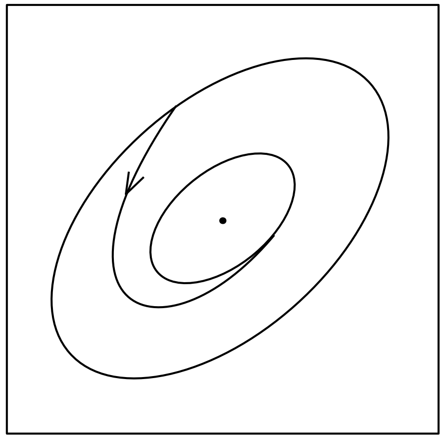
Е. В. Милованович, А.В. Рябова,
В.Ю. Тертычный-Даури

# ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ. ВВЕДЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



Санкт-Петербург
2017

**Редакционно-издательский отдел**
**Университета ИТМО**
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Е.В. Милованович, А.В. Рябова,
В.Ю. Тертычный-Даури

# ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ. ВВЕДЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2017

Милованович Е.В., Рябова А.В., Тертычный-Даури В.Ю. Элементы современной теории устойчивости. Введение в асимптотический анализ. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 210 с.

В пособии излагаются основы современной теории устойчивости движения динамических систем в виде задач и методов их решения по нескольким направлениям применения. Весь материал разбит на главы, в которых достаточно подробно анализируются метод дифференциальных неравенств в теории устойчивости, устойчивость стационарных движений, устойчивость неавтономных систем, а также асимптотические приближения дифференциальных уравнений и их движений. Пособие предназначено для студентов второго-четвертого курсов по направлениям подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах», 27.03.02 «Системы управления движением и навигация».

Список литературы — 232 наим.

Рецензенты:
д. физ.-мат. н., профессор Шориков А.Ф.
к. физ.-мат. н., доцент Холодова С.Е

Одобрено на заседании кафедры ВМ, протокол № 4 от 28.08.2017
Одобрено Ученым советом ЕН факультета, протокол № 5 от 23.09.2017

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Университет ИТМО** — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО — участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО — становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.



# Оглавление

# Введение

Настоящее учебное пособие и хронологически, и методологически является естественным продолжением учебного пособия по устойчивости, вышедшего в 2015 году в Университете ИТМО (Рябова А.В., Тертычный-Даури В.Ю. Элементы теории устойчивости. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 208 с.). Упомянутое издание было посвящено изучению многих вопросов классической теории устойчивости, причем главное внимание было уделено рассмотрению прямого метода Ляпунова (метода функций Ляпунова).

В предисловии к своей знаменитой работе "Общая задача об устойчивости движения"А.М. Ляпунов написал: "В этом сочинении я имел лишь в виду изложить то, что пока удалось мне сделать для решения поставленной мною задачи и что, может быть, может послужить точкою отправления для дальнейших изысканий такого же характера".

Сама жизнь полностью оправдала эти слова: в настоящее время теория устойчивости по Ляпунову является общепризнанной и находит широкое применение во многих областях науки и техники. Появились многочисленные научные работы, непосредственно связанные с исследоваиями А.М. Ляпунова, в которых эти исследования получили обобщение и дальнейшее существенное развитие.

Основная цель авторов данного учебного пособия заключается в том, чтобы в краткой и доступной для студенческой аудитории форме показать и проанализировать некоторые современные методы решения задач устойчивости, получившие широкую известность среди специалистов по теории устойчивости. Среди этих методов авторы пособия выделили несколько основных направлений применения: дифференциальные неравенства в теории устойчивости, устойчивость стационарных движений и устойчивость неавтономных систем.

Близко к рассматриваемой тематике примыкает и тема асимптотического (приближенного) анализа дифференциальных уравне-



ний и их движений (траекторий). Все упомянутые выше задачи и методы их решения концентрировано размещены в четырех главах.

В главе 1 кратко изложены результаты работ, в которых получили дальнейшее развитие метод дифференциальных неравенств. Даются эффективные оценки устойчивости движения.

Глава 2 содержит результаты по теории устойчивости стационарных движений динамических (механических) систем, включая различные их модификации и усовершенствования.

В главе 3 изучаются вопросы устойчивости нестационарных и неавтономных динамических (механических) систем. Сюда также входит рассмотрение задач устойчивости, связанных с воздействием на систему нестационарных возмущений.

Глава 4 посвящена описанию асимптотических методов (разложения решений дифференциальных уравнений, теории возмущений в виде метода малого параметра и теории оптимального управления).

Заканчивается пособие небольшим разделом из задач и упражнений, служащих своеобразным теоретическим и практическим дополнением к основному тексту пособия.

# Глава 1

## Оценки устойчивости движения динамических систем

В связи с развитием аналитических методов исследования и освоением новых классов вычислительных средств интерес к задачам нелинейной динамики и, в частности, нелинейной механики, обусловленный широтой применения на практике, только возрастает. Более того, повышение технических требований к эксплуатации нелинейных систем приводит к необходимости построения более точных математических моделей их функционирования, включая системы автоматического управления, с учетом действующих возмущений и качественного анализа переходных процессов.

Отметим, что упомянутое развитие теоретических методов исследования нелинейных динамических систем связано главным об-разом с различными усовершенствованиями прямого метода А.М. Ляпунова и асимптотических методов А. Пуанкаре и Н.М. Крылова– Н.Н. Боголюбова. Эти модификации позволяют получать достаточно подробные характеристики изучаемых движений и делать на их основании качественные оценки движения и устойчивости изучаемых объектов, а также создавать схемы и алгоритмы, удобные для применения на практике [25, 26, 30, 43, 57, 78-80, 82, 87, 90, 107, 111, 135, 140, 151, 161, 173].

Первая глава посвящена беглому изложению результатов работ [103-106], в которых получил дальнейшее развитие *метод дифференциальных неравенств* (МДН), основанный в свою очередь на методе функций Ляпунова. МДН, который разрабатывался в трудах многих отечественных и зарубежных специалистов (см., например, работы [28, 53, 58, 92, 94, 99, 152, 153, 165, 168]), можно рассматривать как мощный математический аппарат для решения важной задачи об определении свойств движения на базе некоторого прямого алгоритма, позволяющего непосредственно, по виду уравнений, от-



ветить на вопрос об устойчивости движения и об асимптотическом поведении движения, не прибегая к построению общего решения соответствующей дифференциальной системы.

Главные преимущества МДН, очевидно, заключаются в том, что с помощью этого метода можно, не интегрируя саму дифференциальную систему, выяснить: ее устойчивые свойства и асимптотические особенности, поведение решений в окрестности нуля фазового пространства, отклонение приближенного решения от точного и т.д.

Часто во многих прикладных задачах требуется знать о системе лишь отдельные, но существенные характеристики движения, например, движение системы затухает или нарастает [106]. Таким образом, важным представляется предварительный ответ на вопрос о наличии у системы каких-либо устойчивых (или неустойчивых) свойств. Для того, чтобы этот ответ носил качественный характер, в анализ вводят некоторый показатель качества, призванный соответствовать интенсивности затухания или нарастания движения системы с течением времени.

В § 1.1 рассматриваются теорема С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и некоторые ее обобщения, на которых основаны практически все дальнейшие выводы об оценках устойчивости движения динамических систем.

В § 1.2 помещены теоремы Г.И. Мельникова об устойчивости движения, уходящие своими корнями в теорию дифференциальных неравенств, и использование их для ответа на вопрос о наличии устойчивых решений у исходной дифференциальной системы.

В § 1.3 даются оценки устойчивости движения. С этой целью исследуемая система приводится методом неособого многочленного преобразования к нормальной канонической форме. Затем последовательно оцениваются слагаемые в правой части системы с выходом на основное дифференциальное неравенство и выписывание результирующих оценок.

Процедура оценивания разрабатывается и дальше в § 1.4 для построения оценок погрешностей приближенных решений. Достаточно подробно изучается задача о влиянии на движение системы малых постоянно действующих возмущений, представленных степенными рядами.

## 1.1 Теоремы о дифференциальных неравенствах

Рассмотрим *теорему С.А. Чаплыгина* [168] о дифференциальных неравенствах (ДН) для неотрицательной функции $r(t)$ и некоторые ее модификации. Для этого вначале дадим определения нескольким понятиям.

**Определение 1.1.** *Всякую неотрицательную функцию* $r(t)$ *с начальным значением* $r_0 = r(0)$, *где* $r_0 \in [0, h)$, $h \leq H$, *назовем* $[h, t_1]$*–решением дифференциального неравенства*

$$\dot{r} \leq f(r, t), \qquad r \in [0, H], \qquad t \in [0, \infty), \tag{1.1}$$

*если* $r(t)$ *определена, непрерывна и однозначна, начиная с момента* $t = 0$ *до момента* $t = t_1$ *такого, когда она впервые принимает значение* $r = h$ *и если* $r(t)$ *имеет непрерывную или кусочно-непрерывную производную* $\dot{r}(t)$, $\forall\, t \in [0, t_1]$, *которая удовлетворяет неравенству* (1.1).

Укажем на то, что момент $t_1$ разный для различных решений. Если $r(t) < h$, $\forall\, t \geq 0$, то считаем это решение определенным $\forall\, t \geq 0$ и обозначаем его $[h, \infty)$–решением.

**Определение 1.2.** *Мажорантным* $[u_0, T]$*–решением ДН* (1.1) *назовем неотрицательное решение* $u(u_0, t)$ *соответствующего дифференциального уравнения (ДУ)*

$$\dot{u} = f(u, t), \qquad u_0 = u(0) \in [0, h], \tag{1.2}$$

*которое считаем определенным на промежутке* $[0, T]$, *где* $T = T(u_0)$ — *момент времени, в который решение впервые достигнет границы* $u = h$.

В определениях 1.1, 1.2 считается, что функция $f(u, t)$ определена, однозначна, кусочно-непрерывна по $t$, удовлетворяет условию Липшица по $u$ :

$$|\, f(u_1, t) - f(u_2, t)\,| \leq L\,|\, u_1 - u_2\,|, \tag{1.3}$$

где $L = \mathrm{const} > 0$, $u \in [0, H]$, $t \geq 0$. Предполагается также, что $f(0, t) \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$, что обеспечивает неотрицательность решений $u(u_0, t)$ при $u_0 \geq 0$.



Отметим также, что если решение $u(u_0, t)$ не достигает значения $u = h$ ни при каких $t \geq 0$, то будем считать его определенным $\forall\, t \geq 0$ и назовем его мажорантным $[h, \infty)$–решением неравенства (1.1).

**Теорема 1.1.** *Любое* $[h, t_1]$*–решение* $r(t)$ *ДН* (1.1) *с начальным значением* $r_0 \leq u_0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$t_1 \geq T, \qquad r(t) \leq u(u_0, t), \qquad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.4}$$

*В случае, если* $T = \infty$, *то* $t_1 = \infty$ *и* $r(t) \leq u(u_0, t)$, $\forall\, t \geq 0$.

Поясним это утверждение. С этой целью рассмотрим непрерывные, однозначные, неотрицательные решения $r(t)$, $u(u_0, t)$ на промежутках времени $[0, t_1]$, $[0, T]$ соответственно, полагая, что $r_0 \leq u_0$. Значения $t_1$ и $T$ находятся как наименьшие положительные корни уравнений

$$r(t_1) = h, \qquad u(u_0, T) = h.$$

Покажем, что $t_1 \geq T$. Будем исходить от противного, а именно: пусть $t_1 < T$. Тогда на меньшем из промежутков $[0, t_1]$ имеем:

$$\dot{r} \leq f(r, t), \qquad \dot{u} = f(u, t), \qquad t \in [0, t_1], \tag{1.5}$$

где $r(t_1) = h$, $u(u_0, t_1) < h$. Обозначим функцию $\Delta = r(t) - u(u_0, t)$; она на промежутке $[0, t_1]$ определена, непрерывна, однозначна и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков:

$$\Delta(0) = r_0 - u_0 \leq 0, \qquad \Delta(t_1) = h - u(u_0, t_1) > 0.$$

Значит, найдется такой промежуток $(t_0, t_1]$, примыкающий к значению $t_0$, на котором выполняются условия

$$\Delta(t_0) = 0, \qquad \Delta(t) > 0, \qquad t \in (t_0, t_1]. \tag{1.6}$$

Следовательно, с учетом соотношений (1.3), (1.5), (1.6) можем написать неравенства

$$\dot{\Delta} = \dot{r} - \dot{u} \leq f(r, t) - f(u, t) \leq L\Delta, \qquad \Delta \geq 0,$$

где $t \in [\,t_0, t_1\,]$, или

$$\dot{\Delta} - L\Delta \le 0, \qquad \Delta(t_0) = 0.$$

Производя умножение на $\exp(-Lt)$ и интегрируя по промежутку $[\,t_0, t_1\,]$, получим

$$\Delta(t_1)\, e^{-Lt_1} \le 0 \implies \Delta(t_1) \le 0.$$

Приходим тем самым к противоречию, которое доказывает, что $t_1 \ge T$. Значит, промежуток $[\,0, T\,]$ наименьший и на нем справедливы неравенства

$$\dot{\Delta} \le f(r,t) - f(u,t) \le L\,|\,\Delta\,|, \qquad t \in [\,0, T\,]. \tag{1.7}$$

Покажем, что и второе утверждение теоремы: $\Delta \le 0$, $t \in [\,0, T\,]$, также имеет место. Предположим, что $\exists\, t' \in (0, T\,]$ — такой момент, для которого $\Delta(t') > 0$. Так как $\Delta(0) \le 0$, то по непрерывности функции $\Delta(t)$ существует промежуток $[\,t_0', t'\,]$, на котором выполнены условия

$$\Delta(t_0') = 0, \qquad \Delta(t) > 0, \qquad t \in (t_0', t'\,],$$

причем на промежутке $[\,t_0', t'\,]$ неравенство (1.7) выглядит так: $\dot{\Delta} - L\Delta \le 0$. После его интегрирования найдем, что $\Delta(t') \le 0$. Пришли к противоречию.

В случае же, когда решение $u(u_0, t)$ вообще не достигает значения $h$ при $t \ge 0$, получить последнее утверждение теоремы можно, внеся соответствующие изменения, по той же самой схеме рассуждений.

Теорему 1.1 можно обобщить на систему ДН. Рассмотрим, к примеру, систему двух ДН:

$$\dot{r} \le f(r, \rho, t), \qquad \dot{\rho} \le \varphi(r, \rho, t) \tag{1.8}$$

и соответствующие им ДУ:

$$\dot{u} = f(u, v, t), \qquad \dot{v} = \varphi(u, v, t). \tag{1.9}$$



Будем считать, что ДН (1.8) заданы в бесконечном прямоугольном цилиндре пространства $\{\, r, \rho, t \,\}$:

$$r, u \in [\,0, H\,], \qquad \rho, v \in [\,0, K\,], \qquad t \in [\,0, \infty), \tag{1.10}$$

причем функции $f, \varphi$ в области (1.10) определены, однозначны, непрерывны по $t$ или кусочно непрерывны, удовлетворяют условию Липшица:

$$\begin{aligned} |\, f(r,\rho,t) - f(u,v,t)\,| &\le L\big(|\,r-u\,| + |\,\rho - v\,|\big), \\ |\, \varphi(r,\rho,t) - \varphi(u,v,t)\,| &\le L\big(|\,r-u\,| + |\,\rho - v\,|\big) \end{aligned} \tag{1.11}$$

и условию монотонного возрастания по $\rho$ для функции $f$ и по $r$ для функции $\varphi$:

$$\begin{aligned} f(r, \rho_1, t) \le f(r, \rho_2, t) \quad &\text{при} \quad \rho_1 \le \rho_2, \\ \varphi(r_1, \rho, t) \le \varphi(r_2, \rho, t) \quad &\text{при} \quad r_1 \le r_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Помимо этого, будем предполагать, что $f$ и $\varphi$ удовлетворяют условиям неотрицательности решений ДУ (1.9) с начальными данными $u_0 \in [\,0, H)$, $v_0 \in [\,0, K)$.

Аналогично определениям 1.1 и 1.2 неотрицательное решение $\big(r(t),\, \rho(t)\big)$ неравенств (1.8), достигающее в момент $t_1$ границы цилиндра $r \in [\,0, h\,]$, $\rho \in [\,0, k\,]$, $t \ge 0$ ($h \le H$, $k \le K$), назовем $[\,h, k, t_1\,]$–решением ДН (1.8), а решение $u(u_0, t)$, $v(v_0, t)$ уравнений (1.9), достигающее границы области $\big\{\,[\,0, h\,],\, [\,0, k\,]\,\big\}$ в некоторый момент $T$, назовем мажорантным $[\,u_0, v_0, T\,]$–решением ДН (1.8).

**Теорема 1.2.** *Если начальные значения* $[\,h, k, t_1\,]$*–решения* $\big(r(t),\, \rho(t)\big)$ *не превосходят начальных значений* $[\,u_0, v_0, T\,]$*–решения* $\big(u(u_0, v_0,\, t),\ v(u_0, v_0, t)\big)$, *то тогда справедливы неравенства:*

$$t_1 \ge T, \quad r(t) \le u(u_0, v_0, t), \quad \rho(t) \le v(u_0, v_0, t), \quad t \in [\,0, T\,]. \tag{1.13}$$

Как и ранее, покажем вначале, что $r \le u$, $\rho \le v$ до тех пор, пока решения $\big(r(t),\, \rho(t)\big)$ и $\big(u(u_0, v_0, t),\, v(u_0, v_0, t)\big)$ находятся в области (1.10). Будем исходить от противного, полагая, к примеру, что $r > u$. Тогда в силу непрерывности $r(t)$ и условия $r_0 = r(0) \le u_0 = u(0)$ найдется такой момент времени $t_0$ и такой достаточно малый промежуток $[t_0, t_*]$, что

$$r(t_0) = u(u_0, v_0, t_0), \qquad r(t) > u(u_0, v_0, t), \qquad t \in [t_0, t_*]. \quad (1.14)$$

Одновременно на этом промежутке $[t_0, t_*]$ имеем в *общем случае*: $\rho(t) \le v(u_0, v_0, t)$. Более того, возможен также *особый случай* нарушения сразу двух неравенств, когда при $t \in [t_0, t_*]$ :

$$\rho(t_0) = v(u_0, v_0, t_0), \qquad \rho(t) > v(u_0, v_0, t).$$

Введем далее в рассмотрение в общем случае на промежутке $[t_0, t_*]$ неотрицательную функцию $\sigma = r - u$, а в особом случае — неотрицательную функцию $\Delta = r - u + \rho - v$. С учетом соотношений (1.8) – (1.12) имеем

$$\begin{aligned} &1)\ \dot\sigma = \dot r - \dot u \le f(r,\rho,t) - f(u,v,t) \ \le \\ &\qquad \le\ f(r,v,t) - f(u,v,t) \le L\,|\,r-u\,| = L\sigma, \\ &2)\ \dot\Delta \le f(r,\rho,t) - f(u,v,t) + \varphi(r,\rho,t) - \varphi(u,v,t) \ \le \\ &\qquad \le\ 2L\,\big(|\,r-u\,| + |\,\rho - v\,|\big) = 2L\Delta, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\dot\sigma - L\sigma \le 0, \qquad \dot\Delta - 2L\Delta \le 0, \qquad t \in [t_0, t_*]. \quad (1.15)$$

Домножим первое неравенство (1.15) на $\exp(-Lt)$, а затем проинтегрируем по $t \in [t_0, t_*]$ и учтем, что $\sigma(t_0) = 0$. Получим

$$\sigma(t_*)\,e^{-Lt_*} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t_*) \le 0,$$

что противоречит условию (1.14). Поступая аналогично, из второго неравенства (1.15) получим противоречивое неравенство $\Delta(t_*) \le 0$. Это значит, что справедливы неравенства (см. (1.13)):

$$r(t) \le u(u_0, v_0, t), \qquad \rho(t) \le v(u_0, v_0, t)$$

до тех пор, пока решение $(r, \rho)$ или $(u, v)$ не достигнет границы либо на промежутке $[0, t_1]$, либо на промежутке $[0, T]$.



Остается показать, что $t_1 \ge T$. Исходим от противного: пусть $t_1 < T$. Тогда

$$r(t) \le u(u_0, v_0, t), \qquad \rho(t) \le v(u_0, v_0, t), \qquad t \in [0, t_1],$$

и, в частности, имеем

$$r(t_1) \le u(u_0, v_0, t_1), \qquad \rho(t_1) \le v(u_0, v_0, t_1)$$

— неравенства, противоречащие предположению о том, что решение $(r, \rho)$ достигло границы в момент $t_1$, а решение $(u, v)$ — не достигло ее.

Изучим далее случай, когда имеется система ДН (1.8), где переменные $r$ и $\rho$ удовлетворяют помимо условий (1.11), (1.12) также ДН, ограничивающим производные $\dot r$ и $\dot\varphi$ снизу:

$$\dot r \ge f_1(r, \rho, t), \qquad \dot\rho \ge \varphi_1(r, \rho, t). \quad (1.16)$$

Вводимые функции $f_1, \varphi_1$ — это однозначные, непрерывные или кусочно-непрерывные по $t$ функции, удовлетворяющие в области (1.10) условиям Липшица вида (1.11) и условиям монотонного возрастания вида (1.12). Предполагается также, что функции $f_1$ и $\varphi_1$ удовлетворяют условиям неотрицательности решений ДУ:

$$\dot u_1 = f_1(u_1, v_1, t), \qquad \dot v_1 = \varphi_1(u_1, v_1, t), \quad (1.17)$$

заданных в области (1.10) с начальными значениями при $t = 0$ :

$$u_{10} = u_1(0) \le r(0), \qquad v_{10} = v_1(0) \le \rho(0). \quad (1.18)$$

В качестве решения системы двойных ДН (1.8), (1.16) будем рассматривать всякое неотрицательное решение из множества решений неравенств (1.8), дополнительно удовлетворяющее неравенствам (1.16). Такими решениями, в частности, являются неотрицательные решения уравнений (1.9), так как выполняются условия: $f_1 \le f,\ \varphi_1 \le \varphi$.

Сделаем в системе ДН (1.16) замену переменных по формулам

$$r_1 = h - r, \qquad \rho = k - \rho$$

и придем к неравенствам

$$\dot r_1 \le \bar f_1(r_1,\rho_1,t), \qquad \dot\rho_1 \le \bar\varphi_1(r_1,\rho_1,t), \tag{1.19}$$

где

$$\bar f_1 = -f_1(h-r,k-\rho,t), \qquad \bar\varphi_1 = -\varphi_1(h-r,k-\rho,t).$$

Неравенства (1.19) имеют место по меньшей мере в области

$$r_1\in[0,h], \qquad \rho_1\in[0,k], \qquad t\in[0,T].$$

Видим, что правые части неравенств (1.19) удовлетворяют условиям теоремы 1.2. Значит, на промежутке $[0,T]$ справедливы неравенства

$$r \ge u_1(u_{10},v_{10},t), \qquad \rho\ge v_1(u_{10},v_{10},t),$$

где $u_1,v_1$ — решение системы ДУ (1.17) с начальными значениями (1.18).

Отметим, что в некоторых прикладных задачах возникают системы ДН вида

$$\dot r\le f(r,t), \qquad \varphi_1(r,\rho,t)\le\dot\rho\le\varphi(r,\rho,t), \tag{$*$}$$

где функции $f$ и $\varphi$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2, а функция $\varphi_1$ монотонно убывает по переменной $r$. В данных обстоятельствах решения этой системы неравенств с учетом теорем 1.1 и 1.2 можно оценить соответствующим частным решением системы ДУ:

$$\dot u = f(u,t), \qquad \dot v=\varphi(u,v,t), \qquad \dot v_1=\varphi_1(u,v_1,t).$$

Далее предположим, что помимо неравенств (1.8), (1.16) имеется еще одно ДН вида

$$\dot\sigma\le\psi(r,\rho,r_1,\rho_1,\sigma,t) \tag{1.20}$$

при $r_1=r$, $\rho_1=\rho$, определенное в области

$$r\in[0,H], \quad \rho\in[0,K], \quad \sigma\in[0,M], \quad t\in[0,\infty), \tag{1.21}$$



где $\psi$ — функция переменных $r,\rho,\sigma,t$ (иногда вводятся еще переменные $r_1,\rho_1$).

Будем считать, что в области (1.21) функция $\psi(r,\rho,r_1,\rho_1,\sigma,t)$ однозначная, непрерывная по всем своим аргументам (по $t$ допускается кусочная непрерывность), удовлетворяет условию Липшица по $\sigma$, условиям монотонного возрастания по $r,\rho$ и условиям монотонного убывания по $r_1,\rho_1$.

Если функция $\psi(r,\rho,r_1,\rho_1,t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то, заменив $r,\rho,r_1,\rho_1$ соответственно на

$$u=u(u_0,v_0,t), \qquad v=v(u_0,v_0,t),$$
$$u_1=u_1(u_{10},v_{10},t), \qquad v_1=v_1(u_{10},v_{10},t),$$

получим еще большие значения этой функции. Таким образом, из неравенства (1.20) будем иметь

$$\dot\sigma\le\psi(\sigma,t) \qquad \text{при} \qquad \psi\equiv\psi(u,v,u_1,v_1,t),$$

справедливое в области $\sigma\in[0,M]$, $t\in[0,T]$. Следовательно, на основании теоремы 1.1 любое решение $\sigma(t)$ неравенства (1.20) с начальным условием

$$\sigma_0=\sigma(0)\le w_0=w(0)\in[0,m), \qquad m\le M,$$

удовлетворяет неравенству

$$\sigma(t)\le w(u_0,v_0,u_{10},w_{10},t),$$

где $w$ — решение уравнения $\dot w=\psi(w,t)$, $t\in[0,T_1]$, $T_1$ — наименьший положительный корень уравнения $w(u_0,v_0,w_0,t)=m$ относительно $t$, принадлежащий промежутку $[0,T]$. В случае отсутствия такого корня полагают $T_1=T$. В рассматриваемой задаче можно принять: $u_0=u_{10}=r_0$, $v_0=v_{10}=\rho_0$, $w_0=\sigma_0$. Приходим тем самым к следующей теореме.

**Теорема 1.3.** *Пусть имеется система ДН:*

$$f_1(r,\rho,t)\le\dot r\le f(r,\rho,t), \qquad \varphi_1(r,\rho,t)\le\dot\rho\le\varphi(r,\rho,t),$$
$$\dot\sigma\le\psi(r,\rho,r_1,\rho_1,\sigma,t) \quad \textit{при} \quad r_1\equiv r,\ \ \rho_1\equiv\rho, \tag{1.22}$$

*заданных в области* (1.21). *Здесь функции* $f$ *и* $\varphi$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2, *функции* $f_1$ *и* $\varphi_1$ — *аналогичным условиям. Функция* $\psi$ *считается однозначной, непрерывной по* $r, \rho, r_1, \rho_1, \sigma$, *кусочно-непрерывной по* $t$, *монотонно возрастающей по* $r, \rho$, *монотонно убывающей по* $r_1, \rho_1$.

*Тогда любое решение* $\big(r(t), \rho(t), \sigma(t)\big)$ *системы неравенств* (1.22) *с начальными данными* $r_0 = u_0$, $\rho_0 = v_0$, $\sigma_0 = w_0$, *принадлежащими области*

$$r \in [\,0, h), \qquad \rho \in [\,0, k), \qquad \sigma \in [\,0, m) \tag{1.23}$$

*при* $h \le H$, $k \le K$, $m \le M$, *удовлетворяет условиям*

$$r(t) \le u(u_0, v_0, t), \qquad \rho(t) \le v(u_0, v_0, t),$$

$$\sigma(t) \le w(u_0, v_0, w_0, t) \qquad \textit{при} \qquad t \in [\,0, T_1\,],$$

*где* $(u, v, w)$ — *соответствующее решение мажорантной дифференциальной системы,* $T_1$ — *первый момент времени, когда это решение достигает наружной границы области* (1.23).

## 1.2 Теоремы об устойчивости движения

Пусть движение механической системы (МС) описывается системой ДУ, представленной в нормальном векторном виде

$$\dot y = f(y, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot y_s = f_s(y_1, ..., y_n, t), \qquad s = \overline{1, n}. \tag{1.24}$$

Будем считать, что система (1.24) задана в некоторой окрестности $\bar G$ нуля комплексного векторного пространства: $\bar G = \{\, y : \ |\, y_s\,| \le h_s, \ s = \overline{1, n}\,\}$ при $t \ge 0$. Предполагается также, что правая часть системы удовлетворяет условиям существования и непрерывности решений в области $\bar G$. Например, вектор-функция $f(y, t)$ может иметь вид степенных многочленов по $y$ с переменными ограниченными коэффициентами или равномерно и абсолютно сходящихся рядов.

Рассмотрим задачу об оценке отклонения от нуля или приближения к нулю решений уравнения (1.24) с течением времени $t$. Для анализа поведения решений нет нужды изучать движение каждой из $n$ переменных $y_s$ — достаточно наблюдать за движением лишь одной неотрицательной непрерывной переменной $r = r(y)$, к примеру, $r = \sum_{s=1}^{n} |\, y_s\,|$ или $r = \sum_{s=1}^{n} |\, y_s\,|^2$, обладающую тем свойством, что по меньшей мере на некотором промежутке $r \in [\,0, H\,]$ переменные $|\, y_s\,|$ удовлетворяют неравенствам



$$|\, y_s\,| \le h_s(r), \qquad r \in [\,0, H\,], \qquad s = \overline{1, n}, \tag{1.25}$$

где $h_s$ — непрерывные, ограниченные, неотрицательные, монотонно возрастающие по $r$ функции такие, что

$$h_s(r) \le l_s, \qquad r \in [\,0, H\,], \qquad \lim_{r \to 0}\ h_s(r) = 0. \tag{1.26}$$

Отметим, что здесь неравенством $r(y) \le c$, где $c \le H$, задается некоторая окрестность точки $y = 0$, которую будем обозначать $\{\, r \le c\,\}$. Поскольку функции $h_s$ по предположению монотонные, то из условия $r(y) \le c$, следует, что $|\, y_s\,| \le h_s(c)$, т.е. область $\{\, r \le c\,\} \subset \{\, |\, y_s\,| \le h_s(c)\,\}$.

Еще о предположениях. Будем считать, что функция $r(y)$ обладает непрерывными или кусочно-непрерывными частными производными по $y_s$, т.е. существует векторная функция

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{\partial r}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial r}{\partial y_n}\right).$$

Эту функцию $r(y)$, удовлетворяющую перечисленным выше условиям, будем называть (по терминологии Г.И. Мельникова [106]) определенно положительной функцией, причем в качестве ее производной по времени $\dot r(y)$ будем рассматривать полную производную по $t$ от сложной функции $r[\,y(t)\,]$, где $y(t)$ — какое-либо решение ДУ (1.24):

$$\dot r = \frac{\partial r}{\partial y}\,\dot y = \frac{\partial r}{\partial y}\,f(y, t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial y_s}\,f_s(y, t). \tag{1.27}$$

Заметим попутно, что более общее понятие определенно положительной функции $r(y)$ означает существование скалярной функции $q(y) \in C[\,y\,]$, $|\, y_s\,| < l_s$, такой, что $r(y) \ge q(y) > 0$, $r(0) = q(0) = 0$ при $|\, q_s\,| \ne 0$.

Видим, что функция (1.27) представляет собой функцию переменных $y$ и $t$. С помощью неравенств (1.25) часто можно оценить эту функцию сверху. В итоге приходим к ДН уже известного вида (1.1):

$$\dot r \le f(r,t), \qquad r \in [\,0, H\,]$$

с непрерывной или кусочно-непрерывной по $t$ функцией $f(r,t)$.

Ввиду того, что согласно введенным предположениям решения $y(t)$ дифференциальной системы существуют и непрерывны в области $\bar G$ и, кроме того, функция $r(y)$ — непрерывная неотрицательная функция, в этом неравенстве (1.1) внимания заслуживают только его непрерывные неотрицательные решения.

Тогда, используя теорему 1.1 о ДН, можно найти оценку функции $r$ вида (1.4), справедливую на конечном или бесконечном промежутке времени. Далее с помощью полученной оценки, применяя неравенства вида (1.25), можно найти оценки для переменных $|\,y_s\,|$. В результате будут получены оценки поведения всех решений на конечном или бесконечном промежутке времени с начальными условиями, которые подчиняются неравенству $r_0 \le r(y_0) \le u_0$, где $u_0 \in [\,0, H\,]$.

Отметим, что в случае, когда решение $u(u_0, t)$ ДУ, соответствующего неравенству (1.1), не достигает значения $u = H$, $\forall\, t \ge 0$, то тогда оценки справедливы $\forall\, t \ge 0$. Если, помимо этого, $u(u_0, t) \to 0$ при $t \to \infty$, то с учетом второго условия (1.26) имеем: $|\,y_s\,| \to 0$ при $t \to \infty$; следовательно, решения с указанными выше начальными условиями асимптотически стремятся к нулевому решению. Принимая во внимание изложенное, можно получить следующие *теоремы Г.И. Мельникова* [103, 106].

**Теорема 1.4.** *Пусть в области* $\{\,r(y) \le H\,\} \subset \bar G$ *решения дифференциальной системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству*

$$\dot r \le f(r), \qquad r \in [\,0, H\,], \qquad t \ge 0, \tag{1.28}$$

*где* $r(y)$ *— некоторая определенно положительная функция. Здесь* $f$ *— непрерывная, неположительная функция, удовлетворяющая условиям*

$$f(0) = 0, \qquad f(r) < 0, \qquad \forall\, r \in (0, H\,].$$



*Тогда все решения* $y(t)$ *с начальными данными из области* $\{\,r(y_0) \le u_0 < H\,\}$ *не покинут область* $\{\,r < H\,\}$ *и войдут в сколь угодно малую область* $\{\,r(y) \le \varepsilon\,\}$ *не позднее момента времени* $\tau$, *определяемого формулой*

$$\tau = \tau(\varepsilon, u_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{u_0} \frac{dr}{-\,f(r)}.$$

**Теорема 1.5.** *Будем предполагать, что в области* $\{\,r(y) \le H\,\} \subset \bar G$ *решения системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству вида* (1.28), *причем* $f(r) > 0$ *при* $r \in (0, H\,]$. *Тогда решения с начальными данными из области* $\{\,r(y) \le u_0 < H\,\}$, *могут выйти из области* $\{\,r \le H\,\}$, *но не раньше, чем через промежуток времени*

$$\tau = \int\limits_{u_0}^{H} \frac{dr}{f(r)}.$$

Укажем на то, что теорема 1.4 характеризует быстроту затухания движения, а теорема 1.5 определяет оценку нарастания движения сверху.

**Теорема 1.6.** *Пусть в области* $\{\,r \le H\,\} \subset \bar G$ *решения системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству*

$$\dot r \le \gamma(t)\, f(r),$$

*где* $f(r) > 0$ *при* $r \in (0, H\,]$, $f(0) = 0$, $\gamma(t)$ *— непрерывная или кусочно-непрерывная функция, интеграл от которой ограничен сверху:* $\int_0^t \gamma(t)\, dt \le M$, $t \ge 0$. *Допустим, что имеется такое число* $h \in (0, H)$, *для которого выполняется неравенство* $\int_h^H dr/f(r) > M$.

*Тогда решения с начальными условиями из области* $\{\,r \le h\,\}$ *остаются в области* $\{\,r \le H\,\}$. *Если, кроме того,* $\int_0^t \gamma(t)\, dt \to -\infty$ *при* $t \to \infty$, *то эти решения асимптотически приближаются к нулевому решению. При этом затухание движения оценивается так: все решения с начальными условиями из области* $\{\,r \le u_0\,\}$ *в момент* $t$ *находятся в области* $\{\,r \le u(u_0, t)\,\}$, *где* $u(u_0, t)$ *опреде-*

*ляется формулой*

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{dr}{f(r)} = \int\limits_0^t \gamma(t)\,dt.$$

**Замечание.** Отметим, что в этой и последующих теоремах допускается знакопеременность производной $\dot r$; к самой же функции $r \geq 0$ следует относиться как к неотрицательной функции Ляпунова.

**Теорема 1.7.** *Если в области $\{\, r \leq H \,\} \subset \bar G$ решения системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству*

$$\dot r \leq \gamma(t)\, r + \mu(t)\, r^{1+k}, \qquad r \in [\,0, H\,], \quad k > 0,$$

*и если функции $\gamma(t)$, $\mu()$ таковы, что существует конечное положительное число $u_0 < H$, удовлетворяющее неравенству*

$$H \left(\Phi^k + kH^k \int\limits_0^t \mu(t)\, \Phi^k\, dt\right)^{-1/k} > u_0 \quad \textit{при} \quad \Phi \equiv \exp \int\limits_0^t \gamma(t)\, dt,$$

*то решения с начальными условиями из области $\{\, r \leq u_0 \,\}$ останутся в области $\{\, r < H \,\}$ и в момент $t$ будут находиться в области $\{\, r \leq u(u_0,t) \,\}$, где*

$$u = u_0\Phi \left(1 - ku_0^k \int\limits_0^t \mu(t)\, \Phi^k\, dt\right)^{-1/k}.$$

*Если, кроме того, $\int_0^t \gamma(t)\,dt \to -\infty$ при $t \to \infty$, то упомянутые решения согласно последней оценке асимптотически приближаются к нулевому решению.*

**Теорема 1.8.** *Пусть в области $\{\, r \leq H \,\} \subset \bar G$ решения системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству*

$$\dot r \leq a\left(e^{-kr} - 1\right) + \delta(t), \tag{1.29}$$

*где $a, k$ — некоторые постоянные, а непрерывная ограниченная функция $\delta(t)$ имеет смысл постоянно действующего возмущения. Предположим также, что $\exists\, u_0 \in (0, H)$ — постоянная, удовлетворяющая условию $u(u_0,t) < H$, $\forall\, t \geq 0$, где*



$$u(u_0,t) = \int\limits_0^t \delta(t)\,dt - at + {}$$

$$+ \frac{1}{k} \ln\left\{ e^{ku_0} + ka \int\limits_0^t e^{k\left(at - \int_0^t \delta(t)\,dt\right)}\, dt \right\}.$$

*Тогда все решения с начальными данными из области $\{\, r(y_0) \leq u_0 \,\}$, оставаясь для всех $t \geq 0$ в области $\{\, r(y) < H \,\}$, в момент $t$ находятся в области $\{\, r(y) \leq u(u_0,t) \,\}$.*

Отметим, что в случае постоянно действующего возмущения $\delta(t)$ неравенство вида (1.29) можно получить следующим образом [106, 152, 153]. Сначала в силу дифференциальной системы определяется ДН вида

$$\dot r \leq \alpha r + \beta r^2 + \delta(t),$$

с постоянными $\alpha, \beta$, а затем проводится дополнительная оценка вида

$$\alpha r + \beta r^2 \leq a\left(e^{-kr} - 1\right),$$

приводящая к неравенству (1.29).

Далее сформулируем более общую теорему в духе известных результатов [80, 94, 202].

**Теорема 1.9.** *Пусть в области $\{\, r \leq H \,\} \subset \bar G$ решения системы* (1.24) *удовлетворяют неравенству* (1.1) *: $\dot r \leq f(r,t)$, причем функция $f(r,t)$ определена, однозначна, кусочно-непрерывна по $t$, удовлетворяет условию Липшица по $r$ и $f(0,t) \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$. Тогда всякое решение системы* (1.24) *с начальными данными из области $\{\, r \leq u_0 \,\}$ при $0 \leq u_0 < h \leq H$ удовлетворяет неравенству*

$$r \leq u(u_0,t), \qquad t \in [\,0, T\,], \tag{1.30}$$

*где $u$ — решение дифференциального уравнения $\dot u = f(u,t)$, определенного при начальном условии $u(u_0,0) = u_0$. Неравенство* (1.30) *справедливо по меньшей мере на промежутке $[\,0, T\,]$, где $T$ — это наименьший положительный корень уравнения $u(u_0,T) = h$. Если* *данное уравнение не имеет положительных корней, то полагаем, что неравенство* (1.30) *справедливо на промежутке* $t \in [0, \infty)$.

Результаты данных теорем применяются в следующем параграфе, где в дифференциальной системе в ее правой части оцениваются последовательно слагаемые для составления требуемого ДН.

## 1.3 Оценки устойчивости движения

Исследуем возмущенное движение, которое задается системой ДУ вида

$$\dot{y}_s = \lambda_s y_s + \mu_{s-1} u_{s-1} + p^s_\nu y^\nu + Y_s(t, y), \qquad s = \overline{1, n}, \ |\,\nu\,| = \overline{2, m}, \quad (1.31)$$

где $p^s_\nu$ — постоянные, причем справа нелинейные члены имеют вид степенных многочленов.

Здесь $y = (y_1, ..., y_n)$ — вектор $n$–мерного комплексного векторного пространства $C^n$. Вектор с целочисленными неотрицательными компонентами обозначен через $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$. Определим величину $|\,\nu\,| = \nu_1 + \, ... \, + \nu_n$ и рассмотрим одночлен $y_1^{\nu_1} \, ... \, y_n^{\nu_n} \equiv y^\nu$, называемый вектором $y$ в векторной степени $\nu$.

Запись в уравнении (1.31) $p^s_\nu \, y^\nu$ означает суммирование по одинаковому индексу $\nu$:

$$p^s_\nu \, y^\nu \equiv \sum_{|\,\nu\,|=2}^{m} p^s_\nu \, y^\nu, \qquad p^s_\nu \equiv p^s_{\nu_1 \ldots \nu_n},$$

где векторный индекс суммирования $\nu$ принимает все значения из множества векторов $\{\,(\nu_1, ..., \nu_n)\,\}$, определяемого условиями: $2 \le \nu_1 + \, ... \, + \nu_n \le m$; $\nu_i$ — неотрицательные целые числа.

Отметим также, что уравнение (1.31) — это уравнение, записанное в канонической (нормальной) форме ДУ 1–го порядка, к которому приведена исходная $n$–мерная дифференциальная система с помощью применения стандартного неособого преобразования [106].

В уравнении (1.31) функции $Y_s(t, y)$ представляют постоянно действующие возмущения, либо остаточные функции, получаемые в результате аппроксимации нелинейных членов степенными многочленами. Считается, что функции $Y_s(t, y)$ удовлетворяют условиям существования и непрерывности решений системы (1.31). Кроме того, предполагается, что эти функции можно оценить непрерывной ограниченной функцией времени



$$\sum_{s=1}^{n} |\,Y_s(t, y)\,| \le \delta(t) \qquad (1.32)$$

в области $|\,y_s\,| \le H$, $s = \overline{1, n}$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_s$ могут быть произвольными, в том числе и кратными. Они могут быть с положительными, отрицательными или равными нулю вещественными частями. Разделим $\lambda_s$ на две группы. Во *вторую группу* поместим по одному корню из каждой пары комплексно сопряженных корней. В *первой группе* останется $n_1 \le n$ корней, включая действительные, которые перенумеруем в порядке убывания их вещественных частей.

Корням первой группы соответствуют первые $n_1$ ДУ системы (1.31). Остальные $n - n_1$ уравнений не выписываем, так как их легко получить, взяв комплексное сопряжение от соответствующих уравнений.

Величины $\mu_{s-1}$ будем считать, не в ущерб общности, удовлетворяющими оценке

$$\mu_{s-1} \le \mu, \qquad s = \overline{2, n}, \qquad (1.33)$$

где $\mu$ — некоторая постоянная.

Далее представим переменные $y_s$ в показательной форме: $y_s = r_s e^{i\theta_s}$, где $i^2 = -1$, $\theta_s$ — аргумент комплексного числа $y_s$, $r_s$ — его модуль. Так как модули $r_s$ комплексно сопряженных переменных $y_s$ и $\bar{y}_s$ совпадают, то количество различных $r_s$ равно $n_1$. Имеем

$$r_s = y_s \, e^{-i\theta_s} = \bar{y}_s \, e^{i\theta_s} = \frac{1}{2} \left( y_s \, e^{-i\theta_s} + \bar{y}_s \, e^{i\theta} \right).$$

Дифференцируя, получим значения

$$\dot{r}_s = \frac{1}{2} \left( \dot{y}_s \, e^{-i\theta_s} + \dot{\bar{y}}_s \, e^{i\theta_s} \right) = \mathrm{Re} \left( \dot{y}_s \, e^{-i\theta_s} \right),$$

удовлетворяющие в силу системы (1.31) уравнениям

$$\dot r_s = \alpha_s r_s + \mu_{s-1}\,\mathrm{Re}\left(y_{s-1}\,e^{-i\theta_s}\right) + \mathrm{Re}\left(p_\nu^s\,y^\nu\,e^{-i\theta_s}\right) + $$

$$+\ \mathrm{Re}\left(Y_s\,e^{-i\theta_s}\right), \qquad \alpha_s \equiv \mathrm{Re}\,\lambda_s.$$

Обозначим определенно положительную функцию $r = \sum_{s=1}^{n_1} r_s$. После ее дифференцирования получим

$$\dot r = \sum_{s=1}^{n_1} \alpha_s r_s + \mathrm{Re}\sum_{s=2}^{n_1} \mu_{s-1} y_{s-1}\,e^{-i\theta_s} + $$

$$+\ \mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n_1} p_\nu^s\,y^\nu\,e^{-i\theta_s} + \mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n_1} Y_s\,e^{-i\theta_s}. \tag{1.34}$$

Оценим затем все четыре суммы в соотношении (1.34). Первая сумма оценивается по наибольшей вещественной части корней, как

$$\sum_{s=1}^{n_1} \alpha_s r_s \le \alpha_1 r.$$

Для оценки второй суммы воспользуемся условием (1.33):

$$\mathrm{Re}\sum_{s=2}^{n_1} \mu_{s-1}\,y_{s-1}\,e^{-i\theta_s} \le \sum_{s=1}^{n_1-1} \mu r_s \le \mu r. \tag{1.35}$$

Для оценки третьей суммы учтем, что $|\,y_s\,| \equiv r_s \le r$. Имеем

$$\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n_1} p_\nu^s\,y^\nu\,e^{-i\theta_s} \le \sum_{s=1}^{n_1} |\,p_\nu^s\,||\,y^\nu\,| \le \sum_{s=1}^{n_1} |\,p_\nu^s\,|\,r^{|\,\nu\,|} \ \equiv$$

$$\equiv\ \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{|\,\nu\,|=2}^{m} |\,p_\nu^s\,|\,r^{|\,\nu\,|} = \sum_{k=2}^{m} A_k\,r^k, \tag{1.36}$$

где обозначено

$$A_k \equiv \sum_{|\,\nu\,|=k}\sum_{s=1}^{n_1} |\,p_\nu^s\,|.$$



С использованием неравенства (1.32) оценим четвертую сумму:

$$\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n_1} Y_s\,e^{-i\theta_s} \le \sum_{s=1}^{n_1} |\,Y_s\,| \le \delta(t). \tag{1.37}$$

Эти оценки подставим в правую часть уравнения (1.34) и найдем ДН для определенно положительной функции $r$ :

$$\dot r \le \sum_{k=1}^{m} A_k\,r^k + \delta(t), \qquad r \le H. \tag{1.38}$$

Неравенство (1.38) имеет вид неравенства (1.1), где роль функции $f(r,t)$ отведена правой части неравенства (1.38).

Согласно теореме 1.9 получим оценку затухания или нарастания движения с начальными данными из области $\{\,r \le u_0\,\}$, где $0 \le u_0 < h \le H$. Для выработки конкретных заключений о характере поведения решений надо построить аналитическое или численное решение $u(u_0,t)$ уравнения $\dot u = f(u,t)$. Часто, не прибегая к таким построениям и вычислениям, можно сделать определенные выводы, характеризующие поведение решений.

К примеру, если правая часть ДН (1.38) неположительна на некотором промежутке $r \in [\,\varepsilon, u_0\,]$, $u_0 < H$, $\forall\, t \ge 0$, то тогда имеем оценку $r \le u_0$, $\forall\, t \ge 0$. В случае отсутствия постоянно действующих возмущений, когда $\delta(t) \equiv 0$, получим уравнение $\dot u = \sum_{k=1}^{m} A_k\,u^k$, интегрируемое путем разделения переменных и тогда на основании получаемого интеграла (см. теоремы 1.4, 1.5) можно судить о поведении решений. Более того, можно при этом сделать определенные выводы об асимптотическом приближении решений к нулю по мере неограниченного роста времени.

За счет некоторого увеличения правой части неравенства (1.38) можно прийти к интегрируемому неравенству более простой структуры вида (1.29) из теоремы 1.8. Ниже рассмотрен пример того, как это можно сделать.

**Модельный пример.** Осуществим переход от неравенства (1.38) к неравенству (1.29) в некоторой области $r \le h$ при условии, что $A_1 \le 0$. Будем считать $A_k \ge 0$, $\forall\, k \ge 2$. В этом случае

имеем
$$\sum_{k=1}^{m} A_k\, r^k \le A_1 r + \beta r^2, \qquad \beta \equiv \sum_{k=2}^{m} A_k h^{k-2}. \tag{1.39}$$

Оценим также снизу функцию

$$a\left(e^{-kr}-1\right) = a\left(-kr + \frac{1}{2!}\,k^2r^2 - \frac{1}{3!}\,k^3r^3 \;+\; ...\right) \;\ge$$
$$\ge\; a\left(-kr + \frac{1}{2}\,k^2r^2 - \frac{1}{6}\,k^3r^3\right) \ge \tag{1.40}$$
$$\ge\; a\left(-\,kr + \frac{1}{2}\,k^2r^2 - \frac{1}{6}\,k^3r^2h\right),$$

где $a$ и $k$ — некоторые положительные постоянные.

Потребуем, чтобы правая часть неравенства (1.40) была равна правой части неравенства (1.39). Тогда, очевидно, левые части этих неравенств связаны между собой соотношением

$$a\left(e^{-kr}-1\right) \ge \sum_{k=1}^{m} A_k\, r^k, \qquad r \le h.$$

Тем самым получаем путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $r$ для постоянных $a$ и $k$ уравнения, решая которые найдем

$$a = -\,\frac{A_1}{k}, \qquad k = \frac{3}{2h}\left(1 \;\pm\; \sqrt{1 + \frac{8\beta h}{3A_1}}\right).$$

Постоянную $h > 0$ найдем из условия, что $h \le H$, а также из условия вещественности величины $k$. Имеем отсюда

$$h \le \frac{-\,3A_1}{8\beta} \quad\Longrightarrow\quad h = \min\left\{H,\; \frac{-\,3A_1}{8\beta}\right\}.$$

Таким образом, вместо неравенства (1.38) получили неравенство (1.25) и тогда в силу теоремы 1.8 можем составить конкретные заключения о характере поведения решений.



Отметим в качестве замечания, что в выражениях $r_s = y_s\, e^{-i\theta_s}$ переменные $y_s$ и их модули $r_s$ входят как непрерывные величины в согласии с условием непрерывности решений. Вместе с тем, аргумент $\theta_s$ может иметь разрывы 1–го рода в моменты прохождения переменной $y_s$ через ноль, т.е. $\dot r_s$ может иметь разрывы 1–го рода в моменты времени, когда $r_s = 0$. Определить $\dot r_s$ можно также в моменты, при которых $r_s = 0$, $\dot r_s = 0$. В этом случае при таком определении построенное ДН справедливо не только на промежутках непрерывности $\dot r$, но и $\forall\, t \ge 0$, $r \in [\,0, H\,]$.

Полученные выше оценки устойчивости движения можно уточнить. Действительно, изложенный метод оценивания не лишен недостатков; главный состоит в том, что при построении ДН нелинейные члены оценивались по модулю. Это вело к снижению общего качества процесса оценивания, поскольку в анализ вводилось тем самым допущение об их отрицательном воздействии на систему в отношении ее устойчивости.

Однако известно, что нелинейные члены могут в значительной степени способствовать затуханию движения, как это имеет место, например, в особых случаях. Исходя из этих соображений, целесообразно для получения более точных оценок устойчивости движения строить ДН с более точным учетом структуры нелинейных членов дифференциальной системы. С этой целью предлагается произвести многочленное преобразование системы для выявления наиболее существенных нелинейных членов [106]. Такой подход позволяет мажорировать явно отрицательные члены в выражении для $\dot r$ некоторыми отрицательными же функциями от $r$.

Данную методику применим более детально в особом случае одного нулевого корня характеристического уравнения. Пусть система ДУ возмущенного движения (1.31) с помощью многочленной подстановки уже приведена к нелинейной канонической форме ссемы ДУ 1–го порядка. Это значит, что постоянные $p^s_\nu \ne 0$ только при особых значениях индексов $\nu$, т.е. когда делители $\nu\lambda - \lambda_s \approx 0$. В случае одного особого корня, когда $\lambda_1 = \alpha_1 \approx 0$, $\alpha_{n_1} \le \alpha_{n_1-1} \le \ldots \le \alpha_2 < 0$, первое уравнение системы (1.31) записывается так:

$$\dot y_1 = \lambda_1 y_1 + \sum_{k=2}^{m} g_k\, y_1^k + Y_1(t,y), \tag{**}$$

Что касается остальных уравнений системы (1.31), то в них каждый нелинейный член с коэффициентом $p_\nu^s \neq 0$ обязательно содержит в качестве множителя какую-нибудь из неособых переменных $y_2, y_3, \ldots, y_n$ в первой или более высокой степени. Совершим поэтому специальное преобразование, исключающее лишь члены вида $g_k^s\, y_1^k$. Допустим отсюда, что все $p^s_{\nu 0\ldots 0} = 0$, $s \geq 2$. Переменную $r = \sum_{s=1}^{n_1} r_s$ запишем в виде $r = r_1 + r_0$, где $r_0 = \sum_{s=2}^{n_1} r_s$ — неособая переменная. При этом в уравнении (1.34) выделим некоторые члены, соответствующие $s = 1$. Имеем

$$\dot r = \sum_{s=1}^{n_1} \alpha_s r_s + \frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n_1} \mu_{s-1}\left(y_{s-1}\, e^{-i\theta_s} + \bar y_{s-1}\, e^{i\theta_s}\right) + g_k\, y_1^{k-1}\, r_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n_1}\left(p_\nu^s\, y^\nu\, e^{-i\theta_s} + \bar p_\nu^s\, \bar y^\nu\, e^{i\theta_s}\right) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\left(Y_s\, e^{-i\theta_s} + \bar Y_s\, e^{i\theta_s}\right). \quad (1.41)$$

Произведем последовательное оценивание в выражении (1.41). Первую сумму оценим следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{n_1} \alpha_s r_s = \alpha_1 \sum_{s=1}^{n_1} r_s + \sum_{s=2}^{n_1} (\alpha_s - \alpha_1)\, r_s \leq \alpha_1 r + (\alpha_2 - \alpha_1)\, r_0.$$

Вторую и последнюю суммы оценим аналогично тому, как это делалось в соотношениях (1.35) и (1.37). С учетом замечания о постоянных $p_\nu^s$ вместо оценки (1.36) возьмем

$$\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n_1}\left(p_\nu^s\, y^\nu\, e^{-i\theta_s} + \bar p_\nu^s\, \bar y^\nu\, e^{i\theta_s}\right) \leq \sum_{s=2}^{n_1} |\, p_\nu^s\,|\, r^{|\,\nu\,|-1}\, r_0 \;=\; \sum_{k=2}^{m} B_k\, r^{k-1}\, r_0,$$

$$B_k \equiv \sum_{|\,\nu\,|=k}\sum_{s=2}^{n_1} |\, p_\nu^s\,|.$$

Введем обозначение

$$\tilde g_k \equiv \begin{cases} g_k & \text{при нечетных} \quad k, \\ |\, g_k\,| & \text{при четных} \quad k \end{cases}$$



и учтем, что $r = r_1 + r_0 \geq r_1$. Тогда, оценивая третью сумму по $k = \overline{2, m}$ в уравнении (1.41), получим

$$g_k\, y_1^{k-1}\, r_1 \equiv \sum_{k=2}^{m} g_k\, g_1^{k-1}\, r_1 \leq \tilde g_k\, r_1^k \;=$$

$$=\; \tilde g_k\left[\, r^k - (r^k - r_1^k)\,\right] \leq \tilde g_k\, r^k + |\, g_k\,|\, r_0\, \frac{r^k - r_1^k}{r - r_1} \;=$$

$$=\; \tilde g_k\, r^k + |\, g_k\,|\, r_0\, r^{k-1}\left[\, 1 + \frac{r_1}{r} \;+\; \ldots \;+\; \left(\frac{r_1}{r}\right)^{k-1}\,\right] \;\leq$$

$$\leq\; \tilde g_k\, r^k + k\,|\, g_k\,|\, r_0\, r^{k-1},$$

откуда найдем, что

$$\sum_{k=2}^{m} g_k\, y_1^{k-1}\, r_1 \leq \sum_{k=2}^{m} \tilde g_k\, r^k + \sum_{k=2}^{m} k\,|\, g_k\,|\, r_0\, r^{k-1}.$$

Подставим все полученные оценки в правую часть уравнения (1.41). Результатом будет неравенство

$$\dot r \leq (\alpha_1 + \mu)\, r + \sum_{k=2}^{m} \tilde g_k\, r^k \;+$$

$$+\; r_0\left[\, \alpha_2 - \alpha_1 + \sum_{k=2}^{m}\left(B_k + k\,|\, g_k\,|\right) r^{k-1}\,\right] + \delta(t). \quad (1.42)$$

Ввиду того, что у второго корня $\alpha_2$ вещественная часть отрицательна и не мала, можно указать область $\{\, r \leq H_*\,\}$, $H_* \leq H$, такую, в которой выражение справа в квадратных скобках соотношения (1.42) не положительно; отбрасывая его, получим следующее ДН:

$$\dot r \leq (\alpha_1 + \mu)\, r + \sum_{k=2}^{m} \tilde g_k\, r^k + \delta(t), \qquad r \in [\, 0, H_*\,]. \quad (1.43)$$

Отметим здесь, что в неравенстве (1.43) коэффициенты $\tilde{g}_k$ при нечетных $k$ могут принимать также и отрицательные значения.

С помощью ДН (1.43) можно получить более точные представления о характере поведения решений в сравнении с неравенством (1.38). К примеру, будем считать, что: первый корень $\alpha_1 = 0$, все корни различные и $\mu = 0$, постоянно действующих возмущений нет, т.е. $\delta(t) \equiv 0$, выделена только одна константа Ляпунова $g_m \equiv g$, причем она отрицательная и $m$ — нечетное. Тогда имеем неравенство

$$\dot{r} \le g r^m \qquad \text{при} \qquad g < 0, \quad r \le H_*.$$

В соответствии с теоремой 1.4 об устойчивости заключаем, что все решения с начальными условиями из области $r \le u_0$ при $u_0 < H_*$ асимптотически стремятся к нулю согласно оценке

$$r \le u(u_0, t) \qquad \text{при} \qquad u = \frac{u_0}{\left[\, 1 - g\,(m-1)\, u_0^{m-1}\, t \,\right]^{1/(m-1)}}.$$

В случае, если $\alpha_1 = \mu = \delta(t) = 0$ и выделено несколько постоянных $g_k$, то их можно свести к двум постоянным (детали того, как это делается, см. в работе [106]). Получим в итоге интегрируемое в квадратурах ДН вида

$$\dot{r} \le g\, r^{m_0} + b\, r^{2m_0 - 1}, \tag{1.44}$$

где постоянные $g$ и $b$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $g < 0$, $b < 0$, $m_0$ — нечетное, то ДН (1.44) показывает более быстрое приближение решений к нулю, чем неравенство $\dot{r} \le g\, r^{m_0}$ [105].

В случае одной пары особых корней, когда $\alpha_1 \approx 0$, $\alpha_{n_1} \le \alpha_{n_1 - 1} \le \ \dots\ \le \alpha_2 < 0$, ДН строится точно так же, как и в случае одного особого корня. Разница состоит лишь в том, что в правой части уравнения (1.41) вместо суммы $\sum_{k=2}^{m} g_k\, y_1^k\, r_1$ имеем более простую сумму $\sum_{k=3}^{m} g_k\, r_1^k$, где все $k$ — нечетные. Поэтому в данном случае вместо неравенства (1.43) получим более простое ДН, определяющее характер затухания или нарастания движения

$$\dot{r} \le (\alpha_1 + \mu)\, r + \sum_{k=3}^{m} g_k\, r^k + \delta(t), \qquad r \in [\,0, H_*\,],$$



где суммирование осуществляется по всем нечетным $k$, $k = \overline{3, m}$.

## 1.4 Оценки погрешностей приближенных решений

Метод многочленного преобразования [106] приводит к построению приближенного решения системы ДУ возмущенного движения. Данные приближенные решения, в свою очередь, можно принять за точные решения некоторой дифференциальной системы и рассматривать последнюю в качестве новой математической модели описываемого движения. Возникают тем самым важные вопросы о вычислении погрешностей приближенных решений, о соответствии реального движения системы и движения ее математической модели, о влиянии на движение достаточно малых постоянно действующих возмущений и т.д. Ниже с помощью метода ДН будет изучена задача о влиянии на движение МС возмущений, представленных степенными рядами.

Начнем с различного рода допущений. Пусть имеется комплексное векторное пространство $C^n$ с векторными элементами: $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$, причем компоненты $y_{n_1+1}, \dots, y_n$ считаются комплексно сопряженными с какими-нибудь из компонент $y_1, \dots, y_{n_1}$, где $n_1 \le n$.

Возьмем в качестве нормы и метрики соответственно следующие величины:

$$r \equiv \|\, y \,\| = \sum_{s=1}^{n_1} r_s \qquad \text{при} \qquad r_s \equiv |\, y_s \,|,$$

$$\rho(y, \tilde{y}) \equiv \|\, y - \tilde{y} \,\| = \sum_{s=1}^{n_1} \rho_s \qquad \text{при} \qquad \rho_s \equiv |\, y_s - \tilde{y}\,|.$$

Предположим далее, что в окрестности нуля данного пространства, определяемой областью $\left\{\, y: \ r_s \le H,\ s = \overline{1, n_1} \,\right\} \equiv \{\, H \,\}$, заданы два автономных векторных ДУ в нормальной канонической (квазидиагональной) форме. Считается, что у них правые части содержат одинаковые квазидиагональные линейные члены, одинаковые многочлены степеней от 2 до $m$ и разные остаточные функции более высокого порядка малости (см. уравнения (1.31)):

$$\dot{y}_s = \lambda_s\, y_s + \mu_{s-1}\, y_{s-1} + p^s_\nu\, y^\nu + Y_s(y), \tag{1.45}$$

$$\dot{\tilde{y}}_s = \lambda_s\, \tilde{y}_s + \mu_{s-1}\, \tilde{y}_{s-1} + p^s_\nu\, \tilde{y}^\nu + \tilde{Y}_s(\tilde{y}), \tag{1.46}$$

где $|\,\nu\,| = \nu_1 + \ \dots\ + \nu_n = \overline{2, m}$, $s = \overline{1, n_1}$. Считается, что корни $\lambda_1$, ..., $\lambda_{n_1}$ перенумерованы в порядке убывания вещественных частей; $\lambda_s$, $\mu_{s-1}$, $p^s_\nu$ — постоянные коэффициенты.

Различные остаточные члены $Y_s, \tilde{Y}_s$ можно принять за постоянно действующие возмущения, полагая эти функции в области $\{\,H\,\}$ непрерывными и удовлетворяющими одной и той же оценке:

$$\sum_{s=1}^{n_1} |\,Y_s\,| \le \varepsilon\, r^m, \qquad \sum_{s=1}^{n_1} |\,\tilde{Y}_s\,| \le \varepsilon\, \tilde{r}^m, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.47}$$

Отметим, что здесь возможен случай, когда $\tilde{Y}_s \equiv 0$, $\forall\, s = \overline{1, n_1}$. В этой ситуации систему (1.46), полученную из системы (1.45) отбрасыванием остаточных членов, можно назвать приближенной или укороченной по отношению к точной системе (1.45).

Любые два частных решения $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ систем ДУ (1.45) и (1.46) назовем *соответственными*, если они имеют одинаковые начальные значения из области $\{\,H\,\}$, т.е. если $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0$.

Сформулируем задачу: необходимо оценить величину отклонения соответственных решений друг от друга с течением времени, т.е. оценить сверху функцию $\rho = \|\, y(t) - \tilde{y}(t)\,\| > 0$. В частности, если $\tilde{Y}_s = 0$, $s = \overline{1, n_1}$, имеем задачу об отклонении приближенного решения от точного — иными словами, задачу об оценке погрешности приближенного решения.

С целью решения этой задачи построим систему рекуррентных ДН. Для переменных $r = \sum_{s=1}^{n_1} r_s$, $\tilde{r} = \sum_{s=1}^{n_1} \tilde{r}_s$ выписать такие ДН не сложно, исходя из оценок, полученных ранее. В самом деле, системы (1.45), (1.46) отличаются от (1.31) лишь оценками для остаточных функций (ср. неравенство (1.32) с неравенствами (1.47)). Поэтому два искомых неравенства получаются из неравенства (1.38) заменой функции $\delta(t)$ на $\varepsilon r^m$ и имеют одинаковый вид

$$\dot{r} \le f(r) \quad \text{при} \quad r \le H, \qquad \dot{\tilde{r}} \le f(\tilde{r}) \quad \text{при} \quad \tilde{r} \le H,$$



где

$$f(r) \equiv \sum_{k=1}^{m} A_k\, r^k + \varepsilon\, r^m, \qquad A_k \equiv \sum_{s=1}^{n_1} \sum_{|\,\nu\,|=k} |\,p^s_\nu\,|.$$

Пользуясь этими неравенствами, по теореме 1.9 заключаем, что все решения $y(t)$, $\tilde{y}(t)$ с начальными значениями $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0 \in \{\,r < h\,\}$, $h \le H$, удовлетворяют оценке

$$r \le u(y_0, t), \qquad \tilde{r} \le u(y_0, t), \tag{1.49}$$

где $u$ — решение уравнения

$$\dot{u} = f(u) \qquad \text{при} \qquad u\,|_{t=0} = r_0 = |\,y_0\,|. \tag{1.50}$$

Укажем на то, что оценки (1.49) имеют место до момента времени $T$, когда впервые будет выполняться равенство $u(y_0, T) = h$. Возьмем далее величину $u$ за независимую переменную. Отмеченные выше решения, где $u \le h \le H$, удовлетворяют неравенствам $r \le u$, $\tilde{r} \le u$, причем величины $u$ и $t$ связаны формулой

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u)}.$$

Величина $T$ для промежутка времени $[\,0, T\,]$, на котором верны указанные оценки, определяется выражением

$$T(r_0) = \int_{r_0}^{h} \frac{du}{f(u)}.$$

Предполагается, что $f(u) \ne 0$, $u \in [\,r_0, h\,]$, т.е. уравнение (1.50) не имеет на промежутке $[\,r_0, h\,]$ особых решений.

Далее составим неравенство для погрешности $\rho$. Обозначим $y_s - \tilde{y}_s = \rho_s\, e^{i\gamma_s}$, где $\rho = \sum_{s=1}^{n_1} \rho_s$. Имеем

$$\dot{\rho} = \mathrm{Re} \sum_{s=1}^{n_1} \big(\dot{y}_s - \dot{\tilde{y}}_s\big)\, e^{-i\gamma_s} \ = \tag{1.51}$$

$$= \ \mathrm{Re}\,\big\{\,\big[\,\lambda_s\,(y_s - \tilde{y}_s) + \mu_{s-1}\,(y_{s-1} - \tilde{y}_{s-1}) + p^s_\nu\,(y^\nu - \tilde{y}^\nu) + Y_s - \tilde{Y}_s\,\big]\, e^{-i\gamma_s}\,\big\}.$$

Произведем оценку сумм, стоящих в соотношении (1.51) справа:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\left[\,\lambda_s\,(y_s-\tilde y_s)\,e^{-i\gamma_s}\,\right]=\alpha_s\rho_s\le\alpha_1\rho,\\ \operatorname{Re}\left[\,\mu_{s-1}\,(y_{s-1}-\tilde y_{s-1})\,e^{-i\gamma_s}\,\right]\le\mu\rho,\\ \operatorname{Re}\left[\,(Y_s-\tilde Y_s)\,e^{-i\gamma_s}\,\right]\le\varepsilon\,(r^m+\tilde r^m)\le 2\varepsilon u^m.\end{gathered}\tag{1.52}$$

Затем оценим сумму, содержащую множители вида $(y^\nu-\tilde y^\nu)\equiv\left(y_1^{\nu_1},\,...,\,y_n^{\nu_n}\right)-\left(\tilde y_1^{\nu_1},\,...,\,\tilde y_n^{\nu_n}\right)$. Для этого введем в рассмотрение векторы $z_i\equiv(\tilde y_1,\,...,\,\tilde y_i,\,y_{i+1},\,...,\,y_n)$, $z_0=(y_1,\,...,\,y_n)$, $z_n=(\tilde y_1,\,...,\,\tilde y_n)$. Тогда получим

$$|\,y^\nu-\tilde y^\nu\,|=\left|\,(y^\nu-z_1^\nu)+(z_1^\nu-z_2^\nu)+\;\dots\;+(z_{n-1}^\nu-\tilde y^\nu)\,\right|\le$$

$$\le\;\sum_{i=1}^{n}|\,z_{i-}^\nu-z_i^\nu\,|=\sum_{i=1}^{n}|\,y_i-\tilde y_i\,|\,\times$$

$$\times\left|\,\tilde y_1^{\nu_1}\,...\,\tilde y_{i-1}^{\nu_{i-1}}\left(\sum_{\nu_i'+\nu_i''=\nu_i-1}\tilde y_i^{\nu_i'}\;y_i^{\nu_i''}\right)y_{i+1}^{\nu_i+1}\,...\,y_n^{\nu_n}\,\right|\;\le$$

$$\le\;\sum_{i=1}^{n}k\rho_i\,u^{k-1}=k\rho\,u^{k-1},\qquad k\equiv|\,\nu\,|.$$

С учетом этой оценки, найдем оценку суммы

$$\operatorname{Re}\left[\,p_\nu^s\,(y^\nu-\tilde y^\nu)\,\right]\le|\,p_\nu^s\,|\,|\,y^\nu-\tilde y^\nu\,|\le\rho\sum_{k=2}^{m}kA_k\,u^{k-1}.\tag{1.53}$$

Подставляя полученные неравенства (1.52), (1.53) в правую часть уравнения (1.51), придем к ДН:

$$\dot\rho\le\left(\alpha_1+\mu+\sum_{k=2}^{m}kA_k\,u^{k-1}\right)\rho+\varepsilon u^m,$$

где $\rho\ge 0$, $u\in[\,0,h\,]$, $h\le H$. Если увеличить незначительно правую часть этого неравенства, добавив неотрицательную малую величину $\varepsilon m\rho\,u^{m-1}$, то придем к ДН более простой структуры



$$\dot\rho\le f'(u)\,\rho+2\varepsilon\,u^m,\qquad f'\equiv\frac{df}{du},\tag{1.54}$$

где $f(u)$ — функция, уже встречавшаяся ранее:

$$f(u)=\sum_{k=1}^{m}A_k\,u^k+\varepsilon u^m.$$

Неравенству (1.54) соответствует уравнение

$$\dot v=f'(u)\,v+2\varepsilon\,u^m.\tag{1.55}$$

Считаем, что взаимное начальное отклонение решений равно нулю, т.е. $\rho\,|_{t=0}=0$; тогда положим $v\,|_{t=0}=0$. Полагая, что $\dot u\ne 0$, с учетом уравнения (1.50) перейдем в уравнении (1.55) к независимой переменной $u$. Будем иметь

$$v'f-f'v=2\varepsilon\,u^m.$$

Умножая это уравнение на $f^{-2}(u)$ и интегрируя по $u$ в пределах от $r_0$ до $u$, получим

$$v(u)=2\varepsilon\,f(u)\int\limits_{r_0}^{u}\frac{u^m\,du}{f^2(u)}.\tag{1.56}$$

Пользуясь теоремой 1.1, можем написать оценку погрешности

$$\rho\le v(u),\qquad u\in[\,0,h\,],\tag{1.57}$$

которая имеет место до того момента, пока переменная $u$ не достигнет значения $u=h$, $h\le H$, т.е. до момента времени $T=\int_{r_0}^{h}du/f(u)$, либо на бесконечном промежутке времени в случае, если окажется, что $T<0$.

Рассмотрим далее неособый случай, когда все корни $\lambda_s$ характеристического уравнения, соответствующие линейной части систем (1.45), (1.46), имеют отрицательные вещественные части и $\alpha_1<0$, а нелинейные члены начинаются с однородных форм некоторого порядка $m$ и все они отнесены к остаточным функциям $Y_s$. В неравенствах (1.48) тогда все $A_k = 0$, т.е. $f(r) = \alpha_1 r + \varepsilon r^m$ и, следовательно, в соответствии с выражениями (1.49), (1.50), (1.56), (1.57) имеем оценки $r \le u(r_0, t)$ при

$$u = r_0\, e^{\alpha_1 t} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon\, r_0^{m-1}}{\alpha_1} \left[ e^{\alpha_1 (m-1)\, t} - 1 \right] \right\}^{1/(1-m)},$$

$$\rho \le \frac{2\left(u^{m-1} - r_0^{m-1}\right)\varepsilon u}{(m-1)\left(\alpha_1 + \varepsilon\, r_0^{m-1}\right)},$$

$$T = \int\limits_{r_0}^{h} \frac{du}{f(u)} = \frac{1}{\alpha_1\,(1-m)} \ln \frac{\alpha_1\, h^{1-m} + \varepsilon}{\alpha_1\, r_0^{1-m}}.$$

Будем считать, что начальные значения $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0$ удовлетворяют условию неположительности левой части неравенства $\dot{r} \le f(r)$, т.е. условию $r_0 \le (-\alpha_1/\varepsilon)^{1/(m-1)}$. В этом случае в согласии с этими оценками точное $y(t)$ и приближенное $\tilde{y}(t)$ решения асимптотически приближаются к нулю по закону, близкому к $r_0\, e^{\alpha_1 t}$. Погрешность приближенного решения столь же мала, как и остаточные члены, причем она стремится к нулю с той же скоростью, что и само приближенное решение.

Если начальные значения таковы, что $r_0 > (-\alpha_1/\varepsilon)^{1/(m-1)}$, то получим оценку возможного нарастания движения и оценку погрешности приближенного решения на конечном промежутке времени $[\,0, T\,]$.

Пусть уравнение (1.50) имеет особое решение $u = r_0 \in \{\, r \le h \,\}$. Тогда, интегрируя уравнение (1.55), получим

$$v(t) = \frac{2\varepsilon\, r_0^m}{c} \left(e^{ct} - 1\right), \qquad c \equiv f'(r_0),$$

откуда найдем оценку погрешности

$$\rho \le v(t), \qquad \rho \equiv \sum_{s=1}^{n_1} |\, y_s - \tilde{y}_s \,|, \qquad t \in [\,0, \infty).$$



Итак, оценки были получены путем построения системы двух ДН. Эти же оценки можно было бы получить с помощью теоремы 1.2 (см. неравенства (1.13)).

Более точную оценку погрешности для случая одного особого корня $\lambda_1 \equiv \alpha_1$ получим, полагая, что системы (1.45), (1.46) уже приведены к нелинейной канонической форме и, в частности, первое уравнение системы (1.45) имеет вид уравнения $(**)$ :

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + \sum_{k=2}^{m} g_k\, y_1^k + Y_1(t, y).$$

Аналогично неравенству (1.43) запишем неравенство

$$\dot{r} \le (\alpha_1 + \mu)\, r + \sum_{k=2}^{m} \tilde{g}_k\, r^k + \varepsilon\, r^m, \qquad r \in [\,0, H_*\,] \tag{1.58}$$

и соответствующее уравнение

$$\dot{u} = (\alpha_1 + \mu)\, u + \sum_{k=2}^{m} \tilde{g}_k\, u^k + \varepsilon\, u^m. \tag{1.59}$$

Схожие с неравенством (1.58) имеем двойные неравенства для переменных $r_1 = |\, y_1 \,|$, $\tilde{r}_1 = |\, \tilde{y}_1 \,|$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1 + \sum_{k=2}^{m} g_k^0\, r_1^k - \varepsilon r^m \le \dot{r}_1 \le \alpha_1 r_1 + \sum_{k=2}^{m} \tilde{g}_k\, r_1^k + \varepsilon r^m, \\ \alpha_1 \tilde{r}_1 + \sum_{k=2}^{m} g_k^0\, \tilde{r}_1^k - \varepsilon \tilde{r}^m \le \dot{\tilde{r}}_1 \le \alpha_1 \tilde{r}_1 + \sum_{k=2}^{m} \tilde{g}_k\, \tilde{r}_1^k + \varepsilon \tilde{r}^m, \end{aligned} \tag{1.60}$$

где

$$r, \tilde{r} \in [\,0, H_*\,], \qquad g_k^0 \equiv \begin{cases} \tilde{g}_k & \text{при нечетных} \quad k, \\ -\,|\, \tilde{g}_k \,| & \text{при четных} \quad k. \end{cases}$$

Из неравенств (1.58), (1.60) получим оценки (см. пояснения к теореме 1.2 с двойным ДН $(*)$):

$$u_1^0(y_{10}, t) \le r_1 \le u_1(y_{10}, t),$$

$$u_1^0(y_{10},t) \le \tilde r_1 \le u_1(y_{10},t),$$

где $y_{10} = y_1(0)$; $u_1^0, u_1$ — решения уравнений

$$\dot u_1 = \alpha_1 u_1 + \sum_{k=2}^m \tilde g_k\, u_1^k + \varepsilon u^m,$$

$$\dot u_1^0 = \alpha_1 u_1^0 + \sum_{k=2}^m g_k^0\, (u_1^0)^k - \varepsilon u^m$$

при $u_1\big|_{t=0} = u_1^0\big|_{t=0} = |\, y_{10}\,| \equiv r_{10} = r_1(0)$.

Составим далее неравенство для $\rho_1 = |\, y_1 - \tilde y_1\,|$. С учетом оценки (1.52) можем написать

$$\dot\rho_1 = \big(\dot y_1 - \dot{\tilde y}_1\big)\, \mathrm{sign}\,(y_1 - \tilde y_1) \;=$$

$$= \left[\lambda_1\,(y_1 - \tilde y_1) + \sum_{k=2}^m g_k (y_1^k - \tilde y_1^k) + Y_1 - \tilde Y_1\right] \mathrm{sign}\,(y_1 - \tilde y_1) \;\le$$

$$\le \left(\alpha_1 + \sum_{k=2}^m |\, g_k\,| \left|\frac{y_1^k - \tilde y_1^k}{y_1 - \tilde y_1}\right| + \sum_{k=3}^m g_k\, \frac{y_1^k - \tilde y_1^k}{y_1 - \tilde y_1}\right) \rho_1 + 2\varepsilon\, u^m, \quad (1.61)$$

где справа суммирование по $k = \overline{2,m}$ ведется по четным $k$, а по $k = \overline{3,m}$ ведется по нечетным $k$.

Воспользуемся оценкой

$$\left|\frac{y_1^k - \tilde y_1^k}{y_1 - \tilde y_1}\right| = \big|\, y_1^{k-1} + y_1^{k-2}\, \tilde y_1 + \;\ldots\; + \tilde y_1^{k-1}\,\big| \le k\, u_1^{k-1}. \qquad (1.62)$$

Если $k$ нечетное, то неотрицательная функция $(y_1^k - \tilde y_1^k)/(y_1 - \tilde y_1) = 0$ при $y_1 = \tilde y_1 = 0$. Для нее оценка сверху дается неравенством (1.62). Чтобы оценить ее снизу, будем считать, что в данный момент $r_1 \ge \tilde r_1$ (точно так же можно поступить и в случае, когда $r_1 \le \tilde r_1$). Имеем

$$\frac{y_1^k - \tilde y_1^k}{y_1 - \tilde y_1} = y_1^{k-1} + y_1^{k-2}\, \tilde y_1 + \;\ldots\; + \tilde y_1^{k-1} \;=$$

$$= \; r_1^{k-1} + y_1^{k-2}\, \tilde y_1 + \;\ldots\; + \tilde r_1^{k-1} \ge r_1^{k-1} - r_1^{k-2}\, \tilde r_1 + \;\ldots\; + \tilde r_1^{k-1} \;=$$



$$= \frac{r_1^k + \tilde r_1^k}{r_1 + \tilde r_1} = \frac{1}{2}\, r_1^{k-1} + \frac{1}{2}\, \frac{r_1^{k-1}\,(r_1 - \tilde r_1) + 2\tilde r_1^k}{r_1 + \tilde r_1} \;\ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\, r_1^{k-1} \ge \frac{1}{2}\, (u_1^0)^{k-1}.$$

Применим эти неравенства для оценки правой части неравенства (1.61):

$$\dot\rho_1 \le \left[\alpha_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^m g_k\, (u_1^0)^{k-1} + \sum_{l=2}^m l\,|\, g_l\,|\, u_1^{l-1}\right] \rho_1 \; +$$

$$+\; 2\varepsilon\, u^m, \qquad \rho_1 \ge 0, \quad u \le H_*, \qquad (1.63)$$

где $k = \overline{3,m}$ — принимает только нечетные значения такие, при которых $g_k < 0$, $l = \overline{2,m}$ — принимает все прочие четные значения. Неравенству (1.63) соответствует линейное по $v_1$ ДУ:

$$\dot v_1 = \left[\alpha_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^m g_k\, (u_1^0)^{k-1} + \sum_{l=2}^m l\,|\, g_l\,|\, u_1^{l-1}\right] v_1 + 2\varepsilon\, u^m,$$

проинтегрировав которое с начальным условием $v_1\big|_{t=0} = v_1(0) = v_{10} = 0$, получим первую оценку погрешности $\rho_1 \le v_1(t)$, справедливую на конечном промежутке времени $[\,0, T\,]$.

Далее построим оценку погрешности для неособых переменных с целью оценки функции $\rho_* = \sum_{s=2}^{n_1} \rho_s$. Аналогично выражению (1.51) выпишем соотношение

$$\dot\rho_* = \mathrm{Re}\left\{\sum_{s=2}^{n_1} \big[\,\lambda_s\,(y_s - \tilde y_s) + \mu_{s-1}\,(y_{s-1} - \tilde y_{s-1}) \; +\right.$$

$$\left. +\; p_\nu^s\,(y^\nu - \tilde y^\nu) + Y_s - \tilde Y_s\,\big]\, e^{-i\gamma_s}\right\}.$$

С помощью оценок (1.52), (1.53) получим неравенство

$$\dot\rho_* \le (\alpha_2 + \mu)\,\rho_* + \sum_{k=2}^m A_k\, u^{k-1}\,(\rho_* + v_1) + 2\varepsilon\, u^m. \qquad (1.64)$$

Это неравенство можно уточнить, если принять во внимание, что каждое слагаемое $p^s_\nu y^\nu$ содержит в качестве множителя хотя бы одну неособую переменную $y_s$ в степени не ниже первой и оценить ее через $r_s$. Если же $|\,\alpha_2\,|$ достаточно большая величина, то можно увеличить правую часть неравенства, используя оценки

$$A_k u^{k-1}\,\rho_* \le A_k H^{k-1}\,\rho_*, \qquad A_k u^{k-1}\,\rho_1 \le A_k u^{k-1}\,\sup\, v_1.$$

Неравенству (1.64) отвечает уравнение

$$\dot v_* = (\alpha_2+\mu)\,v_* + \sum_{k=2}^{m} A_k u^{k-1}\,(v_*+v_1) + 2\varepsilon\,u^m, \qquad v_*\big|_{t=0} = v_*(0) = 0.$$

Интегрируя это линейное по $v_*$ уравнение, получим оценку $\rho_* \le v_*(t)$, которая имеет место $\forall\, t \in [\,0, T\,]$.

Затем рассмотрим особый случай Ляпунова, когда $\lambda_1 = 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_s < 0$, $\forall\, s = \overline{2,n}$. Будем считать, что все корни различны, а многочленной подстановкой (см. метод могочленного преобразования [106] приведения линейной части системы к канонической квазидиагональной форме) выделена постоянная Ляпунова $g_m \equiv g < 0$, где $m$ — нечетное. Первое уравнение дифференциальной системы (1.45) тогда после преобразования примет вид

$$\dot y_1 = g y_1^m + Y_1(y), \qquad |\,Y_1\,| \le \varepsilon r^m,$$

причем остальные уравнения не содержат членов вида $a y_1^k$, $k = \overline{1,m}$.

Вместо неравенств для $r, r_1$ составим неравенства для $R = r^{m-1}$, $R_1 = r_1^{m-1}$, $\tilde R = \tilde r^{m-1}$, $\tilde R_1 = \tilde r_1^{m-1}$. В неравенствах (1.58) – (1.60) положим $\alpha_1 = \mu = 0$ и в суммах по $k$ сохраним лишь последние слагаемые. Затем умножим эти неравенства соответственно на множители: $(m-1)\,r^{m-2}$, $(m-2)\,\tilde r^{m-2}$, $(m-1)\,r_1^{m-2}$, $(m-1)\,\tilde r_1^{m-2}$. Тогда учитывая, что

$$r^m\, r_1^{m-2} \le r^{2m-2} = R^2, \qquad \tilde r^m\, \tilde r_1^{m-2} \le \tilde R^2,$$



в достаточно малой окрестности $\{\, r \le H_*\,\}$, где $H_* \le H$, получим систему неравенств

$$\dot R \le (g' + \varepsilon')\,R^2, \quad \dot{\tilde R} \le (g' + \varepsilon')\,\tilde R^2, \quad g' R_1^2 - \varepsilon' R^2 \le \dot R_1 \le$$
$$\le g' R_1^2 + \varepsilon' R^2, \quad g' \tilde R_1^2 - \varepsilon' \tilde R^2 \le \dot{\tilde R}_1 \le g' \tilde R_1^2 + \varepsilon' \tilde R^2, \tag{1.65}$$

где обозначено: $g' = (m-1)\,g$, $\varepsilon' = (m-1)\,\varepsilon$.

Запишем соответствующие мажорантные уравнения

$$\dot U = (g' + \varepsilon')\,U^2 \tag{1.66}$$

с начальными данными: $U\big|_{t=0} = \tilde U\big|_{t=0} = r_0^{m-1}$, $r_0 \equiv \|\,y_0\,\|$, а также

$$\dot U_1 = g' U_1^2 + \varepsilon' U^2, \qquad \dot U_1^0 = g'\,(U_1^0)^2 - \varepsilon' U^2 \tag{1.67}$$

с начальными данными: $U_1\big|_{t=0} = U_1^0\big|_{t=0} = r_{10}^{m-1} \equiv U_0$, $r_{10} \equiv |\,y_1\,|$.

В уравнениях (1.67) перейдем к независимой переменной $U$ и выполним подстановку: $U_1 = U Z_1$, $U_1^0 = U Z_2$. Тогда получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} U\,\frac{dZ_1}{dU} &= \frac{1}{1+\varepsilon/g}\left[\,Z_1^2 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{g}\right) Z_1 + \frac{\varepsilon}{g}\,\right],\\ U\,\frac{dZ_2}{dU} &= \frac{1}{1+\varepsilon/g}\left[\,Z_2^2 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{g}\right) Z_2 - \frac{\varepsilon}{g}\,\right] \end{aligned} \tag{1.68}$$

с начальными данными: $Z_1\big|_{t=0} = Z_2\big|_{t=0} = (r_{10}/r_0)^{m-1} \equiv Z_0$.

Проинтегрируем уравнения (1.68). Имеем

$$\int\limits_{Z_0}^{Z_2} \frac{dz_2}{(z_2-\sigma_1)(z_2-\sigma_2)} = \frac{1}{1+\varepsilon/g} \int\limits_{U_0}^{U} \frac{du}{u}$$

при

$$\sigma_{1,2} \equiv \frac{1}{2}\left\{ \left(1 + \frac{\varepsilon}{g} \pm \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon}{g}\right)^2 + \frac{4\varepsilon}{g} \right]^{1/2} \right\},$$

откуда найдем

$$Z_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 C U^\sigma}{1 - CU^\sigma}, \qquad \sigma \equiv \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{1 + \varepsilon/g} > 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon < |\, g \,|,$$

$$C \equiv \frac{Z_0 - \sigma_1}{(Z_0 - \sigma_2)\, U_0^\sigma} = \frac{r_{10}^{m-1} - \sigma_1 r_0^{m-1}}{r_{10}^{m-1} - \sigma_2 r_0^{m-1}} \frac{1}{r_0^{(m-1)\,\sigma}},$$

$$U_1^0 = \frac{U\left(\sigma_1 - \sigma_2 C U^\sigma\right)}{1 - CU^\sigma}.$$

Аналогично получим

$$U_1 = \frac{U\left(1 - C_1\,(\varepsilon/g)\, U^\nu\right)}{1 - C_1 U^\nu}, \tag{1.69}$$

где

$$\nu \equiv \frac{1 - \varepsilon/g}{1 + \varepsilon/g} > 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon < |\, g \,|,$$

$$C_1 = \frac{Z_0 - 1}{(Z_0 - \varepsilon/g)\, U_0^\nu} = \frac{r_{10}^{m-1} - r_0^{m-1}}{r_{10}^{m-1} - (\varepsilon/g)\, r_0^{m-1}} \frac{1}{r_0^{(m-1)\,\nu}}.$$

Из уравнения (1.66) затем найдем

$$U = \frac{r_0^{m-1}}{1 - r_0^{m-1}\,(g' + \varepsilon')\, t}.$$

Сопоставляя неравенства (1.65) и уравнения (1.66), (1.67), заключаем по теореме 1.1 о ДН, что переменные $R, \tilde R, R_1, \tilde R_1$ удовлетворяют неравенствам

$$R \le U, \quad \tilde R \le U, \quad U_1^0 \le R_1 \le U_1, \quad U_1^0 \le \tilde R_1 \le U_1, \tag{1.70}$$

при условии, что в начальный момент времени соответствующие начальные условия были одинаковые, т.е. при $t = 0$ :

$$R = \tilde R = U_0 \equiv r_0^{m-1}, \qquad R_1 = \tilde R_1 = U_1^0 = U_1 \equiv r_{10}^{m-1}.$$



Отметим, что выписанные оценки (1.70) имеют место $\forall\, t \ge 0$, если решения рассматриваются в достаточно малой области; при этом $\varepsilon$ мало настолько, что $g + \varepsilon < 0$.

Далее оценим погрешности (взаимные отклонения) соответственных решений систем (1.45), (1.46). Для переменных $y_1, \tilde y_1$ об их погрешности можно судить по величине

$$\tilde\rho_1 = \left|\, r_1^{m-1} - \tilde r_1^{m-1} \,\right| = \left|\, R_1 - \tilde R_1 \,\right| \le U_1 - U_1^0.$$

Можно также получить оценку и для величины $\rho_1 = |\, y_1 - \tilde y_1 \,|$. Обратившись к неравенству (1.63), возьмем вместо $(u_1^0)^{m-1}$, $u_1^{m-1}$, $u^{m-1}$ соответственно $U_1^0, U_1, U$ и получим неравенство

$$\dot\rho_1 \le \frac{1}{2}\, g\, U_1^0 \rho_1 + 2\varepsilon\, U^{m/(m-1)}.$$

С учетом выражений (1.66), (1.69) перейдем здесь к независимой переменной $U$ :

$$\frac{d\,\rho_1}{dU} \le \frac{1}{2\,(m-1)(1+\varepsilon/g)} \cdot \frac{\left(\sigma_1 - \sigma_2 C U^\sigma\right)\rho_1}{U\,(1 - CU^\sigma)} + \frac{2\varepsilon}{(g' + \varepsilon')\, U^{(m-2)/(m-1)}}.$$

Соответствующее уравнение, где $1 + \varepsilon/g = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma$, имеет вид

$$\frac{d\,V_1}{dU} - \frac{\sigma}{2\,(m-1)(1-a)} \cdot \frac{\left(1 - aCU^\sigma\right) V_1}{U\,(1 - CU^\sigma)} = \frac{2\varepsilon}{(g' + \varepsilon')\, U^{(m-2)/(m-1)}},$$

где $a \equiv \sigma_2/\sigma_1,\ V_1\big|_{t=0} = 0$.

У этого линейного ДУ интегрирующий множитель

$$J(U) = \left[\frac{1 - CU^\sigma}{U^{\sigma/(1-a)}}\right]^{1/2\,(m-1)},$$

а его решение

$$V_1 = \frac{2\varepsilon}{(m-1)(g+\varepsilon)\, J(U)} \int\limits_{U_0}^{U} \frac{J(U)\, dU}{U^{(m-2)/(m-1)}}.$$

Используя ДН (1.64), можно найти в квадратурах оценку для $\rho = \sum_{s=2}^{n_1} \rho_s$. Для $\rho_s$ можно также получить оценки иначе с использованием неравенства для $r_* = \sum_{s=2}^{n_1} r_s$ вида

$$\dot{r}_* \le (\alpha_2 + \delta)\, r_* + 2\varepsilon H_* U \qquad \text{при} \quad U \le H_*$$

с соответствующим уравнением

$$\dot{U}_* = (\alpha_2 + \delta)\, U_* + 2\varepsilon H_* U.$$

Затем для $\rho_s$ можно составить неравенство вида

$$\dot{\rho}_s \le \alpha_s \rho_s + \beta U_* + 2\varepsilon H_* U, \qquad s = \overline{2, n_1}$$

и уравнение

$$\dot{V}_s = \alpha_s V_s + \beta U_* + 2\varepsilon H_* U.$$

Применяя последние неравенства, а также неравенство

$$I = \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha t}\, dt}{1 + bt} \le \frac{1}{\alpha - b} \left( \frac{e^{\alpha t}}{1 + bt} - 1 \right),$$

где $\alpha > 0$, $b > 0$, получаемого интегрированием по частям:

$$I = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{e^{\alpha t}}{1 + bt} - 1 \right) + \frac{b}{\alpha} \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha t}\, dt}{(1 + bt)^2} \ \le$$

$$\le \ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{e^{\alpha t}}{1 + bt} - 1 \right) + \frac{bI}{\alpha},$$

найдем оценки

$$\rho_s \le \beta r_0 B \left( \frac{1}{e^{\alpha t}} - e^{\alpha_s t} \right) +$$

$$+\ 2\varepsilon H_*\, r_0^{m-1}\, N \left( \frac{1}{1 + bt} - e^{\alpha_s t} \right), \quad s = \overline{2, n_1},$$

которые определяют характер убывания погрешности для переменных $y_2$, ..., $y_n$ с течением времени. Здесь $B, N, b, \beta$ — некоторые постоянные, $\alpha \approx -\alpha_2 > 0$.

# Глава 2

## Устойчивость стационарных движений динамических систем

Глава содержит ставшие классическими результаты по теории устойчивости стационарных движений голономных и неголономных механических систем (МС), а также различные их модификации и усовершенствования этих результатов [65, 67-69, 71, 72, 83, 90, 98, 110, 114, 115, 128-136, 140 173]. Отметим при этом, что некоторые результаты работ [71, 72, 133] легли в основу представленного в главе материала.

Задачи и методы исследования устойчивости установившихся движений, к которым обычно причисляют равновесия и стационарные движения МС, играют заметную роль в общей проблеме устойчивости, особенно в связи с развитием технических отраслей (робототехника, авиастроение и т.д.) и космической индустрии, в частности.

Условия устойчивости стационарных движений консервативных голономных систем с циклическими координатами (с известными первыми интегралами) получил Э.Дж. Раус еще в конце XIX века (1877 – 1884 гг.), а У. Томсон и П. Тейт приблизительно в то же время (1879 г.) решили ряд задач, посвященных влиянию гироскопических и диссипативных сил на устойчивость движения этих систем.

В § 2.1 излагается метод В.В. Румянцева [130], позволяющий вопрос об устойчивости стационарных движений свести к исследованию экстремума потенциальной энергии *приведенной системы*. С помощью этого метода можно получить достаточные условия устойчивости движения консервативных систем, а также в некоторых случаях и необходимые условия. Предложенная схема исследования при наличии диссипативных сил дает возможность получения необходимых и достаточных условий вековой устойчивости стационарных движений. Рассмотрены различные модификации теоремы Рауса, включая дополнение А.М. Ляпунова к одной из них.

§ 2.2 посвящен задаче обращения теоремы Рауса. Приведены формулировки теорем об обращении для гироскопически несвязанной системы (теорема Четаева), в терминах коэффициентов устойчивости Пуанкаре (теорема Кельвина–Четаева), рассмотрены теоремы Сальвадори, Румянцева и др. об обращении и выявлении условий на неустойчивость стационарных движений.

В § 2.3 вначале изучено влияние диссипативных сил с частичной и полной диссипацией на устойчивость стационарных движений голономных систем с циклическими координатами. Результаты представлены в виде различных теорем. Проанализировано также воздействие потенциальных сил на систему, влияние гироскопических и диссипативных сил, зависящих от скоростей, на устойчивость стационарных движений систем с циклическими координатами, к которым надо приложить постоянные силы для существования стационарных движений. Рассмотрена задача о влиянии постоянно действующих возмущений на устойчивость стационарных движений.

Завершает главу § 2.4 об устойчивости стационарных движений неголономных систем. Для анализа представлены уравнения движения неголономных МС в форме уравнений с неопределенными множителями и уравнениями связей, Воронца и в форме уравнений Чаплыгина. Систематизированы различные определения циклических координат для неголономных систем, играющих важную роль в задаче изучения устойчивых свойств стационарных движений и получены условия для существования таких свойств устойчивости.

## 2.1 Устойчивость стационарных движений голономных систем

Рассматривается система материальных точек при ограничении на движение в виде идеальных геометрических связей, не зависящих явно от времени. Последнее обстоятельство имеет ключевое значение в понимании того, что из себя представляет *стационарное движение*.



**2.1.1. Уравнения стационарных движений.** Начнем с упоминания, какая МС называется *склерономной*: это такая система, которая либо свободная (на нее не наложены какие-нибудь связи), либо на нее наложены только *стационарные связи*, т.е. в уравнения этих связей время $t$ явно не входит. Если же среди наложенных на МС связей есть нестационарные, то система называется *реономной*.

Близко к понятию стационарного движения и понятие *установившегося движения*. Если динамическая система (ДС) с уравнением $\dot{x} = f(x,t)$, $x \in R^n$ — вектор состояния, $f(\cdot) \in C^2$, $f(0,t) = 0$ ($x = 0$ — точка покоя) такова, что $f(\cdot)$ не зависит явно от $t$: $f(x,t) = f(x)$, то невозмущенное движение этой ДС называют *установившимся*, а саму систему — *автономной*.

Далее обратимся к понятию *консервативной* МС. Пусть система характеризуется совокупностью трех условий: 1) она склерономна; 2) все силы системы потенциальны; 3) потенциал не зависит явно от времени. В этом случае МС называется *консервативной*. Для нее $dE/dt = 0$, т.е. полная механическая энергия консервативной системы $E$ не изменяется при движении. Тогда имеет место *интеграл энергии*: $E = T + \Pi = h = \text{const}$, где $T$ — кинетическая, а $\Pi$ — потенциальная энергия этой системы.

Кинетическая энергия $T$ системы упомянутых выше материальных точек представляет собой определенно положительную квадратичную форму обобщенных скоростей $\dot{q}_i(t)$, где $q_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — обобщенные (независимые лагранжевые) координаты системы:

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Предположим пока, что на рассматриваемую систему действуют только потенциальные силы. Пусть $L = T - \Pi$ — *функция Лагранжа*, где $\Pi = \Pi(q)$ — потенциальная энергия системы. Тогда обобщенные импульсы можно представить так:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q)\,\dot{q}_j. \tag{2.1}$$

В *переменных Лагранжа* $q_i, \dot q_i$ уравнения движения МС имеют форму *уравнений Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{2.2}$$

а в *переменных Гамильтона* $q_i, p_i$ — соответственно форму канонических *уравнений Гамильтона*

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{2.3}$$

где $H$ — *функция Гамильтона* вида

$$H(q, \dot q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\,\dot q_j - L,$$

причем $H(q, p) = T + \Pi = E$ в случае связей, не зависящих явно от времени.

В *переменных Рауса* (часть из них — это переменные Лагранжа, а другая часть — переменные Гамильтона):

$$q_i, \dot q_i, \quad i = \overline{1, s}, \qquad\qquad q_k, p_k, \quad k = \overline{s+1, n}$$

разрешим уравнения (2.1) относительно $\dot q_k$ (это сделать можно, поскольку $\Delta = \det a_{kl} \neq 0$). Имеем

$$\dot q_k = \sum_{l=s+1}^{n} b_{kl}\, p_l - \sum_{i=1}^{s} c_{ki}\, \dot q_i, \tag{2.3.1}$$

где обозначено

$$b_{kl} = \frac{A_{kl}}{\Delta}, \qquad c_{ki} = \sum_{l=s+1}^{n} b_{kl}\, a_{li}.$$

Здесь $A_{kl}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{kl}$ определителя $\Delta$ той части кинетической энергии $T$, которая отвечает цикличе-



ским скоростям. Для $T$ в переменных Рауса имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{i,j=1}^{s} \bar a_{ij}\, \dot q_i \dot q_j + \sum_{k,l=s+1}^{n} b_{kl}\, p_k p_l\Bigr),$$

где

$$\bar a_{ij} = a_{ij} - \sum_{k,l=s+1}^{n} b_{kl}\, a_{kj}\, a_{li}, \qquad i, j = \overline{1, s}.$$

С помощью *функции Рауса*:

$$R(q_i, \dot q_i, q_k, p_k) = L - \sum_{k=s+1}^{n} p_k\, \dot q_k \tag{2.4}$$

запишем уравнения движения системы под действием потенциальных сил в форме *уравнений Рауса*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.5}$$

$$\dot q_k = -\frac{\partial R}{\partial p_k}, \qquad \dot p_k = \frac{\partial R}{\partial q_k}, \qquad k = \overline{s+1, n}. \tag{2.6}$$

Здесь дифференциальная система (2.5) представляет собой систему $s$ уравнений в форме уравнений Лагранжа, система (2.6) — систему $2\,(n - s)$ уравнений в форме уравнений Гамильтона.

Важно иметь в виду, что уравнения движения системы в случае стационарных связей и потенциальных сил имеют интеграл энергии: чтобы в этом убедиться, домножим уравнения (2.5) на $\dot q_i$ и просуммируем результат по $i = \overline{1, s}$; принимая затем в расчет уравнения (2.6), будем иметь

$$H(q_i, \dot q_i, q_k, p_k) = \sum_{i=1}^{s} \dot q_i\, \frac{\partial R}{\partial \dot q_i} - R = \text{const}. \tag{2.7}$$

Интегралы энергии, полученные из уравнений Лагранжа (2.2) в виде

$$H(q_j, \dot q_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \dot q_j - L = \mathrm{const},$$

либо из уравнений Гамильтона (2.3) в виде $H(q_j, p_j) = \mathrm{const}$, эквивалентны интегралу (2.7).

Отметим, что уравнения движения системы допускают первые интегралы также и при наличии *циклических координат* $q_j$, которые определяются (см., например, курс механики [93]) как координаты, не входящие в функцию Лагранжа, т.е. такие, для которых $\partial L/\partial q_j = 0$; такие координаты, как известно, не входят также и в функции Гамильтона и Рауса, поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial R}{\partial q_j}.$$

Пусть $j = k = \overline{s+1, n}$. Тогда из уравнений (2.2), (2.3), (2.6) получим $n - s$ первых интегралов

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = c_k = \mathrm{const}, \tag{2.8}$$

где $c_k$ — постоянные интегрирования.

С помощью уравнений Рауса и интегралов вида (2.8) можно понижать порядок системы уравнений, а именно, сводить ее к рассмотрению системы с меньшим числом обобщенных координат. Действительно, при подстановке (2.8) в выражение (2.4) функция Рауса будет иметь вид $R = R(q_i, \dot q_i, c_k)$. Отсюда уравнения (2.5), где $i = \overline{1, s}$, содержат $q_i, \dot q_i, \ddot q_i$ и постоянные $c_k$, $k = \overline{s+1, n}$, и описывают изменение со временем нециклических координат; эта система уравнений может интегрироваться независимо от другой ее части (уравнений (2.6)):

$$\dot q_k = -\frac{\partial R}{\partial c_k}, \qquad \dot p_k = 0, \qquad k = \overline{s+1, n}, \tag{2.9}$$

которая соответствует циклическим координатам.

Итак, отмечаем, что исследование движения голономной системы с $n$ степенями свободы, имеющей $n - s$ циклических координат,



сводится к анализу движения системы $s$ уравнений (2.5) и первых $n - s$ уравнений (2.6), где уравнения (2.5) представляют собой систему с $s$ степенями свободы и с функцией Лагранжа $R(q_i, \dot q_i, c_k)$. Такую систему называют *приведенной* МС, соответствующей исходной МС. Наконец, интегрированием системы уравнений (2.5) найдем

$$q_i = q_i(t, c_k, c_1, \bar c_1, \ldots, c_s, \bar c_s), \qquad i = \overline{1, s},$$

где $c_i, \bar c_i$, $i = \overline{1, s}$ — произвольные постоянные. После этого из первых $n-s$ уравнений (2.9) найдем с помощью квадратур зависимости циклических координат от времени:

$$q_k = -\int \frac{\partial R}{\partial c_k}\, dt + \bar c_k, \qquad k = \overline{s+1, n}. \tag{2.10}$$

Пользуясь выражением (2.4): $R = R_2 + R_1 - W$, уравнения (2.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial R_2}{\partial q_i} = -\frac{\partial W}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\, \dot q_j, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \bar a_{ij}\, \dot q_i \dot q_j, \qquad W = \Pi(q) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=s+1}^{n} b_{kl}\, p_k p_l,$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} c_{ki} c_k\, \dot q_i, \;\; g_{ij} = -g_{ji} = \sum_{k=s+1}^{n} c_k \left(\frac{\partial c_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial c_{ki}}{\partial q_j}\right),$$

$i, j = \overline{1, s}$, означающие соответственно кинетическую, потенциальную энергии приведенной системы, линейную по скоростям $\dot q_i$ часть функции Рауса, а также гироскопические коэффициенты. Здесь $R_2$ — положительно определенная квадратичная форма скоростей $\dot q_i$, $i = \overline{1, s}$. Отметим, что рассматриваемая система находится под действием потенциальных и гироскопических сил. При $a_{ik} = 0 \implies c_{ki} = 0 \implies g_{ij} = 0$ будут отсутствовать гироскопические силы. В этом случае исходная система называется *гироскопически несвязанной*.

Перейдем к изучению стационарных движений, положив, что $W \in C^2(q_i)$, т.е. что функция $W$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией координат $q_i$. Важно подчеркнуть, что системы с циклическими координатами при определенных начальных значениях, находящиеся под действием потенциальных сил, могут совершать стационарные движения, причем в этих движениях позиционные координаты $q_i$ и скорости циклических координат $\dot{q}_k$ сохраняют начальные значения (при $t = t_0$) :

$$\begin{gathered} q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = 0, \quad \dot{q}_k = \dot{q}_{k0} = -\left(\frac{\partial R}{\partial p_k}\right)_0, \\ i = \overline{1, s},\ k = \overline{s+1, n}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

при этом сами циклические координаты с течением времени меняются линейно: $q_{k0} = \dot{q}_{k0}\,(t - t_0) + \tilde{q}_{k0}$, где величины $\dot{q}_{k0}, \tilde{q}_{k0}$ можно задать произвольно; отсюда и $c_k$ — это произвольные постоянные интегрирования в силу уравнений (2.1) и (2.8). Значения $q_{i0}$ с учетом соотношений (2.12) можно найти из уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad \text{либо} \qquad \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{2.13}$$

Из выражений (2.1) вытекает, что при стационарном движении все обобщенные импульсы $p_i$, соответствующие позиционным координатам $q_i$, имеют постоянные значения $p_i = p_{i0}$. В этом случае из уравнений (2.3) следует, что при стационарном движении

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{2.14}$$

Условия (2.13) и (2.14) эквивалентны друг другу и представляют собой необходимые и достаточные условия стационарности движения системы с начальными данными $q_{i0}, p_{i0}, p_{k0}$. Итак, при стационарном движении энергия системы $H$ имеет постоянное значение при заданных значениях циклических интегралов $p_k = c_k$, $k = \overline{s+1, n}$, и наоборот.

Пусть имеются вторые уравнения (2.13) стационарного движения, откуда при заданных $p_k = c_k$ находятся постоянные $q_{i0}$. Поскольку при стационарном движении $R_2 = R_1 = 0$, то эти движения



преобразуются к виду

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.15}$$

где $W = W(q_i, c_k)$, $i = \overline{1, s}$, $k = \overline{s+1, n}$ — потенциальная энергия приведенной системы, а произвольные постоянные $c_k$ можно рассматривать как параметры. В согласии с принципом возможных перемещений уравнения (2.15) представляют собой необходимые и достаточные условия равновесия приведенной системы.

Уравнения (2.15) разрешимы по $q_i$, $i = \overline{1, s}$, однозначно при условии, что *гессиан* потенциальной энергии приведенной системы отличен от нуля:

$$\delta = \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\, \partial q_j}\right) \neq 0.$$

Точки, в которых $\delta = 0$, называются *критическими* или *точками бифуркации*; уравнения (2.15) в окрестности этих точек не могут быть однозначно разрешены.

**2.1.2. Теорема Рауса и ее модификации.** Перейдем к рассмотрению задачи об устойчивости по Ляпунову стационарного движения. Положим для простоты и без ущерба для общности, что при некоторых фиксированных $c_k$ стационарному движению отвечают нулевые значения функции $W$ и позиционных координат $q_i$, $q_i = 0$, $i = \overline{1, s}$.

Далее придадим системе достаточно малые начальные возмущения, считая, что в возмущенном движении $q_k = q_{k0} + \xi_k$, $p_k = p_{k0} + \eta_k$; сохраним при этом старые обозначения для позиционных координат и их скоростей.

Запишем тогда уравнения возмущенного движения в явной форме ввиде уравнений (2.11) и в виде уравнений, которые получаются из уравнений (2.6):

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{s} \bar{a}_{ij}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{j,r=1}^{s}\left(\frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial q_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{a}_{rj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_r \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\,\dot{q}_j + \\ + \frac{\partial W(q_i,\, c_k + \eta_k)}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}, \end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\dot{\xi}_k = -\frac{\partial R}{\partial \eta_k} - \dot{q}_{k0}, \qquad \dot{\eta}_k = 0, \qquad k = \overline{s+1, n}. \tag{2.17}$$

Из первых уравнений (2.17) вытекает неустойчивость стационарного движения относительно циклических координат $q_k$ для общего случая $\dot{q}_{k0} \neq -\partial R/\partial \eta_k$. Значит, можно обсуждать устойчивость стационарного движения лишь относительно величин $q_i, \dot{q}_i, p_k$ и непрерывно дифференцируемых, ограниченных функций этих величин.

Отметим, что уравнения возмущенного движения допускают интеграл энергии: $H = R_2 + W = \text{const}$ и, кроме того, циклические первые интегралы: $\eta_k = \text{const}$. Из последних интегралов следует устойчивость движения системы с циклическими координатами относительно $p_k$.

При достаточно малых произвольных возмущениях уравнения (2.16) будут уравнениями возмущенного движения приведенной системы в окрестности ее положения равновесия, зависящие от заданных значений $\eta_k \neq 0$. Тогда возможна ситуация, когда элементы вектора в уравнениях (2.16):

$$\left(\frac{\partial W(q_i,\, c_k + \eta_k)}{\partial q_i}\right)_{q_i=0} \neq 0, \qquad i = \overline{1, s}.$$

Это означает, что положение равновесия $q_i = 0$ приведенной системы не удовлетворяет уравнениям (2.16) и возмущенное движение системы происходит при постоянно действующих потенциальных возмущениях. Полагая здесь все $\eta_k = 0$, придем к задаче изучения устойчивости при возмущениях, не меняющих постоянных $c_k$. Этот вид устойчивости называют *условной устойчивостью* (*по Ляпунову*).

Теоремы Рауса (речь идет об одной теореме, сформулированной в разных формах и видах применения) позволяют задачу устойчивости стационарных движений свести к задаче минимума или максимума. Первая из них (Э.Дж. Раус, 1877 г.) представляет собой обобщение *теоремы Лагранжа* об устойчивости равновесия в виде некоторого энергетического критерия условной устойчивости.

В предположении, что система дифференциальных уравнений (СДУ) консервативной МС обладает известными некоторыми первыми интегралами $E_i(q_j, \dot{q}_j) = c_i$, $i = \overline{1, m}$, не зависящими явно от



времени, включая интеграл энергии $H = E_1(q_j, \dot{q}_j) = c_1$, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1 (Первая теорема Рауса).** *Пусть энергия системы $H$ имеет при данных величинах остальных интегралов минимум или максимум для всех вариаций $q_j, \dot{q}_j$, отвечающих данному движению, для которого $H = \text{const}$. Тогда это движение устойчиво по крайней мере для возмущений, не изменяющих постоянных $c_i$, $i = \overline{1, m}$.*

Теорема 2.1 будет иметь место по отношению к любому первому интегралу, кроме интеграла энергии, с указанными свойствами. Приходим тем самым к следующей теореме.

**Теорема 2.2 (Вторая теорема Рауса).** *Если один из интегралов $E_i(q_j, \dot{q}_j) = c_i$ имеет минимум или максимум при данных величинах остальных интегралов, то тогда соответствующее движение устойчиво по крайней мере для возмущений, не изменяющих постоянных других используемых интегралов.*

Теорема 2.1 для случая стационарного движения голономной системы с циклическими координатами преобразуется к следующему утверждению.

**Теорема 2.3 (Третья теорема Рауса).** *Если для стационарного движения функция $W$ имеет изолированный минимум при данных значениях $p_k = c_k$, то стационарное движение устойчиво по отношению к $q_i, \dot{q}_i$ по крайней мере для возмущений, не изменяющих постоянных $c_k$ ($i = \overline{1, s}$, $k = \overline{s+1, n}$).*

**Модельный пример 1.** Исследуем устойчивость вращательных движений симметричного артиллерийского снаряда [173]. Считается, что центр тяжести снаряда движется в вертикальной плоскости стрельбы $\xi\zeta$ вдоль оси $\xi$, которая полагается горизонтальной. Пусть $x$ — ось снаряда, $I$ — проекция оси снаряда на плоскость стрельбы, $\alpha$ — угол между $I$ и $x$; $\beta$ — угол между $\xi$ и $I$; $\xi$ — горизонтальная ось, $\zeta$ — вертикальная ось, $\eta$ — третья ось СК $\xi\eta\zeta$. Введем также подвижную СК $xyz$ с началом в центре тяжести снаряда. Пусть $\omega$ — угол поворота снаряда вокруг его оси $x$ в СК $xyz$.

Мгновенная скорость вращения снаряда есть результирующая угловых скоростей $\dot{\omega}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$, соответственно направленных вдоль осей

$x, z, \eta$. Отсюда ее проекции $p, q, r$ на оси $x, y, z$ будут равны

$$p = \dot\omega + \dot\beta \sin\alpha, \qquad q = \dot\beta\cos\alpha, \qquad r = \dot\alpha.$$

Кинетическая энергия $T$ вращательного движения снаряда имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right),$$

где $A, B, C = \mathrm{const}$ — моменты инерции снаряда относительно осей $x, y, z$; с учетом вытянутой формы снаряда $C = B > A$. Запишем также функцию Лагранжа

$$L = \frac{A}{2}\left(\dot\omega + \dot\beta\sin\alpha\right)^2 + \frac{B}{2}\left(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2\cos^2\alpha\right) - a\cos\alpha\cos\beta,$$

где $a = a(v)$ — некоторая положительная величина, зависящая от $v$ — постоянной скорости центра тяжести снаряда. Отметим, что величина $a$ возникает за счет величины опрокидывающей пары $K$ : $K = a\sin\gamma$, где $\gamma$ — угол между $v$ и осью $x$.

Уравнения вращательного движения снаряда имеют интеграл энергии

$$H = \frac{B}{2}\left(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2\cos^2\alpha\right) + a\cos\alpha\cos\beta = h$$

и два линейных относительно скоростей первых интеграла

$$E_1 = B\left(\dot\alpha\sin\beta - \dot\beta\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\right) + Ap\cos\alpha\cos\beta = e,$$

$$E_2 = \dot\omega + \dot\beta\sin\alpha = p = \mathrm{const},$$

причем последний из них отвечает циклической координате $\omega$.

За невозмущенное движение возьмем частное решение уравнений движения

$$\alpha = \beta = \dot\alpha = \dot\beta = 0. \tag{2.18}$$

Для соотношений (2.18) функция $W(\alpha, \beta, p) = a\cos\alpha\cos\beta$ не имеет минимума. Поэтому условия теоремы 2.3 не выполняются. Воспользуемся теоремой 2.1. Возьмем функцию $\Phi = H + \lambda E_1$, которая имеет экстремум при значениях (2.18), где $\lambda$ — произвольная константа.



Можно добиться того, чтобы функция

$$V = 2\left(\Phi - \Phi_0\right) = B\left(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2\right) +$$
$$+\ 2B\lambda\left(\dot\alpha\beta - \dot\beta\alpha\right) - (Ap\lambda + a)(\alpha^2 + \beta^2)\ +\ \ldots$$

соответствующим выбором $\lambda$ была положительно определенной при выполнении условия

$$A^2p^2 - 4aB > 0,$$

которое по теореме 2.1 является достаточным условием устойчивости движения (2.18).

Теорема 2.2 приводит к достаточным условиям условной устойчивости. А.М. Ляпунов дополнил эту теорему следующим утверждением [133].

**Теорема 2.4.** *Если рассматриваемый интеграл $E_i = \mathrm{const}$ имеет максимум или минимум как при данных, так и при всяких достаточно близких к данным велинах остальных интегралов, и если значения переменных, обращающие его в максимум или минимум, суть непрерывные функции величин этих интегралов, то рассматриваемое движение будет устойчиво по отношению к $q_i, \dot q_i$ для всяких возмущений.*

Благодаря этому дополнению приходим к утверждению Рауса, позволяющему получать достаточные условия безусловной устойчивости невозмущенного движения.

**Теорема 2.5.** *Если измененная потенциальная энергия системы $W$ имеет минимум как при данных величинах $p_k = c_k$, отвечающих изучаемому стационарному движению, так и при всяких достаточно близких к данным значениях $p_k = c_k + \eta_k$, причем значения переменных $q_i$, обращающие ее в минимум, суть непрерывные функции величин $p_k$, то стационарное движение устойчиво по отношению к $q_i, \dot q_i$.*

Тогда приходим к задаче определения точек условного экстремума функции $E_i$ при $c_j = \mathrm{const}$. С помощью введения множителей Лагранжа $\lambda_j$ задача приводится к задаче на безусловный экстремум функции

$$\Phi = E_i(q,\dot q) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, E_j(q,\dot q), \qquad j \neq i.$$

Пусть найдена некоторая точка экстремума функции $\Phi$ и значения $\lambda_j$. Обозначим через $\Phi_0$ значение функции $\Phi$ в этой точке. Если функция

$$V = \Phi - \Phi_0 = E_i - E_{i0} + \sum_j \lambda_j\,(E_j - E_{j0}) \qquad (2.19)$$

будет знакоопределенной в окрестности точки экстремума, то функция $\Phi$ в этой точке имеет безусловный экстремум, а функция $E_i$ — условный экстремум при $E_j = E_{j0}$. Здесь функции $V_j = E_j - E_{j0} = \text{const}$ являются первыми интегралами уравнений возмущенного движения системы, наряду с функцией (2.19), переписанной в виде: $V = V_i + \sum_j \lambda_j V_j$.

Отметим, что структура этой функции указывает на связь теоремы 2.5 Рауса с методом Четаева построения функции Ляпунова (ФЛ) в форме связки известных интегралов $V_i = \text{const}$ уравнений возмущенного движения:

$$V = V_i + \sum_j \lambda_j V_j + \sum_k \mu_k V_k^2,$$

где постоянные $\lambda_j, \mu_k$ выбираются из условия, чтобы функция $V$ была знакоопределенной и при этом $\dot V \equiv 0$.

**Модельный пример 2.** Исследуем задачу об устойчивости вращательных движений тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [133, 173], для решения которой предложена ФЛ в виде связки интегралов. Воспользуемся теоремой 2.4 для изучения поставленной задачи.

Пусть рассматриваемое твердое тело имеет одну неподвижную точку $O$. Считаем, что подвижные оси координат $Oxyz$ совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела, построенными для неподвижной точки. Обозначим моменты инерции тела относительно осей $x, y, z$ соответственно через $A, B, C$. В случае Лагранжа $A = B$; координаты центра тяжести тела: $x = 0,\ y = 0,\ z > 0$.



Обозначим через $p, q, r$ — проекции мгновенной угловой скорости на главные оси эллипсоида инерции $x, y, z$, а через $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы вертикали $z_1$ с подвижными осями $x, y, z$. Изучим вопрос об устойчивости по отношению к переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$.

Уравнения Эйлера–Пуассона в случае Лагранжа имеют следующие первые интегралы [173]:

$$H = A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2mgz\gamma'' = h,$$

$$F_1 = A\,(p\gamma + q\gamma') + Cr\gamma'' = k,\ \ F_2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,\ \ F_3 = r = r_0.$$

С помощью интегралов $F_2, F_3$ исключим переменные $\gamma''$ и $r$ для построения функции

$$\Phi = A\,(p^2 + q^2) + 2mgz\,\sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2} + \\ + \lambda\left[\,A\,(p\gamma + q\gamma') + Cr_0\,\sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2} - k\,\right].$$

Уравнениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 2Ap + A\lambda\gamma = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 2Aq + A\lambda\gamma' = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = A\lambda p - \frac{\bigl(2mgz + Cr_0\lambda\bigr)\,\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma'} = A\lambda q - \frac{\bigl(2mgz + Cr_0\lambda\bigr)\,\gamma'}{\sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2}} = 0$$

удовлетворяют значения

$$p = q = \gamma = \gamma' = 0, \qquad \forall\, \lambda. \qquad (2.20)$$

Значения (2.20) для стационарной точки функции $\Phi$ непрерывно зависят от постоянных $r_0, k, 1$. В точке (2.20) имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = 2A, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p\,\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q\,\partial \gamma'} = A\lambda,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma'^2} = -\left(2mgz + Cr_0\lambda\right),$$

где все остальные вторые производные равны нулю.

Применим затем критерий Сильвестра для нахождения достаточного условия минимума функции $\Phi$ относительно частного решения (2.20):

$$A\lambda^2 + 2Cr_0\lambda + 4mgz < 0.$$

Выполнение данного неравенства можно обеспечить, задавая величину $\lambda$ с учетом наличия *условия Майевского*:

$$C^2 r_0^2 - 4Amgz > 0. \tag{2.21}$$

Условие (2.21) является достаточным условием устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа по отношению к переменным $p, q, \gamma, \gamma'$. Устойчивость по отношению к $r, \gamma''$ очевидна и следует из существования соответствующих интегралов $F_2 = \mathrm{const}$, $F_3 = \mathrm{const}$.

## 2.2 Обращение теоремы Рауса

В дальнейшем будем говорить о задаче обращения теоремы 2.3 Рауса. Эта теорема представляет по сути теорему Лагранжа для приведенной системы и тем самым дает аналогию при рассмотрении устойчивости положений равновесия и стационарных движений голономных систем, находящихся под действием потенциальных сил. Что же касается неустойчивости, то здесь подобной аналогии нет, поскольку стационарное движение может быть устойчиво и в случае, когда функция $W$ не имеет минимума — тогда имеет место гироскопическая стабилизация [173], а значит, обращение теоремы 2.3 Рауса, когда функция $W$ не имеет минимума, может произойти лишь при введении дополнительных ограничений [133, 134].

В случае обращения теоремы 2.3 для гироскопически несвязанных систем, на которые не действуют гироскопические силы, полностью применимы теоремы Ляпунова и Четаева об обращении теоремы Лагранжа. Теорема Четаева [173] в рассматриваемой задаче может быть сформулирована так [72, 133]:



**Теорема 2.6.** *Если при фиксированных $p_k = c_k$ для изолированного стационарного движения гироскопически несвязанной системы аналитическая функция $W$ переменных $q_i$ не имеет минимума, то стационарное движение неустойчиво.*

В частном случае, когда функция $W$ зависит лишь от одной координаты: $W = W(q)$, установлено, что если функция $W$ имеет максимум для установившегося движения, то установившееся движение неустойчиво. Задача обращения в случае гироскопически связанной системы становится достаточно сложной для анализа.

Ниже приведем еще теорему Кельвина–Четаева [72] об обращении теоремы 2.3 в терминах коэффициентов устойчивости Пуанкаре.

**Теорема 2.7.** *Если среди собственных значений матрицы $(d_{ij})$, где*

$$d_{ij} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_0, \qquad i, j = \overline{1, s},$$

*имеется нечетное число отрицательных и нет нулевых, то стационарное движение неустойчиво.*

В случае, если число отрицательных корней четное, возможна гироскопическая стабилизация. Корни характеристического уравнения

$$\det\left(d_{ij} - \delta_{ij}\lambda\right) = \Delta(\lambda) = 0, \quad d_{ij} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

называются *коэффициентами устойчивости Пуанкаре* и где ноль снизу у матрицы $\left(\partial W/\partial q_i\,\partial q_j\right)_0$ означает величину данной матрицы при начальных значениях входящих переменных.

С помощью теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению было получено следующее утверждение [226].

**Теорема 2.8 (Теорема Сальвадори).** *Если для стационарного движения системы функция $W$ не имеет минимума, причем ее вторая вариация может принимать положительные значения, а разложения в окрестности стационарного движения коэффициентов $r_i$ линейной формы $R_1$ аналитической функции Рауса $R$ начинаются с членов не ниже второго порядка, то стационарное движение неустойчиво.*

Напомним, что *функция Рауса* представляет собой (см. соотношения (2.4), (2.11)) сумму квадратичной и линейной форм скоростей позиционных координат $q_i$, $i=\overline{1,s}$, а также разности не зависящей от скоростей функции $W=W(q,c)$. Здесь

$$R=R_2+R_1-W,\qquad q=(q_1,\,...,\,q_s),\qquad c=(c_{s+1},\,...,\,c_n),$$

$$R_2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} r_{ij}(q)\,\dot q_i\dot q_j,\qquad R_1=\sum_{i=1}^{s} r_i(q,c)\,\dot q_i.$$

Доказательство теоремы 2.8 Сальвадори строится на том, что в первом приближении отсутствуют гироскопические силы (т.е. $g_{ij}=0$ для всех $i,j=\overline{1,s}$) и среди собственных значений матрицы $(d_{ij})$ имеются отрицательные.

Несколько новых случаев обращения теоремы 2.3 Рауса были получены В.В. Румянцевым [72, 133]. Остановимся на них подробнее. Предположим, что для стационарного движения $q_i=0$ функция $W$ не имеет минимума и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных $q_i$ она может принимать отрицательные значения. Введем в рассмотрение функцию

$$V=-\,H\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial\dot q_i}\,q_i,\qquad H=R_2+W.$$

**Теорема 2.9.** *Пусть в области сколь угодно малых по абсолютной величине значений $q_i,\dot q_i$ существует область, определенная неравенствами*

$$H<0,\qquad \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial\dot q_i}\,\dot q_i>0,\tag{2.22}$$

*в которой квадратичная часть $R^{(2)}$ разложения в ряд Тейлора аналитической функции Рауса $R$ определенно положительна, то стационарное движение неустойчиво.*

**Теорема 2.10.** *Если функция $W$ не имеет минимума на стационарном движении и в его окрестности может принимать положительные значения, то при условии, что в области (2.22) функция*



$$2R_2+R_1+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial q_i}\,q_i$$

*определенно положительна относительно $q_i,\dot q_i$, $i=\overline{1,s}$, стационарное движение неустойчиво.*

Доказательство этих двух теорем Румянцева основано на том, что вычисляя полную производную по времени от введенной выше функции $V$ в силу уравнений возмущенного движения (2.5), получим

$$\dot V=-\,H\left(2R_2+R_1+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial q_i}\,q_i\right).\tag{2.23}$$

В условиях теорем 2.9, 2.10 функция $\dot V$ в области $V>0$ является определенно положительной, т.е. функция $V$ удовлетворяет теореме Четаева о неустойчивости [173], из которой следуют утверждения этих теорем.

**Следствие.** Отметим также, что если в области (2.22) квадратичная часть $R^{(2)}$ разложения функции Рауса в степенной ряд Тейлора:

$$R=R^{(2)}+R^{(3)}\ +\ ...\tag{2.24}$$

определенно положительна, то стационарное движение неустойчиво [133]. Действительно, после подстановки разложения (2.24) в выражение (2.23) получим

$$\dot V=-\,H\left(2R^{(2)}+2R_1^{(2)}-2W^{(2)}\ +\ ...\right)=-\,H\left(2R^{(2)}\ +\ ...\right),$$

откуда вытекает само утверждение о неустойчивости стационарного движения; многоточия обозначают разложения выше второго порядка малости. Имеем здесь

$$R_1^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{s}\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\right)_0 q_j\dot q_i,\qquad a_i=\sum_{k=s+1}^{n} c_{ki}c_k,$$

$$W^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij}\,q_iq_j.$$

Уравнения движения *приведенной системы* в канонических переменных

$$q_i, \quad p_i = \frac{\partial R}{\partial \dot q_i}, \qquad i = \overline{1,s},$$

имеют вид

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1,s},$$

где $H$ — функция Гамильтона, отвечающая лагранжиану $R$ (см. выражение (2.7)) приведенной системы

$$H = H_2 + H_1 + H_0,$$

где обозначено

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} r^{ij}\, p_i p_j, \qquad H_1 = -\sum_{i,j=1}^{s} r^{ij}\, r_i p_j,$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} r^{ij}\, r_i r_j + W, \qquad (r^{ij}) = (r_{ij})^{-1}, \qquad i,j = \overline{1,s}.$$

В соответствии со старыми обозначениями (2.11) имеем

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \bar a_{ij}\, \dot q_i \dot q_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} r_{ij}(q)\, \dot q_i \dot q_j,$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} c_{ki} c_k\, \dot q_i = \sum_{i=1}^{s} r_i(q,c)\, \dot q_i$$

и в предположении, что форма $R_2$ является определенно положительной по отношению к $\dot q_i$, $i = \overline{1,s}$.

С течением времени выяснилось, что по характеру экстремума функции $H_0$ можно судить о неустойчивости стационарных движений [72]. В случае, если $R^{(2)}$ определенно положительна в любой достаточно малой окрестности движения $q_i = 0$, то указанное выше следствие эквивалентно следующей теореме Г.К. Пожарицкого [123].



**Теорема 2.11.** *Если не зависящая от импульсов часть аналитической функции Гамильтона имеет максимум на стационарном движении и этот максимум проявляется по членам второго порядка, то стационарное движение неустойчиво.*

Можно доказать [162] неустойчивость стационарных движений в случае максимума функции $W$ при условии, что функция $R_1\, dt$ — это полный дифференциал. Это утверждение в соответствии с теоремой 2.7 доказано для гироскопически несвязанных систем.

Напомним при этом, что в обозначениях $R_2, R_1$ уравнения движения приведенной системы (2.11) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial R_2}{\partial q_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\, \dot q_j, \qquad i = \overline{1,s},$$

где

$$g_{ij} = g_{ij}(q,c) = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\,g_{ji}.$$

При $g_{ij} = 0$, $\forall\, i,j = \overline{1,s}$, в отсутствии действия на систему гироскопических сил имеем гироскопически несвязанную систему. Простой критерий гироскопической несвязанности дает следующая лемма Л. Парса [120].

**Лемма 2.1.** *Система является гироскопически несвязанной тогда и только тогда, когда функция*

$$R_1\, dt \equiv \sum_{i=1}^{s} r_i(q)\, dq_i$$

*представляет собой полный дифференциал.*

В случае, когда

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} = 0,$$

уравнения движения приведенной системы допускают обобщенный интеграл энергии $R_2 + W = \mathrm{const}$, который представляет интеграл энергии $E = T + \Pi = \mathrm{const}$ исходной системы, если исключить из его левой части скорости циклических координат $\dot q_k$ с помощью введенных выше соотношений (2.3.1).

Обобщение последних упомянутых результатов на случай гироскопически связанных систем при отказе от аналитичности функции Гамильтона и от условия на максимум функции $H_0$ по членам второго порядка проведено в работе [66].

**Теорема 2.12 (Теорема Карапетяна).** *Если не зависящая от импульсов часть функции Гамильтона, предполагаемой дважды непрерывно дифференцируемой по координатам, имеет строгий локальный минимум на стационарном движении, то это движение неустойчиво при условии, что*

$$\psi(\rho) \equiv \beta^2(\rho)\,\gamma^2(\rho) - \alpha(\rho) \le 0, \qquad \forall\, \rho \ne 0, \quad \psi(\rho) \not\equiv 0, \tag{2.25}$$

*где* $\beta^2(\rho)$ *— максимальное собственное значение матрицы* $1/2\left(r^{ij}(q)\right)$ *на сфере* $S_\rho = \left\{ q : \ \|\,q\,\| = \rho \right\}$*; здесь*

$$\gamma^2(\rho) = \max_{q \in S_\rho} \left( \sum_{i=1}^{s} r_i^2(q) \right), \qquad \alpha(\rho) = \max_{q \in S_\rho} W(q).$$

Отказавшись от условия (2.25), приходим к следующей теореме [191, 192].

**Теорема 2.13 (Теорема Хагедорна).** *Если не зависящая от импульсов часть функции Гамильтона* $H \in C^2$ *имеет строгий локальный максимум на стационарном движении, то это движение неустойчиво.*

Чтобы получить данное утверждение, надо перейти от системы уравнений (2.5) к эквивалентной им вариационной задаче

$$\int_{Q_0}^{Q_1} \left( 2\sqrt{h - W(q)} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} r_{ij}(q)\, q_i' q_j' } + \sum_{i=1}^{s} r_i(q)\, q_i' \right) ds = \min, \tag{2.26}$$

представляющей принцип наименьшего действия в форме Якоби в обозначениях: $Q$ — точка в пространстве конфигураций приведенной системы, $h$ — постоянная интеграла Якоби $R_2 + W = h$, $q' = dq/ds$, $s$ — длина дуги в пространстве конфигураций, отсчитываемая от точки $Q_0$.



Используя *теорему Карадеодори* (см. работу [72]), можно установить, что вариационная задача (2.26) имеет решение при $Q_0 = 0$ и $Q_1$ из шара конечного радиуса, не зависящего от $h$, где $h > 0$ — сколь угодно малая величина, т.е. система (2.5) имеет решение, выходящее на сферу конечного радиуса за конечное время при сколь угодно малых возмущениях вида $q_0 = 0$, $\dot q_0 \ne 0$.

Справедливость теоремы 2.13 сохраняется и в случае, если лагранжиан почти периодически зависит от времени [31], и для систем с непрерывно дифференцируемой функцией Лагранжа при нестрогом максимуме функции $H_0$ [86].

Результат, близкий к предыдущей теореме 2.13, сформулирован в следующем утверждении [230].

**Теорема 2.14 (Теорема Тешнера).** *Пусть* $\exists$ *функция* $\psi(q) \in C^3$*, удовлетворяющая условиям:*

$$1)\ (\operatorname{grad}\psi)_0 = 0; \qquad 2)\ H(q,\, \operatorname{grad}\psi) < 0, \qquad \forall\, q \ne 0.$$

*Тогда стационарное движение неустойчиво.*

Доказательство теоремы 2.14 строится на введении канонического преобразования, сохраняющего свойство устойчивости, вида

$$\bar q = \frac{\partial \Psi(\bar p, q)}{\partial \bar p}, \qquad p = \frac{\partial \Psi(\bar p, q)}{\partial q},$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^{s} \bar q_i(q)\, \bar p_i + \psi(q), \qquad \bar q(0) = 0,$$

когда осуществляется переход от переменных $q, p$ к переменным $\bar q, \bar p$, в которых не зависящая от импульсов часть функции Гамильтона будет равна $H(q, \operatorname{grad}\psi)$. Обратим также внимание на то, что при $\psi(q) \equiv 0$ теорема 2.14 приводит к теореме 2.13.

## 2.3 Воздействие возмущающих сил

Изучим вначале влияние диссипативных сил на устойчивость стационарных движений голономных систем с циклическими координатами [72, 133]. Уравнения движения при действии диссипативных сил $Q_h(q, \dot q)$ имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + Q_h, \qquad h = \overline{1, n}, \tag{2.27}$$

где $\sum_{h=1}^n Q_h\,\dot q_h \le 0$. Будем пока считать, что все $Q_k$, $k = \overline{s+1, n}$, равны нулю, или $Q_h$ — производные от функции Релея вида

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} f_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j, \qquad Q_h = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_h}.$$

Полагаем при этом функцию $F$ определенно положительной функцией, зависящей только от скоростей позиционных координат $\dot q_i$, $i = \overline{1, s}$.

В этом случае уравнения (2.27) в силу того, что $\partial L/\partial q_k \equiv 0$, будут допускать $n - s$ циклических интегралов

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = c_k = \mathrm{const}, \qquad k = \overline{s+1, n}.$$

Тогда циклическими переменными можно будет пренебречь и представить уравнения Рауса в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} + Q_i, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{2.28}$$

Из приведенных соотношений нетрудно получить уравнение для скорости диссипации энергии

$$\frac{d}{dt}(R_2 + W) = -\,2F.$$

**Теорема 2.15.** *Если функция $W$ имеет изолированный минимум при данных величинах $p_k = c_k$, а также для любых достаточно близких к данным $p_k = c_k + \eta_k$, и если значения $q_i$, обращающие ее в минимум, суть непрерывные функции величин $p_k$, то*



*диссипативные силы $Q_i$ :*

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}, \quad i = \overline{1, s}, \qquad 2F = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j,$$

*не нарушают устойчивости стационарного движения, отвечающего данным $p_k = c_k$, а всякое достаточно близкое к нему возмущенное движение стремится асимптотически к стационарному движению, отвечающему минимуму $W$ при возмущенных значениях величин $p_k = c_k + \eta_k$.*

У этой теоремы имеется следствие, заключающееся в том, что если функция $W$ имеет изолированный минимум при данных $c_k$, то стационарное движение становится асимптотически устойчивым при добавлении указанных выше диссипативных сил, если значения постоянных $c_k$ не возмущаются. Отметим также, что в случае, когда вторая вариация функции $W$ : $\delta^2\mathrm{W}$ является определенно положительной, то данное следствие представляет собой теорему Кельвина [72, 133].

Эти результаты можно обобщить на случай диссипативных сил с частичной диссипацией при условии, что множество $\sum_{h=0}^n Q_h \dot q_h = 0$ $(F = 0)$ не содержит целых траекторий системы (2.28), отличных от тривиального [124, 143, 144, 199, 218, 223], и при дополнительных условиях на случай неизолированных при данных $p_k = c_k$ стационарных движений [100]. Обобщения этих результатов на реономные системы см. в работах [98, 100, 190, 219-222, 224].

**Теорема 2.16.** *Если для изолированного при данных $p_k = c_k$ стационарного движения функция $W$ не имеет минимума, то стационарное движение неустойчиво.*

Из этой теоремы вытекает следствие: гироскопическая стабилизация стационарного движения, возможная в случае отсутствия минимума у функции $W$ при четном числе отрицательных собственных значений матрицы $(d_{ij}) = \left(\partial^2 W/\partial q_i\,\partial q_j\right)_0$, при действии диссипативных сил с полной по скоростям позиционных координат диссипацией разрушается.

Далее рассмотрим действие на систему с циклическими координатами диссипативных сил, производных от функции Релея вида

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\, \dot q_i \dot q_j, \qquad f_{ij} = f_{ji} = \mathrm{const},$$

определенно положительной относительно всех скоростей $\dot q_j$, $j = \overline{1,n}$. При этом стационарное движение вида (2.12) системы с циклическими координатами возможно при условии действия на систему некоторых постоянных сил $P_j$, уравновешивающих диссипативные силы на изучаемом стационарном движении. Уравнения движения системы в форме Лагранжа в этом случае будут иметь вид уравнений (2.27), где

$$Q_h = Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_j} + P_j, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{2.29}$$

Домножая уравнения (2.29) на $\dot q_j$ и складывая по всем $j$, найдем уравнение для скорости изменения энергии

$$\frac{d}{dt}\,(T + \Pi) = -\,2F + \sum_{j=1}^{n} P_j\, \dot q_j. \tag{2.30}$$

Уравнения (2.27), (2.29) допускают решение

$$q_i = q_{i0},\ \dot q_i = 0, \quad i = \overline{1,s}, \qquad \dot q_k = \dot q_{k0}, \quad k = \overline{s+1,n}, \tag{2.31}$$

описывающее стационарное движение, если для значений (2.31) выполняются условия

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial \dot q_j}\right)_0 + P_j = 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Для возмущенного движения системы из уравнения (2.30) можно получить уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[\, H^{(2)}\big(\xi_i, \dot\xi_i, \dot\xi_k\big) \ + \ \ldots\right] = -\,2F\big(\dot\xi_h\big), \tag{2.32}$$



где $\xi_i$ — возмущения позиционных координат, $\dot\xi_h = \big(\dot\xi_i, \dot\xi_k\big)$ — возмущения всех скоростей (позиционных и циклических); здесь многоточие обозначает члены не ниже третьего порядка малости.

**Теорема 2.17 (Теорема Пожарицкого)** *Если в окрестности стационарного движения* (2.31) *вторая вариация* $H^{(2)}$ *энергии системы (с аналитической функцией Лагранжа) является определенно положительной функцией переменных* $\xi_i, \dot\xi_i, \dot\xi_k$, *то стационарное движение системы, находящейся под действием потенциальных, диссипативных и постоянных сил, уравновешивающих диссипативные в этом движении, асимптотически устойчиво, а если* $H^{(2)}$ *может принимать отрицательные значения, то оно неустойчиво.*

В работе [136] рассмотрены задачи о влиянии гироскопических и диссипативных сил, зависящих от всех скоростей, на устойчивость стационарных движений систем с циклическими координатами, к которым также надо приложить постоянные силы для существования стационарных движений. В данном случае уравнения движения системы (2.27), где

$$Q_h = \sum_{r=1}^{n} g_{hr}\, \dot q_r - \frac{\partial F}{\partial \dot q_h} + P_h, \qquad h = \overline{1,n},$$

$$g_{kh} = -\,g_{hk} = \frac{\partial g_k(q)}{\partial q_h} + g^*_{kh0},$$

$$g^*_{kh} = \mathrm{const}, \quad g_{hk} = (g_{hk})_0, \quad h = \overline{1,n}, \quad k = \overline{s+1,n},$$

где $g_{hk}$ — гироскопические матричные коэффициенты, допускают решение (2.31), если

$$\sum_{k=s+1}^{n} g_{hk}\, \dot q_{k0} - \sum_{k=s+1}^{n} f_{hk}\, \dot q_{k0} + P_h = 0,$$

и не имеют, вообще говоря, интегралов вида $p_k \equiv \partial L/\partial \dot q_k = c_k = \mathrm{const}$, $k = \overline{s+1,n}$, и интеграла энергии. Тем не менее, они допускают уравнение энергии (2.30), которое для возмущенного движения принимает вид (2.32). Результатом служит следующая теорема В.В. Румянцева [136].

**Теорема 2.18.** *Если диссипативные силы обладают полной диссипацией, то рассматриваемое стационарное движение асимптотически устойчиво относительно переменных* $q_i, \dot q_i$, $i = \overline{1, s}$; $p_k$, $k = \overline{s+1, n}$, *в случае, когда вторая вариация* $H^{(2)}$ *энергии системы (с аналитической функцией Лагранжа) является определенно положительной функцией своих переменных, и неустойчиво в случае, когда вторая вариация энергии может принимать отрицательные значения при сколь угодно малых по абсолютным величинам возмущениях переменных.*

Данные результаты справедливы и при наличии диссипативных сил с частичной диссипацией, если множество $F = 0$ не содержит других целых движений системы, отличных от невозмущенного движения. В отсутствии диссипативных сил или, если диссипативные силы обладают частичной диссипацией, и при этом функция $H^{(2)}$ является определенно положительной, то тогда стационарное движение устойчиво по отношению к переменным $q_i, \dot q_i$, $i = \overline{1, s}$; $p_k$ $k = \overline{s+1, n}$.

В той же работе [136] рассмотрено также влияние на устойчивость стационарных движений с циклическими координатами гироскопических сил вида

$$Q_h = \sum_{r=1}^{n} g_{hr}\,\dot q_r, \qquad g_{kh} = -\,g_{hk} = \frac{\partial g_k(q)}{\partial q_h},$$
$$g_{kl} \equiv 0, \qquad \big(g_{kh}\big)_0 = 0, \qquad h = \overline{1, n}, \quad k, l = \overline{s+1, n}, \tag{2.33}$$

в отсутствии диссипативных и постоянных сил. В этом случае уравнения движения системы (2.27) имеют циклические интегралы вида

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = g_k + c_k, \qquad c_k = \mathrm{const}, \qquad k = \overline{s+1, n}. \tag{2.34}$$

С помощью функции Рауса, определенную равенством

$$R^\alpha = R^\alpha(q, \dot q, c) = L - \sum_{k=s+1}^{n} \dot q_k\,(g_k + c_k),$$

в правой части которого $\dot q_k$, $k = \overline{s+1, n}$, исключены благодаря соотношениям (2.34), первые $s$ уравнений системы (2.27) можно записать в виде



$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R^\alpha}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial R^\alpha}{\partial q_i} + Q_i^\alpha, \qquad i = \overline{1, s},$$
$$Q_i^\alpha = \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\,\dot q_j + \sum_{k=s+1}^{n} g_{ik}\,\dot q_k + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial q_i}\,\dot q_k = \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\,\dot q_j. \tag{2.35}$$

Систему (2.35), которую можно исследовать независимо от $n-s$ остальных уравнений системы (2.27), называют приведенной с $(^\alpha)$ в отличие от приведенной без $(^\alpha)$ системы (2.5). Из сравнения систем (2.35) и (2.5) следует, что действие гироскопических сил вида (2.33) приводит к воздействию на приведенную с $(^\alpha)$ систему (2.35) дополнительных по сравнению с приведенной системой (2.5) потенциальных и гироскопических сил. Отметим также, что уравнения (2.35) допускают интеграл

$$R_2^\alpha + W^\alpha = \mathrm{const},$$

причем здесь $W^\alpha$ отличается от $W$ при одинаковых значениях $c_k$, $k = \overline{s+1, n}$, на величину

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=s+1}^{n} b_{kl}\,\big(g_k g_l + 2 g_l c_k\big),$$

где $b_{kl}$ — матричные элементы из первой суммы соотношения (2.3.1) при $p_k = \partial L/\partial \dot q_k = c_k = \mathrm{const}$, $k = \overline{s+1, n}$. В результате (подробности см. в работах [72, 136, 193]) приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.19.** *При известных условиях стационарное движение (2.31) исходной системы, неустойчивое (устойчивое) под действием потенциальных сил, можно стабилизировать (дестабилизировать) или сохранить неустойчивым (устойчивым) приложением к системе надлежащих гироскопических сил вида (2.33). При действии на систему диссипативных сил, зависящих от скоростей* $\dot q_i$ *позиционных координат, такая гироскопическая стабилизация сохраняется (разрушается), если функция* $W^\alpha$ *для системы с* $(^\alpha)$ *имеет минимум (не имеет* *минимума и степень неустойчивости системы с* $(^\alpha)$ *четная); если же* $W^\alpha$ *не имеет минимума и степень неустойчивости нечетная, то стационарное движение остается неустойчивым. В случае минимума* $W^\alpha$ *и действия диссипативных сил с полной по* $\dot q_i$, $i=\overline{1,s}$, *диссипацией возмущенные движения, достаточно близкие к невозмущенному, асимптотически стремятся к стационарному движению, отвечающему минимуму* $W^\alpha$ *при возмущенных значениях постоянных* $c_k$, $k=\overline{s+1,n}$.

В работах [69, 70] проведено исследование стационарных движений систем вида

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial K}{\partial q_i}+\sum_{i=1}^{s} g_{ij}\,\dot q_j-\frac{\partial W}{\partial q_i}+\sum_{k=s+1}^{n} g_{ik}\,\frac{\partial W}{\partial p_k},\quad i=\overline{1,s},\\ &\dot p_k=\sum_{j=1}^{s} g_{kj}\,\dot q_j,\quad k=\overline{s+1,n},\end{aligned}\tag{2.36}$$

где для $q=(q_1,\,...,\,q_s)^*,\ p=(p_{s+1},\,...,\,p_n)^*$ имеем

$$K=\frac12\sum_{i,j=1}^{s} r_{ij}(q)\,\dot q_i\dot q_j>0,\qquad \forall\,\dot q\neq 0,\qquad r_{ij}=r_{ji}\in C^2,$$

$$g_{hr}=g_{hr}(q,\dot q,p)=-\,g_{rh}\in C^1,\qquad h,r=\overline{1,n},$$
$$g_{kl}\equiv 0,\qquad k,l=\overline{s+1,n},\qquad W=W(q,p)\in C^2.$$

Уравнения движения (2.27) консервативной голономной системы с циклическими координатами при действии на нее гироскопических сил вида

$$Q_h=\sum_{r=1}^{n} g_{hr}\,\dot q_r,\qquad g_{kl}\equiv 0,\qquad h=\overline{1,n},\qquad k,l=\overline{s+1,n},$$

можно привести к виду уравнений (2.36), которые допускают стационарные решения

$$q_i=q_{i0},\quad \dot q_i=0,\quad i=\overline{1,s};\qquad p_k=p_{k0},\quad k=\overline{s+1,n},\tag{2.37}$$



если $n$ постоянных $q_{i0},p_{k0}$ удовлетворяют системе $s<n$ уравнений

$$\frac{DW}{Dq_i}=0,\qquad i=\overline{1,s},$$

где обозначено

$$\frac{D}{Dq_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}-\sum_{k=s+1}^{n} g_{ik}\,\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Приходим отсюда к следующим теоремам А.В. Карапетяна [69, 70].

**Теорема 2.20.** *Стационарное движение* (2.37) *устойчиво, если все собственные значения матрицы*

$$C=\left(\frac{D^2W}{Dq_i\,Dq_j}\right)\tag{2.38}$$

*положительны в точке* $q_0,p_0$, *а в некоторой окрестности этой точки выполнены условия*

$$\frac{Dg_{ki}}{Dq_j}-\frac{Dg_{kj}}{Dq_i}\equiv 0,\qquad i,j=\overline{1,s},\quad k=\overline{s+1,n}.\tag{2.39}$$

**Теорема 2.21.** *Стационарное движение* (2.37) *неустойчиво, если определитель матрицы* (2.38) *или все собственные значения матрицы*

$$C-\frac14\,GA^{-1}G,\qquad G=\big(g_{ij}\big),\qquad A=\big(r_{ij}\big),\qquad i,j=\overline{1,s},$$

*отрицательны в точке* $q_0,p_0$ *— как при выполнении в этой точке условий* (2.39), *так и при их невыполнении; в последнем случае, кроме того, для устойчивости необходимо выполнение* $s-1$ *условий типа равенств.*

Рассмотрим далее задачу о влиянии постоянно действующих возмущений на устойчивость стационарных движений. Согласно результатам работы [90] в общем случае для устойчивости стационарных движений при постоянно действующих возмущениях достаточно асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Предположим, что система возмущается постоянно действующими силами, которые допускают силовую функцию. Предположим также, что малая возмущающая силовая функция $\mu\,\Psi(q_1, ..., q_s)$ является ограниченной голоморфной функцией позиционных координат $q_1, ..., q_s$; $\mu$ — малый параметр. Тогда измененная потенциальная энергия системы равна

$$W_1 = W - \mu\Psi,$$

и вместо уравнений (2.15) уравнения стационарных движений примут вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} - \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{2.40}$$

Уравнения (2.40) могут иметь решения (2.12) при тех же постоянных $q_{i0}, \dot q_{i0}$, если

$$\left(\mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial q_i}\right)_0 \neq 0, \qquad i = \overline{1, s},$$

но имеют решения при каких-либо других значениях этих постоянных. Это означает, что тогда действительное движение МС несколько отличается от движения (2.12), но для его устойчивости при соответствующих условиях будет справедлива теорема 2.5 Рауса с заменой функции $W$ на функцию $W_1$. В этом случае, исходя из условий минимума функции $W_1$, можно будет найти максимально допустимые значения возмущающих сил, не нарушающих устойчивости стационарного движения (2.12).

Если при значениях (2.12):

$$\left(\mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \tag{2.41}$$

то тогда уравнения (2.40) допускают решение (2.12), для устойчивости которого надо воспользоваться теоремой 2.5 с функцией $W_1$. Из условий минимума $W_1$ можно найти допустимые пределы для постоянно действующих потенциальных возмущающих сил, не нарушающих устойчивости движения (2.12).



В случае, если для невозмущенного движения параметр $\mu = 0$, условия (2.41) по-прежнему будут выполняться. Тогда условия минимума функции $W$ будут достаточными условиями устойчивости стационарного движения (2.12) и при постоянно действующих потенциальных возмущениях. Аналогично можно рассмотреть и вопросы, связанные с достаточными условиями неустойчивости с помощью теорем 2.6, 2.10 для функции $W$.

В конце параграфа остановимся кратко еще на задаче об устойчивости относительных положений равновесия голономных МС [133, 146, 194, 195, 216].

Пусть на голономную МС с циклическими координатами, помимо потенциальных сил, действуют такие силы, при которых скорости циклических координат сохраняют постоянные значения при всех движениях. Уравнения движения такой системы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.42}$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = Q_k, \qquad k = \overline{s+1, n}, \tag{2.43}$$

причем $Q_k$ таковы, что $\dot q_k = \dot q_{k0}$, $k = \overline{s+1, n}$. С учетом этого уравнения (2.42) можно представить так:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L^\alpha}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L^\alpha}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.44}$$

где $L^\alpha = L\big(q_i, \dot q_i, \dot q_{k0}\big)$.

Из уравнений

$$\frac{\partial L^\alpha}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{2.45}$$

можно найти положения равновесия системы (2.44):

$$q_i = q_{i0}, \qquad \dot q_i = 0, \qquad i = \overline{1, s}.$$

Сравнивая уравнения (2.45) с уравнениями (2.13) (с учетом соотношений (2.12)), можно сделать вывод о том, что стационарным движениям системы (2.42), (2.43) при $Q_k = 0$ отвечают положения относительного равновесия системы (2.44) и наоборот. При этом условия устойчивости этих движений могут различаться. Для некоторых систем частного вида показано [133, 216], что если положение относительного равновесия устойчиво, то устойчиво и соответствующее стационарное движение. В общем случае справедливы следующие теоремы [146, 195].

**Теорема 2.22.** *Если в положении относительного равновесия измененная силовая функция $L_0^\alpha$ системы* (2.44) *имеет максимум, то измененная силовая функция $R_0$ системы* (2.5) *также имеет максимум. Следовательно, максимум функции $L_0^\alpha$ определяет достаточные условия устойчивости как положения относительного равновесия, так и соответствующего стационарного движения.*

**Теорема 2.23.** *Если не зависящая от импульсов часть функции Гамильтона, отвечающей лагранжиану системы* (2.5), *имеет максимум в стационарном движении, то не зависящая от импульсов часть функции Гамильтона, отвечающей лагранжиану системы* (2.44), *также имеет максимум. Следовательно, максимум функции $H_0 = (1/2)\sum_{i,j=1}^{s} r^{ij}\, r_i r_j - R_0$ определяет достаточные условия неустойчивости как стационарного движения, так и соответствующего положения относительного равновесия.*

**Замечание.** Отметим, что фигурирующая в формулировках теорем 2.22, 2.23 измененная силовая функция $R_0$ — это функция $R_0 = -W$ в представлении функции Рауса $R = R_2 + R_1 + R_0 = R_2 + R_1 - W$. Если речь здесь идет о максимуме функции $R_0$, то это соответствует минимуму функции $W$.

## 2.4 Устойчивость стационарных движений неголономных систем

Исследование стационарных движений консервативных неголономных систем проводят с помощью уравнений движения этих систем в лагранжевых координатах либо в квазикоординатах. Для определенности будем в своем анализе использовать лагранжевы координаты.

**2.4.1. Общее динамическое описание.** Пусть имеется неголономная МС. Предполагается, что скорость $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_n$ обобщенных



координат $q_1$, ..., $q_n$ системы стеснены $n - l$ неинтегрируемыми соотношениями (уравнениями связей) вида

$$\sum_{u=1}^{n} B_{\sigma u}(q)\,\dot{q}_u = 0, \qquad \sigma = \overline{1, n-l}, \tag{2.46}$$

где считается, что $\operatorname{rank}\big(B_{\sigma u}\big) = n - l$. Уравнения движения такой системы можно написать, к примеру, в форме уравнений Лагранжа с неопределенными множителями $\lambda_\sigma$ :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} = \frac{\partial L}{\partial q_u} + \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma u}, \qquad u = \overline{1, n}. \tag{2.47}$$

Здесь $L = L(q, \dot{q}) = T + U = T - \Pi$ — функция Лагранжа, $T = T(q, \dot{q})$ — кинетическая энергия, $U = U(q)$ — силовая функция, $\Pi = \Pi(q)$ — потенциальная энергия.

Потенциальные силы, действующие на систему, являются производными от силовой функции $U$. Если помимо этих сил на систему действуют еще и диссипативные силы $Q_u(q, \dot{q})$ такие, что $\sum_{u=1}^{n} Q_u(q, \dot{q})\,\dot{q}_u \le 0$, то тогда в правых частях уравнений (2.47) надо добавить слагаемые с $Q_u$ :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} = \frac{\partial L}{\partial q_u} + Q_u + \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma u}, \qquad u = \overline{1, n}. \tag{2.48}$$

Чтобы получить замкнутую систему, к уравнениям движения (2.47) либо (2.48) надо добавить уравнения связей (2.46). В первом случае имеем консервативную систему, которая допускает интеграл энергии $T - U = \mathrm{const}$. Во втором случае имеем уравнение энергии

$$\frac{d\,(T - U)}{dt} = \sum_{u=1}^{n} Q_u\,\dot{q}_u.$$

Диссипативные силы, в частности могут быть производными от функции Релея $F$, т.е.

$$Q_u = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_u}, \qquad F = \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{n} f_{uv}(q)\,\dot q_u \dot q_v \geq 0,$$

и тогда уравнение энергии запишется в виде:

$$\frac{d\,(T-U)}{dt} = -\,2F.$$

Отметим, что уравнения Лагранжа с неопределенными множителями $\lambda_\sigma$ вместе с уравнениями неголономных связей представляют замкнутую систему $(3n-l)$–го порядка относительно $3n-l$ переменных $q_u, \dot q_u$ и $\lambda_\sigma$. После разрешения уравнений связей (2.46) относительно любых $n-l$ (например, последних) скоростей обобщенных координат (в силу того, что $\operatorname{rank}(B_{\sigma u}) = n-l$, это сделать можно), уравнения связей представимы в виде

$$\dot q_\kappa = \sum_{r=1}^{l} b_{\kappa r}\,(q)\,\dot q_r, \qquad \kappa = \overline{l+1, n}. \tag{2.49}$$

Тогда уравнения движения неголономной системы можно будет записать в форме *уравнений Воронца*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_r} = \frac{\partial\,(\Theta+U)}{\partial q_r} + \sum_{\kappa=l+1}^{n}\frac{\partial\,(\Theta+U)}{\partial q_\kappa}\,b_{\kappa r} +$$

$$+ \sum_{\kappa=l+1}^{n}\Theta_\kappa \sum_{s=1}^{l}\nu_{\kappa r s}\,\dot q_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot q_r}, \qquad r = \overline{1, l}, \tag{2.50}$$

где

$$\nu_{\kappa r s} = \frac{\partial b_{\kappa r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\kappa s}}{\partial q_r} - \sum_{\pi=l+1}^{n}\left(b_{\pi s}\,\frac{\partial b_{\kappa r}}{\partial q_\pi} - b_{\pi r}\,\frac{\partial b_{\kappa s}}{\partial q_\pi}\right).$$

Здесь через $2\Theta$, $\Theta_\kappa$, $\Phi$ обозначены результаты исключения величин $\dot q_\kappa$, $\kappa = \overline{l+1, n}$, с помощью соотношений (2.49) из $2T$, $\partial T/\partial \dot q_\kappa$, $2F$



соответственно:

$$2\Theta = \sum_{r,s=1}^{l}\tau_{rs}(q)\,\dot q_r \dot q_s,\;\; \Theta_\kappa = \sum_{p=1}^{l}\theta_{\kappa p}(q)\,\dot q_p,\;\; 2\Phi = \sum_{r,s=1}^{l}\varphi_{rs}(q)\,\dot q_r \dot q_s,$$

$$\tau_{rs} = a_{rs} + \sum_{\kappa=l+1}^{n}\big(a_{r\kappa}\,b_{\kappa s} + a_{\kappa s}\,b_{\kappa r}\big) + \sum_{\kappa,\pi=l+1}^{n} a_{\kappa\pi}\,b_{\kappa r}\,b_{\pi s},$$

$$\theta_{\kappa p} = a_{\kappa p} + \sum_{\pi=l+1}^{n} a_{\kappa\pi}\,b_{\pi p},$$

$$\varphi_{rs} = f_{rs} + \sum_{\kappa=l+1}^{n}\big(f_{r\kappa}\,b_{\kappa s} + f_{\kappa s}\,b_{\kappa r}\big) + \sum_{\kappa,\pi=l+1}^{n} f_{\kappa\pi}\,b_{\kappa r}\,b_{\pi s}.$$

Заметим, что уравнения (2.50) вместе с уравнениями (2.49) составляют замкнутую систему $(n+l)$–го порядка относительно $n+l$ переменных $q_u, \dot q_r$, $u = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, l}$, и допускают уравнение энергии

$$\frac{d\,(\Theta-U)}{dt} = -\,2\Phi;$$

при отсутствии диссипативных сил имеем интеграл энергии $\Theta - U = \mathrm{const}$.

В случае, когда кинетическая энергия, диссипативная и силовая функции, а также коэффициенты неголономных связей вида (2.49) не зависят от $n-l$ последних координат, уравнения (2.50) тогда можно рассматривать независимо от уравнений связей. Уравнения движения неголономных систем, которые в этом случае называются *системами Чаплыгина*, записываются с помощью *уравнений Чаплыгина* так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_r} = \frac{\partial\,(\Theta+U)}{\partial q_r} + \sum_{\kappa=l+1}^{n}\Theta_\kappa \sum_{s=1}^{l}\mu_{\kappa r s}\,\dot q_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot q_r},$$

$$\mu_{\kappa r s} = \frac{\partial\, b_{\kappa r}}{\partial q_s} - \frac{\partial\, b_{\kappa s}}{\partial q_r}, \qquad r = \overline{1, l}.$$

Важно иметь в виду, что задача об устойчивости по отношению ко всем переменным $q_u, \dot q_u$, $u = \overline{1,n}$, движения неголономных МС имеет характер задачи об условной устойчивости [72, 132, 173]. Однако задача об устойчивости движения неголономных систем по отношению к части переменных, например, $q_u, \dot q_r$, $u = \overline{1,n}$, $r = \overline{1,l}$, если уравнения движения взяты в виде уравнений (2.49), (2.50), имеет характер задачи о безусловной устойчивости.

**2.4.2. Определения.** Для уравнений движения, записанных в лагранжевых координатах, стационарным движением считается такое, при котором позиционные координаты и скорости циклических координат сохраняют начальные значения; при этом циклические координаты меняются линейно по времени [72].

Здесь надо отметить, что в отличие от голономных МС, где циклическими называют координаты, от которых не зависит функция Лагранжа системы, для неголономных МС имеется несколько таких определений. В следующих двух определениях говорится о существовании циклических интегралов [141, 147].

**Определение 2.1.** *Координата $q_\rho$ называется циклической, если ее скорость не входит в уравнения связей и частная производная от функции Лагранжа по этой координате, вычисленная с помощью уравнений связей, равна нулю:*

$$B_{\sigma\rho} = 0, \qquad \left.\frac{\partial L}{\partial q_\rho}\right|_{(2.46)} = 0, \qquad \sigma = \overline{1, n-l}, \tag{2.51}$$

*где выражение $\partial L/\partial q_\rho\big|_{(2.46)}$ означает значение этого выражения с учетом соотношений* (2.46).

В условиях (2.51) уравнения движения (2.46), (2.47) неголономной МС допускают циклический интеграл, записанный в виде

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}\right|_{(2.46)} = c_\rho = \mathrm{const},$$

куда циклическая координата может явно входить, например, с помощью коэффициентов связей, которые зависят от этой координаты. Определение 2.1 обобщает следующее определение.



**Определение 2.2.** *Координата $q_\rho$ называется циклической, если*

$$B_{\sigma\rho} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0, \qquad \sigma = \overline{1, n-l}.$$

В этом случае уравнения движения допускают интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho} = c_\rho = \mathrm{const}, \tag{2.52}$$

куда также может входить явно циклическая координата. В соответствии с определением 2.2 наличие циклических координат $q_\rho$, $\rho = \overline{p+1, n}$, в уравнениях движения (2.46), (2.47) допускает решения вида

$$q_r = q_{r0}, \qquad \dot q_r = 0, \qquad \dot q_\rho = \dot q_{\rho 0}, \qquad \lambda_\sigma = \lambda_{\sigma 0}, \tag{2.53}$$
$$r = \overline{1,p}, \qquad \rho = \overline{p+1, n}, \qquad \sigma = \overline{1, n-l},$$

если $2n - l$ постоянных $q_{r0}, \dot q_{\rho 0}, \lambda_{\sigma 0}$ в равенствах (2.53) удовлетворяют системе $n$ уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma B_{\sigma r} = 0, \qquad r = \overline{1,p}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho} = c_\rho, \qquad \rho = \overline{p+1, n}. \end{gathered} \tag{2.54}$$

В силу произвольности $n - p$ постоянных $c_\rho$ в соотношениях (2.52), (2.54) следует, что стационарные движения здесь образуют многообразия с размерностью, не меньшей $2n - l - p$, т.е. суммы числа циклических координат $n - p$ и числа неголономных связей $n - l$.

В следующих определениях циклических координат говорится о таких координатах, которые обеспечивают существование стационарных движений [54-56].

**Определение 2.3.** *Координата $q_\rho$ называется циклической, если в уравнения движения системы, составленные с учетом неголономных связей, она явно не входит, а входит только ее ускорение и, возможно, скорость.*

Это определение обобщает следующее определение [114, 115].

**Определение 2.4.** *Координата $q_\rho$ называется циклической, если*

$$\frac{\partial B_{\sigma s}}{\partial q_\rho} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0, \qquad \sigma = \overline{1, n-l},\ s = \overline{1, n}. \tag{2.55}$$

Заметим, что наличие соответствующих определениям 2.3, 2.4 циклических координат уравнений движения не допускают, в общем-то, циклических интегралов. Действительно, в условиях действия соотношений (2.55):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{n-1} \lambda_\sigma\, B_{\sigma\rho} \neq 0.$$

Однако допускают стационарные решения вида (2.53), если, к примеру, в условиях (2.55) $2n-l$ постоянных $q_{r0}, \dot q_{\rho 0}, \lambda_{\sigma 0}$ в (2.53) удовлетворяют системе $2n-l$ уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma r} = 0, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma\rho} = 0, \qquad \sum_{\rho=p+1}^{n} B_{\sigma\rho}\, \dot q_\rho = 0,$$
$$r = \overline{1, p}, \qquad \rho = \overline{p+1, n}, \qquad \sigma = \overline{1, n-l}. \tag{2.56}$$

В случае наличия ненулевого относительно $\dot q_\rho$ решения системы (2.56) стационарные движения образуют многообразия с размерностью, не меньшей единицы [114, 115], так как последние $2n-l-p$ уравнений системы (2.56) при $\dot q_\rho \neq 0$ зависимы. Отметим, что зависимость уравнений движения от циклических координат (определения 2.1, 2.2) и отсутствие циклических интегралов (определения 2.3, 2.4) не допускает игнорирования по Раусу циклических переменных. Тем не менее, это возможно сделать в рамках следующего определения [67].

**Определение 2.5.** *Координата $q_\rho$ называется циклической при выполнении условий*

$$\frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0, \quad B_{\sigma\rho} = 0, \quad \frac{\partial B_{\sigma s}}{\partial q_\rho} = 0, \quad \sigma = \overline{1, n-l},\ s = \overline{1, n}. \tag{2.57}$$



Пусть выполнены условия (2.57), где $\rho = \overline{p+1, n}$. Тогда уравнения движения системы не содержат явно циклические координаты и допускают циклические интегралы вида (2.52). Введем функцию Рауса $R$, пользуясь выражением

$$R = L - \sum_{\rho=p+1}^{n} \dot q_\rho\, c_\rho,$$

где в правой части величины $\dot q_\rho$, $\rho = \overline{p+1, n}$, исключены с помощью соотношений (2.52). В этом случае уравнения движения исходной системы можно привести к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_r} = \frac{\partial R}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma r}, \qquad r = \overline{1, p}, \tag{2.58}$$

$$\sum_{r=1}^{p} B_{\sigma r}\, \dot q_r = 0, \qquad \sigma = \overline{1, n-l}, \tag{2.59}$$

$$\dot q_\rho = -\frac{\partial R}{\partial c_\rho}, \qquad \rho = \overline{p+1, n}. \tag{2.60}$$

Уравнения (2.58), (2.59), не зависящие от уравнений (2.60), представляют собой уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа приведенной неголономной МС; положение этой системы определяется $p$ координатами $q_1$, ..., $q_p$, скорости которых связаны $n-l$ неинтегрируемыми уравнениями (2.59), причем динамика системы задается с помощью лагранжиана $R$.

Теорема Рауса–Ляпунова (теоремы 2.3, 2.4, 2.5) в работе [141] была распространена на неголономные системы с циклическими (по определению 2.2) координатами. Здесь предполагается, что $q_\rho$, $\rho = \overline{p+1, n}$, — циклические координаты. Уравнения (2.47) тогда допускают $n-p$ циклических интегралов вида (2.52). В этом случае исходная система может осуществлять стационарные движения (2.53), образующие многообразие (2.54).

Здесь уравнения движения могут зависеть явно от циклических координат. Значит, уравнения возмущенного движения могут, в свою очередь, быть неавтономными. Однако эти уравнения согласно результатам работы [141] допускают интеграл типа Якоби, не зависящий от времени:

$$H(q_r, \dot q_r, c_\rho) \equiv \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial L^\alpha}{\partial \dot q_r}\,\dot q_r - L^\alpha - \sum_{\rho=p+1}^{n} c_\rho \left(\sum_{r=1}^{p} \frac{\partial \omega_\rho}{\partial \dot q_r}\,\dot q_r - \omega_\rho\right), \quad (2.61)$$

где обозначено

$$L^\alpha = L^\alpha(q_r, \dot q_r, c_\rho) \equiv L\left[\, q_r, \dot q_r,\, \omega_\rho(q_r, \dot q_r, c_\rho)\,\right],$$

$\omega_\rho = \omega(q_r, \dot q_r, c_\rho)$ — решение системы (2.52) относительно $\dot q_\rho$, $\rho = \overline{p+1, n}$. Приходим тем самым к выводу о справедливости следующей теоремы [141].

**Теорема 2.24.** *Стационарное движение* (2.53) *устойчиво, если функция* $H$ (2.61) *является определенно положительной относительно* $q_r - q_{r0}$, $\dot q_r$.

Отметим, что функция (2.61) определенно положительна относительно $q_r - q_{r0}$, $\dot q_r$ тогда и только тогда, когда функция

$$W(q_r, c_\rho) \equiv -U + \frac{1}{2} \sum_{\rho,\pi=p+1}^{n} a^{\rho\pi}\, c_\rho c_\pi$$

определенно положительна относительно $q_r - q_{r0}$. Здесь $U$ — силовая функция исходной системы, $a^{\rho\pi}$ — элементы матрицы, обратной к матрице коэффициентов $a_{\rho\pi}$, $\rho, \pi = \overline{p+1, n}$, кинетической энергии исходной системы, стоящих при последних $n-p$ циклических скоростях.

Из системы уравнений (2.54) вытекает, что на стационарном движении

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = \sum_{\sigma=1}^{n-l} \lambda_\sigma\, B_{\sigma r}, \qquad r = \overline{1, p}.$$

Функция $W$ в общем случае будет знакопеременной, поскольку ее разложение по степеням $q_r - q_{r0}$ может начинаться с линейных членов. Поэтому теорема 2.24 дает условия устойчивости лишь некоторых стационарных движений (для которых $\sum_\sigma \lambda_\sigma B_{\sigma r} = 0$ в невозмущенном движении) неголономных систем с циклическими (согласно определению 2.2) координатами.

# Глава 3

## Устойчивость нестационарных и неавтономных механических систем

Чтобы определить многие из понятий устойчивости, достаточно использовать евклидово пространство состояний. Ниже рассматривается конечномерное евклидово пространство $R^n$. Множество конечных состояний (или процессов) в общем случае задается в пространстве $R^n$ и на интервале времени $t \ge 0$. Элементы этого множества обычно удовлетворяют уравнению процесса (движения), которое для детерминированных процессов с непрерывным временем имеет вид

$$\dot x = f(x, t), \qquad x \in R^n, \qquad t \ge 0. \quad (3.1)$$

Динамическая система (3.1), описывающая свободное движение системы, где векторная функция $f$ явным образом зависит от времени $t$, называется *неавтономной* (или *нестационарной* для случая, как правило, управляемой системы). Тогда соответствующая система $\dot x = f(x)$ называется *автономной* (или *стационарной*). Пусть $\bar x(t)$ — невозмущенное движение системы. Согласно уравнению (3.1) имеем

$$\dot{\bar x} = f[\,\bar x(t),\, t\,]. \quad (3.2)$$

Вычтем (3.2) из (3.1) и введем обозначение: $\Delta x(t) = x(t) - \bar x(t)$. Тогда получим

$$\Delta \dot x = f[\,x(t),\, t\,] - f[\,\bar x(t),\, t\,] =$$

$$= f[\,\bar x(t) + \Delta x,\, t\,] - f[\,\bar x(t),\, t\,] = X(\Delta x, t). \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называется *уравнением в отклонениях* или *уравнением возмущенного движения*. Это уравнение имеет нулевое решение $\Delta x \equiv 0$. Видно, что задача об устойчивости невозмущенного движения преобразуется в задачу об устойчивости состояния равновесия $\Delta x \equiv 0$ (устойчивости нулевого решения).

Пусть в начальный заданный момент времени $t_0$ вектор $\Delta x(t_0) \in G$, где $G \subset R^n$ — некоторая область пространства отклонений. Невозмущенное движение $\bar{x}(t)$ называется *асимптотически устойчивым* с областью притяжения в отклонениях $G$, если $\forall\, \Delta x(t_0) \in G$ в силу уравнения (3.3) $\|\, \Delta x(t)\,\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Невозмущенное движение $\bar{x}(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ такое, что из неравенства $\|\, \Delta x(t_0)\,\| < \delta$ следует при $t > t_0$ неравенство $\|\, \Delta x(t)\,\| < \varepsilon$.

Движение $\bar{x}(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и если $\exists\, \eta > 0$ такое, что при $\|\, \Delta x(t_0)\,\| < \eta$ имеет место $\|\, \Delta x(t)\,\| \to 0$ при $t \to \infty$. Смысл этого определения заключается в том, что существует такая окрестность $\eta$ начального состояния $\bar{x}(t_0)$ невозмущенного движения (возможно, сколь угодно малая), что все движения, начавшиеся в этой окрестности, стремятся с течением времени к $\bar{x}(t)$.

Укажем на то, что исследования по устойчивости неавтономных (нестационарных) динамических и, в частности, механических систем проведены во многих работах (см., например, публикации [6-10, 13, 15, 16, 18-20, 61, 63, 73, 75, 98, 101, 107, 118, 137, 145, 166, 179, 180, 196, 197, 209-211, 225, 227]). Материалом для настоящей обзорной главы послужили статьи [6, 7, 9, 15, 16, 18], где в основном обсуждаются вопросы, связанные с устойчивостью положения равновесия неавтономных механических систем.

В § 3.1 проводится исследование устойчивости нелинейных систем, испытывающих воздействие нестационарных возмущений. Получены условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем. Показано, что порядок возмущений может быть меньше порядка правых частей невозмущенных уравнений.

В § 3.2 изучается задача об устойчивости положений равновесия для нелинейных механических систем, находящихся под действием квазипотенциальных и диссипативно-ускоряющих сил, зависящих от времени. Определяются достаточные условия устойчивости положения равновесия с помощью прямого метода Ляпунова и метода дифференциальных неравенств.

В § 3.3 решаются задачи об определении достаточных условий асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия голономной механической системы под действием сил, зависящих от времени. Рассмотрена задача о стабилизации расчетного движения гироскопической системы на подвижном основании, а также изучены условия устойчивости положения равновесия механической системы с переменными массами. Кроме того, исследована задача об асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия голономной механической системы на случай действия потенциальных сил. Подробно проанализировано несколько модельных примеров.

Небольшой по объему заключительный § 3.4 главы посвящен анализу вопросов, в которых несколько известных утверждений об асимптотической устойчивости и неустойчивости при наличии одной функции Ляпунова со знакопостоянной производной обобщаются на неавтономные динамические системы.



## 3.1 Об устойчивости равновесия одного класса нестационарных систем

В этом параграфе изучается влияние нестационарных возмущений на асимптотические свойства решений нелинейных систем. Предлагается метод построения функций Ляпунова для получения условий, при которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость, неустойчивость и ограниченность решений данных неавтономных систем.

**3.1.1. Устойчивость равновесия нестационарных систем.** Рассматривается СДУ вида

$$\dot{x}_s = f_s(x), \qquad x = (x_1,\, ...,\, x_n)^* \in R^n, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{3.4}$$

Вместе с системой (3.4) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}_s = f_s(x) + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}(t)\, h_j(x), \tag{3.5}$$

где $f_s(x)$ — однородные функции порядка $\mu$; $h_j(x)$ — однородные функции порядка $\sigma$. Здесь $\mu$ и $\sigma$ — рациональные числа с нечетными знаменателями; функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при

$t \geq 0$ вместе с интегралами $\int_0^t b_{sj}(\tau)\,d\tau,\ t \in [0, +\infty)$. Будем считать, что функции $f_s(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, а $h_j(x)$ непрерывно дифференцируемы, причем $\mu > 1$, $\sigma > 1$.

Предполагается, что системы (3.4) и (3.5) имеют нулевое решение $x = 0$. Исследуем вопрос, при каких условиях асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) решения $x = 0$ системы (3.4) обеспечивает асимптотическую устойчивость (или неустойчивость) нулевого решения возмущенной системы.

В работах [77, 89] установлено, что если $f_s(x)$ — однородные функции, то возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения в случае, когда их порядок выше порядка правых частей системы (3.4), т.е. когда $\sigma > \mu$. Известно [38], что при $\sigma = \mu$ возмущения указанного вида могут нарушать асимптотическую устойчивость линейных систем. А именно, из асимптотической устойчивости системы $\dot{x}_s = \sum_{j=1}^n a_{sj}\,x_j$, где $a_{sj}$ — постоянные коэффициенты, в общем случае не следует асимптотическая устойчивость возмущенной системы $\dot{x}_s = \sum_{j=1}^n \left[\, a_{sj} + b_{sj}(t) \,\right] x_j$.

Можно показать, что в случае нелинейных уравнений асимптотическая устойчивость нулевого решения сохраняется и тогда, когда $\sigma \leq \mu$.

**Теорема 3.1.** *Если нулевое решение системы* (3.4) *асимптотически устойчиво, то тогда при выполнении неравенства*

$$2\sigma > \mu + 1 \tag{3.6}$$

*нулевое решение системы* (3.5) *также будет асимптотически устойчиво.*

Чтобы доказать это утверждение, обратимся к результатам работы [59], где было доказано, что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.4) следует существование положительно определенных функций $V(x)$ и $W(x)$, однородных порядка $m$ и $m + \mu - 1$ соответственно таких, что имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s}\, f_s(x) = -\,W(x)$$

с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $V(x)$.



Возьмем для системы (3.5) функцию Ляпунова (ФЛ) в виде

$$V_1 = V - \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^k \int_0^t b_{sj}(\tau)\,d\tau\, h_j(x). \tag{3.7}$$

Проверка показывает, что функция $V_1(t, x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [87].

Отметим, что данный метод построения ФЛ для нелинейных нестационарных систем можно применить также в качестве получения достаточных условий неустойчивости. В самом деле, пусть нулевое решение системы (3.4) неустойчиво, причем существует функция $V(x)$, удовлетворяющая требованям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [87]. Будем считать, что $V(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая однородная функция (условия существования функций $V(x)$ такого вида получены в работах [64, 77]).

**Теорема 3.2.** *Если выполнено неравенство* (3.6), *нулевое решение системы* (3.5) *неустойчиво.*

Далее выясним условия диссипативности системы (3.5). С этой целью воспользуемся следующим определением из работы [140].

**Определение 3.1.** *Система* (3.5) *равномерно диссипативна, ес-ли* $\exists\, R$ *—число такое, что* $\forall\, H > 0$ *можно указать число* $T > 0$, *для которого* $\forall\, t_0 > 0$, $t \geq t_0 + T$ *выполняется неравенство* $\|\, x(t, x_0, t_0) \,\| < R$, *если только* $\|\, x_0 \,\| \leq H$.

Допустим, что $f_s(x)$ и $h_j(x)$ — непрерывные однородные функции, причем $\mu > 0$, $\sigma > 0$. Пусть нулевое решение системы (3.4) асимптотически устойчиво и существует положительно определенная непрерывно дифференцируемая однородная функция $V(x)$, производная которой в силу системы (3.4) отрицательно определена. Тогда с помощью этой функции можно установить [140], что при $\sigma < \mu$ система (3.5) будет равномерно диссипативной. ФЛ для системы (3.5) в виде (3.7) позволяет улучшить условия диссипативности для $0 < \mu < 1$.

**Теорема 3.3.** *Если функции* $\partial V / \partial x_j \cdot h_j(x),\ j = \overline{1, k}$, *непрерывно дифференцируемы, то при выполнении неравенств* $0 < \mu < 1,\ 2\sigma < \mu + 1$ *система* (3.5) *равномерно диссипативна.*

Стоит отметить, что предложенный метод построения ФЛ можно применить и к некоторым классам нелинейных систем с правыми частями, которые не являются однородными функциями одного и того же порядка [6].

**3.1.2. Модельные примеры. 1.** Пусть имеется система уравнений
$$\dot{x}_s = \frac{\partial U(x)}{\partial x_s}, \tag{3.8}$$
где $U(x)$ — непрерывно дифференцируемая отрицательно определенная однородная функция порядка $\mu$, $\mu > 1$. Согласно работе [87] нулевое решение системы (3.8) асимптотически устойчиво, причем за ФЛ можно взять функцию
$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{3.9}$$
Зададим далее систему с возмущениями
$$\dot{x}_s = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( U(x) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t)\, U_j(x) \right), \tag{3.10}$$
где $U_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $\sigma$, $\sigma > 1$; функции $b_j(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \geq 0$ вместе с интегралами $\int_0^t b_j(\tau)\, d\tau$.

Используя ФЛ (3.9), получим, что при $\sigma > \mu$ нулевое решение системы (3.10) асимптотически устойчиво, а при $\sigma < \mu$ система (3.10) равномерно диссипативна.

Функция $V_1$, определенная в соответствии с формулой (3.7), имеет вид
$$V_1 = V(x) - \sigma \sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_j(\tau)\, d\tau\, U_j(x).$$

Применим теоремы 3.1 и 3.3. Тогда при $\mu > 2$ улучшим условия асимптотической устойчивости: $2\sigma > \mu + 2$, а при $1 < \mu < 2$ — условия диссипативности: $2\sigma < \mu + 2$.



**2.** Возьмем МС, движение которой определяется уравнениями
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$
Здесь функция
$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^*\, A(q)\, \dot{q} \tag{3.11}$$
выражает кинетическую энергию системы с непрерывно дифференцируемой по своим аргументам матрицей $A(q)$. Считаем, что квадратичная форма $\dot{q}^*\, A(0)\, \dot{q}$ положительно определена.

Пусть функция $U$ представима в виде: $U(q) = W(q) + R(q)$, где $W(q)$ — непрерывно дифференцируемая положительно определенная однородная функция порядка $\mu$, $\mu > 2$; функция $R(q)$ — непрерывно дифференцируемая и такая, что
$$\frac{1}{\| q \|^{\mu-1}}\, \frac{\partial R(q)}{\partial q} \xrightarrow[q \to 0]{} 0.$$

Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости равновесия [87] заключаем, что положение равновесия $q = 0$, $\dot{q} = 0$ неустойчиво, а функция
$$V = \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$
удовлетворяет требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

В предположении, что
$$U(q, t) = W(q) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t)\, U_j(q) + R(q),$$
возмущения удовлетворяют свойствам из примера 1, а ФЛ для возмущенной системы имеет вид
$$V_1 = \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \sigma \sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_j(\tau)\, d\tau\, U_j(q),$$

получим, что при выполнении неравенства $2\sigma > \mu + 2$ положение равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ также будет неустойчиво.

**3.** Рассмотрим МС, движение которой описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial P}{\partial q_s} + Q_s(t, \dot q) \tag{3.12}$$

с кинетической энергией $T(q, \dot q)$ в виде квадратичной формы (3.11), $P(q)$ — положительно определенная дважды непрерывно дифференцируемая однородная функция порядка $\lambda$, $\lambda > 2$.

Будем считать, что обобщенные силы имеют вид: $Q_s = \partial W(\dot q)/\partial \dot q_s$, где $W(\dot q)$ — непрерывно дифференцируемая отрицательно определенная однородная функция порядка $\mu$, $\mu > 2$. Таким образом, обобщенные силы являются диссипативными и положение равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ системы (3.12) асимптотически устойчиво 140].

Далее введем в рассмотрение следующую ФЛ [60]:

$$V = T + P + \alpha \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_s}\left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)^r,$$

где $\alpha$ — положительная константа, $r$ — рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $r \ge 1$. Пусть $r \ge \lambda\mu/[\,2\,(\lambda - 1)\,]$, тогда при достаточно малом $\alpha$ функция $V$ положительно определена, а ее производная в силу системы (3.12) — отрицательно определенная функция.

Обратимся теперь к возмущенной системе с обобщенными силами

$$Q_s = \frac{\partial}{\partial \dot q_s}\left(W(\dot q) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t)\, W_j(\dot q)\right).$$

Аналогично примерам 1 и 2 положим, что $W_j(\dot q)$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $\sigma$, $\sigma > 2$; функции $b_j(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \ge 0$ вместе с интегралами $\int_0^t b_j(\tau)\,d\tau$.



ФЛ для возмущенной системы возьмем в виде

$$V_1 = V - \sigma \sum_{j=1}^{n} \int_0^t b_j(\tau)\,d\tau\, W_j(\dot q) - \alpha \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_j(\tau)\,d\tau \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)^r \frac{\partial W_j}{\partial \dot q_s}.$$

Сделаем проверку для функции $V_1$ условий теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, откуда будет следовать, что при выполнении неравенства

$$\sigma > \max\left\{\frac{\mu}{2} + 1,\ \mu - 1 + \frac{2}{\lambda}\right\}$$

возмущения не нарушают асимптотической устойчивости положения равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$.

## 3.2 Устойчивость неавтономных систем при действии потенциальных и диссипативных сил

Рассмотрим движение МС, которое описывается уравнениями

$$\ddot x + A(t)\,\dot x + B(t)\,G_x = 0, \tag{3.13}$$

где $x$ — $n$–мерный вектор, $A(t)$ — $n \times n$–матрица, определенная и непрерывная при $t \ge 0$, $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая при $t \ge 0$ симметрическая матрица, $G(x)$ — скалярная функция, заданная и дважды непрерывно дифференцируемая при $\|\,x\,\| < H$, $H$ — положительная постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $G_x = \partial G/\partial x$. Полагаем, что матрица $B(t)$ положительно определена, т.е. $\exists\, b_0 > 0$ — число такое, что $\forall\, t \ge 0$ и $\forall\, x \in R^n$ справедливо неравенство: $x^*\,B(t)\,x \ge b_0\,\|\,x\,\|^2$.

Будем считать также, что $G(x)$ — положительно определенная функция, причем $G_x(x) \ne 0$ при $x \ne 0$. Тогда система (3.13) имеет изолированное положение равновесия

$$x = 0, \qquad \dot x = 0. \tag{3.14}$$

Поставим задачу об изучении устойчивости положения равновесия (3.14). Задачи исследования устойчивости положений равновесия неавтономных МС изучались во многих работах (см., например, работы [14, 18, 61, 65, 139, 140, 148, 165, 166, 200]. С помощью метода ФЛ проводился анализ таких задач и их решений. Ниже основные усилия направлены на определение достаточных условий устойчивости положения равновесия (3.14) системы (3.13).

**3.2.1. Функция Ляпунова со знакоопределенной производной.** Отметим, что методом предельных функций и предельных уравнений исследовалась [18-21] устойчивость положений равновесия МС при действии на них сил, зависящих от времени. Если воспользоваться полученными результатами, то можно сформулировать достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия (3.14) системы (3.13). Применяемый в работах [18-21] подход основан на использовании ФЛ, имеющих знакопостоянные производные. К сожалению, этот подход не позволяет найти условия сохранения асимптотической устойчивости в случае, когда параметры системы известны с некоторой погрешностью или когда на систему действуют внешние возмущающие силы. Для получения указанных условий согласно работе [78] следует применять лишь теоремы Ляпунова, в которых допускается знакоопределенная производная.

Покажем [9], что достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия, найденные ранее [18-21], могут быть получены с помощью ФЛ, производная которой в силу системы (3.13) отрицательно определена.

В работе [61] исследовались условия асимптотической устойчивости линейного осциллятора

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = 0, \tag{3.15}$$

где $x = x(t)$ — скалярная неизвестная функция, $a(t)$ — непрерывная и ограниченная функция, $b(t)$ — непрерывно дифференцируемая и ограниченная функция при $t \geq 0$. Для уравнения (3.15) был предложен способ построения ФЛ, удовлетворяющей требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [140]. Обобщим этот способ на системы вида (3.13).

Допустим, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ ограничены на интервале времени $[\,0, +\infty)$. Согласно способу, предложенному в работе [18]



ФЛ для системы (3.13) выбирается в виде

$$V = G(x) + \frac{1}{2}\,\dot{x}^*\,B^{-1}(t)\,\dot{x}. \tag{3.16}$$

Будем считать, что матрица

$$C(t) = \dot{B}(t) + A(t)\,B(t) + B(t)\,A^*(t) \tag{3.17}$$

положительно определена. Из работы [18] следует, что тогда положение равновесия (3.14) системы (3.13) асимптотически устойчиво и при этом $\dot{V}\,\big|_{(3.13)} \leq 0$.

Затем рассмотрим функцию

$$V_1 = G(x) + \frac{1}{2}\,\dot{x}^*\,B^{-1}(t)\,\dot{x} + G(x)\,\dot{x}^* G_x. \tag{3.18}$$

Дифференцирование ее по времени в силу системы (3.13) дает

$$\frac{dV_1}{dt}\bigg|_{(3.13)} = -\frac{1}{2}\,\dot{x}^*\,B^{-1}(t)\,C(t)\,B^{-1}(t)\,\dot{x} - G(x)\,G_x^*\,B(t)\,G_x + {}$$
$$+\,\dot{x}^*\left[\,G(x)\,G_x\,\right]_x\dot{x} - G(x)\,\dot{x}^*\,A^*(t)\,G_x.$$

С учетом ограниченности матриц $A(t)$ и $B(t)$ на интервале времени $[\,0, +\infty)$ и положительной определенности матриц $B(t)$ и $C(t)$ получим, что $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, \dot{x} \in R^n$ и достаточно малых значений $\|\,x\,\|$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\alpha_1\left[\,G(x) + \|\,\dot{x}\,\|^2\,\right] \leq V_1 \leq \alpha_2\left[\,G(x) + \|\,\dot{x}\,\|^2\,\right],\\ \frac{dV_1}{dt}\bigg|_{(3.13)} \leq -\,\alpha_3\left[\,G(x)\,\|\,G_x\,\|^2 + \|\,\dot{x}\,\|^2\,\right],\end{gathered} \tag{3.19}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — положительные постоянные. Видим, что функция $V_1$ (3.18) удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

В качестве замечания отметим, что введение в ФЛ (3.18) дополнительного слагаемого $G(x)\,\dot{x}^* G_x$ обеспечивает отрицательную определенность ее производной в силу данной системы. Аналогичные добавки применялись при исследовании устойчивости автономных МС [29, 60, 174].

Предположим далее, что параметры исследуемой системы известны с некоторой погрешностью. Введем в рассмотрение наряду с уравнениями (3.13) также возмущенные уравнения

$$\ddot{x} + \big[\, A(t) + \tilde{A}(t) \,\big]\, \dot{x} + \big[\, B(t) + \tilde{B}(t) \,\big]\, G_x = 0. \tag{3.20}$$

Считаем, что матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{B}(t)$ непрерывны $\forall\, t \geq 0$ и удовлетворяют неравенствам $\|\, \tilde{A}(t) \,\| \leq \Delta_1$, $\|\, \tilde{B}(t) \,\| \leq \Delta_2$, где $\Delta_1, \Delta_2$ — некоторые положительные постоянные. Также считаем, что матрица $C(t)$ положительно определена, матрицы $A(t)$, $B(t)$ ограничены при $t \geq 0$. С учетом сделанных предположений $\exists\, a_0, a_1, b_1, b_2$ — положительные числа такие, что $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, x \in R^n$ справедливы оценки

$$x^*\, C(t)\, x \geq a_0 \,\|\, x \,\|^2, \qquad \|\, A(t) \,\| \leq a_1,$$
$$x^*\, B^{-1}(t)\, x \geq b_1 \,\|\, x \,\|^2, \qquad \|\, B^{-1}(t) \,\| \leq b_2.$$

Помимо этого, положим, что функция $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 G(0)}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\|\, G_x \,\|^2}{G(x)} \xrightarrow[\|\, x \,\| \to 0]{} 0.$$

Этот способ построения ФЛ позволяет получить оценки допустимых изменений параметров системы, для которых асимптотическая устойчивость положения равновесия сохраняется. Покажем это.

**Теорема 3.4.** *Если выполнено неравенство*

$$2b_0 b_2\, \Delta_1 + \big(2a_1 b_2 + a_0 b_1^2\big)\, \Delta_2 < a_0 b_0 b_1^2 \tag{3.21}$$

*то положение равновесия* (3.14) *системы* (3.20) *асимптотически устойчиво.*



Схема доказательства данной теоремы состоит в следующем. Для некоторой положительной константы $\theta$ выберем ФЛ в виде

$$V_2 = G(x) + \frac{1}{2}\, \dot{x}^*\, B^{-1}(t)\, \dot{x} + \theta \dot{x}^* G_x. \tag{3.22}$$

Далее, $\forall\, \theta > 0$ $\exists\, U(x = 0)$ — окрестность точки $x = 0$ такая, что $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, x \in U(x = 0)$ справедлива оценка

$$V_2 \geq \frac{1}{2}\, G(x) + \frac{1}{4}\, b_1 \,\|\, \dot{x} \,\|^2.$$

Продифференцируем функцию $V_2$ с учетом системы (3.20). Тогда получим, что при $t \geq 0$, $\|\, x \,\| < H$, $\dot{x} \in R^n$ имеет место неравенство

$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(3.20)} \leq -\,\theta\, (b_0 - \Delta_2)\, \|\, G_x \,\|^2 - \left(\frac{a_0 b_1^2}{2} - b_2 \Delta_1\right) \|\, \dot{x} \,\|^2 +$$
$$+ \big[\, b_2 \Delta_2 + \theta\, (a_1 + \Delta_1) \,\big]\, \|\, G_x \,\|\, \|\, \dot{x} \,\| + \theta \,\|\, G_{xx} \,\|\, \|\, \dot{x} \,\|^2.$$

При выборе параметров $\Delta_1$ и $\Delta_2$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\Delta_2 < b_0, \quad 4\, \big(b_0 - \Delta_2\big) \left(\frac{a_0 b_1^2}{2} - b_2 \Delta_1\right) > \frac{\big[\, b_2 \Delta_2 + \theta\, (a_1 + \Delta_1) \,\big]^2}{\theta}, \tag{3.23}$$

будет $\forall\, t \geq 0$, $\dot{x} \in R^n$ и для достаточно малых значений $\|\, x \,\|$ выполняться соотношение

$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(3.20)} \leq -\,\alpha\, \big(\|\, G_x \,\|^2 + \|\, \dot{x} \,\|^2\big),$$

где число $\alpha > 0$ зависит от величин $\Delta_1, \Delta_2, \theta$.

Доказательство теоремы 3.4 завершается выбором такого $\theta_0 > 0$, что при $\theta = \theta_0$ неравенства (3.23) определяют наибольшую область отклонений значений $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Можно показать [9], что $\theta_0 = b_2 \Delta_2 / (a_1 + \Delta_1)$, а условия (3.23) приводят к выполнению неравенства (3.21) при $\theta = \theta_0$.

**3.2.2. Устойчивость возмущенных систем.** Пусть функция $G(x)$ в системе (3.13) является непрерывно дифференцируемой, положительно определенной и однородной функцией порядка $\lambda+1$, $\lambda \geq 1$. Считаем, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ ограничены при $t \geq 0$. Выберем ФЛ для системы (3.13) в виде

$$\tilde{V} = G(x) + \frac{1}{2}\,\dot{x}^*\,B^{-1}(t)\,\dot{x} + \theta\,\|\,x\,\|^{\lambda-1}\,x^*\,B^{-1}(t)\,\dot{x}, \tag{3.24}$$

где $\theta > 0$ — некоторое число. При достаточно малом $\theta$ и $\forall\, t \geq 0$ $\exists\,\Delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ — такие числа, что при $\|\,x\,\| < \Delta$ и $\forall\,\dot{x} \in R^n$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \beta_1\left(\|\,x\,\|^{\lambda+1} + \|\,\dot{x}\,\|^2\right) \leq \tilde{V} \leq \beta_2\left(\|\,x\,\|^{\lambda+1} + \|\,\dot{x}\,\|^2\right),\\ \left.\frac{d\tilde{V}}{dt}\right|_{(3.13)} \leq -\,\beta_3\left(\|\,x\,\|^{2\lambda} + \|\,\dot{x}\,\|^2\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

С учетом соотношений (3.25) и результатов работы [60] приходим к справедливости следующих двух утверждений.

**Теорема 3.5.** *Пусть матрица* (3.17) *положительно определена. Тогда*

*1) если $\lambda = 1$, то $\exists\,\gamma_1, \gamma_2 > 0$ — такие числа, что $\forall\,x(t)$ — решения системы* (3.13) *и $\forall\,t \geq t_0 \geq 0$ выполнено неравенство*

$$\|\,x(t)\,\| + \|\,\dot{x}(t)\,\| \leq \gamma_1\left(\|\,x(t_0)\,\| + \|\,\dot{x}(t_0)\,\|\right)e^{-\gamma_2\,(t-t_0)},$$

*т.е. положение равновесия* (3.14) *экспоненциально устойчиво;*

*2) если $\lambda > 1$, то $\exists\,\delta, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ — такие числа, что для решений $x(t)$ системы* (3.13) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям: $t_0 \geq 0$, $\|\,x(t_0)\,\| < \delta$, $\|\,\dot{x}(t_0)\,\| < \delta$, $\forall\,t \geq t_0$ имеет место неравенство*

$$\begin{gathered} \|\,x(t)\,\|^{\lambda+1} + \|\,\dot{x}(t)\,\|^2 \;\leq\\ \leq\; \gamma_3\left[1 + \gamma_4\left(\|\,x(t_0)\,\|^{\lambda+1} + \|\,\dot{x}(t_0)\,\|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}(t-t_0)\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}. \end{gathered}$$



**Теорема 3.6.** *Пусть задана возмущенная система*

$$\ddot{x} + A(t)\,\dot{x} + B(t)\,G_x = R(t, x, \dot{x}), \tag{3.26}$$

*где вектор-функция $R(t, x, \dot{x})$ считается непрерывной в области $t \geq 0$, $\|\,x\,\| < H$, $\|\,\dot{x}\,\| < H$ и удовлетворяет условию*

$$\|\,R(t, x, \dot{x})\,\| \leq L\left(\|\,x\,\|^\eta + \|\,\dot{x}\,\|^\sigma\right), \qquad L, \eta, \sigma > 0.$$

*Тогда, если матрица* (3.17) *положительно определена, то при выполнении ограничений: $\eta > \lambda$, $\sigma > 1$ положение равновесия* (3.14) *системы* (3.26) *асимптотически устойчиво.*

Заметим, что для доказательства теорем 3.5 и 3.6 надо вместо ФЛ (3.18) взять функцию $\tilde{V}$ (3.24), поскольку в этом случае получающиеся оценки скорости сходимости решений системы (3.13) к положению равновесия и условия, когда возмущения не нарушают асимптотической устойчивости, будут более точными.

Укажем также на то, что ФЛ $\tilde{V}$ с неравенствами (3.25) позволяет по заданным матрицам $A(t)$, $B(t)$, функции $G(x)$ и числу $\theta$ получить значения чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, входящих в оценки решений системы (3.13) из теоремы 3.5.

Зададим далее скалярное уравнение

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\;g(x) = 0. \tag{3.27}$$

Будем считать, что функция $a(t)$ непрерывна, $b(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $[0, +\infty)$, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема при $|\,x\,| < H$ и удовлетворяет условию $x\,g(x) > 0$ при $x \neq 0$. Обозначим $\beta(t) = \dot{b}(t)/b(t)$. Тогда можно доказать [9]: если $\exists\,a_0, b_0, M > 0$ — такие числа, что $\forall\,t \geq 0$ выполнены неравенства

$$b(t) \geq b_0, \quad \frac{\beta(t)}{2} + a(t) \geq a_0, \quad \left[\beta(t) + a(t)\right]^2 \leq M\,b(t)\left[\frac{\beta(t)}{2} + a(t)\right],$$

то положение равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ $(*)$ уравнения (3.27) асимптотически устойчиво относительно $x$.

**3.2.3. Применение дифференциальных неравенств.** Изучим более подробно уравнение (3.27). Пусть $b(t) > 0$, $t \geq 0$. Относительно функции $g(x)$ на этот раз предположим, что она определена и непрерывна $\forall\, x \in (-\infty,\, +\infty)$ и удовлетворяет ограничению: $G(x) = \int_0^x g(\tau)\, d\tau > 0$ при $x \neq 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что $g(0) = 0$. Значит, рассматриваемое уравнение по-прежнему имеет положение равновесия $(*)$.

Для получения условий устойчивости положения равновесия уравненя (3.27) в работе [165] был предложен подход, использующий дифференциальные неравенства типа неравенств Чаплыгина. ФЛ для данного уравнения выбиралась вида

$$V = b(t)\, G(x) + \frac{\dot{x}^2}{2}. \tag{3.28}$$

Для функции $V$ (3.28) $\forall\, x, \dot{x} \in (-\infty,\, +\infty)$, $\forall\, t \geq 0$ справедлива оценка

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.27)} \leq \big[\, \beta_+(t) + 2a_-(t) \,\big]\, V, \tag{3.29}$$

где обозначено

$$\beta_+(t) \equiv \max\, \big\{\, 0;\, \beta(t) \,\big\}, \qquad a_-(t) \equiv \max\, \big\{\, 0;\, -\, a(t) \,\big\}.$$

В работе [165] с помощью дифференциального неравенства (3.29) было доказано, что при выполнении условий

$$\int\limits_0^{+\infty} \beta_+(t)\, dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} a_-(t)\, dt < +\infty$$

положение равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ $(*)$ уравнения (3.27) устойчиво относительно $\dot{x}$, а если $\exists\, b_0 > 0$ — такое число, что $b(t) \geq b_0$ при $t \geq 0$, то положение равновесия устойчиво по всем переменным.

Покажем, что для ФЛ $V$ (3.28) можно получить более точную оценку по сравнению с оценкой (3.29). В самом деле, возьмем функцию $c(t) = \max\, \big\{\, \beta(t);\, -\, 2a(t) \,\big\}$. Имеем $\forall\, x, \dot{x} \in (-\infty,\, +\infty)$ и $\forall\, t \geq 0$ :

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.27)} \leq c(t)\, V. \tag{3.30}$$

Стало быть, приходим к следующей теореме.



**Теорема 3.7.** *Пусть* $\hat{c}(0, t) \leq M$, $\forall\, t \in [\, 0, +\infty)$, *где обозначено:* $\hat{c}(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} c(\tau)\, d\tau$, $M$ *— некоторая постоянная. Тогда положение равновесия* $(*)$ *уравнения* (3.27) *устойчиво относительно* $\dot{x}$, *причем если* $\exists\, b_0 > 0$ *— такое число, что* $b(t) \geq b_0$ *при* $t \geq 0$, *то положение равновесия устойчиво по всем переменным.*

Замечаем, что эта теорема использует менее жесткие ограничения на функции $a(t)$ и $b(t)$, чем ограничения в работе [165]. К примеру, для $a(t) = \cos t$, $b(t) = e^{-2t}$ условие $\int_0^{+\infty} a_-(t)\, dt < +\infty$ не выполнено, а теорема 3.7, тем не менее, обеспечивает устойчивость положения равновесия относительно $\dot{x}$. Оценка (3.30) в отличие от оценки (3.29) позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия по части переменных.

**Теорема 3.8.** *При допущении, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \hat{c}(0, t) = -\,\infty, \tag{3.31}$$

*положение равновесия* $x = 0$, $\dot{x} = 0\, (*)$ *уравнения* (3.27) *асимптотически устойчиво относительно* $\dot{x}$.

Используя оценку (3.30), можно найти условия устойчивости положения равновесия по всем переменным и асимптотической устойчивости по отношению к $\dot{x}$. В самом деле, после интегрирования неравенства (3.30) получим, что для решения $x(t)$ уравнения (3.27) с начальными данными: $x_0 = x(t_0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$, $t_0 \geq 0$, $\forall\, t \geq t_0$ имеют место неравенства

$$G[\, x(t) \,] \leq \frac{1}{b(t)}\, e^{\hat{c}(t_0, t)} \left[ b(t_0)\, G(x_0) + \frac{\dot{x}_0^2}{2} \right],$$

$$\dot{x}^2(t) \leq e^{\hat{c}(t_0, t)} \, \big[\, 2b(t_0)\, G(x_0) + \dot{x}_0^2 \,\big].$$

Одновременно с этими соотношениями при $t \geq t_0$ выполняются оценки

$$|\, x(t) \,| \leq \; |\, x_0 \,| + \sqrt{2b(t_0)\, G(x_0) + \dot{x}_0^2} \int\limits_{t_0}^{t} e^{\hat{c}(t_0, \tau)/2}\, d\tau.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

**Теорема 3.9.** *Пусть справедливо предельное соотношение* (3.31). *Тогда если выполнено хотя бы одно из условий:*

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} e^{\hat{c}(0,\tau)/2}\, d\tau < +\infty, \quad 2)\ e^{\hat{c}(0,t)} \le L\, b(t) \quad \textit{при} \quad t \ge 0,$$

*где* $L > 0$ *— некоторое число, то тогда положение равновесия* $(*)$ *уравнения* (3.27) *устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно* $\dot{x}$.

Заметим при этом, что условие 2), в частности, выполнено, если $\beta(t) \ge -2a(t),\ \forall\, t \ge 0$, а если $\exists\, a_0 > 0,\ \bar{b} > 0$ — такие числа, что на промежутке времени $[0, +\infty)$ справедливы неравенства: $a(t) \ge a_0$, $\beta(t) \le -\bar{b}$, $(**)$ то выполнено условие 1).

Обратим внимание на то, что условия 1) и 2) теоремы 3.9 могут выполняться независимо друг от друга. К примеру, при $a(t) = 1$ $b(t) = e^{-3t}$, условие 1) выполнено, а условие 2) — нет; если же $a(t) = 1$, $b(t) = 1/(t+1)$, то выполнено условие 2), а условие 1) не выполнено.

В работе [44] получены достаточные условия устойчивости по всем переменным и экспоненциальной устойчивости относительно $\dot{x}$ для линейного осциллятора (3.15). Эти условия более грубые в сравнении с условиями, выдвигаемыми теоремой 3.9. В работе [44] вместе с выполнением неравенств $(**)$ требовалось еще выполнение соотношения $\forall\, t \ge 0:$

$$-\,a(t)\,\beta(t) - \frac{1}{4}\big[\,1 - b(t)\,\big]^2 \ge \varepsilon = \mathrm{const} > 0. \tag{3.32}$$

К примеру, если $a(t) = a_0,\ b(t) = b_0\, e^{-\delta t}$, где $a_0, b_0, \delta$ — положительные постоянные, то $\forall\, a_0, b_0, \delta$ будут выполняться неравенства $(**)$, а условие (3.32) приводит к дополнительному ограничению: $a_0 \delta > 1/4$.

Теоремы 3.7 – 3.9 можно распространить также на системы вида

$$\ddot{x} + A(t)\,\dot{x} + b(t)\,G_x = 0, \tag{3.33}$$

где $x$ — $n$–мерный вектор, элементы матрицы $A()$ заданы и непрерывны при $t \ge 0$, скалярная функция $b(t)$ положительна и непрерывно дифференцируема на интервале $[0, +\infty)$, функция $G(x)$ определена и непрерывно дифференцируема $\forall\, x \in R^n$, причем $G(x) > 0$ при $x \ne 0$, $G(0) = 0$.



Для этого надо в качестве ФЛ взять функцию

$$V = b(t)\, G(x) + \frac{1}{2}\, \dot{x}^* \dot{x}.$$

Тогда получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.33)} = \dot{b}(t)\, G(x) - \dot{x}^*\, A(t)\, \dot{x}.$$

Пусть $a(t) = \min_{j=\overline{1,n}}\ \lambda_j(t)$, где $\lambda_j(t)$ — собственные числа матрицы $(1/2)\,\big[\,A(t) + A^*(t)\,\big]$. С помощью функции $a(t)$ вновь приходим к дифференциальному неравенству вида (3.30).

Особого упоминания заслуживает случай, когда обобщенная жесткость может принимать отрицательные значения [44, 139, 165] в задачах устойчивости положения равновесия уравнений вида (3.27). Пусть $b(t) < 0, \forall\, t \ge 0$. Покажем, что тогда можно получить новые условия устойчивости положения равновесия с помощью подхода, предложенного в работе [9].

Возьмем ФЛ для уравнения (3.27) в виде

$$\tilde{V} = -\,b(t)\, G(x) + \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Получим отсюда

$$\left.\frac{d\tilde{V}}{dt}\right|_{(3.27)} = -\,\dot{b}(t)\, G(x) - a(t)\, \dot{x}^2 - 2b(t)\, g(x)\, \dot{x}.$$

Предположим затем, что в $U(x = 0)$ — некоторой окрестности точки $x = 0$ справедливо неравенство $g^2(x) \le K\, G(x)$, где $K$ — положительная константа (такое неравенство имеет место, к примеру, когда $g(x) = x^{\mu}$, где $\mu$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu \ge 1$).

Тогда $\forall\, t \ge 0,\ \forall\, \dot x \in (-\infty,\, +\infty)$ и достаточно малых $|\,x\,|$ выполняется соотношение

$$\frac{d\tilde V}{dt}\bigg|_{(3.27)} = -\,\beta(t)\, b(t)\, G(x) - a(t)\, \dot x^2 + \sqrt{-\,b(t)}\,\big[\,-K\, b(t)\, G(x) + \dot x^2\,\big],$$

применяя которое, получим следующее утверждение.

**Теорема 3.10.** *Если $b(t) < 0,\ t \ge 0$ и $\exists\, a_0 > 0,\ \bar b > 0$ — такие числа, что на промежутке времени $[\,0, +\infty)$ имеют место неравенства $(**)$, то тогда положение равновесия $(*)$ уравнения* (3.27) *устойчиво по всем переменным и, кроме того, экспоненциально устойчиво по отношению к $\dot x$.*

**3.2.4. Случай нелинейных диссипативно-ускоряющих сил.** Этот раздел посвящен обобщению результатов предыдущего раздела на системы с нелинейными диссипативно-ускоряющими силами.

Зададим уравнение Льенара [81, 112. 128, 176] с переменными параметрами

$$\ddot x + \frac{d}{dt}\,\big[\,a(t)\, f(x)\,\big] + b(t)\, g(x) = 0, \tag{3.34}$$

где функции $a(t), b(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in [\,0, +\infty)$; полагаем также, что $b(t) > 0,\ \forall\, t \ge 0$, а функции: $f(x)$ — непрерывно дифференцируема, $g(x)$ — непрерывна в некоторой окрестности $U(x = 0)$ точки $x = 0$.

Пусть в $U(x = 0)$ функции $f(x),\ g(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = x^{\nu+1} + \tilde f(x), \qquad g(x) = x^{\lambda} + \tilde g(x),$$

где $\nu$ — положительное рациональное число с четным числителем и нечетным знаменателем, а $\lambda$ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, причем

$$\frac{\tilde f(x)}{x^{\nu+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \qquad \frac{\tilde g(x)}{x^{\lambda}} \xrightarrow[x\, to\, 0]{} 0.$$



Тогда уравнение

$$\ddot x + \frac{d}{dt}\,\big[\,a(t)\, x^{\nu+1}\,\big] + b(t)\, x^{\lambda} = 0$$

можно рассматривать как уравнение нелинейного приближения для уравнения (3.34). Последнее уравнение эквивалентно сстеме

$$\dot x = y - a(t)\, x^{\nu+1}, \qquad \dot y = -\,b(t)\, x^{\lambda}. \tag{3.35}$$

Чтобы изучить вопрос об устойчивости положения равновесия

$$x = 0, \qquad y = 0 \tag{3.36}$$

этой системы, зададим ФЛ $V$ следующим образом:

$$V = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{y^2}{2\, b(t)}.$$

Тогда, очевидно, получим

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(3.35)} = -\,a(t)\, x^{\lambda+\nu+1} - \frac{\beta(t)\, y^2}{2\, b(t)}.$$

Выберем затем число $\Delta > 0$. Отсюда вытекает, что при $|\,x\,| \le \Delta$ и $\forall\, y \in (-\infty,\, +\infty),\ t \ge 0$ имеет место неравенство

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(3.35)} \le \hat c(t)\, V, \qquad \hat c \equiv \max\big\{\, \beta_-(t),\ (\lambda+1)\, \Delta^{\nu}\, a_-(t)\,\big\}.$$

Следовательно, если решение $\big(x(t),\, y(t)\big)^*$ системы (3.35) на некотором интервале времени $[\,t_0, t_1\,]$ удовлетворяет условию $|\,x(t)\,| \le \Delta$, то на этом интервале выполняется соотношение

$$V[\,t,\, x(t),\, y(t)\,] \le V[\,t_0,\, x(t_0),\, y(t_0)\,]\; e^{\int_{t_0}^{t} \hat c(\tau)\, d\tau}. \tag{3.37}$$

Итогом этого рассмотрения служит следующая теорема.

**Теорема 3.11.** *Пусть выполнены ограничения*

$$\int\limits_0^{+\infty} \beta_-(t)\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} a_-(t)\,dt < +\infty.$$

*Тогда положение равновесия* (3.36) *системы* (3.35) *устойчиво относительно* $x$; *если же функция* $b(t)$ *ограничена на интервале времени* $[\,0,\,+\infty)$, *то положение равновесия устойчиво по всем переменным.*

Далее предположим, что $\dot b(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. В таком случае теорему 3.11 можно усилить. Зададим вновь число $\Delta > 0$. При выполнении неравенства $y^2/(2b(t)) \leq \Delta$ имеют место оценки

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.35)} \leq \varphi_1(t)\left(\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}} + \varphi_2(t)\left(\frac{y^2}{2b(t)}\right)^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}} \leq$$

$$\leq\; \tilde c(t)\; V^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}},$$

где введены обозначения

$$\varphi_1(t) = -\,(\lambda+1)^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}}\,a(t), \qquad \varphi_2 = -\,\Delta^{-\frac{\nu}{\lambda+1}}\,\beta(t),$$

$$\tilde c(t) = \max_{\substack{u_1\geq 0,\,u_2\geq 0\\ u_1+u_2=1}} \Bigl(\varphi_1(t)\,u_1^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}} + \varphi_2(t)\,u_2^{1+\frac{\nu}{\lambda+1}}\Bigr).$$

Здесь просто показать, что $\tilde c(t) = \varphi_1(t)$, если $\varphi_1(t) \geq 0$, и

$$\tilde c(t) = -\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\left(\bigl|\,\varphi_1(t)\,\bigr|^{\frac{\lambda+1}{\nu}} + \bigl|\,\varphi_2(t)\,\bigr|^{\frac{\lambda+1}{\nu}}\right)^{-\frac{\nu}{\lambda+1}},$$

если $\varphi_1(t) < 0$. Отсюда следует, что для решения $\bigl(x(t),\,y(t)\bigr)^*$ системы (3.35), удовлетворяющего на некотором интервале времени $[\,t_0, t_1\,]$ условию $y^2(t)/(2b(t)) \leq \Delta,\ \forall\, t \in [\,t_0, t_1\,]$, справедливо неравенство

$$V[\,t,\,x(t),\,y(t)\,] \leq \left(V^{-\frac{\nu}{\lambda+1}}\,[\,t_0,\,x(t_0),\,y(t_0)\,] - \frac{\nu}{\lambda+1}\int\limits_{t_0}^{t}\tilde c(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\lambda+1}{\nu}}. \tag{3.38}$$



Однако при этом начальные значения $x(t_0)$, $y(t_0)$ данного решения должны быть достаточно малы, чтобы на интервале $[\,t_0, t_1\,]$ выполнялось ограничение

$$\nu\,V^{\frac{\nu}{\lambda+1}}\,[\,t_0,\,x(t_0),\,y(t_0)\,]\int\limits_{t_0}^{t}\tilde c(\tau)\,d\tau < \lambda+1.$$

Приходим, таким образом, к следующим теоремам.

**Теорема 3.12.** *Пусть* $\forall\, t \geq 0$ *имеют место неравенства*

$$\dot b(t) \geq 0, \qquad \int\limits_0^{t}\tilde c(\tau)\,d\tau \leq M, \tag{3.39}$$

*где* $M$ — *некоторая постоянная. Тогда положение равновесия* (3.36) *системы* (3.35) *устойчиво относительно* $x$, *причем если функция* $b(t)$ *ограничена на интервале* $[\,0,\,+\infty)$, *то положение равновесия устойчиво по всем переменным.*

**Теорема 3.13.** *Пусть* $\forall\, t \geq 0$ *справедливы неравенство* $\dot b(t) \geq 0$ *и предельное равенство*

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^{t}\tilde c(\tau)\,d\tau = -\,\infty. \tag{3.40}$$

*Тогда положение равновесия* (3.36) *системы* (3.35) *асимптотически устойчиво относительно* $x$.

В качестве замечания отметим, что оценки (3.37) и (3.38) тем точнее, чем меньше числовой параметр $\Delta$. При этом надо иметь в виду, что уменьшение $\Delta$ ведет к сужению области начальных данных для рассматриваемых решений.

Укажем также на то, что функция $\tilde c(t)$ зависит от выбора параметра $\Delta$. Лишь при некоторых $\Delta$ условия (3.39) и (3.40) могут выполняться. Поэтому теоремы 3.12 и 3.13 останутся справедливыми, если указанные условия выполняются при определенных достаточно малых значениях $\Delta$.

Еще обратим внимание на то, что если функция $\dot b(t)$ принимает значения разных знаков, когда $t \in [\,0, +\infty)$, тогда для оценки решений системы (3.35) на интервалах времени, где $\dot b(t) < 0$, надо применять неравенство (3.37), а на интервалах, где $\dot{b}(t) \ge 0$ — соответственно неравенство (3.38).

Важно отметить, что результаты, полученные для уравнения нелинейного приближения, можно обобщить на исходное уравнение (3.34). Покажем это. Переходя от уравнения (3.34) к эквивалентной ему системе, получим

$$\dot{x} = y - a(t)\, f(x), \qquad \dot{y} = -\, b(t)\, g(x). \tag{3.41}$$

Для системы (3.41) выберем ФЛ в виде

$$V = \int\limits_0^x g(\tau)\, d\tau + \frac{y^2}{2\, b(t)}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(3.41)} = -\, a(t)\, g(x)\, f(x) - \frac{\beta(t)\, y^2}{2\, b(t)}.$$

Здесь $\forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists\, \delta > 0$ такое, что при $|\, x\,| \le \delta$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} \frac{(1-\varepsilon)\, x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \le \int\limits_0^x g(\tau)\, d\tau \le \frac{(1+\varepsilon)\, x^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \\ (1-\varepsilon)\, x^{\lambda+\nu+1} \le \quad g(x)\, f(x) \le \quad (1+\varepsilon)\, x^{\lambda+\nu+1}. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Итогом использования оценок (3.42) для системы (3.41) будут служить теоремы, аналогичные теоремам 3.11, 3.12 и 3.13. Тем самым показана возможность обобщения предложенного метода построения соответствующей ФЛ на исходное уравнение Льенара (3.34).

## 3.3 Устойчивость положения равновесия неавтономной механической системы

Ниже рассматриваются неавтономные МС с правой частью, удовлетворяющей условиям существования предельных систем ДУ [15, 16, 18, 178]. Находятся достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия голономных МС под действием сил, зависящих от времени.



**3.3.1. Некоторые утверждения.** Пусть имеется голономная МС со стационарными связями. Положение системы будем описывать обобщенными координатами $q \in R^n$. Для кинетической энергии $T$ системы имеем: $T = \dot{q}^*\, A(q)\, \dot{q}$, $\dot{q} = dq/dt$, $A(q)$ — $n \times n$– положительно определенная $\forall\, q \in R^n$ матрица такая, что выполнено матричное неравенство: $A(q) \ge A = a_0 E$, где $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $E$ — единичная матрица, $\|\, q\,\|$ — норма в $R^n$, $\|\, q\,\|^2 = q^* q$.

Будем считать, что на систему действуют силы: $Q_1$ — квазипотенциальные, $Q_2$ — гироскопические, $Q_3$ — диссипативно-ускоряющие (в терминологии работы [18]):

$$Q_1 = -\, g(t,q)\, \frac{\partial\, \Pi(q)}{\partial q}, \qquad Q_2 = G(t,q,\dot{q})\, \dot{q}, \qquad Q_3 = -\, F(t,q,\dot{q})\, \dot{q},$$

где $G^* = -\, G$, $F^* = F$; $G$ и $F$ — $n\times n$–матрицы; $g, \Pi \in C^1$ — скалярные неотрицательные функции, $\partial\Pi/\partial q = \big(\partial\Pi/\partial q_1, \ldots, \partial\Pi/\partial q_n\big)^*$.

Движение системы опишем уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\, g\, \frac{\partial \Pi}{\partial q} + G\, \dot{q} - F\, \dot{q}, \tag{3.43}$$

где положим, что $\partial\Pi/\partial q = 0$ при $q = 0$, т.е. система имеет нулевое положение равновесия $q = 0$, $\dot{q} = 0$. Изучим задачу об исследовании устойчивости нулевого положения, исходя из общих теорем асимптотической устойчивости и неустойчивости для обыкновенных ДУ [16].

Разрешим уравнения (3.43) относительно $\ddot{q}$ и представим их в виде

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = \big\{\, \dot{q}^* B \dot{q}\, \big\} - g A^{-1}\, \frac{\partial \Pi}{\partial q} + A^{-1} G \dot{q} - A^{-1} F \dot{q}, \tag{3.44}$$

где через $\{\, \dot{q}^* B \dot{q}\, \}$ обозначен набор $n$ квадратичных по отношению к $\dot{q}$ форм. Предположим, что все функции в правых частях уравнений (3.44) непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по $q$ и $\dot{q}$, $\forall\, \mu > 0$ в области $\big\{\, t \ge 0,\ \|\, \dot{q}\,\| \le \mu < +\infty,\ \|\, q\,\| \le \mu\, \big\}$. Тогда уравнения (3.44) регулярны и предельные к ним уравнения имеют аналогичный вид [16, 178]:

$$\frac{d\dot q}{dt} = \{\, \dot q^* B \dot q \,\} - g_* A^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial q} + A^{-1} G_* \dot q - A^{-1} F_* \dot q, \qquad (3.45)$$

где $g_*, G_*, F_*$ являются предельными к соответствующим значениям из уравнений (3.44). В частности (см. работу [178]):

$$g_*(t,q) = \frac{d}{dt} \lim_{t_k\to+\infty} \int\limits_0^t g(t_k+\tau, q)\, d\tau. \qquad (3.46)$$

Допустим, что $\forall\, t \in R_+$, достаточно малых $\|\, q\,\|$, $\|\,\dot q\,\|$ выполняются соотношения

$$0 < g_0 \le g(t,q) \le g_1, \qquad \left\| \frac{\partial\, g(t,q)}{\partial q} \right\| \le l = \text{const}, \qquad (3.47)$$

$$\frac{\partial\, g(t,q)}{\partial t} A(q) + 2\, g(t,q)\, F(t,q,\dot q) \ge a_0 E, \qquad a_0 = \text{const} > 0. \quad (3.48)$$

Тогда для произвольной функции $V = \dot q^* A \dot q / \big(2g(t,q)\big) + \Pi(q) - \Pi(0)$ в силу уравнений (3.43) при достаточно малых $\|\, q\,\|$, $\|\,\dot q\,\|$ справедливо неравенство

$$\dot V = -\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \dot q^* \frac{\partial g}{\partial q}\right)\frac{\dot q^* A \dot q}{2g^2} - \frac{\dot q^* F \dot q}{g} \le -\, b_0 \,\|\,\dot q\,\|^2 \le 0,$$

где $b_0 = \text{const} > 0$.

С помощью этого неравенства определяется [16] множество $\{\, \omega(\dot q) = b_0 \|\,\dot q\,\|^2 = 0 \,\} \equiv \{\, \dot q = 0 \,\}$, содержащее только те решения предельных уравнений (3.45) (это следует непосредственно из их структуры), для которых справедливы соотношения

$$\dot q(t) \equiv 0, \qquad q(t) = q_0 = \text{const}, \qquad g_*(t, q_0)\, \frac{\partial \Pi}{\partial q}\bigg|_{q=q_0} = 0.$$

Поскольку из первого условия (3.47) и выражения (3.46) вытекает, что при каждом $\mu > 0$ для почти всех $t \in [\,0,\mu\,]$ функция $g_*(t,q) \ge g_0 > 0$, то отсюда указанными решениями будут являться только



те решения, для которых

$$\dot q(t) = 0, \qquad q(t) = q_0 = \text{const}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q}\bigg|_{q=q_0} = 0$$

или положения равновесия исходной системы (3.43). С учетом теорем из работы [16] приходим к следующим достаточным условиям устойчивости положения равновесия системы (3.43).

**Теорема 3.14.** *Пусть будут выполнены предположения:*

1) *функция* $\Pi(q)$ *имеет при* $q = 0$ *минимум;*

2) *положение равновесия системы* (3.43) $q = 0$, $\dot q = 0$ *является изолированным,* $\|\, \partial\Pi/\partial q \,\| > 0$ *для* $q \in \{\, 0 \le \|\, q\,\| \le \delta \,\}$;

3) *функция* $g(t,q)$ *и диссипативно-ускоряющие силы таковы, что выполняются соотношения* (3.47) *и* (3.48).

*Тогда положение равновесия* $q = 0$, $\dot q = 0$ *системы* (3.43) *равномерно асимптотически устойчиво.*

**Теорема 3.15.** *Пусть вместо условий* 1) *и* 2) *предыдущей теоремы* 3.14 *выполняются соответствующие условия:*

1′) *функция* $\Pi(q)$ *не имеет минимума при* $q = 0$;

2′) *в области* $\{\, q:\ 0 < \|\, q\,\| \le \delta,\ \Pi(q) < \Pi(0) \,\}$ *нет положений равновесия системы* (3.43).

*Тогда положение равновесия* $q = 0, \dot q = 0$ *системы* (3.43) *неустойчиво.*

Можно получить также следующий результат [17, 18] об устойчивости равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ по обобщенным скоростям и части обобщенных координат $q^1 \equiv \big(q_1,\, ...,\, q_m\big)^*$, где $m \le n$.

**Теорема 3.16.** *Предположим, что*

1) *функция* $\Pi(q) - \Pi(0)$ *определенно положительна по* $q^1$, *т.е.* $\Pi(q) - \Pi(0) \ge h\big(\|\, q^1\,\|\big)$, *а именно:* $\forall\, q \in \Gamma_0 = \{\, \|\, q^1\,\| \le \delta_0, \delta_0 > 0;\ 0 \le \|\, q^2\,\| < +\infty \,\}$, *где* $q^2 \equiv \big(q_{m+1},\, ...,\, q_n\big)^*$;

2) *в области* $\Gamma_0 \cap \{\, q:\ \Pi(q) - \Pi(0) > 0 \,\}$ *система* (3.43) *не имеет положений равновесия* $\forall\, q \in \Gamma_0 \cap \{\, q:\ \Pi(q) - \Pi(0) = \varepsilon > 0 \,\}$ *выполняется неравенство* $\|\, \partial\Pi/\partial q \,\| \ge \delta = \delta(\varepsilon) > 0$;

3) *функция* $g(t,q)$ *и диссипативно-ускоряющие силы таковы, что* $\forall\, t \in R_+$, $(\dot q, q) \in \{\, \dot q:\ \|\,\dot q\,\| \le \delta_0, \delta_0 > 0 \,\} \times \Gamma_0$ *выполняются соотношения* (3.47), (3.48).

*Тогда положение равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ системы* (3.43) *равномерно асимптотически устойчиво по* $(\dot q, q^1)$.

В качестве замечания отметим, что при $g = g(t)$, $g(t) \ge 0$ условия (3.47), (3.48) выполняются, если $g_1 \le g_1$ и $Q_3^* \dot q \le -b_0 \| \dot q \|^2$, т.е. $Q_3$ здесь это силы полной диссипации. При этих же условиях результат об асимптотической устойчивости положения равновесия $q = 0, \dot q = 0$ был получен в работе [229]. Для случая $g = g(t)$ условия (3.47), (3.48) записываются так [177]:

$$0 < g_0 \le g(t) \le g_1, \qquad \dot g(t)\, A(q) + 2\, g(t)\, F(t, q, \dot q) \ge a_0 E.$$

Добавим к этому, что если это условие выполнено $\forall\, t \in R_+,\ (q, \dot q) \in R^2$, если $\partial \Pi / \partial q \ne 0$, $\forall\, q \ne 0$ и если $\Pi(q) \to +\infty$ при $\| q \| \to +\infty$, то нулевое положение $q = 0$, $\dot q = 0$ системы равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Укажем еще на следующую особенность. Пусть на интервале времени $[\,\alpha, \beta\,]$ величина $\partial g / \partial t > 0$. Условие (3.48) на этом интервале может выполняться даже в случае, если силы $Q_3$ имеют ускоряющий характер: $Q_3^* \dot q > 0$.

**Модельный пример 1.** Возьмем математический маятник с нитью переменной длины $l(t)$, совершающий угловые колебания в однородном поле тяжести с постоянной ускорения $g_0$ под действием момента вязкого трения. Обозначим через $\varphi$ — угол отклонения маятника от вертикали. Тогда получим следующие выражения для кинетической энергии и обобщенной силы:

$$T = \frac{m}{2} \left[\, l^2(t)\, \dot\varphi^2 + \dot l^2(t) \,\right], \quad Q = -\, m g_0\, l(t) \sin\varphi - k(t, \varphi, \dot\varphi)\, l^2(t)\, \dot\varphi,$$

где $m$ — масса точки, $k(t, \varphi, \dot\varphi)$ — коэффициент вязкости.

Несложно затем записать уравнение колебаний маятника в виде уравнения (3.43) системы с одной степенью свободы. После чего на основании теоремы 3.14 можно найти достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия маятника $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$ (условия нераскачки маятника):

$$0 < l_0 \le l(t) \le l_1, \qquad 3\, \dot l(t) + 2\, k(t, 0, 0)\, \frac{l(t)}{m} \ge l_0 > 0.$$



**Модельный пример 2.** Рассмотрим симметричное тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, которое находится в однородном поле тяжести переменной интенсивности $g = g(t)$. Пусть центр тяжести тела лежит на оси симметрии $x$, масса тела $m$, главные моменты инерции $A$ и $B = C$; полагаем, что координата центра тяжести $x_0 > 0$. Положение тела относительно инерциальной СК с осью $z$, направленной вертикально вверх, будем стандартным образом [97] определять углами Эйлера $\theta, \varphi, \psi$. Здесь координата $\psi$ является циклической. Поэтому, игнорируя ее, найдем функцию Рауса [97]: $R = R_1 + R_2 - W$ с приведенной потенциальной энергией

$$W = m\, g(t)\, x_0 \left[\, 1 - \Pi(\theta, \varphi) \,\right] + \frac{c^2}{2}\, G(\theta, \varphi),$$

$$\Pi(\theta, \varphi) = 1 - \sin\theta \sin\varphi, \quad G(\theta, \varphi) \frac{1}{\left(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi\right) \sin^2\theta + B \cos^2\theta},$$

где $c$ — циклическая постоянная.

Найдем, что

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

поэтому имеются стационарные движения $\dot\psi = \mathrm{const}$, $\dot\theta = 0$, $\dot\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, при которых ось $x$ направлена вертикально вверх. Можно также получить выражения

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = g(t, \theta, \varphi)\, \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = g(t, \theta, \varphi)\, \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},$$

$$g(t, \theta, \varphi) = c^2\, (A - B) \sin\theta \sin\varphi\, G^2(\theta, \varphi) - m\, g(t)\, x_0.$$

Отсюда на основании теоремы 3.15 можно найти моменты диссипативных сил вида $M_\theta = -\, k_1(t)\, \dot\theta$, $M_\varphi = -\, k_2(t)\, \dot\varphi$, стабилизирующих указанные вертикальные стационарные вращения тела. Также найдем для функции $R_2$ при $\theta = \varphi = \pi/2$ выражение $2R_2 = B\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\right)$. Тогда условия (3.47), (3.48) применительно к рассматриваемой задаче запишутся так:

$$\begin{aligned} &0 < a_0 \le c^2\,(A-B) - m\,g(t)\,A^2 x_0 \le a_1,\\ &2c^2\,(A-B)\,k_i(t) - A^2 Bm\,\dot g(t)\,x_0 \ge a_0, \qquad i=1,2. \end{aligned} \tag{3.49}$$

На основании той же теоремы 3.15 следует вывод о том, что каждое стационарное движение $\dot\theta = \dot\varphi = 0$, $\theta = \varphi = \pi/2$, отвечающее значению циклической постоянной $c$, удовлетворяющему условиям (3.49), асимптотически устойчиво по $\dot\theta, \dot\varphi, \theta$ и $\varphi$.

Укажем на то, что теоремы 3.14, 3.16 об устойчивости положения равновесия можно обобщить на случай квазипотенциальных сил вида

$$Q_1(t,q) = -\,D(t,q)\,A^{-1}(q)\,\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}, \tag{3.50}$$

где $D(t,q) = \big(d_{ij}(t,q)\big)$ — симметрическая $n\times n$–матрица такая, что $\forall\, t \in R_+$ и достаточно малых $(q,\dot q) \in \big\{\,\|\,q\,\| \le \delta,\ \|\,\dot q\,\| \le \delta,\ \delta > 0\,\big\}$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} d_0 E \le D(t,q) \le d_1 E, \quad 0 < d_0 \le d_1, \quad \left\|\,\frac{\partial\, d_{ij}(t,q)}{\partial q}\,\right\| \le d_2 = \text{const},\\ AD^{-1}\left(F - G - \frac{\partial D}{\partial t}\,D^{-1}A\right) + \left(F + G - AD^{-1}\,\frac{\partial D}{\partial t}\right) D^{-1}A \ge a_0 E, \end{gathered} \tag{3.51}$$

где $a_0 = \text{const} > 0$. При этих условиях в силу уравнений движения для производной функции $V = (1/2)\,\dot q^* AD^{-1}A\dot q + \Pi(q)$ при достаточно малых $\|\,q\,\|$ и $\|\,\dot q\,\|$ можно найти оценки

$$\dot V(t,q,\dot q) \le -\,b_0\,\|\,\dot q\,\|^2 \le 0, \qquad b_0 = \text{const}.$$

Отсюда следует [18], что теоремы 3.14 и 3.16 сохраняют свои формулировки и для случая сил $Q_1$ вида (3.50) с заменой условий (3.47), (3.48) на условия (3.51).

**3.3.2. Гироскопическая система на подвижном основании.** Изучим задачу о нахождении управляющего воздействия, обеспечивающего устойчивость движения гироскопической системы на подвижном основании [97].



Определим гироскопическую систему (ГС) как систему с голономными, стационарными в движении относительно основания связями, которая содержит $r$ симметричных гироскопов. Положение этой системы относительно основания зададим с помощью $n$ обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $r$ углами собственных вращений гироскопов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$. Считается, что основание ГС совершает заданное движение относительно инерциального пространства. Кроме того, дополнительные голономные, нестационарные связи обеспечивают постоянные скорости собственных вращений гироскопов $\dot\varphi = \dot\varphi_0 = \text{const}$.

Пользуясь уравнениями Лагранжа, получим уравнения движения системы в виде [97]:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_2}{\partial \dot q} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q + D\dot q + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{3.52}$$

где $Q = Q(t,q,\dot q)$ — обобщенные силы. Другие входящие в эти уравнения величины определяются из выражения кинетической энергии $T_a$ системы в абсолютном движении

$$T_a = T_2 + T_1 + T_0, \qquad T_2 = \frac{1}{2}\,\dot q^*\,A(q)\,\dot q, \qquad T_1 = B^*(t,q,\dot\varphi_0)\,\dot q,$$

$$T_0 = T_0(t,q,\dot\varphi_0), \qquad D = \frac{\partial B}{\partial q^*} - \frac{\partial B^*}{\partial q} = -\,D^*.$$

Здесь $A$ — $n\times n$–матрица, $B$ — $n\times 1$–вектор. Обобщенные силы можно определить, исходя из следующих условий.

1. Уравнения движения (3.52) допускают расчетное движение

$$q = 0, \qquad \dot q = 0. \tag{3.53}$$

Для обеспечения этого условия необходимо положить, чтобы

$$Q(t,0,0) = \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q}\right)\bigg|_{q=0}, \qquad \forall\, t \ge 0. \tag{3.54}$$

2. Равнодействующая обобщенных сил $Q(t,q,\dot q)$ представляет собой совокупность сил собственно гироскопической системы $Q_c = Q_c(t,q,\dot q)$ и специальных сил коррекции $Q_k = Q_k(t)$, обеспечиваю-

щих расчетное движение (3.53). Следовательно,

$$Q(t,q,\dot q) = Q_c(t,q,\dot q) + Q_k(t),$$
$$Q_k(t) = \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_0}\right)\bigg|_{q=0} - Q_c(t,0,0). \tag{3.55}$$

3. Силы $Q_c$ собственно самой ГС представляют собой совокупность потенциальных сил с силовой функцией $U = U(t,q)$ и диссипативных сил $Q_d(t,q,\dot q)$, линейных относительно $\dot q$ :

$$Q_c(t,q,\dot q) = \frac{\partial U(t,q)}{\partial q} + Q_d(t,q,\dot q), \quad Q_d^*(t,q,\dot q)\,\dot q \le -\dot q^*\,F(t,q)\,\dot q \le 0. \tag{3.56}$$

4. Действие потенциальных сил собственно ГС, сил коррекции и инерциальных сил представимо в виде

$$\frac{\partial U}{\partial q} + Q_k + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t} = -\,g\,\frac{\partial \Pi_0}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial q}\bigg|_{q=0} = 0, \tag{3.57}$$

где $\Pi_0 = \Pi_0(q)$ — некоторая скалярная функция, $g = g(t,q)$ — скалярный коэффициент, удовлетворяющий неравенствам

$$0 < g_0 \le g(t,q) \le g_1, \qquad \left\|\frac{\partial g}{\partial q}\right\| \le g_2. \tag{3.58}$$

Отметим, что условия 1 – 3 не отличаются от соответствующих условий работы [97]. Условие 4 здесь более специальное в сравнении с соответствующим условием той же работы. Если предположить справедливость условий (3.54) – (3.58) вместе с выполнением условий теоремы 3.14, то можно найти требования для стабилизации ГС на подвижном основании с использованием ФЛ со знакопостоянной производной (а не со знакоопределенной, как в работе [97]).

**Модельный пример 3.** Рассмотрим гироскоп Фуко с двумя степенями свободы второго рода [97]. Симметричный ротор гироскопа находится в кожухе (поплавок) и имеет относительно него постоянную собственную угловую скорость $\dot\varphi_{I0}$, $I$ — осевой момент ротора. С основанием прибора связана подвижная СК $O\xi\eta\zeta$, имеющая абсолютную угловую скорость $u = (u_\xi,\, u_\eta,\, u_\zeta)^*$; скорость начала координат равна $v_0$. Кожух гироскопа установлен в подшипниках, ось которых совпадает с осью $\zeta$, причем ось собственного вращения гироскопа $z$ перпендикулярна оси вращения кожуха $\zeta$, т.е. находится в плоскости $\xi\eta$ и проходит через точку $O$. Центр тяжести системы может совпадать с началом координат $O$. Трехгранник $Oxz\zeta$ является трехгранником главных осей инерции кожуха. Здесь $A$ и $B$ — моменты инерции системы относительно осей $\zeta$ и $z$. Кроме того, момент инерции кожуха относительно третьей оси $x$ такой, что моменты инерции системы относительно осей $x$ и $z$ равны. Обозначим через $\alpha$ угол между осью $\eta$ и осью гироскопа, при этом положительное направление угловой скорости кожуха $\dot\alpha$ совпадает с положительным направлением оси $\zeta$. Отметим также, что относительно оси вращения кожуха $\zeta$ действуют момент сил вязкого сопротивления $k\left(\dot\alpha + \omega_\zeta\right)$ и момент коррекции $M_\zeta^k(t)$.

Будем считать, что гироскоп Фуко установлен на объекте, находящемся в данный момент времени на широте $\varphi$ и движущемся по поверхности Земли курсом $\lambda$ со скоростью $v$ относительно Земли. Имеем [97]:

$$u_\xi, \qquad u_\eta = \Omega + \frac{v\cos\lambda}{R\cos\varphi}, \qquad u_\zeta = 0, \qquad \omega_\zeta = \frac{v}{R}\,\cos\lambda,$$

где $R$ — радиус Земли, а $\Omega$ — ее угловая скорость. Допускается, что с учетом информации о скорости $v$ и курса $\lambda$ на кожух гироскопа может накладываться момент коррекции $M_\xi^k(t) = kv\cos\lambda/R$.

В этом случае уравнения движения гироскопа имеют частное решение, в котором ось гироскопа $z$ постоянно указывает направление оси мира [97]. Пользуясь теоремой 3.14, можно найти, что это положение будет равномерно асимптотически устойчивым при следующих условиях:

$$I\dot\varphi_{I0}\Omega + \frac{I\dot\varphi_{I0}v\sin\lambda}{R\cos\varphi} \ge k_0, \quad 2k + \frac{Av\sin\lambda}{\Omega R\cos\varphi + v\sin\lambda} \ge k_0 > 0. \tag{3.59}$$

Здесь первое неравенство накладывает ограничение на величину скорости и направление движения объекта, а второе — накладывает ограничение на изменение скорости и курса объекта. Первое неравенство (3.59) совпадает с соответствующим неравенством в работе [97]. Вместо второго неравенства (3.59) в этой работе требуется, чтобы выполнялось другое неравенство

$$v_{\max} < \frac{k^2 R\cos\varphi}{AI\dot\varphi_{I0}}\ \max\left(\sqrt{\frac{AI\dot\varphi_{I0}\Omega}{k^2}+I}-1\right). \qquad (3.60)$$

Сравнивая эти неравенства, заключаем, что второе неравенство (3.59) предпочтительнее, поскольку из неравенства (3.60) следует, что с увеличением кинетического момента ротора допустимая скорость объекта (корабль, самолет) должна уменьшаться.

**3.3.3. Устойчивость движения МС с переменными массами.** Опишем движение голономной МС с переменными массами $m_\lambda = m_\lambda(t),\ \lambda = \overline{1,N}$, не зависящими от времени связями и $n$ обобщенными координатами $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^*$ под действием квазипотенциальных, гироскопических и диссипативных сил с помощью уравнений [117]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\,g\,\frac{\partial \Pi}{\partial q} + G\dot q - F\dot q + \Psi, \qquad (3.61)$$

где

$$T = \frac{1}{2}\,\dot q^*A[\,m(t),q\,]\,\dot q,\quad A^* = A,\quad g = g[\,t,m(t),q\,],\quad \Pi = \Pi[\,m(t),q\,],$$

$$G = G(t,q,\dot q),\quad G^* = -\,G,\quad F = F(t,q,\dot q),\quad F^* = F,\quad \Psi = \Psi(t,q,\dot q).$$

Здесь $\Psi(t,q,\dot q)$ — это обобщенные реактивные силы, обусловленные движением отделяющихся и присоединяющихся частиц внутри точек МС, отделением или присоединением этих частиц к точкам.

Будем считать, что массы точек системы не исчезают и ограничены: $0 < m^0 \le m_\lambda(t) \le m^1,\ \lambda = \overline{1,N}$, в результате чего в общем случае справедливы ограничения: $a_0E \le A[\,m(t),q\,] \le a_1E$, где $0 < a_0 \le a_1$. Кроме того, полагаем, что $\forall\, m_\lambda$ при этих значениях

$$\left.\frac{\partial\,\Pi(m,q)}{\partial q}\right|_{q=0} = 0, \qquad \Psi\,\big|_{q=0,\,\dot q=0} = 0.$$

В этих условиях система (3.61) имеет положение равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$.



При ограничениях $g(t,m,q) > 0$, $\Pi(m,q) \ge 0$ для анализа устойчивости положения равновесия $q = 0,\ \dot q = 0$ можно применить функцию $V = T/g + \Pi$, производная которой с учетом уравнений движения (3.61) имеет вид

$$\dot V = \frac{1}{g}\left(\dot m^*\,\frac{\partial T}{\partial m} - \dot q^*F\dot q + \dot q^*\Psi + \dot m^*\,\frac{\partial \Pi}{\partial m}\right) -$$

$$-\;\frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \dot m^*\,\frac{\partial g}{\partial m} + \dot q^*\,\frac{\partial g}{\partial q}\right)T.$$

Если наложить ограничения в виде неположительности для $\dot V$ и выполнения соответствующих условий теорем из работ [16-18], то возможно тому, как это делалось ранее, получить различные достаточные условия полной и частичной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = 0,\ \dot q = 0$ системы (3.61). Например, можно прийти к следующему утверждению.

**Теорема 3.17.** *Пусть для системы* (3.61) *выполнены условия:*

1) *функция* $\Pi(m,q)$ *такова, что* $\Pi(m,0) = 0,\ \Pi(m,q) \ge h(\|\,q\,\|)$, *или* $\Pi(m,q) \ge h(\|\,q^1\,\|)$; *кроме того, эта функция не возрастает по $m$ в процессе изменения масс точек системы,* $\dot m^*\big(\partial\Pi/\partial m\big) \le 0$;

2) *отсутствие положений равновесия при малых* $\|\,q\,\|$, *или при* $\Pi(m,q) > 0$; $\big\|\,\partial\Pi(m,q)/\partial q\,\big\| > \delta(\varepsilon) > 0$ *для* $\|\,q\,\| = \varepsilon > 0$, *или* $\forall\, q \in \big\{\,q:\ \Pi(m,q) \ge \varepsilon > 0\,\big\}$;

3) *реактивные силы не возникают при изменении масс точек системы;*

4) $\forall\, t \in R_+$, *малых* $\|\,q\,\|$, $\|\,\dot q\,\|$, *или малых* $\|\,q^1\,\|$, $\|\,\dot q\,\|$, *выполняются соотношения*

$$0 < g_0 \le g(t,m,q) \le g_1, \qquad \left\|\,\frac{\partial\, g(t,m,q)}{\partial q}\,\right\| \le l = \mathrm{const},$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \dot m^*\,\frac{\partial g}{\partial m}\right)A + 2gF - g\,\frac{\partial A}{\partial t} \ge a_0E, \quad a_0 = \mathrm{const} > 0.$$

*Тогда положение* $q = 0,\ \dot q = 0$ *системы* (3.61) *равномерно асимптотически устойчиво* (*соответственно, равномерно асимптотически устойчиво по* $q^1$ *и* $\dot q$).

**Модельный пример 4.** Пусть имеется твердое тело переменной массы $m = m(t)$ с закрепленной точкой $O$, которое находится в ньютоновском поле сил. Будем считать, что истечение и приток частиц таковы, что главные оси инерции тела относительно закрепленной точки $x, y, z$ неподвижны в теле, сумма моментов реактивных сил относительно неподвижной точки равна нулю, центр инерции тела во все время движения находится на оси $z$ тела.

Допустим, что ось $\zeta$ неподвижной в пространстве СК $O\xi\eta\zeta$ направлена вдоль радиуса-вектора $O_*O$, где $O_*$ — центр притяжения. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы углов оси $\zeta$ в СК $Oxyz$; $A_i$ — главные моменты инерции тела относительно осей $Ox, Oy, Oz$; $p, q, r$ — проекции угловой скорости тела на оси $Ox, Oy, Oz$; $R = |\,O_*O\,|$, $g = m/R^2$, $z_c$ — координата центра масс тела по оси $Oz$.

Будем считать, что кроме силы притяжения на тело действуют силы вязкого трения, момент которых относительно точки $O$ равен $M = \bigl(M_X, M_Y, M_Z\bigr)^*$ с ограничением

$$M_X\, p + M_Y\, q + M_Z\, r \le -\,\bigl[\,\nu_1(t)\, p^2 + \nu_2(t)\, q^2 + \nu_3(t)\, r^2\,\bigr], \quad \nu_i(t) \ge 0.$$

Положим, что величина $R$ достаточно велика по сравнению с размерами тела. Тогда можем написать [27] выражение потенциальной энергии тела, пользуясь соответствующим выражением для постоянной массы. Имеем

$$\Pi = mgz_c\gamma_3 + \frac{3g}{2R}\,\bigl[\,(A_1 - A_3)\,\gamma_1^2 + (A_2 - A_3)\,\gamma_2^2\,\bigr] - mgz_c.$$

При сделанных предположениях тело имеет положения равновесия

$$p = q = r = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 1. \tag{3.62}$$

В этом случае ось $Oz$ тела направлена вдоль оси $O\zeta$. Тогда функция $\Pi$ определенно положительна по $\gamma_1, \gamma_2$ в окрестности положения $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, если

$$p_1 = \frac{3g}{R}\,(a_1 - A_3) - mgz_c \ge \varepsilon > 0,$$

$$p_2 = \frac{3g}{R}\,(A_2 - A_3) - mgz_c \ge \varepsilon > 0.$$



Принимая во внимание выражение кинетической энергии тела $T = \bigl(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2\bigr)/2$ в силу теоремы 3.17 получим условия, при которых положения равновесия тела (3.62) будут равномерно асимптотически устойчивы:

$$0 < \varepsilon \le A_i(t) \le A_0, \qquad \frac{p_1}{p_2} \le 0,$$

$$\bigl[\,2\,\nu_i(t) - \dot A_i(t)\,\bigr]\, p_2(t) + \dot p_2(t)\, A_i(t) \ge \beta_0 > 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Отметим здесь же, что если вместо условия $p_2 \ge \varepsilon > 0$ выполняется условие $p_2 \le -\,\varepsilon < 0$, то при выполнении всех остальных условий множество положений равновесия (3.62), определяющее ориентацию оси $Oz$ тела вдоль оси $O\zeta$, будет неустойчиво.

**3.3.4. Устойчивость равновесия при наличии потенциальных сил.** Завершим параграф беглым рассмотрением задачи об асимптотической устойчивости положения равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ голономной МС (3.44) в случае потенциальных сил $Q_1 = -\,\partial\Pi(t, q)/\partial q$, считая, что $\partial\Pi(t, q)/\partial q\,\big|_{q=0} = 0$.

Зададимся достаточно малым числом $\mu > 0$, определяемым исследуемой областью устойчивости: $\Gamma_0 = \bigl\{\,(q, \dot q) : \|\,q\,\| \le \mu,\ \|\,\dot q\,\| \le \mu\,\bigr\}$. Возьмем функции

$$\alpha(t) = \sup_{\|\,q\,\| \le \mu} \left(\frac{1}{\Pi(t, q)}\,\frac{\partial\Pi(t, q)}{\partial t}\right), \qquad \beta(t) = \int\limits_0^t \alpha(\tau)\, d\tau$$

и будем считать, что $|\,\beta(t)\,| \le \beta_0$, $\forall\, t \in R_+$, причем диссипативные силы $\forall\, t \in R_+$, $(q, \dot q) \in \Gamma_0$ удовлетворяют ограничению

$$\alpha(t)\, A(q) + 2\, F(t, q, \dot q) \ge a_0 E, \qquad a_0 = \text{const} > 0. \tag{3.63}$$

Тогда для производной функции $V = \exp\,[\,-\,\beta(t)\,](T + \Pi)$ справедлива оценка

$$\dot V = -\, e^{-\beta(t)}\, \bigl(aT + \dot q^* F \dot q\bigr) \le -\,\gamma_0\, \|\,\dot q\,\|^2 \le 0, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0.$$

Аналогично теореме 3.14 отсюда для МС, находящейся под воздействием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, зависящих от времени, можно найти следующие достаточные условия асимптотической устойчивости: в предположении, что 1) потенциальная энергия такова, что для малых $\| q \|$

$$h_1(\| q \|) \le \Pi(t,q) \le h_2(\| q \|), \quad \Big\| \frac{\partial\,\Pi(t,q)}{\partial q} \Big\| \ge \delta(\varepsilon) > 0 \text{ для } \| q \| = \varepsilon > 0;$$

2) имеет место неравенство (3.63), положение равновесия $q = 0$, $\dot q = 0$ системы равномерно асимптотически устойчиво.

## 3.4 Некоторые дополнения и обобщения

В этом заключительном параграфе главы рассматриваются некоторые результаты работы [15], в которой ряд известных теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости при наличии одной функции Ляпунова со знакопостоянной производной обобщаются на неавтономные динамические системы.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений (СДУ) вида

$$\dot x_i = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad X_i(t,0,0,\dots,0) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3.64)$$

где правые части определены и ограничены в области $G = \big\{ (t,x):\ t \ge 0,\ \| x \| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \le H \big\}$, $\| X(t) \| \le Q = \text{const}$, $\forall\,(t,x) \in G$ и удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{gathered} \big\| X(t_2, x^{(2)}) - X(t_1, x^{(1)}) \big\| \le L_1 \,|\, t_2 - t_1 \,| + L_2 \,\| x^{(2)} - x^{(1)} \|, \\ \forall\, t_2, t_1 \in [\,0, +\infty),\ |\, t_2 - t_1 \,| \le T = \text{const},\ x^{(2)}, x^{(1)} \in \Gamma = \big\{ \| x \| \le H \big\}. \end{gathered} \quad (3.65)$$

Образуем последовательность функций $X^{(r)}(\tau,x) = X\big[\,(n_r - 1)\,T + \tau, x\,\big]$ для произвольной последовательности натуральных чисел $n_r \to +\infty$. Последовательность функций $X^{(r)}(\tau,x)$ определена в области $G_1 = \big\{ (\tau,x):\ 0 \le \tau \le T,\ \| x \| \le H \big\}$. Имеем

$$\begin{gathered} \big\| X^{(r)}(\tau,x) \big\| \le Q, \qquad \big\| X^{(r)}(\tau_2, x^{(2)}) - X^{(r)}(\tau_1, x^{(1)}) \big\| = \\ = \big\| X\big[\,(n_r-1)\,T + \tau_2, x^{(2)}\,\big] - X\big[\,(n_r-1)\,T + \tau_1, x^{(1)}\,\big] \big\| \le \quad (3.66) \\ \le L_1 \,|\, \tau_2 - \tau_1 \,| + L_2 \,\| x^{(2)} - x^{(1)} \|, \end{gathered}$$



так что последовательность функций $X^{(r)}(\tau,x)$ равномерно ограничена, равностепенно непрерывна на $G_1$. Следовательно, по *теореме Арцела* [50] $\exists\, n_{rs} \to +\infty$ — последовательность такая, что $X^{(rs)}(\tau,x)$ сходится равномерно на $G_1$ к некоторой функции $\varphi(\tau,x)$. Из непрерывности $X^{(r)}(\tau,x)$ вытекает непрерывность $\varphi(\tau,x)$, а из соотношений (3.66) следует, что $\varphi(\tau,x)$ в области $G_1$ удовлетворяет условию Липшица. Функцию $\varphi(t,x)$ называют *предельной функцией* к $X(t,x)$. Обозначим множество всех предельных функций через $N\{\,\varphi\,\}$.

Наряду с системой (3.64) рассмотрим систему

$$\dot x_i = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad i = \overline{1,n}. \quad (3.67)$$

Из вышеприведенного вытекает, что для системы (3.67) выполнены условия существования и единственности решений в $G_1$. Из построения системы (3.64) следует, что ее решения определены в конечном интервале времени $[\,0,T\,]$, где число $T$ выбирается, исходя из неравенств (3.65), определяемых первоначальной системой (3.64). Для дальнейшего нам потребуются результаты следующей леммы.

**Лемма 3.1.** *Для любого решения системы* (3.64) $x = x(t,t_0,x_0)$, *где* $t \ge t_0$, $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$, *ограниченного областью* $\Gamma = \big\{ \| x \| \le H \big\}$, $\forall\, t \ge t_0$ *существует последовательность отрезков этого решения* $x^{(r)}(t) = x\big[\,(n_r - 1)\,T + t, t_0, x_0\,\big]$, *где* $(n_1 - 1)\,T \ge t_0$, $0 \le t \le T$, *сходящаяся равномерно к функции* $x_*(t)$, *которая является решением системы* (3.67) *с наперед заданной предельной функцией* $\varphi = \varphi_0(t,x)$, $\varphi_0 \in N\{\,\varphi\,\}$.

Схема доказательства этой леммы выглядит так. Из определения $\varphi_0$ существует последовательность $n_r \to +\infty$ такая, что $X\big[\,(n_r - 1)\,T + t, x\,\big] = X^{(r)}(t,x)$ сходится равномерно к $\varphi_0(t,x)$ на $G_1$. Введем в рассмотрение последовательность отрезков решения

$$x = x(t,t_0,x_0) - x^{(r)}(t) = x\big[\,(n_r - 1)\,T + t, t_0, x_0\,\big], \quad t \in [\,0,T\,]$$

с номера $N_0$, где $(N_0 - 1)\,T \ge t_0$.

Отметим, что эта последовательность равномерно ограничена в силу ограниченности рассматриваемого решения и равностепенно непрерывна в силу ограниченности производной $\dot x(t,t_0,x_0)$. Значит, из последовательности $x^{(r)}(t)$ можно выбрать подпоследовательность $x^{(s)}(t)$, сходящуюся равномерно к некоторой функции $x_*(t)$, $t \in [0, T]$. Получим при этом

$$x[(n_s-1)T+t, t_0, x_0] = x_0 + \int\limits_{t_0}^{(v_s-1)T+t} X[\tau, x(\tau, t_0, x_0)]\, d\tau =$$

$$= x[(n_s-1)T, t_0, x_0] + \int\limits_{(n_s-1)T}^{(n_s-1)T+t} X[\tau, x(\tau, t_0, x_0)]\, d\tau =$$

$$= x^{(s)}(0) + \int\limits_0^t X\{(n_s-1)T+\tau, x[(n_s-1)T+\tau, t_0, x_0]\}\, d\tau =$$

$$= x^{(s)}(0) + \int\limits_0^t X^{(s)}[\tau, x^{(s)}(\tau)] - \varphi_0[\tau, x^{(s)}(\tau)]\}\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \{\varphi_0[\tau, x^{(s)}(\tau)] - \varphi_0[\tau, x_*(\tau)]\}\, d\tau + \int\limits_0^t \varphi_0[\tau, x_*(\tau)]\, d\tau.$$

Доказательство леммы завершается переходом в этом равенстве к пределу при $n_s \to +\infty$. С учетом равномерной сходимости $X^{(s)}(t,x)$ к $\varphi_0(t,x)$ и равномерной непрерывности $\varphi_0(t,x)$ будем иметь

$$x_*(t) = x_*(0) + \int\limits_0^t \varphi_0[\tau,\, x_*(\tau)]\, d\tau,$$

где $t \in [0, T]$, что, в принципе, и требовалось доказать.

Заметим, что с помощью использования систем вида (3.67) и леммы 3.1 можно выявить асимптотическую устойчивость и неустойчивость нулевого решения системы (3.64), прибегая к одной ФЛ со знакопостоянной производной.

**Определение 3.2.** *Будем говорить, что множество* $M = \{x:\ W(x) = 0\}$ *не содержит целых решений системы* (3.67), *если не существует ее решений* $x = x(t, x_0)$, *определенных на всем конечном интервале* $[0, T]$ *и таких, что* $x(t, x_0) \in M$, $\forall t \in [0, T]$.

**Теорема 3.18.** *Пусть система* (3.64) *ограничена условиями:*



1) *в области* $G$ $\exists V(t,x)$ — *определенно положительная, допускающая бесконечно малый высший предел функция такая, что* $V_1(\|x\|) \le V(t,x) \le V_2(\|x\|)$, *полная производная которой в силу системы* (3.64) $\dot V(t,x) \le W(x) \le 0$;

2) $\exists \varphi_0 \in N\{\varphi\}$ — *предельная функция такая, что множество* $M = \{x:\ W(x) = 0\}$ *не содержит целых решений системы* (3.67), *соответствующей этой функции, кроме решения* $x(t,0) = 0$, $t \in [0, T]$.

*Тогда нулевое решение системы* (3.64) *асимптотически устойчиво равномерно по начальным координатам из области* $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = \{\|x\| \le H_0,\ H_1 \in (H_0, H),\ V_2(H_0) < V_1(H_1)\}.$$

Поясним ход доказательства этого утверждения. Из условия 1) вытекает согласно работе [78] устойчивость $x = 0$, равномерная по $t_0$. В самом деле, для решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \ge 0$, $x_0 \in \Gamma_0$ системы (3.64) в силу $\dot V \le 0$ имеем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \le H_1, \qquad \forall t \ge t_0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} V[t, x(t, t_0, x_0)] = V_* = \mathrm{const} \ge 0.$$

Предположим, что для некоторого такого решения $V_* \ne 0$. Зададимся числом $\eta:\ 0 < \eta < 1/V_2(V_*)$. Тогда для этого решения справедлива оценка

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \ge \eta, \qquad \forall t \ge t_0. \tag{3.68}$$

Пусть далее $\varphi_0(t,x)$ — функция, удовлетворяющая условию 2) теоремы. Согласно лемме 3.1 можно построить последовательность отрезков $x^{(r)}(t) = x[(n_r-1)T+t, t_0, x_0]$, которая сходится к решению $x = x_*(t)$, $t \in [0, T]$ системы (3.67) с функцией $\varphi = \varphi_0(t,x)$. В силу неравенства (3.68) $x_*(t) \ne 0$ $\forall t \in [0, T]$.

Имеем для последовательности $x^{(r)}(t)$ оценки

$$V[n_rT, x(n_rT, t_0, x_0)] - V\{(n_r-1)T, x[(n_r-1)T, t_0, x_0]\} =$$

$$= \int\limits_{(n_r-1)T}^{n_rT} \dot V dt \le -\int\limits_{(n_r-1)T}^{n_rT} W\left[\,x(t,t_0,x_0)\,\right]dt \le -\int\limits_0^T W\left[\,x^{(r)}(t)\,\right]dt \le 0.$$

Переходя к пределу: $n_r \to +\infty$, получим

$$0 = V_* - V_* = -\int\limits_0^T W\left[\,x_*(t)\,\right]dt \le 0.$$

Отсюда вытекает, что $W[\,x_*(t)\,] = 0,\ \forall\, t \in [\,0, T\,]$, что противоречит условию 2) теоремы.

Таким образом, $V_* = 0$. Значит, из определенной положительности $V(t,x)$ следует выполнение предельного равенства: $\lim_{t\to+\infty} x(t,\ t_0,x_0) = 0,\ \forall\, t_0 \ge 0$ и $x_0 \in \Gamma_0$. Кроме того, из равномерной по $t_0$ устойчивости и компактности $\Gamma_0$ следует [78], что указанное свойство будет выполняться равномерно по $x_0 \in \Gamma_0$.

**Теорема 3.19.** *Пусть для системы* (3.64) *выполнены условия:*

1) *в области* $G\ \exists\, V(t,x)$ *— функция, допускающая бесконечно малый высший предел такая, что* $|\,V(t,x)\,| \le V_2(\|\,x\,\|)$, *и имеющая в любой малой окрестности* $x = 0$ *положительные значения, полная производная которой в силу системы* (3.64) : $\dot V(t,x) \ge W(x) \ge 0$;

2) $\exists\, \varphi = \varphi_0(t,x) \in N\{\,\varphi\,\}$ *— предельная функция такая, что множество* $M = \left\{\, x:\ \ W(x) = 0\,\right\}$ *не содержит целых решений системы* (3.67), *соответствующей этой функции, кроме* $x = x(t,0),\ t \in [\,0, T\,]$.

*Тогда нулевое решение системы* (3.64) *неустойчиво.*

Чтобы доказать справедливость теоремы, для $t_0 \ge 0, \forall\, \delta > 0$ выберем $x_0$, $\|\,x_0\,\| \le \delta$ так, что $V(t_0,x_0) = V_0 > 0$. Будем считать, что решение $x = x(t,t_0,x_0)$ ограничено, $\|\,x(t,t_0,x_0)\,\| \le H_1 < H,\ \forall\, t \ge t_0$. Тогда по причине ограниченности $V\ \exists\, \lim_{t\to+\infty} V\left[\,t, x(t,t_0,x_0)\,\right] = V_*$. Из $\dot V \ge 0$ будем иметь

$$\left\|\,x(t,t_0,x_0)\,\right\| \ge \eta, \qquad \forall\, t \ge t_0, \tag{3.70}$$

где $\eta$ таково, что $V_2(\eta) < V_0$.

Будем считать, что $\varphi = \varphi_0(t,x)$ — функция, удовлетворяющая условию 2) теоремы. В соответствии с леммой 3.1 можно построить последовательность отрезков $x^{(r)}(t)$ рассматриваемого решения, сходящуюся к решению $x = x_*(t),\ t \in [\,0, T\,]$ системы (3.67) с функцией $\varphi = \varphi_0(t,x)$. Из неравенства (3.70) следует, что $x_*(t) \ne 0,\ \forall\, t \in [\,0, T\,]$.



Аналогично соотношениям (3.69) можем написать

$$V\left[\,n_rT, x(n_rT,t_0,x_0)\,\right] - V\left\{\,(n_r-1)\,T, x\left[\,(n_r-1)\,T, t_0, x_0\,\right]\,\right\} \ge$$

$$\ge \int\limits_0^T W\left[\,x^{(r)}(t)\,\right]dt \ge 0.$$

Переходя к пределу при $n_r \to +\infty$, получим равенство

$$0 = V_* - V_* = \int\limits_0^T W\left[\,x_*(t)\,\right]dt \ge 0,$$

или $W\left[\,x_*(t)\,\right] = 0$, что противоречит условию 2) теоремы, а это как раз и доказывает теорему 3.19.

Надо отметить, что в условиях теорем со знакопостоянной производной $\exists\, T > 0$ — такое конечное число, что множество $M = \left\{\,x:\ \dot V(x) = 0\,\right\}$ не содержит решений $x(t,x_0)$, где $x(0,x_0) = x_0$, $x_0 \in \left\{\,x:\ \ 0 < \eta \le \|\,x\,\| \le H_1\,\right\}$ на всем интервале $[\,0, T\,]$. Значит, с учетом того, что в случае автономности системы (3.64) система (3.67) с ней совпадает, число $T$ в теоремах 3.18, 3.19 может быть выбрано произвольным.

**Модельный пример 5.** Возьмем СДУ второго порядка

$$\dot x_1 = g_{11}(t)\,x_1 + g_{12}(t)\,x_2, \qquad \dot x_2 = -\,g_{12}(t)\,x_1 + g_{22}(t)\,x_2. \tag{3.71}$$

Будем считать, что коэффициенты $g_{ij}(t)$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица: $|\,g_{ij}(t_1) - g_{ij}(t_1)\,| \le L_1\,|\,t_2 - t_1\,|$, $g_{12} \ne 0$ на бесконечной системе интервалов $[\,t_{1k}, t_{2k}\,]$, $t_{2k} - t_{1k} \ge T > 0$, $t_{1k} \to +\infty$ при $n_k \to +\infty$, $T = \text{const}$.

Тогда системе (3.71) можно сопоставить систему

$$\dot x_1 = \bar g_{11}(t)\,x_1 + \bar g_{12}(t)\,x_2, \qquad \dot x_2 = -\,\bar g_{12}(t)\,x_1 + \bar g_{22}(t)\,x_2 \tag{3.72}$$

с коэффициентами $\bar{g}_{ij}(t)$, предельными для $g_{ij}(t)$, при этом $\bar{g}_{12}(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [\,0, T\,]$.

Пусть $V = x_1^2 + x_2^2$, тогда в силу системы (3.71) $\dot{V} \leq -\,hx_1^2$, если $g_{11}(t) \leq -\,h = \mathrm{const} < 0$, $g_{22}(t) \leq 0$ (случай 1)); $\dot{V} \geq hx_1^2$, если $g_{11}(t) \geq h = \mathrm{const} > 0$, $g_{22}(t) \geq 0$ (случай 2))

Однако в силу условия $\bar{g}_{12}(t) \neq 0$ множество $M = \big\{\, W(x) = \pm\, hx_1^2 = 0,\ x_1 = 0 \,\big\}$ не содержит решений системы (3.72), кроме $x_1 = x_2 = 0$. Поэтому из теорем 3.18 и 3.19 получим, что нулевое решение системы (3.71) в случае 1) асимптотически устойчиво, а в случае 2) неустойчиво.

# Глава 4

# Асимптотические методы

Вниманию предлагается обзорная глава, посвященная изложению ряда вопросов некоторых классических и широко известных асимптотических методов в анализе, в теории дифференциальных уравнений (ДУ), нелинейной механике и теории возмущений, теории регулируемых систем (укажем лишь на отдельные известные работы, имея в виду и знакомство с содержащейся там библиографией [1-5, 11, 12, 22-24, 30, 33-37, 39-42, 45-49, 52, 62, 74, 76, 85, 88, 91, 95, 96, 102, 108, 109, 111, 113, 116, 119, 121, 122, 126, 127, 154-160, 163, 164, 167, 169-172, 175, 181-189, 198, 201, 203-208, 212-215, 217, 231, 232]), тесно примыкающих к изучаемым здесь вопросам устойчивости.

В настоящее время асимптотические методы продолжают активно развиваться в рамках возникающих задач в теории ДУ, в теории сингулярных возмущений, нелинейной и квантовой механики, в связи с развитием таких прикладных областей, как теория автоматического управления, газогидродинамика, кинетика и др.

Исследования с использованием асимптотических методов насчитывают весьма обширную литературу. Поэтому при отборе материала для этой главы предпочтение отдавалось, прежде всего, хорошо известным, классическим методам разложения решений ДУ, методам малого параметра в теории Ляпунова–Пуанкаре, усреднения Крылова–Боголюбова и некоторым другим. Ввиду ограниченного объема главы целый ряд важных вопросов асимптотической теории, к сожалению, не получил своего отражения (например, методы Лайтхилла, Ван-дер-Поля, Каменкова, Малкина, Биркгофа, Тамаркина и другие остались за рамками рассмотрения).

В § 4.1 обсуждаются асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. Обговаривается асимптотическое разложение в смысле А. Пуанкаре. Вводится классификация точек, включая классификацию особых точек. Изучается вопрос об асимптотических разложениях в нерегулярной особой точке конечного типа. Анализируются уравнения с большим параметром и асимптотические свойства их решений. Рассматривается явление Стокса. Большое внимание уделяется точкам ветвления и соотносящейся с ними теории Лангера о построении асимптотических разложений решений ДУ в окрестности точек ветвления.

§ 4.2 посвящен введению в асимптотические методы теории возмущений (методы малого параметра) гамильтоновых систем, направленные на построение приближенных аналитических решений сложных нелинейных задач. Обсуждаются вопросы сходимости соответствующих итерационных процедур, устанавливаются мажорирующие оценки. Бегло изучаются метод Линдстедта и метод Пуанкаре для канонических систем. Вводятся понятия секулярных членов, среднего значения и процедуры усреднения, быстрых и медленных переменных.

Завершает эту главу § 4.3 в виде обзора асимптотических методов теории оптимального управления. Отмечается, что с помощью сочетания асимптотических методов теории возмущений и методов теории оптимального управления возможна разработка эффективных схем приближенного решения задач синтеза оптимальных управлений. Подходы теории возмущений, использующие идею малого параметра, можно применить при построении систем (оптимального) управления с учетом оценки степени влияния малых возмущений на общий характер движения самого управляемого объекта. Изучаются некоторые постановки задач оптимального управления движением возмущенных динамических систем во взаимодействии со схемами приближенного построения решений этих задач, основанных на методах малого параметра.

## 4.1 Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений

Сразу же оговоримся, что в этом параграфе речь пойдет об асимптотических разложениях решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Основой для составления данного краткого обзора послужил материал, представленный в работах [35, 169] (см. также по этой теме публикации [11, 74, 88, 175].



**4.1.1. Общие пояснения.** Остановимся вначале на асимптотическом разложении, введенном А. Пуанкаре. Пусть $f(t)$ — функция действительного переменного $t$, $t \geq t_0$, и допустим, что при условии существования $\lim_{t\to+\infty}$ можно вычислить $\lim_{t\to+\infty} f(t) = a_0$.

Если этот предел найден, то $f(t) = a_0 + o(1)$ при $t \to +\infty$. Далее можно найти (при его существовании) $\lim_{t\to+\infty} t\,[\,f(t) - a_0\,] = a_1$. Если этот предел найден, то

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty.$$

Пусть существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} t^n \left[\, f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} - \ \ldots\ - \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} \,\right] = a_n,$$

где $n \in N = \left\{\, 0, 1, 2, \ldots = \overline{0, \infty}\, \right\}$ — множество натуральных чисел. Тогда

$$f(t) = a_0 + \frac{a_0}{t} + \ \ldots\ + \frac{a_n}{t^n} + R_n, \qquad n \in N,$$

где $R_n = o\big(1/t^n\big)$ при $t \to +\infty$. В этом случае говорят, что ряд

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^n} \tag{4.1}$$

является *асимптотическим разложением функции* $f(t)$ при $t \to +\infty$.

Аналогично можно ввести в рассмотрение функцию $f(t)$ комплексного переменного (ФКП) $t = u + iv$, $i^2 = -1$. Отметим еще, что ряд (4.1) не обязательно сходится по $t$. Приведем также следующие свойства асимптотических разложений:

$$\text{если} \qquad f \sim \sum \frac{a_n}{t^n} \qquad \text{и} \qquad g \sim \sum \frac{b_n}{t^n}, \qquad \text{то}$$

$$1) \qquad f + g \sim \sum \frac{a_n + b_n}{t^n},$$

$$2) \qquad fg \sim \sum \frac{c_n}{t^n}, \qquad f' \sim \sum \frac{d_n}{t^n},$$

где $c_n = a_0 b_n, \ldots, a_n b_0$, $d_0 = d_1 = 0$, $d_n = -(n-1)\,a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots,$

$$3) \qquad \int_t^\infty f\,dt \sim \sum \frac{e_n}{t^n}, \quad e_0 = 0, \quad e_n = \frac{a_{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = a_1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

**4.1.2. Обыкновенные, регулярные и нерегулярные точки.** Остановимся на классификации точек, известной из теории линейных ДУ для ФКП $z$.

1. Точка $z = 0$ называется *обыкновенной* для линейного однородного ДУ

$$y^{(n)} + a_1(z)\,y^{(n-1)} + \ \ldots\ + a_n(z)\,y = 0, \tag{4.2}$$

если коэффициенты $a_i(z)$, $i = \overline{1,n}$, являются однозначными аналитическими (голоморфными, регулярными) функциями в окрестности $z = 0$ и в ней самой. При этом существуют степенные ряды $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\, z^m$ $(*)$, удовлетворяющие уравнению (4.2), в котором коэффициенты заменены их разложениями Тейлора и решением получаемых рекуррентных уравнений. В этом случае $n$ первых коэффициентов $c_0, \ldots, c_{n-1}$ остаются неопределенными.

Полученные ряды (формальные ряды) являются сходящимися в окрестности точки $z = 0$. Известно, что при этом существует $n$ независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (4.2) такого типа.

Точка $z = 0$ аналогично называется обыкновенной для системы однородных линейных ДУ первого порядка

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z)\,x_i, \qquad \text{либо} \qquad x' = A(z)\,x, \tag{4.3}$$

где $a_{ij}(z)$ — однозначные аналитические функции в окрестности точки $z = 0$ и в ней самой. Уравнение (4.2) сводится к системе (4.3) с помощью подстановок $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$.

2. Точка $z = 0$ называется *регулярной особой точкой* для однородного линейного ДУ $n$–го порядка вида (4.2), где $a_i(z)$ — однозначные аналитические функции в окрестности $z = 0$ и аналитиче-



ские или имеющие полюс порядка $i$ в самой точке $z = 0$ (хотя бы один из коэффициентов $a_i(z)$ должен иметь полюс при $z = 0$). В этом случае уравнение (4.2) можно записать в виде

$$z^n\,y^{(n)} + z^{n-1}\,b_1(z)\,y^{(n-1)} + \ \ldots\ + b_n(z)\,y = 0, \tag{4.4}$$

где коэффициенты $b_i(z)$ аналитичны при $z = 0$. Тогда решения этого уравнения — это ряды виды $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+\lambda}$ $(**)$, где $\lambda$ — некоторое подходящее действительное или комплексное число, или ряды вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\, c_{m0} + c_{m1}\log z + \ \ldots\ + c_{mk}\log^k z \,\right] z^{m+\lambda}. \tag{$***$}$$

Формальные ряды $(**)$ и $(***)$ удовлетворяют уравнению (4.4), в котором коэффициенты $b_i(z)$ заменены их разложениями Тейлора. Эти ряды сходятся в окрестности точки $z = 0$.

Аналогично точка $z = 0$ называется *регулярной особой точкой* для системы (4.3), если эта система может быть записана в виде

$$x_i' = \frac{1}{z}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z)\,x_j, \qquad \text{или} \qquad x' = \frac{1}{z}\,A(z)\,x, \tag{4.5}$$

где коэффициенты $a_{ij}(z)$ — однозначные аналитические функции в окрестности $z = 0$ и в самой этой точке и не обращающиеся одновременно в ноль при $z = 0$, т.е. $A(0) \neq 0$.

В случае, если все решения имеют вид $(*)$ или $(**)$ с целым неотрицательным $\lambda$ (к примеру, система $x_1' = x_1/z$, $x_2' = x_2/z$ имеет решения вида $x_1 = az$, $x_2 = bz$, где $a, b = \mathrm{const}$), то тогда точка $z = 0$ называется *устранимой особенностью.*

Отметим также, что уравнение (4.4) заменой $x_1 = y$, $x_2 = zy'$, ..., $x_n = z^{n-1}\,y^{(n-1)}$ сводится к системе (4.5).

3. Во всех других случаях точка $z = 0$ называется *нерегулярной особой точкой.* Точка $z = 0$ называется нерегулярной особой точкой конечного типа для уравнения (4.2), если все коэффициенты этого уравнения являются однозначными аналитическими функциями в окрестности $z = 0$, аналитическими или имеющими полюсы в самой

точке $z = 0$; при этом хотя бы один из коэффициентов $a_i(z)$ имеет в точке $z = 0$ полюс порядка $> i$.

Аналогично точка $z = 0$ называется нерегулярной особой точкой конечного типа для системы вида

$$x_i' = \frac{1}{z^{1+\mu}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z)\, x_j, \qquad \text{или} \qquad x' = \frac{1}{z^{1+\mu}} A(z)\, x, \tag{4.6}$$

где коэффициенты $a_{ij}(z)$ — однозначные аналитические функции в окрестности $z = 0$ и при $z = 0$; помимо этого, при $z = 0$ не все они обращаются в ноль, т.е. $A(0) \neq 0$ и $\mu \geq 1$ — целое число.

Отметим также, что формальные решения в виде рядов могут оказаться расходящимися в любой окрестности данной особой точки. Пример: уравнение

$$z^2\, y'' + (3z - 1)\, y' + y = 0 \tag{4.7}$$

имеет формальное решение (формальный ряд) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$, который расходится $\forall\, z \neq 0$.

4. Точка $t = t^*$ (либо же точка $t = \infty$) может быть переведена в точку $z = 0$ с помощью замены $z = t - t^*$ (или же $z = 1/t$). Точки $t = t^*$ или $t = \infty$ называют 1) обыкновенными, 2) регулярными особыми точками или 3) нерегулярными особыми точками конечного типа для данного ДУ или СДУ, если для преобразованного уравнения точка $z = 0$ является точкой соответствующего типа. Для точки $t = \infty$ различают три случая в согласии с видом данной системы:

1) $t = \infty$ — обыкновенная точка и система $x' = (1/t^2)\, A(t)\, x$;

2) $t = \infty$ — регулярная особая точка и система $x' = (1/t)\, A(t)\, x$;

3) $t = \infty$ — нерегулярая особая точка конечного типа и система $x' = t^{\nu}\, A(t)\, x$,

где все элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ представляют собой однозначные аналитические функции в окрестности точки $t = \infty$, аналитические при $t = \infty$ и $A(\infty) \neq 0$, $\nu \geq 0$ — целое число.

Действительно, подстановка $z = 1/t$ приводит эти системы к видам (4.3), (4.5), (4.6). Рассмотренное ранее уравнение (4.7) с помощью подстановок $z = 1/t$, $x_1 = y$, $x_2 = ty'$ преобразуется в систему



$$x_1' = \frac{x_2}{t}, \qquad x_2' = -\,\frac{x_1}{t} + \left(\frac{2}{t} - 1\right) x_2,$$

или $x' = A(t)\, x$, где $x = (x_1, x_2)$, $\nu = 0$, $A(\infty) \neq 0$. Формальные решения этой системы записываются в виде рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{t^k}, \qquad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,(k!)}{t^k},$$

которые расходятся в любой окрестности точки $t = \infty$ и которые, однако, являются асимптотическими разложениями решений в окрестности точки $t = \infty$.

**4.1.3. Асимптотические разложения в нерегулярной особой точке конечного типа.** Пусть точка $t = \infty$ является нерегулярной особой точкой конечного типа, а значит, система может быть записана в виде

$$x' = t^{\nu}\, A(t)\, x, \tag{4.8}$$

где $\nu \geq 1$ — целое число, $A(\infty) \neq 0$, все элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ — однозначные аналитические функции в окрестности точки $t = \infty$ и в ней самой, причем ряды вида $\sum_{m=0}^{\infty} b_m/t^m$ сходятся в окрестности точки $t = \infty$.

Известно [169], что существует фундаментальная матрица решений $X(t)$, элементы которой имеют асимптотические разложения в формальные ряды вида

$$\sum_{i=0}^{M} e^{\sigma_i(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\, c_{im0} + c_{im1} \log t + \ldots + c_{imN_i} \log^{N_i} t \,\right] \cdot \frac{1}{t^{m+\lambda_i}}, \tag{4.9}$$

где $\sigma_i(t)$ — многочлены по $t$, $\lambda_i$ — комплексные числа; к примеру, это ряды вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{t^m}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{t^{m-\lambda}}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m\, e^{\sigma t}}{t^{m-\lambda}}.$$

Например, уравнение $y' = y$ имеет решение $y = e^t$. Уравнение Бесселя
$$x'' + \frac{x'}{t} + \left(1 - \frac{\rho^2}{t^2}\right) x = 0$$
имеет решение $H_\nu^{(1)}(t)$ с асимптотическим разложением при большом $|\,t\,|$ и $|\arg t\,| < \pi$ :
$$H_\nu^{(1)}(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\ \exp\left(i\left|\,t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right|\right) \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\,(\rho,\,m)\ \frac{1}{(2it)^m}\right],$$
где обозначено
$$(\rho,\,m) = \frac{1}{2^{2m}}\,\frac{1}{m!}\,(4\rho^2 - 1)\,\ldots\,\left[\,4\rho^2 - (2m-1)^2\,\right].$$
Аналогичное выражение можно выписать и для другого решения $H_\nu^{(2)}(t)$. Данные ряды всегда расходятся, за исключением случая $\rho = m + 1/2$, когда они сходятся к конечной величине.

Уравнение $y' = t^r\,y$ имеет решение $\exp\left(t^{r+1}/r+1\right)$, где степень многочленов $\sigma_i(t)$, используемых в сумме (4.9), больше единицы.

**Теорема 4.1.** *Если* $A(\infty)$ *имеет различные характеристические корни* $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, *то фундаментальное решение системы* (4.8) *существует и его элементы являются однозначными аналитическими функциями в секторе* $|\arg t\,| < a$, $|\,t\,| \geq B\,(a > 0,\ B > 0)$, *имеющими асимптотические разложения вида* (4.9), *в которых* $N = 0$, *а многочлены* $\sigma_i(t)$ *могут быть записаны в виде*
$$\sigma_i(t) = \frac{\lambda_i\,t^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\lambda_{i1}\,t^{\nu}}{\nu} + \ \ldots\ + \lambda_{i\nu}\,t,$$
*где* $\lambda_{i1}$, ..., $\lambda_{i\nu}$ *— комплексные числа.*

Отдельного упоминания заслуживают асимптотические разложения, получаемые при помощи формулы Тейлора. Решения ДУ могут быть получены в виде $\sum_{j=1}^{k} z^{\alpha_j}\,(\log z)^{\rho_j}\,F_j(z)$, где функции $F_j(z)$ — однозначные аналитические во всей комплексной плоскости $z$, за исключением конечного числа особых $\neq 0$ точек, и их разложения в ряд Тейлора $F_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,z^n$ сходятся в круге $|\,z\,| < R$, описанном вокруг точки $z = 0$. Возникает вопрос [169] о возможности определения асимптотического разложения функций $F(z)$ при $z = \infty$. Особое внимание уделяется случаю, когда коэффициенты $c_n = g(n)$, $n = 0, 1,\ \ldots$ являются значениями заданной функции $g(w)$, аналитической на открытом связном множестве $G$, лежащем в комплексной плоскости $w$ и содержащем все неотрицательные целые числа. Если асимптотические свойства функции $g(w)$ на множестве $G$ известны, то во многих случаях оказывается возможным установить асимптотические свойства функции $F(z)$.



**4.1.4. Уравнения с большим параметром.** Рассматривается система $n$ однородных линейных ДУ первого порядка
$$x_i' = \lambda^r \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t,\lambda)\,x_j, \qquad \text{либо} \qquad x' = \lambda^r\,A(t,\lambda)\,x, \tag{4.10}$$
где $r \geq 1$ — целое число, коэффициенты $a_{ij}(t,\lambda)$ — непрерывные функции переменного $t$, $t \in [\,a, b\,]$; если $|\,\lambda\,|$ велико, то они аналитичны по $\lambda$, причем ряды
$$a_{ij}(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ijk}(t)}{\lambda^k}, \qquad i, j = \overline{1,n} \tag{4.11}$$
сходятся, а $a_{ijk}(t)$ — непрерывные функции по $t \in [\,a, b\,]$.

Изучим асимптотические свойства решений системы (4.10) при условии, что $t \in [\,a, b\,]$ и $|\,\lambda\,|$ велико. Можно ожидать получения формальных рядов вида (4.11), соответствующих решениям системы (4.10), где $t \in [\,a, b\,]$, и которые будут асимптотическими представлениями решений при значениях параметра $\lambda$ таких, что $|\,\lambda\,|$ велико и $\lambda \to \infty$.

Параметр $\lambda$ может быть действительным и комплексным. В последнем случае полагаем, что он принадлежит некоторому связному множеству на комплексной плоскости $\lambda$, которое содержит $\lambda = \infty$. Формулировка результатов для случая различных характеристических корней содержится в теореме 4.2.

Такие же результаты имеют место и в случае $k$ одинаковых $(1 \le k \le n)$ корней на интервале $[\,a, b\,]$, а остальные $n-k$ корней отличны от них и между собой. Если два или более корней $\lambda_i(t)$ совпадают при $t = t_0$, но различны по разные стороны от $t_0$, то в этом случае решения слева и справа от $t_0$ ведут себя по-разному и соответствующие формальные ряды различны. Данное явление называется *явлением Стокса*, а точка $t_0$ — *точкой ветвления* (еще иначе — точкой поворота или переходной точкой).

Пусть на $[\,a, b\,]$ нет точек ветвления и все $\lambda_i(t)$ на $[\,a, b\,]$ различны. Формальные ряды возьмем в виде $\sum_{k=-N}^{\infty} c_k(t)/\lambda^k$, где коэффициенты $c_k(t)$ — непрерывные функции по $t$ на $[\,a, b\,]$. Эти ряды дифференцируемы на $[\,a, b\,]$, если функции $c_k(t)$ имеют непрерывные производные на $[\,a, b\,]$ первого порядка. Тогда формальная производная данного ряда будет равна $\sum_{k=-N}^{\infty} c_k'(t)/\lambda^k$.

Затем рассмотрим многочлен $p_i(t, \lambda)$ вида

$$p_i(t, \lambda) = b_{i0}(t)\,\lambda^r + b_{i1}(t)\,\lambda^{r-1} + \ \dots\ + b_{ir}(t),$$

где функции $b_{ij}(t)$ непрерывны по $t$ на $[\,a, b\,]$ и $b_{i0}(t)$ есть функция от $t$, для которой $b_{i0}'(t) = \lambda_i(t)$, $t \in [\,a, b\,]$. Представление о дифференциальных свойствах коэффициентов $\lambda_i(t)$ и $b_{ij}(t)$ дает следующая теорема.

**Теорема 4.2.** *Если коэффициенты $a_{ij}(t, \lambda)$ бесконечно дифференцируемы на промежутке $t \in [\,a, b\,]$ и если все корни $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, матрицы $\big(a_{ij0}(t)\big)$ различны, т.е. $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t)$, $t \in [\,a, b\,]$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, n}$, то система (4.10) имеет фундаментальную систему решений с формальными рядами вида*

$$x_{ij}(t) \sim e^{p_j(t,\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{ijk}(t) \cdot \frac{1}{\lambda^k}, \qquad i, j = \overline{1, n}, \tag{4.12}$$

*которые все бесконечно дифференцируемы на $[\,a, b\,]$.*

*Если в комплексной плоскости $\lambda$, помимо этого, существует область $S$, ограниченная двумя дугами, идущими в $\infty$, и если* $\mathrm{Re}\big[\,p_i(t, \lambda) - p_j(t, \lambda)\,\big] \ge 0$ *или* $\le 0$ $\forall\, t \in [\,a, b\,]$, *где* $\lambda \in S$ $\forall$ *пар* $(i, j)$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, n}$, *то фундаментальная система решений* $x_{ij}\,(t, \lambda)$, $i, j = \overline{1, n}$, *системы (4.10) при том, что* $t \in [\,a, b\,]$, $\lambda \in S$, *имеет асимптотические ряды вида* (4.12), $t \in [\,a, b\,]$, $\lambda \in S$, $|\,\lambda\,| \to +\infty$.



Аналогичный результат остается в силе и в случае, если $k$ корней совпадают на $[\,a, b\,]$, а остальные $n-k$ корней им не равны и отличны между собой. В этом случае формальные ряды вида (4.12) содержат вместо $\lambda^k$ степени $\lambda^{1/k}$ (и в ряде, и в многочленах).

Завершим этот раздел упоминанием о ВКБ–методе (Вентцель–Крамерс–Бриллюэн). Возьмем ДУ второго порядка

$$y'' - \big[\,\lambda^2 f(x) + g(x)\,\big]\, y = 0, \tag{4.13}$$

где $\lambda$ — большой параметр, $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные функции $x$, $x \in R$, $f(x) \ne 0$ в $R$. Замена $y = \exp\big(\lambda \int u(x)\,dx\big)$ приводит уравнение (4.13) к уравнению Риккати

$$\lambda u' + \lambda^2 u^2 - (\lambda^2 f + g) = 0,$$

которое может быть формально решено с помощью ряда вида

$$u = \sum_{h=0}^{\infty} u_h\,(x) \cdot \frac{1}{\lambda^h},$$

где коэффициенты $u_h(x)$ последовательно находятся из соотношений

$$u_0 = \pm\sqrt{f}, \qquad u_1 = -\frac{u_0'}{2u_0}, \qquad u_2 = \frac{g - u_1' - u_1^2}{2u_0},$$

$$\dots, \qquad u_{h+1} = -\frac{1}{2u_0}\left(u_h' + \sum_{k=1}^{h} u_k\, u_{h+1-k}\right), \qquad h \ge 2.$$

Полагая, что $f(x) \ne 0$ в $R$, тем самым получаем гарантию того, что в $R$ нет точек ветвления. Вышенаписанные формулы, справедливые в $R$, служат основой для метода ВКБ. ВКБ–метод получил широкое применение в физике, в частности, для исследования волнового уравнения Шредингера

$$\psi''(t) + \frac{8\pi^2 m}{h}\,\big[\,E - U(t)\,\big]\,\psi(t) = 0, \tag{4.14}$$

где $m$ — масса, $U(t)$ — потенциальная энергия, а также для нахождения асимптотических формул решения при больших значениях параметра $h$. Отметим, что в уравнении (4.14) собственные значения $E_n$ определяются для ненулевых решений, ограниченных на $(-\infty, +\infty)$.

**4.1.5. Точки ветвления и теория Лангера.** Рассмотрим случай, при котором два или более характеристических корня $\lambda_i(t)$ совпадают, а все остальные характеристические корни различны слева и справа от $t_0$. В данной точке ветвления $t_0$ асимптотические приближения решений системы (4.10) при $|\,\lambda\,| \to \infty$ различны как слева, так и справа от $t_0$ (для комплексных чисел говорим о секторах относительно точки $t_0$). Получаем тем самым явление Стокса в точке ветвления. Если привлечь для приближения решений системы (4.10) многозначные функции, то явления Стокса не получим.

Теория, о которой пойдет речь, хорошо развита для уравнения второго порядка, рассмотрением которого и ограничимся

$$w'' + \lambda\, P_1(t,\lambda)\, w' + \lambda^2\, P_2(t,\lambda)\, w = 0, \tag{4.15}$$

где $(') = d/dt$. Первое приближение, ставшее классическим и указанное Лангером [207], использует функции Бесселя. Это приближение справедливо во всей окрестности точки ветвления. Дальнейшие результаты в данном направлении дают общий метод построения асимптотических разложений решений системы (4.15) в окрестности точек ветвления.

Положим, не умаляя общности, что $t_0 = 0$. Используя замену $w = u\, \exp\big(-\lambda/2 \int P_1(t,\lambda)\, dt\big)$, приведем уравнение (4.15) к виду

$$u'' + \lambda^2\, Q(t,\lambda)\, u = 0. \tag{4.16}$$

Допустим, что $Q(t,\lambda) = \sum q_j(t)/\lambda^j$, где $|\,\lambda\,|$ есть достаточно большая величина, функции $q_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots$, аналитичны в комплексной окрестности $D$ точки $t = 0$. Далее ограничимся допущением, что $t$ принимает значения на интервале.

Характеристические корни $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2$, уравнения (4.16) являются корнями алгебраического уравнения $\rho^2 + q_0(t) = 0$, и, следовательно, существование точки ветвления в $t = 0$ зависит от того, имеет ли $q_0(t)$ изолированный ноль в $t = 0$.



Приведем алгоритм [208], определяющий формальное решение уравнения (4.16) в случае, когда $q_0(t) = t^{\nu}\, q_0^*(t)$, $\nu = 0, 1$ или $-1$, где $q_0^*(t)$ — аналитическая функция, отличная от нуля в $D$. Тогда $t = 0$ — точка ветвления при $\nu = 1$. Будем считать, что $\int_0^t \sqrt{q_0(x)}\, dx \neq 0$ в $D$, кроме $t = 0$, и что $q_0^*(0) = 1$.

*Первое приближение.* Пусть

$$\mu = \frac{1}{\nu + 2}, \qquad \varphi(t) = \sqrt{q_0(t)}, \qquad \Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(x)\, dx,$$

$$\xi(t,\lambda) = \lambda\, \Phi(t), \qquad \Psi(t) = \frac{\big[\,\Phi(t)\,\big]^{1/2-\mu}}{\sqrt{\varphi(t)}},$$

где $\sqrt{q_0}$ — одно из двух значений квадратного корня из $q_0$. Функция $\Psi$ определена так, что она непрерывна в начале координат, а значит, она аналитична в $D$.

К примеру, при $\nu = 1$ имеем $\mu = 1/3$, $1/2 - \mu = 1/6$, и если $q_0(t) = a_0 t + a_1 t^2 + \ \ldots$, где $a_0 \neq 0$, то

$$\varphi(t) = \sqrt{t}\,\big(b_0 + \ \ldots\big), \qquad b_0 \neq 0, \qquad \Phi(t) = t^{3/2}\left(\frac{2b_0}{3} + \ \ldots\right),$$

$$\Psi(t) = \frac{\Phi^{1/6}}{\sqrt{\varphi}} = c_0 + c_1 t + \ \ldots, \qquad c_0 \neq 0.$$

Здесь из условия $q_0^*(0) = 1$ следует, что $a_0 = b_0 = 1$.

Если $C_\mu(\xi)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка $\mu$ и является решением уравнения

$$\xi^2\, y'' + \xi\, y' + \big(\xi^2 - \mu^2\big)\, y = 0,$$

то функция

$$V(t) = \Psi(t)\, \xi^{\mu}\, C_\mu(\xi) = \frac{\lambda^{\mu}\, \sqrt{\Phi(t)}\, C_\mu\,\big[\,\lambda\, \Phi(t)\,\big]}{\sqrt{\varphi(t)}}$$

представляет собой решение уравнения

$$y'' + \left[\,\lambda^2 q_0(t) + \theta(t)\,\right] y = 0, \qquad \theta(t) = -\frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)}. \tag{4.17}$$

Можно показать, что при $q_1(t) \equiv 0$ решения этого уравнения будут близки к решениям уравнения (4.16) вплоть до членов, содержащих $1/\lambda$.

*Второе приближение.* При $q_1(t) \not\equiv 0$ решение уравнения (4.17) слабо аппроксимирует решение уравнения (4.16). Более близкое приближение решения для уравнения (4.16) найдем следующим образом. Обозначим через $v_j(t,\lambda)$, где $j = 1, 2$, два линейно независимых решения уравнения (4.17), а потом зададим функции $\xi_j(t,\lambda)$ с помощью равенств

$$\xi_j(t,\lambda) = \mu_0(t)\, v_j(t,\lambda) + \frac{\mu_1(t)\, v_j'(t,\lambda)}{\lambda}, \qquad j = 1, 2,$$

где коэффициенты $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ пока не определены.

Дифференцируя $\xi_j(t,\lambda)$ дважды по $t$ и заменяя $v_j''$ его выражением, полученным из уравнения (4.17), будем иметь

$$\xi_j'' + \left(\lambda^2 q_0 + \lambda q_1\right)\xi_j = \left[\, g_1 - \lambda\left(2q_0\mu_1' + q_0'\mu_1 - q_1\mu_0\right)\,\right] v_j + \\ + \left[\, g_2 + \lambda\left(2\mu_0' + q_1\mu_1\right)\,\right]\frac{v_j'}{\lambda}, \qquad j = 1, 2, \tag{4.18}$$

где обозначено

$$g_1(t,\lambda) = \mu_0'' - \theta\mu_0 - \frac{2\theta\mu_1' + \theta'\mu_1}{\lambda}, \qquad g_2(t) = \mu_1'' - \theta\mu_1.$$

Затем введем ограничения

$$2q_0\mu_1' + q_0'\mu_1 - q_1\mu_0 = 0, \qquad 2\mu_0' + q_1\mu_1 = 0$$

и запишем частные решения этой системы

$$\mu_0(t) = \cos\omega t, \qquad \mu_1(t) = \frac{\sin\omega t}{\varphi(t)},$$



где

$$\omega(t) = \int\limits_0^t \frac{q_1(x)\,dx}{2\,\varphi(x)}.$$

Функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ аналитичны в $D$ при условии, что $\mu_1(t)$ определена при $t = 0$ таким образом, чтобы оставаться непрерывной, поскольку выше приведенные выражения не определены в точке $t = 0$.

Далее отметим, что $\mu_0^2 + q_0\mu_1^2 = 1$. Выбрав отсюда $\mu_0$ и $\mu_1$, для определения $\xi_j$ получим ДУ

$$\xi'' + H_0\xi' + \left(\lambda^2 q_0 + \lambda q_1 + K_0\right)\xi = 0,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{g_1\mu_1 - g_2\mu_0}{\lambda G_0}, \\ K_0 &= -\frac{1}{G_0}\left[\, g_1\left(\mu_0 + \frac{\mu_1'}{\lambda}\right) + g_2\left(q_0\mu_1 - \frac{\mu_0'}{\lambda}\right) + \frac{\theta\mu_1}{\lambda^2}\,\right], \\ G_0 &= 1 + \frac{\mu_0\mu_1' - \mu_0'\mu_1}{\lambda} + \frac{\theta\mu_1^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Функция $G_0$ отделена от нуля для $t \in D$ и $|\,\lambda\,|$ достаточно больших. Имеем: $H_0 = -G_0'/G_0$. Отсюда следует, что если $z_j = \xi_j/\sqrt{G_0}$, то функции $z_j$ являются решениями уравнения

$$z'' + \left(\lambda^2 q_0 + \lambda q_1 + K\right) z = 0,$$

в котором

$$K = K_0 + \frac{G_0''}{2G_0} - \frac{3}{4}\,\frac{(G_0')^2}{G_0^2}.$$

Это и есть второе приближение уравнения (4.16). Здесь $K$ — аналитическая функция по $t$ и $\lambda$ для $t \in D$ и $|\,\lambda\,|$ достаточно больших. Уравнение для второго приближения разрешимо в явном виде и его решения дают приближения решений уравнения (4.16) вплоть до членов с $1/\lambda$.

Заметим также, что приближения с заданной степенью точности, например, до членов, содержащих $1/\lambda^{m+1}$, можно получить, если взять

$$\eta_j = Az_j + \frac{Bz_j'}{\lambda^2}, \quad A(t,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha_j(t)}{\lambda^j}, \quad B(t,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\beta_j(t)}{\lambda^j}$$

и задать при этом функции $\alpha_j$ и $\beta_j$ так, чтобы выполнялось ДУ

$$\eta'' + \left[ \lambda^2 Q(t,\lambda) + \frac{\Omega(t,\lambda)}{\lambda^m} \right] \eta = 0,$$

где $\Omega(t,\lambda)$ — ограниченная функция, аналитичная по $t$ и $\lambda$, $t \in D$ и достаточно большого $|\lambda|$.

В качестве комментария в заключение укажем на то (подробности и библиографию см. в работе [169]), что теория Лангера возникла с появлением квантовой механики и была развита на начальном этапе для уравнений второго порядка и одной точки ветвления. В дальнейшем теория развивалась для уравнений высших порядков и кратных точек ветвления. Ее результаты нашли применения в квантовой механике (задача рассеивания) и в гидромеханике (устойчивость ламинарного течения вязкой жидкости).

Исследованию уравнения

$$y'' + \lambda^2 Q(x,\lambda)\, y = 0,\ Q(x,\lambda) = q_0(x) + \frac{q_1(x)}{\lambda} + \ ...,\ q_0(x) = x^\nu\, q_0^*(x),$$

где $q_0^*(x) \neq 0$ в окрестности $x = 0$ и больших значений $|\lambda|$, посвящена обширная литература [169], также как и анализу уравнения Вебера $y'' + (n^2 - x^2)\, y = 0$ и уравнения Уиттекера

$$y'' + \left[ \frac{1}{4} + \frac{n}{x} + \left( \frac{1}{4} - m^2 \right) \frac{1}{x^2} \right] y = 0$$

для $n$ и $m$ комплексных.

## 4.2 Асимптотические методы теории возмущений

Параграф посвящен некоторым классическим методам теории возмущений гамильтоновых систем обыкновенных ДУ или, иначе,



асимптотическим методам малого параметра для решения ДУ. Эти методы представляют собой мощное современное аппаратное средство математического обоснования при решении разнообразных задач механики и физики. Они позволяют получать приближенные аналитические решения достаточно сложных нелинейных задач в различных областях науки: небесной механике, гидро и газовой динамике, теории упругости, теории колебаний и волн, квантовой механике и др.

Разумеется, крайне ограниченный объем заявленного материала не позволяет сколь-нибудь полно обсудить вопросы, связанные с методами малого параметра и их применениями; можно лишь пунктирно обрисовать их контуры. За разъяснениями и более тесным знакомством с разделами теории возмущений отсылаем к известным публикациям [30, 36, 37, 39-42, 49, 52, 76, 91, 95, 108, 109, 111, 113, 126, 158, 159, 163, 181-186, 188, 189, 198, 201, 203-206, 212-214, 217, 231, 232]. К сказанному добавим, что сведения об асимптотических методах в теории обыкновенных ДУ с малым параметром при старших производных (сингулярно возмущенные задачи) можно найти в книге [149], по асимптотическим методам в теории нелинейных колебаний — в работе [150], а относительно нормализующих преобразований — см. работу [5]. Отметим также, что в своем изложении материала этого параграфа будем придерживаться концепций, изложенных в работах [52, 113].

**4.2.1. Сходимость итерационных процедур.** Ниже будут рассматриваться некоторые известные методы канонической теории возмущений для гамильтоновых систем, а также упоминаться результаты относительно итерационных процедур, играющих важную роль в методах усреднения.

Известно, что при подобранных значениях границ временного интервала и при достаточно общих условиях простейший метод последовательных приближений решения с помощью рядов является сходящимся.

Пусть имеется система $n$ уравнений относительно $x_1$, ..., $x_n$, зависящая от параметра $\varepsilon$ :

$$F_i(x,\varepsilon) = 0, \qquad x = (x_1,\, ...,\, x_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.19}$$

В предположениях: $a)\,F_i(0,0) = 0,\, i = \overline{1,n}$; $b)\,J = \det\left[\,\partial\,(F_1,\,...,\,F_n)/\,\partial\,(x_1,\,...,\,x_n)\,\right] \neq 0$ при $x=0,\ \varepsilon=0$; $c)\,\partial F_i/\partial\varepsilon \neq 0\,\forall\, i$ при $x = 0$, будет следовать, что функции $F_i$ можно разложить в степенные ряды по $x$ и $\varepsilon$ в окрестности точки $x = 0,\ \varepsilon = 0$.

Тогда, если функции $F_i$ аналитичны по всем аргументам в некоторой области переменных $x, \varepsilon$, ряды

$$x_j = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s\, a_{js}, \tag{4.20}$$

полученные методом последовательных приближений, будут равномерно сходиться по $\varepsilon$. Величины $a_{js}$ можно получить подстановкой выражений для $x_j$ в разложения функций $F_i$ и дальнейшим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$.

Запишем разложение функций $F_i$ :

$$F_i(x,\varepsilon) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0 \varepsilon + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j \; +$$

$$+\;\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_0 x_j x_k + \;...=0.$$

Обозначим для простоты записи $x_0 \equiv \varepsilon$. Тогда это разложение можно представить так:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j \equiv b_0^{(i)} x_0 + \sum_{k,j=0}^{n} b_{jk}^{(i)}\, x_j x_k + \sum_{l,k,j=0}^{n} b_{lkj}^{(i)}\, x_j x_k x_l + \;\dots\,. \tag{4.21}$$

Подставляя ряды (4.20) в ряды (4.21) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon = x_0$, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{j1} = b_0^{(i)},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{j2} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} b_{jk}^{(i)}\, a_{j1} a_{k1}, \tag{4.22}$$



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{jp} = \Phi_{ip}\big(b_{j_0 j_1 \dots j_k},\, a_{rs}\big), \quad r, s = \overline{1,n}.$$

Таким образом, видно, что коэффициенты $a_{jp}$ вычисляются в соответствии с этой системой $n$ уравнений с учетом того, что их правые части известны, если найдены все предшествующие приближения $a_{j1}$, ... (здесь определитель системы (4.22) по предположению $b$) не равен нулю). Отметим также, что уравнения (4.22) аналогичны системе линейных неоднородных уравнений в частных производных метода усреднения Линдстедта–Пуанкаре [52]; эта аналогия распространяется и на асимптотическое решение с помощью рядов Ли [52].

В случае $J = 0$ положим, что хотя бы один из первых миноров этого определителя не равен нулю. И кроме того, будем считать, что $\partial F_i/\partial x_1 = 0$. Тогда $(n-1)$–ое уравнение (4.19) решается относительно $x_2$, ..., $x_n$ в виде степенных рядов по $x_0$ и $x_1$. Подставляя результат в $n$–ое уравнение (4.19), получим уравнение относительно $x_0$ и $x_1$. Поскольку коэффициент при первой степени $x_1$ будет равен нулю, то решение для $x_1$ в виде степенных рядов по $x_0$ должно включать дробные степени этого параметра. Еще добавим: появление дробных степеней приводит к появлению дробных степеней в рядах асимптотического решения, связанного с проблемой резонансов.

Рассмотрим систему ДУ вида

$$\dot{x}_i = \varepsilon\, f_i(x, \varepsilon, t), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.23}$$

где функции $f_i$ считаются аналитичными по $x, \varepsilon, t$ при $x \in D$, $D \subset R^n$ — заданная открытая область, $0 \le \varepsilon \le 1$, $t \in R$, и регулярными при $x_i = \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, $\varepsilon = 0$, $\forall\, t \in [\,0, T\,]$. Допустим, что функции $f_i$ можно разложить в степенные ряды по $\xi_i = x_i - \alpha_i$ и $\varepsilon$. При $t \in [\,0, t\,]$, $|\,x_i - \alpha_i\,| \le m_i$, и $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0 \le 1$ эти ряды являются сходящимися. Использование уравнений (4.23) с помощью рядов приводит в свою очередь к уравнениям

$$\dot{\xi}_i = \varepsilon \left[\, f_i(\alpha, 0, t) + \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \xi_j \; + \right.$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{j,k=0}^{n}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_0 \xi_j\xi_k +\ \ldots\Bigg],$$

где $\xi_0 = x_0 = \varepsilon$, $\alpha_0 = 0$; нижний индекс в виде нуля означает, что величины $x_i$ заменены на $\alpha_i$. Данные уравнения можно записать как:

$$\dot{\xi}_i = \varepsilon\left[\varphi_0^{(i)} + \sum_{j=0}^{n}\varphi_j^{(i)}\,\xi_j + \sum_{j,k=0}^{n}\varphi_{jk}^{(i)}\,\xi_j\xi_k +\ \ldots\right], \tag{4.24}$$

где $\varphi = \varphi(\alpha, t)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Ставится задача получения величин $\xi_i$ в виде степенных рядов по $\varepsilon$, коэффициенты которых являются функциями постоянных $\alpha$ и времени $t$ :

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^{(i)}\,\varepsilon^k, \tag{4.25}$$

где $\xi_k^{(i)} = \xi_k^{(i)}(\alpha, t)$, $i = \overline{1,n}$.

Если затем ряды (4.25) подставить в уравнения (4.24) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ в обеих частях уравнений, то в результате придем к следующей системе ДУ:

$$\dot{\xi}_1^{(i)} = \varphi_0^{(i)}, \qquad \dot{\xi}_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{(i)}\,\xi_1^{(j)},$$

$$\dot{\xi}_3^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{(i)}\,\xi_2^{(j)} + \sum_{j,k=1}^{n}\varphi_{jk}^{(i)}\,\xi_1^{(j)}\,\xi_1^{(k)}, \tag{4.26}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\xi}_p^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{(i)}\,\xi_{p-1}^{(j)} + F_p^{(i)}, \qquad p = 1, 2, 3\ldots,$$

где функции $F_p^{(i)}$ зависят от решения для всех предыдущих приближений до порядка $p-1$ включительно, причем на каждом шаге имеем такой набор приближений:

$$\dot{\xi}_p^{(i)} = \Phi_p^{(i)}\big(\xi_k^{(j)},\, t,\, \beta_l\big), \qquad i, j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p-1},\ l = \overline{1,n\,(p-1)}.$$



Отсюда функции $\xi_p^{(i)}$ можно найти в квадратурах. Обратим внимание на то, что постоянные интегрирования $\beta$ не являются произвольными, поскольку являются функциями исходных постоянных $\alpha$.

Ряды для $\xi_i$ будут сходящимися при $t \in [\,0, T\,]$ и достаточно малом $\varepsilon$. Покажем это. Предположим, что правые части уравнений (4.24) являются сходящимися рядами при $|\,\xi_i\,| \le 1$, $\varepsilon \le 1$, $t \in [\,0, T\,]$. Этого всегда можно добиться соответствующим изменением скалярных множителей при $\xi_i$ и $\varepsilon$. Значит, все коэффициенты $\varphi$ в правых частях уравнений (4.24) ограничены, т.е. $\left|\,\varphi_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{(i)}\,\right| \le M$, где $M > 0$ — некоторая постоянная, $i = \overline{1,n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ .

Воспользуемся далее понятием мажорирующих рядов. С этой целью введем в рассмотрение уравнения

$$\dot{\eta}_i = \frac{M\varepsilon}{(1-\varepsilon)\big(1 - \sum_{j=1}^{n}\eta_j\big)}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.27}$$

При $|\,\varepsilon\,| < 1$, $\left|\,\sum \eta_j\,\right| < 1$ правые части уравнений (4.27) можно разложить в степенные ряды по $\varepsilon$ и $\eta_j$. В принятых предположениях все коэффициенты этих рядов положительны и больше соответствующих коэффициентов рядов (4.24). Уравнения (4.27) можно решить методом последовательных приближений. Из сравнения заключаем: правые части уравнений (4.26) меньше соответствующих правых частей уравнений (4.27). Значит, из сходимости решения уравнений (4.27) следует сходимость решения уравнений (4.26).

Уравнения (4.27), тем не менее, интегрируются в явном виде. Для нулевых начальных условий: $\xi_i = 0$ (при этом $\alpha_i$ — начальные условия исходной задачи) имеем: $\eta_1 = \ldots = \eta_n = \eta$, или $\dot{\eta} = M\varepsilon/\big[\,(1-\varepsilon)(1-n\eta)\,\big]$. Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Mn\varepsilon t}{1-\varepsilon}}\right) \tag{4.28}$$

при начальных условиях: $\eta = 0$ (где $t = 0$, $\varepsilon = 0$). Сходимость разложения (4.28) в степенной ряд по $\varepsilon$ будет иметь место при выполнении неравенства: $\big|\,2Mn\varepsilon t/(1-\varepsilon)\,\big| < 1\ \forall\, t \in [\,0, T\,]$, т.е. при условии: $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_0 = 1/\big(1 + 2nMT\big)$. Поскольку метод последовательных приближений дает единственный результат, то он должен совпадать с разложением величины (4.28). Отсюда вытекает, что ряды для $\xi_i$ сходятся при $t \in [0, T]$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где $M$ — верхняя оценка всех коэффициентов в (4.24). При достаточно большом $T$ ряды будут сходиться, вообще говоря, при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим далее систему ДУ

$$\dot{x}_i = g_i(x,t) + \varepsilon\, f_i(x,\varepsilon,t), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.29}$$

При замене введенных выше величин $\alpha_i$ на решения $x_{i0}(t)$ системы (4.29) при $\varepsilon = 0$, и определяя $\xi_i = x_i - x_{i0}$, можно найти, что коэффициенты $\xi_p^{(i)}$ удовлетворяют ДУ вида

$$\dot{\xi}_p^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)}\, \xi_p^{(j)} + F_p^{(i)}\big(\xi_k^{(l)},\, t\big), \tag{4.30}$$

где $i, l = \overline{1,n}$, $k = \overline{1, p-1}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ .

В этих уравнениях функции $\varphi_j^{(i)}$ не зависят от номера $p$, т.е. решения однородных уравнений, соответствующих неоднородным уравнениям (4.30), одинаковы $\forall\, p$. Функции $\varphi_j^{(i)}$ зависят явно от $t$ и от величин $x_{i0}(t)$. Постоянные интегрирования для системы (4.30) можно выбрать так, чтобы $\xi_p^{(i)} = 0$ при $t = 0$.

Решение системы уравнений

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\, \xi_j + k_i(t), \qquad i = \overline{1,n},$$

мажорируется на промежутке времени $[0, T]$ решением системы

$$\dot{\eta}_i = M \sum_{j=1}^{n} \eta_j + M, \qquad i = \overline{1,n},$$

где $M$ — верхняя оценка функций $\varphi_{ij}(t)$ и $k_i(t)$ в интервале $[0, T]$ (это можно показать с помощью классического метода приближений Пикара). Также как и выше, с использованием мажорирующих



функций, определяемых решением уравнений

$$\dot{\eta}_i = \frac{M\,(\varepsilon + \eta_*)}{1 - (\varepsilon + \eta_*)}, \qquad \eta_* \equiv \eta_1 + \ \ldots\ + \eta_n,$$

можно показать, что ряды для $\xi_i$ сходятся на промежутке времени $[0, T]$ при $|\varepsilon| < \exp(-MnT)$, где $M$ — верхняя оценка коэффициентов уравнений (4.29) при том, что $\xi_i$ представимы в виде рядов по $\varepsilon$.

**4.2.2. Метод Пуанкаре.** Метод последовательного подбора частот системы в виде метода Линдстедта (см. раздел: Задачи и упражнения) может быть применен к любой регулярной системе обыкновенных ДУ, в том числе и к системе, записанной в нормальной форме. Пусть система имеет вид (скалярный a) или векторный b)):

$$a)\ \dot{x}_i = f_i(x,t,\varepsilon), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad\qquad b)\ \dot{x} = f(x,t,\varepsilon). \tag{4.31}$$

Приведем систему (4.31) к каноническому виду, определив вектор канонически сопряженных обобщенных импульсов $y\,(y_i,\ i = \overline{1,n})$ и гамильтониан: $H = f^*(x,t,\varepsilon)\,y$, где $*$ сверху, как обычно, означает знак транспонирования. Уравнения движения тогда запишутся так:

$$\dot{x} = H_y^* = f(x,\varepsilon,t), \qquad H_y \equiv \frac{\partial H}{\partial y},$$
$$\dot{y} = -\,H_x^* = -\,f_x(x,\varepsilon,t)\,y, \qquad H_x \equiv \frac{\partial H}{\partial x},$$

где введена матрица $f_x = \partial f/\partial x$.

Сделаем несколько допущений. Предположим, что система ДУ

$$\dot{\xi} = f(\xi,t,0), \qquad\qquad \dot{\eta} = -\,f_\xi(\xi,t,0)\,\eta$$

интегрируема в некоторой области $D$ $2n$–мерного фазового пространства $(\xi,\eta)$ при $t \in [0, T]$. Предположим также, что вектор-функция $f(x,t,\varepsilon) \in C^2(D)$, непрерывна по $t$, $t \in [0, T]$ и аналитична по $\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Очевидно, что такие же свойства имеет функция $H$.

Поставим вопрос (при сравнении с результатами предыдущего раздела) о получении оценки лучшей, чем оценка $|\varepsilon| < \exp(-MnT)$ для системы (4.29). Запишем гамильтониан системы (4.29):

$$H = \sum_{i=1}^{n} y_i\, g_i(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i(x,\varepsilon,t) = H_0 + \varepsilon H_1.$$

Соответствующая каноническая система уравнений тогда имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} = g_i + \varepsilon f_i, \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_j y_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \varepsilon \sum_j y_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Будем считать, что при $\varepsilon = 0$ система

$$\dot{x}_i = g_i(x,t), \qquad \dot{y}_i = -\sum_j y_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \tag{4.33}$$

интегрируема. В самом деле, первая группа уравнений (4.33) интегрируема согласно введенному ранее допущению; пусть она имеет решение $x_i = x_{i0}(t)$. Подставляя эти выражения во вторую группу уравнений (4.33), придем к системе линейных уравнений: $\dot{y}_i = \sum_j a_{ij}(t)\, y_j$, которая интегрируема на интервале, где определено решение $x_{i0}(t)$. Запишем решение системы (4.33) в виде

$$x_i = x_{i0}(\alpha,\beta,t), \qquad y_i = y_{i0}(\alpha,\beta,t), \tag{4.34}$$

где

$$x_{i0}(\alpha,\beta,0) = \alpha_i, \qquad y_{i0}(\alpha,\beta,0) = \beta_i.$$

Для дальнейшего нам потребуются результаты теоремы Якоби. Пусть имеется гамильтонова система $\dot{z} = f(z,t)$, переписанная в виде

$$\dot{z} = MH_z^*, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$



где $z$ — $2n$–мерный вектор, $H = H(z,t)$, $M$ — каноническая матрица размерности $2n \times 2n$, $I$ и $0$ — единичная и нулевая матрицы размерности $n \times n$.

Пусть $H = H_0 + H_1$. Если вектор $\sigma$ — первый интеграл системы (4.35) при $H = H_0$, т.е. $\sigma$ находится в инволюции с $H_0$, то

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} M \left(\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)^*. \tag{4.36}$$

Если, помимо этого, *матрица Якоби* $J = \partial\sigma/\partial z$ является *симплектической* (преобразование $z \to \sigma$ каноническое), то отсюда следует соотношение

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} M \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^* \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma}\right)^* = M \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma}\right)^*,$$

которое приводит к следующей *теореме Якоби.*

**Теорема 4.3.** *Если $\sigma$ является $2n$–мерным вектором, то уравнения* (4.36) *являются уравнениями Лагранжа для вариаций произвольных постоянных в случае не зависящих от времени сил.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что решение системы (4.32) может быть представлено в виде (4.34), если $\alpha, \beta$ — функции времени, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\alpha}_i = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.37}$$

Отметим, что система (4.37) имеет вид системы (4.23), а значит, к ней можно применить метод последовательных приближений с критерием сходимости: $|\varepsilon| < 1/(1 + 4nM_*T)$, который при $M_* \approx M$ является лучшей оценкой, чем оценка $|\varepsilon| < \exp(-MnT)$ для системы (4.29).

Далее изучим принципы метода Линдстедта [52], использованного Пуанкаре применительно к каноническим системам. Пусть имеется автономная динамическая система с гамильтонианом

$$H = H(y,x,\varepsilon), \tag{4.38}$$

где $y, x$ — $2n$–мерные векторы, $\varepsilon \in [\,0,1\,]$ — безразмерный постоянный параметр, $H$ — вещественная аналитическая функция в некоторой области $D$ фазового пространства размерности $2n$.

Основная функция Гамильтона $W(y, X, \varepsilon)$ определяется решением уравнения в частных производных

$$H\left(y,\, \frac{\partial W}{\partial y},\, \varepsilon\right) = K(X, \varepsilon), \tag{4.39}$$

где $K(X, \varepsilon)$ — гамильтониан системы, выраженной с помощью новых переменных $Y, X$, определяемых уравнениями

$$Y_k = \frac{\partial W}{\partial X_k} = Y_k(y, X, \varepsilon), \qquad x_k = \frac{\partial W}{\partial y_k} = x_k(y, X, \varepsilon). \tag{4.40}$$

Предположим, что система ДУ, соответствующих функции $H(y, x, 0) = H_0(y, x)$, интегрируема в смысле Лиувилля, т.е. в $D$ существует $n$ независимых первых общих интегралов движения. Рассмотрим задачу, в которой функция Гамильтона $W(y, X, 0)$ является производящей функцией тождественного преобразования, т.е. $W(y, X, )) = y^* X$. Будем считать, что функция $W$ является аналитической по $\varepsilon$ и при достаточно малых $\varepsilon$ имеет место разложение

$$W(y, X, \varepsilon) = y^* X + \varepsilon\, S(y, X, \varepsilon), \tag{4.41}$$

где степенной ряд по $\varepsilon$ :

$$S(y, X, \varepsilon) = S_1(y, X) + \varepsilon\, S_2(y, X) + \ \ldots \tag{4.42}$$

является сходящимся. Отсюда вытекает, что выражения (4.40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Y_k &= y_k + \varepsilon\, \frac{\partial S}{\partial X_k} = y_k + \varepsilon\, F_k(y, X, \varepsilon), \\ x_k &= X_k + \varepsilon\, \frac{\partial S}{\partial y_k} = X_k + \varepsilon\, G_k(y, X, \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.43}$$

при достаточно малом $\varepsilon$ и $k = \overline{1, n}$. При сделанных предположениях можно показать, что существуют формальные ряды (4.42), которые



являются решением уравнения (4.39) с точностью до любой степени по $\varepsilon$.

Далее введем понятие *среднего значения* $< f >$ условно-периоди-ческой функции $f(y_1, \ldots, y_n)$ переменных $y_k = \omega_k\, t + y_k^0$, где $\omega_k$ — постоянные величины, линейно независимые на множестве целых чисел, с помощью выражения

$$< f >= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f\, dt. \tag{4.44}$$

Условно-периодическая функция $f$ при $< f >= 0$ называется *чисто условно-периодической*. Если $f$ представить в виде ряда Фурье по $n$ угловым переменным $y_1, \ldots, y_n$, то $< f >$ будет равно постояному члену в ряде Фурье. В общем случае, когда $< f >= 0$, имеем: $\lim_{T\to\infty} \int_0^T f\, dt < \infty$, что является следствием определения (4.44) для условно-периодической функции $f \in L_2$, где $t \in R$. Функция $F(t)$, для которой $\lim_{t\to\infty} F(t) < \infty$, называется функцией, *свободной от секулярных членов*. Любая условно-периодическая функция $f \in L_2$ удовлетворяет данному условию. Более того, из предположения, что система с функцией Гамильтона $H_0$ интегрируема, получим, что гамильтониан $H(y, x, \varepsilon)$, записанный через переменные действие–угол $y, x$, является условно-периодической функцией при том, что он имеет сходящиеся многомерные ряды Фурье относительно $y_1, \ldots, y_n$ при $\varepsilon \in [\,0, 1\,]$ и $x, y \in D$.

Подставляя соотношения (4.41) и (4.42) в уравнение (4.39), получим формальные ряды для $S$ и $K$ :

$$H\left(y,\, \frac{\partial W}{\partial y},\, \varepsilon\right) = H\left(y,\, X + \varepsilon\, \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2\, \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ \ldots, \varepsilon\right),$$

$$K(X, \varepsilon) = K_0(X) + \varepsilon\, K_1(X) + \varepsilon^2\, K_2(X) + \ \ldots .$$

Первое из этих выражений разложим в сходящийся (по предположению) ряд Тейлора:

$$H\left(y,\, \frac{\partial W}{\partial y},\, \varepsilon\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k H}{\partial x^k}\bigg|_{x=X} \left(\varepsilon\, \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2\, \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ \ldots\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \frac{\partial^k H_p}{\partial x^k}\Big|_{x=X} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ \ldots\right)^k =$$

$$= H_0(X) + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial X} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^* + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 H_0}{\partial X^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^* + \ \ldots +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial H_0}{\partial X} \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^* + \ \ldots \ + \varepsilon H_1(y, X) + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, X)}{\partial X} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^* +$$

$$+ \ \ldots \ + \varepsilon^2 H_2(y, X) + \ \ldots, \qquad \frac{\partial H_k}{\partial X_l} \equiv \frac{\partial H_k}{\partial x_l}\Big|_{x=X}.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$ в любом порядке приближения приводит к уравнениям вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_0}{\partial X_k} \frac{\partial S_p}{\partial y_k} + \Phi_p(y, X) + H_p(y, X) = K_p(X). \tag{4.45}$$

К примеру, в этих уравнениях

$$\Phi_1(y, X) = 0,$$

$$\Phi_2(y, X) = \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0}{\partial X_k \, \partial X_l} \frac{\partial S_1}{\partial y_k} \frac{\partial S_1}{\partial y_l} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial X_k} \frac{\partial S_1}{\partial y_k}.$$

Отметим, что $\Phi_p(y, X)$ является функцией от $S_1$, ..., $S_{p-1}$, $K_1$, ..., $K_{p-1}$, поэтому решения уравнений (4.45) получаются лишь последовательно.

Для нахождения $K_p(X)$ можно воспользоваться *процедурой усреднения*

$$K_p(X) =< \Phi_p(y, X) + H_p(y, X) >,$$

где считается, что все $y_k$ представляются линейными функциями времени: $y_k = \omega_k^0 \, t + y_k^0$, а все $\omega_k^0$ линейно независимы на множестве целых чисел. При этом найденная функция $K_p(X)$ от времени $t$ не зависит. Значит, функция

$$F_p = \Phi_p + H_p - K_p = F_p(y, X)$$



является чисто условно-периодической в предположениях относительно функции $H(y, x, \varepsilon)$.

Приближение $p$–го порядка для производящей функции $S_p$ получается из линейного уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_k} + F_p(y, X) = 0, \qquad \omega_k^0 \equiv \frac{\partial H_0}{\partial X_k}.$$

Таким образом, если все $\omega_k^0 \neq 0$, то функция $S_p$ будет условно-периодической функцией переменных $y_1$, ..., $y_n$, причем свободной от секулярных членов, т.е. для линейно независимых на множестве целых чисел $\omega_k^0$ имеем

$$S_p(y, X) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k^0} \int F_p(y, X) \, dy_k + G_p(X),$$

где $G_p(X)$ — произвольная функция.

**4.2.3. Быстрые и медленные переменные.** Исследуем случай, при котором в $H_0$ отсутствуют некоторые импульсы. Пусть $x_{p+1}$, ..., $x_n$ — импульсы, не входящие в $H_0$. Рассмотрим тогда уравнения, соответствующие гамильтониану

$$H = H_0(x_1, \, \ldots, \, x_p) + \varepsilon \, H_1(x_1, \, \ldots, \, x_n, \, y_1, \, \ldots, \, y_n) + \ \ldots,$$

т.е.

$$\dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad \dot{x}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} = -\,\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial y_k} + \ \ldots.$$

Отсюда получим, что в нулевом приближении переменные $x_k$ — константы, а $y_k$ — линейные функции времени ($k = \overline{1, p}$) или также константы ($k = \overline{p+1, n}$). При подстановке этого результата в уравнения движения, после усреднения их по $y_1$, ..., $y_p$, в первом приближении будем иметь

$$y_k = \omega_k(x) \, t + y_k^0, \qquad x_k = x_k^0,$$

где частоты: $\omega_k = \omega_k^0 + \varepsilon \omega_k^1$ ($k = \overline{1, p}$) и $\omega_k = \varepsilon \omega_k^1$ ($k = \overline{p+1, n}$).

Эти зависимости служат основанием, чтобы назвать угловые переменные $y_1$, ..., $y_p$ (сопряженные к импульсам $x_1$, ..., $x_p$, входящим в $H_0$) *быстрыми*, а угловые переменные $y_{p+1}$, ..., $y_n$ (сопряженные к импульсам, отсутствующим в гамильтониане $H_0$) — *медленными переменными*.

Для этого случая рассмотрим вопрос о существовании формальных рядов, представляющих производящую функцию метода Пуанкаре.

Исключение быстрых переменных достигается так, чтобы новый гамильтониан содержал только медленные переменные. А именно, строится производящая функция в виде формального ряда

$$W(y, X, \varepsilon) = y^* X + \varepsilon\, S_1(y, X) + \ \dots\,,$$

аналогичного рядам (4.41), (4.42), (4.43). Потребуем выполнения закона сохранения энергии в виде

$$H(y, x, \varepsilon) = K\big(Y_{p+1},\, \dots,\, Y_n,\, X,\, \varepsilon\big)$$

и таким образом, чтобы исходная система сводилась к системе с числом степеней свободы, равным $n-p$. Это всегда возможно, поскольку при определении $m$–го приближения уравнение, которое надо проинтегрировать, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_k(X)\, \frac{\partial S_m}{\partial y_k} + F_m(y, X) + H_m(y, X) \ = \ = \ K_m\big(y_{p+1},\, \dots,\, y_n,\, X,\, \varepsilon\big),$$

где $K_m$ определяется усреднением функции $F_m + H_m$ по быстрым переменным.

Новый гамильтониан получим в виде формального ряда, причем в предположении, что такие ряды сходятся, задача сводится к исследованию уравнений движения с гамильтонианом

$$K = K_0(X) + \varepsilon\, K_1\big(Y_{p+1},\, \dots,\, Y_n,\, X\big) + \ \dots \ = \ = \ K\big(Y_{p+1},\, \dots,\, Y_n,\, X,\, \varepsilon\big), \tag{4.46}$$

где постоянные импульсы $X_1$, ..., $X_p$ играют роль параметров.



В случае сходящихся рядов выражения

$$x_k = X_k + \varepsilon\, \frac{\partial S(y, X, \varepsilon)}{\partial y_k}, \qquad k = \overline{1, p},$$

представляют собой первые интегралы исходной системы, которые зависят от $p$ параметров $X_1$, ..., $X_p$, принимающих произвольные значения.

При выполнении достаточно простых условий теперь можно исключить медленные переменные. В соотношении (4.46) функция $K_0(X)$ зависит только от $X_1$, ..., $X_p$, т.е. является константой движения. Гамильтониан, следовательно, может быть записан в виде

$$\varepsilon F = \varepsilon\, F_1(q, p) + \varepsilon^2\, F_2(q, p) + \ \dots \ = \ \varepsilon\, F(q, p, \varepsilon),$$

где $q = \big(Y_{p+1},\, \dots,\, Y_n\big)$, $p = \big(X_{p+1},\, \dots,\, X_n\big)$, а параметры $X_1$, ..., $X_p$ можно дальше не рассматривать. Уравнения движения тогда принимают простой вид

$$\dot{q}_k = \varepsilon\, \frac{\partial F}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\,\varepsilon\, \frac{\partial F}{\partial q_k}, \qquad k = \overline{1, n-p}.$$

Если $n - p = 1$, система тогда обладает одной степенью свободы и задача, в принципе, теоретически разрешима. Если $n - p \geq 2$, интегрирование осуществимо методом последовательных приближений при том условии, что главная часть функции $\varepsilon F$, равная $\varepsilon\, F_1(q, p)$, соответствует интегрируемой системе. С этого места далее можно повторить всю процедуру метода Пуанкаре, изложенную ранее. Отметим также, что формально задачу можно решить полностью и до конца, если функция $F_1(q, p)$ не зависит ни от одной переменной $q$ и содержит все переменные $p$, т.е. переменные $X_{p+1}$, ..., $X_n$.

## 4.3 Асимптотические методы оптимального управления

В этом параграфе представлены некоторые общие подходы и описание постановок задач оптимального управления движением (принцип максимума, вариационное исчисление, динамическое программирование) возмущенных динамических систем в расчете на использование методов малого параметра (усреднения, регулярных и сингулярных возмущений) [4]. С помощью сочетания асимптотических методов нелинейной механики и методов теории оптимального управления удается разработать эффективный математический аппарат для анализа и приближенного решения задач синтеза [1, 2, 4, 5, 45-47, 85, 111, 121, 122, 170-172].

Отметим, что методы построения законов управления движением сложных нелинейных динамических систем, их оптимизации, а также необходимости учета возмущающих воздействий на их движения находятся в центре научных интересов многих исследователей. Конструктивное решение задач управления движениями сложных МС, их оптимизации на фоне действия возмущающих сил, как правило, встречает значительные аналитические и вычислительные трудности. В этой связи при решении практической задачи построения оптимальной схемы синтеза оказывается весьма актуальной разработка приближенных асимптотических методов, допускающих существенное упрощение решения этой оптимизационной задачи с помощью вычислительных процедур.

В основе методов теории возмущений лежит идея малого параметра. На управляемые системы часто воздействуют малые возмущения, слабо влияющие на само движение. Тем не менее, на большом промежутке времени возмущения могут накапливаться и приводить к значительному изменению состояния системы. Поэтому при синтезе управлений (в том числе и оптимальных) важно уметь оценить степень влияния этих малых возмущений на общий характер движения системы.

Укажем на то, что методы малого параметра обладают достаточно высокой эффективностью при том, что упрощенные (так называемые порождающие) задачи (задачи первого приближения) могут быть решены существенно проще, чем исходные. Более того, асимптотические методы приводят к более простым, как правило, линейным системам (более низкой размерности, чем у исходной системы), позволяют разделить медленные и быстрые движения. Они приводят в оптимальной задаче к построению простых приближенных квазиоптимальных законов управления и допускают вести учет влияния возмущающих факторов на качество движения всей управляемой динамической системы.



Ниже обсуждаются некоторые постановки задач оптимального управления движением возмущенных динамических систем и методы их исследования на основе материала работы [4]. Пусть имеется конечномерная система общего вида

$$\dot{r} = R(t, r, u, \mu), \qquad r(t_0) = r^0(\mu), \tag{4.47}$$

где $r$ — вектор фазовых координат и переменных параметров системы, $r \in D_r$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $t \in [\, t_0, T\,]$, $T < \infty$, $u \in U$ — вектор управляющих функций из допустимого класса со значениями из фиксированной выпуклой области $U$ :

$$u \in U(\mu), \qquad u = u(t, \nu), \qquad \text{либо} \qquad u = u(t, r, \mu). \tag{4.48}$$

Здесь $\mu$ — вектор постоянных параметров, $\mu \in D_\mu = \text{const}$ — некоторая область; $t_0$, $r^0$ — заданные начальные значения. Допускается, чтобы $t_0 = t_0(\mu)$, $T = T(\mu)$. Множества $D_r, D_\mu$ — фиксированные и связные, причем $D_r$ — открытая область. Управление $u \in U$, $U$ — множество допустимых управлений в виде кусочно-непрерывных по $t$ и кусочно-гладких по $r$ функций.

Целевое условие при окончании процесса регулирования задается векторным равенством

$$Q(t, r, \mu)\,\big|_{t=T} = 0, \qquad Q = (Q_1, \ldots, Q_k) \tag{4.49}$$

в предположении, что соотношения (4.49) непротиворечивы.

Качество управления характеризуется минимизируемым функционалом, который задается на траекториях управляемого движения так:

$$J_\mu[\,u\,] = \Phi(t, r, \mu)\,\big|_{t=T} \;\to \min_{u \in U(\mu)}. \tag{4.50}$$

Считается, что функционал $J_\mu[\,u\,]$ определяется скалярной функцией конечных значений фазового вектора $r$ и времени $t$. Помимо этого, предполагается, что все введенные функции и граница множества допустимых управлений $U$ являются достаточно гладкими в рассматриваемой области изменения аргументов

$$(t, r, u, \mu) \in [\, t_0, T\,] \times D_r \times U \times D_\mu. \tag{4.51}$$

Задача оптимального управления (4.47) – (4.51) ставится следующим образом: требуется найти допустимое управление в форме программы $u = u_p(t, \mu)$ или в форме синтеза (обратной связи) $u = u_s(t, r, \mu)$, которые однозначно определяют движение системы, в построении оптимальной траектории $r = r(t, t_0, r^0, \mu)$, $t \in [\, t_0, T\,]$, доставляющей минимум функционалу $J_\mu[\,u\,]$, и в вычислении момента $T(\mu)$ окончания процесса регулирования, если $T$ не задано.

Укажем еще на то, что вышеприведенная постановка задачи оптимального управления движением динамической системы с параметром отличается от соответствующей постановки задачи оптимального управления с управляющим параметром (см. работы [32, 125]).

Поставленную задачу оптимального управления (4.47) – (4.51) можно решать с помощью *принципа максимума* [125], дающего необходимые условия локальной оптимальности управления $u_*(t)$ из класса кусочно-непрерывных функций. С этой целью вводится функция Гамильтона $H$ :

$$H = p^* R, \qquad R = R(t, r, u, \mu), \tag{4.52}$$

где $p$ — $n$–вектор, сопряженный $r$ :

$$\dot p = -\,\frac{\partial H_*}{\partial r} = -\,p^*\,\frac{\partial R_*}{\partial r}, \qquad H_* \equiv H\,\Big|_{u_*}, \quad R_* \equiv R\,\Big|_{u_*}. \tag{4.53}$$

Вектор $p(t)$ удовлетворяет на правом конце траектории при $t = T$ условию трансверсальности

$$p\,\Big|_T = \frac{\partial}{\partial r}\,\big[\,\lambda^* Q - \Phi\,\big]\,\Bigg|_T, \tag{4.54}$$

где $\lambda$ — $k$–вектор постоянных множителей Лагранжа.

Принцип максимума в виде необходимого условия оптимальности заключается в том, что для оптимальности процесса управления $u_*(t)$ и соответствующей траектории $r_*(t)$ необходимо существование такого вектора $p(t)$, что функция $H$ (4.52) удовлетворяет условию

$$H_* = \sup_{u \in U}\ H, \qquad t \in [\, t_0, T\,], \tag{4.55}$$



где $p(t)$ — решение линейной системы (4.53), удовлетворяющее условию трансверсальности (4.54). Помимо этого, функция $H_*$ должна удовлетворять условию трансверсальности

$$H_*\,\Big|_T = -\,\frac{\partial}{\partial t}\,\big[\,\lambda^* Q - \Phi\,\big]\,\Bigg|_T. \tag{4.56}$$

Если максимум функции $H$ в соответствии с соотношением (4.55) достигается, где достаточно гладкая функция $u$ однозначно определяется как

$$u = u_*(t, r, p, \mu), \qquad u_* = \arg\max_{u \in U}\ H, \tag{4.57}$$

то при подстановке ее в функции, содержащие управление, получим замкнутую двухточечную краевую задачу принципа максимума. Эта задача описывается гамильтоновой системой уравнений и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \dot r &= \frac{\partial H_*}{\partial p} = R_*(t, r, p, \mu), \\ \dot p &= -\,\frac{\partial H_*}{\partial r} = -\,\frac{\partial}{\partial r}\,\big(p^* R_*\big), \end{aligned} \tag{4.58}$$

где

$$H_* \equiv H\,\Big|_{u_*}, \qquad R_* \equiv R\,\Big|_{u_*}, \qquad r(t_0) = r^0, \qquad Q\,\Big|_T = 0,$$

а величины $p\,\Big|_T$, $H_*\,\Big|_T$ удовлетворяют условиям трансверсальности (4.54) и (4.56) соответственно.

Обратим внимание, что в уравнениях (4.58) применено свойство дифференцируемости функции максимума [51], справедливое при $U = \mathrm{const}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial p}\,\Bigg|_{u_*} = \frac{\partial H_*}{\partial p}, \qquad \frac{\partial H}{\partial r}\,\Bigg|_{u_*} = \frac{\partial H_*}{\partial r}.$$

Среди решений краевой задачи принципа максимума (4.58) есть оптимальное. В случае единственного решения оно является и оптимальным. Если же решение неединственно, то для определения оптимального надо прибегнуть к функционалу $J_\mu[\,u\,]$ (4.50).

Итак, схема решения задачи оптимального управления (4.47) – (4.51) состоит в операции нахождения функции $u_*$ (4.57), доставляющей максимум функции Гамильтона $H$ в заданной области $U$ при фиксированных $t, r, p, \mu$ и решении краевой задачи принципа максимума (4.58):

$$r = r_*(t, t_0, r^0, T, \mu), \quad p = p_*(t, t_0, r^0, T, \mu), \quad t \in [\,t_0, T\,],$$

$$T = T(\mu), \quad \text{либо} \quad T = T_*(t_0, r^0, \mu), \quad u = u_*(t, r_*, p_*, \mu), \qquad (4.59)$$

с последующим выбором оптимального решения в соответствии с выражением (4.50), если решение неединственно. Случай, когда функция $u_*$ находится из условия (4.55) неоднозначно (это имеет место, к примеру, при $p \equiv 0$), приводит к особым вырожденным управлениям. Укажем еще на то, что аналитическое решение вида (4.59) краевой задачи принципа максимума удается построить достаточно редко.

Прикладные задачи оптимального управления часто содержат малые параметры, характеризующие величины различных воздействий. Векторный малый параметр $\delta$ можно ввести так: $\mu = \mu_0 + \delta$, $\delta \in D_\delta$, $\delta = 0 \in D_\delta$, где $\mu_0$ — невозмущенное значение, для которого решение краевой задачи (4.58) строится относительно просто. Ставится задача о построении решения при $|\,\delta\,| > 0$ достаточно малом.

Часто, однако, бывает удобнее пользоваться некоторым скалярным малым числовым параметром $\varepsilon \geq 0$. Его можно ввести, например, так:

$$\mu = \mu(\varepsilon) = \mu(0) + \varepsilon\mu_1 + \;\dots\,\dots, \qquad \varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,], \quad \varepsilon_0 \ll 1. \qquad (4.60)$$

Отсюда становится понятной важность разработки эффективных методов приближенного построения искомого решения (4.59), основанных на методах малого параметра. Добавим к этому, что асимптотические методы исследования динамических систем широко используются в нелинейной механике, в теории нелинейных колебаний и других прикладных областях [1-3, 5, 22-24, 30, 33, 34, 40, 41, 45, 47, 111, 116, 167].

Рассмотрим случай (4.60), где $\varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,]$. Введем ряд упрощающих допущений. Считается, что по отношению к параметру $\varepsilon$ размер области управлений $U_\varepsilon$ определяется приближением: $|\,u\,| \sim 1$. Функции $Q, \Phi$ предполагаются регулярно возмущенными:



$$\begin{aligned} Q &= Q(t, r, \varepsilon) = Q_0(t, r) + \varepsilon\, Q_1 + \varepsilon^2 \dots, \\ \Phi &= \Phi(t, r, \varepsilon) = \Phi_0(t, r) + \varepsilon\, \Phi_1 + \varepsilon^2 \dots . \end{aligned} \qquad (4.61)$$

Фазовый вектор $r$ может содержать медленную $x$, быструю $y$ и сингулярную $z$ составляющие, т.е. для функции $R$ имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned} R_x &= \varepsilon\, X_1(t, x, y, z, u) + \varepsilon^2 \dots, && X_i \sim 1, \quad i \geq 1, \\ R_y &= Y_0(t, x, y, z, u) + \varepsilon\, Y_1 + \varepsilon^2 \dots, && Y_j \sim 1, \quad j \geq 0, \\ R_z &= \frac{1}{\varepsilon}\, Z_{-1}(t, x, y, z, u) + Z_0 + \varepsilon \dots, && Z_k \sim 1, \quad k \geq -1, \end{aligned} \qquad (4.62)$$

где

$$R = \bigl(R_x, R_y, R_z\bigr), \qquad n_x + n_y + n_z = n, \quad t \in [\,0, T\,],\ T = T(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,], \qquad (x, y, z, u) \in D_x \times D_y \times D_z \times U_\varepsilon.$$

Если $Z_{-1} \not\equiv 0$, т.е. $n_z \neq 0$, то задача оптимального управления (4.47) – (4.51) и краевая задача принципа максимума (4.58) становятся сингулярно возмущенными и их порядки соответственно уменьшаются на $n_z$ и $2n_z$. В этом случае применяются асимптотические методы обыкновенных ДУ с малым параметром при производных.

При $\varepsilon = 0$ получим конечное уравнение $Z_{-1} = 0$, которое определяет изолированный, по предположению асимптотически устойчивый корень $z = \tilde{z}(t, x, y, u)$. Подстановка $\tilde{z}$ в $R_x, R_y$ (4.62) при допущении о независимости $Q, \Phi$ (4.61) и регулярности управления $u$ в первом приближении по $\varepsilon$ приводит к регулярно возмущенной вырожденной задаче меньшей размерности. Выдвигая определенные условия гладкости, можно установить определенные свойства близости исходной и упрощенной краевых задач по переменным $x$ и $y$.

Рассмотрим далее возмущенную управляемую систему, содержащую только медленную $x$ и быструю $y$ векторные переменные, т.е. будем считать, что $r = (x, y)$. Задача оптимального управления описывается уравнениями, краевыми условиями и функционалом, следующими из соотношений (4.47) – (4.51):

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon\, X(t,x,y,u,\varepsilon), \qquad x(t_0) = x^0, \\ &\dot{y} = Y_0(t,x,y,u) + \varepsilon\, Y(t,x,y,u,\varepsilon), \qquad y(t_0) = y^0, \\ &Q(t,x,y,\varepsilon)\big|_T = 0, \qquad J_\varepsilon[\,u\,] = \Phi(t,x,y,\varepsilon)\big|_T \to \min_{u \in U_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

При анализе задачи оптимального управления (4.63) и соответствующей краевой задачи принципа максимума, вытекающей из (4.58), относительно величины интервала времени процесса управления движением системы различают два случая. 1. Если интервал времени $T - t_0$ равномерно ограничен $\forall\, \varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,]$, то имеет место регулярный вариант метода возмущений, приводящий к регулярным разложениям. 2. Если управления малы и порядка $\varepsilon$, а момент времени $T \to \infty$ асимпотически при $\varepsilon \to 0$ (например, когда $T = \theta/\varepsilon,\ \theta \sim 1$), то приходим к нерегулярному варианту с последующим привлечением асимптотических методов разделения медленной и быстрой переменных.

Асимптотические методы разделения движений (усреднения) в задачах оптимального управления можно применить на асимптотически большом интервале времени (движение имеет осциллирующий характер, управления малы) к слабоуправляемой вращательно-колебательной системе (4.63), записанной в стандартном виде с вращающейся фазой:

$$\begin{aligned} &\dot{a} = \varepsilon\, f(a,\psi,u,\varepsilon), \qquad a(t_0) = a^0,\ a \in D_a, \\ &\dot{\psi} = \omega(a) + \varepsilon\, F(a,\psi,u,\varepsilon), \qquad \psi(t_0) = \psi^0,\ \psi \in D_\psi, \end{aligned} \tag{4.64}$$

где

$$a = \big(a_1, ..., a_{n_a}\big), \qquad n_a \geq 1, \quad \psi = \big(\psi_1, ..., \psi_{n_\psi}\big), \quad n_\psi \geq 1,$$

$$\omega_i(a) \geq \omega_i^0 > 0, \qquad i = \overline{1, n_\psi}, \quad t \in [\,t_0, T\,], \quad T = \theta/\varepsilon.$$

В соотношениях (4.64) конечные условия и функционал идентичны (4.63); здесь $a$ — медленный вектор, изменяющийся в ограниченной области $D_a$, $\psi$ — вращающаяся фаза с неограниченными значениями. Возмущающие функции $f, F$ считаются периодическими (квазипериодическими) по $\psi$, $\omega(a)$ — переменные частоты. Для заданной функции $u$ исследовать краевую задачу можно с помощью математического аппарата метода усреднения Крылова–Боголюбова [3, 5, 30, 39-42, 45, 102, 108, 109, 116, 159, 163, 164].



Данный метод использует приближенное по степеням $\varepsilon$ преобразование исходной системы уравнений краевой задачи к более простой, которая не содержит быстрой переменной (фазы $\psi$) в правой части уравнений для медленных переменных. В результате уравнения для управляемых медленных переменных отделяются. Размерность краевой задачи при этом может уменьшиться. Введение медленного времени $\tau = \varepsilon t$ позволяет проинтегрировать усредненные медленные переменные на относительно коротком интервале времени $\tau \in [\,\tau_0, \theta\,]$, $\tau_0 = \varepsilon t_0$.

Рассмотрим далее кратко вопрос о методах регулярных возмущений и использовании метода динамического программирования. Речь идет о том, что в случае ограниченной величины $T$, $\varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,]$, имеет место регулярно возмущенная задача оптимального управления (4.63). В этом случае можно медленный вектор $x$ не выделять. Делается предположение о том, что решение задачи $\forall\, \varepsilon \in [\,0, \varepsilon_0\,]$ существует и единственно, причем, когда $\varepsilon = 0$, оно может быть построено и поэтому считается известным. Необходимо исследовать вопрос об оценке погрешности невозмущенного решения по функционалу, управлению, траектории и конечным условиям.

Если погрешности, которые вызваны в (4.63) отбрасыванием членов порядка $\varepsilon$, существенны, то тогда возникает задача о построении приближенного решения задачи оптимального управления с учетом малого параметра путем вычисления поправок с достаточной степенью точности $\varepsilon$.

Если в системе (4.63) функция $Y_0$ линейна по $y, u$ (этого можно добиться, прибегая к линеаризации системы), а нелинейности входят в виде малых возмущений, то тогда, очевидно, невозмущенная система является линейной и можно воспользоваться для таких систем хорошо развитыми методами решения задач оптимального управления.

Кроме того, ряд задач управления движением сложных систем со многими степенями свободы можно разделить на подсистемы со слабой связью между ними. Эту связь формально удается описать с помощью малого параметра.

В приложениях часто применим подход, связанный с так называемыми слабоуправляемыми системами. Считается, что при $\varepsilon = 0$ невозмущенная система (4.63) становится неуправляемой, а краевые условия выполняются автоматически. К данной постановке преобразуется исходная задача (4.63). В самом деле, замена $u = u_p(t) + v$, где $u_p(t) \in U_p \subset U_\varepsilon$ — программное управление невозмущенной задачи, для нового управления $v \in V_\varepsilon$ $\big(V_\varepsilon = \oslash$ при $\varepsilon = 0$, $v = 0 \in V_\varepsilon\big)$ приводит к модели системы со слабым управлением.

В задачах построения синтеза оптимального управления возмущенными существенно нелинейными системами целесообразно применение метода возмущений с помощью математического аппарата метода динамического программирования, связанного с решением уравнения Гамильтона–Якоби для функции Беллмана.

Отметим, что для задачи оптимального управления общего вида (4.63) требуется найти функцию Беллмана $S = S(t, r, \varepsilon)$, где $S$ — значение функционала (4.63), соответствующее текущей точке $(t, r)$. Здесь функция $S$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в виде уравнения Гамильтона–Якоби и конечным условиям:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U_\varepsilon} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^* R(t, r, u, \varepsilon) \right] = 0, \tag{4.65}$$

$$S(t, r, \varepsilon)\big|_T = \Phi(t, r, \varepsilon)\big|_T, \qquad Q(t, r, \varepsilon)\big|_T = 0. \tag{4.66}$$

Из условия $\min_{u \in U_\varepsilon}$ в соотношении (4.65) определяем управление $u$ в виде

$$u = u_*\left(t,\, r,\, \frac{\partial S}{\partial r},\, \varepsilon\right), \qquad u_* = \arg\min_{u \in U_\varepsilon} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^* R \right]. \tag{4.67}$$

После подстановки выражения $u_*$ (4.67) в уравнение (4.65) с учетом условий (4.66) получим замкнутую задачу Коши для нелинейного уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^* R\left[t,\, r,\, u_*\left(t,\, r,\, \frac{\partial S}{\partial r},\, \varepsilon\right),\, \varepsilon\right] = 0. \tag{4.68}$$



Требуется построить гладкое решение задачи Коши (4.66), (4.68), удовлетворяющее достаточным условиям оптимальности [32], для значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0\,]$ при допущении, что в случае, когда $\varepsilon = 0$, такое решение известно.

# Задачи и упражнения

Ниже представлены задачи и упражнения по изложенному материалу. Данные задачи можно рассматривать как теоретическое и практическое дополнение к этому материалу. Помимо собственно постановок самих задач каждая из них сопровождается подробными пояснениями и указаниями к решению. Некоторые задачи содержат внутри себя небольшие подзадачи, которые названы упражнениями. Упражнения также снабжены рекомендациями по их решению. Наконец, для сверки полученных ответов и решений можно обратиться к указанным первоисточникам.

Отметим: задача 1 соответствует главе 2, задача 2 — главе 3, задачи 3,4 — главе 4

**1. Стационарные движения волчка Лагранжа.** Рассматривается задача о стационарых движениях тяжелого симметричного твердого тела с массой $m$ и неподвижной точкой $O$ [133]. Ось $O\zeta$ неподвижной системы координат (СК) $O\xi\eta\zeta$ направим вертикально вверх, ось $Oz$ подвижной СК $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом, направим по оси симметрии тела. Пусть $A = B$, $C$ — моменты инерции тела для точки $O$, а центр тяжести тела находится на оси $z$ в точке с координатой $z_0 > 0$.

Изучим вопросы, связанные с устойчивостью (неустойчивостью) стационарных движений этой системы. Для этого определим положение тела в пространстве с помощью углов Эйлера $\theta, \varphi, \psi$. Функция Лагранжа запишется так:

$$L = \frac{1}{2}\left[\, A\,(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + C\,(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2\,\right] - mgz_0\cos\theta.$$

Циклическим координатам $\varphi$ и $\psi$ отвечают первые интегралы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = C\,(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = \beta_2,\\ &\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = A\dot\psi\sin^2\theta + C\,(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\cos\theta = \beta_3. \end{aligned} \qquad (1)$$



Далее запишем функцию Рауса в виде

$$R = L - \dot\varphi\beta_2 - \dot\psi\beta_3 = \frac{1}{2}\,A\dot\theta^2 - W,$$

где потенциальная энергия $W$ приведенной системы, имеющей одну степень свободы, с точностью до произвольной постоянной равна

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{(\beta_3 - \beta_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + mgz_0\cos\theta.$$

Из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = \frac{(\beta_3 - \beta_2\cos\theta)(\beta_2 - \beta_3\cos\theta)}{A\sin^3\theta} - mgz_0\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

найдем стационарные движения твердого тела.

В общем случае при $\sin\theta \neq 0$ решения этого уравнения зависят от двух параметров: $\theta = \theta(\beta_2, \beta_3)$. Если вместо $\beta_2$ и $\beta_3$ взять их выражения (1), то уравнение (2) примет вид

$$\left[\, C\dot\varphi\dot\psi + (C - A)\,\dot\psi^2\cos\theta - mgz_0\,\right]\sin\theta = 0,$$

которое удовлетворяется при любых постоянных значениях $\dot\varphi, \dot\psi$, если $\theta = 0,\ \pi$, а также, если $\dot\varphi, \dot\psi$ и $\theta$ связаны уравнением

$$C\dot\varphi\dot\psi + (C - A)\,\dot\psi^2\cos\theta - mgz_0 = 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) представляет собой известное условие существования регулярной прецессии симметричного твердого тела под действием силы тяжести. Если в этом равенстве положить $\dot\varphi = 0$, то получим условие существования перманентного вращения [133]:

$$(C - A)\,\dot\psi^2\cos\theta - mgz_0 = 0,$$

откуда легко находится величина угловой скорости перманентного вращения.

В случае, когда $\beta_2 = \beta_3 = \beta$, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = \left(\frac{\beta^2}{A\,(1 + \cos\theta)^2} - mgz_0\right)\sin\theta = 0.$$

корни этого уравнения: $\theta = 0,\ \forall\, \beta$ и

$$\theta = \arccos\left(\pm\frac{\beta}{\sqrt{Amgz_0}} - 1\right), \tag{4}$$

если $\beta^2 \le 4\,Amgz_0$. Найденное решение (4) представляет собой регулярную прецессию с угловыми скоростями

$$\dot\varphi = \frac{\beta}{C} - \frac{\beta\cos\theta}{A\,(1+\cos\theta)}, \qquad \dot\psi = \frac{\beta}{A\,(1+\cos\theta)},$$

при условии, что $\theta \ne \pi$.

В случае, когда $\beta_2 = -\beta_3 = \beta$, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = -\sin\theta\left(\frac{\beta^2}{A\,(1-\cos\theta)^2} + mgz_0\right) = 0$$

и имеет корень $\theta = \pi,\ \forall\,\beta$. Отметим, что решения $\theta = 0,\ \pi$ описывают перманентные вращения тела вокруг вертикали с произвольными фиксированными угловыми скоростями $r_0$.

Требуется далее определить коэффициент устойчивости Пуанкаре для приведенной системы с одной степенью свободы. Для этого надо найти величину $\partial^2 W/\partial\theta^2$ на стационарном движении и обосновать приведенные ниже соотношения. В этом, собственно, и состоит предлагаемое задание.

При произвольных значениях $\beta_2, \beta_3$ для стационарного движения, когда $\sin\theta \ne 0$, получим

$$\delta = \frac{(\beta_3 - \beta_2\cos\theta)^2\sin^2\theta + [\,\beta_2\,(1+\cos^2\theta) - 2\beta_3\cos\theta\,]^2}{A\sin^4\theta}.$$

Эта величина положительна, поэтому с учетом теорем 2.5 и 2.15 приходим к выводу о том, что стационарные движения твердого тела в виде регулярных прецессий и перманентных вращений устойчивы, если $\sin\theta \ne 0$.

В рассмотреном частном случае, когда $\beta_2 = \beta_3 = \beta$, имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} = \left(\frac{\beta^2}{A\,(1+\cos\theta)^2} - mgz_0\right)\cos\theta + \frac{2\beta^2}{A\,(1+\cos\theta)^3}\sin^2\theta.$$



Значит, для $\theta = 0$ коэффициент устойчивости Пуанкаре

$$\delta = \frac{\beta^2}{4A} - mgz_0$$

положителен, если выполнено неравенство

$$\beta^2 - 4Amgz_0 > 0, \tag{5}$$

и отрицателен, когда знак неравенства противоположный.

Для $\theta$, задаваемых выражением (4),

$$\delta = \frac{2\beta^2}{A\,(1+\cos\theta)^3}\sin^2\theta > 0.$$

Когда $\beta_2 = -\beta_3 = \beta$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} = -\left(\frac{\beta^2}{A\,(1-\cos\theta)^2} + mgz_0\right)\cos\theta + \frac{2\beta^2}{A\,(1-\cos\theta)^3}\sin^2\theta.$$

Коэффициент устойчивости отсюда для $\theta = \pi$ равен

$$\delta = \frac{\beta^2}{4A} + mgz_0 > 0.$$

Следовательно, в соответствии с теоремами 2.5 и 2.15 стационарные движения (4) и $\theta = \pi$ устойчивы $\forall\,\beta$, а движение $\theta = 0$ устойчиво при наличии условия (5) и неустойчиво — в соответствии с теоремами 2.6 и 2.16 — в противном случае. При замене $\beta$ согласно соотношениям (1) можно неравенство (5) записать в виде условия Майевского (2.21).

Таким образом, подводя итоги анализа устойчивости рассматриваемых движений, можно констатировать, что у симметричного тяжелого тела с неподвижной точкой имеется бесконечно много устойчивых стационарных движений на многообразии двух измерений (при $\theta \ne 0,\ \pi$) или на многообразии одного измерения (при $\theta = 0,\ \pi$). Отметим при этом, что смена устойчивости при $\theta = 0$ происходит в точке бифуркации $M\,(\theta = 0,\ \beta^2 = 4Amgz_0)$.

**2. Одноосная стабилизация твердого тела.** Обратимся к § 3.2 главы 3 с целью применения рассмотренных там теорем для решения задачи одноосной стабилизации вращающегося твердого тела [9, 60, 142]. Зададим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной точки $O$. Выпишем затем динамические уравнения Эйлера для описания вращательного движения тела под действием векторного момента $M$ [84, 117]:

$$\frac{d}{dt}\,(I\omega) + \omega \times I\omega = M, \tag{6}$$

где $\omega$ — вектор угловой скорости, $I$ — тензор инерции тела.

Возьмем два орта $r$ и $s$. Положим вектор $s$ неизменным в абсолютном пространстве, а вектор $r$ неизменным в твердом теле. Отсюда следует, что вектор $s$ вращается относительно прямоугольной СК $Oxyz$, связанной с телом, с угловой скоростью $-\omega$. Имеем

$$\dot{s} = -\,\omega \times s. \tag{7}$$

Зададим момент $M$ по формуле

$$M = -\,A(t)\,\omega - b(t)\,s \times r, \tag{8}$$

где $A(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ матрица, $b(t)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ скалярная функция. Тогда у системы уравнений (6), (7) существует положение равновесия

$$\omega = 0, \qquad s = r. \tag{9}$$

Надо определить условия, которым должны удовлетворять матрица $A(t)$ и функция $b(t)$, чтобы положение равновесия (9) было асимптотически устойчивым. Наметим схему решения.

Пусть $I = I(t)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная, положительно определенная матрица, т.е. тело имеет переменные моменты инерции [16, 117], а $b(t) \equiv b = \mathrm{const} > 0$.

Выберем ФЛ согласно разделу 3.2.1 в следующем виде:

$$V_1 = \frac{b}{2}\,\|\, s - r \,\|^2 + \frac{1}{2}\,\omega^*\,I(t)\,\omega + \theta\omega^*\,I(t)\,s \times r, \quad \theta > 0.$$



Следует показать, что если матрица

$$C(t) = A(t) + A^*(t) + \dot{I}(t)$$

положительно определена, а матрица $A(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то при достаточно малых значениях $\theta$ ФЛ $V_1$ удовлетворяет ограничениям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а значит, положение равновесия (9) будет асимптотически устойчивым по всем переменным.

Если допустить, что на тело одновременно с моментом $M$ действует момент возмущающих сил $M_1$ такой, что в некоторой окрестности положеня равновесия имеет место неравенство

$$\|\, M_1 \,\| \leq \Delta_1\,\|\,\omega\,\| + \Delta_2\,\|\, s - r \,\|, \qquad \Delta_1, \Delta_2 > 0,$$

то тогда с помощью ФЛ $V_1$ (см. теорему 3.3) можно получить оценки допустимых возмущений, не нарушающих асимптотическую устойчивость положения равновесия.

Заметим, что аналогичный способ построения ФЛ (для случая, когда $I, M$ не зависят от времени) с отрицательно определенными производными применялся в работе [142] для решения задач одноосной и трехосной стабилизации твердого тела. В работе [16] установлены условия на матрицы $A(t)$, $I(t)$, совпадающие с вышеналоженными на них условиями для случая, когда в качестве ФЛ использовалась функция со знакопостоянной производной.

Пусть теперь $I$ — постоянная положительно определенная матрица. Предположим также, что момент $M$ определяется формулой (8). Введем в рассмотрение ФЛ

$$V_2 = \frac{1}{2}\,\|\, s - r \,\|^2 + \frac{1}{2\,b(t)}\,\omega^* I\omega + \frac{\theta}{b(t)}\,\omega^* I s \times r, \quad \theta > 0.$$

Обозначим: $\psi = \min_{j=1,2,3}\ \lambda_j(t)$, где $\lambda_j(t)$ — собственные числа матрицы $A(t) + A^*(t) + \beta(t)\,I$.

Надо показать (см. теорему 3.6) с помощью ФЛ $V_2$, что если $\exists\, a_0, b_0, R > 0$ — такие числа, для которых $\forall\, t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\psi(t) \geq a_0, \qquad b(t) \geq b_0, \qquad \|\, A(t) + \beta(t)\,I \,\| \leq R\,b(t)\,\psi(t)$$

то положение равновесия (9) системы (6), (7) асимптотически устойчиво относительно $s$.

Далее рассмотрим еще ФЛ вида

$$V_3 = \frac{b(t)}{2}\,\|\,s - r\,\|^2 + \frac{1}{2}\,\omega^* I\omega$$

и функцию $c(t) = \max\{\,\beta(t);\, -a(t)\,\}$, где $a(t)$ — наименьшее собственное число матрицы

$$I^{-1/2}\left[\,A(t) + A^*(t)\,\right] I^{-1/2}$$

(см. по этому поводу раздел 3.2.3). Следует показать, что если функция $c(t)$ имеет свойства, указанные в теореме 3.9, то положение равновесия (9) системы (6), (7) будет устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно $\omega$.

**3. Движение маятника и метод Линдстедта.** Описанные в § 4.2 главы 4 асимптотические методы приводят к появлению так называемых *секулярных членов* в разложениях, т.е. в рядах, описывающих решение (или в $\xi_p^{(i)}$, если рассматриваются уравнения вида (4.30)) содержатся члены, по крайней мере линейные по $t$. Если этого можно избежать (или если можно функции $\xi_p^{(i)}(t)$ сделать ограниченными $\forall\, t$, условно-периодическими или периодическими), то скорость сходимости рядов улучшается при достаточно малых $\varepsilon$.

Применим метод, описанный в разделе 4.2.1 к уравнению маятника, выявим появление секулярных членов и воспользуемся *методом Линдстедта* [52] для избавления от этих членов. Пусть, простоты ради, начальные условия отвечают колебательному случаю в движении маятника, т.е. колебаниям конечной амплитуды около устойчивого положения равновесия. Запишем уравнение движения в следующем виде:

$$\ddot\theta = -\,\omega_0^2 \sin\theta, \tag{10}$$

где $\omega_0^2 = g/l$, $g$ — ускорение свободного падения, $l$ — длина нити маятника.

Рассмотрим сходящееся разложение $\sin\theta$ в ряд по $\theta$. Затем введем новую переменную по формуле $\theta = \sqrt{\varepsilon}\,x$. Уравнение (10) тогда



запишется так:

$$\ddot x + \omega_0^2 x = -\,\omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{\varepsilon^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{11}$$

В случае бесконечно малых колебаний, когда $\varepsilon = 0$, решение уравнения (11) дается выражением: $x_0(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Рассмотрим далее ряды

$$\xi = x - x_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m\, \xi_m(t),$$

означающие, что решение в окрестности *опорного решения* $x_0(t)$ ищется в виде

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m\, \xi_m(t). \tag{12}$$

Согласно методу, описанному в разделе 4.2.1, следует подставить ряд (12) вместо $x$ в уравнение (11) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$. Запишем несколько приближений в уравнениях

$$\begin{aligned}
&\ddot\xi_1 + \omega_0^2\xi_1 = \frac{1}{3!}\,\omega_0^2 x_0^3, \qquad \ddot\xi_2 + \omega_0^2\xi_2 = \frac{1}{2!}\,\omega_0^2 x_0^2\xi_1 - \frac{1}{5!}\,\omega_0^2 x_0^5,\\
&\ddot\xi_3 + \omega_0^2\xi_3 = \frac{1}{2!}\,\omega_0^2\,(x_0^2\xi_2 + x_0\xi_1^2) - \frac{1}{4!}\,\omega_0^2 x_0^4\xi_1 + \frac{1}{7!}\,\omega_0^2 x_0^7,\\
&\ddot\xi_4 + \omega_0^2\xi_4 = \frac{1}{3!}\,\omega_0^2\,(3x_0^2\xi_3 + 6x_0\xi_1\xi_2 + \xi_1^3) -\\
&\qquad - \frac{1}{4!}\,\omega_0^2\,(x_0^4\xi_2 + 2x_0^3\xi_1^2) + \frac{1}{6!}\,\omega_0^2 x_0^6\xi_1 - \frac{1}{9!}\,\omega_0^2 x_0^9.
\end{aligned}$$

Изучим решение для $\xi_1$, соответствующее начальным условиям $\xi_1(0) = \dot\xi_1(0) = 0$. Положим (выбором единицы времени этого можно добиться), что $\omega_0 = 1$.

Приведем известные частные решения уравнений

$$\ddot z + z = a\sin p\,(t+\alpha)\ (*) \qquad \text{и} \qquad \ddot z + z = a\cos p\,(t+\alpha).\ (**)$$

Они имеют вид

для $(*)$ : $\quad z = \dfrac{a}{1-p^2}\ \sin p\,(t+\alpha)\Big|_{p\neq 1}, \qquad z = -\dfrac{1}{2}\,at\cos(t+\alpha)\,\big|_{p=1};$

для $(**)$ : $\quad z = \dfrac{a}{1-p^2}\ \cos p\,(t+\alpha)\Big|_{p\neq 1}, \qquad z = \dfrac{1}{2}\,at\sin(t+\alpha)\,\big|_{p=1}.$

Отсюда следует выражение для $\xi_1$ :

$$\xi_1 = B\sin(t+\beta) - \frac{1}{16}\,A^3 t\sin(t+\alpha) + \frac{1}{192}\,A^3\sin 3\,(t+\alpha), \qquad (13)$$

где $B, \beta$ определяются равенствами

$$B\sin\beta = -\frac{A^3}{192}\ \sin 3\alpha, \qquad B\cos\beta = -\frac{A^3}{64}\ \cos 3\alpha + \frac{A^3}{16}\ \sin\alpha.$$

Хорошо видно, что секулярные члены появились в выражении (13), т.е. уже в первом приближении. Очевидно, что наличие $t$ вне тригонометрических функций затрудняет сходимость описанного процесса при $t \to \infty$. Заметим также, что постоянными интегрирования $B$ и $\beta$ нельзя воспользоваться для избавления от секулярных членов.

Для того, чтобы избавиться от них, воспользуемся методом Линдстедта, при котором в опорном решении для $x_0(t)$ меняется частота колебаний. Возьмем выражение $x_0(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, где положим $\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2\ +\ ...$, или, считая $\omega_0 = 1$, будем иметь

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2\ +\ ..., \qquad (14)$$

где $\omega_1, \omega_2$, ... — зависящие от $A, \alpha$ постоянные, которые надо подходящим образом выбрать.

Перепишем уравнение (11) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon\omega_1 x - \varepsilon^2\omega_2 x -\ ...\ = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\varepsilon^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и с учетом решения нулевого порядка $x_0(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$, где частота $\omega$ задается формулой (14) и заранее не известна, аналогично



предыдущему случаю получим уравнения

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2\xi_1 = \omega_1 x_0 + \frac{1}{3!}\,x_0^3,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega^2\xi_2 = \omega_1\xi_1 + \omega_2 x_0 + \frac{1}{2!}\,x_0^2\xi_1 - \frac{1}{5!}\,x_0^5.$$

Видно, что в правых частях этих уравнений стоят нечетные функции $\omega t+\alpha$, представляющие набор синусов величины $\omega t+\alpha$. В уравнениях для $\xi_p$ неизвестные приближения $\omega_p$ необходимо определить так, чтобы отсутствовали секулярные члены. Запишем уравнение для членов первого порядка

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2\xi_1 = \omega_1\,A\sin(\omega t+\alpha)\ +$$

$$+\ \frac{1}{8}\,A^3\sin(\omega t+\alpha) - \frac{1}{24}\,A^3\sin(3\omega t+3\alpha).$$

Надо показать, что если взять $\omega_1 = -\,(1/8)\,A^2$, то вынуждающий резонансный член уничтожится и решение примет вид

$$\xi_1 = B\sin(\omega t+\beta) + \frac{1}{192}\,A^3\sin(3\omega t+3\alpha),$$

где $B$ и $\beta$ можно определить так:

$$B\sin\beta = -\frac{1}{192}\,A^3\sin 3\alpha, \qquad B\cos\beta = -\frac{1}{64}\,A^3\cos 3\alpha.$$

здесь при $t=0:\ \xi_1(0) = \dot{\xi}_1(0) = 0.$

Кроме того, надо показать, что уравнение, подлежащее интегрированию для нахождения приближения любого порядка, имеет вид

$$\ddot{\xi}_p + \omega^2\xi_p = \omega_p x_0 + A_1^p\,(A, \omega_1,\, ...,\, \omega_{p-1})\sin(\omega t+\alpha)\ +$$

$$+\ \sum_{j=1}^{n_p} A_{2j+1}^p\,(a, \omega_1,\, ...,\, \omega_{p-1})\sin\big[\,(2j+1)(\omega t+\alpha)\,\big]$$

с решением

$$\omega_p = -\frac{1}{A}\,A_1^p\,(A, \omega_1,\, ...,\, \omega_{p-1}),$$

$$\xi_p = \sum_{j=1}^{n_p} \frac{A^p_{2j+1}}{\omega^2\,[\,1-(2j+1)^2\,]} \sin\bigl[\,(2j+1)(\omega t+\alpha)\,\bigr].$$

Отсюда вытекает, что частота $\omega$ определяется шаг за шагом последовательно, причем решение задается в виде периодической функции $t$ :

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \sum_{j=1}^{n_p} \frac{A^p_{2j+1}}{\omega^2\,[\,1-(2j+1)^2\,]} \sin\bigl[\,(2j+1)(\omega t+\alpha)\,\bigr].$$

В качестве замечания отметим, что исходное уравнение интегрируется точно, откуда следует сходимость вышеописанной процедуры; для этого надо, чтобы начальные условия соответствовали колебательному движению. Важно еще указать, что ряды, которые фигурировали выше, расходятся в случае вращательного движения. Сходимость, однако, для этого случая можно получить, если иначе ввести переменную. В этом случае угол $\theta$ непрерывно увеличивается со временем. Увеличение со временем можно учесть, если положить $\theta = \alpha t + \sqrt{\varepsilon}\,x$, и считать, что

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ ..., \qquad x = x_0(t) + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ ...,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ ...,$$

где $x_0(t) = A\sin(\omega t + \beta)$.

**4. Задача о трансверсальной тяге.** Рассмотрим задачу [111] о плоском движении космического аппарата (КА) малой тяги (солнечный парус, ионный двигатель и т.д.), полагая, что сила двигателя направлена по трансверсали, т.е. перпендикулярно радиусу-вектору КА, и считая КА материальной точкой. Предположим, что движение аппарата происходит в поле одного притягивающего центра — единственной возмущающей силой при этом является тяга двигателя. Тогда система уравнений движения в проекциях на оси полярной СК имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \qquad & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_\varphi}{r}, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}, \qquad & \frac{dv_\varphi}{dt} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \varepsilon f, \end{aligned} \tag{15}$$



где $r$ — модуль радиуса-вектора точки, $\varphi$ — полярный угол, $\mu$ — гравитационная постоянная (далее считаем для простоты $\mu = 1$), $\varepsilon f$ — возмущающая сила, $\varepsilon$ — малый параметр, $(v_r, v_\varphi)$ — проекции вектора скорости, $f$ — отношение силы тяги двигателя к массе аппарата.

Вместо $r, v_r$ и $v_\varphi$ целесообразно ввести новые зависимые переменные

$$A = \frac{r}{2 - r\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right)},$$

$$\alpha = r v_\varphi \left(v_\varphi\cos\varphi + v_r\sin\varphi\right) - \cos\varphi,$$

$$\beta = r v_\varphi \left(v_\varphi\sin\varphi - v_r\cos\varphi\right) - \sin\varphi,$$

где $A$ — отношение большой полуоси оскулирующего эллипса к его начальному значению, $\alpha$ и $\beta$ — компоненты вектора Лапласа, связанные с величиной эксцентриситета (для эллиптического движения $\alpha^2 + \beta^2 < 1$).

Требуется с учетом системы уравнений (15) вычислить производные $dA/d\varphi$, $d\alpha/d\varphi$, $d\beta/d\varphi$, а затем составить для этой системы уравнения первого приближения (провести усреднение по $\varphi \in [\,0, 2\pi\,]$). Можно показать [111], что в течение промежутка времени порядка $1/\varepsilon$ оскулирующая орбита КА будет близка к круговой (а орбита в первом приближении будет круговой). Можно также показать, что уравнение, определяющее изменение радиуса орбиты $A$, после усреднения примет вид

$$\frac{dA}{d\varphi} = 2\varepsilon f\,A^3, \tag{16}$$

где $\varepsilon f$ — тяга двигателя.

В рамках задачи об асимптотическом решении задачи синтеза оптимального управления поставим следующую вариационную задачу. Надо найти управление $f(\varphi)$, переводящее аппарат с орбиты радиуса $A_0$ на орбиту радиуса $A_*$ за время, в течение которого аргумент $\varphi$ меняется от 0 до $\varphi_T$, причем функция $f(\varphi)$ должна минимизировать функционал

$$I = \varepsilon \int\limits_0^{\varphi_T} f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Для решения этой задачи составим функцию Гамильтона $H$ : $H = 2\varepsilon f\, A^3\lambda - \varepsilon f^2$, где $\lambda$ — множитель Лагранжа, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -\,\frac{\partial H}{\partial A} = -\,6\varepsilon f\, A^2\lambda. \qquad (17)$$

Из условия $\max H$ найдем тогда управление $f = A^3\lambda$ $(*)$.

Затем рассмотрим уравнения (16) и (17). Из этих уравнений найдем

$$\frac{d\lambda}{dA} = -\,\frac{3\lambda}{A},$$

откуда получим $\lambda = c/A^3$, где $c$ — некоторая постоянная: $c = \lambda(\varphi)\big|_{\varphi=0}$. Подставим данное выражение в соотношение $(*)$. Тогда найдем, что $f = c$.

Таким образом, оптимальное управление в рассматриваемом случае постоянно. Константа $c$ определяется из условия

$$A(\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_T} = A_*.$$

Интегрирование уравнения (16) дает

$$A_* = \frac{A_0}{\sqrt{1 - \varepsilon f\, A_0^2\varphi_T}},$$

откуда получим функциональное выражение

$$f = \frac{A_*^2 - A_0^2}{\varepsilon\, A_0^2 A_*^2\, \varphi_T}.$$

Подведем итог. Эта задача служит примером того, как использование усредненных уравнений позволяет в отдельных случаях получить решение в явном виде.

!TeX encoding = windows-1251

# Список литературы


[1] *Акуленко Л.Д.* Асимптотическое решение некоторых нелинейных задач оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. — 1978. — Т. 42, вып. 1. — С. 76 – 86.

[2] *Акуленко Л.Д.* Асимптотическое решение двухточечных краевых задач // Прикл. математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 4. — С. 632 – 639.

[3] *Акуленко Л.Д.* Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. — 1981. — Т. 45, вып. 5. — С. 771 – 777.

[4] *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1987. — 365 с.

[5] *Акуленко Л.Д., Черноусько Ф.Л.* Метод осреднения в задачах оптимального управления // Журнал выч. математики и матем. физики. — 1975. — Т. 15, №4. — С. 869 – 882.

[6] *Александров А.Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // Прикл. математика и механика. — 1996. — Т. 60, вып. 2. — С. 205 – 209.

[7] *Александров А.Ю.* Об асимптотической устойчивости равновесия неавтономных систем // Прикл. математика и механика. — 1998. — Т. 62, вып. 1. — С. 35 – 40.

[8] *Александров А.Ю.* Об управлении вращательным движением твердого тела при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 1. — С. 27 – 33.

[9] *Александров А.Ю.* Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Прикл. математика и механика. — 2007. — Т. 71, вып. 3. — С. 361 – 376.

[10] *Александров А.Ю., Косов А.А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // Прикл. математика и механика. — 2010. — Т. 74, вып. 5. — С. 774 – 788.

[11] *Алексеев В.М.* Об асимптотическом поведении решений слабо нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 2. — С. 247 – 250.

[12] *Алфимов Г.Л.* Введение в асимптотический анализ. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. — 192 с.

[13] *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Тр. Казанск. авиац. ин-та. — 1959. — Вып. 48. — С. 3 – 117.

[14] *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости движения некоторых неавтономных механических систем под действием диссипативных сил // Докл. АН Уз.ССР. — 1978. — № 4. — С. 22 – 25.

[15] *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // Прикл. математика и механика. — 1979. — Т. 43, вып. 5. — С. 796 – 805.

[16] *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикл. математика и механика. — 1984. — Т. 48, вып. 2. — С. 225 – 232.

[17] *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // Прикл. математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып. 4. — С. 539 – 547.



[18] *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикл. математика и механика. — 1996. — Т. 60, вып. 3. — С. 388 – 396.

[19] *Андреев А.С.* О влиянии структуры сил на устойчивость положения равновесия неавтономной механической системы // Проблемы механики. Сб. ст. к 90-летию рожд. акад. А.Ю. Ишлинского. — М.: Физматлит, 2003. — С. 87 – 93.

[20] *Андреев А.С., Бойкова Т.А.* Об устойчивости неустановившегося движения механической системы // Прикл. математика и механика. — 2004. — Т. 68, вып. 4. — С. 678 – 686.

[21] *Андреев А.С., Юрьева О.Д.* Об устойчивости механической системы с одной степенью свободы // Изв. РАЕН. Математика. Матем. моделирование. Информатика и управление. — 1997. — Т. 1, № 2. — С. 102 – 114.

[22] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 918 с.

[23] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // Успехи матем. наук. — 1963. — Т. 18, вып. 6. — С. 91 – 192.

[24] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

[25] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

[26] *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

[27] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1975. — 308 с.

[28] *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968. — 183 с.

[29] *Блинов А.П.* К вопросу о построении функции Ляпунова // Прикл. математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 5. — С. 724 – 729.

[30] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

[31] *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестник Московск. ун-та. — 1980. — №4. — С. 84 – 89.

[32] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.

[33] *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

[34] *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Федорюк М.В.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. — М.: ВИНИТИ, 1969. — С. 5 – 73.

[35] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

[36] *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1982. — 294 с.

[37] *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 310 с.



[38] *Виноград Р.Э.* Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 84, №2. — С. 201 – 204.

[39] *Волосов В.М.* О методе усреднения // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 137, №1. — С. 21 – 24.

[40] *Волосов В.М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 962. — Т. 17, №6. — С. 3 – 126.

[41] *Волосов В.М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением // Журнал выч. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, №1. — С. 3 – 53.

[42] *Волосов В.М., Моисеев Н.Н., Моргунов Б.И., Черноусько Ф.Л.* Асимптотические методы нелинейной механики, связанные с осреднением // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. — М.: Наука, 1965. — Вып. 2. — С. 35 – 50.

[43] *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 335 с.

[44] *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1991. — 287 с.

[45] *Вязовик А.П.* Применение метода усреднения к задаче синтеза управления // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — №4. — С. 6 – 13.

[46] *Геращенко Е.И., Геращенко С.М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. — М.: Наука, 1975. — 296 с.

[47] *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

[48] *Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. — Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2009. — 152 с.

[49] *Де Брейн Г.* Асимптотические методы в анализе. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 247 с.

[50] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

[51] *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлению. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. — 112 с.

[52] *Джакалья Г.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

[53] *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1952. — 319 с.

[54] *Емельянова И.С.* Об устойчивости стационарных движений и состояний равновесия неголономных механических систем // Вопросы прикл. математики и механики. — Чебоксары, 1975. — Вып. 4. — С. 149 – 158.

[55] *Емельянова И.С.* К определению циклических координат и стационарных движений механических систем // Динамика систем. — Горький, 1974. — Вып. 3. — С. 117 – 130.

[56] *Емельянова И.С., Фуфаев Н.А.* Об устойчивости стационарных движений // Теория колебаний, прикл. математика и кибернетика. — Горький, 1974. — С. 3 – 9.

[57] *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. — 240 с.

[58] *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 631 с.

[59] *Зубов В.И.* Устойчивость движения. — М.: Высш. школа, 1973. — 271 с.



[60] *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. — М.: Высш. школа, 1982. — 285 с.

[61] *Игнатьев А.О.* Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными коэффициентами // Прикл. математика и механика. — 1982. — Т. 46, вып. 1. — С. 167 – 168.

[62] *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. — М.: Физматлит, 2009. — 248 с.

[63] *Каленова В.И., Морозов В.М.* О влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость одного класса линейных нестационарных систем // Прикл. математика и механика. — 2013. — Т. 77, вып. 3. — С. 386 – 397.

[64] *Каневский А.Я, Рейзинь Л.Э.* Построение однородных функций Ляпунова–Красовского // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, №2. — С. 251 – 259.

[65] *Кантарелли Дж.* Устойчивость положения равновесия склерономных механических систем // Прикл. математика и механика. — 2002. — Т. 66, вып. 6. — С. 988 – 1001.

[66] *Карапетян А.В.* Об обращении теоремы Рауса // Вестник Московск. ун-та. — 1973. — №5. — С. 65 – 69.

[67] *Карапетян А.В.* Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. — Новосибирск, 1979. — С. 184 – 190.

[68] *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // Прикл. математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 3. — С. 418 – 426.

[69] *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений // Задачи устойчивости и стабилизации движения. — М.: ВЦ АН СССР, 1982. — С. 87 – 102.

[70] *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1983. — № 2. — С. 45 – 52.

[71] *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. — М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 165 с.

[72] *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1983. — Т. 6. — 128 с.

[73] *Козлов В.В.* Неустойчивость равновесия в потенциальном поле с учетом сил вязкого трения // Прикл. математика и механика. — 1981. — Т. 45, вып. 3. — С. 570 – 572.

[74] *Копсон Э.Т.* Асимптотические разложения. — М.: Мир, 1966. — 159 с.

[75] *Косов А.А.* Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // Прикл. математика и механика. — 2007. — Т. 71, вып. 3. — С. 411 – 426.

[76] *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972. — 276 с.

[77] *Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению // Прикл. математика и механика. — 1955. — Т. 19, вып. 5. — С. 516 – 530.

[78] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 212 с.

[79] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.

[80] *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.



[81] *Леонов Г.А.* Локализация аттракторов неавтономного уравнения Льенара методом разрывных систем сравнения // Прикл. математика и механика. — 1996. — Т. 60, вып. 2. — С. 332 – 336.

[82] *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. — М.: Физматгиз, 1962. — 483 с.

[83] *Линч К., Зенков Д.В.* Устойчивость стационарных движений дискретных неголономных систем // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2009. — С. 259 – 271.

[84] *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

[85] *Любушин А.А.* Сходимость метода малого параметра для слабоуправляемых оптимальных систем // Прикл. математика и механика. — 1978. — Т. 42, вып. 3. — С. 569 – 573.

[86] *Любушин Е.А.* О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум // Прикл. математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 2. — С. 211 – 220.

[87] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.

[88] *Мак-Лейн Г.* Асимптотические значения голоморфных функций. — М.: Мир, 1966. — 104 с.

[89] *Малкин И.Г.* Теорема об устойчивости по первому приближению // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 6. — С. 783 – 784.

[90] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.

[91] *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 496 с.

[92] *Маловиков В.И.* О дифференциальных неравенствах // Методы и модели управления. — Изд-во Рижск. политех. ин-та, 1973. — Вып. 6. — С. 27 – 30.

[93] *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 416 с.

[94] *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. — Киев: Техника, 1973. — 188 с.

[95] *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988. — 312 с.

[96] *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.

[97] *Матросов В.М.* К задаче устойчивости гироскопических систем на подвижном основании // Тр. Казанск. авиац. ин-та. — 1962. — Вып. 71. — С. 12 – 35.

[98] *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. — 1962. — Т. 26, вып. 5. — С. 885 – 895.

[99] *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // Тр. Казанск. авиац. ин-та. — 1963. — Вып. 80. — С. 30 – 37.

[100] *Матросов В.М.* Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавтономных систем // Тр. Казанск. авиац. ин-та. — 1965. — Вып. 89. — С. 20 – 32.

[101] *Матросов В.М.* Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — С. 112 – 125.

[102] *Матвеев Н.М., Носов С.Л., Покровский А.Н.* К вопросу о принципе усреднения // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 2. — С. 371 – 373.



[103] *Мельников Г.И.* Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 110, № 3. — С. 326 – 329.

[104] *Мельников Г.И.* К теории нелинейных колебаний // Вестник Ленингр. ун-та. — 1964. — № 1, вып. 1. — С. 88 – 98.

[105] *Мельников Г.И.* О характере затухания возмущенного движения в двух особенных случаях // Вестник Ленингр. ун-та. — 1965. — № 19, вып. 4. — С. 99 – 111.

[106] *Мельников Г.И.* Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. — Л.: Мащиностроение, 1975. — 200 с.

[107] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1971. — 312 с.

[108] *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964. — 431 с.

[109] *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971. — 440 с.

[110] *Моисеев Н.Д.* Очерки развития теории устойчивости. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 664 с.

[111] *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

[112] *Назаров Е.А.* Условия конвергенции в обобщенном уравнении Льенара // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 5. — С. 927 – 929.

[113] *Найфэ А.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 455 с.

[114] *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Об устойчивости стационарных движений голономных и неголономных систем // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30, вып. 2. — С. 236 – 242.

[115] *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. — 520 с.

[116] *Нейштадт А.И.* Об осреднении в многочастотных системах // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 223, № 2. — С. 314 – 317.

[117] *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1969. — 239 с.

[118] *Носов В.Р.* Об устойчивости некоторых нестационарных уравнений // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 9. — С. 31 – 42.

[119] *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.

[120] *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. — М.: Наука, 1971. — 636 с.

[121] *Плотников В.А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. — Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1976. — 102 с.

[122] *Плотников В.А.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 30 – 37.

[123] *Пожарицкий Г.К.* О неустойчивости движения консервативных голономных систем // Прикл. математика и механика. — 1956. — Т. 20, вып. 3. — С. 429 – 433.

[124] *Пожарицкий Г.К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией // Прикл. математика и механика. — 1961. — Т. 25, вып. 4. — С. 657 – 667.

[125] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 393 с.



[126] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Изб. труды. — М.: Наука, 1972. — Т. 2. — 999 с.

[127] *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 290 с.

[128] *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974. — 318 с.

[129] *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2003. — 304 с.

[130] *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30, вып. 5. — С. 922 – 933.

[131] *Румянцев В.В.* О стационарных движениях и их устойчивости // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 171, № 4. — С. 823 – 826.

[132] *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неголономных систем // Прикл. математика и механика. — 1967. — Т. 31, вып. 2. — С. 260 – 271.

[133] *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — 141 с.

[134] *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // Прикл. математика и механика. — 1968. — Т. 32, вып. 3. — С. 504 – 508.

[135] *Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1968. — Т. 1. — С. 7 – 66.

[136] *Румянцев В.В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения // Прикл. математика и механика. — 1975. — Т. 39, вып. 6. — С. 963 – 973.

[137] *Румянцев В.В., Андреев А.С.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Докл. РАН. — 2007. — Т. 416, № 5. — С. 627 – 629.

[138] *Румянцев В.В., Карапетян А.В.* Устойчивость движения неголономных систем // Итоги науки и техники Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1973. — Т. 3. — С. 5 – 42.

[139] *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 253 с.

[140] *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 300 с.

[141] *Семенова Л.Н.* О теореме Рауса для неголономных систем // Прикл. математика и механика. — 1965. — Т. 29, вып. 1. — С. 156 – 157.

[142] *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 198 с.

[143] *Соколова Л.Е.* Об асимптотической устойчивости равновесия гироскопических систем с частичной диссипацией // Прикл. математика и механика. — 1968. — Т. 32, вып. 2. — С. 314 – 318.

[144] *Соколова Л.Е.* О стабилизации стационарного движения механической системы с частичной диссипацией // Проблемы аналит. механики, теории устойчивости и управления. — Казань, 1976. — Т. 2. — С. 297 – 303.

[145] *Сосницкий С.П.* Об асимптотической устойчивости равновесия параметрически возмущаемых систем // Прикл. математика и механика. — 2005. — Т. 69, вып. 4. — С. 612 – 623.



[146] *Степанов С.Я.* О соотношении условий устойчивости при трех различных режимах циклических движений в системе // Проблемы аналит. механики, теории устойчивости и управления. — Казань, 1976. — Т. 2. — С. 303 – 308.

[147] *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах неголономных систем // Вестник Московск. ун-та. — 1972. — № 6. — С. 77 – 83.

[148] *Тереки Й., Хатвани Л.* Функции Ляпунова типа механической энергии // Прикл. математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 6. — С. 894 – 899.

[149] *Тертычный-Даури В.Ю.* Галамех. В 4-х томах. Т. 1. Адаптивная механика. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2008. — 544 с.

[150] *Тертычный-Даури В.Ю.* Нелинейные задачи механики и теории управления. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2013. — 560 с.

[151] *Тертычный-Даури В.Ю.* Математическая механика и элементы теории устойчивости. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2016. — 328 с.

[152] *Тихонов А.А.* Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях // Вестник Ленингр. ун-та. — 1965. — № 1, вып. 1. — С. 95 – 101.

[153] *Тихонов А.А.* К задаче об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях // Вестник Ленингр. ун-та. — 1969. — № 19, вып. 4. — С. 116 – 122.

[154] *Федорюк М.В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

[155] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

[156] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы в анализе // М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 1986. — Т. 13. — С. 93 – 210.

[157] *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

[158] *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966. — 251 с.

[159] *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. — Ташкент: Фан, 1971. — 279 с.

[160] *Фреман Н., Фреман П.* ВБК–приближение. — М.: Мир, 1967. — 168 с.

[161] *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 248 с.

[162] *Хагедорн П.* Обращение теорем устойчивости Лагранжа–Дирихле и Рауса // Механика. Сб. переводов. — 1972. — № 5. — С. 3 – 36.

[163] *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 191 с.

[164] *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988. — 183 с.

[165] *Хатвани Л.* О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестник Московск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1975. — № 3. — С. 83 – 89.

[166] *Хатвани Л.* О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65, вып. 4. — С. 725 – 732.



[167] *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966. — 230 с.

[168] *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избранные труды по механике и математике. — М.: Гостехиздат, 1954. — С. 490 – 538.

[169] *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 478 с.

[170] *Черноусько Ф.Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // Прикл. математика и механика. — 1968. — Т. 32, вып. 1. — С. 15 – 26.

[171] *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

[172] *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 238 с.

[173] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 536 с.

[174] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965. — 207 с.

[175] *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. — М.: Физматлит, 1962. — 464 с.

[176] *Alsholm P.* Existence of limit cycles for generalized Lienard equations // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — V. 171, № 1. — P. 242 – 255.

[177] *Andreev A.* Sulla stabilita asimptotica ed instabilita // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1986. — V. 75. — P. 235 – 245.

[178] *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Different. Equat. — 1977. — V. 23, № 2. — P. 216 – 223.

[179] *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differen-tial equations // J. Different. Equat. — 1977. V. 25, № 2. — P. 184 – 202.

[180] *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Different. Equat. — 1978. — V. 27, № 2. — P. 172 – 189.

[181] Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications / ed. by Wilcox C.H. — New York: Wiley, 1964. — 249 p.

[182] *Brull M.A., Soler A.I.* A new perturbation technique for differential equations with small parameters // Quart. Appl. Math. — 1966. — V. 24. — P. 143 – 151.

[183] *Davison L.* Perturbation theory of nonlinear elastic wave propagation // Int. J. Solids Structures. — 1968. — V. 4. — P. 301 – 322.

[184] *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mech. — 1969. — V. 1. — P. 12 – 30.

[185] *Campbell J.A., Jefferys W.H.* Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit // Celestial Mech. — 1970. — V. 2. — P. 467 – 473.

[186] *Chernousko F.L., Evtuschenko Yu.G.* Asymptotic methods for the solution of some problems of satellite dynamics // Proc. of the XV-th Int. Astronautical Cong. — Warszawa, 1964. — V. 1. — P. 277 – 296.

[187] *Cherry T.M.* Uniform asymptotic formulae for functions with transition points // Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — V. 68. — P. 224 – 257.



[188] *Coffey T.P.* Invariants to all orders in classical perturbation theory // J. Math. Phys. — 1969. — V. 10. — P. 426 – 438.

[189] *Cole J.D., Kevorkian J.* Uniformly valid asymptotic approximations for certain nonlinear differential equations // Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics / J.P. LaSalle, S. Lefschetz, eds. — New York: Academic Press, 1963. — P. 113 – 120.

[190] *Habets P., Risito C.* Stability criteria for systems with first integrals, generalising theorems of Routh and Salvadori // Equations diff. et fonct. non lineaires. — Paris: Hermann, 1973. — P. 570 – 580.

[191] *Hagedorn P.* Uber die Instabilitat konservativen Systeme mit gyrosko-pischen Kraften // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1975. — V. 58, № 1. — P. 1 – 9.

[192] *Hagedorn P.* Die Instabilitat konservativer Systeme mit gyroskopischen Kraften // Abh. Aka. Wiss. DDR. — 1977. — № 5. — S. 401 – 406.

[193] *Hagedorn P.* On non-conservative systems with ignorable coordinates // Aech. Ration. Mech. and Anal. — 1978. — V. 68, № 1. — P. 89 – 92.

[194] *Hagedorn P.* On the stability of steady motions in free and restrained dynamical systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1979. — V. 46, № 2. — P. 427 – 432.

[195] *Hagedorn P., Teschner W.* An instability theorem for steady motions in free and restrained dynamical systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1980. — V. 47, № 4. — P. 908 – 912.

[196] *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. III // Acta Sci. Math. — 1985. — V. 49, № 1-4. — P. 157 – 167.

[197] *Hatvani L., Terjeki J.* Stability properties of the equilibrium under the influence of unbounded damping // Acta Sci. Math. — 1985. — V. 48, № 1-4. — P. 187 – 200.

[198] *Henrard J.* On a perturbation theory using Lie transforms // Celestial Mech. — 1970. — V. 3. — P. 107 – 120.

[199] *Hughes P.C., Gardner L.T.* Asymptotic stability of linear stationary mechanical systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1975. — V. 42, № 3. — P. 228 – 229.

[200] *Ianiro N., Maffei C.* On the asymptotic behavior of the solutions of th nonlinear equations $\ddot{x}+h(t,x)\,\dot{x}+p^2(t)\,f(x)=0$ // Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability and Bifurcations. — N.Y.: Acad. Press, 1981. — P. 175 – 182.

[201] *Jeffreys H.* Asymptotic Approximations. — Oxford: Oxford University Press, 1962. — 144 p.

[202] *Joshizawa T.* On the necessary and sufficient condition for the uniform boundedness of solutions of $x' = F(t,x)$ // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. — 1957. — Ser. A. — Math. 30. — P. 217 – 226.

[203] *Kamel A.A.* Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations // Celestial Mech. — 1970. — V. 3. — P. 90 – 106.

[204] *Kamel A.A.* Lie transforms and the Hamiltonization of non-Hamilto-nian systems // Celestial Mech. — 1971. — V. 4. — P.397 – 405.

[205] *Keller J.B., Millman M.H.* Perturbation theory of nonlinear electro-magnetic wave propagation // Phys. Rev. — 1969. — V. 181. — P. 1730 – 1747.

[206] *Kruskal M.* Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic // J. Math. Phys. — 1962. — V. 3. — P. 806 – 828.



[207] *Langer R.E.* On the asymptotic solution of ordinary differential equa-tions with reference to the Stokes phenomenon about a singular point // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — V. 37. — P. 397 – 416.

[208] *Langer R.E.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — V. 67. — P. 461 – 490.

[209] *La Salle J.P.* Some extensions of Liapunov's second method // IRE Trans. Circuit Theory. — 1960. — V. 7, № 4. — P. 520 – 527.

[210] *La Salle J.P.* Stability theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat. — 1968. — V. 4, № 1. — P. 57 – 65.

[211] *La Salle J.P.* Stability theory and invariance principles // Dynamical Systems / Proc. Int. Sympos., Brown Univ., 1974. — N.Y.: Acad. Press, 1976. — P. 211 – 222.

[212] *Levinson N.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations // Stud. Appl. Math. — 1969. — V. 48. — P. 285 – 297.

[213] *Mendelson K.S.* Perturbation theory for damped nonlinear oscillations // J. Math. Phys. — 1970. — V. 11. — P. 3413 – 3415.

[214] *Millman M.H., Keller J.B.* Perturbation theory of nonlinear boundary-valye problems // J. Math. Phys. — 1969. — V. 10. — P. 342 – 361.

[215] *Murray J.D.* Asymptotic analysis. — New York: Springer, 1984. — 160 p.

[216] *Pascal M.* Sur la recherche des mouvements stationaires dans les systemes ayant des variables cycliques // Celest. Mech. — 1975. — V. 12. — P. 337 – 358.

[217] Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics / ed. by C.H. Wilcox. — New York: Wiley, 1966. — 255 p.

[218] *Pringle R.* Stability of damped mechanical systems // AIAA Journal. — 1965. — V. 3, № 2. — P. 363 – 364.

[219] *Risito C.* On the Liapunov stability of a system with known first integrals // Meccanica. — 1967. — V. 2, № 4. — P. 197 – 200.

[220] *Risito C.* Attractivity and instability for steady motions of holonomic dissipative systems // Equations diff. et fonct. nonlineaires. — Paris: Hermann. — 1973. — P. 588 – 609.

[221] *Risito C.* Th comparison method applied to the stability of systems with known first integrals // Non-Linear Vibration Problems. — 1974. — V. 15. — P. 25 – 42.

[222] *Risito C.* Metodi per lo studio della stabilita di sistemi con integrali primi noti // Ann. mat. pura ed appl. — 1975. — V. 107, № 4. — P. 49 – 94.

[223] *Roberson R.E.* Notes on the Thomson–Tait–Chetaev stability theorem // J. Astronaut. Sci. — 1968. — V. 15, № 6. — P. 319 – 324.

[224] *Rouche N.* On the stability of motion // Int. J. Non-Linear Mech. — 1968. — V. 3, № 3. — P. 295 – 306.

[225] *Rouche N.* The invariance principle applied to non-compact limit set // Boll. Union mat. ital. — 1975. — V. 11, № 3. — P. 306 – 315.

[226] *Salvadori L.* Criteri d'instabilita per i moti merostatici di un sistema olonomo // Rend. Accad. sci. fis. e math. Soc. naz. sci lett. ed arti Napoli. — 1960. — V. 27. — P. 535 – 542.

[227] *Salvadori L.* Sull'estensione ai sistemi dissipative del criterio di stabilita del Routh // Ricerche Mat. — 1966. — V. 15, № 2. — P. 162 – 167.



[228] *Salvadori L.* Sulla stabilita dell'equilibrio nella meccanica dei sistemi olonomi // Boll. Unione mat. ital. — 1968. — V. 1, № 3. — P. 333 – 344.

[229] *Salvadori L.* Famiglie and un parametro di funzioni di Liapunov nello studio della stabilita // Symposia Math. — N.Y., L., 1971. — V. 6. — P. 309 – 330.

[230] *Teschner W.* Zur Instabilitat konservativer Systeme mit gyroskopischen Kraften // Z. angew. Math. und Mech. — 1977. — V. 57, № 5. — S. 92 – 94.

[231] *Usher P.D.* Necessary conditions for applicability of Poincare–Lightfill perturbation theory // Quart. Appl. Math. — 1971. — V. 28. — P. 463 – 471.

[232] *Van der Corput J.G.* Asymptotic developmants I. Fundamental theorems of asymptotics // J. Anal. Math. — 1956. — V. 4. — P. 341 – 418.

**Миссия университета** — генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики — крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетм, Петербургским отделением Математического института им. В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. Милованович Екатерина Воиславовна. Кандидат технических наук, доцент, автор 30 научных печатных работ. Области научных интересов: математическое моделирование биотехнологических процессов, методика преподавания высшей математики.
2. Рябова Анна Викторовна. Кандидат физико-математических наук, доцент, автор 30 научных печатных работ. Области научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений, методика преподавания высшей математики.
2. Тертычный (Тертычный-Даури) Владимир Юрьевич. Доктор физико-математических наук, профессор. Автор 120 научных печатных работ, в том числе 18 монографий, опубликованных в ведущих российских и зарубежных научных журналах и издательствах. Области научных интересов: классическая механика, гироскопия, теория устойчивости, канонические преобразования, адаптивное, оптимальное и стохастическое управление, робототехника, гипердинамика, космология и космодинамика, ядерная электродинамика.

Милованович Екатерина Воиславовна
Рябова Анна Викторовна
Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

**Элементы современной теории устойчивости. Введение в асимптотический анализ**

**Учебное пособие**

В авторской редакции
Компьютерная верстка А.А. Ведяков
Дизайн обложки В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе