - 2\sigma \end{aligned} \quad (3.21)$$

Система (3.12) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + r^2 y, \\ \dot{y} = r^2 x - \sigma y - xz, \\ \dot{z} = (r\sqrt{2} - 2\sigma)z + xy. \end{cases} \quad (3.22)$$

• УПЗ:

$$\lambda < 0, \quad \Rightarrow 2r^2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda = -(2\sigma + b)^2; \quad (3.23)$$

Система (3.12) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x, \\ \dot{y} = -\sigma y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.24)$$

В линейном приближении здесь реализуется устойчивый трехмерный узел.

Результаты расчетов представлены на рисунках:

- Рис. 3.8 – результаты расчета классической системы (3.11) при значениях параметров:
 $r_1 = 3,2; r_2 = 5,2; \sigma_1 = 10 \text{ H}; \sigma_2 = 1; \sigma_3 = 8/3; x_0 = 0; y_0 = 0,01; z_0 = 0$
- Рис. 3.9 – результаты расчета системы (3.20) при значениях параметров:
 $r_1 = r_2 = 10; \sigma_1 = \sigma_2 = 4/3$
- Рис. 3.10 – результаты расчета системы (3.21) при тех же значениях параметров, что у системы (3.20).

Данные результаты показывают, что внутренняя динамика процесса чрезвычайно сложна. Тем не менее, данный подход позволяет ввести в обращение при оценке качества поверхностей фрактальные параметры. Более того, модели внутренней динамики дают возможность исследовать эволюцию структуры поверхностей.

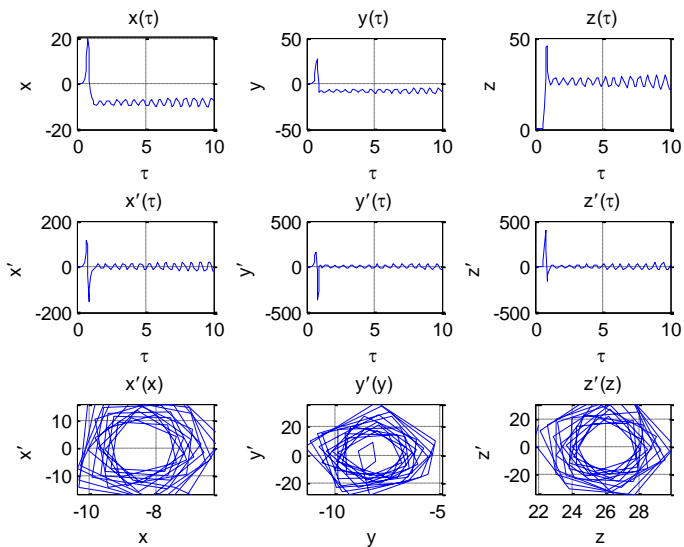


Рис. 3.8. Результаты расчета классической системы (3.11)

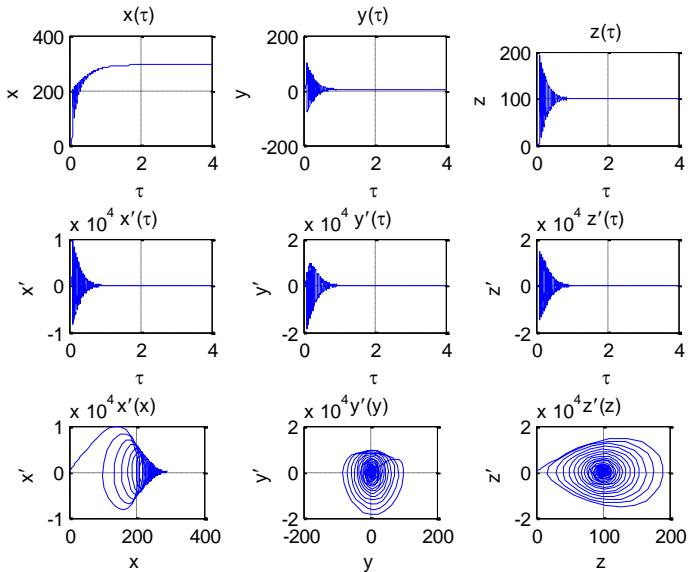


Рис. 3.9. Результаты расчета системы (3.20)

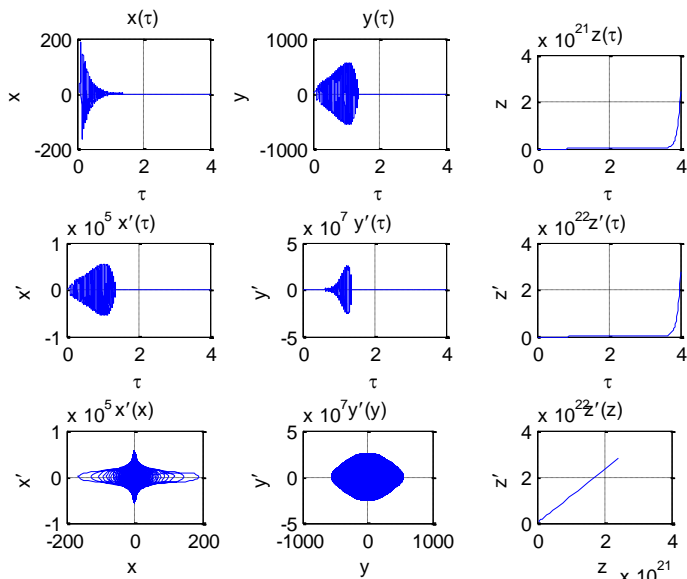


Рис. 3.10. Результаты расчета системы (3.21)

ГЛАВА 4.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЭВОЛЮЦИИ ПАРАМЕТРОВ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

4.1. Экспериментальное определение параметров фрикционного взаимодействия на примере сплава Л56

Исследования проводились на трибометрической установке «Трибал-Т» [34]. Возвратно-поступательное движение исследуемых образцов осуществлялось с постоянной скоростью при фиксированной величине нормального нагружения в режиме сдвига фаз кривых перемещения (в данном режиме осуществляется движение с трением скольжения). В качестве исследуемого материала был использован сплав Л56, предварительно обработанный по 9 классу точности – начальная мера

шероховатости исследуемой поверхности составила $R_a = 0.22$ мкм. Для проведения испытаний были изготовлены образцы для трехточечного контакта (рис. 4.1).

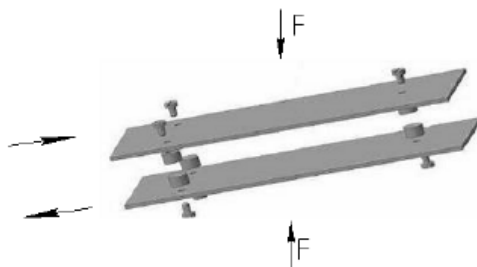


Рис.4.1. Модель трехточечного контакта

Эксперименты проводились таким образом, чтобы после каждого зафиксированного промежутка времени у исследуемых образцов (контрпар) снимались профилограммы: сначала устанавливался первый набор исследуемых образцов, в течение определенного времени длилось испытание, после проведения опыта очередной набор образцов отправлялся для снятия профилограмм, а в «Трибал-Т» устанавливался следующий набор пар трения для проведения испытания при иной длительности опыта. Всего было проведено 5 испытаний на трение с различными временными промежутками: 30, 40, 60, 90 и 120 минут. В каждой серии испытании системой «Трибал-Т» также фиксировались входные $u(t)$ и выходные $y(t)$ данные для последующей идентификации динамической системы «узел трения».

Кроме этого проводилось исследование шероховатости поверхности. С помощью профилографа записывался профиль поверхностей трения для каждого образца. Снятие профилограмм для каждого из них осуществлялось в трех направлениях: вдоль, поперек и под углом 45° относительно возвратно-поступательного движения, совершаемого образцами.

4.1.1. Параметры внешней динамики

По записям входного $u(t)$ и выходного сигналов $y(t)$, например, представленных на рис. 4.2, полученных при испытаниях образцов на установке «Трибал-Т», оценивались характеристики внешней динамики.

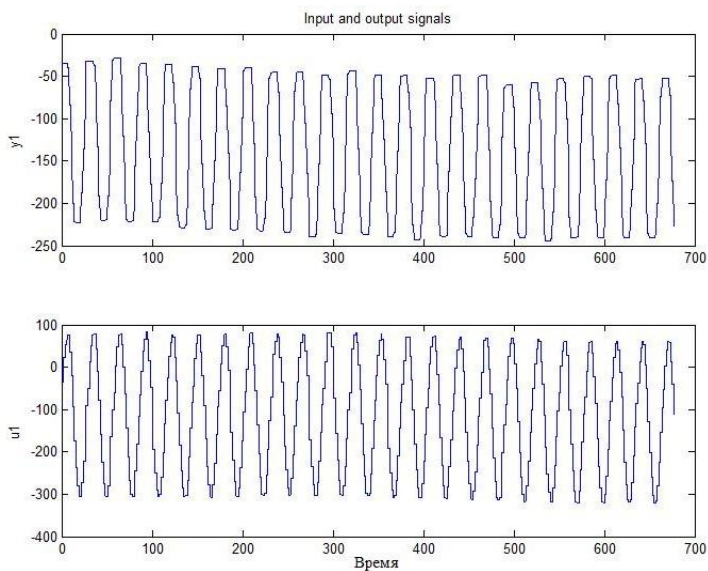


Рис.4.2. Входной (u) и выходной (y) сигналы, полученные с датчиков перемещений системы «Трибал-Г»

В результате переходных процессов были получены следующие передаточные функции:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \ 30 \text{ мин.} \quad & tf = \frac{0.6613s - 0.04964}{s^2 + 0.321s + 0.2142} \\
 2. \ 40 \text{ мин.} \quad & tf = \frac{-0.1005s - 0.04817}{s^2 + 0.465s + 0.1453} \\
 3. \ 60 \text{ мин.} \quad & tf = \frac{-0.009684s - 0.07076}{s^2 + 0.2409s + 0.1608} \\
 4. \ 90 \text{ мин.} \quad & tf = \frac{0.003091s - 0.07164}{s^2 + 0.2473s + 0.1608} \\
 5. \ 120 \text{ мин.} \quad & tf = \frac{-0.09828s - 0.015}{s^2 + 0.2533s + 0.2199}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

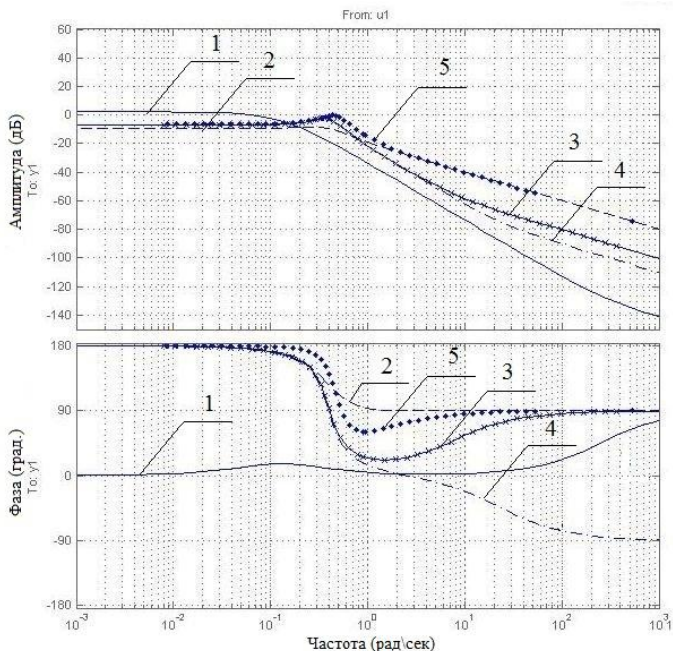


Рис. 4.3. Амплитудно-частотные характеристики

На рис. 4.3 представлены амплитудно-частотные характеристики процессов, полученные на заключительных фазах (30, 40, 60, 90, 120 минут) трибологических испытаний. В соответствии с задачами *внешней динамики* были получены компоненты n , ω , f векторной функции отклика $Y=Y(n, \omega, f)$; первая пара компонентов – это суть компоненты второй строки матрицы A – вектора коэффициентов в пространстве состояний (см. табл. 4.1). Третья компонента, названная динамическим коэффициентом трения, определяется с помощью АЧХ с использованием $L(\omega)=20 \lg A(\omega)$, где $A(\omega)$ – отношение амплитуд выход-вход. Именно это отношение на малых частотах АЧХ мы назвали динамическим коэффициентом трения.

На рис. 4.4 представлены графики изменения во времени коэффициентов демпфирования и частот собственных колебаний модельного уравнения. Видно, что в условиях эксперимента коэффициенты демпфирования и частоты собственных колебания представляют собой конкурирующую пару параметров. Они эволюционируют по сигмоидным закономерностям, а их разность (разность квадратов) позволила ввести в рассмотрение управляющий параметр. Сшивка динамических характеристик для отрицательных, положительных и нулевых значений управляющего параметра в работе [23] позволила обнаружить, что

динамическая система представляет собой фазовый переход второго рода, или бифуркацию Хопфа.

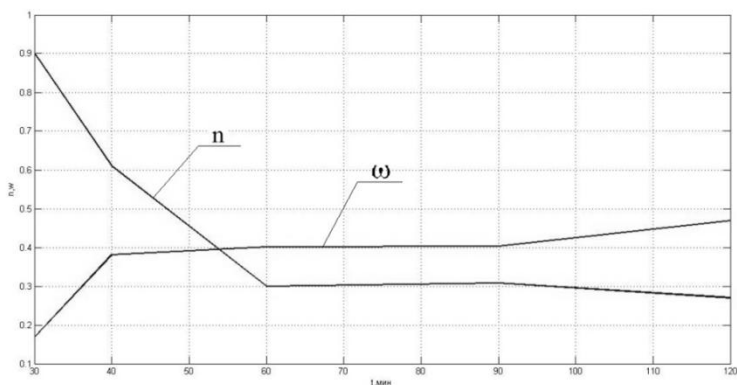


Рис. 4.4. Графики изменения во времени коэффициентов демпфирования n и частот собственных колебаний ω .

Для отрицательных значений управляющего параметра полученные закономерности характеризуют релаксационные колебания, а фазовые портреты представляют собой устойчивые предельные циклы, которые естественны для процесса автоколебаний при фрикционном взаимодействии твердых тел.

4.1.2. Параметры внутренней динамики

При обработке полученных профилограмм контрпар, например, таких, как представлено на рис. 4.5, были применены методы вейвлет-фрактального анализа с использованием пакета Matlab. Для обработки использовался многоуровневый вейвлет-анализ [21]. Сначала было произведено разложение сигнала профилограмм до уровня $N = 3$, в результате чего получены детализирующие коэффициенты. Далее, для нахождения частотных компонент сигнала проведено восстановление отдельно по каждому набору детализирующих коэффициентов.

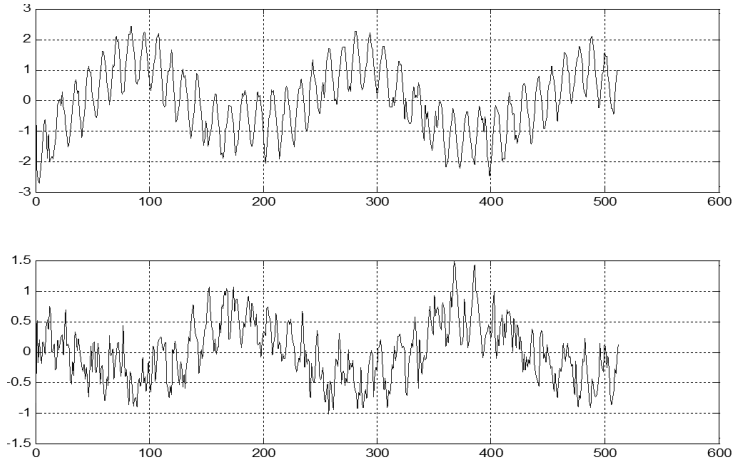


Рис. 4.5. Профилограммы поверхностей контрпар (90 мин)

Для каждой компоненты сигнала был проведен спектральный анализ и получены графики (рис. 4.6) спектральной плотности энергии и накопления энергии – кумуляты, предельные значения которых названо параметрами действия [24].

Частотные компоненты сигнала профилограмм имеют фрактальную размерность [23]. Для оценки хаотичности компонент (вейвлет-коэффициентов) использовался показатель Херста. В соответствие с задачами *внутренней динамики* были получены компоненты h , R_a , H векторной функции передачи действия $\mathcal{E}=\mathcal{E}(h, R_a, H)$;

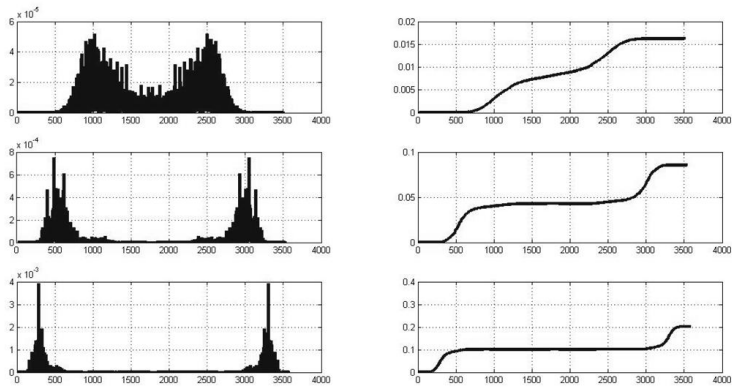


Рис. 4.6. Энергетические спектры и их кумуляты

На рисунках 4.7 и 4.8 представлены графики эволюции мер шероховатости R_a , параметров действия h и коэффициентов Херста H для разных уровней вейвлет коэффициентов.

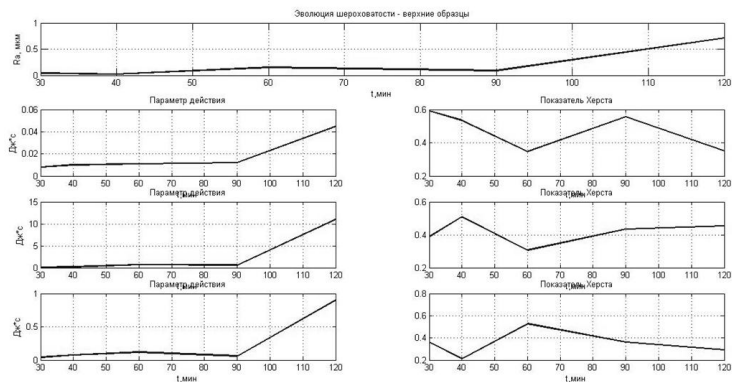


Рис. 4.7. Эволюция верхних образцов (продольный профиль)

Эти графики построены для продольных профилей (верхние и нижние образцы). Можно заметить колебательный характер изменения шероховатости, что может быть объяснено приработкой поверхностей. Также наблюдается колебательный характер изменения показателя Херста на всех частотах сигнала. Кроме этого можно заметить, что шероховатость коррелирует с параметрами действия на высоких частотах.

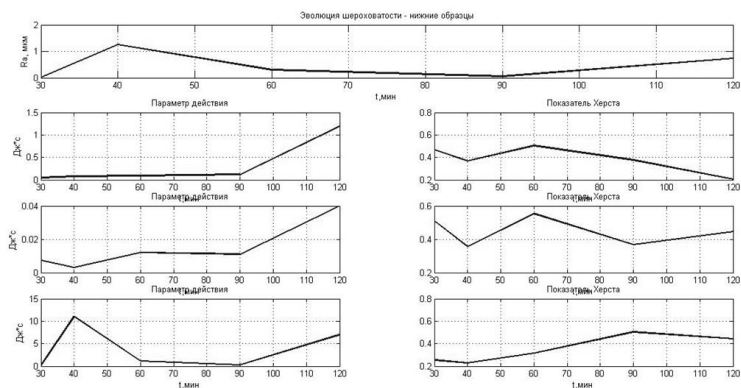


Рис. 4.8. Эволюция нижних образцов (продольный профиль)

4.2. Оценка параметров фрикционного взаимодействия для различных трибопар

В качестве исследуемых образцов были выбраны три пары трения: сталь марки ХВГ – оптическое стекло, алюминий – алюминий, оптическое стекло – оптическое стекло.

На первом этапе исследований динамических характеристик трибологических объектов проводились серии экспериментов, в ходе которых были получены сигналы характеризующие абсолютные перемещения нижнего (входной сигнал) и верхнего (выходной сигнал) образцов.

Затем, с помощью пакета прикладных программ MATLAB была получена дискретная модель в пространстве состояний и передаточная функция, которые описывают поведение динамической системы. В таблице 4.1 приведены параметры моделей для начального момента времени.

Таблица 4.1. Параметры дискретной модели в пространстве состояний

Трибопара	Параметры модели
сталь марки ХВГ – оптическое стекло	<p><i>Discrete-time identified state-space model:</i></p> $x(t + Ts) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + K \cdot e(t)$ $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) + e(t)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.19 & 0.47 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.32 \\ 0.06 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 0], D = [0], K = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.56 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p><i>A</i> – вектор коэффициентов в пространстве состояний; <i>B</i> – вектор коэффициентов в матрице управления; <i>C</i> – вектор коэффициентов смещения; <i>D</i> – вектор коэффициентов обратной связи; <i>K</i> – матрица шумов; <i>x(0)</i> – начальное условие.</p>

алюминий – алюминий	<p><i>Discrete-time identified state-space model:</i></p> $x(t + Ts) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + K \cdot e(t)$ $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) + e(t)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.57 & 1.44 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.42 \\ -0.26 \end{bmatrix}$ $C = [1 \quad 0], D = [0], K = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.43 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
оптическое стекло – оптическое стекло	<p><i>Discrete-time identified state-space model:</i></p> $x(t + Ts) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + K \cdot e(t)$ $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) + e(t)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.05 & 0.82 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.37 \\ 0.01 \end{bmatrix}$ $C = [1 \quad 0], D = [0], K = \begin{bmatrix} 0.79 \\ 0.90 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Используя вектор коэффициентов в пространстве состояния, можно определить коэффициент демпфирования и частоту собственных колебаний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\eta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

На следующем этапе исследований была построена диаграмма Боде (логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика) для наглядного графического определения отношений амплитуд входного и выходного сигналов, получаемых при циклическом перемещении, соответственно, нижнего и верхнего образцов трибологической пары. Полученные результаты представлены на рис. 4.9.

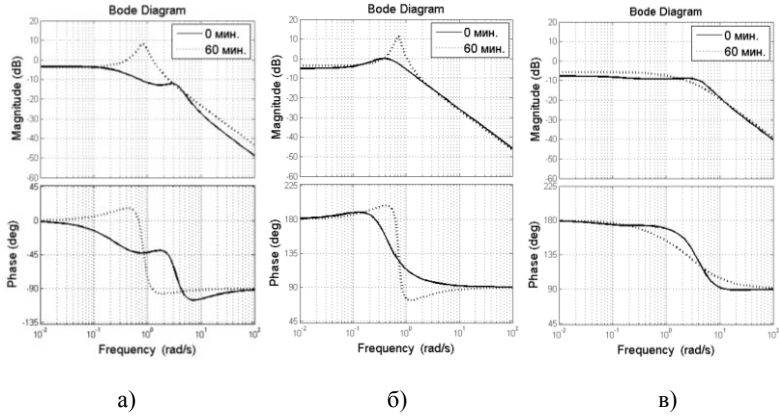


Рис. 4.9. Диаграммы Бode в начальный (0 мин.) и конечный (60 мин.) моменты времени: а) сталь марки ХВГ – оптическое стекло, б) алюминий – алюминий, в) оптическое стекло – оптическое стекло

По графику АЧХ в логарифмическом масштабе можно вычислить отношение выходной характеристики к входной, что и будет являться коэффициентом трения:

$$A = 20 \cdot \lg \left(\frac{A_{\text{ВЫХОД}}}{A_{\text{ВХОД}}} \right) \quad (4.3)$$

где A – значение амплитуды графика логарифмической амплитудно-частотной характеристики.

Отсюда можно определить динамический коэффициент трения:

$$k_d = \frac{A_{\text{ВЫХОД}}}{A_{\text{ВХОД}}} = 10^{\frac{A}{20}} \quad (4.4)$$

Таким образом, полученные динамические характеристики для каждой трибологической пары были объединены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Характеристики трибологических пар в начальный и конечный моменты времени проведения эксперимента

Пара трения	Коэффициент демпфирования, n		Частота собственных колебаний, ω [1/с]		Динамический коэффициент трения, k_d	
	0 мин.	60 мин.	0 мин.	60 мин.	0 мин.	60 мин.
ХВГ – оптическое стекло	0.23	0.58	0.43	0.84	0.68	0.66
Al – Al	0.72	0.85	0.75	0.89	0.56	0.46
оптическое стекло – оптическое стекло	0.27	0.41	0.17	0.23	0.41	0.52

ГЛАВА 5.

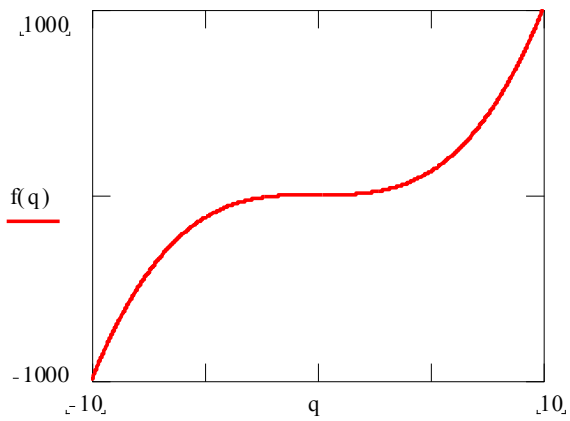
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРЕНИЯ

5.1. Моделирование трения

5.1.1. Степенное сопротивление

$$b = 1; \quad n = 3$$

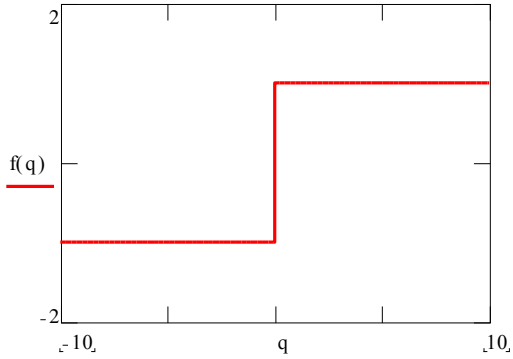
$$f(q) = b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q \quad (5.1)$$



5.1.2. Кулоново трение

$$b = 1; \quad n = 0$$

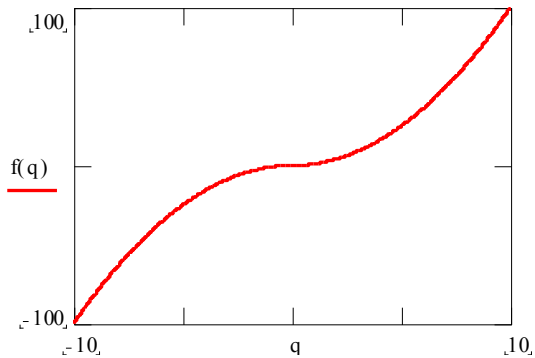
$$f(q) = b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q \quad (5.2)$$



5.1.3. Квадратичное сопротивление

$$b = 1; \quad n = 2$$

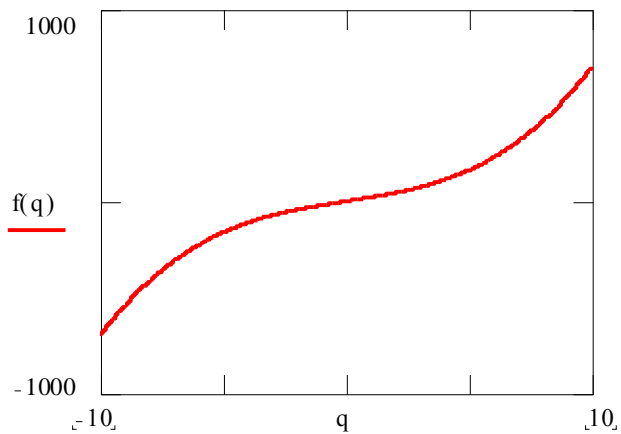
$$f(q) = b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q \quad (5.3)$$



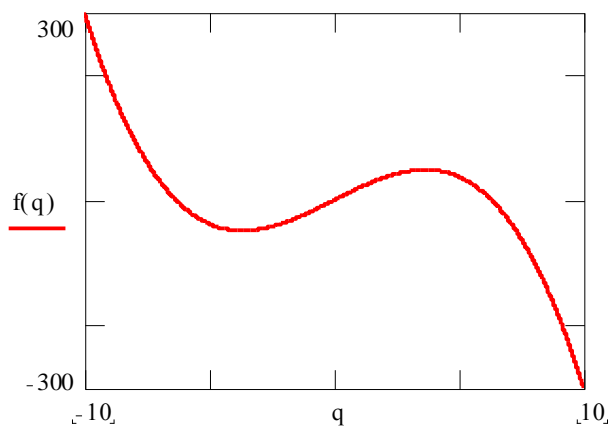
5.1.4. Линейное и кубическое сопротивление

$c = 2; d = 0.5$

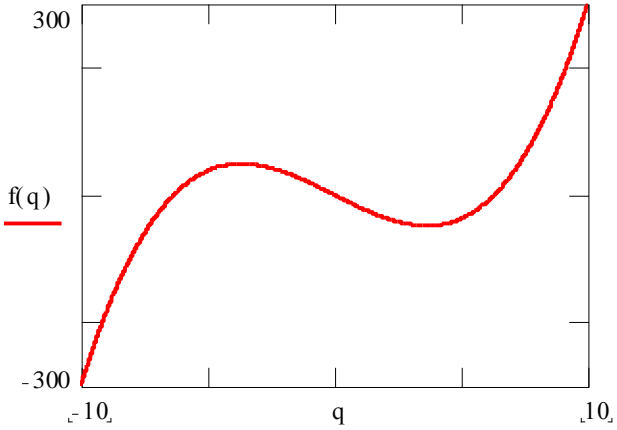
$$f(q) = c \cdot q + d \cdot q^3 \quad (5.4)$$



$$f(q) = c \cdot q - d \cdot q^3 \quad (5.5)$$



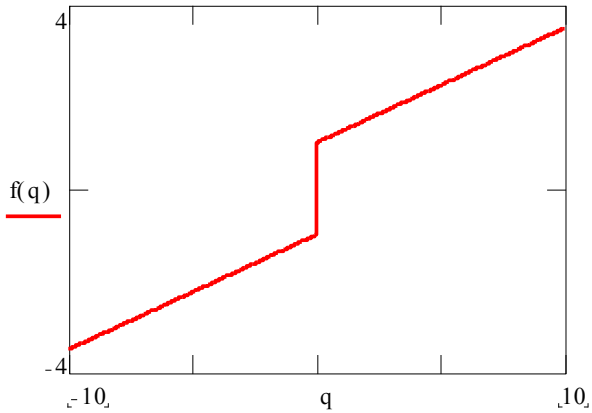
$$f(q) = -c \cdot q + d \cdot q^3 \quad (5.6)$$



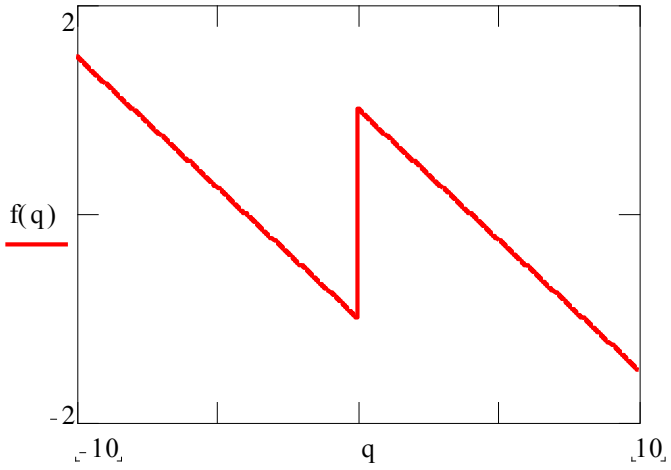
5.1.5. Линейное и кулоново трение

$c = 0.25; n = 0$

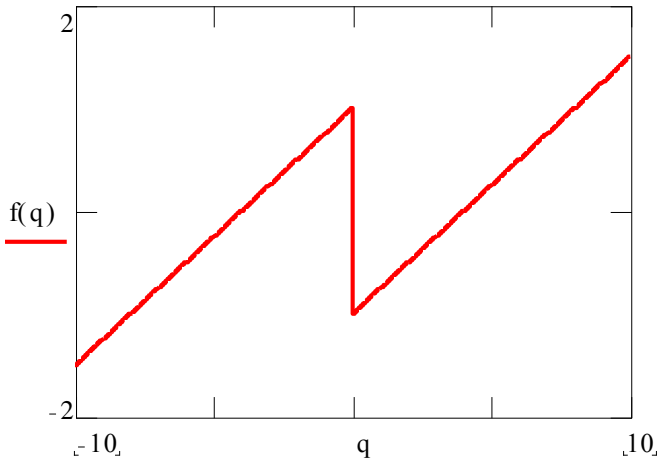
$$f(q) = [b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q] + c \cdot q \quad (5.7)$$



$$f(q) = [b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q] - c \cdot q \quad (5.8)$$



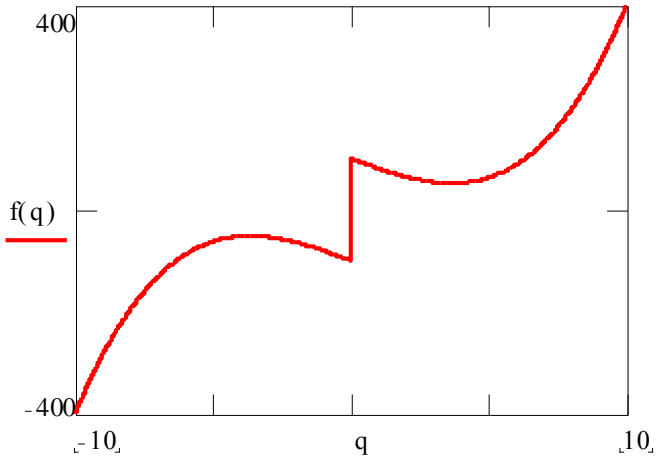
$$f(q) = -[b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q] + c \cdot q \quad (5.9)$$



5.1.6. Моделирование сухого трения

$$b = 100; c = 20; n = 0$$

$$f(q) = [b \cdot (|q|)^{n-1} \cdot q] - c \cdot q + d \cdot (q^3) \quad (5.10)$$



5.2. Диссипативные функции

В данном разделе используется терминология аналитической механики [6]:

Q_i – обобщенные силы;

q_i – обобщенные координаты;

\dot{q}_i – обобщенные скорости;

T – кинетическая энергия системы.

Известно, что для стационарных связей виртуальная мощность:

$$N = \frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i \quad (5.11)$$

n – число степеней свободы механической системы.

Обозначим далее:

f – сила трения;

v – скорость движения системы.

Переход к обобщенным силам осуществляется по формулам:

$$Q_i = \sum_{\gamma=1}^N f_{\gamma} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.12)$$

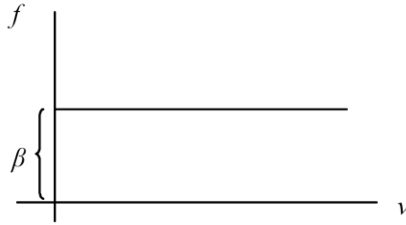
где $\gamma = 1 \dots N$ – число элементов (точек) механической системы.
Кроме того:

$$\frac{\partial \bar{r}_{\gamma}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.13)$$

где \bar{r}_{γ} - радиус-вектор точки.

Далее рассмотрим три случая задания f .

5.2.1. Сухое трение



Здесь $f_{\gamma} = -\beta_{\gamma}$. Вычислим обобщенную силу (4.16):

$$Q_i = \sum f_{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i} = -\sum \beta_{\gamma} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum \beta_{\gamma} v_{\gamma}$$

$$\bar{v}_{\gamma} = \sum \frac{\partial \bar{r}_{\gamma}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\gamma=1}^N \beta_{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i} \dot{q}_i =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \sum_{\gamma=1}^N \beta_{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \beta_i \dot{q}_i$$

$$\beta_i = \sum \beta_{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i}$$

Обозначим: $\Phi_1 = \sum \beta_i \dot{q}_i$ – это диссипативная функция. Величина Φ_1 выражает скорость рассеивания энергии вследствие трения.

Обобщенная сила вычисляется так:

$$Q_i = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.14)$$

Перепишем производную от кинетической энергии с учетом полученных результатов:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \Phi_1 \quad (5.15)$$

так как в рассматриваемом случае Φ_1 является однородным многочленом первой степени от обобщенных скоростей (использована теорема Эйлера об однородных функциях).

Итак, получено:

$$f_\gamma = -\beta_\gamma - \text{кулоново трение (сухое трение),}$$

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \beta_i \dot{q}_i$$

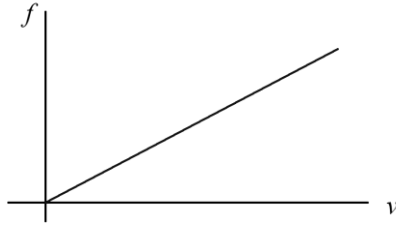
$$Q_i = -\beta_i$$

$$\beta_i = \sum \beta_\gamma \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i}$$

$$\Phi_1 = \sum \beta_i \dot{q}_i$$

$$\frac{dT}{dt} = N = -\Phi_1$$

5.2.2. Вязкое трение



$$f_\gamma = -\beta_\gamma v_\gamma$$

$$Q_i = \sum_{\gamma=1}^N f_\gamma \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} = -\sum_{\gamma=1}^N \beta_\gamma v_\gamma \frac{\partial v_\gamma}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\gamma=1}^N \frac{1}{2} \beta_\gamma v_\gamma^2$$

$$v_\gamma^2 = \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_i^n \sum_j^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\beta_{ij} = \sum_{\gamma=1}^N \frac{1}{2} \beta_\gamma \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_j}$$

$$Q_i = -\sum \beta_{ij} \dot{q}_j$$

Обозначим: $\Phi_2 = \sum_i^n \sum_j^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ – это функция диссипации Рэлея (положительно определенная квадратичная форма).

С учетом обозначений:

$$Q_i = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.16)$$

Найдем скорость рассеивания энергии:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i = -\sum \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = -2\Phi_2 \quad (5.17)$$

где Φ_2 – однородный многочлен второй степени.

Окончательно запишем:

$f_\gamma = -\beta_\gamma v_\gamma$ – вязкое трение

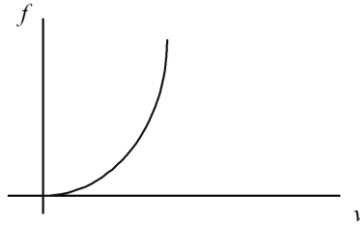
$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_i^n \sum_j^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_\gamma^N \beta_\gamma \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_j}$$

$$\Phi_2 = \sum_i^n \sum_j^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\frac{dT}{dt} = N = -2\Phi_2$$

5.2.3. Квадратичное сопротивление



$$f_\gamma = -\beta_\gamma v_\gamma^2$$

$$Q_i = \sum_{\gamma=1}^N f_\gamma \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} = -\sum_{\gamma=1}^N \beta_\gamma v_\gamma^2 \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} =$$

$$= -\sum_{\gamma=1}^N \beta_\gamma v_\gamma^2 \frac{\partial v_\gamma}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_\gamma^N \beta_\gamma \frac{1}{3} v_\gamma^3$$

$$v_\gamma^3 = \sum_i^n \sum_j^n \sum_s^n \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_j} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_s} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_\gamma^N \beta_\gamma \frac{1}{3} \sum_i^n \sum_j^n \sum_s^n \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_j} \frac{\partial r_\gamma}{\partial q_s} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_s =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_i^n \sum_j^n \sum_s^n \beta_{ijs} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$\beta_{ijs} = \frac{1}{3} \sum_{\gamma}^N \beta_{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_j} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_s}$$

$$Q_i = - \sum_j^n \sum_s^n \beta_{ijs} \dot{q}_j \dot{q}_s$$

Обозначим: $\Phi_2 = \sum_i^n \sum_j^n \sum_s^n \beta_{ijs} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_s$ – однородный многочлен третьей степени,

$$Q_i = - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{dT}{dt} = N = - \sum \frac{\partial \Phi_3}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

Окончательно:

$f_{\gamma} = -\beta_{\gamma} v_{\gamma}^2$ – квадратичное сопротивление,

$$Q_i = - \sum_j^n \sum_s^n \beta_{ijs} \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$\beta_{ijs} = \frac{1}{3} \sum_{\gamma}^N \beta_{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_i} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_j} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial q_s}$$

$$\Phi_3 = \sum_i^n \sum_j^n \sum_s^n \beta_{ijs} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$\frac{dT}{dt} = N = -3\Phi_3$$

5.3. Методы теории катастроф

5.3.1. Бифуркация Хопфа

Кроме бифуркаций состояния равновесия в нелинейных динамических системах при изменении параметра может происходить перестройка – из особой точки может возникнуть предельный цикл. Эту перестройку называют бифуркацией Хопфа. Для иллюстрации перестроек рассмотрим в полярной системе координат систему уравнений:

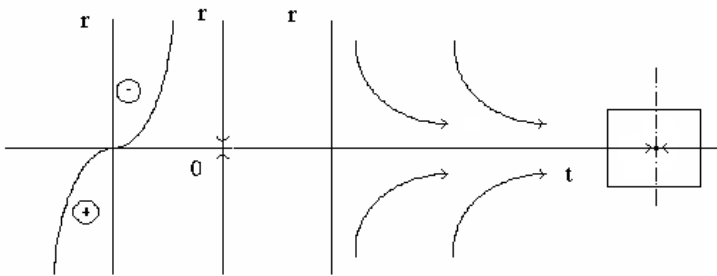
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r\lambda \pm r^3 \\ \frac{d\Theta}{dt} = \omega' \end{cases} \quad (5.18)$$

В этой системе задан закон изменения во времени радиальных координат.
Рассмотрим вариант:

$$\frac{dr}{dt} = r\lambda - r^3 \quad (5.19)$$

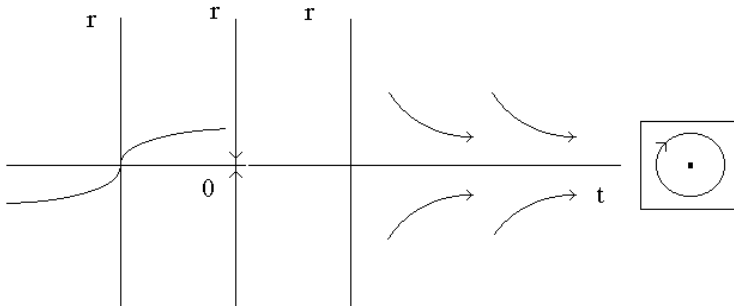
Иследуем случаи: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

1. $\lambda < 0$ $\Delta = -3\lambda$ ($a < 0$) $\Delta > 0$

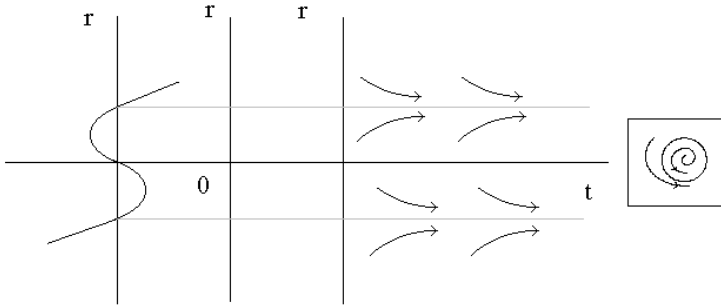


Здесь $r=0$ – точка притяжения.

2. $\lambda = 0$ $\Delta = 0$ ($a = -1 < 0$)



3. $\lambda > 0 \quad \Delta < 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{r}$



А теперь объединим эти три рисунка:

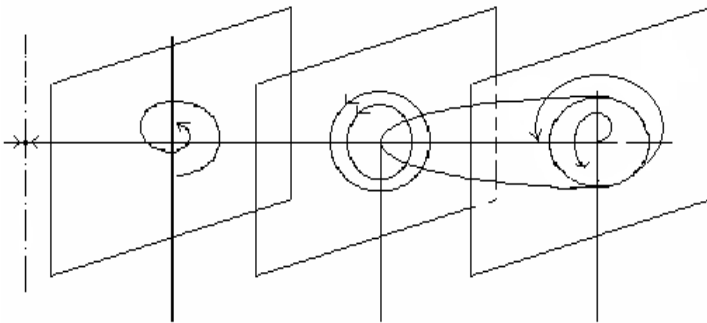


Рис. 5.1. Бифуркация Хопфа

Это и есть бифуркация Хопфа (суперкритическая бифуркация рождена устойчивым предельным циклом с радиусом $r = \sqrt{\lambda}$) – это динамически устойчивая бифуркация аналогична статической бифуркации (рис. 5.2).

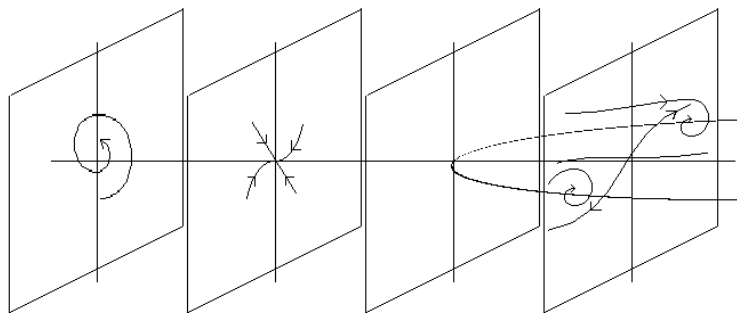


Рис. 5.2. Статическая бифуркация

Отметим, что для статических бифуркаций *фокус всегда переходит в узел* в окрестности бифуркации.

5.3.2. Синтез нелинейной силы трения

При исследовании динамики трибологического взаимодействия в реальном режиме времени было установлено [49], что разрушение поверхности начинается в момент прохождения динамической системой точки бифуркации. В процессе испытаний систематически проводились оценки динамических моделей, соответствующих процессу трения; на каждом из этапов идентифицировались две системные характеристики: импульсная переходная и единичная переходная функции. На рис. 5.3 в строке «переходные процессы фаз» представлены характерные единичные переходные функции, которые идентифицированы моделями в пространстве состояний. Во второй строке рисунка представлены соответствующие модели. Отметим, что каждой из фаз соответствуют свои значения коэффициентов демпфирования, собственных частот колебаний и качества поверхности.

На рис. 5.4а показаны зависимости коэффициентов демпфирования n (кривая 1) и частот собственных колебаний k (кривая 2) – параметров сопротивления от реализации фазы процесса.

По завершении каждой из фаз в базовых областях поверхности трибопар снимались профилограммы с целью определения качества поверхности. Для этого использовался ППП Wavelet (Matlab).

Анализ экспериментальных данных позволил следующим образом объяснить «физику фаз» – третья строка (рис. 5.3). В начальной фазе в контакт включены наружные поверхностные слои, состоящие из загрязнений, адсорбированных газов и окислов.

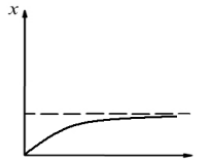
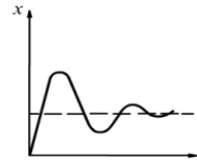
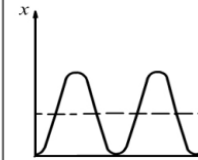
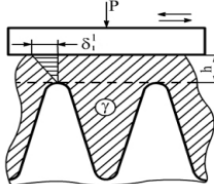
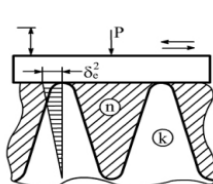
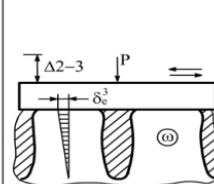



Переходные процессы фаз	 Начальная фаза (1)	 Промежуточная фаза (2)	 Заключительная фаза (3)
Модели фаз	$\dot{x} + \gamma x = g(t)$	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = g(t)$	$\ddot{x} + \omega^2x = g(t)$
Физика фаз			
Особые точки фаз	 Устойчивый узел	 Устойчивый фокус	 Центр
Эволюция матриц линейных систем	$\begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$

Рис. 5.3. Эволюция динамической системы

Здесь трибологическая характеристика определяется в основном коэффициентом демпфирования слоя γ (заштрихованная область), а сам слой имеет толщину h и, кроме того, его продукты заполняют впадины между высотами профиля поверхности, упругость материала профиля в этой фазе играет минимальную роль. При переходе ко второй фазе, когда от наружных поверхностных слоев осталась функционировать только её часть между впадинами, включается в сопротивление упругая составляющая материала профиля поверхности (собственная частота колебаний k), а вязкое сопротивление характеризуется коэффициентом демпфирования $n < \gamma$. Наконец, в заключительной фазе профили поверхности становятся деформированными с упрочнением, а остатки поверхностного слоя не оказывают демпфирующего действия, и все

сопротивление определится упругой составляющей упрочненного материала профиля поверхности $\omega > k$.

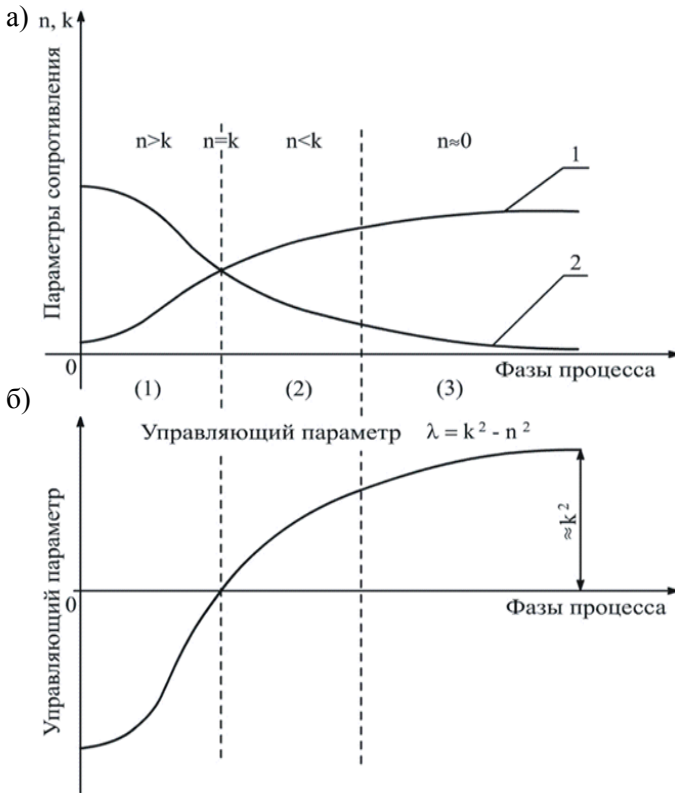


Рис. 5.4. Изменение коэффициентов демпфирования и собственных частот

Каждой из фаз сопоставляется определенная динамическая система, которая характеризуется особыми точками (предпоследняя строка рис. 5.3); здесь же (последняя строка рис. 5.3) представлена эволюция матриц динамических систем.

Введем естественный параметр $\lambda = n^2 - k^2$ (рис. 5.4б). Сопоставим значения параметра с особыми точками фаз: при $\lambda < 0$ можно обнаружить точку притяжения (в линейных системах управления – это апериодическое звено); далее, на границе 1-ой и 2-ой фаз $n = k$ – это точка бифуркации Хопфа; затем следует устойчивый фокус – при $\lambda > 0$ (в линейных системах

управления – это колебательное звено); наконец, по завершении 3-ей фазы процесса наблюдается центр (консервативное звено). Были рассчитаны статистические характеристики. В рассматриваемом случае первый момент (среднее значение) равен нулю. Второй момент зависит от значения управляющего параметра:

- для $\lambda < 0$ $\langle r^2 \rangle = |\lambda| = n$
- для $\lambda = 0$ $\langle r^2 \rangle = 0.338\sqrt{4D}$
- для $\lambda > 0$ $\langle r^2 \rangle = D/2\lambda = D/2k$

где D – коэффициент диффузии.

Таким образом, при трении скольжения, обнаружен (зарегистрирован) фазовый переход 2 рода, или бифуркация Хопфа, после чего начинается процесс изнашивания. Рассчитан масштаб явления, позволяющий учитывать появление дополнительной степени свободы. В работах [49,48,22] показана также возможность оценивать вероятность перехода от процесса трения к процессу изнашивания.

Синтезирована сила трения:

$$F_H = \Omega[(x - y)^2 - \lambda](\dot{x} - \dot{y}), \quad (5.20)$$

где \dot{x} – нижняя платформа, \dot{y} – верхняя платформа, x – перемещение нижней платформы, y – перемещение верхней платформы, Ω – коэффициент пропорциональности, λ – управляющий параметр.

Модель трибосистемы представлена на рис. 5.5.

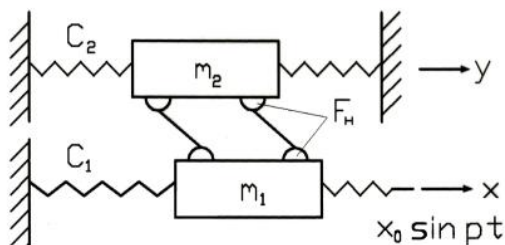


Рис.5.5. Расчетная схема системы

Построена система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -F_H + C_1(x_0 \sin pt - x) \\ m_2 \ddot{y} &= F_H + C_2 y \end{aligned} \quad (5.21)$$

где m_1 – приведённая масса нижней платформы, m_2 – приведённая масса верхней платформы, C_1 – упругая связь нижней платформы, C_2 – упругая связь верхней платформы, x_0 – амплитуда кинематического возбуждения, p – частота кинематического возбуждения.

5.4. Микроскопические модели трения

Рассмотрим три случая трения металлов.

5.4.1. Деформационная составляющая трения (за счет пропахивания)

Этот случай можно приближенно реализовать, если очень твердая шероховатая поверхность скользит по мягкому материалу. Тогда сопротивление трения будет в основном вызвано неровностями твердой поверхности, пропахивающими мягкий материал, и коэффициент трения можно оценить по силам, вызывающим пластическое течение мягкого материала. Нормальная нагрузка F_N уравнивается давлением текучести p_{yN} металла, действующим по реальной площади контакта A_r :

$$F_N = A_r p_{yN} \quad (5.22)$$

Сопротивление F_T тангенциальному движению уравнивается давлением текучести p_{yT} металла, действующим по площади сечения канавки A_g :

$$F_T = A_g p_{yT} \quad (5.23)$$

Полагая, что пластическое течение металла изотропно, т. е. $p_{yN} = p_{yT}$ получим «коэффициент трения»:

$$f = F_T / F_N = A_g / A_r \quad (5.24)$$

В этой модели значение f определяется отношением площадей A_g / A_r , зависящим от модели неровностей. Для конического индентора (рис. 5.6) из простых геометрических соображений найдем:

$$f = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \varphi \quad (5.25)$$

где φ – половина угла при вершине конического индентора. Нормальные неровности поверхности редко имеют наклон более $5 - 6^\circ$ (т. е. $\varphi = 85$ или 84°), поэтому $f \approx 0.05$. Однако это значение можно рассматривать только как нижний предел коэффициента деформационной составляющей трения, поскольку в приведенном выше рассуждении не учитывалось экспериментально наблюдаемое накопление материала в передней части канавки, которое возникает в большинстве случаев пластического течения при скольжении.

5.4.2. Адгезионная составляющая трения

Этот случай можно приближенно воспроизвести при контакте скольжения двух относительно чистых мягких материалов. Адгезионная связь в микроконтактах зависит от степени взаимопроникновения неровностей и от состава поверхностей. Если имеет место скольжение, то сила трения необходима для среза в наиболее слабых тангенциальных плоскостях площадей фактического контакта. Обозначая среднюю прочность на срез наиболее слабых плоскостей площадей контакта через τ_s (считается, что она имеет одинаковое значение для всех микроконтактов), полагая их полную площадь примерно равной реальной площади контакта и пренебрегая влиянием увеличения площади контакта, можно записать:

$$F_F = \tau_s A_r \quad (5.26)$$

Так как в условиях пластического контакта (показатель пластичности $\psi > 1$) реальная площадь контакта определяется выражением:

$$A_r = F_N / p_y \quad (5.27)$$

где p_y – предел текучести, то коэффициент трения будет равен

$$f = F_F / F_N = \tau_s / p_y \quad (5.28)$$

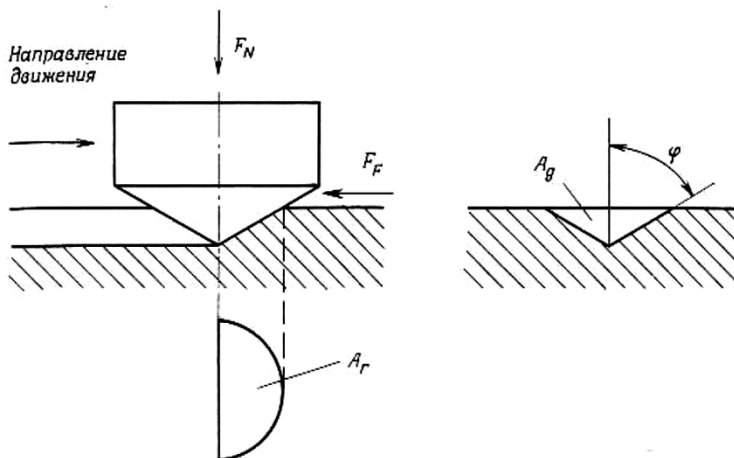


Рис. 5.6. Деформационная составляющая силы трения (за счет пропахивания) при скольжении твердого конического индентора по мягкому металлу

Прочность на срез τ_s поверхности раздела механически не упрочненных материалов примерно равна критическому касательному напряжению металла τ . Предел текучести p_y оказывается близким 5τ . Отсюда следует, что $f \approx 0.2$. Далее это значение можно рассматривать только как нижний предел коэффициента адгезионной составляющей трения (технически) чистых металлов, поскольку для реально чистых металлов измеренные коэффициенты трения достигают значений 40 – 100 вследствие увеличения площади контакта. С другой стороны, применяя граничную смазку, можно понизить коэффициент трения до значений $f \approx 0.02$ [37].

5.4.3. Бифуркационная составляющая трения скольжения

Данный случай соответствует процессу скольжения твердой шероховатой поверхности по твердой неотшлифованной поверхности.

Здесь в качестве отдельных элементов микроконтактов выступают стержни, длина которых, в частности, может быть принята равной мере шероховатости R_a . Как увидим далее, эта величина в явном виде не использована при вычислении коэффициента трения – она использована только на этапе старта.

Предлагаемый подход дополняет возможности механики деформируемого твердого тела, используемой в трибологии.

От критической силы к коэффициенту трения.

Смоделируем отдельный элемент контакта как стержень длиной $R = R_{a_0}$, заделанный одним концом и сжатый продольной силой, приложенной к свободному концу. Сама продольная сила пусть будет результатом воздействия жесткой плиты на конец стержня. Это упрощение позволяет приближенно смоделировать процесс скольжения конца стержня по поверхности жесткой плиты при потере устойчивости стержня. Это тем более справедливо при наличии реакции, перпендикулярной оси стержня в момент потери устойчивости, когда криволинейная форма равновесия сжатого стержня имеет вид:

$$w = \Delta \sin(\pi x/2R) \quad (5.29)$$

где Δ – это, с одной стороны, амплитуда изгибной моды, с другой стороны, возможное перемещение конца стержня по поверхности жесткой плиты. А сила трения скольжения может быть вычислена следующим образом:

$$P_f = C\Delta \quad (5.30)$$

где коэффициент жесткости стержня [25]:

$$C = 3EJ/R^3 \quad (5.31)$$

размерностью 1/м.

Известно, что критическая сила в рассматриваемом случае выражается формулой [28, 9, 32]:

$$P_c = EJ(\pi/2R)^2 \quad (5.32)$$

Отношение сил – это коэффициент трения скольжения – выражается в виде:

$$f = P_f/P_c = (\Delta/2R)(4/\pi^2) = 3(4/\pi^2)(\Delta/R) \quad (5.33)$$

где (Δ/R) – возможное относительное перемещение конца сжатого стержня при потере устойчивости.

Основной задачей является определение величины (Δ/R) .

Решение этой задачи можно получить на пути исследования закритического поведения стержня [9, 32]. Состояние стержня определяется минимумом потенциальной энергии деформируемой системы. А для того, чтобы описать состояние стержня при $P > P_c$, то есть после потери устойчивости, необходимо рассмотреть в соответствующей

потенциальной функции члены выше второй степени по переменной состояния Δ [9]:

$$V(\Delta; P) = 2R/4 (\pi/2R)^2 (P_c - P)\Delta^2 + 3P2R/2^6 (\pi/2R)^4 \Delta^4 + \dots \quad (5.34)$$

откуда после решения задачи на экстремум следует

$$(\Delta/2R)^2 = 8/3\pi^2 (1 - P_c/P) \quad (5.35)$$

Константу $8/3\pi^2 = const$ назовем коэффициентом относительного возможного перемещения. Качественное изменение $(\Delta/2R)^2$ формируется только значениями функции ветвления $\Psi = (1 - P_c/P)$, представленного на рис. 5.7 для двух точек ветвления (бифуркационных точек) $P_c=1$ и $P_c=10$.

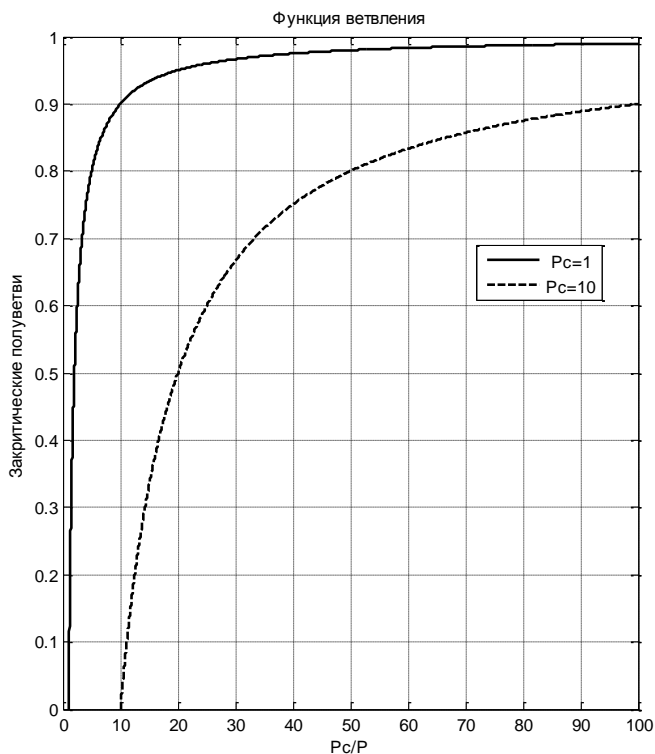


Рис. 5.7. Графики функции ветвления для двух бифуркационных точек

Видно, что предельным значением является постоянная величина, равная единице. Здесь для меньших значений критических сил характерен скачкообразный переход к значению Ψ , близкому к единице.

Оценим теперь коэффициент трения с учетом того, что $(\Delta/2R)^2 = 8/3\pi^2$ – постоянная величина (принято $\Psi = 1$):

$$f = P_f/P_c = (\Delta/2R)(4/\pi^2) \approx 0.21 \quad (5.36)$$

Так как $0 \leq \Psi < 1$, то и значения бифуркационного коэффициента трения изменяются в пределах $0 < f < 0.21$.

Функция чувствительности.

В целях уточнения значения коэффициента трения введем потенциальную функцию с учетом несовершенств микроконтакта [9]:

$$V = \varepsilon s + K_1(P_c - P_s)s^2 + K_2P_s s^4 \quad (5.37)$$

где линейный член определяет уровень начального дефекта, который моделирует отличный от нуля изгиб и позволяет оценивать чувствительность безопасной нагрузки к несовершенству. Здесь для учета несовершенств использовано другое обозначение переменной состояния: s вместо Δ ($0 < s < \Delta$). Собственно, нашей задачей является нахождение функции чувствительности как функции $(\Delta/2R)$. Здесь введены обозначения:

$$K_1 = 2R/4 (\pi/2R)^2 \quad K_2 = 2R3/2^6 (\pi/2R)^4 \quad (5.38)$$

Из равенства нулю градиента потенциальной функции получаем:

$$\varepsilon + k_1(P_c - P_s)s + k_2P_s s^3 = 0 \quad (5.39)$$

откуда следует:

$$P_s = k_1P_c/(k_1 - k_2s^2) + \varepsilon/[s(k_1 - k_2s^2)] \quad (5.40)$$

и с учетом обозначений

$$k_1 = \frac{2R}{2} \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2; \quad k_2 = \frac{2R3}{2^4} \left(\frac{\pi}{2R}\right)^4; \quad K_b = \frac{8}{3\pi^2} = const; \quad K^* = \frac{1}{K_b} \quad (5.41)$$

получаем функцию чувствительности:

$$K(s) = \frac{1}{[s(k_1 - k_2s^2)]} = \frac{2/\pi^2}{(s/2R)[1 - K^*(s/2R)^2]} \quad (5.42)$$

Кривая чувствительности представлена на рис. 5.8.

Критической точкой этой кривой является значение $(s/2R)^2 = 0.14$, откуда $s/(2R)=0.37$. Расчет коэффициента трения (см. формулу (5.34)) дает величину $f = 0.11$. Для сравнения приведем значения деформационной составляющей коэффициента трения $f = 0.05$ и адгезионной составляющей $f = 0.2$ [37].

Аналогично моделируется контакт двух выступов, где целесообразнее перейти к жесткости спиральной пружины с размерностью нм [1]:

$$C_s = EJ\pi^2/4R \quad (5.43)$$

Следует отметить, что переход к неконсервативной постановке задачи приводит к восьмикратному увеличению критической силы [4, 26].

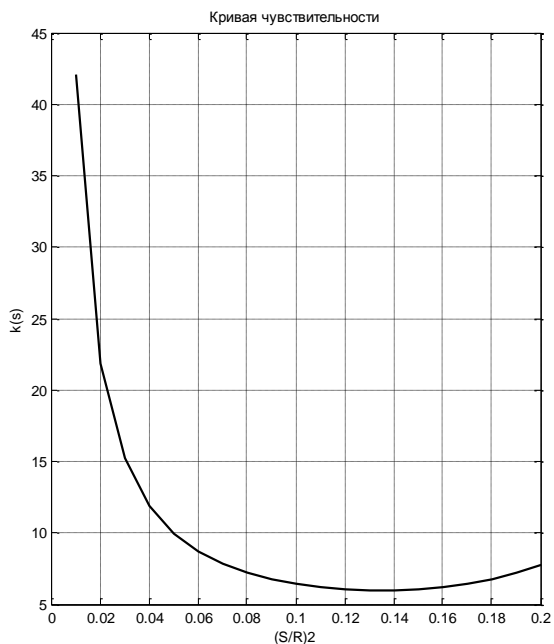


Рис. 5.8. Кривая чувствительности

ГЛАВА 6.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ MATLAB (SIMULINK/SIMMECHANICS)

6.1. Построение имитационной модели шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол, система плоская линза (библиотеки SimMechanics)

Для исследования кинематики и динамики различных механизмов в настоящее время активно применяют построение имитационных моделей с помощью библиотеки SimMechanics пакета Simulink среды MATLAB, предназначенной для моделирования пространственных движений твердотельных машин и механизмов на стадии инженерного проектирования [8, 18, 39, 42, 44, 45, 50]. Дифференциальные уравнения записаны в виде структурной модели SimMechanics с использованием блоков, то есть механическая система представляется связанной блочной диаграммой. Блоки пакета являются моделями механических устройств, положение которых в пространстве и относительно друг друга может меняться в соответствии с законами механики.

Модели SimMechanics изображают физическую структуру механизмов, геометрические и кинематические отношения их компонентов [12, 13].

Библиотеки Simulink/SimMechanics оперируют не с сигналами, а с механическими усилиями. Входы блоков задают «посадочные места» соответствующих механизмов. В силу третьего закона Ньютона, связи между «входами» и «выходами» нельзя рассматривать как однонаправленные. Эти связи служат для передачи силовых воздействий, которыми обмениваются части механизма или механизмы между собой. В связи с этим, для обозначения входов и выходов в SimMechanics не используются стрелки.

Моделирование механических систем и устройств осуществляется на основе законов кинематики, физики и механики. Основной целью моделирования механических систем с помощью библиотеки SimMechanics является выявление характера движения различных частей механизмов и машин (как в плоскости, так и в пространстве) относительно друг друга в той или иной системе координат. При этом учитываются связи между отдельными объектами и различные их движения в соответствии с теми или иными ограничениями [18].

Библиотека SimMechanics поддерживает средства анимации для демонстрации работы механизмов в динамике. Анимация строится на основе средств Microsoft Audio Video Interleave® (AVI), и ее видеофайлы имеют расширение «.avi». Поддерживаются и средства OpenGL, в

частности – при рендеринге (функциональной окраске) трехмерных объектов и поверхностей [14, 15].

Работа любого блока раздела Joints основана на векторном методе, который применяется в кинематическом исследовании механических систем. Он позволяет определить положения, скорости и ускорения звеньев механизма [25, 43].

Работа внутренних структур многих блоков SimMechanics основана на векторном методе кинематического анализа, а настройки блоков представляют интерфейсную визуализацию матрицы направляющих косинусов M_{ba} , отдельных звеньев системы.

Для отображения смещений систем координат относительно друг друга за счет длин звеньев L , матрицы направляющих косинусов M_{ba} умножаются на вектор-столбец линейных смещений R_{ba} . Указанные смещения не добавляют системе дополнительных степеней свободы, а лишь обозначают наличие физических длин звеньев.

Структура блока Body позволяет полностью определить физические параметры материальных тел: массу, тензор инерции, геометрический центр масс, длину, объем элемента, положение координатных систем и ориентацию их относительно друг друга. Связка блоков Machine Environment и Ground задает гравитационные силы, приложенные к центру координат, и их ориентацию в заданной системе отсчета.

Библиотека SimMechanics предназначена для решения задач управляемого перемещения объектов. В данный момент времени и для данного положения системы нам известно положение и ориентация объекта, которые задаются в неподвижной системе координат O_a координатами x_a, y_a, z_a и углами Эйлера $\phi_a, \Theta_a, \varphi_a$. Через данные параметры устанавливается матрица связи между неподвижной системой O_a и системой координат O_M , связанной с центром M рабочего тела механизма или любым из звеньев:

$$A_M = M_M(x_a, y_a, z_a, \phi_a, \Theta_a, \varphi_a) \quad (6.1)$$

С другой стороны, эту связь можно установить через локальные системы координат механизма:

$$A_M = M_{ab}(q_1)M_{bc}(q_2) \dots M_{(n-1)n}(q_n)M_{nM} = M_M(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (6.2)$$

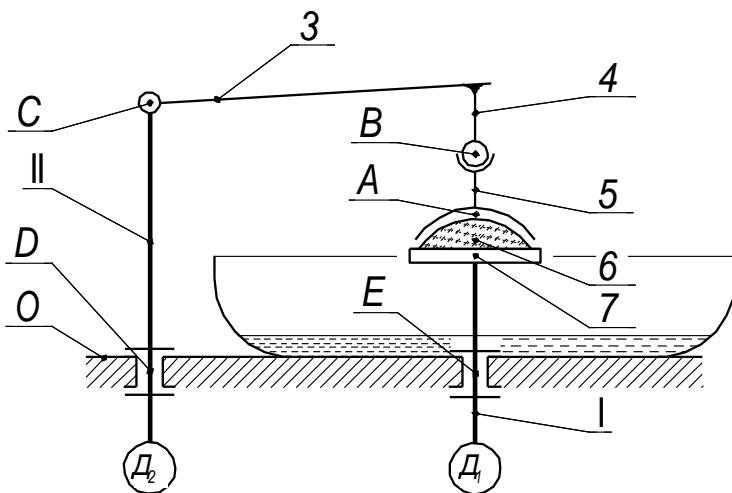
Приравняв матрицы (6.2), получим систему уравнений для определения функций положения механизма:

$$q_j = q_j(x_a, y_a, z_a, \phi_a, \Theta_a, \varphi_a), \quad (6.3)$$

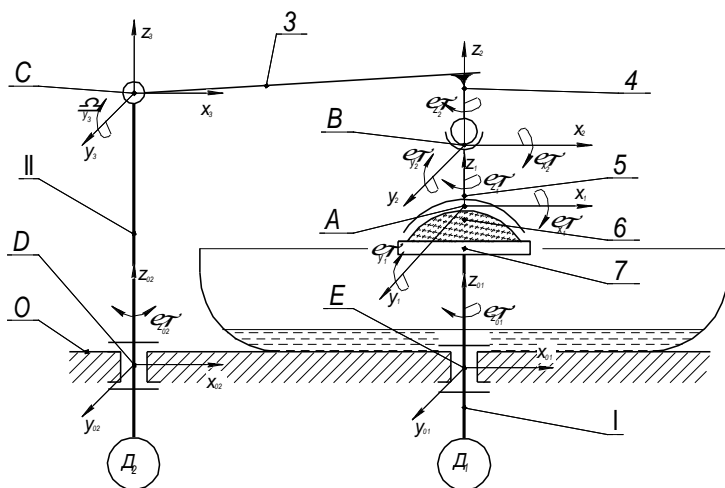
где $j = 1, \dots, n$.

В общем случае, из сравнения матриц получим 9 уравнений, но независимых уравнений будет n (по количеству обобщенных координат) [5].

Использование SimMechanics пакета Simulink среды MATLAB для моделирования твердотельных машин и механизмов позволяет изучить поведение исследуемых механических систем с учетом трения в кинематических парах. Одним из показательных примеров использования SimMechanics является построение и исследование имитационной модели шпиндельного блока станка для полирования оптических стекол. Основным рабочим органом в станке для обработки оптических стекол, является шпиндель с закрепленным на нем инструментом или блоком деталей, подлежащих обработке. Вспомогательным элементом является поводок, шарнирно связанный с верхней планшайбой, которая в результате трибологического взаимодействия приобретает угловую скорость. На рис. 6.1а, показана кинематическая схема шпиндельного блока шлифовального станка, для обработки плоских оптических элементов.



а)



б)

Рис. 6.1. Кинематические схемы а) кинематическая схема шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол (исполнительный узел станка для полировки оптических стёкол); б) кинематическая схема шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол с обозначением возможных угловых перемещений. С, В, А – шарниры; D, E – базы; φ_{z02} , φ_{z01} – углы поворота звеньев приводимые в движение при помощи двигателей. φ_{x1} – φ_{z1} φ_{x2} – φ_{z2} – углы поворота рабочего узла

Анализируя кинематическую схему рис. 6.1, определим валы I и II как входные звенья. Выходным звеном будем считать верхнюю планшайбу (полировальник). Механизм шпиндельного блока шлифовально-полировального станка, кинематическая схема которого изображенная на рис. 6.1, имеет три степени свободы. Чтобы однозначно определить положение всех звеньев в пространстве в любой момент времени, необходимо задать три обобщенные координаты. Следует учитывать, что механизмы данного типа принадлежат к группе механизмов с переменными массами звеньев. Это обусловлено явлением взаимного износа полировальника и заготовки (в большей степени). Сила трения в паре инструмент-заготовка (звено А рис. 6,1а) имеет определяющее значение для данной механической системы.

Для построения модели шпиндельного блока станка для полирования оптических стекол (рис. 6.1), плоского оптического элемента, допустим, что радиус кривизны инструмента R приближается к нулю. В данном случае разработана модель с использованием блока фрикционных эффектов – Coulombic and Viscous Friction, он служит для моделирования фрикционных эффектов сухого и вязкого трения [16, 30].

В качестве параметра блока задается список смещений при фрикционных эффектах и коэффициент передачи для приращений выходного сигнала. Основные параметры: Coulomb friction value (Offset) – величина сухого трения, Coefficient of viscous friction (Gain) – коэффициент вязкого трения. Блок реализует нелинейную характеристику, соответствующую выражению:

$$y = \text{sign}(u) \cdot (\text{Gain} \cdot \text{abs}(u) + \text{offset}) \quad (6.4)$$

где u – входной сигнал, y – выходной сигнал, Gain – коэффициент вязкого трения, offset – величина сухого трения. Подсистема 1 на рис. 6.2.

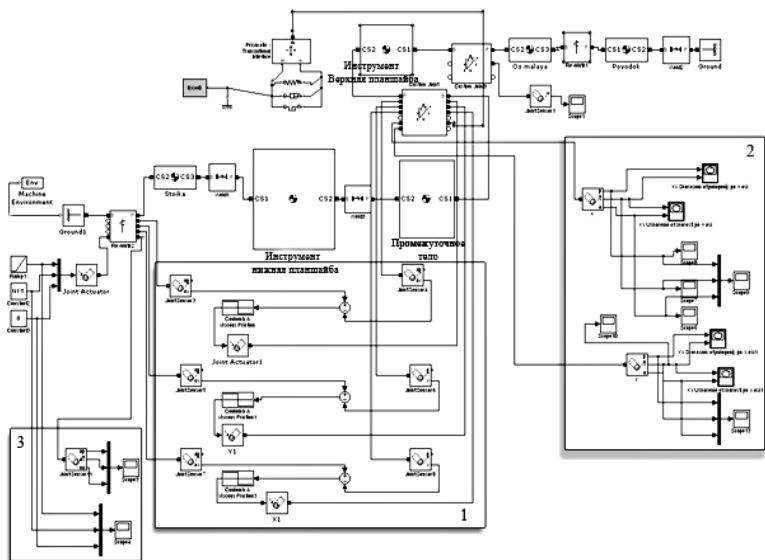


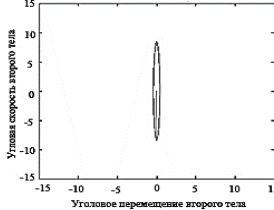
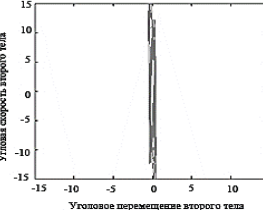
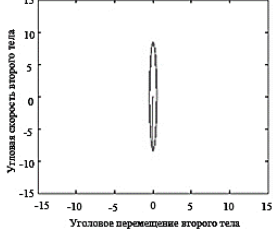
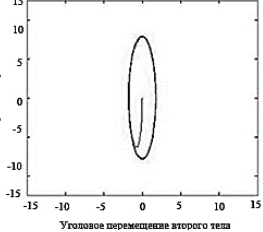
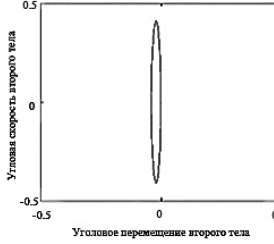

Рис. 6.2. Структурная модель SimMechanics шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол, радиус кривизны инструмента $R=0$



Рис. 6.3. Анимированная модель SimMechanics шпиндельного блока станка для полирования оптических стёкол, радиус кривизны инструмента $R=0$

На рис. 6.3, элементы: шатун, инструмент верхняя планшайба, промежуточное тело и инструмент нижняя планшайба соответствуют компонентам кинематической схемы рис. 6.1а: 3, 4, 5, 6, 7. Валы I и II на рис. 6.3 не обозначены, однако их влияние в структурной цепи учтено.

Таблица 6.1. Фазовые траектории тел структурной модели с использованием Coulombic and Viscous Frictio

Значения коэффициента демпфирования и коэффициента жёсткости	Фазовые траектории второго тела при неподвижном поводке	Фазовые траектории второго тела при подвижном поводке
$b=0.01$ $c=0.1$		
$b=0.1$ $c=0.1$		
$b=0.2$ $c=0.1$		

По результатам работы модели, которые представлены в таблице 6.1, можно сделать вывод, что моделирование шпиндельного блока

шлифовального станка для обработки плоских оптических элементов с использованием встроенного блока Coulombic and Viscous Friction (сила трения Кулона и вязкое трение) среды MATLAB/SimMechanics, не даёт полного совпадения с результатами аналитического решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + b_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + c_1 \cdot (q_1 - q_2) = M_{dv} + u_{ir}(t) \\ J_2 \ddot{q}_2 + b_1 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + b_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) + c_1 \cdot (q_2 - q_1) + c_2 \cdot (q_2 - q_3) = u_{ir}(t) \\ J_3 \ddot{q}_3 + b_2 \cdot (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) + c_2 \cdot (q_3 - q_2) = u_1(t) + u_{ir}(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

Фазовые траектории, представленные в таблице 6.2, получены с использованием модели рис. 6.2, в которой произведена замена блоков Coulombic and Viscous Friction на имитационную модель упруго диссипативной системы Joint Spring & Damper, которая для вращательных кинематических пар реализует работу по формуле (6.6), что позволило улучшить выход имитационной модели SimMechanics шпиндельного блока шлифовально-полировального станка:

$$\tau = -c \cdot (\theta - \theta_0) - b\omega \quad (6.6)$$

где c – коэффициент жесткости, θ – угол закручивания, b – коэффициент демпфирования, $\omega = d\theta/dt$.

Анализ траекторий движения обрабатывающего инструмента для указанных моделей показал, что они имеют форму гипоциклоид – плоских кривых, образуемых точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности без скольжения, однако это справедливо только для плоских систем с неподвижным поводком.

Таблица 6.2. Фазовые траектории тел структурной модели с использованием Joint Spring & Damper

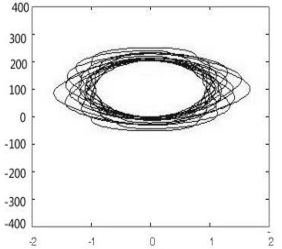
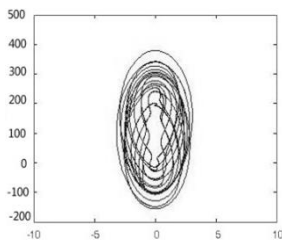
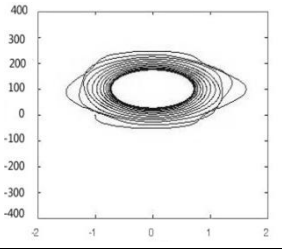
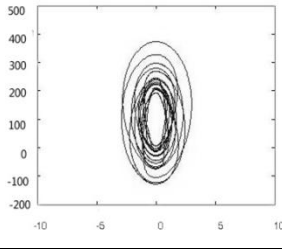
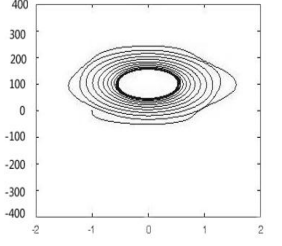
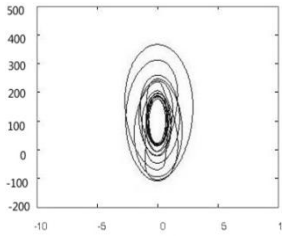
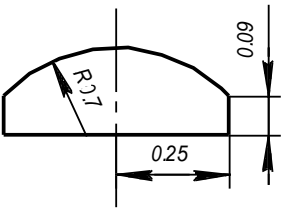
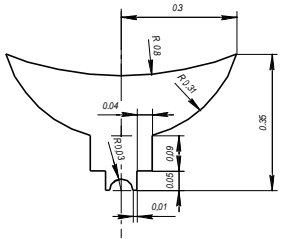
Значения коэф. демпфир. и коэф. жёсткости	Фазовые траектории второго тела при неподвижном поводке	Фазовые траектории второго тела при подвижном поводке
$b=0.01$ $c=0.1$		
$b=0.1$ $c=0.1$		
$b=0.2$ $c=0.1$		

Таблица 6.3. Исходные данные для моделирования

Наименование / размерность	Значение		
Радиус, (м)	$r_1 = d_1/2$	$r_2 = d_2/2$	$r_3 = d_3/2$
Геометрические параметры элементов А и В, (м)	А (линза)		В (чаша)
			
Длины звеньев (расстояние между двумя шарнирами), (м)	$L_{O_2C} = 1.050$	$L_{CW} = 0.6$	$L_{WB} = 0.2$
	$L_{BA} = 0.35$	$L_{AB} = 0.5$	
Центры масс звеньев, (м)	$L_{O_2CC} = 0.525$	$L_{CWC} = 0.3$	$L_{CBC} = 0.019$
Массы звеньев, (кг)	$m_1 = 8.154$	$m_2 = 5.802$	$m_3 = 1.934$
	$m_5 = 0.3$	$m_4 = 0.1$	
Моменты инерции, (кг·м ²)	$I_{x1} = I_{y1} =$ $= \frac{1}{12} m_1 (3r_1^2 + L_{O_2C})$	$I_{x2} = I_{y2} =$ $= \frac{1}{12} m_2 (3r_2^2 + L_{CW})$	$I_{x3} = I_{y3} =$ $= \frac{1}{12} m_3 (3r_3^2 + L_{WB})$
	$I_{z1} = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2}$	$I_{z2} = \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2}$	
	$I_{5x} = \frac{2m_1 \cdot r_1^2}{5}$	$I_{5x} = \frac{2m_5 \cdot r_5^2}{5}$	
	$I_{5y} = I_{5z} = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{5}$	$I_{5y} = I_{5z} = \frac{m_5 \cdot r_5^2}{5}$	
Матрицы моментов инерции	$I_1 = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}$	$I_2 = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix}$	$I_3 = \begin{bmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z3} \end{bmatrix}$
	$I_4 = \begin{bmatrix} I_{x4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z4} \end{bmatrix}$	$I_5 = \begin{bmatrix} I_{x5} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y5} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z5} \end{bmatrix}$	

Для моделирования шпиндельного блока шлифовально-полировального станка (радиус кривизны инструмента $R > 0$) было решено использовать сопротивление пропорциональное второй степени скорости. В общем виде нелинейное дифференциальное уравнение для системы будет иметь вид [27, 36]:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + b_1 \left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \right) \cdot \left| \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \right| + c_1 \left(q_1 - q_2 \right) = M_{dv} + u_n(t) \\ J_2 \ddot{q}_2 + b_1 \left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \right) \cdot \left| \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \right| + b_2 \left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3 \right) \cdot \left| \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \right| + c_1 \left(q_2 - q_1 \right) + c_2 \left(q_2 - q_3 \right) = u_n(t) \\ J_3 \ddot{q}_3 + b_2 \left(\dot{q}_3 - \dot{q}_2 \right) \cdot \left| \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \right| + c_2 \left(q_3 - q_2 \right) = u_1(t) + u_n(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

где J_n – момент инерции n -го тела; M_{dv} – движущий момент от двигателя Д1; b_n – коэффициент демпфирования; c_n – упругая составляющая; q_n – обобщенная координата n -го тела, $u_n(t) = A_0 \sin(\omega t + \delta)$ – перемещение поводка (внешнее возмущение).

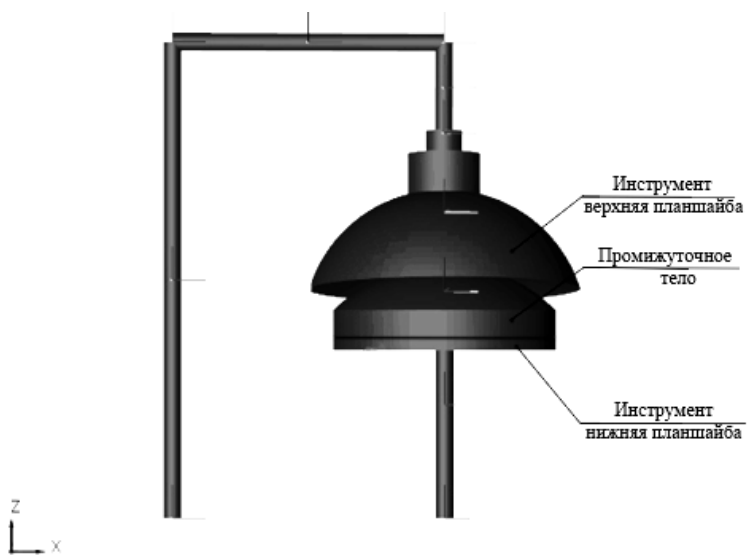
Решение системы уравнений (6.7), может быть получено только приблизительно. Известно, что в системах, где сопротивление пропорционально второй степени скорости, огибающая имеет характер гиперболы [27].

Для включения квадратичного сопротивления в систему твердотельного имитационного моделирования SimMechanic необходимо было спроектировать дополнительную подсистему, которая позволяет установить имитацию межповерхностного взаимодействия. Подсистема представлена на рис. 6.6б. Она основана на взаимодействии через нелинейный закон степенного сопротивления:

$$f(v) = k \cdot v \cdot |v|^{n-1} \quad (6.8)$$

где $n=2$, k – постоянная величина.

На рис. 6.5 представлена модель SimMechanics шпиндельного блока шлифовально-полировального станка (радиус кривизны инструмента $R > 0$), в таблице 6.4 – результаты расчетов моделирования исполнительного механизма для обработки оптических элементов в библиотеке SimMechanics в форме фазовых портретов от верхней планшайбы [40].

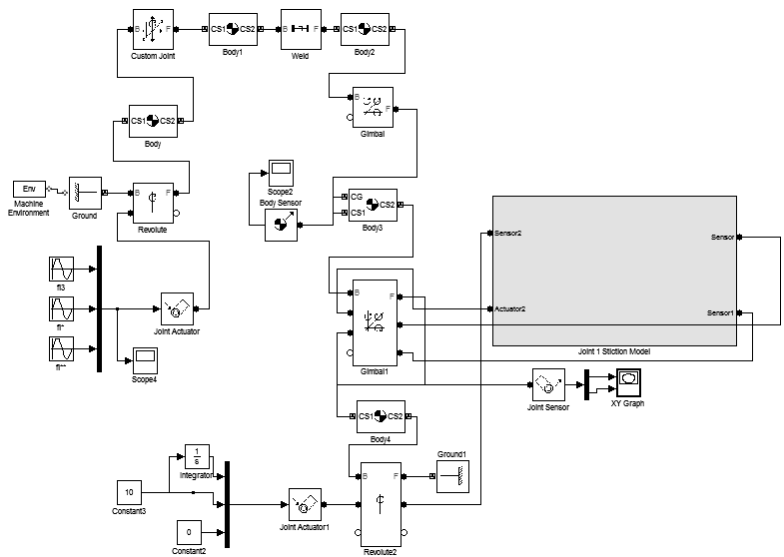


а)

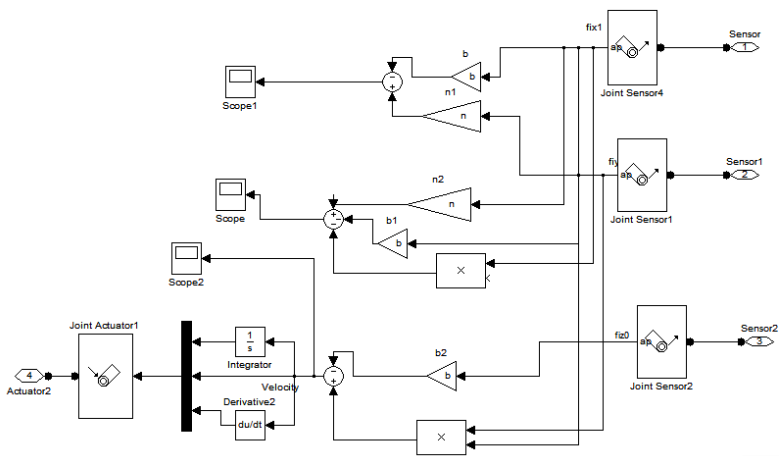


б)

Рис. 6.5. а), б) – Анимированная модель SimMechanics шпиндельного блока шлифовально-полировального станка радиус кривизны инструмента $R > 0$



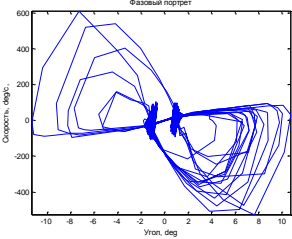
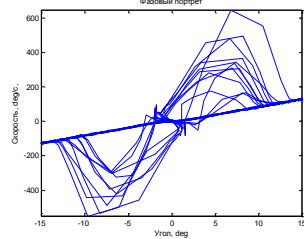
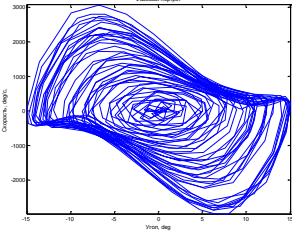
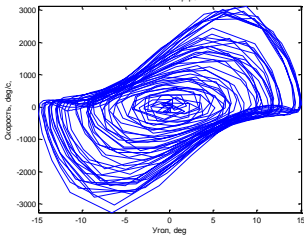
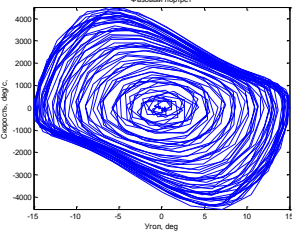
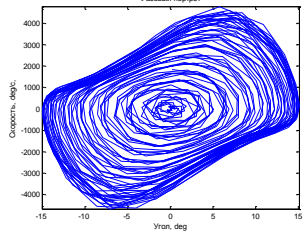
a)



b)

Рис. 6.6. Модель SimMechanics исполнительного механизма для обработки оптических элементов: а) модель механической части системы; б) схема блока трения

Таблица 6.4. Результат работы модели

b,c,t	Сигнал по оси Y	Сигнал выхода по оси Z
b=0.001 c=0.1 t=25		
b=0.1 c=0.1 t=25		
b=0.2 c=0.1 t=25		

С введением в систему сопротивления, пропорционального второй степени скорости, можно наблюдать постепенно затухающий процесс автоколебания [3].

6.3. Структурные модели, тексты управляющих программ MATLAB и опции настроек блоков в моделях SimMechanics (Simulink / MatLab)

Управляющая программа – m-файл для модели sfera_dual_friktion [40, 44, 45]. Листинг программы:

```
Clc
clear% Очистка массивов памяти
% Линейные размеры элементов моделирования
l1=1.050;
l2=0.6;
l3=0.200;
l4=0.350;
l5=0.500;
pi=3.14;
n=1; % частотный параметр
b=1; % параметр демпфирования
A=500;
B=80;
C=20;
R=0.1;
ku=0;
i=10*pi/180;
% Моменты инерции тел
Ix=0.4*m*R^2;
Iy=Ix;
Iz=Ix;
I=[Ix 0 0;0 Iy 0;0 0 Iz];
I1x=m1*l1^2/12;
I1y=I1x;
I1z=m1*l1^2/2;
I1=[I1x 0 0;0 I1y 0;0 0 I1z];
I2x=m2*l2^2/12;
I2y=I2x;
I2z=m2*l2^2/2;
I2=[I2x 0 0;0 I2y 0;0 0 I2z];
```

Параметры настройки основных блоков для структурной модели SimMechanics (Simulink / MatLab) исполнительного механизма обработки оптических элементов приведены в таблицах 6.5 – 6.8.

Таблица 6.5. Настройки блока Machine Environment


	Machine Environment		
	Вектор гравитации	[0 0 -9.81]	m/s ²

Таблица 6.6. Настройки блоков Ground



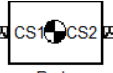
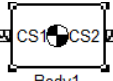
	Ground		
	Положение	[0 0 0]	m
	Show Machine Environment port		
	Ground 1		
	Положение	[12011-13-14-15]	m

Таблица 6.7. Настройки блоков Body

	Body		
	Массовые характеристики		
	Масса	m1	kg
	Инерция	I1	kg*m ²
	Положение		
	Вход	Вектор положения точки тела [xyz]	
	CG	[0 0 11/2]	m
	CS1	[0 0 0]	m
	CS2	[0 0 11]	m
	Визуализация		
Геометрия тела		External graphics file	
Подключение		CS1-CS2	
	Body 1		
	Массовые характеристики		
	Масса	m21	kg
	Инерция	I2	kg*m ²
	Положение		
	Вход	Вектор положения точки тела [xyz]	
	CG	[12/2 0 11]	m
	CS1	[0 0 11]	m
	CS2	[12 0 11]	m

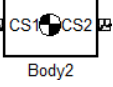
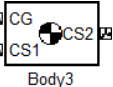
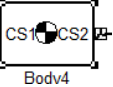
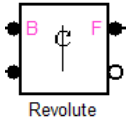
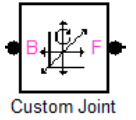
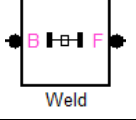
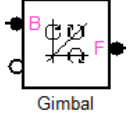
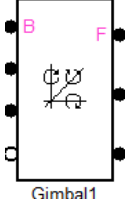
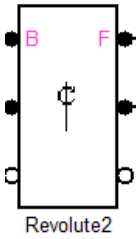
	Визуализация		
	Геометрия тела	External graphics file	
	Подключение	CG	
	Body 2		
	Массовые характеристики		
	Масса	m3	kg
	Инерция	I3	kg*m^2
	Положение		
	Вход	Вектор положения точки тела [xyz]	
	CG	[I2 0 (I1-I3/2)]	m
	CS1	[I2 0 I1]	m
	CS2	[I2 0 I1-I3]	m
	Визуализация		
Геометрия тела	External graphics file		
Подключение	CG		
	Body 3		
	Массовые характеристики		
	Масса	m4	kg
	Инерция	I4	kg*m^2
	Положение		
	Вход	Вектор положения точки тела [xyz]	
	CG	[I2 0 (I1-I3-I4/2)]	m
	CS3	[I2 0 I1-I3]	m
	CS1	[I2 0 I1-I3-I4]	m
	Визуализация		
Геометрия тела	External graphics file		
Подключение	CG		
	Body 4		
	Массовые характеристики		
	Масса	m5	kg
	Инерция	I5	kg*m^2
	Положение		
	Вход	Вектор положения точки тела [xyz]	
	CG	[I2 0 (I1-I3-I4-I5/2)]	m
	CS1	[I2 0 I1-I3-I4]	m
	CS2	[I2 0 I1-I3-I4-I5]	m
	Визуализация		
Геометрия тела	External graphics file		
Подключение	CG		

Таблица 6.8. Настройки блоков Joints

 <p>Revolute</p>	Revolute			
	Ось движения	$[0 \ 0 \ 1]$	ReferensCS	World
 <p>Custom Joint</p>	CustomJoint			
	Ось движения	$[0 \ 1 \ 0]$	ReferensCS	World
 <p>Weld</p>	Weld			
	Ось движения	$[0 \ 0 \ 0]$	ReferensCS	World
 <p>Gimbal</p>	Gimbal			
	Оси движения	$[1 \ 0 \ 0]$ $[0 \ 1 \ 0]$ $[0 \ 0 \ 1]$	ReferensCS	World World World
 <p>Gimbal1</p>	Gimbal 1			
	Оси движения	$[1 \ 0 \ 0]$ $[0 \ 1 \ 0]$ $[0 \ 0 \ 1]$	ReferensCS	World World World
 <p>Revolute2</p>	Revolute 2			
	Ось движения	$[0 \ 0 \ 1]$	ReferensCS	World

Вектор исходного положения тела $[x \ y \ z]$. Если не включена опция визуализации, то в модели использованы настройки по умолчанию – Use machine default body geometry (default).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов Н.И. Устойчивость и динамика в примерах и задачах / Н.И.Безухов, О.В.Лужин, Н.В. Колкунов – М.: Высш. Шк.,1987. – 264с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов / пер. с англ. Г. В. Матушевского и В. Е. Привальского; под ред. И. Н. Коваленко. – М.: Мир, 1971.– 408с.
3. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний Учеб. Пособие для втузов. – М., «Высш. школа», 1972. – 416 с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339с.
5. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264 с.
6. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1991. – 256с.
7. Ганевский Г.М., Голдин И.И. Допуски, посадки и технические Измерения в машиностроении: учебник для нач. проф. образования. – М.: Профобриздат ИРПО, 2001. – 288с.
8. Герман-Галкин С.Г. MATLAB & SIMULINK Проектирование мехатронных систем на ПК. Учебное пособие. – СПб.: КОРОНА-Век, 2008. – 368 с.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 1.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1984. – 350 с., ил.
10. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. – СПб.: Питер, 2002. – 608с.
11. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник – СПб.: Питер, 2002. – 448с.
12. Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1 + Simulink 5 и MATLAB 7 + Simulink 6 в математике и математическом моделировании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 570 с.
13. Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 784 с.: ил.
14. Заморуев Г.Б., Калапышина И.И. Кинематическое управление двухпараметрической сканирующей антенной // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. Выпуск 78. Механика и мехатроника./ Главный редактор д.т.н, проф. В.О. Никифоров, 2012. – с. 78–83.
15. Заморуев Г.Б., Калапышина И.И. Оценка влияния погрешностей механического модуля на точность радио локационной станции, методами имитационного моделирования в MATLAB – Simulink-Simmechanics // Молодежь. Техника. Космос: труды III Общероссийской молодёжной науч.–техн. конф./ Балт. гос. техн. ун–т. – СПб, 2011. – с. 42–44.

16. Калапышина И.И., Перечесова А.Д., Нуждин К.А. Исследования механизмов различного уровня с помощью MATLAB // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2014. № 11 (656). – с. 42-55.
17. Калапышина И.И. Моделирование динамики станка для обработки стёкол // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 6. – с. 74–77.
18. Калапышина И.И. Моделирование передачи движения за счёт сил трения в механизме обработки оптических стёкол // Вестник Нижегородского Государственного университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т.4, №4. – с. 1511–1512.
19. Калуж Ю. А., Логинов В. М. Показатель Херста и его скрытые свойства // Сибирский журнал индустриальной математики, октябрь–декабрь, 2002. Том V, № 4(12) – с. 29–37.
20. Макаров Н.Н., Осипов В.В. , Шабалина М.Б. Нормирование точности в машиностроении: Учебник для машиностроительных спец. вузов – М.: Высш. шк., 2001. – 335с.
21. Мусалимов В. М. Бифуркационная составляющая трения скольжения // Ж. «Известия высших учебных заведений. Приборостроение», 2017. Т.60, №7. – с. 10–17.
22. Мусалимов В.М. Лисицын. Ю.В., Трухин М.М. Пути автоматизации контроля качества поверхности в реальном режиме времени // ИТ ВЕСТНИК СПбГУ ИТМО № 16, 2004. – с. 26–29.
23. Мусалимов В.М., Валетов В.А. Динамика фрикционного взаимодействия. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. – 191с.
24. Мусалимов В.М., Дик О.Е., Тюрин А.Е. Параметры действия энергетического спектра вейвлет-преобразований // Ж. «Известия ВУЗов. Приборостроение», 2009, Т.52, №5 – с. 10–15.
25. Мусалимов В.М., Заморув Г.Б., Калапышина И.И., Перечесова А.Д., Нуждин К.А. Моделирование мехатронных систем в среде MATLAB (Simulink / Simmechanics) // СПб.: Учебное пособие НИУ ИТМО, 2013. – 114 с.
26. Мусалимов В.М., Эпштейн С.М. Неконсервативная задача об устойчивости сопряженных преднапряженных стержней и ее приложения // В кн.: Исследования по строительным конструкциям и строительной механике. – Изд.ТГУ, Томск, 1987. – с.108–114.
27. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320с.
28. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988 – 736 с.
29. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB – М.: ДМК Пресс, 2005.–304с.
30. Справочная система MathsoftMATLABr2010a.

31. Сычев В.В. Вычисление корреляционной размерности, корреляционной энтропии и показателя Херста по временному ряду данных [Электронный ресурс]. – Институт математических проблем биологии РАН, Пущино, 2002. – Режим доступа: <http://impb.psn.ru/-sychyov/>.
32. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с., ил.
33. Устройство для испытания материалов на трение: пат. 2244290 Рос. Федерация / Мусалимов В.М., Исмаилов Г.М., Аникеенко А.Д., Ларичкин М.П., Власов Ю.А.; заявитель и патентообладатель ТГАСУ, Мусалимов В.М., Исмаилов Г.М. – № 2003119011/28; заявл. 24.06.2003; опубл. 10.01.2005, Бюл. № 1.
34. Устройство для исследования триботехнических характеристик материалов: пат. 158916 Рос. Федерация / Мусалимов В.М. Исмаилов Г. М., Тюрин А. Е., Власов Ю. А., Метелица В. А.; заявитель и патентообладатель ТГАСУ, Исмаилов Г.М., Тюрин А.Е. – заявл. 22.12.2015; опубл. 20.01.2016, Бюл. № 2.
35. Федер Е.Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991 – 254 с., ил.
36. Хебда М., Чичинадзе А.В. Справочник по триботехнике. Том 1: Теоретические основы. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.
37. Чихос Х. Системный анализ в триботехнике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982, – 352с.
38. Шустер Г. Детерминированный хаос: Пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 253 с.
39. Hasan R., Rahideh A., Shaheed H. Modeling and interactional control of the multifingered hand, ICAC 2013 // Conference Paper – 2013 – Proceedings of the 19th International Conference on Automation and Computing: Future Energy and Automation, London; United Kingdom, 2013. – pp. 126–131.
40. Kalapyshina I.I., Nuzhdin K.A., Musalimov V.M. Modelling of nonlinear dynamic of mechanic systems with the force tribological interaction // Tribology in Industry. 2015. Т. 37. № 3. – pp. 360-365.
41. Kalapyshina I.I., Perechesova A.D., Nuzhdin K.A. Kinematics and dynamics analysis of different mechanisms using the Simmechanics/Simulink/MATLAB // Proceedings of 26th European Modeling and Simulation Symposium, EMSS 2014. – pp. 128-135.
42. Kalapyshina I.I., Perechesova A.D., Nuzhdin K.A. Kinematics and dynamics analysis of different mechanisms using SIMMECHANICS / SIMULINK / MATLAB // Proceedings of 11th – IMM&SM-2014, France, University of Bordeaux. – pp. 128–136.
43. Kalapyshina I.I., Perechesova A.D., Nuzhdin K.A., Zamoruev G.B., Musalimov V.M., Modeling of mechatronic systems in MATLAB (SIMULINK / SIMMECHANICS) // Proceedings of 11th – IMM&SM–2014, France, University of Bordeaux, – pp. 106–112.

44. Kot A. Bi-axial inverted pendulum modelling ICCC 2013 // Conference Paper – 14th International Carpathian Control Conference, Rytro; Poland, 2013. – pp. 171–174.
45. Li H.X., Lu A.S. The design of output feedback controller for inverted pendulum system, Applied Mechanics and Materials, ICMA 2013 // Key Engineering Materials Vol. 336–338 (2013), – 2nd International Conference on Measurement, Instrumentation and Automation, Guilin; China, 2013. – pp. 489–492.
46. Musalimov V., Nuzhdin K., Tyurin A. Modelling of external dynamic of the friction engagement // 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Book of papers, 2016 – pp. 1802–1803.
47. Musalimov V.M., Kalapyshina I.I. Nuzhdin K.A., Modelling of nonlinear dynamic of mechanic systems with the force tribological interaction // Abstracts of proceedings of the 16th Nordic Symposium on Tribology, IET, 2014. – pp. 265–266.
48. Musalimov V.M. and Musalimova L.N. Non–Linear Dynamics of Frictional Interaction. IMA International Conference. Recent Advances in Nonlinear Mechanics // Book of Abstracts. Aberdeen, Scotland, 2005. – p.76.
49. Musalimov V.M., Lisitin Y.V., Orlov S.V.. Dynamic characteristics and quality surveillance of rubbing surfaces // Proceedings ICTAM04, Warschawa, 2004. – pp. 150–153.
50. Xiao, X., Li, Y., Tang, H., Kinematics and interactive simulation system modeling for robot manipulators ICIA 2013 // Conference Paper – 2013 IEEE International Conference on Information and Automation, Yinchuan; China, 2013. – pp. 1177–1182.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА МЕХАТРОНИКИ



Кафедра Мехатроники, одна из старейших кафедр Университета ИТМО, история которой начинается с 30-х годов XX века. Первое упоминание о прародительнице кафедры Мехатроники содержится в приказе № 18 от 03.10.1930 по Учебному комбинату точной механики и оптики: "доцент Замыцкий Н.П. назначен с 1.10.1930 заведующим кафедрой Детали машин института точной механики и оптики". Важным этапом было существование в 30-х годах кафедры «Соппротивление материалов и детали машин», поскольку речь шла уже не только о выборе схемы устройства (машины, прибора), но и об определении размеров и формы деталей при прочностном расчете. Руководил кафедрой в то время виднейший ученый в области строительной механики Яги Ю.И.

С 1945 г. руководство кафедрой осуществляет Н.И. Колчин, крупнейший учёный механик в самом широком смысле этого слова. Он расширил и обогатил исследовательскую и преподавательскую деятельность кафедры методами Теории машин и механизмов. Нельзя не сказать, что Н.И. Колчин был в той или иной мере учителем трех последующих заведующих кафедрой – Ф.Л. Литвина, К.И. Гуляева, Б.П. Тимофеева.

С 1951 года, заведующим кафедрой Теории механизмов и деталей машин, становится Рифтин Л.П. Именно в этот момент учебная и научная деятельность кафедры приобрела черты синтетической научной дисциплины, где выбор схем машины, прибора, устройства сопровождался учетом не только геометро-кинематических, но и динамических, прочностных характеристик.

1964 год: "Ректорат и Совет ЛИТМО поручили профессору Литвину Ф.Л. провести реорганизацию кафедры Теории механизмов и деталей машин в кафедру приборостроительного типа, закладывающую основы

конструкторской подготовки специалистов, выпускаемых ЛИТМО". Во время заведования кафедрой Литвиным Ф.Л. была создана лабораторная база с оригинальными лабораторными установками, написаны многочисленные методические пособия, разработаны и изготовлены учебные стенды, макеты устройств и прозрачные модели, отвечающие современным требованиям учебного процесса в высшей школе.

Мало того, кафедра приобрела широкую известность в стране и за рубежом. Особенно массовой была подготовка научных кадров высшей квалификации для Болгарии и Эстонии. Кафедра до сих пор гордится такими бывшими аспирантами как Кольо Минков Петров – директор Института механики и биомеханики Болгарской АН, кандидат в президенты страны от Земледельческого союза в начале 90-х.

В области теории передач следует особо выделить два направления деятельности. Во-первых, проектирование червячных и глобоидных передач. В этом направлении существенных результатов добились В.И. Рыбаков и Н.Г. Линдтроп в червячных передачах, В.Д. Брицкий – в части глобоидных передач. Последний на долгое время определил основное поле своей научной деятельности – совершенствование прикладных методов теории поверхностей, отличающихся удобством проведения расчетов на ЭВМ, т.е. он совершенствовал методы анализа и синтеза передач одновременно (а иногда и с опережающим темпом) с развитием ЭВМ. Сегодня вошли в учебную практику матричные методы определения скоростей и ускорений, кривизны и геодезического кручения и пр., к созданию которых В.Д. Брицкий приступил еще в 60-х.

Во-вторых, оптимизационный синтез конических и гипоидных передач. Эта тема базировалась во многом на тесных связях с автомобильными гигантами страны – ЗИЛом, ГАЗом, ВАЗом, однако работы выходили далеко за пределы частных задач проектирования передач задних мостов автомобилей, тем более что уже после Ф.Л. Литвина кафедра много занималась этой тематикой по договорам с предприятиями авиационной промышленности страны. Коническими и гипоидными передачами занимался большой отряд ученых кафедры: А.А. Заостровский, Л.Я. Либушкин, Б.Д. Зильберман, Б.П. Тимофеев, Ю.А. Синичкин, В.С. Смирнов, В.Н. Рубцов, Е.И. Гутман и др. занимались методами нарезания колес и оптимизацией качества передач, попутно решая глобальные задачи теории зубчатых зацеплений – "Обратную задачу", задачу синтеза передач с локализованным контактом – синтеза "локального", "двухточечного" и "четырёхточечного", синтеза с проверкой условий зацепления по всей активной действующей линии, с правкой условий ЭВМ в цикле, либо исполнителем по результатам анализа и т.д. И совсем уже оригинальную задачу решал под руководством Ф.Л. Литвина, А.М. Политавкин – образование поверхностей сопряженных гиперболоидальных винтов на скрещивающихся осях с помощью двух режущих линий. Эти винты транспортировали жидкость с включением твердой фазы в замкнутом объеме. Новый метод синтеза сопряженных поверхностей в результате дал блестящий результат.

В-третьих, в 70-х на кафедре возникло направление на пересечении теории передач и механизмов и деталей приборов – это разработка теории точности механизмов и создание приборов для контроля моментов трогания и кинематической погрешности передаточных механизмов. Нельзя не отметить вклад Н.Г. Линдтропа, Б.П. Тимофеева, начавшего сотрудничество в этом направлении еще в 60-е годы с ЦНИИ Электроприбор, М.А. Ноздрина, много занимавшегося не только кинематомерами, но и специальными стендами оборонного назначения. Этой же тематикой при Ф.Л. Литвине начали заниматься В.А. Мурашев и Е.В. Шалобаев, защитившие кандидатские диссертации по мелкомодульным зубчатым передачам позднее.

Весьма плодотворным было сотрудничество кафедры со столь известными профессорами нашего института как Г.А. Петухов и С.А. Родионов. С первым работа шла в русле многочисленных и исключительно плодотворных консультаций в части методов вычислительной математики, использования различных языков программирования. С профессором С.А. Родионовым особенно интенсивно сотрудничали работники кафедры в период работы над библиотекой программ автокода "Инженер", во многом предвосхитившего сегодняшнюю программу Pro-engineer.

Была начата еще одна область научных работ, темой которой являлся анализ и синтез пространственных стержневых механизмов и манипуляторов. Еще в 70-х кафедра ТМиДП подбиралась к мехатронной тематике, ведь роботы являются наиболее распространенными и типичными мехатронными устройствами, а манипуляционная система – неотъемлемый элемент промышленного робота. Пока еще не стоят вопросы интеллектуальности и антропоморфности роботов – все начинается, как и положено на кафедре теории механизмов и деталей приборов, с анализа и синтеза механизмов – манипуляционных систем, но слово синтез – создание, проектирование, дизайн, конструирование, уже присутствует.

В период заведования кафедрой ТМиДП Ф.Л. Литвин (1964-1977) являлся научным руководителем Ленинградского филиала семинара по теории механизмов и машин, действовавшего при отделении механики и процессов управления АН СССР. Он был членом Президиума научно-технического совета по ТММ МИНВУЗа СССР, членом редакции международного журнала "Mechanism and Machine Theory" (США).

В начале 1979 года заведующим кафедрой становится профессор Гуляев К.И. По своей направленности кафедра становится общинженерной.

В 1989 году Тимофеев Б.П. приступил к заведыванию общинженерной кафедрой Теории механизмов и деталей приборов, преобразовав её в 1991 году в выпускающую кафедру Мехатроники. Только в 1994 году специальность "Мехатроника" появилась в официальном списке специальностей.

С 2005 года кафедру возглавляет доцент Ноздрин М.А. В учебную и научную деятельность внедряются компьютерные технологии, разрабатываются инновационные образовательные программы, создаются

новые лабораторные циклы и лаборатории. В 2009 году утверждена научная школа “Фундаментальные проблемы надежности и точности машин и приборов”.

С 2012 года заведующим кафедрой становится профессор Мусалимов В.М.

С 2013 года на кафедре Мехатроники совместно с Таллиннским Техническим Университетом (ТТУ) открыта магистерская совместная образовательная программа (СОП) по биомехатронике.

С 2015 года кафедру Мехатроники возглавляет Монахов Ю.С.

В 2017 году к руководству кафедрой приступает Колюбин С.А.

С 2017 года на базе кафедре организована международная научная лаборатория (МНЛ) «Биомехатроники и энергоэффективной робототехники».

Мусалимов Виктор Михайлович
Калапышина Ирина Ивановна
Нуждин Кирилл Андреевич

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (MATLAB)**

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе