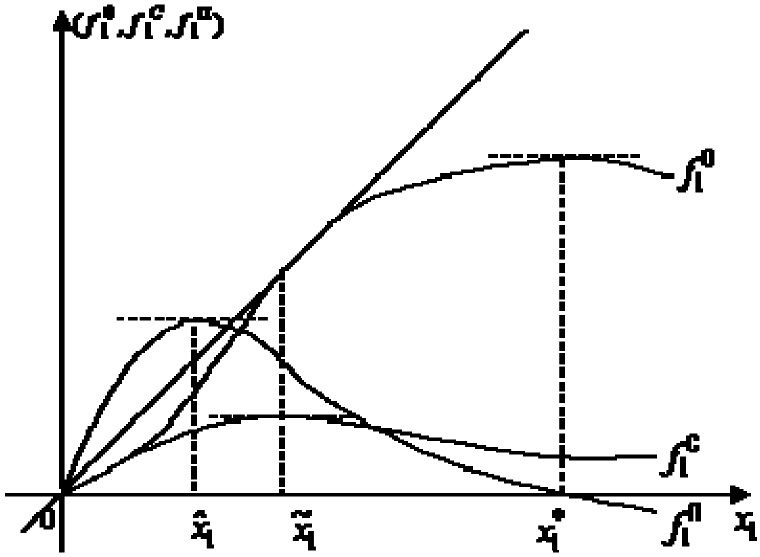
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Е.Л. Богданова,

К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РИСК-МЕНЕДЖМЕНТЕ



Санкт-Петербург
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Е.Л. Богданова

К.А. Соловейчик

К.Г. Аркина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РИСК-МЕНЕДЖМЕНТЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки (специальности) 27.04.05 «Инноватика»,
27.04.08 «Управление интеллектуальной собственностью»
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
магистратуры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2017

Богданова Е.Л. Экономико-математическое моделирование в риск-менеджменте: учебное пособие / Е.Л. Богданова, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 198 с.

Рецензенты: Аркин Павел Александрович, д.э.н, профессор, заместитель генерального директора по инновациям ООО «ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», профессор базовой кафедры «Процессы управления наукоемкими производствами» ФГАОУВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».
Якубсон Михаил Яковлевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа ФГБОУВО «Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена».

Учебное пособие соответствует содержанию блока 1 структуры программы магистратуры федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 27.04.05 - Инноватика (уровень магистратуры) и блока 1 структуры программы магистратуры федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 27.04.08 - Управление интеллектуальной собственностью (уровень магистратуры). Пособие имеет учебно-методическое назначение и предназначено для изучения студентами общего материала раздела риск-менеджмент, в первую очередь теории игр, дисциплины учебного плана «Риск-менеджмент». В пособии рассмотрены основные методы вычислений в теории игр, ценообразовании и теории производства.

Рекомендовано к печати УМС ИМБИП, протокол № 5 от «10» мая 2017 г.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Экономико-математическое моделирование — это наука, которая использует математический аппарат в качестве метода исследования экономических систем и явлений, в том числе в риск-менеджменте.

Таким образом, объектом изучения (или предметной областью) экономико-математического моделирования является экономика.

Как и другие науки, изучающие экономику в целом или ее составные части, математическая экономика пользуется определенной методологией и имеет свою специфику. Специфика организационно-экономического моделирования, его методологическая особенность заключается в том, что оно изучает не сами экономические объекты и явления как таковые, а их **математические модели**.

Математической моделью реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Цель экономико-математического моделирования - получение объективной экономической информации и выработка имеющих важное практическое значение рекомендаций.

Формально экономико-математическое моделирование можно отнести как к экономической, так и к математической наукам. В первом случае ее следует понимать как тот раздел экономики, который изучает количественные и качественные категории, а также поведенческие аспекты экономических субъектов. Считая же экономико-математическое моделирование одним из направлений математики, можно отнести ее к тем разделам прикладной математики, которые занимаются оптимизационными задачами и задачами принятия решения.

По своей природе экономика — самая близкая к математике из неестественных наук. Уже в определении самого понятия экономики, ее главных задач можно увидеть математические понятия и терминологию.

Действительно, экономика - это общественная наука об использовании ограниченных ресурсов с целью максимального удовлетворения неограниченных материальных потребностей населения. Центральные проблемы экономической науки — рациональное ведение хозяйства, оптимальное распределение ограниченных ресурсов, изучение экономических механизмов управления, разработка методов экономических расчетов — по существу являются задачами, решаемыми в рамках математических наук. Количественные и качественные методы математики являются наилучшим вспомогательным аппаратом для получения ответов на основные вопросы экономики:

- что должно производиться (т. е. какие товары и услуги и в каком количестве надо производить)?
- как будут производиться товары (т. е. кем и с помощью каких ресурсов и какой технологии)?

- для кого предназначены эти товары (т.е. кем и как будут потребляться эти товары)?

Наконец, задача экономической теории, связанная с приведением в систему, истолкованием и обобщением поведения участников экономики в процессе производства, обмена и потребления, восходит к математическим проблемам оптимизации и принятия решения.

С учетом сказанного выше можно говорить о следующих основных задачах, стоящих перед экономико-математическим моделированием:

- разработка математических моделей экономических объектов, систем и явлений (общих и частных задач экономики при различных условиях, предпосылках и на различных уровнях);
- изучение поведения участников экономики (условий существования оптимальных решений и их признаков, а также методов их вычисления в моделях потребления, фирмы, совершенной и несовершенной конкуренции и др.);
- изучение описательных моделей экономики (модели планирования, "затраты-выпуск", расширяющейся экономики, экономики благосостояния и роста и др.);
- анализ экономических величин и статистических данных (эластичности, средних и предельных величин, регрессионный и корреляционный анализ и прогнозирование экономических факторов и показателей).

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств изучаемого объекта на языке математических символов и соотношений. Такое описание принято называть математическим моделированием или формализацией.

Итак, для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем, на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами, составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

Для чего составляется математическая модель, и какова ее роль в исследовании экономических задач?

Любое ответственное решение в экономике требует проведения эксперимента. Семь раз отмерь, один раз отрежь — так гласит основной принцип одного из разделов прикладной математики. При наличии математической модели мы избавляемся от необходимости дорогостоящих экспериментов, как правило, сопровождаемых многократными пробами и ошибками. Это можно делать на модели, которую, условно говоря, можно резать и перекраивать неоднократно без всяких капиталовложений. Это одно достоинство модели. Другое заключается в том, что формализация дает возможность сформулировать реальную задачу как математическую и позволяет воспользоваться для анализа универсальным и мощным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика проводит детальный количественный анализ модели, помогает предсказать, как поведет себя объект в различных условиях и дает рекомендации для выбора наилучших вариантов решения проблемы. Построение формальных моделей, их анализ и вывод практических рекомендаций — одна из важнейших задач прикладной математики.

Сложность экономических систем превышает порог, до которого стоится точная математическая теория. Поэтому неудивительно, что сколько-нибудь универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Перечислим наиболее основные из них:

1) адекватность (соответствие модели своему оригиналу),
2) объективность (соответствие научных выводов реальным условиям),
3) простота (не засоренность модели второстепенными факторами),
4) чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров),
5) устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи),
6) универсальность (широта области применения).

Комментируя первое свойство, можно заметить, что математическая модель нетождественна самому объекту, а является его приближенным отражением. Говоря об объективности, следует иметь в виду, что никакая отдельно взятая модель не может вполне правильно отразить все свойства сложной экономической действительности. Поэтому формализация экономической задачи проводится наряду с принятием некоторых предварительных условий, предположений, ограничений. Стремление к простоте модели продиктовано ограниченными возможностями вычислительной техники и экономии временных ресурсов при исследовании модели. Практическое значение модель приобретает тогда, когда ее изучение имеющимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. Требования чувствительности и устойчивости являются отражением объективных характеристик экономических процессов. Одна и та же математическая модель может применяться для исследования экономических задач различного содержания. Это свойство и называется универсальностью.

Разработка новой модели — это сложный творческий процесс, требующий больших умственных и временных затрат. Для экономии этих ресурсов полезно обращаться к существующему "банку" моделей для проверки пригодности их к новой задаче.

Для того чтобы математическая модель удовлетворяла всем тем требованиям, которые перечислены выше, необходимо тщательно изучить предметную область, собрать и проанализировать большой объем информации. Только в результате такого предварительного изучения самого объекта можно отличить цели от средств их достижения, следствия от причин их породивших, основные факторы от второстепенных.

В любой науке по тем или иным признакам (в зависимости от целей исследования или по характеру рассматриваемого круга вопросов) можно выделить отдельные направления, разделы и части. Математика, возможно как никакая другая наука, объединяет в себе большое количество предметов — от классической линейной алгебры и математического анализа до современной актуарной математики. Процесс развития новых направлений продолжается. Некоторые из них изучаются в высших учебных заведениях, а другие в настоящее время даже не имеют общепринятого названия.

Наиболее укрупненной классификацией математической науки является ее деление на теоретическую (или "чистую") и прикладную математику. "Чистая" математика занимается теми вопросами, которые развивают саму математику как науку (т. е. она занимается внутренними вопросами). К прикладной математике относятся те разделы и методы, которые специально созданы или наилучшим образом подходят для решения задач, возникающих на практике (т.е. вне математики). Однако такое деление математической науки на две части является условным. Действительно, какой-то метод, будучи применен для решения практической задачи, не становится раз и навсегда прикладным, точно также, любой теоретический результат когда-то может быть привлечен для решения прикладной проблемы.

Экономическая наука для изучения макроэкономических проблем поднимается на высоту птичьего полета и "обозревает лес в целом", а для исследования микроэкономических понятий опускается на землю и "изучает деревья". Подобно этому прикладная математика более приземлена и менее абстрактна, чем "чистая" математика. Она проникает в различные сферы нашей жизни, приспосабливая к ним свой многофункциональный инструмент. Отсюда и появляются такие прикладные направления как математическая экономика, математическая социология, математическая экология, математическая лингвистика, финансовая математика.

К числу наиболее крупных разделов прикладной математики, применяемых в экономических исследованиях, следует отнести такой предмет как исследование операций.

Исследование операций — это наука, которая занимается построением математических моделей реальных задач и процессов, происходящих в различных сферах жизни (экономических, социальных, технических, военных и др.), их анализом и применениями. Большинство этих моделей связано с выработкой рекомендаций по принятию оптимальных (в том или ином смысле) решений.

Вопросы, посвященные основам моделирования — общие принципы, требования к математическим моделям, этапы формализации, элементы математической модели, виды математических моделей — составляют общий (вводный) раздел исследования операций.

Исследование операций занимается так называемыми экстремальными задачами, суть которых состоит в отыскании максимального или минимального значения заданной функции (целевой функции) на заданном множестве значений ее аргументов (множества допустимых решений). Если множество допустимых решений задается (описывается) с помощью некоторых уравнений или неравенств, называемых ограничениями задачи, то экстремальные задачи называются задачами *математического программирования*. В зависимости от характера этих ограничений и целевой функции возникают задачи *линейного программирования*, *нелинейного программирования*, *динамического* *программирования* и некоторые их разновидности. Здесь термин "программирование" имеет смысл "планирования", "сравнения вариантов", "оптимизации". Поэтому его не надо путать с термином программирования на языках ЭВМ. Экстремальные задачи еще называют оптимизационными задачами или задачами оптимизации.

Не будет преувеличением сказать, что многие из перечисленных теорий возникли благодаря и для решения экономических задач. Ярким примером в этом смысле является **теория игр** — раздел исследования операций, изучающий конфликтные задачи принятия решений. Свидетельство тому — название первой фундаментальной монографии по теории игр: "Теория игр и экономической поведение", написанная создателями этой науки Дж. фон Нейманом и О.Моргенштерном в 1953 году.

Названные разделы исследования операций наиболее приспособлены для исследования так называемых статистических задач, т. е. для исследования экономики в некотором зафиксированным или "застывшем" состоянии, без учета динамики. Для учета влияния временного фактора привлекаются другие разделы прикладной математики. В первую очередь — это **теория оптимального управления (динамическое программирование)**, сформировавшаяся благодаря фундаментальным результатам Л.С.Понтрягина и Р. Беллмана. Эта теория помогает исследовать модели экономической динамики и выработать наилучшие управленческие решения с учетом дискретного и непрерывного учета фактора времени.

При моделировании многих экономических задач возникает необходимость учета случайных факторов и возмущений. В этом случае наиболее подходящим инструментом является аппарат **теории вероятностей** — математической науки, изучающей закономерности в случайных явлениях.

В экономико-математических исследованиях важную роль играют статистические данные. Они нужны для изучения взаимосвязей и взаимозависимостей между экономическими факторами и показателями, для прогнозирования экономического развития на основе прошлого и настоящего опыта. Эти вопросы являются предметом **математической статистики**.

На экономических факультетах высших учебных заведений базовые математические знания преподаются обычно под названием "Высшая математика". В этот предмет входят основные разделы **математического анализа**, **линейной алгебры**, **дифференциального исчисления** и некоторые другие. Все эти дисциплины необходимы как для освоения выше приведенных разделов прикладной математики, так и для их применения непосредственно в экономико-математических исследованиях в качестве инструментария.

В математике названия классов задач часто несут полезную информацию. Они служат ориентиром в иерархии задач, подчеркивая различные уровни общности и сложности, и играют роль адреса при аналитических исследованиях и создании вычислительных методов.

Приведем те "классические" задачи принятия решения, которые, благодаря их типичности, встречаются во многих математических учебниках для экономистов. Некоторые из них относятся к начальному периоду возникновения теории оптимизации. Примеры служат для иллюстрации некоторых видов задач принятия решения и не претендуют на реалистичность в последней инстанции. Это учебные задачи. Естественно задачи и модели, представляющие непосредственный практический интерес, будут более подробными, глубокими и сложными. Учебные задачи — это первое приближение к реальным (практическим) задачам, их упрощенный аналог.

Задача оптимального раскроя материала. Фирма изготовляет изделие, состоящее из p деталей. Причем в одно изделие эти детали входят в количествах $k_1, k_2, ..., k_r$. С этой целью производится раскрой m партий материала. В i-ой партии имеется b_i единиц материала. Каждую единицу материала можно раскроить на детали n способами. При раскрое единицы i-ой партии j-м способом получается a_{ijr} деталей r-го вида. Требуется составить такой план раскроя материала, чтобы из них получить максимальное число изделий.

Транспортная задача. Имеется n поставщиков и m потребителей одного и того же продукта. Известны выпуск продукции у каждого поставщика и потребности в ней каждого потребителя, затраты на перевозки продукции от поставщика к потребителю. Требуется построить план транспортных перевозок с минимальными транспортными расходами с учетом предложения поставщиков и спроса потребителей.

Задача о назначениях на работу. Имеется n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна c_{ij}. Нужно распределить исполнителей на работы так, чтобы минимизировать затраты на оплату труда.

Задача о смесях (о рационе). Из m видов исходных материалов, каждый из которых состоит из n компонент, составить смесь, в которой содержание компонент должно быть не меньше $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны цены единиц материалов $c_1, c_2, ..., c_m$ и удельный вес j-го компонента в единице i-го материала. Требуется составить смесь, в которой затраты будут минимальными.

Задача о рюкзаке. Имеется n предметов. Вес предмета i равен p_i, ценность – c_i $(i = 1, ..., n)$. Требуется при заданной ценности груза выбрать совокупность предметов минимального веса.

Задача о коммивояжере. Имеется n городов и заданы расстояния c_{ij} между ними $(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., n)$. Выезжая из одного (исходного) города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в исходный город. Нужно определить в каком порядке следует объезжать города, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим.

Задача о станках. На универсальном станке обрабатываются одинаковые партии из n деталей. Переход от обработки детали i к обработке детали j требует переналадки станка, которая занимает c_{ij} времени. Требуется определить последовательность обработки деталей, при которой общее время переналадок станка при обработке партии деталей минимально.

Задача о распределении капиталовложений. Имеется n проектов, причем для каждого проекта j известны ожидаемый эффект η от его реализации и необходимая величина капиталовложений g_j. Общий объем капиталовложений не может превышать заданной величины b. Требуется определить, какие проекты необходимо реализовать, чтобы суммарный эффект был наибольшим.

Задача о размещении производства. Планируется выпуск m видов продукции, которые могли бы производиться на n предприятиях ($n > m$). Издержки производства и сбыта единицы продукции, плановый объем годового производства продукции и плановая стоимость единицы продукции каждого вида известны. Требуется из n предприятий выбрать такие m, каждое из которых будет производить один вид продукции.

Попытка математического описания поведения людей приводит к формализации принципов поведения. В рамках такой формализации описывается не всякое поведение, а поведение разумных людей, связанное с принятием решения. При этом отправными точками являются следующие факты. Во-первых, люди принимают решение (ЛПР) не от нечего делать, а для достижения какой-то цели (достижение определенного уровня благосостояния, выполнение плана или взятых на себя обязательств и т. д.); во-вторых, если существуют различные варианты (пути) достижения цели, то естественно стремиться к такому решению, которое наилучшим образом способствует достижению поставленной цели (в смысле выгодности, справедливости, устойчивости). Поэтому можно предложить следующее определение.

В задаче принятия решения под **принципом оптимальности** понимается та совокупность правил, при помощи которых ЛПР определяет свое действие (решение, альтернативу, стратегию), наилучшим образом способствующее достижению преследуемой им цели. Решение ЛПР, удовлетворяющее выбранному принципу оптимальности, называется **оптимальным решением.**

Конечная цель исследования любой задачи принятия решения — это **нахождение оптимальных решений** для всех ЛПР.

Принцип оптимальности выбирается исходя из учета конкретных условий принятия решения: количества участников, их возможностей и целей, характера столкновения интересов. Формализация оптимального поведения — один из сложных этапов математического моделирования.

Разработка любого принципа оптимальности оправдана, если он отвечает следующим требованиям:

- адекватное отражение понятия оптимальности на содержательном (интуитивном) уровне;
- существование оптимальных решений (возможно при дополнительных предположениях);
- возможность выявления отличительных признаков оптимальных решений для их обнаружения (необходимых и достаточных признаков оптимальности);

- наличие метода вычисления оптимальных решений (точного или приближенного).

В теории принятия решения (особенно в теории игр), разработано большое число формальных принципов оптимального поведения.

Итак, экономико-математическое моделирование изучает экономические вопросы с применением математического аппарата. Оно исследует не сами объекты, а их математические модели. Полученные теоретические результаты интерпретируются на языке исходной экономической задачи и применяются на практике. С помощью математических методов исследуются сложные экономические задачи описательного, оптимизационного и управленческого типов, которые нельзя решить с помощью других более простых методов или основываясь только лишь на опыте и "здравом смысле". Математическое моделирование можно применить только в том случае, если экономическая проблема достаточно хорошо освоена на содержательном уровне. Практическое значение модель приобретает только тогда, когда ее изучение имающимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. В организационно-экономическом моделировании применяются подходы и методы из различных разделов исследования операций, методов оптимизации, теории вероятностей, математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

Дисциплина Риск-менеджмент относится к вариативной части Профессионального модуля образовательных программ - программ магистратуры направлений подготовки 27.04.05 – Инноватика и 27.04.08 – Управление интеллектуальной собственностью.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КАК СТАНДАРТ СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ОБЛАСТИ РИСК-МЕНЕДЖМЕНТА

1.1 Основные причины, возможности и условия применения математических методов в риск-менеджменте

Такие науки, как физика, химия, биология изучают непосредственно сам реальный объект (возможно в уменьшенных масштабах и в лабораторных условиях). Научные результаты, после необходимой проверки, также непосредственно можно применить на практике. Математика же изучает не сами объекты, а их модели. "Строительным материалом" для модели являются буквенные обозначения, математические символы и соотношения. То есть описание объекта и формулировка проблемы переводятся с обычного языка на "язык математики" (формализуются), в результате чего и получается математическая модель. Далее эта модель исследуется как математическая задача. Полученные научные результаты нельзя сразу применить на практике, так как они сформулированы на математическом языке. Поэтому осуществляется обратный процесс — содержательная интерпретация (на языке исходной проблемы) полученных математических результатов. Только после этого решается вопрос об их применении на практике.

Для возможного проникновения математики в ту или иную область, последняя должна достичь определенного уровня содержательной зрелости. Применение математических методов не полезно, а вредно до тех пор, пока реальное явление не освоено на гуманитарном (доматематическом) уровне. Следует отметить также, что не все элементы и факторы экономической системы могут быть формализованы. Таковы, например, психологические и эмоциональные факторы, настроения людей. Многие задачи просто "не решаются" на уровне должной строгости. Поэтому математическая модель (как и всякая модель) представляет собой не более чем упрощение действительности. Однако в том и заключается методология прикладной математики, что для нее характерны менее формальные подходы (по сравнению с "чистой" математикой), категории не чисто качественные, но и не чисто количественные, свои приемы и методы (экспертные оценки, имитационное моделирование и др.).

Итак, неотъемлемой частью методики прикладной математики является всесторонний анализ реальной проблемы, предшествующий ее математическому моделированию. В целом системный анализ проблемы, предполагает выполнение следующих этапов:

- гуманитарный (доматематический) анализ проблемы;
- математическое исследование проблемы;
- применение полученных результатов на практике.

Проведение такого системного анализа каждой конкретной проблемы должно осуществляться исследовательской группой, включающей экономистов (как постановщиков проблемы или заказчиков), математиков, юристов, социологов, психологов, экологов и т. д. Причем математики, как основные исследователи, должны участвовать не только в "решении" задачи, но и в ее постановке, а также во внедрении результатов на практике.

Для проведения математических исследований экономической задачи требуется выполнение следующих основных этапов:

1) изучение предметной области и определение цели исследования;
2) формулировка проблемы;
3) сбор данных (статистических, экспертных и прочих);
4) построение математической модели;
5) выбор (или разработка) вычислительного метода и построение алгоритма решения задачи;
6) программирование алгоритма и отладка программы;
7) проверка качества модели на контрольном примере;
8) внедрение результатов на практике.

Этапы **1—3** относятся к доматематической части исследования. Очень важно, чтобы предметная область была досконально изучена самими экономистами для того, чтобы они, как заказчики, могли четко сформулировать проблему и определить цели перед исследователями. Исследователям должны быть предоставлены все необходимые документальные и статистические данные в исчерпывающем объеме. Сбор статистических данных или иной информации - не дело математиков, их дело — организация хранения, анализ и обработка данных, предоставленных им в удобной (электронной) форме заказчиками.

Этапы **4—7** относятся к математической части исследований. Результатом этапа **4** должна быть формулировка исходной проблемы в виде строгой математической задачи. Редко математическую модель можно "подобрать" из числа имеющихся, известных моделей. Процесс подбора параметров модели таким образом, чтобы она соответствовала изучаемому объекту, называется идентификацией модели. Исходя из характера полученной модели (задачи) и цели исследования выбирают либо известный метод, либо приспосабливают (модифицируют) известный метод, либо разрабатывают новый. После этого составляют алгоритм (порядок решения задачи) и программу для ЭВМ. Полученные с помощью этой программы результаты анализируют: решают тестовые задачи, вводят необходимые изменения и исправления в алгоритм и программу.

Если для "чистой" математики традиционным является однократный выбор математической модели и однократная формулировка допущений в самом начале исследования, то в прикладных работах часто бывает полезно вернуться к модели и внести в нее исправления после того, как первый тур пробных расчетов уже произведен. Более того, часто оказывается плодотворным своеобразный "спор" моделей, когда одно и то же явление описывается не одной, а несколькими моделями. Если выводы оказываются одними и теми же (приблизительно) при разных моделях, разных методах исследования — это весомое свидетельство правильности расчетов, адекватности модели самому объекту, объективности выдаваемых рекомендаций.

Заключительный этап **8** проводится совместными усилиями заказчиков и разработчиков модели.

Результаты математических (как и всяких научных) исследований, как бы они хороши не были, являются лишь рекомендацией к использованию на практике. Окончательное решение этого вопроса — применять или нет — зависит от заказчика, т. е. от лица ответственного за исход и за последствия, к которым приведет применение рекомендуемых результатов.

Для построения математической модели конкретной экономической задачи (проблемы) рекомендуется выполнение следующей последовательности работ:

1) определение известных и неизвестных величин, а также существующих условий и предпосылок (что дано и что требуется найти?);
2) выявление важнейших факторов проблемы;
3) выявление управляемых и неуправляемых параметров;
4) математическое описание посредством уравнений, неравенств, функций и иных отношений взаимосвязей между элементами модели (параметрами, переменными), исходя из содержания рассматриваемой задачи.

Известные параметры задачи относительно ее математической модели считаются **внешними** (заданными априори, т. е. до построения модели). В экономической литературе их называют **экзогенными переменными**. Значение же изначально неизвестных переменных вычисляются в результате исследования модели, поэтому по отношению к модели они считаются **внутренними**. В экономической литературе их называют **эндогенными переменными**.

В пункте **2** под важнейшими понимаются факторы, которые играют существенную роль в самой задаче и которые так или иначе влияют на конечный результат. В пункте **3** управляемыми называются те параметры задачи, которым можно придавать произвольные числовые значения исходя из условий задачи; неуправляемыми считаются те параметры, значение которых зафиксировано и не подлежит изменению.

С точки зрения назначения, можно выделить **описательные модели** и **модели принятия решения**. **Описательные модели** отражают содержание и основные свойства экономических объектов как таковых. С их помощью вычисляются числовые значения экономических факторов и показателей.
Модели принятия решения помогают найти наилучшие варианты плановых показателей или управленческих решений. Среди них наименее сложным являются оптимизационные модели, посредством которых описываются (моделируются) задачи типа планирования, а наиболее сложными — игровые модели, описывающие задачи конфликтного характера с учетом пересечения различных интересов. Эти модели отличаются от описательных тем, что в них имеется возможность выбора значений управляющих параметров (чего нет в описательных моделях).

В математической экономике трудно переоценить роль моделей принятия решения. Наиболее частое применение находят те из них, которые сводят исходные задачи оптимального планирования производства, рационального распределения ограниченных ресурсов и эффективной деятельности экономических субъектов к экстремальным задачам, к задачам оптимального управления и к игровым задачам. Какова же общая структура таких моделей?

Любая задача принятия решения характеризуется наличием лица или лиц, преследующих определенные цели и имеющих для этого определенные возможности. Поэтому для выявления основных элементов модели принятия решения требуется ответить на следующие вопросы:

- кто принимает решение?
- каковы цели принятия решения?
- в чем состоит принятие решения?
- каково множество возможных вариантов достижения цели?
- при каких условиях происходит принятие решения?

Итак, перед нами некая общая задача принятия решения. Для построения ее формальной схемы (модели) введем общие обозначения.

Буквой N обозначим множество всех, принимающих решение сторон. Пусть $N=\{1,2,...,n\}$, т.е. имеется всего n участников идентифицируемых только номерами. Каждый элемент $i \in N$ называется **лицом, принимающим решение** (ЛПР) (например, отдельная личность, фирма, плановый орган большого концерна, правительства и др.).

Предположим, что множество всех допустимых решений (альтернатив, стратегий) каждого ЛПР предварительно изучено и описано математически (например, в виде системы неравенств). Обозначим их через $X_1, X_2, ..., X_n$. После этого процесс принятия решения всеми ЛПР сводится к следующему формальному акту: каждое ЛПР выбирает конкретный элемент из своего допустимого множества решений $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$. В результате получается набор $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ выбранных решений, который мы называем **ситуацией**.

Для оценки ситуации x с точки зрения преследуемых целей ЛПР строятся функции $f_1, f_2, ..., f_n$ (называемыми **целевыми функциями** или **критериями качества**), ставящие в соответствие каждой ситуации x числовые оценки $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ (например, доходы фирм в ситуации x, или их затраты и т. д.). Тогда цель i-го ЛПР формализуется следующим образом: выбрать такое свое решение $x_i \in X_i$, чтобы в ситуации $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ число $f_i(x)$ было как можно большим (или меньшим). Однако достижение этой цели от него зависит частично в виду наличия других сторон, влияющих на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей. Этот факт пересечения интересов (конфликтность) отражается в том, что функция f_i помимо x_i зависит и от остальных переменных x_j ($j \neq i$). Поэтому в моделях принятия решения со многими участниками их цели приходится формализовать иначе, чем максимизация или минимизация значений функции $f_i(x)$.

Наконец, пусть нам удалось математически описать все те условия, при которых происходит принятие решения (описание связей между управляемыми и неуправляемыми переменными, описание влияния случайных факторов, учет динамических характеристик и т.д.). Совокупность всех этих условий для простоты обозначим одним символом $\sum$.

Таким образом, общая схема задачи принятия решения может выглядеть так:

$$\left\langle N, X_1, ..., X_n; f_1(x), ..., f_n(x), \sum \right\rangle \qquad (1.1.1)$$

Конкретизируя элементы модели (1.1.1), уточняя их характеристики и свойства, можно получить тот или иной конкретный класс моделей принятия решения. Так если в (1.1.1) N состоит только из одного элемента ($n = 1$), а все условия и предпосылки исходной реальной задачи можно описать в виде множества допустимых решений этого единственного ЛПР, то из (1.1.1) получаем структуру оптимизационной (экстремальной) задачи: $\langle X, f \rangle$. В этой схеме ЛПР может рассматриваться как планирующий орган. С помощью данной схемы можно написать экстремальные задачи двух видов: задача на максимум $f(x) \to \max\limits_{x \in X}$ и задача на минимум $f(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Если в экстремальной задаче явно учитывается фактор времени, то она называется **задачей оптимального управления**. Если $n \geq 2$, то (1.1.1) является общей схемой задачи принятия решения в условиях конфликта, т. е. в тех ситуациях, когда имеет место пересечение интересов двух или более сторон.

Часто у ЛПР имеется не одна, а несколько целей. В этом случае из (1.1.1) получаем схему $\left\langle X, f_1(x), ..., f_n(x), \sum \right\rangle$, где все функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ определены на одном и том же множестве X. Такие задачи называются **задачами многокритериальной оптимизации**.

Имеются классы задач принятия решения, получившие свои названия исходя из их назначения: системы массового обслуживания, задачи управления запасами, задачи сетевого и календарного планирования, теория надежности и др. Перечисленные здесь разновидности моделей и задач изучаются в разделах исследования операций с соответствующими названиями.

Если элементы модели (1.1.1) не зависят явно от времени, т. е. процесс принятия решения сводится к мгновенному акту выбора точки из заданного множества, то задача называется **статической**. В противном случае, т. е. когда принятие решения представляет собой многоэтапный дискретный или непрерывный во времени процесс, задача называется **динамической**. Если элементы модели (1.1.1) не содержат случайных величин и вероятностных явлений, то задача называется **детерминированной**, в противном случае — **стохастической**.

Экономико-математическое моделирование означает формулировку реальной задачи на математическом языке. Образно говоря, морфология этого языка направлена на обозначение реальных величин (в нашем случае экономических) специальными символами, а синтаксис - на формальное описание взаимосвязей между этими величинами. Здесь мы напомним исходные понятия этого языка.

Для вывода общих закономерностей удобно работать не с конкретными числами, а с их буквенными обозначениями. Например, говорят "число a", имея ввиду, что a есть какое-то конкретное число (отрицательное, положительное или нуль). Как правило, известные числа обозначаются начальными буквами из латинского алфавита: $a, b, c, \ldots$ или греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, а неизвестные величины – латинскими буквами x, y, z или греческими буквами η, θ, ξ. Так как для обозначения разных величин всех букв не хватает, то часто пользуются индексами x_i, y^k, α_{ij}. Например, набор продуктов, состоящий из 25 видов, количество которых известно, удобнее обозначить ($a_1, a_2, \ldots, a_{25}$), а если их количество не известно, то - ($x_1, x_2, \ldots, x_{25}$). Здесь каждый индекс $i = 1, 2, \ldots 25$ заменяет название определенного продукта.

Для удобства совокупность чисел обозначается одной буквой: $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$; x называют **вектором**, числа x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ - **компонентами** этого вектора, а число n всех компонент - **размерностью** этого вектора. Вектор размерности n называют еще точкой n-мерного пространства и пишут $x \in R^n$. Таким образом, R^n обозначает множество всех векторов размерности n. Множество векторов, удовлетворяющих тем или иным условиям (свойствам, ограничениям) обозначают заглавными буквами. Например, множество всевозможных наборов продуктов n видов, которых можно приобрести за определенную сумму денег, обозначим через B. В этом случае пишут $B \subset R^n$ и говорят, что B есть **подмножество** n-мерного пространства R^n. Теперь вместо общей записи $x \in R^n$ можно записать более конкретно: $x \in B \subset R^n$ (или просто $x \in B$).

Не все экономические величины можно задавать числами или векторами. Например, нам нужно составить план перевозок некоторого материала с трех складов в пять объектов строительства. Обозначим через a_{ij}- количество перевозимого материала с i-го склада ($i = 1, 2, 3$) в j-ый объект строительства ($j = 1, \ldots, 5$). Тогда весь план перевозок можно представить в виде таблицы:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	3
1	2	3	4	5	

номера складов

номера объектов строительства

Для удобства совокупность таких чисел обозначают одной буквой:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и называют матрицей. Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Число строк (m) и число столбцов (n) называют размерностью матрицы. Сокращенно матрицу размерности $m\times n$ записывают как $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$. Матрицу можно рассматривать как совокупность векторов - столбцов или векторов - строк.

Задача 1.1.1. Пусть некоторый экономический регион производит несколько (n) видов продуктов исключительно своими силами и только для населения данного региона. Предполагается, что технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен. Надо определить годовой объем выпуска продуктов, с учетом того, что этот объем должен обеспечить как конечное, так и производственное потребление.

Решение: Составим математическую модель этой задачи. По ее условию даны: виды продуктов, спрос на них и технологический процесс; требуется найти объем выпуска каждого вида продукта.

Обозначим известные величины:

c_i — спрос населения на i-й продукт ($i=1,\dots,n$);

a_{ij} — количество i-го продукта, необходимое для выпуска единицы j-го продукта по данной технологии ($i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$).

Обозначим неизвестные величины:

x_i — объем выпуска i-го продукта ($i=1,\dots,n$);

совокупность $c=\left(c_1,\dots,c_n\right)$ называется вектором спроса, числа a_{ij} — технологическими коэффициентами, а совокупность $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ — вектором выпуска.

По условию задачи вектор x распределяется на две части: на конечное потребление (вектор c) и на воспроизводство (вектор $x-c$). Вычислим ту часть вектора x которая идет на воспроизводство.

По нашим обозначениям для производства x_j количества j-го товара идет $a_{ij}x_j$ количества i-го товара. Тогда сумма $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n$ показывает ту величину i-го товара, которая нужна для всего выпуска $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)$.

Следовательно, должно выполняться равенство:

$$x_i-c_i=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n.$$

Распространяя это рассуждение на все виды продуктов, приходим к искомой модели:

$$x_1 - c_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$$
$$x_2 - c_2 = a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$..$$
$$x_n - c_n = a_{n1}x_n + ... + a_{nn}x_n.$$

Решая эту систему из n линейных уравнений относительно $x_1,...,x_n$ и найдем требуемый вектор выпуска.

Для того чтобы написать эту модель в более компактной (векторной) форме, введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная ($n \times n$) —матрица A называется технологической матрицей. Легко проверить, что наша модель теперь запишется так: $x - c = Ax$ или $x - Ax = c$.

Мы получили классическую модель "затраты-выпуск", автором которой является известный экономист В.Леонтьев.

Задача 1.1.2. Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти: сортом А в количестве 10 единиц, сортом В — 15 единиц. При переработке из нефти получаются два материала: бензин (обозначим Б) и мазут (М). Имеется три варианта технологического процесса переработки:
I: 1ед.А + 2ед.В дает 3ед.Б + 2ед.М
II: 2ед.А + 1ед.В дает 1ед.Б + 5ед.М
III: 2ед.А + 2ед.В дает 1ед.Б + 2ед.М
Цена бензина — 10 долл. за единицу, мазута — 1 долл. за единицу. Требуется определить наиболее выгодное сочетание технологических процессов переработки имеющегося количества нефти.

Решение: Перед моделированием уточним следующие моменты. Из условия задачи следует, что "выгодность" технологического процесса для завода следует понимать в смысле получения максимального дохода от реализации своей готовой продукции (бензина и мазута). В связи с этим понятно, что "выбор (принятие) решения" завода состоит в определении того, какую технологию и сколько раз применить. Очевидно, что таких возможных вариантов достаточно много.

Обозначим неизвестные величины: x_i - количество использования i-го технологического процесса ($i = 1,2,3$).

Остальные параметры модели (запасы сортов нефти, цены бензина и мазута) известны.

Теперь одно конкретное решение завода сводится к выбору одного вектора $X = (x_1, x_2, x_3)$, для которого выручка завода равна $(32x_1 + 15x_2 + 12x_3)$ долл. Здесь 32 долл. — это доход, полученный от одного применения первого технологического процесса (10 долл.·3ед.Б + 1 долл. ·2ед.М = 32 долл.). Аналогичный смысл имеют коэффициенты 15 и 12 для второго и третьего технологических процессов соответственно. Учет запаса нефти приводит к следующим условиям:

для сорта А: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10$

для сорта В: $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15$,

где в первом неравенстве коэффициенты 1, 2, 2 — это нормы расхода нефти сорта А для одноразового применения технологических процессов I, II, III соответственно. Коэффициенты второго неравенства имеют аналогичный смысл для нефти сорта В.

Математическая модель в целом имеет вид: найти такой вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$ чтобы максимизировать $f(x) = 32x_1 + 15x_2 + 12x_3$ при выполнении условий:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Сокращенная форма этой записи такова:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3 \tag{1.1.2}$$
$$f(x) = 32x_1 + 15x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Мы получили так называемую задачу линейного программирования. Модель (1.1.2) является примером оптимизационной модели детерминированного типа (с вполне определенными элементами).

Задача 1.1.3. На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума. В магазин должен быть завезен только один из типов данного товара. Требуется выбрать тот тип товара, который целесообразно завести в магазин. Если товар типа j будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j, если же он не будет пользоваться спросом - убыток q_j.

Решение: Перед моделированием обсудим некоторые принципиальные моменты. В данной задаче лицом принимающим решение (ЛПР) является магазин. Однако исход (получение максимальной прибыли) зависит не только от его решения, но и от того, будет ли завезенный товар пользоваться спросом, т. е. будет ли выкуплен населением (предполагается, что по какой-то причине у магазина нет возможности изучить спрос населения). Поэтому население может рассматриваться как второе ЛПР, выбирающее тип товара согласно своего предпочтения. Наихудшим для магазина "решением" населения является: "завезенный товар не пользуется спросом". Так что, для учета всевозможных ситуаций, магазину нужно считать население своим "противником" (условно), преследующим противоположную цель — минимизировать прибыль магазина.

Итак, имеем задачу принятия решения с двумя участниками, преследующими противоположные цели. Уточним, что магазин выбирает один из типов товаров для продажи (всего n вариантов решений), а население — один из типов товаров, который пользуется наибольшим спросом (n вариантов решений).

Для составления математической модели нарисуем таблицу с n строками и n столбцами (всего n^2 клеток) и условимся, что строки соответствуют выбору магазина, а столбики — выбору населения. Тогда клетка (i,j) соответствует той ситуации, когда магазин выбирает i-й тип товара (i-ю строку), а население выбирает j-й тип товара (j-ю столбик). В каждую клетку запишем числовую оценку (прибыль или убыток) соответствующей ситуации с точки зрения магазина:

	1	2	......	j	....	n
1	p_1	$-q_1$	.....	$-q_1$	.....	$-q_1$
2	$-q_2$	p_2	.....	$-q_2$	.....	$-q_2$
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....
i	$-q_i$	$-q_i$	.....	$-q_i$	.....	$-q_i$
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	$-q_n$	$-q_n$	.....	$-q_n$	.....	p_n

выбор магазина

выбор населения

Числа q_i написаны с минусом для отражения убытка магазина; в каждой ситуации "выигрыш" населения (условно) равен "выигрышу" магазина, взятому с обратным знаком.

Сокращенный вид этой модели таков:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & -q_1 & \cdots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \cdots & -q_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -q_n & -q_n & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Мы получили так называемую матричную игру.

1.2 Прикладные экономические задачи: расчет предельных отношений

Основа основ любой экономики - это производство, т.к. оно, производя продукцию, позволяет людям удовлетворять свои многочисленные потребности. Экономистам все время приходится решать одну глобальную задачу - как можно больше произвести, и при этом, как можно меньше затратить ограниченных ресурсов.

Дифференциальное исчисление — широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? В какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

В экономике очень часто требуется найти наилучшее, или оптимальное значение того или иного показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т.д. Каждый показатель представляет собой функцию одного или нескольких аргументов. Например, выпуск можно рассматривать как функцию затрат труда и капитала (как это делается в производственных функциях). Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума (максимума или минимума) функции одной или нескольких переменных. Подобные задачи порождают класс экстремальных задач в экономике, решение которых требует использования методов дифференциального исчисления. Если экономический показатель y нужно максимизировать или минимизировать как функцию другого показателя x (например, задача на максимум прибыли как функции объема-выпуска), то в оптимальной точке (т.е. в точке максимума) отношение приращения функции y к приращению аргумента x должно стремиться к нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю. Иначе, если такое отношение стремится к некоторой положительной или отрицательной величине, рассматриваемая точка не является оптимальной, поскольку увеличив или уменьшив аргумент x, можно изменить величину y в нужном направлении. В терминах дифференциального исчисления это означает, что необходимым условием экстремума функции $y = f(x)$ является равенство нулю **ее производной**.

В экономике часто приходится решать задачи на экстремум функций нескольких переменных, поскольку экономические показатели обычно зависят от многих факторов. Такие задачи хорошо изучены теорией функций нескольких переменных, использующей методы дифференциального исчисления. Многие задачи включают не только максимизируемую (минимизируемую) функцию, но и ограничения (скажем, бюджетное ограничение в задаче потребительского выбора). Это — задачи математического программирования, для решения которых разработаны специальные методы, также опирающиеся на дифференциальное исчисление.

Важный раздел методов дифференциального исчисления, используемых в экономике, называется **методами предельного анализа.** Предельный анализ в экономике — совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменениях объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа, их предельных значений. Предельный показатель (показатели) функции $y = f(x)$ — это ее производная (в случае функции одной переменной) или частные производные (в случае функции нескольких переменных).

В экономике широко используются средние величины: средняя производительность труда, средние издержки, средний доход, средняя прибыль и т.д. Но часто требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты или, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. С помощью средних величин ответ на этот вопрос получить невозможно. В подобных задачах требуется определить предел отношения приростов результата и затрат, т.е. найти предельный эффект. Следовательно, для их решения необходимо применение методов дифференциального исчисления — нахождение производной в случае функции одной переменной и частных производных, если функция зависит от нескольких аргументов.

Так, например, если задана производственная функция: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i — объем затрачиваемого i-го ресурса $i = 1, 2, ..., n$, y — максимальный объем выпуска, который можно получить, затрачивая ресурсы соответственно в объемах $x_1, x_2, ..., x_n$, то предельный эффект от использования i-го ресурса (p_i) определяется следующим образом:

$$p_i = \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}.$$

Здесь величина p_i равна дополнительному объему выпуска, который получается в результате затраты дополнительной величины Δx_i i-го ресурса при неизменных объемах остальных ресурсов.

Показатель предельного эффекта в оптимизационных моделях применяется для нахождения оптимального объема производства при заданных ресурсах, а также для определения оптимального распределения ограниченных ресурсов по различным направлениям их использования. Если максимизируемый показатель (например, прибыль) есть разность результата и издержек (в данном случае результат представлен выручкой), то в оптимальной точке предельная выручка должна равняться предельным издержкам. Такое равенство должно выполняться по каждому из факторов, определяющих выручку и издержки, что вытекает из необходимости равенства нулю частных производных прибыли по всем этим факторам. Необходимые и достаточные условия оптимума во многих экономических задачах записываются с помощью частных производных и дифференциалов.

Так, если решается задача на максимум выпуска, описываемого с помощью приведенной выше производственной функции, при наличии ограничения по общему расходу денежных средств на используемые в производстве ресурсы, то в оптимальной точке должны быть равны между собой отношения предельных производительностей ресурсов и их цен. Иными словами, для всех ресурсов должен быть одинаков предельный эффект в расчете на единицу дополнительно расходуемых на эти ресурсы денежных средств.

В задаче потребительского выбора отношение предельных полезностей благ должно быть равно отношению их цен. Иначе говоря, предельная полезность в расчете на одну денежную единицу должна быть в оптимальной точке одинакова по всем благам; в противном случае бюджет потребителя мог бы быть перераспределен с увеличением его благосостояния. Таким образом, методы дифференциального исчисления позволяют не только решить различные экономические задачи, но и записать необходимые или достаточные условия оптимума в этих задачах, которые позволяют дать ответ на те или иные конкретные вопросы.

Широко используется в экономическом анализе понятие дифференциала, или главной линейной части приращения функции. Так, если некоторая величина y есть функция двух аргументов x_1 и x_2, то с использованием дифференциала легко рассчитать предельную норму замены между этими аргументами, т.е. величину, показывающую, сколько нужно фактора 2 для замены одной единицы фактора 1 с сохранением значения функции y.

Предельная норма замены важна в задачах потребительского выбора (взаимозаменяемость благ), в задачах оптимизации производства (взаимозаменяемость труда и капитала) и в ряде других задач. Пусть $y = f\left(x_1, x_2\right)$. Если мы хотим сохранить значение функции y неизменным, то это означает, что приращение y, а значит и его главная линейная часть должны быть равны нулю. Иными словами, $0 = dy = y'_{x_1} \cdot dx_1 + y'_{x_2} \cdot dx_2$. Отсюда предельная норма замены $-\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{y'_{x_2}}{y'_{x_1}}$ равняется отношению частных производных функции y по первому и второму факторам.

Методы дифференциального исчисления широко применяются не только для анализа взаимодействия отдельных экономических факторов, определения их взаимозаменяемости или оптимального сочетания, но и в сложных моделях экономики, в частности — в моделях экономической динамики. Дифференциальное исчисление — это не только аппарат, позволяющий находить решения задач с использованием таких моделей, но и необходимый составной элемент для их построения. Динамические модели применяются для решения таких задач, как определение оптимальной или равновесной траектории развития экономической системы, ее состояний в заданные моменты времени, анализ системы на устойчивость, анализ структурных сдвигов и т.п.

Из рассмотренных направлений применения дифференциального исчисления в экономике важнейшим является вопрос нахождения и анализа взаимосвязей экономических переменных, определяющих функционирование экономического объекта или протекание экономического явления.

В чем же состоит экономический смысл производной? Если фирма наращивает объем использования только некоторых или только одного из факторов производства, то прирост выпуска, приносимый дополнительными объемами этих факторов, в конце концов, начнет снижаться. Очень важной производственной задачей является умение определить при каком объеме производства удельные затраты будут минимальными и **до каких пределов** можно расширять производство.

В экономической теории активно используется понятие **«маржинальный»,** что означает **«предельный»**. Введение этого понятия в научный оборот в XIX веке позволило создать совершенно новый инструмент исследования и описания экономических явлений - инструмент, посредством которого стало возможно ставить и решать новый класс научных проблем.

Предельные или пограничные величины характеризуют процесс, изменение экономического объекта. Следовательно, производная выступает как интенсивность изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). В то же время во многих случаях можно отвлечься от дискретности и эффективно использовать **предельные величины**. Предельная величина — это изменение величины одного экономического показателя в результате увеличения на единицу другого фактора, от которого зависит данный показатель.

Например, два рабочих в час производят 100 игрушек. Если к ним добавить еще одного рабочего, то количество изготовленных игрушек возрастет до 160. Значит, третий рабочий обеспечил прирост продукции на 60 штук. Эта величина называется дополнительной, или предельной.

Экономисты рассчитывают и анализируют следующие предельные показатели:

1. Предельная полезность — это дополнительная полезность, полученная потребителем при увеличении количества потребляемого блага на одну единицу.
2. Предельный продукт труда — прирост продукции, который обеспечивает дополнительный работник.
3. Предельные издержки — дополнительные затраты, необходимые для увеличения производства продукции на одну единицу.
4. Предельный доход (выгода) — это прирост выручки, полученной производителем от продажи дополнительной единицы товара.
5. Предельная прибыль — дополнительная прибыль, полученная в результате производства и продажи еще одной единицы продукции.

Сущность предельного анализа заключается в оценке того, какие дополнительные затраты и выгоды повлекут за собой увеличение производства, продажи или потребления блага на одну единицу.

Следовательно: **предельный анализ** — это метод нахождения наилучшего, оптимального варианта соотношения дополнительных затрат и выгод, вариант производства (или потребления), при котором предельные выгоды равны предельным затратам, считается оптимальным, наилучшим.

Это главное правило предельного анализа, а также принцип экономического мышления и рационального поведения людей.

Разумный человек не должен принимать неэффективные решения. К примеру, покупать для себя еще один билет в театр (предельная выгода равна нулю) или делать уроки поздним вечером (предельная выгода меньше предельных затрат). Любое предприятие и государство при разработке планов экономического развития обязано учитывать правило равенства предельных затрат и выгод. Фирма может построить в деревне многоэтажный дом, но предельная выгода, скажем от возведения пятого этажа будет меньше предельных затрат, поскольку сельские жители предпочитают жить в отдельном доме. Правительство может несколько раз в год брать взаймы у международных финансовых организаций, однако, предельная выгода от дополнительного кредита будет намного ниже предельных затрат. В лучшем случае правительство погасит некоторую часть внешнего или внутреннего долга, который значительно вырастет за счет очередных заимствований.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков. Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции q, т.е. $r = p \cdot q$.

В условиях монополии одна фирма полностью контролируют предложение определенной продукции, а, следовательно, и цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ - есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a > 0,\ b < 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$. В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{cp} = \dfrac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход составит $r'_q = 2aq + b$. Следовательно, в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с минимальной скоростью) среднего дохода.

В условиях совершенной конкуренции, когда число участников рынка велико, и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p = b$. При этом суммарный доход составит $r = qb$ и соответственно средний доход $r_{cp} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r'_q = b$. Таким образом, в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.

В экономических исследованиях для обозначения производных часто пользуются специфической терминологией. Например, если $f(x)$ есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции от затрат фактора x, то $f'(x)$ называют **предельным продуктом**; если $g(x)$ есть функция издержек, т. е. функция $g(x)$ выражает зависимость общих затрат от объема продукции x, то $g'(x)$ называют **предельными издержками**.

Предельный анализ в экономике - совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Большей частью плановые расчеты, основывающиеся на обычных статистических данных, ведутся в форме суммарных показателей. При этом анализ заключается главным образом в вычислении средних величин. Однако в некоторых случаях оказывается необходимым более детальное исследование с учетом предельных значений. Например, при выяснении издержек производства зерна в районе на перспективу принимают во внимание, что издержки могут быть различными в зависимости, при прочих равных условиях, от предполагаемых объемов сбора зерна, так как на вновь вовлекаемых в обработку худших землях издержки производства будут выше, чем по району в среднем.

Если зависимость между двумя показателями v и x задана аналитически: $v = f(x)$ - то **средняя величина** представляет собой отношение $\frac{v}{x}$, а **предельная** – производную $\frac{dv}{dx}$.

Нахождение производительности труда. Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая количество произведенной продукции u за время работы t. Вычислим количество произведенной продукции за время $Dt = t_1 - t_0$: $\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + Dt) - u(t_0)$.

Средней производительностью труда называется отношение количества произведенной продукции к затраченному времени, т.е. $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Производительностью труда рабочего $z(t_0)$ в момент t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp} при $\Delta t \to 0$: $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Вычисление производительности труда, таким образом, сводится к вычислению производной: $z(t_0) = u'(t_0)$.

Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать $K = K(x)$. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x+\Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Dx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta K = K(x+\Delta x)-K(x)$.

Среднее приращение издержек производства есть $\frac{\Delta K}{\Delta x}$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ называется **предельными издержками производства**.

Если обозначить через $u(x)$ выручку от продажи x единиц товара, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и называется **предельной выручкой**.

С помощью производной можно вычислить приращение функции, соответствующее приращению аргумента. Во многих задачах удобнее вычислять процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующий проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют относительной производной).

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, для которой существует производная $y' = f'(x)$. **Эластичностью функции** $y = f(x)$ относительно переменной x называют предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} f'(x)$.

Его обозначают $E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%. Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть **относительно эластичным** или просто эластичным. Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос **относительно неэластичен** или просто неэластичен. Термин **совершенно неэластичный** спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин или спрос наркоманов на героин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей - тогда мы говорим, что спрос является **совершенно эластичным**.

1.3 Прикладные экономические задачи: метод наименьших квадратов для аналитического сглаживания экспериментальных зависимостей

Экономико-математические модели, в которых случайные факторы не учитываются, называются детерминированными моделями, в противном случае - стохастическими моделями. Из-за влияния неучтенных факторов в стохастической модели значение $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ показателя f, соответствующее конкретным фиксированным значениям факторов $x_1, x_2, ..., x_n$, будет уже неоднозначным. Например, в детерминированной модели спрос на товар однозначно определен его ценой, а в стохастической - под влиянием неценовых (часто случайных) факторов, таких как инфляция, мода, сезон, одной и той же цене будет соответствовать множество значений спроса. Поэтому о каждом из возможных значений спроса можно говорить лишь с некоторой вероятностью или же можно говорить о некотором среднем значении спроса.

Случайной величиной называется переменная, которая в результате испытания может принимать различные значения, причем каждое конкретное значение реализуется с известной вероятностью.

Мы будем рассматривать только **дискретные случайные величины,** т.е. те, которые принимают отдельные изолированные значения. При этом будем считать, что множество всех возможных значений конечно.

Дискретная случайная величина задается с помощью множества возможных значений и соответствующих им вероятностей (1.3.1).

Значения случайной величины R	r_1	r_2	$\dots$	r_n
Вероятности	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(1.3.1)

Такая таблица называется распределением дискретной случайной величины.

Две случайные величины называются **независимыми**, если их распределения не зависят друг от друга; в противном случае они называются **зависимыми**. Здесь имеется в виду уже не функциональная, а **статистическая зависимость**. Так называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Например, если случайная величина R зависит от случайных факторов S_1, S_2, V_1, V_2, а случайная величина Q зависит от случайных факторов S_1, S_2, U_1, то между R и Q имеется статистическая зависимость, так как среди случайных факторов есть общие S_1 и S_2.

Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость. Так называется зависимость, когда изменение одной величины влечет изменение среднего значения другой. Пусть Q - урожай зерна, R - количество удобрений. Под влиянием таких случайных факторов, как осадки, температура воздуха, с одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай. Поэтому между R и Q нет функциональной зависимости. Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Q связан с R корреляционной зависимостью.

Как видно из (1.3.1), в распределении даются характеристики отдельных значений случайной величины. Для описания случайной величины "в целом" используют ряд числовых характеристик: математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Сначала мы напомним классические или теоретико-вероятностные определения этих понятий.

Пусть случайная величина R задана законом распределения (1.3.1). Для простоты будем предполагать, что при одном испытании величина R принимает одно и только одно значение. Тогда k событий: $R=r_1,...,R=r_k$ образуют полную группу, и поэтому $p_1+...+p_k=1$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины R называется число

$$M(R)=\sum_{i=1}^{k} r_i p_i. \qquad (1.3.2)$$

Так как математическое ожидание приблизительно представляет среднее арифметическое $\frac{1}{k}(r_1+...+r_k)$, то его часто называют средним значением случайной величины, т.е. это есть приблизительная числовая характеристика случайной величины.

Разности $r_i-M(R)$, $i=1,...,k$ (или $R-M(R)$) показывают "отклонение" случайной величины R от своего среднего значения. Для одних i она положительна, для других - отрицательна. Поэтому удобно работать с квадратом отклонения $[R-M(R)]^2$. Как видно, это тоже есть случайная величина, и можно говорить о среднем значении отклонения, т.е. о математическом ожидании $M\left([R-M(R)]^2\right)$.

Дисперсией дискретной случайной величины R называется число

$$D(R)=\sum_{i=1}^{k}\left[r_i-M(R)\right]^2\cdot p_i. \qquad (1.3.3)$$

Положительный квадратный корень из дисперсии называется **среднеквадратическим отклонением** $\sigma(R)=\sqrt{D(R)}$.

Среднеквадратическое отклонение имеет тот же смысл, что и дисперсия, но с ним удобнее работать, чем с дисперсией.

Теперь приведем некоторые основные свойства числовых характеристик случайной величины.

Пусть R - фиксированная случайная величина, а $C = const$.

Тогда

$$\begin{aligned} &M(C)=C, \quad M(C\cdot R)=C\cdot M(R), \\ &D(C)=0, \quad D(C\cdot R)=C^2\cdot D(R). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Для любых дискретных случайных величин $R_1,...,R_m$

$$M\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right)=\sum_{j=1}^{m} M\left(R_j\right). \tag{1.3.5}$$

Если эти величины взаимно независимы, то

$$\begin{gathered} M\left(\prod_{j=1}^{m} R_j\right)=\prod_{j=1}^{m} M\left(R_j\right), \\ D\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right)=\sum_{j=1}^{m} D\left(R_i\right), \quad D\left(R_j+R_i\right)=D\left(R_j\right)+D\left(R_i\right), \\ \sigma\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right)=\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma^2\left(R_j\right)}. \end{gathered} \tag{1.3.6}$$

Приведенные выше характеристики случайной величины, видоизменив, можно применять и при анализе статистических данных.

Статистические данные представляют собой сведения о многократно наблюдаемых объектах или явлениях, образующих однородные совокупности. В экономике эти совокупности представляют собой, например, рабочих на промышленном предприятии, выборочные измерения урожая с одного квадратного метра, цену товара на рынке, контролируемые размеры партии деталей и т.д. Наблюдаемые значения признаков у однородных объектов варьируют (изменяются) от одного объекта к другому и представляют собой случайные величины. Вероятности значений, которые принимают такие случайные величины, определяются в процессе повторяющихся наблюдений, если общий комплекс условий остается одним и тем же.

Методами обработки и анализа статистических данных занимается раздел прикладной математики, называемый математической статистикой. Она занимается формальной стороной методов количественного исследования статистических совокупностей безотносительно к их специфической природе. Экономическое приложение математической статистики, когда исследуемые совокупности имеют экономическое происхождение, называется эконометрикой.

Первая задача математической статистики - указать способы сбора и группировки статистических сведений. Исследуемое с точки зрения интересующего признака множество объектов в целом называется **генеральной совокупностью**. На практике изучение каждого объекта часто бывает затруднительно. Поэтому выводы о закономерностях, которым подчиняются рассматриваемые объекты, основываются на изучении выборочной совокупности объектов. **Выборочной совокупностью**, или просто **выборкой**, называется конечное множество случайно отобранных из генеральной совокупности объектов.

Пусть для изучения генеральной совокупности извлечена выборка из n объектов. Предположим, что интересующий нас параметр (случайная величина) может принять k значений $r_1,...,r_k$. Эти числа называются **вариантами**. Пусть далее в n объектах значение r_1 наблюдалось n_1 раз, r_2 - n_2 раз и т.д., r_k - n_k раз, где $n_1+...+n_k=n$. Число $w_i=\frac{n_i}{n}$ называется **частотой** значения r_i.

Статистическим распределением случайной величины называется таблица

Варианты (значения случайной величины)	r_1	r_2	…	r_n
Частоты	p_1	p_2	…	p_n

(1.3.7)

Таким образом, если в теории вероятностей под распределением случайной величины понимается соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями, то в математической статистике - соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами.

Случайную величину, представленную распределением (1.3.7), обозначим через R.

Выборочной средней случайной величины R называется средняя взвешенная ее значений с весами, равными частотам:

$$\bar{r}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot r_j, \tag{1.3.8}$$

где n - объем выборки.

Заметим, что выборочная средняя будет разной для разных выборок одного и того же объема. Поэтому ее можно рассматривать как случайную величину. Можно показать, что математическое ожидание выборочной средней равно генеральной средней. В этом случае говорят, что $\bar{r}$ есть несмещенная оценка генеральной средней.

Выборочной дисперсией случайной величины R называется число

$$D=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j-\bar{r}\right)^2. \tag{1.3.9}$$

Известно, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии, т.е. ее математическое ожидание не равно генеральной дисперсии. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают так называемую **исправленную дисперсию**

$$D'=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j-\bar{r}\right)^2, \tag{1.3.10}$$

которая и является несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Соответственно исправленное среднеквадратическое отклонение есть

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j - \overline{r} \right)^2} . \qquad (1.3.11)$$

Однако σ не является несмещенной оценкой.

Очевидно, что при достаточно больших значениях n объема выборки, выражения (1.3.9) - (1.3.10) различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

Для описания совокупности двух случайных величин, кроме их математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратических отклонений пользуются и другими числовыми характеристиками - **ковариацией** (корреляционным моментом) и **коэффициентом корреляции.**

Выборочной ковариацией случайных величин R_1 и R_2 называется величина

$$\sigma_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_j \cdot r_i^1 \cdot r_j^2 - r^{-1} \cdot r^{-2}, \qquad (1.3.12)$$

где n - объем выборки, n_{ij} - частота наблюдавшейся пары $\left(r_i^1, r_j^2 \right)$, r^{-1} и r^{-2} - выборочные средние R_1 и R_2.

Ковариация служит для характеристики тесноты связи между случайными величинами. Если $\sigma_{12} = 0$, то R_1 и R_2 - независимые случайные величины, если $\sigma_{12} \neq 0$ - зависимые.

Коэффициентом корреляции случайных величин R_1 и R_2 называется отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{ij} \cdot r_i^1 \cdot r_j^2 - n \cdot r^{-1} \cdot r^{-2}}{n \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}, \qquad (1.3.13)$$

где σ_1 и σ_2 - среднеквадратические отклонения R_1 и R_2. Содержательный смысл коэффициента корреляции тот же, что и ковариации. Преимущество его состоит в том, что он не зависит от выбора единиц измерения случайных величин, т.е. это безразмерная величина.

Две случайные величины R_1 и R_2 называются коррелированными, если $r_{12} \neq 0$. В этом случае R_1 и R_2 будут зависимыми. Обратное верно не всегда, т.е. две зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

В экономико-математических исследованиях часто требуется установить и оценить корреляционные зависимости между случайными величинами. Исходя из определения такой зависимости, для двух случайных величин R_1 и R_2 мы можем установить две корреляционные зависимости:

$$M\left(R_1\right) = \varphi\left(R_2\right),\ M\left(R_2\right) = \psi\left(R_1\right),$$

где $M(R_i)$ - математическое ожидание R_i. Первое **называется уравнением регрессии** R_1 на R_2, второе - уравнением регрессии R_2 на R_1; функция φ называется **регрессией** R_1 на R_2, функция ψ - регрессией R_2 на R_1.

Раздел математической статистики, который занимается корреляционными зависимостями, называется теорией корреляции. Ее первая задача - **регрессионный анализ**, т.е. установление форм корреляционных связей (вида функции регрессии). Наиболее часто функции регрессии оказываются линейными. Если обе функции φ, ψ оказываются линейными, то корреляция называется линейной; в противном случае - нелинейной. Вторая задача теории корреляции - **корреляционный анализ**, т.е. оценка тесноты корреляционной связи между случайными величинами. Теснота корреляционной зависимости R_1 и R_2 оценивается по величине рассеяния значений R_1 вокруг среднего значения $M(R_2)$ (т.е. по дисперсии или среднеквадратическому отклонению). Большое рассеяние свидетельствует о слабой зависимости R_1 и R_2, либо об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает наличие достаточно сильной зависимости.

Одним из часто применяемых в практических исследованиях методов регрессионного анализа является **метод наименьших квадратов.** Объясним этот метод для линейной регрессии.

Рассмотрим две случайные величины X и Y с наблюдаемыми значениями $(x_1,...,x_n)$ и $(y_1,...,y_n)$ соответственно. Модель линейной регрессии Y на X имеет вид:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,...,n.$$

Здесь α и β - параметры, подлежащие оценке, ε_i - ошибка (погрешность), равная разнице между фактическими значениями и значениями модели (случайная ненаблюдаемая величина). Из этих уравнений выразим ошибки:

$$\varepsilon_i = y_i - (\alpha + \beta x_i), \quad i = 1,...,n$$

и возведем в квадрат обе части:

$$\varepsilon_i^2 = \left[y_i - (\alpha + \beta x_i)\right]^2, \quad i = 1,...,n.$$

Суть метода наименьших квадратов заключается в поиске таких значений параметров (α, β), которые минимизируют сумму квадратов регрессионных ошибок:

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\alpha + \beta x_i)\right]^2 \to \min.$$

Для нахождения точки минимума (α^*, β^*) в этой задаче безусловной оптимизации используем необходимый признак оптимальности первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{n}x_i\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно α и β, найдем:

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x}, \ \beta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2},$$

где $\bar{y} = M\left(Y\right)$, $\bar{x} = M\left(X\right)$.

Итак, мы получили **уравнение регрессии** $Y = \alpha^* + \beta^* X$, график которого (**линия регрессии**) приведен на рис. 1.3.1.

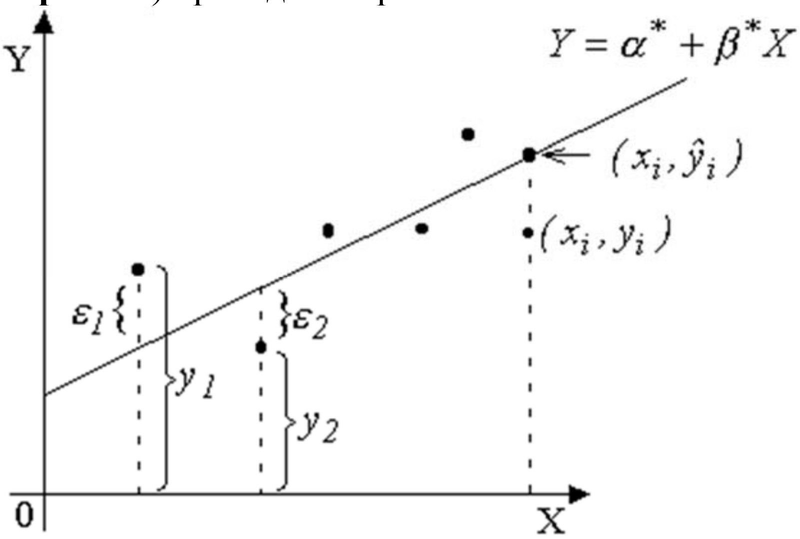


Рис. 1.3.1. Линия регрессии

На линии регрессии фактическому значению x_i соответствует **расчетное значение** $\hat{y}_i$ величины y_i:

$$\hat{y}_i = \alpha^* + \beta^* x_i, \ i = 1,...,n.$$

Остаток наименьших квадратов $\hat{\varepsilon}_i$ выражается как разность фактического и расчетного значений:

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \left(\alpha^* + \beta^* x_i\right), \ i = 1,...,n,$$

т.е. остаток есть расчетное значение случайной ошибки.

В качестве меры адекватности регрессионной модели часто используют коэффициент корреляции. Чем больше значение этого коэффициента, тем выше степень адекватности уравнения регрессии (при достаточно большом числе наблюдений).

1.4 Прикладные экономические задачи: графические представления

В основе многих математических исследований лежит выяснение зависимостей между различными экономическими величинами. Здесь недостаточно констатировать, что одна величина зависит от другой или ряда других. Нужно выяснить природу или закономерности этой взаимосвязи, иначе говоря, описать математически эту взаимосвязь.

Например, нас интересует рыночная стоимость какого-то товара. Обозначим ее буквой p. В числе основных факторов, от которых зависит эта величина, мы можем назвать вложенные в производство этого товара материальные (обозначим x_1) и трудовые (обозначим x_2) затраты, а так же спрос (обозначим x_3). В математике зависимую величину (p) называют **функцией**, а независимые величины (x_1, x_2, x_3) - **аргументами** и пишут $p = p(x_1, x_2, x_3)$. Эта запись означает, что каждым конкретным числовым значениям аргументов x_1, x_2, x_3 соответствует определенное числовое значение $p(x_1, x_2, x_3)$ функции p. Остается выяснить конкретный вид функций p, отражающий природу этой зависимости.

В математике изучаются различные виды функций, отличающихся друг от друга как по количеству аргументов, по внешнему (аналитическому) виду так и по свойствам.

Наиболее простыми являются функции, зависящие от одного аргумента: $f = f(x)$, $x \in R^1$. Часто указывается область $B \subset R^1$ допустимых значений аргумента (открытый или замкнутый интервал или множество дискретных (отдельных) точек на числовой оси). Так что функция f определена (имеет смысл) только для $x \in B$. На практике функции одного аргумента применяются при сравнительно неглубоких исследованиях.

Например, известно, что спрос, как платежеспособная потребность является функцией от цены товара и бюджета потребителя. То есть спрос - это функция двух аргументов: $f = f(x_1, x_2)$. Но если нас интересует зависимость спроса только от цены товара, то "с некоторой натяжкой" можно считать, что спрос есть функция одного аргумента (цены): $f = f(x)$.

Поэтому напомним необходимые в дальнейшем определения как для функции одного аргумента, так и для функций многих аргументов. Функция $f = f(x)$, $x \in R^1$, называется **линейной функцией,** если ее можно представить в виде $f(x) = ax + b$, где a, b - *const* (постоянные числа).

Графиком линейной функции является прямая линия, причем при $b = 0$ она проходит через начало координат (рис. 1.4.1).

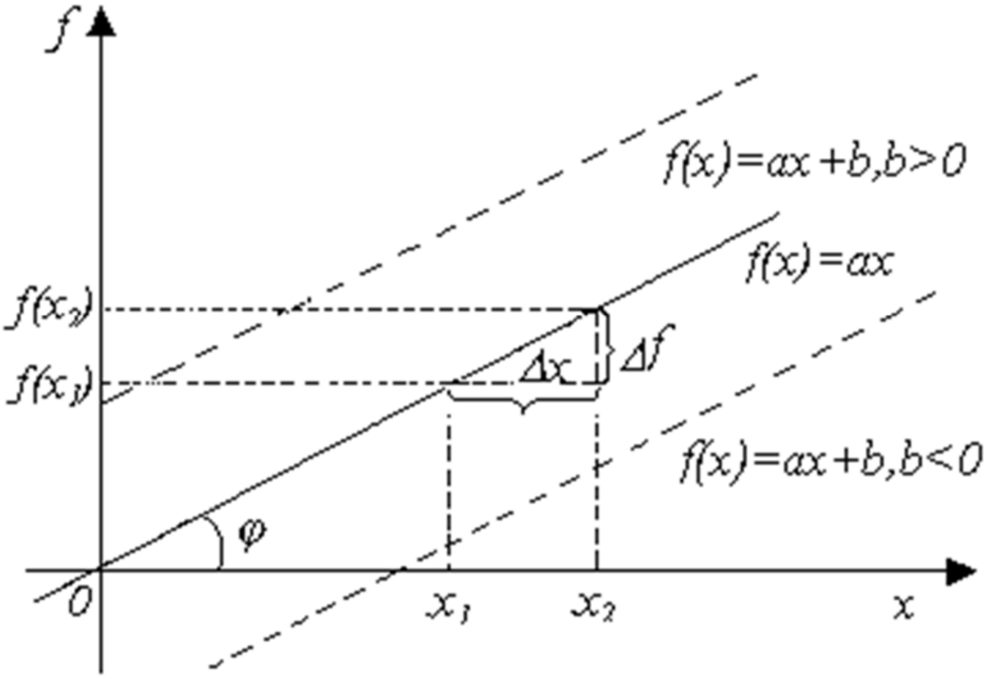


Рис. 1.4.1. График линейной функции

Наклон этой линии относительно положительного направления оси Ox зависит от величины коэффициента a .

Пусть $b=0$ и $x_1, x_2 \in R^1$.

Обозначим $x_2 - x_1 = \Delta x$, $f(x_2) - f(x_1) = \Delta f$.

Тогда $a = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ (отношение "противолежащего катета" к "прилежащему катету" относительно угла φ (см. рис.1.4.1)).

Поэтому $a = tg\varphi$ называется угловым коэффициентом – чем больше a , тем больше угол наклона φ и наоборот.

Функция многих переменных $f = f(x_1,...,x_n)$, $x = x_1,...,x_n$, называется линейной функцией, если ее можно представить в виде $f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$, где $a_1,...,a_n,b$ - *const*. Графическое изображение такой функции можно представить только при $n=2$ и им является двумерная плоскость в пространстве R^3, которое при $b=0$ проходит через начало координат; при $n>2$ функцию нельзя изобразить графически.

Линейные функции отражают прямо пропорциональную или обратно пропорциональную зависимость между экономическими показателями и факторами. Строго говоря, в экономике нет линейных зависимостей в чистом виде. Поэтому линейные функции весьма приближенно описывают существующие взаимосвязи. В то же время они находят широкое применение как в теории, так и в практике.

Для описания сложных экономических взаимосвязей применяются **нелинейные функции**. Из этого класса функций в математической экономике чаще других применяются степенные функции (содержащие элементы вида x^a , где

a - *const*), показательные функции(содержащие элементы вида a^x, где a - *const*), логарифмические функции(содержащие элементы вида $\log_a x$, где a - *const*). Примеры графиков таких функций на плоскости показаны на рис.1.4.2.

Рис. 1.4.2. Графики нелинейных функций

Множество всех точек, для которых $f(x) = c$, где c-*const*, называется **линией уровня** функции f. Каждому числу c соответствует своя линия уровня функции f. Поэтому у любой функции существует бесконечное множество линий уровня. На рис.1.4.3 показано расположение линий уровня функции $f = x_1^2 + x_2$ в пространстве переменных x_1, x_2. Это есть парабола, описываемая уравнениями $x_1^2 + x_2 = c$ для различных c. Можно показать, что такие кривые заполняют всю плоскость R^2. Иначе говоря, для любой точки $\bar{x} \in R^2$ найдется такое число $\bar{c}$, что тогда $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 = \bar{c}$, то есть кривая $x_1^2 + x_2 = c$ проходит через точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

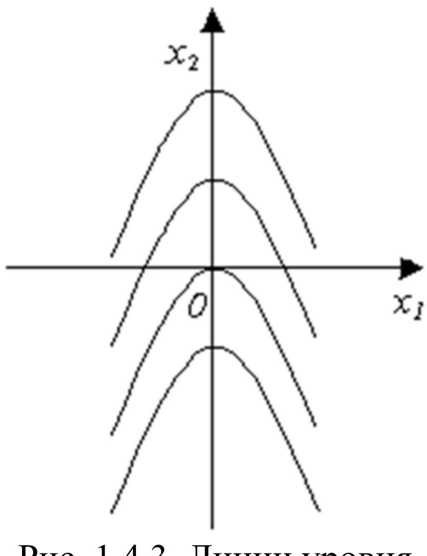


Рис. 1.4.3. Линии уровня

Для построения функций, описывающих взаимосвязи экономических величин, важную роль играют статистические данные, которые при их достаточном количестве указывают на закономерность взаимосвязей этих величин.

Функции могут быть построены исходя из логических соображений, вытекающих из условия реальной задачи, а также с использованием известных закономерностей и формул из области естествознания.

Задача 1.4.1. Наблюдение за рынком показало, что в течение шести месяцев спрос, предложение и цена на говядину в некотором регионе изменились следующим образом:

Экономические величины	М Е С Я Ц Ы					
	1	2	3	4	5	6
Спрос (тонна)	55	47.5	40	32.5	25	17.5
Предложение (тонна)	4.9	14.05	23.2	32.35	41.5	50.65
Цена (руб.)	30	35	40	45	50	55

Показать в виде функции следующие зависимости:

1. спроса от цены;
2. предложения от цены;
3. цены от спроса и предложения.

Решение: Для этого введем следующие обозначения: x_1 - спрос, x_2 -предложение, p - цена. Построим сначала функцию спроса x_1 от цены p. Построив по точкам (цена, спрос) видим, что функция спроса на плоскости $x_1 0 p$ изображается прямой линией (рис.1.4.4). Для первых двух месяцев имеем $\frac{\Delta x_1}{\Delta p} = \frac{55-47.5}{30-35} = -1.5$ Можно показать, что для остальных пар месяцев отношение $\frac{\Delta x_1}{\Delta p}$ имеет то же самое значение. Линия спроса пересекает ось $0x_1$ в точке (0,100). Таким образом, мы получаем $x_1 = -1.5p + 100$. Рассуждая аналогично, получим аналитический вид функции предложения от цены $x_2 = 1.83p - 50$. Для определения вида функции цены от спроса и предложения, из полученных уравнений выразим цену: $p = 3.03(x_1 + x_2) - 151.5$.

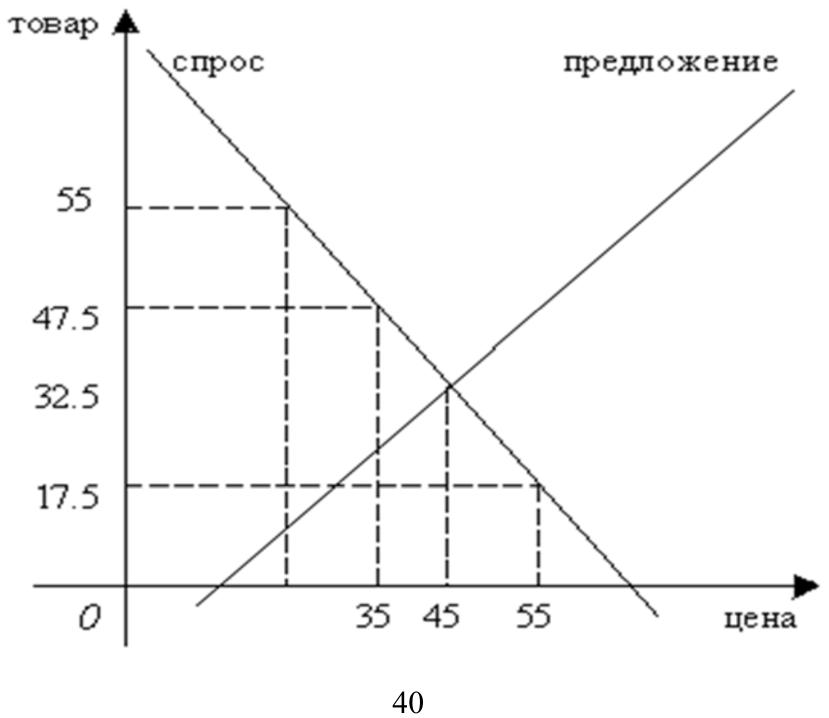


Рис. 1.4.4. Графическое изображение статистических данных из задачи 1.4.1

В задаче 1.4.1 показано, как можно построить функции с помощью статистических данных.

Определим еще один класс функций, имеющих применение в экономико-математических моделях. Это многозначные функции.

Функция f, заданная на некотором множестве $B \subset R^n$ и ставящее в соответствие каждой точке $x \in B$ не одно число $f(x) \in R^1$, а множество чисел $\{f(x)\} \in R^1$, называется **многозначной функцией**.

Задача 1.4.2. Необходимые покупателю товары двух видов имеются на рынке в количествах a_1 и a_2. Ему нужно купить как можно большее количество этих товаров, но обязательно в соотношении 1:2. Построить функцию, отражающую интерес данного покупателя по отношении к этим товарам.

Решение: Через x_i обозначим количество i-го товара. Тогда $B = \left\{ x \in R^2 / \quad 0 \le x_1 \le a_1, 0 \le x_2 \le a_2 \right\}$ есть множество всех наборов из двух видов товаров.

Теперь искомую функцию на множестве B можно задать следующим образом: $f(x) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad x_1 \le \min\limits_{y \in B} \left\{ y_1, \frac{1}{2} y_2 \right\} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Для любой точки $x = (x_1, x_2)$, принадлежащей множеству B и удовлетворяющий условию $x_1 : x_2 = 1:2$, всем значениям построенной функции соответствует отрезок прямой xz (рис. 1.4.5), то есть это есть многозначная функция.

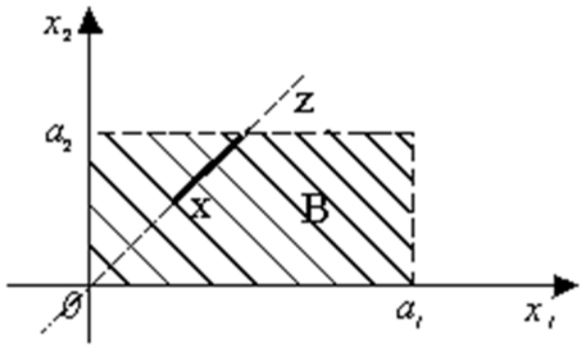


Рис. 1.4.5. Множество значений функции f из задачи 1.4.2

Обратим внимание на то, что каждое конкретное "значение" полученной выше функции выражается вектором (x_1, x_2) (точкой отрезка xz). Поэтому это есть так называемая вектор-функция.

Так как в математической экономике любые множества и функции описывают ту или иную структуру и взаимосвязь между экономическими величинами, то любые их формальные (теоретические) свойства являются отражением или следствием фактов, имеющих место в реальной экономике. Поэтому мы напомним только те свойства функций и множеств, которые допускают содержательную экономическую интерпретацию. При этом, в основном, будем говорить о функциях многих переменных, так как все приводимые ниже определения легко трансформируются на случай функции одной переменной.

Пусть функция f определена на множестве $B \subset R^n$, то есть $f : B \to R^1$.

Функция f называется **непрерывной в точке** $x^0 \in B$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $\left|x - x^0\right| < \delta$ выполняется неравенство $\left|f(x) - f\left(x^0\right)\right| < \varepsilon$. Если функция f непрерывна в каждой точке $x \in B$, то она называется **непрерывной на множестве** B.

Экономический смысл непрерывной функции заключается в том, что при малом изменении значений факторов зависящий от них показатель изменяется незначительно. В качестве примера непрерывных функций в условиях стабильной экономики можно привести спрос и предложение на рынке товаров (как функций от цен товаров), прибыль предприятия (как функции от объемов выпуска и затрат), рентабельность производственных фондов (как функция от прибыли, стоимости основных фондов и оборотных средств) и так далее. Напротив, зависимость курса валют или ценных бумаг от политических или социальных факторов нельзя назвать непрерывной.

Хотя непрерывность экономических величин и является желательным свойством (с точки зрения предсказуемости, описуемости, управляемости), но в экономике имеют место и "сугубо" разрывные функции. Такова, например, величина денежного потока, как функция от времени: на одном отрезке времени - это положительная величина (приток денег), на следующем отрезке времени - отрицательная (отток денег).

Функция f называется **неубывающей (невозрастающей)** на множестве B, если из $x_1, x_2 \in B$ и $x_1 < x_2$ следует $f\left(x_1\right) \le f\left(x_2\right)$ $\left(f\left(x_1\right) \ge f\left(x_2\right)\right)$.

Если эти неравенства строгие, то соответственно получаем определения **строго возрастающей** и **строго убывающей функций.**

Согласно известных экономических законов, спрос является убывающей функцией от цен товаров, а предложение, напротив, возрастающей функцией от тех же аргументов. Желательно, чтобы функции описывающие доход были возрастающими функциями своих аргументов, а затраты - убывающими функциями.

Функция f называется выпуклой (вогнутой) на множестве B, если для любых $x_1, x_2 \in B$ и $0 \le \alpha \le 1$ имеет место неравенство

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \le \alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$$

$$\left(f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \ge \alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)\right). \tag{1.4.1}$$

Здесь точка $\bar{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ называется выпуклой комбинацией точек x_1 и x_2, а число $\bar{f} = \alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$ - выпуклой оболочкой двух чисел $f\left(x_1\right)$ и $f\left(x_2\right)$.

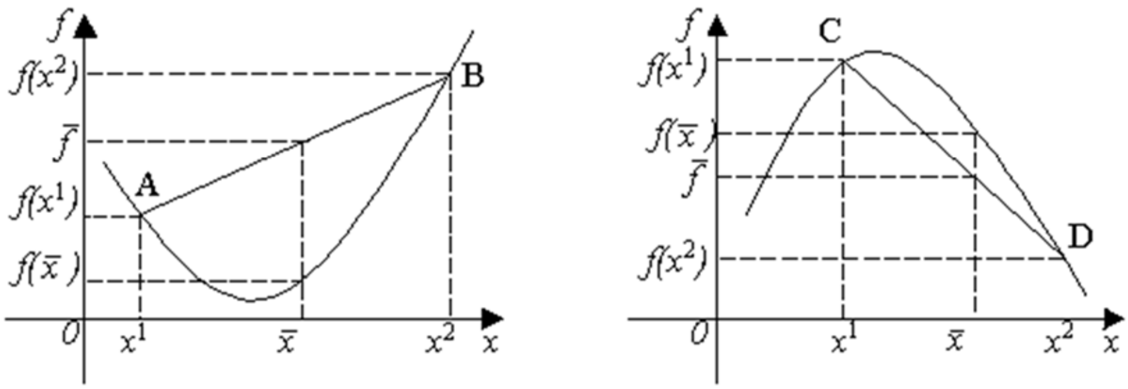


Рис 1.4.6. Графики выпуклых и вогнутых функций

Как видно из рис.1.4.6, для выпуклой (вогнутой) функции любая хорда AB (CD) лежит выше (ниже) дуги графика, которую она стягивает.

Для линейной функции (см.рис.1.4.1) в соотношениях (1.4.1) выполняется строгое равенство. Поэтому линейная функция является одновременно выпуклой и вогнутой функцией. Данные свойства имеют важное значение в так называемых оптимизационных моделях. Например, если доход выражается вогнутой функцией, то легко найти его наибольшее значение (соответствует верхней точке графика) и порождающие это значение факторы.

ГЛАВА 2. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

2.1 Общая схема взаимодействия на рынке производителей и потребителей. Цена как обратная связь и движущая сила в этой схеме

Первичными элементами экономики являются товары и участники. Говорят, что имеются экономические товары и участники экономики, если установлено, что эти товары обмениваются один на другой в результате соглашений, в которых заинтересованными сторонами выступают участники. То есть экономический товар — это именно то, что является предметом сделок в данном обществе — труд, капитал, ресурсы, продукты потребления, услуги, информация, ценные бумаги и т.д. Например, общественные посты, при продажности официальных учреждений, являются экономическими товарами. Становясь наследственными или замещаемыми по конкурсу, они перестают быть экономическими товарами. Следовательно, экономический товар определяется способностью к обмену.

Имеется один особый товар, являющийся эквивалентом при обмене — деньги. Деньги служат средством обращения, мерой стоимости, средством сбережения. Денежный эквивалент единицы товара называется его ценой.

Основными участниками экономики являются домашние хозяйства, фирмы и государство.

Домашние хозяйства, с одной стороны, являются потребителями конечного продукта, с другой - владельцами ресурсов (земельных, трудовых и др.). Продавая свои ресурсы домашние хозяйства получают доход, а также участвуют в распределении прибыли производственных предприятий (например, посредством ценных бумаг).

Фирмы, с одной стороны, являются производителями товаров и услуг, с другой — потребителями ресурсов. Фирмы получают доход от продажи своих товаров и услуг и являются владельцами производственных мощностей.

Государство выполняет важные законодательные, управленческие и регулирующие функции. С точки зрения движения товаров в экономике государство является как продавцом (государственных предприятий, природных ресурсов, ценных бумаг и др.), так и покупателем (государственных закупок продовольствия, вооружения, сырья и др.).

Таким образом, большинство участников экономики действует одновременно: как покупатель и продавец. Взаимодействуя между собой, покупатели и продавцы образуют рынок. Основными рыночными понятиями являются спрос, предложение, конкуренция и цена.

Спрос можно определить как платежеспособную потребность в том или ином товаре. Спрос на товар зависит от его цены (т.е. спрос является функцией от цены). Как правило, при высокой цене приобретается меньшее количество товара (обратная связь (см.рис.2.1.1)). В экономике этот факт называется законом спроса.

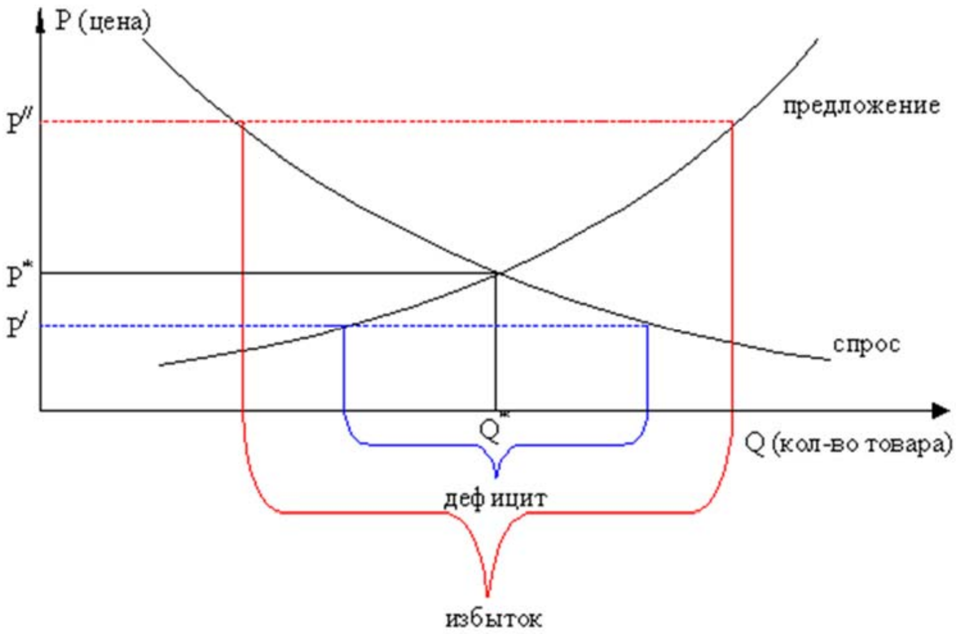


Рис.2.1.1. Кривая спроса и предложения и точка равновесия

Предложение — это то количество товара, которое производители могут и хотят произвести. Предложение также зависит от цены товара (прямая связь (см.рис.2.1.1)). В экономике этот факт называется законом предложения.

Если вся масса товара, произведенная в расчете на данную цену, может быть по этой цене продана полностью, то говорят, что по данному виду товара в экономике существует равновесие. Иными словами, существует такая цена, для которой спрос на данный товар равен предложению. Такая цена называется равновесной (см.рис.2.1.1).

Если существует равновесие по всем товарам (и услугам), то говорят о экономическом равновесии. Равновесие - это то состояние, к которому стремится экономика, так как в этом случае нет ни дефицита, ни избытка, т.е. удовлетворены интересы всех участников экономики. Возможность существования экономического равновесия находится в обратной зависимости от многообразия (видов) товаров. Чем больше видов, тем сложнее взаимосвязи между ними (например, очевидно, что спрос на чай зависит от наличия кофе, соков, молока и т.д.). Поэтому для получения реальных результатов в математических моделях рассматриваются только основные виды товаров (например, товары, составляющие потребительскую корзину).

Рынки можно классифицировать по различным признакам. В математических моделях часто применяется классификация по числу участников:

покупатели / продавцы	Один	Несколько	Много
Один	**сделка**	**олигопсония**	**монополия**
Несколько	**о л и г о п о л и я**		
Много	**монопсония**	**олигопсония**	**совершенная конкуренция**

Рис. 2.1.2. Виды рынков (по числу участников)

В настоящее время можно говорить о том, что для каждого из перечисленных рынков существует своя математическая теория.

2.2 Динамика цен и регулирование равновесной цены на рынке с совершенной конкуренцией

Участниками рынка могут быть любые заинтересованные в купле-продаже товаров стороны: индивидуальные потребители, отдельные фирмы, совокупность потребителей некоторого региона, совокупность предприятий данной отрасли, финансовые организации, концерны, целые страны. Одним словом, классификация участников рынка зависит от характера решаемой задачи.

В классических моделях в качестве участников рынка рассматриваются производители товаров (фирмы) и их потребители. Первые выходят на рынок для реализации своей продукции, а вторые - для приобретения необходимых им товаров потребления. Поэтому для классификации участников рынка больше подходят названия продавцов и покупателей. Тем более, что потребители могут выступать в роли продавцов принадлежащих им первичных факторов (труд, земельные участки и др.); точно так же производители выступают в роли покупателей производственных ресурсов.

Таким образом, любой участник рынка выступает одновременно как продавец и покупатель. Мы можем сказать, что относительно любого товара на рынке существует три группы участников: те, кто продает этот товар, те, кто покупает его, и те, кому этот товар безразличен. Если продавцов (покупателей) данного товара много, то между ними возникает конкуренция. Поэтому рынки можно классифицировать по характеру конкуренции (см. рис. 2.1.2).

В обычном понимании рынок - это то место, где продается и покупается большое разнообразие товаров. В случае необходимости рынок можно сегментировать по видам товаров и при соответствующих ограничениях (например, с учетом имеющихся связей с рынками других товаров) изучить рынок интересующего товара отдельно.

Будем рассматривать многотоварный рынок с большим числом участников. Поэтому будем предполагать, что относительно каждого товара имеется большое число продавцов и покупателей. В связи с этим возникает необходимость уточнения ранее введенных понятий спроса и предложения, а также условий конкуренции.

Прежде всего, нам надо выяснить и формализовать понятия совокупного (рыночного) спроса и совокупного (рыночного) предложения относительно имеющихся на рынке товаров.

Под предъявителем рыночного спроса мы понимаем **совокупного потребителя**, как одного из двух участников рынка.

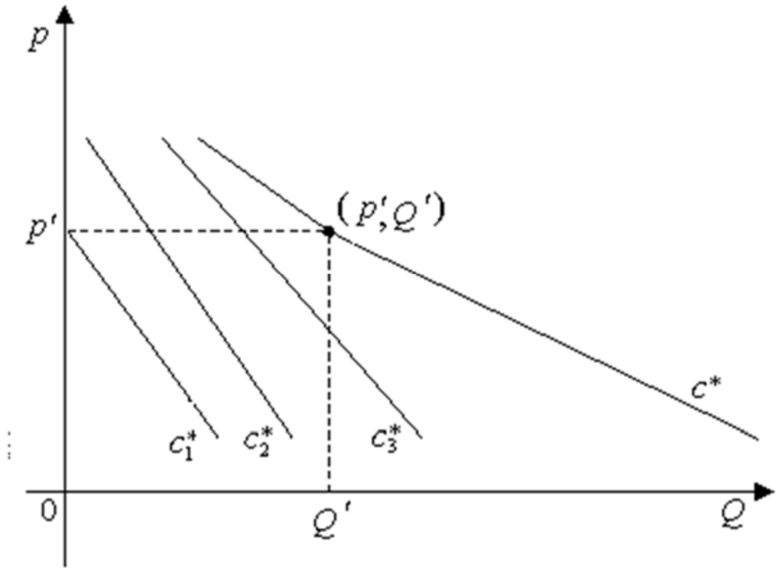


Рис. 2.2.1. Кривая рыночного спроса

А именно, покажем, что кривую рыночного спроса (c^*) можно получить как сумму кривых индивидуального спроса (c_i^*) всех потребителей.

На рис. 2.2.1 показаны линейные графики спроса c_1^*, c_2^*, c_3^* для трех потребителей. Любая точка на кривой рыночного спроса получается для данной цены как сумма по горизонтальной оси координат соответствующих этой же цене точек всех индивидуальных кривых спроса. Аналитически это означает, что $c^* = \sum_{i \in S} c_i^*$. При этом рыночная кривая спроса не обязательно имеет такой же вид, что и индивидуальные кривые.

Как видно из рис. 2.2.1, даже для линейных кривых индивидуального спроса рыночная кривая получается нелинейной (изгиб в точке $\left(p', Q'\right)$. Изменению подвергаются и другие свойства индивидуальных кривых, в частности, такие характеристики, как эластичность спроса, предельная норма замещения и др.

Как и в случае с потребителями, путем суммирования кривых предложения отдельных фирм можно получить понятие кривой рыночного предложения.

Итак, можно найти приемлемые для экономической практики способы формализации понятий рыночного спроса и рыночного предложения, это дает право оперировать понятиями совокупного спроса и совокупного предложения.

Необходимо обратить внимание, что совокупный спрос (совокупное предложение) не является результатом кооперирования между потребителями (производителями). Более того, кооперация вообще исключена условиями совершенной конкуренции (см. ниже). Совокупный спрос характеризует суммарную потребность общества в товарах, а совокупное предложение - суммарные возможности производителей этих товаров.

Перейдем к уточнению понятия совершенной конкуренции. В экономической теории принято считать, что рынок с совершенной конкуренцией определяется следующими признаками:

1) наличие большого числа независимых друг от друга фирм, производящих одни и те же товары; при этом доля выпуска каждой фирмы незначительна по сравнению с суммарным выпуском всех фирм;
2) наличие большого числа независимых друг от друга потребителей данных товаров; при этом доход отдельного потребителя незначителен по сравнению с суммарным доходом всех потребителей;
3) полная свобода действий всех участников рынка за исключением соглашений по контролю над рынком;
4) однородность товаров на рынке и их мобильность;
5) совершенное знание рынка (конъюнктуры товаров, их цен) покупателями и продавцами.

При выполнении первых двух условий отдельные покупатели и продавцы воспринимают рыночные цены как заданные извне, не имея возможности на них повлиять. Условие 3) обеспечивает наличие конкуренции, как среди покупателей, так и среди продавцов. Требование 4) обуславливает возможность существования единой цены на товар; условие 5) необходимо для принятия оптимального решения участниками рынка по поводу купли и продажи товаров.

Имея в виду влияние этих условий, экономическое равновесие часто называют конкурентным равновесием. Условия совершенной конкуренции считаются наиболее выгодными для общества. Но, как легко догадаться, эти условия носят весьма идеализированный характер, т.е. в действительности невозможно точное выполнение всех этих условий. Поэтому понятие совершенной конкуренции имеет в известной степени абстрактный оттенок.

Отсюда вывод - рассматриваемая модель Вальраса, предполагающая совершенность конкуренции, описывает функционирование идеального рынка и имеет больше теоретическое, чем практическое значение. Сказанное не умаляет роли модели Вальраса как исходной точки для многих обобщений и модификаций.

Исходными концепциями модели Вальраса являются:

- дезагрегированность участников рынка: рассматриваются отдельные потребители и отдельные производители;
- совершенность конкуренции;

- общность равновесия.

Последняя концепция означает рассмотрение равновесия по всем товарам сразу, а не по отдельным товарам. Следовательно, в модели Вальраса вводится понятие общего равновесия (т.е. равновесия по всем товарам).

Будем предполагать, что на рынке продаются и покупаются товары двух видов: готовые товары, являющиеся продуктом производства (товары конечного потребления) и производственные ресурсы (первичные факторы производства). Поэтому будем рассматривать "расширенное" пространство товаров R^n, где n - число видов всех товаров. Компонентами вектора $x \in R^n$ являются как выпуски, так и затраты (первичные факторы). Для различения их, затраты снабжают отрицательным знаком (поэтому пишем R^n, а не R^n_+). Если $x \in R^n$ есть вектор чистого выпуска, то все его компоненты, соответствующие затратам, будут равны нулю; если $x \in R^n$ есть вектор только первичных факторов, то все его компоненты, соответствующие конечным продуктам, будут равны нулю.

Индексы (виды) товаров, как и раньше, будем обозначать буквой k ($k = 1,...n$), индексы потребителей - буквой i ($i = 1,...,l$) и индексы производителей - буквой j ($j = 1,...,m$). Через $p = \left(p_1,..., p_n\right)$ будем обозначать вектор цен товаров.

Выходя на рынок, каждый потребитель или производитель становится одновременно покупателем одних и продавцом других товаров. Потребитель, т.е. участник рынка, "непосредственно не занятый в производстве", может продавать имеющиеся в его распоряжении первичные факторы и покупает товары производителей. Производитель, т.е. участник рынка, "непосредственно занятый в производстве", продает свою готовую продукцию и покупает первичные факторы у потребителей.

Поэтому каждый потребитель i как участник рынка характеризуется тремя параметрами: начальным запасом товаров $b_i \in R^n$, функцией дохода $K_i = K_i\left(p\right)$ и вектор-функцией спроса на продукты производства $D_i = D_i\left(p\right)$.

Каждый производитель j характеризуется двумя параметрами: вектор-функцией предложения готовой продукции $S_j = S_j\left(p\right)$ и вектор-функцией спроса на затраты $Z_j = Z_j\left(p\right)$. Однако в модели Вальраса применяется несколько обобщенная характеристика производителя - с помощью одного множества $Y_j \subset R^n$, трактуемого как множество его (оптимальных) производственных планов. На языке "затраты-выпуск" это множество можно определить следующим образом: $Y_j = \left\{\left(z_j, s_j\right) \in R^{2n} / s_j = f\left(z_j\right)\right\}$, где f - производственная функция. Очевидно, $Y_j = Y_j\left(p\right)$.

С учетом всего вышесказанного, под математической моделью рынка будем понимать совокупность элементов:

$$\left\langle R^n, P, N, \left\{b_i, K_i, D_i\right\}_{i=1}^{l}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{m} \right\rangle, \tag{2.2.1}$$

где $P \subset R_+^n$ - пространство цен товаров, N - множество всех участников рынка (N содержит $l+m$ элементов).

Без качественных потерь вместо (2.2.1), как модель рынка, можно рассматривать совокупность

$$\left\langle R^n, P, N, \left\{b_i, K_i, D_i\right\}_{i=1}^{l}, \left\{\left(S_j, Z_j\right)\right\}_{j=1}^{m} \right\rangle.$$

Во-первых, вектор $p = \left(p_1, ..., p_n\right) \in R_+^n$ содержит цены, как товаров конечного потребления, так и затрат. Причем цены меняются и меняются не по желанию отдельных участников рынка, а исключительно под воздействием совокупного спроса и совокупного предложения. Поэтому одним из ключевых является вопрос: существуют ли такие цены, которые устраивают как потребителей, так и производителей?

Исходя из технических соображений, будем предполагать, что пространство цен P включает в себя нуль пространства R^n, т.е. будем допускать существование нулевых цен.

Во-вторых, как уже говорилось выше, каждый участник рынка выступает в двух лицах: как покупатель и как продавец. Очевидно, число продавцов и покупателей для разных товаров будет разным. Поэтому числа и не следует ассоциировать с числом продавцов и покупателей.

В-третьих, доход каждого потребителя предполагается состоящим из двух компонент: 1) выручки от продажи принадлежащего ему начального запаса товаров (b_i), 2) дохода, получаемого от его участия в прибыли производственного сектора (обозначим V_i), например, посредством приобретения ценных бумаг и других видов инвестиционной и трудовой деятельности. Таким образом, мы предполагаем, что

$$K_i(p) = \left\langle p, b_i \right\rangle + V_i(p). \tag{2.2.2}$$

В модели Вальраса считается, что весь доход производственного сектора полностью распределяется между потребителями:

$$\sum_{i=1}^{l} V_i\left(p\right) = \left\langle p, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle,$$

где $\xi_j \in Y_j$, а скалярное произведение справа, с учетом структуры векторов ξ_j, трактуется как прибыль всего производственного сектора. Заметим, что суммирование векторов ξ_j осуществляется покомпонентно.

В-четвертых, функции спроса D_i, Z_j и предложения S_j предполагаются векторными и множественнозначными. В модели Вальраса понятия совокупных спроса и предложения формализуются следующим образом.

Определение 2.2.1. Функцией совокупного (рыночного) спроса называется множественнозначная функция

$$D(p)=\sum_{i=1}^{l} D_i(p). \qquad (2.2.3)$$

Функцией совокупного (рыночного) предложения называется множественнозначная функция

$$S(p)=\sum_{i=1}^{l} b_i+\sum_{j=1}^{m} Y_j(p). \qquad (2.2.4)$$

При таком определении смысл совокупного спроса полностью соответствует способу формирования рыночного спроса на основе решений оптимизационных задач индивидуальных потребителей. Конкретно, это есть сумма индивидуальных функций спроса потребителей. Определение же функции совокупного предложения требует дополнительного пояснения.

С этой целью введем обозначения:

$$b=\sum_{i=1}^{l} b_i,\ Y=\sum_{j=1}^{m} Y_j,\ \xi=\sum_{j=1}^{m} \xi_j.$$

По определению, любой элемент множества Y можно представить вектором ξ, где $\xi_j \in Y_j$. Так как Y_j есть множество оптимальных планов производителя j, то компонентами вектора ξ_j являются оптимальные объемы выпуска и затрат, и все они составляют решение одной и той же оптимизационной задачи. Таким образом, часть компонент вектора ξ, как и векторов ξ_j, отражает предложение готовых продуктов, а часть - спрос на первичные факторы. Поэтому вектор $\xi \in Y$ нельзя называть однозначно предложением. В то же время, вектор $\left(b+\xi\right)\in S\left(p\right)$ может быть интерпретирован как совокупное предложение, так как часть компонент вектора ξ, соответствующая спросу, "компенсируется" вектором b. Покажем, что для любого p $D\left(p\right)\subset R^n$ и $S\left(p\right)\subset R^n$, т.е. областью изменения совокупных функций является то же самое пространство, что и для индивидуальных функций.

Рассмотрим сначала двух потребителей. Для любого $x\in D_2\left(p\right)$ множество $D_1\left(p\right)+x$ образуется смещением множества $D_1\left(p\right)$ в направлении вектора x на длину этого вектора (рис. 2.2.2).

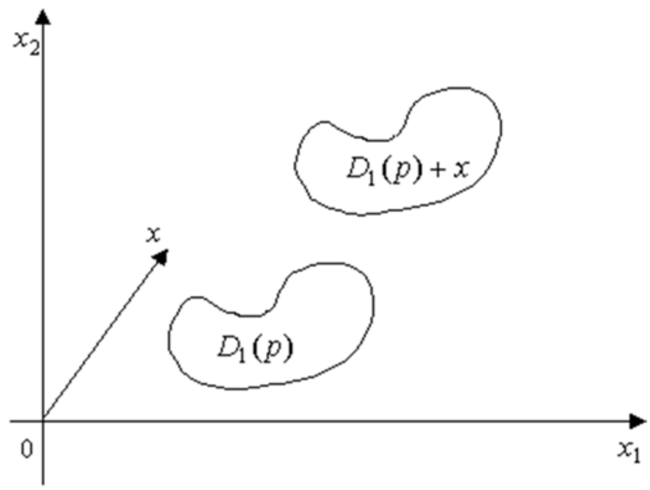


Рис. 2.2.2. Сумма вектора и множества

Поэтому $D_1\left(p\right)+x\subset R^n$ и $D_1\left(p\right)+D_2\left(p\right)=\left\{D_1\left(p\right)+x\,/\,x\in D_2\left(p\right)\right\}\subset R^n$.

Рассмотрим трех потребителей. Для любого $x \in D_3(p)$ множество $(D_1(p)+D_2(p))+x$ образуется смещением множества $D_1(p)+D_2(p)$ в направлении вектора x на длину этого вектора.

Поэтому $(D_1(p)+D_2(p))+x \subset R^n$ и $D_1(p)+D_2(p)+D_3(p)=$ $=\{(D_1(p)+D_2(p))+x \,/\, x \in D_3(p)\} \subset R^n$.

Продолжая эти рассуждения, получаем $\sum_{i=1}^{l} D_i(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{l-1} D_i(p) + x \,/\, x \in D_l(p) \right\} \subset R^n$.

Точно так же устанавливается включение $Y \subset R^n$. Так как $b_i \in R^n$ и потому $b \in R^n$, то множество $b+Y$ образуется смещением множества Y в направлении вектора b на длину этого вектора. Поэтому $S(p)=b+Y \subset R^n$.

Формализовав понятия функций совокупных спроса и предложения, модель рынка (2.2.1) мы можем представить совокупностью вида

$$\langle R^n, P, D(p), S(p) \rangle. \tag{2.2.5}$$

Любой вектор $x \in D(p)$ называется совокупным спросом (соответствующим вектору цен p); любой вектор $y \in S(p)$ - совокупным предложением (соответствующим вектору цен p). Эти векторы являются (оптимальными) реакциями совокупного покупателя и совокупного продавца на установившийся на рынке вектор цен. Если при этом $x > y$, то на рынке возникает дефицит товаров, а при $x < y$ появляются их излишки. Такие цены не могут считаться удовлетворительными, так как в одном случае ущемлены интересы покупателей, а в другом - продавцов. Очевидно, наилучшим вариантом для экономики является равенство $x = y$. Этот идеальный случай на практике не всегда имеет место. Поэтому целесообразно как-то его ослабить. В модели Вальраса допускается наиболее "гуманный" с точки зрения интересов потребителей вариант обобщения понятия экономического равновесия.

Определение 2.2.2. Набор векторов (x^*, y^*, p^*) называется **конкурентным равновесием** на рынке (2.2.5), если $p^* \in P$,

$$x^* \in D(p^*), \; y^* \in S(p^*), \tag{2.2.6}$$

$$x^* \le y^*, \tag{2.2.7}$$

$$\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle. \tag{2.2.8}$$

В этом случае p^* называется **равновесным вектором цен**.

По определению функций совокупных спроса и предложения, из включений (2.2.6) следует

$$x^* = \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \text{ где } \; x_i^* \in D_i(p^*), \; i=1,\dots,l;$$

$$y^* = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_i^*, \text{ где } \; \xi_i^* \in Y_i(p^*), \; j=1,\dots,m,$$

т.е. совокупные спрос и предложение формируются как суммарные величины индивидуальных спросов потребителей и индивидуальных предложений производителей. Поэтому в развернутом виде условия равновесия (2.2.6)-(2.2.8) можно переписать так:

$$x_i^* \in D_i\left(p^*\right), i = 1,\ldots,l\,; \tag{2.2.9}$$

$$\xi_j^* \in Y_j\left(p^*\right),\ j = 1,\ldots,m\,; \tag{2.2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^* \le \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^m\,; \tag{2.2.11}$$

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle = \left\langle p^*, \left(\sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^m \right) \right\rangle. \tag{2.2.12}$$

Экономическое содержание условий, определяющих конкурентное равновесие на рынке (2.2.5), таково. Условие (2.2.6) показывает, что на цены p^* каждый потребитель и каждый производитель реагирует наилучшим образом. Это наглядно видно из соотношений (2.2.9) и (2.2.10). Условие (2.2.7) отслеживает, чтобы совокупное предложение не было меньше совокупного спроса. Условие (2.2.8) требует, чтобы в стоимостном выражении совокупный спрос равнялся совокупному предложению. Условие (2.2.8) автоматически выполняется в том случае, если в (2.2.7) имеет место строгое равенство. В этом случае равновесие будет задано соотношениями:

$$x^* \in D\left(p^*\right),\ y^* \in S\left(p^*\right),\ x^* = y^*, \tag{2.2.13}$$

т.е. нужность в условии (2.2.8) отпадает.

Предположим, что для некоторого товара в (2.2.7) имеет место строгое неравенство: $\left(x^*\right)^k < \left(y^*\right)^k$. Тогда в стоимостном выражении получаем неравенство $\left\langle p^*, x^* \right\rangle < \left\langle p^*, y^* \right\rangle$, не соответствующее условию (2.2.8). Величина $\varepsilon^k = \left(y^*\right)^k - \left(x^*\right)^k > 0$ называется **излишком**.

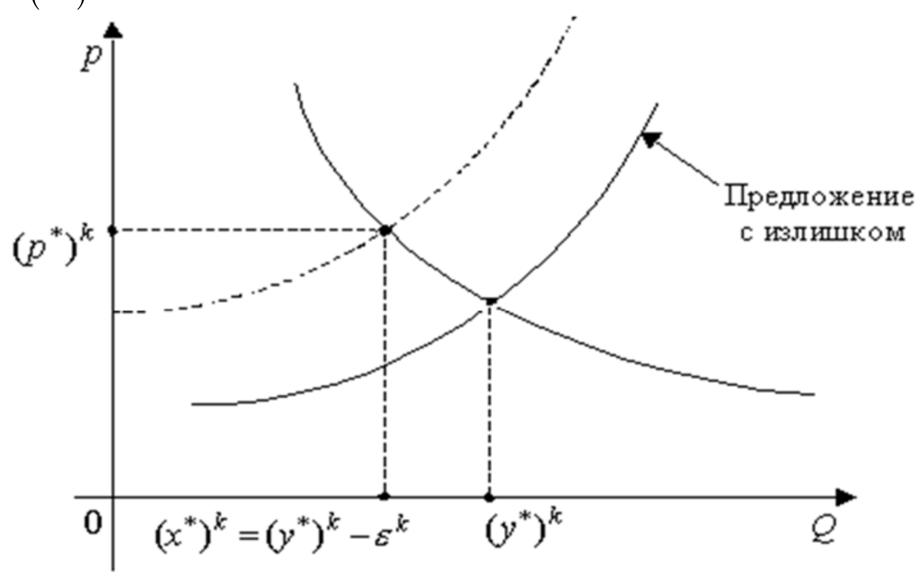


Рис. 2.2.3. Предложение с излишком

Согласно закона предложения, в случае появления излишка цена товара должна быть снижена (см.рис. 2.2.3). Но это приведет к изменению "равновесной" цены $\left(p^*\right)^k$. Как выйти из этого противоречия?

Очевидно, $\sum\limits_{r=1}^{n}\left(p^*\right)^r\left(x^*\right)^r=\sum\limits_{\substack{r=1\\(r\neq k)}}^{n}\left(p^*\right)^r\left(x^*\right)^r+\left(p^*\right)^k\left[\left(y^*\right)^k-\varepsilon^k\right]$.

Отсюда видно, для восстановления условия (2.2.8) нужно "ликвидировать" излишек. С учетом знака ε^k это возможно только при $\left(p^*\right)^k=0$.

Но тогда $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k=0$ и $\left(p^*\right)^k\left[\left(y^*\right)^k-\varepsilon^k\right]=0$, т.е. товар k вообще исключается из обращения на рынке.

Обоснование справедливости (2.2.8) тем, что "поставляемый сверх имеющегося спроса товар получает нулевую цену" экономически осмыслено, но не поддается адекватной формализации.

Действительно, для фиксированного числа $\left(p^*\right)^k$ неравенство $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k<\left(p^*\right)^k\left(y^*\right)^k=\left(p^*\right)^k\left[\left(x^*\right)^k+\varepsilon^k\right]$ несовместимо с равенством $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k=\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k+0\cdot\varepsilon^k$.

Таким образом, формальный выход из рассматриваемой ситуации состоит в том, чтобы считать цену перепроизводимого товара равной нулю. Чисто теоретически этот прием состоятелен, так как не приводит в дальнейшем к противоречиям.

В то же время, следует признать отсутствие экономически осмысленного объяснения существования товара с нулевой ценой. Объявление такого товара "свободным" представляется несостоятельным. Строго говоря, в экономике нет свободных товаров, любой побочный продукт может найти применение, т.е. имеет ненулевую цену. Трудно согласиться и с "хорошо известной экономистам модификацией закона спроса и предложения о существовании перепроизводимых товаров с нулевой ценой", поскольку в случае перепроизводства "спрашиваемая" часть этого товара продается по ненулевой цене. Для экономики существование излишек так же плохо, как и существование дефицита. Все это говорит в пользу целесообразности определения равновесия в виде (2.2.13) .

Итак, модель рынка по Вальрасу построена. Как видим, центральное место в ней занимает понятие конкурентного равновесия. Привлекательность равновесия как состояния рынка (и экономики в целом), заключается в возможности реализации всех произведенных товаров и в удовлетворении спроса всех потребителей. Процесс формирования рыночных цен условно можно сравнить с работой некоторого алгоритма (автомата), состоящего из четырех блоков (рис. 2.2.4).

В первом блоке P формируется вектор цен. Информация о векторе p поступает в блоки D и S, в которых формируются соответственно множества $D(p)$ и $S(p)$, содержание которых, в свою очередь, передается в блок R. В блоке R осуществляется попарное сравнение элементов $x\in D(p),\ y\in S(p)$. Если существует пара или пары (x,y), для которых выполняется условие $x=y$ (или условия (2.2.7), (2.2.8)), то процесс заканчивается. В противном случае цены p отвергаются, о чем поступает сигнал в блок P, где формируются новые цены. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет найден равновесный вектор цен.

Утвердительный ответ на этот вопрос связан с разрешением двух важных проблем:

1) установление факта существования конкурентного равновесия в модели Вальраса;
2) разработка сходящейся к равновесной цене вычислительной процедуры (метода) формирования рыночных цен.

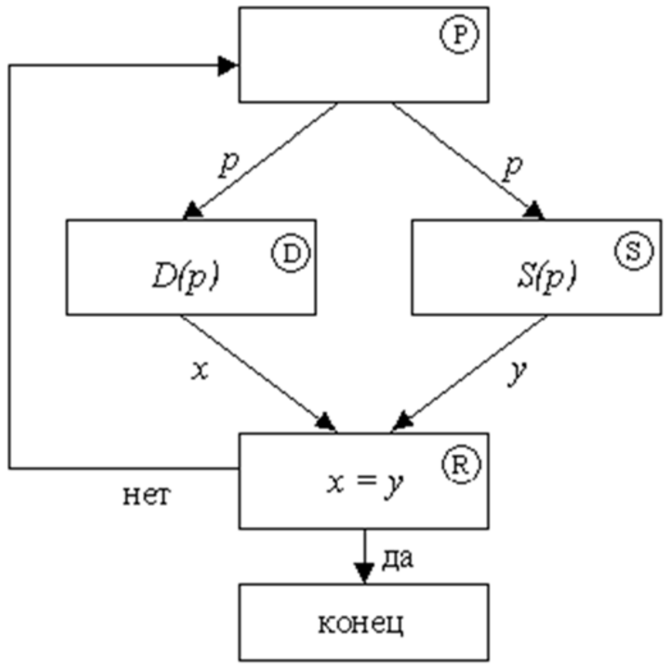


Рис. 2.2.4. Схема формирования равновесных цен

Существование равновесия в модели Вальраса не установлено. Причина заключается в уровне формализма этой модели - она весьма абстрактна. Конкретизируя определения составляющих ее элементов и уточняя их функциональные свойства, можно получить разные модификации модели Вальраса. Наиболее известная из них носит название модели Эрроу-Дебре, по именам ее создателей. Структурно модель Эрроу-Дебре весьма близка к модели Вальраса. От последней она отличается конкретизацией природы происхождения функций предложения и спроса, а также механизма образования дохода потребителя. В модели Эрроу-Дебре существует конкурентное равновесие.

Проблема разработки численных методов вычисления равновесных цен связана с установлением необходимых и достаточных признаков равновесия. Нужно, чтобы они были конструктивными, т.е. порождали сходящуюся итеративную процедуру, каковой является, например, паутинообразная модель (см. рис. 2.4.2).

2.3 Монопольные цены и монопольные объемы продаж

Познакомившись в предыдущем параграфе с условиями совершенной конкуренции, можно заметить, что определяющим признаком такого рынка является наличие большого числа производителей и потребителей одних и тех же товаров и, как следствие, отсутствие влияния с их стороны на рыночные цены этих товаров. Нарушение данного условия приводит к понятию **рынка несовершенной конкуренции**. В этом смысле крайние положения занимают монополия и монопсония, а промежуточные - олигополия и олигопсония (см. рис. 2.1.2).

Суть несовершенной конкуренции в том, что либо продавцы, либо покупатели захватывают рыночную власть над ценообразованием. Проанализируем механизм ценообразования в монополии. Так как монополист является единственным производителем товара, исходя из кривой спроса, он самостоятельно определяет объем продаж и цену товара (рис.2.3.1).

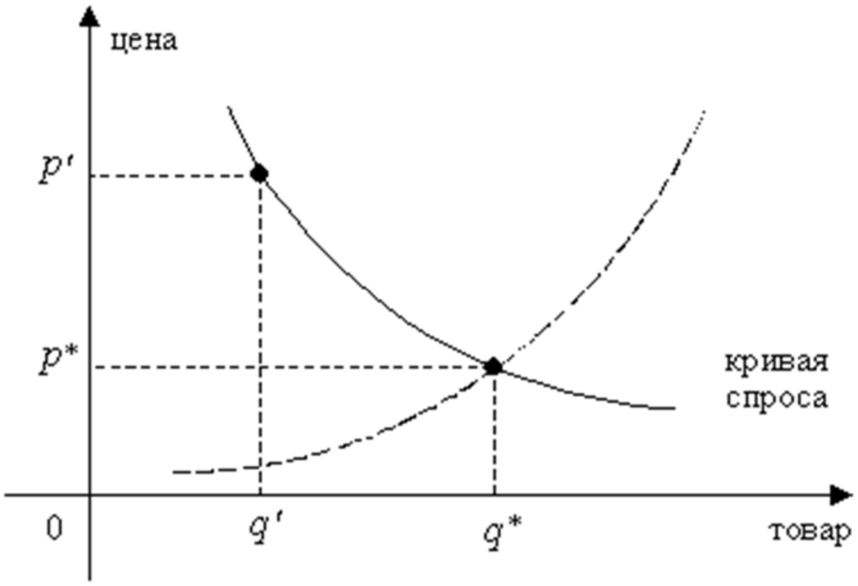


Рис. 2.3.1. Выбор монополиста

Предположим, что в условиях совершенной конкуренции равновесие достигается в точке $\left(p^*, q^*\right)$, а доход данной фирмы, как участника рынка совершенной конкуренции, есть $\alpha \cdot p^* \cdot q^*$ ($\alpha < 1$). Будучи монополистом, при том же уровне спроса эта фирма добьется данного уровня дохода при меньшем выпуске (q') за счет более высокой цены (p'). Именно в этом заключается приоритетность положения монополиста.

До какого уровня монополист будет повышать цену товара и снижать объем продаж, чтобы получить максимальную прибыль с учетом издержек на производство товара?

Кривая спроса и оценка собственных издержек являются главными ориентирами для фирмы-монополиста при принятии экономического решения. Она принимает решение относительно объема выпуска (или продажи) товара, а его цена определяется с помощью кривой спроса (см. рис. 2.3.1). Следовательно, в условиях монополии цена (q) является функцией от выпуска ($p = p(q)$) и, располагая информацией о спросе, фирма может добиться получения максимальной прибыли.

Монополист может увеличить прибыль двумя путями: либо за счет повышения цены на товар, не изменяя при этом объема выпуска, либо за счет сокращения объема выпуска (снизив тем самым издержки на производство), не изменяя цену товара. Каково же оптимальное действие монополиста?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся опять к конкурентному рынку и рассмотрим **долгосрочную задачу** фирмы.

Не умаляя общности, будем считать, что фирма производит один вид продукта, используя m видов ресурсов. Эти величины, как и ранее, будем обозначать соответственно через y и $x_1,...,x_m$. Предположим, что "технология" производства достаточно хорошо изучена, т.е. известна производственная функция f: $y = f(x) = f\left(x_1,...,x_m\right)$.

Обозначим через p цену выпускаемой продукции, а через w_k - цену k-го вида ресурса, $k=1,...,m$. Эти цены порождают понятия дохода (выручки от продажи произведенной продукции) и издержек. Доход от реализации готовой продукции $y=f(x)$ определяется формулой $p\cdot f(x)$. Издержки, соответствующие вектору затрат $x=(x_1,...,x_m)$, т.е. общие выплаты за все виды затрат, равны $w_1x_1+...+w_mx_m$. Эти издержки называются **переменными издержками**, так как они связаны (меняются вместе) с объемом выпуска. Кроме того, фирма несет и **постоянные издержки** (обозначим c_0), связанные с расходами на содержание фирмы. Поэтому общие издержки (обозначим C) складываются из двух компонент: $C(x)=\sum_{k=1}^{m} w_k x_k + c_0$. Поскольку постоянные издержки не связаны с выпуском, то при составлении краткосрочных моделей мы их учитывать не будем. Тогда общий результат производства (x,y) (затраты-выпуск) можно оценить величиной $p\cdot f(x)-\sum_{k=1}^{m} w_k x_k$. Если эта величина положительна, то пара (x,y) приносит прибыль, в противном случае - убыток. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому **модель задачи** имеет вид:

$$\begin{aligned} &P(x)=p\cdot f(x)-\langle w,x\rangle \to \max, \\ &x\geq 0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где $w=(w_1,...,w_m)$ - вектор цен затрат.

Так как мы хотим узнать именно об оптимальном объеме производства, переформулируем эту задачу на языке выпуска.

Обозначим доход как функцию от выпуска: $p\cdot f(x)=p\cdot q=R(q)$. Так как издержки фирмы зависят от объема производства, они также являются функциями от выпуска: $\langle w,x\rangle=C(f(x))=C(q)$.

Теперь задачу (2.3.1) можно записать так:

$$P(q)=R(q)-C(q)\to \max. \tag{2.3.2}$$

Условие первого порядка для максимизации прибыли $P(q)$ есть $\frac{dP}{dq}=0$ или $\frac{dR}{dq}=\frac{dC}{dq}$. Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, фирма должна достичь такого объема выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам. Далее, учитывая тот факт, что $\frac{dR}{dq}=p$, получаем $p^*=\frac{dC}{dq}$, т.е. **равновесная цена**, если она существует, **должна равняться предельным издержкам**:

$$\frac{dR}{dq}=p^*=\frac{dC}{dq}. \tag{2.3.3}$$

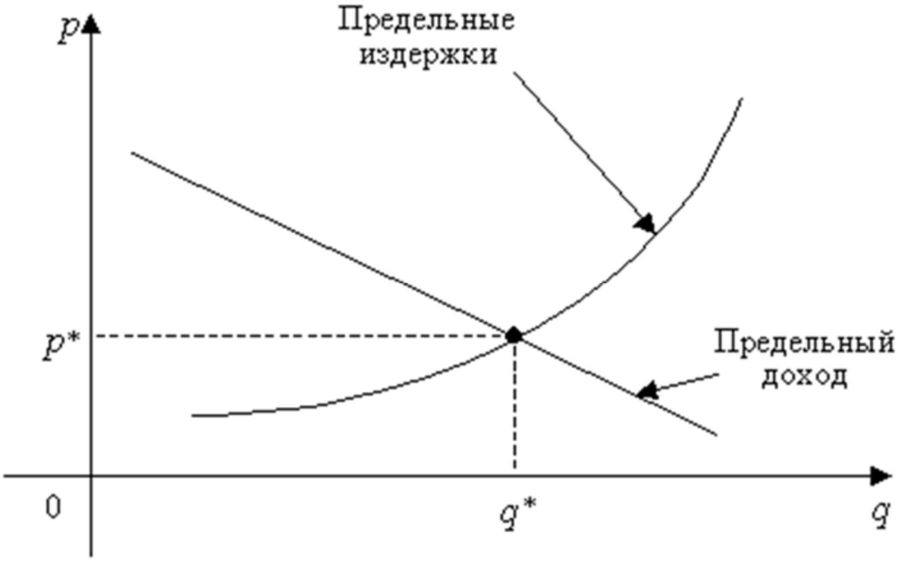


Рис. 2.3.2. Иллюстрация равновесной цены

Графическая иллюстрация равенства (2.3.3) показана на рис.2.3.2, где предельные издержки есть возрастающая функция от объема производства, а предельный доход (цена) - убывающая функция того же аргумента.

Вернемся к монополии и проверим, будет ли цена, максимизирующая прибыль монополиста, подчиняться закону (2.3.3)?

В монополии $p = p(q)$, поэтому

$$R(q) = p(q) \cdot q. \tag{2.3.4}$$

Далее без потери общности будем считать $q > 0$.

Вычислим предельный доход

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dp}{dq} \cdot q + p. \tag{2.3.5}$$

Заметим, что и в монополии цена убывает с ростом объема продаж, потому что фирма снижает цену, чтобы продать больше продукции.

Поэтому $\frac{dp}{dq} < 0$ и из (2.3.5) следует $\frac{dR(q)}{dq} < p$.

Как видим, в случае монополии предельный доход меньше цены товара.

Проанализируем теперь издержки монополиста. Как и на конкурентном рынке, цены затрат являются функциями от объема затрат, т.е. $w_j = w_j\left(x_j\right), \quad j = 1,\ldots,m$. Поэтому издержки на факторы производства выражаются как

$$C_j\left(x_j\right) = w_j\left(x_j\right) \cdot x_j. \tag{2.3.6}$$

Будем предполагать, что $x_j > 0$ для всех $j = 1,\ldots,m$.

Вычислим предельные издержки:

$$\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j} = \frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j + w_j. \tag{2.3.7}$$

По рыночным законам фирма может покупать большее количество данного фактора производства, только предложив более высокую плату.

Поэтому $\frac{dw_j}{dx_j} > 0$. Тогда из (2.3.7) следует

$$\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j} > w_j, \quad j = 1,...,m.$$

Таким образом, в случае монополии предельные издержки на факторы производства оказываются больше их цен.

Подставляя (2.3.4) и (2.3.6) в (2.3.2), получим оптимизационную задачу монополиста:

$$P(x,q) = p(q) \cdot q - \sum_{j=1}^{m} w_j\left(x_j\right) \cdot x_j \to \max, \tag{2.3.8}$$

при ограничениях $q = f\left(x_1,...,x_m\right)$.

Подчеркнем еще раз, в отличие от задачи (2.3.2) фирмы на конкурентном рынке, в условиях задачи монополиста (2.3.8) все цены зависят от объемов продуктов.

Максимум функции прибыли P в задаче (2.3.8) вычисляется по $m+1$ переменной $(x_1,...,x_m,q)$.

Поэтому составим функцию Лагранжа $L\left(x,q,\lambda\right) = P\left(x,q\right) + \lambda\left(f\left(x\right) - q\right)$, где λ - множитель Лагранжа.

Выпишем необходимые условия оптимальности точки $\left(x,q\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dq} \cdot q + p - \lambda = 0, \\ -\frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j - w_j + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,m, \\ f\left(x_1,...,x_m\right) - q = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем, в частности,

$$\lambda = p + \frac{dp}{dq} \cdot q, \tag{2.3.9}$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j + \frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j, \; j = 1,...,m. \tag{2.3.10}$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (2.3.9), есть предельный доход (см. (2.3.5)), а сумма, стоящая в правой части (2.3.10), - предельные издержки по производственному фактору j -го вида (см. (2.3.7)). Поэтому величина, стоящая в левой части (2.3.10), представляет собой произведение предельного дохода (λ) на предельный продукт j -го вида затрат ($\frac{\partial f}{\partial x_j}$). Это произведение можно трактовать как предельный доход j -го вида затрат.

Исключая из системы необходимых условий множитель Лагранжа λ, получаем

$$\begin{cases} \left(p+\dfrac{dp}{dq}\cdot q\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=w_j+\dfrac{dw_j}{dx_j}\cdot x_j, \quad j=1,\ldots,m, \\ f\left(x_1,\ldots,x_m\right)=q. \end{cases}$$

Пользуясь равенствами (2.3.5) и (2.3.7), перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dR(q)}{dq}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}, \quad j=1,\ldots,m & (2.3.11) \\ f\left(x_1,\ldots,x_m\right)=q. & (2.3.12) \end{cases}$$

Оценим отношение предельной стоимости затрат на предельный продукт $\dfrac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Во-первых, как следует из (2.3.11), эта величина для всех j одна и та же. Во-вторых, издержки можно представить как функцию от выпуска, т.е. $C_j=C_j\left(q\right)$. Поэтому, пользуясь равенством (2.3.12), можно формально написать $\dfrac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{dC_j(q)}{dq}, \quad j=1,..,m.$

Так как эта величина одна и та же для всех j, то, опуская индекс, из системы (2.3.11)-(2.3.12) получаем

$$\frac{dR(q)}{dq}=\frac{dC(q)}{dq}. \qquad (2.3.13)$$

Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, монополист должен достичь такого уровня выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам.

Для монополиста мы получили такое же правило оптимального поведения, что и любая фирма в условиях конкурентного рынка. Однако в случае монополии $\dfrac{dR}{dq}=p+\dfrac{dp}{dq}\cdot q$ и поэтому оптимальная цена товара отличается от выражения (2.3.3) в сторону повышения. А именно, через предельный доход она выражается как

$$p^*=\frac{dR}{dq}-\frac{dp}{dq}\cdot q, \qquad (2.3.14)$$

а через предельные издержки –

$$p^*=\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}\Big/\frac{\partial f}{\partial x_j}-\frac{dp}{dq}\cdot q, \quad j=1,..,m. \qquad (2.3.15)$$

2.4 Паутинообразная модель рыночного взаимодействия. Устойчивые и неустойчивые рыночные механизмы

Пусть цена товара фиксирована. Это положение соответствует условиям совершенной конкуренции, когда отдельные участники экономики не влияют на цену товара. Пусть имеет место равновесие: $c^*\left(p,K\right)=f^*\left(p,w_1,...,w_m\right)$, где c^* - совокупный спрос, f^* - совокупное предложение, p - цена товара, K - доход потребительского сектора, w_i - цены затрат. Формально это равновесие может быть нарушено либо по "воле" рынка, который распоряжается ценой товара, либо по воле покупателя (управляющего спросом, например, посредством изменения величины дохода) или производителя (управляющего предложением, например, посредством изменения объемов затрат). В первом случае будем говорить о ценовых причинах нарушения равновесия, во втором - о неценовых причинах.

Рассмотрим сначала неценовые причины (вызванные влиянием сезонности, моды, изменением экономической политики и т.д.). Предположим, что при неизменном предложении потребитель "сознательно" отклоняется от равновесия, увеличивая или уменьшая спрос: a) $\bar{c}>f^*$, b) $\bar{c}<f^*$. Если при фиксированном спросе от равновесия отклоняется производитель, то соответственно придем к одному из двух неравенств: c) $c^*>\bar{f}$, d) $c^*<\bar{f}$.

В этих соотношениях случаи a) и c) приводят к дефициту (см. рис. 2.1.1), т.е., в конечном счете, к повышению цены, что выгодно производителю и невыгодно потребителю. Следовательно, в случаях a) и c) неценовые причины вызывают изменение равновесной цены.

Случаи b) и d) приводят к излишкам (см. рис. 2.1.1), т.е., в конечном счете, к снижению цены, что выгодно потребителю и невыгодно производителю. Следовательно, в случаях b) и d) неценовые причины также вызывают изменение равновесной цены.

Исходя из таких рассуждений, можно было бы заключить, что потребителю выгодно отклонение от равновесия в сторону снижения спроса, а производителю - в сторону снижения предложения. Однако для достоверности таких утверждений нужно ответить на следующие вопросы. На сколько нужно уменьшить спрос, чтобы соответствующее снижение цены действительно было выгодно для потребителя, т.е. чтобы сэкономленные средства с остатком компенсировали ущерб от уменьшения спроса? Каким должен быть этот остаток? Аналогичные вопросы возникают и для определения конкретной выгоды производителя.

Очевидно, на эти вопросы можно ответить, применяя понятие предельной нормы замещения.

Как мы видим, по отношению к экономическому равновесию однозначно нельзя утверждать о его устойчивости против отклонения. Но зато эти рассуждения помогают обнаружить устойчивость другого характера - тенденцию экономического равновесия к устойчивости против колебания цены, какой бы причиной оно ни было вызвано. Поясним это положение.

Будем исходить из того факта, что экономическое равновесие может быть нарушено как по ценовым, так и по неценовым причинам. Пусть на уровне цен p^* имеет место равновесие $c^*\left(p^*,\square\right)=f^*\left(p^*,\square\right)$ (точки здесь заменяют прочие, в частности, неценовые, переменные). Допустим, что по какой-то неценовой причине повысился спрос до уровня Q''.

Как видно из рис. 2.4.1 , спрос Q'' соответствует цене $p'<p^*$, так что

$$c^*\left(p^*,\square\right)=Q''>Q^*,$$
$$f^*\left(p^*,\square\right)=Q'<Q^*,$$

т.е. спрос стал больше предложения. Цене p' соответствуют две точки: (p',Q') и (p',Q''). Естественно поставить вопрос: может ли цена p' быть равновесной, иначе, может ли одна из этих двух точек быть равновесным состоянием? Обратимся к точке (p',Q') (относительно точки (p',Q'') рассуждения зеркально аналогичны).

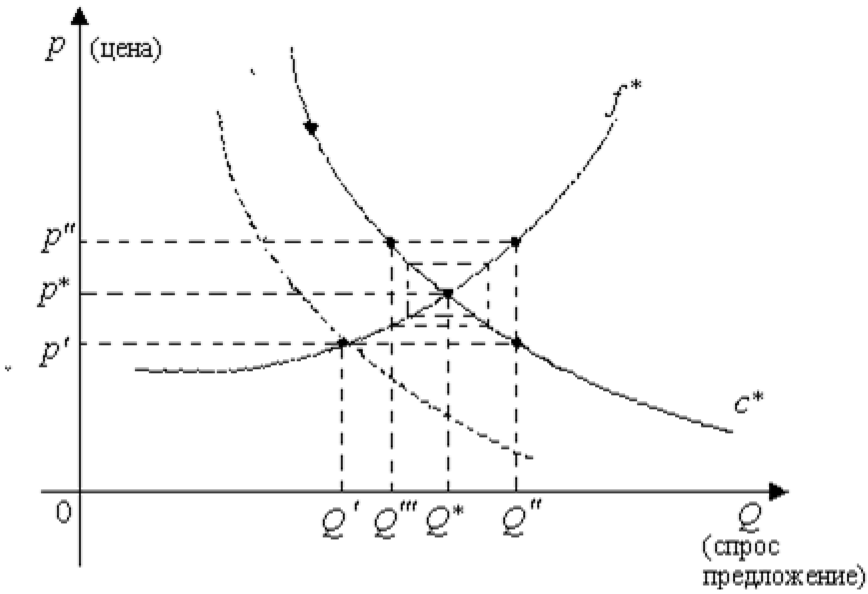


Рис. 2.4.1. Устойчивость равновесия против колебания цен

Для того чтобы точка (p',Q') оказалась равновесной, кривая спроса должна сместиться и пройти через эту точку. Когда это возможно? Формально, тогда, когда выполняется равенство $c^*(p',\cdot) = f^*(p',\cdot)$. Содержательно, бюджет потребителя должен уменьшиться ровно на величину $p^*Q^* - p'Q'$, и тогда бюджетная линия в пространстве товаров параллельно сместится от точки Q^* до точки Q'. Такое изменение ситуации приведет к уменьшению дохода производителя ($p'Q' < p^*Q^*$), и оно вызвано двумя причинами: снижением цены ($p' < p^*$) и выпуска ($Q' < Q^*$). Что может противопоставить этому производитель? При данных неизменных технологических условиях - ничего, так как нежелание снизить цену своего товара или объема выпуска приведет к еще худшему результату. Таким образом, неценовые причины могут привести к переходу в новое состояние равновесия, и это свидетельствует о неустойчивости равновесия против неценовых возмущений в экономике.

Обсудим теперь ценовую причину. Пусть цена товара упала до величины $p' < p^*$. Как видно из рис. 2.4.1, при этой цене спрос превышает предложение ($Q'' > Q'$), что влечет повышение цены товара. Но до какого уровня? Если предложение подтягивается до нового уровня спроса, т.е. до величины Q'', то, согласно кривой предложения, цена должна повышаться до величины p''. Но такой цене соответствует спрос $Q''' < Q''$. Продолжая эти рассуждения, можно заметить, что цена последовательно приближается к равновесному значению p^*, а спрос и предложение сходятся к общему (равновесному) значению Q^*. Здесь описана идея процедуры рыночного регулирования цены "невидимой рукой Адама Смита". По расположению вспомогательных линий на графике эту процедуру называют паутинообразной моделью регулирования цены товара.

Аналогичную картину можно получить при исходном предположении о повышении цены над p^*.

В результате мы можем сделать вывод о том, что экономическое равновесие устойчиво против ценовых возмущений.

Паутинообразная модель описывает приспособление цены во времени к вариациям спроса и предложения. Опишем ее детально на примере линейных функций.

Задача 2.4.1. Для рынка одного товара вывести формулу паутинообразного регулирования цены при условии, что функции спроса и предложения линейно зависят от цены, и предложение реагирует на изменение спроса с временным лагом (с опозданием на некоторый промежуток времени).

Решение. Линейность функций спроса и предложения означает представимость их в виде: $c^*(p) = -ap + b, \quad f^*(p) = cp + d, \quad a,b,c,d > 0$.

Пусть $a > c$, т.е. наклон кривой спроса больше, чем наклон кривой предложения. Для отражения последовательного изменения значений, величины c^*, f^* и p снабдим индексом времени t: c_t^*, f_t^*, p_t. Моменты изменения их значений (моменты регулирования) обозначим через $t_1, t_2, \ldots$ Для простоты положим $t_k - t_{k-1} = 1$, т.е. $t = 0,1,2\ldots$

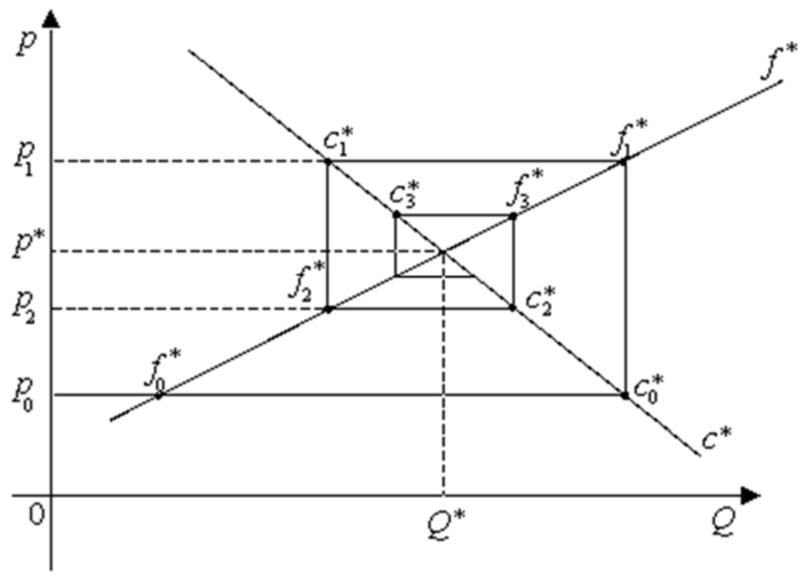


Рис. 2.4.2. Паутинообразная модель

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ спрос c_0^* соответствует уровню цены p_0 (см. рис. 2.4.2) и превышает предложение, т.е. $c_0^* > f_0^*$. Предложение подтягивается к уровню c_0^* к моменту $t = 1$ $f_1^* = c_0^*$ и соответствует уровню цены $p_1 > p_0$. Но этой цене в момент $t = 1$ соответствует другой уровень спроса $c_1^* < f_1^*$, который вынуждает цену уменьшиться до уровня $p_2 < p_1$. Далее предложение снижается до уровня c_1^* к моменту $t = 2$ $f_2^* = c_1^*$. И т.д.

Продолжая эти построения, мы приходим к общей закономерности: $f_{t+1}^* = c_t^*$ или $cp_{t+1} + d = -ap_t + b$.

Отсюда получаем искомую рекуррентную формулу приспособления цены к уровням спроса и предложения:

$$p_{t+1} = -\frac{a}{c} p_t + \frac{b-d}{c}, \quad t = 0,1,2,... \tag{2.4.1}$$

Зная "начальную" цену p_0, по формуле (2.4.1) можно вычислить цену товара на любом шаге приближения к равновесному значению p^*.

Заметим, когда $a < c$, т.е. наклон кривой спроса меньше, чем наклон кривой предложения, процедура расходится.

Процесс последовательного приближения к равновесной цене называется **регулированием цен**. Кто и с какой целью регулирует цены? Ответ заключается в том, что, благодаря законам спроса и предложения, в условиях конкуренции рынок сам приспосабливает цены к вариациям спроса и предложения во времени. Выше была рассмотрена "геометрическая" картина такого приспособления. Теперь познакомимся с аналитическими формулами регулирования для численного вычисления равновесных цен.

Итеративный процесс поиска равновесных цен должен обладать свойством сходимости, т.е., в конечном счете, должен привести к искомым ценам с любой предзаданной точностью. В этом случае процесс регулирования цен (или собственно конкурентное равновесие) называется **устойчивым**.

Таким образом, задача регулирования цен преследует цель определения условий, заставляющих цены, как функций времени, сходиться к равновесным значениям. Математически эта задача сводится к нахождению условий устойчивости решений специально построенных рекуррентных по времени уравнений. Такое уравнение называется **динамической моделью** регулирования цен. Эта модель может быть как непрерывной, так и дискретной. В первом случае, на основе предположения о непрерывном изменении цен, модель выражается с помощью дифференциальных уравнений. Во втором случае предполагается дискретный характер изменения цен, т.е. фиксируется изменение цен в отдельные моменты времени (или через определенные промежутки времени). Поэтому модель регулирования цен имеет вид разностных уравнений. Непрерывные модели предпочтительны в теоретическом плане. Их преимущество состоит в возможности применения удобного аппарата дифференцирования. Мы будем рассматривать только дискретный случай, наиболее понятный с точки зрения практического восприятия.
Перейдем к конкретным построениям. Для определенности процесс регулирования рассмотрим в модели Эрроу-Дебре. Предварительно уточним некоторые предпосылки и ряд дополнительных сведений.

Во-первых, цены будем снабжать параметром времени t: $p_k(t)$ - цена k-го товара в момент t.

Во-вторых, будем предполагать дискретное изменение времени, т.е. будем рассматривать отдельные моменты времени $t_1, t_2, ...$ Причем для упрощения формул будем считать, что $t_{r+1} - t_r = 1$. Это дает возможность вместо последовательности $t_r, t_{r+1}, ...$ рассматривать последовательность моментов $t, t+1, ...$, начиная с $t = 0$.

В-третьих, вместо пространства товаров R^n будем рассматривать пространство R^{n+1}, где дополнительная $n+1$ - ая координата соответствует особому виду товара - "деньгам". Таким образом, размерность всех векторов спроса и предложения будет равна $n+1$. Вектор цен, соответственно, будет задан в пространстве R_+^{n+1}. Причем дополнительная $n+1$ -ая компонента p_0 будет интерпретироваться как "цена денег".

Для некоторого вектора цен $S(p_r)$ и соответствующих ему векторов совокупного спроса $x(p) \in D(p)$ и совокупного предложения $y(p) \in S(p)$ обозначим

$$F(p) = x(p) - y(p). \tag{2.4.2}$$

Величина $F(p)$ имеет смысл избыточного спроса при ценах p (противоположная величина $E(p) = -F(p) = y(p) - x(p)$ имеет смысл избыточного предложения). Рассматривая эту величину для всех $S(p_r)$, мы можем говорить о функции избыточного спроса F, определенной на множестве P.

Для равновесного вектора цен имеем (см. (2.2.7), (2.2.8))

$$F\left(p^*\right) \le 0, \tag{2.4.3}$$

$$\left\langle p^*, F\left(p^*\right)\right\rangle = 0. \tag{2.4.4}$$

Если положить все цены строго положительными, т.е. $p_k^* > 0$, $k = 0,1,...,n$, то равенство (2.4.4) будет иметь место только в случае строгого равенства в (2.4.3) , т.е.

$$F\left(p^*\right) = 0. \tag{2.4.5}$$

Так как это равенство понимается покомпонентно ($F_k\left(p^*\right) = 0$, $k = 1,...,n$, где F_k - функция избыточного спроса для товара k), то условие (2.4.4) становится следствием равенства (2.4.5). Поэтому в случае положительных цен конкурентное равновесие определяется одним условием (2.4.5) .

Функция F обычно предполагается положительно однородной нулевой степени, т.е. для любых $p \in R_+^{n+1}$ и постоянного числа $\lambda > 0$ $F\left(\lambda p_0, \lambda p_1, ..., \lambda p_n\right) = F\left(p_0, p_1, ..., p_n\right)$. Это свойство означает, что на функцию избыточного спроса изменение масштаба цен не влияет, а существенны лишь относительные цены.

Рассмотрение функции избыточного спроса связано с ее применением в модели регулирования цен. В основе построения искомой формулы итеративного процесса вычисления равновесных цен лежит идея о том, что скорость изменения цен пропорциональна изменению величины избыточного спроса. Действительно, возрастание (убывание) функции избыточного спроса во времени равносильно более быстрому (медленному) росту спроса по сравнению с предложением (см. (2.4.2)), а это, согласно закона спроса, сопровождается увеличением (уменьшением) цен товаров.

Сказанное математически можно отразить формулой $\dfrac{dp}{dt} = aF(p)$ или в координатной форме $\dfrac{dp_k}{dt} = aF_k(p)$, $k = 0,1,...,n$, где a - коэффициент пропорциональности, $F_k(p) = x_k(p) - y_k(p)$ - функция избыточного спроса для товара k . Здесь мы предполагаем, ради простоты, что пропорциональность изменения цены и избыточного спроса по всем товарам одинакова (и равна числу a).

Из последнего уравнения по определению производной получаем: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{p_k(t+\Delta t) + p_k(t)}{\Delta t}\right] = aF_k\left(p(t)\right)$. Отсюда для достаточно малых $\Delta t > 0$ можно принять приблизительно $p_k\left(t+\Delta t\right) + p_k\left(t\right) \approx aF_k\left(p(t)\right) \cdot \Delta t$.

Принимая величину $t + \Delta t$ как "следующий" за t момент времени, для дискретного случая мы приходим к следующему закону изменения цен:

$$p_k(t+1) = p_k(t) + \beta F_k\left(p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)\right), \quad k = 0,1,2,...,n$$

или в векторной форме:

$$p(t+1)=p(t)+\beta F\left(p(t)\right), \quad t=0,1,2,... \tag{2.4.6}$$

Это есть рекуррентное уравнение, когда последующее (по времени) значение цены вычисляется с помощью предыдущего значения. Для его последовательного решения нужно иметь "начальное" условие. Им является значение цены в "начальный" момент времени $t=0$, которое считается известным.

Для того чтобы в уравнении (2.4.6) было учтено условие положительности цен, можно написать

$$p(t+1)=\max\left\{0, p(t)+\beta F\left(p(t)\right)\right\}, \quad t=0,1,2,... \tag{2.4.7}$$

Таким образом, динамика процесса регулирования цен описана.

Процесс регулирования можно проводить в нормированных ценах или без нормирования цен. В первом случае вектор $p=\left(p_0,p_1,...,p_n\right)$ нормируется с помощью какого-то выделенного товара (например, нулевого), и получается новый вектор $q=\left(1,q_1,...,q_n\right)$, компоненты которого $q_k=\dfrac{p_k}{p_0}$, $k=0,1,...,n$, являются относительными ценами. В ненормированном процессе все товары являются равноправными. С математической точки зрения ненормированный процесс усложняется множественностью равновесных векторов цен, так как все точки луча λp^* ($\lambda>0$) будут равновесными векторами цен.

Устойчивость конкурентного равновесия, т.е. сходимость итеративного процесса (2.4.7) к равновесной цене, можно изучать на двух уровнях - на уровне **локальной устойчивости** и на уровне **глобальной устойчивости.** Равновесие называется локально устойчивым, если итеративный процесс сходится при начальной точке p^0, достаточно близкой к p^*. Если устойчивость имеет место независимо от местонахождения начальной точки p^0, то равновесие глобально устойчиво.

Одним из условий сходимости процесса (2.4.7) является так называемая **строгая валовая зависимость**.

Говорят, что для ненормированного процесса регулирования цен имеет место строгая валовая зависимость, если для каждого k функция избыточного спроса F_k есть строго возрастающая функция цены p_k $\left(\dfrac{\partial F_k}{\partial p_k}>0\right)$.

Экономический смысл этого условия состоит в том, что при повышении цены k-го товара и постоянстве других цен можно ожидать увеличения спроса на остальные (взаимозаменяемые) товары.

2.5 Функции полезности и их виды. Кривые безразличия

Первичными элементами экономики являются товары и участники. Говоря о товарах, имеем в виду все, что является предметом сделок в данном обществе, в том числе и услуги. Рассмотрим поведение отдельного участника экономики, как потребителя товаров. Эта проблема рассматривается с точки зрения рационального распределения личного бюджета (дохода) потребителя, которая, в конечном счете, сводится к решению вопроса о том, какое количество каждого наличного товара он должен приобрести при заданных ценах и известном доходе.

Для получения математической модели задачи потребителя нам нужно формализовать такие понятия как товар, цель потребления товаров, цена товара, бюджет и покупательская способность потребителя.

Мы будем предполагать, что количество каждого товара можно измерять вещественным неотрицательным числом (в штуках, в килограммах, в метрах, в литрах, в человеко-часах и т.д.). Пусть на рынке производится и продается n видов товаров. Вид товара будем обозначать индексом i, так что $i=1,2,...,n$. Обозначим через x_i количество i-го товара. Вектор $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ будем называть **набором товаров**. Если в наборе x для некоторых i $x_i=0$, то будем говорить, что товар вида i не приобретается данным потребителем. Поэтому множество $R_+^n=\left\{x{\in}R^n\,/\,x_i{\ge}0,\,i{=}1,...,n\right\}$ будем называть **пространством товаров**.

Заметим, что на количество товаров не накладываются ограничения сверху. Иначе говоря, мы предполагаем, что на рынке существует достаточное количество товаров. Иногда в R_+^n выделяется некоторое подмножество X, как множество реально применяемых товаров, на котором определены интересы данного потребителя. В R_+^n наборы товаров можно складывать между собой или умножать на неотрицательное число; в R_+^n вычитание невозможно, если при этом получается отрицательное количество товара. Человек приобретает (покупает) товары с целью максимального удовлетворения своих потребностей. У каждого есть свои вкусы, каждый по-своему оценивает пользу или вред от потребления товара. Поэтому потребитель стремится выбрать в пространстве R_+^n "лучший" с его индивидуальной точки зрения товар. При сравнении двух наборов x и y одни предпочтут x, другие - y.

Для того чтобы формализовать выбор потребителя с учетом его цели, в пространстве R_+^n определим (индивидуальное) **отношение предпочтения**, обозначаемое символом $\succeq$. При помощи этого отношения любой набор $x\in R_+^n$ можно сравнить с другим набором $y\in R_+^n$. Запись $x\succeq y$ означает, что либо x предпочтительнее чем y, либо наборы x и y для потребителя безразличны (то есть x по крайней мере так же хорош, как и y). Заметим, что в отношении $\succeq$ набор товаров рассматривается как одно целое (в отличие от векторного неравенства $x\ge y$, понимаемого покомпонентно).

Строгое предпочтение $x\succ y$ имеет место, если и только если $x\succ y$, а $y\succ x$ несправедливо.

Говорят, что наборы x и y **безразличны** для данного потребителя (обозначают $x\sqcup y$) тогда и только тогда, когда $x\succeq y$ и $y\succeq x$. Индивидуальное отношение $\sqcup$ можно рассматривать как отображение, которое каждому набору $x\in R_+^n$ ставит в соответствие множество всех тех наборов товаров, которые связаны с x отношением безразличия. Таким образом, отношение безразличия разбивает все пространство R_+^n на классы эквивалентности (безразличия).

Исходя из логики сравнения товаров, потребуем, чтобы отношение $\succeq$ удовлетворяло следующим аксиомам:

а₁) рефлексивность: для любого $x \in R_{+}^{n}$ справедливо $x \succeq x$;

а₂) транзитивность: для любого $x, y, z \in R_{+}^{n}$, таких, что $x \succeq y$, $y \succeq z$ справедливо $x \succeq z$;

а₃) полнота: для любых $x, y \in R_{+}^{n}$ либо $x \succeq y$, либо $y \succeq x$, либо $x \sim y$.

Кроме того, для отношения безразличия должна иметь место аксиома симметричности: из $x \sim y$ следует $y \sim x$.

Отношение предпочтения на практике выявляется экспериментальным путем, сравнивая наборы товаров попарно и спрашивая потребителя, какой набор он предпочитает. Реально такую работу можно провести в случае небольшого числа товаров. Предпочтение потребителя изменчиво и зависит от многих условий: цен товара, его дохода, имеющегося у него запаса товаров, сезона, состояния здоровья, настроения и т.д. Поэтому нельзя раз и навсегда "прикрепить" за потребителем неизменные принципы предпочтения. Следовательно, при повторном моделировании поведения потребителя его предпочтение нужно формализовать заново "с учетом изменившихся условий". В принципе нет ничего сложного в том, чтобы взять два набора товаров и спросить потребителя, который из них он предпочитает и в результате последовательного опроса найти искомую закономерность. Гораздо сложнее выявить предпочтение целой группы людей или общества, так как невозможно по каждой паре наборов товаров проводить голосование или референдум и ожидать, что результаты будут однозначными.

Кроме основных аксиом **а1), а2), а3)** отношение предпочтения может обладать рядом содержательных свойств. Приведем основные из них:

а₄) непрерывность: для любых $x, y \in X$ множество $\left\{\left(x, y\right) / x \succ y\right\}$ является открытым подмножеством декартово произведения $X \times X$;

а₅) ненасыщаемость: для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет $x \succ y$ и неравенства $x \geq y$, $x \neq y$ влекут $x \succ y$;

а₆) выпуклость: для любых $x, y \in X$ отношение $x \succeq y$ влечет $\alpha x + \left(1 - \alpha\right) y \succeq y$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Содержательно непрерывность означает, что если x строго предпочтительнее y, то при малом изменении каждого из них отношение строгого предпочтения сохраняется. Ценность этого свойства заключается в том, что непрерывное отношение предпочтения можно заменить (смоделировать) обычной числовой функцией.

Если все товары хорошего качества, то естественно, большее их количество будет предпочтительнее, чем меньшее. Этот факт и отражен в свойстве ненасыщаемости. Оно означает отсутствие такого набора $x \in X$, что $x \succeq y$ для всех $y \in X$ (отсутствие точки насыщения).

Выпуклость отношения предпочтения означает, что если набор x предпочтительнее набора y, то любая их "смесь" остается предпочтительней чем y.

Однако, отношение предпочтения является весьма неудобным инструментом изучения потребительского выбора. Оно является больше качественной категорией и не приспособлено для проведения количественных исследований. Поэтому нужен другой механизм, который, с одной стороны, был бы адекватен данному отношению предпочтения, то есть отражал бы все его основные свойства, с другой стороны, являлся бы численным индикатором отношения предпочтения. Таким механизмом и является **функция полезности**. С функцией работать удобнее, чем с отношением предпочтения, хотя последнее имеет и определенные преимущества. Если отношение предпочтения отражает "склонность" или "желание" потребителя, то функция полезности отражает понятие "выгодности" товаров. Полезность понимается как мера благосостояния и как критерий правильности принимаемых решений. Источником полезности является потребление товара. Термин "полезность" менее индивидуален, чем термин "предпочтение". Действительно, труднее угадать, что человеку хочется, чем определить что ему полезней, так как факт "x полезнее y", в отличии от "x предпочтительнее y", можно оценить по числовой шкале.

Функция полезности должна быть построена с учетом всех тех объективных и субъективных условий, которые влияют на предпочтение потребителя. Например, полезность денег оценивается не только их покупательской способностью. Так, с большой степенью уверенности можно утверждать, что полезность десяти заработанных долларов больше, чем те же десяти долларов найденных случайно на улице. Для наркомана "полезность" набора товаров тем выше, чем больше в нем содержится героина, а для нормального человека - наоборот. При построении функции полезности все эти нюансы, связанные с понятием полезности, учитываются тем обстоятельством, что эта функция строится сугубо на основе отношения предпочтения, то есть каждому отношению предпочтения соответствует своя функция полезности. Перейдем к строгим определениям.

Определение 2.5.1. Пусть в R_+^n определено отношение предпочтения $\succeq$. Любая функция $u: R_+^n \to R^1$ такая, что $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$, называется функцией полезности, соответствующей этому отношению предпочтения.

Если интересы потребителя ограничиваются множеством $X \subset R_+^n$, то функция полезности определяется на этом множестве, $u: X \to R^1$.

В терминах функции полезности отношение безразличия $x \sim y$ задается равенством $u(x) = u(y)$.

Всегда ли можно представить отношение предпочтения функцией полезности? Можно ли исходя из предпочтения $\succeq$ найти функцию u, удовлетворяющую определению 2.5.1? Отвечая на этот вопрос приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. Для любого отношения предпочтения, определенного и непрерывного в R_+^n, можно построить представляющую его (непрерывную) функцию полезности $u: R_+^n \to R^1$.

Оказывается, что для любого непрерывного отношения предпочтения можно построить целое семейство функций полезности. Этот факт сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2.5.2. Пусть $u: R_+^n \to R^1$ - функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succeq$. Для любой строго возрастающей функции $f: R^n \to R^1$ сложная функция (суперпозиция) $u(x) = f(u(x))$ является функцией полезности, так же представляющей это отношение предпочтения $\succeq$.

Заметим, что для потребителя все эти функции полезности равнозначны. Он не в состоянии отдать предпочтение одной из них перед множеством возможных других, так как все они отражают одно и то же отношение предпочтения. Различие этих функций касается различных "масштабов" измерения полезности и не является принципиальным.

Так как функция полезности должна быть адекватной отношению предпочтения, то для нее можно сформулировать свойства **a₄), a₅), a₆)**.

Например, в терминах функции полезности свойство ненасыщаемости читается так:
a'₅) для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет неравенство $u(x) \geq u(y)$ и неравенства $x \geq y$, $x \neq y$ влекут $u(x) > u(y)$.

Из этого определения видно, что в случае ненасыщаемости функция u не достигает своего максимума на множестве X: для любого $x \in X$ найдется $y \in X$, который имеет большую полезность чем x.

Аналогом свойства **a₆)** является вогнутость функции полезности:
a'₆) для любых $x, y \in X$ $u(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y)$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если в условии вогнутости имеет место строгое неравенство, то функция полезности называется строго вогнутой. В этом случае выбор потребителя определяется однозначно.

Преимущество функции полезности против отношения предпочтения состоит, в частности, в том, что для анализа потребительского выбора можно использовать мощный аппарат дифференцирования. Пусть функция полезности и дифференцируема и

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{2.5.1}$$

Частная производная (2.5.1) называется **предельной полезностью** товара вида i. Это есть полезность, получаемая от "дополнительной" доли товара вида i:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Поэтому неравенство (2.5.1) можно интерпретировать так: для любого набора товаров $x \in R_+^n$ возрастание потребления товара вида i при постоянном уровне потребления других товаров приводит к увеличению полезности.

Таким образом, (2.5.1) - это условие ненасыщаемости, написанное для дифференцируемой функции полезности. Забегая вперед, отметим, что именно предельная полезность товара является определяющим цену товара фактором. Здесь нет противоречия с рыночным механизмом ценообразования, так как при прочих фиксированных условиях спрос на товар определяется его полезностью.

Предположим теперь, что функция u дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные. Для такой функции свойство строгой вогнутости выполнено, если матрица Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

Тогда, в частности, выполнены условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 0,...,n. \qquad (2.5.2)$$

Это неравенство говорит о том, что предельная полезность $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ товара уменьшается по мере того, как продукт потребляется.

Неравенства (2.5.1) и (2.5.2) отражают хорошо известный в экономической теории закон об убывающей предельной полезности (закон Госсена).

С понятием функции полезности неразрывно связано понятие **кривых безразличия**, имеющее широкое применение в математической теории потребления.

Определение 2.5.2. Кривой безразличия для данного набора товаров $x \in R_+^n$ называется геометрическое место точек $y \in R_+^n$, которые находятся в отношении безразличия с этим набором x, то есть множество $\left\{ y \in R_+^n / u(y) = u(x) \right\}$.

Так как для всех точек из этого множества полезность одна и та же, то кривые безразличия задаются уравнениями $u(x) = c$, где c - любая *const*. Таким образом, кривая безразличия математически представляется как линия уровня функции полезности. Поэтому для любой функции полезности существует бесконечное множество кривых безразличия (для разных *const*) и они заполняют все пространство R_+^n, образуя так называемую карту безразличия.

Приведем примеры некоторых, наиболее часто применяемых функций полезности и виды их карт безразличия. Эти функции, как показала практика, при определенных условиях достаточно объективно отражают предпочтение потребительского выбора.

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \qquad (2.5.3)$$

где коэффициент b_i является числовой оценкой полезности от потребления единицы товара вида i.

Для построения кривых безразличия функции (2.5.3) в R_+^2 из уравнения $b_1x_1 + b_2x_2 = c$ найдем $x_2 = -\frac{b_1}{b_2}x_1 + \frac{c}{b_2}$. При постоянных b_1 и b_2 это есть семейство (по параметру c) параллельных прямых с углом наклона $-\frac{b_1}{b_2}$. Карта кривых безразличия функции (2.5.3) приведена на рис. 2.5.1(а).

Функция (2.5.3) учитывает возможность компенсации уменьшения потребления одних товаров другими.

Задача 2.5.1. Пусть товаром первого вида является кофе, второго – чай, а потребление этих продуктов в количествах x_1 и x_2 дает полезность, равную c, то есть $u(x) = b_1x_1 + b_2x_2 = c$.

Решение. Представим, что потребление кофе уменьшилось на α единиц. Тогда полезность упадет до уровня $c - b_1 \cdot \alpha$. Чтобы компенсировать эту потерю полезности надо увеличить потребление чая на величину β так, чтобы $u(x_1 - \alpha, x_2 + \beta) = c$.

Отсюда найдем $\beta = \alpha\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)$. В результате имеем:

$$u\left(x_1 - \alpha, x_2 + \beta\right) = b_1\left(x_1 - \alpha\right) + b_2\left(x_2 + \alpha\dfrac{b_1}{b_2}\right) = c = u\left(x_1, x_2\right).$$

Таким образом, функция (2.5.3) позволяет определить размер замещения одних товаров другими для того, чтобы полезность оставалась на неизменном уровне.

2. Функция полезности с полным взаимодополнением благ:

$$u(x) = \min\left\{\frac{x_i}{b_i}, i = 1, \dots, n\right\}, \qquad (2.5.4)$$

где b_i - количество товара вида i, приходящееся на единицу полезности.

Для построения кривых безразличия функции (2.5.4) в R_+^2 из уравнения $\min\left\{\dfrac{x_1}{b_1}, \dfrac{x_2}{b_2}\right\} = c$ найдем

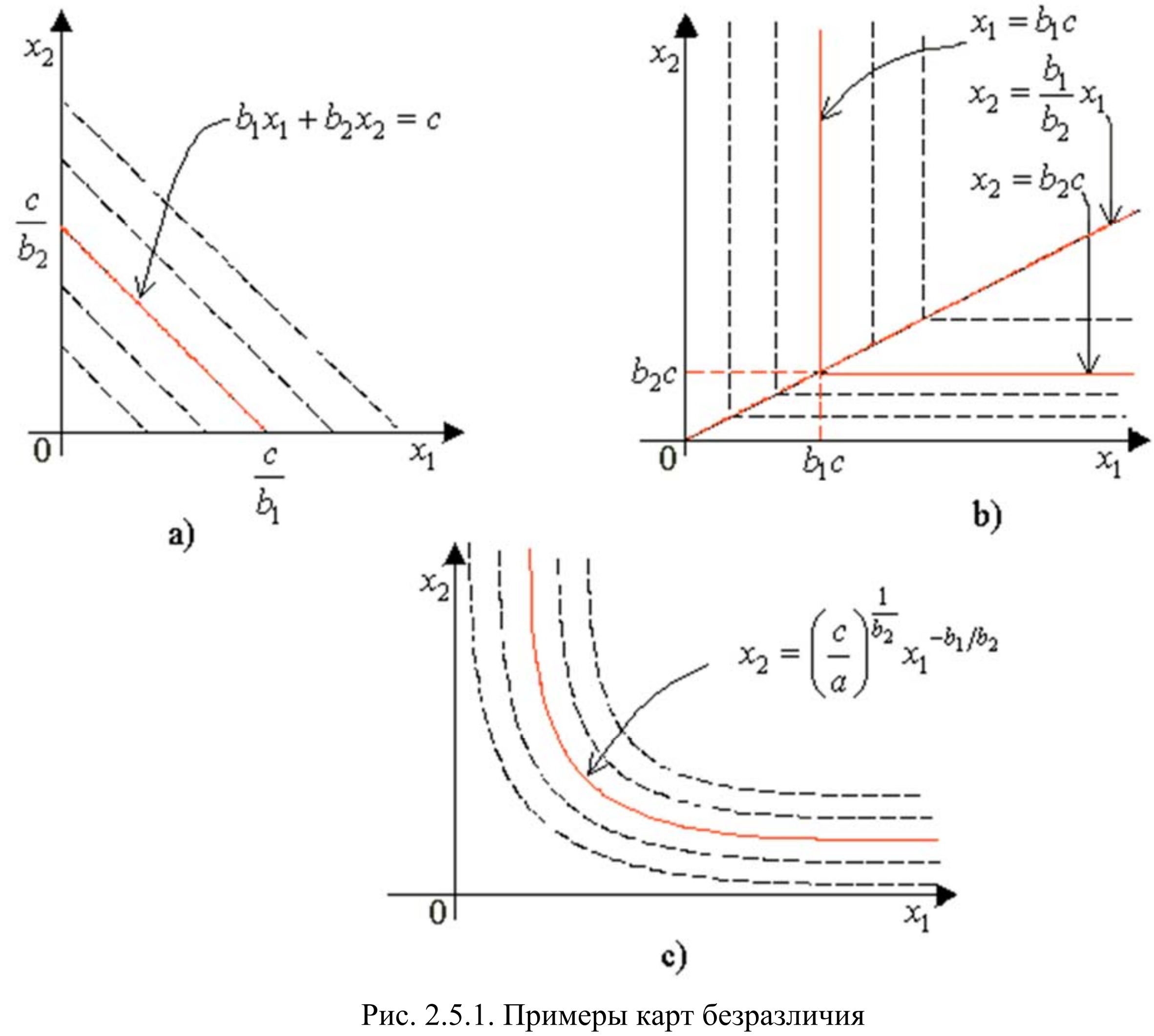


Рис. 2.5.1. Примеры карт безразличия

$$x_2 = \frac{b_1}{b_2} x_1, \quad если \quad \frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2}, \tag{2.5.5}$$

$$x_1 = b_1 c, \quad если \quad \frac{x_1}{b_1} < \frac{x_2}{b_2}, \tag{2.5.6}$$

$$x_1 = b_2 c, \quad если \quad \frac{x_1}{b_1} > \frac{x_2}{b_2}. \tag{2.5.7}$$

Отсюда видно, что карту безразличия функции (2.5.4) составляют одна линия, проходящая через начало координат и два семейства (по параметру c) линий, параллельных осям координат (рис.2.5.1(b)).

Функция (2.5.4) учитывает возможность дополнения одних товаров другими.

Задача 2.5.2. Приобретается набор из двух товаров: кофе в количестве x_1 и сахар x_2 в количестве c. Потребление этих товаров дает полезность, равную c, то есть $u(x) = \min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right\} = c$.

Решение. В случае (2.5.5) $\frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = const$ и увеличение (уменьшение) потребления кофе влечет увеличения (уменьшения) сахара.

В случае (2.5.6) увеличение потребления кофе может привести к нарушению неравенства в (2.5.6) и, следовательно, к нарушению уровня полезности, если не увеличиться потребление сахара.

Анализ случая (2.5.7) проведите самостоятельно.

Как показывает задача 2.5.1, функция (2.5.4) применяется для определения полезности набора взаимодополняющих друг друга товаров.

3. Неоклассическая функция полезности (функция Кобба-Дугласа):

$$u(x) = a \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}, \quad b_1 + \ldots + b_n = 1, \tag{2.5.8}$$

где a - фактор шкалы измерения полезности, $0 < b_i < 1$. Для построения кривых безразличия функции (2.5.8) в R_+^2 из уравнения $a x_1^{b_1} x_2^{b_2} = c$ найдем $x_2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{b_2}} x_1^{-\frac{b_1}{b_2}}$, то есть карту безразличия составляет семейство (по параметру c) гипербол, показанных на рис.2.5.1(c).

В приведенных примерах функции (2.5.3) и (2.5.8) заданы явным образом, а функция (2.5.4) находится как решение системы неравенств $x_i \geq b_i u(x), \quad i = 1,2.$

Приведем без комментариев еще несколько видов функции полезности.

4. Функция полезности замещающе-дополняющего типа:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x), \tag{2.5.9}$$

где функции $v_1, .., v_n$ находятся из системы неравенств $x_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j v_j(x), \ i = 1, \ldots, n$.

5. Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = \langle a, x \rangle + \frac{1}{2} x^T B x, \tag{2.5.10}$$

где $a+x^T B>0$, x^T-транспонированный вектор x, B- отрицательно определенная $n\times n$ - матрица.

6. Логарифмическая функция полезности (функция Бернулли):

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \log\left(x_i-b_i\right), \tag{2.5.11}$$

где $a_i>0$, $x_i>b_i\geq 0$.

7. Экспоненциальная функция полезности:

$$u(x)=\frac{1}{a}e^{-w(x)}, \tag{2.5.12}$$

где $a>0$, $w(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$.

Здесь перечислены только некоторые из применяемых в теории потребления функций полезности. Список таких "готовых" функций можно продолжить. Однако уместно повторить то, что говорилось ранее о математических моделях в целом - нельзя гарантировать пригодность известных функций для каждого конкретного случая. При моделировании задачи потребителя как раз самым уязвимым местом является функция полезности, адекватно отражающая предпочтения индивидуального потребителя. Поэтому часто требуется не выбрать, а построить для данной конкретной задачи свою функцию полезности. Наиболее общими для построения функций полезности являются методы регрессионного анализа, которые применимы при наличии подходящего статистического материала. Для выбранного вида функции полезности на основе этих данных оцениваются ее коэффициенты (параметры). Сложность метода зависит от класса функций, (линейных, квадратичных, степенных и др.) в котором ищется функция полезности.

2.6 Предельная полезность и предельная норма замещения

Насколько возрастает спрос, если предпринять сезонное снижение цен на 10%? Как изменится производительность труда фирмы при сокращении рабочего дня на 0,5 часов, а зарплаты на 5%? Изменится ли прибыль предприятия (если да, то насколько) при приеме на работу дополнительного рабочего? От какого количества товара одного вида готов отказаться потребитель, чтобы получить одну дополнительную единицу другого товара? Такого рода вопросы, связанные с анализом дополнительного эффекта при дополнительных затратах, возникают во всех сферах экономики. Оперируя только суммарными и средними величинами, нельзя на них ответить. На них можно ответить как раз с помощью предельных величин, определяемых математически с помощью производных соответствующих функций.

Применение в экономике дифференциального исчисления и изучение его результатов называется предельным анализом.

Заметим, что дифференциальное исчисление оперирует непрерывно определенными (не дискретными) бесконечно малыми величинами, поэтому приведенные выше термины "дополнительных единиц" здесь являются условными.

Будем говорить о предельных величинах, касающихся только сферы потребления.

Рассмотрим произвольный набор товаров $x\in R_+^n$. Если полезность от x_i обозначить через $u^i\left(x_i\right)$, то суммарная полезность набора x есть $u(x)=\sum_{i=1}^{n}u^i\left(x_i\right)$.

Среднюю полезность набора x схематично можно определить как вектор $\frac{u(x)}{x}=\left(\frac{u^1(x_1)}{x_1},\dots,\frac{u^n(x_n)}{x_n}\right)$, где $\frac{u^i(x_i)}{x_i}$ - средняя полезность товара вида i, то есть полезность, приходящаяся на единицу товара i.

Понятие предельной полезности набора x $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ мы уже рассматривали в предыдущем параграфе. Вычисляя частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, можно получить ответ на вопрос: как себя поведет полезность $u(x)$ при изменении объема потребления того или иного товара. Полезность товара растет, пока справедливо условие (2.5.1) . Если с ростом потребления товара неравенство (2.5.1) переходит в обратное, то очевидно, нет смысла и дальше увеличивать его потребление. Поэтому представляет интерес случай, когда $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$. К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе при выявлении оптимальных объемов потребления товара.

Сравнивая среднюю и предельную полезности, можно обнаружить тенденцию средней полезности "стремиться" к предельной полезности. А именно, среднее значение полезности возрастает (при возрастании потребления), если оно ниже предельной полезности; среднее значение полезности остается постоянным (при изменении потребления), если оно равно значению предельной полезности; среднее значение полезности убывает (при возрастании потребления), если оно превосходит предельную полезность.

Сравним среднюю и предельную полезности для разных функций полезности из предыдущего параграфа.

Средняя полезность набора товаров, обладающего свойством замещения (см. (2.5.3)), равна $\frac{u(x)}{x}=\left(\frac{b_1x_1}{x_1},\dots,\frac{b_nx_n}{x_n}\right)=(b_1,\dots,b_n)$, где b_i – средняя полезность товара вида i.

Предельная полезность есть $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(b_1,\dots,b_n)$.

Следовательно, для функции (2.5.3) средняя и предельная полезности совпадают.

Этот факт является следствием линейности функции u .

Подтверждением служит функция полезности для взаимодополняющих друг друга товаров (см. (2.5.4)):

$$\frac{u(x)}{x}=\min\left\{\frac{1}{b_1},\dots,\frac{1}{b_n}\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\min\left\{\frac{1}{b_1},\dots,\frac{1}{b_n}\right\}.$$

Для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) , полагая для простоты $n=2$, имеем:

$$\frac{u(x)}{x}=\left(ax_1^{b_1-1}x_2^{b_2},ax_1^{b_1}x_2^{b_2-1}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(b_1x_1^{b_1-1}x_2^{b_2},b_2x_1^{b_1}x_2^{b_2-1}\right).$$

С учетом условия $b_1, b_2 < 1$ ясно, что предельная полезность пропорциональна средней и всегда меньше ее.

Предельную величину, как и среднюю, можно считать относительной величиной. Пусть значение некоторой переменной z изменилась от z_1 до z_2. Разницу $\Delta z = z_2 - z_1$ называют **абсолютным изменением** z, а отношение $\frac{\Delta z}{z_1}$ - **относительным изменением** z (изменение, приходящееся на одну единицу исходной величины). В отличие от абсолютного относительное изменение есть величина безымянная. Число $\left(\frac{\Delta z}{z_1}\right) \times 100\%$ называется **процентным изменением** z.

При помощи предельных величин можно формализовать понятие **эластичности**, играющую важную роль при анализе взаимосвязи между экономическими показателями и факторами.

Эластичность (коэффициент эластичности) является численной оценкой относительного изменения экономического показателя под действием относительного изменения некоторого экономического фактора при неизменности других влияющих на этот показатель факторов.

Таким образом, эластичность показателя - это его чувствительность к изменению влияющего на него фактора.

Возникает естественный вопрос: зачем нужно вводить сложное понятие "эластичность", когда те же изменения можно описать предельными величинами? Как то: изменение полезности от объема потребления товара $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, изменение предложения $\left(y_i\right)$ от его цены $\left(\frac{\partial y_i}{\partial p_i}\right)$ - и т.д. Дело в том, что предельные величины, (как и средние) зависят от единицы измерения. Например, величина $\frac{\partial y_i}{\partial p_i}$ в *кг./руб.* есть одно число, а та же величина в *тонна/руб.* - другое. Такая неоднозначность приводит к техническим неудобствам. Эта проблема снимается, если чувствительность экономического показателя измеряется эластичностью, так как последняя определена как безымянная величина.

Пусть имеется некоторый экономический показатель z, зависящий от ряда факторов $y_1,...,y_n$, то есть $z = z\left(y\right) = z\left(y_1,...,y_n\right)$. Эластичность показателя z по y_i обозначим $\varepsilon_{y_i}\left(z\right)$ и выведем общую формулу для ее вычисления.

По определению эластичности

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\Delta z}{z} \Big/ \frac{\Delta y_i}{y_i} = \frac{\Delta z}{\Delta y_i} \times \frac{y_i}{z}. \qquad (2.6.1)$$

Переходя к пределу в правой части при $\Delta y_i \to 0$, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \left(\lim_{\Delta y_i \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y_i}\right) \frac{y_i}{z} = \frac{\partial z}{\partial y_i} \times \frac{y_i}{z}. \qquad (2.6.2)$$

Видим, что "эластичность z по y_i" вычисляется как произведение "предельной величины z по y_i" на "среднюю величину y_i по z".

Умножая числитель и знаменатель дроби (2.6.1) на 100%, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\frac{\Delta z}{z}100\%}{\frac{\Delta y_i}{y_i}100\%}. \tag{2.6.3}$$

Отсюда, эластичность z по y_i есть отношение процентного изменения z на процентное изменение y_i.

Интересно узнать, насколько процентов изменится z, если y_i изменится на 1%? Иначе говоря, нужно найти процентное изменение z при процентном изменении y_i, равном единице, то есть $\left(\frac{\Delta y_i}{y_i}\right)100\% = 1$.

Тогда из (2.6.3) сразу получаем искомое процентное изменение:

$$\frac{\Delta z}{z}100\% = \varepsilon_{y_i}(x)\Big|_{1\%}.$$

Отсюда, эластичность z по y_i есть процентное изменение показателя z при изменении фактора y_i на 1%.

Как видно из (2.6.2), знак эластичности в каждой точке y зависит от знаков $\frac{\partial z}{\partial y_i}$ и $\frac{y_i}{z}$. Предположим для простоты, что $\frac{y_i}{z} > 0$. Если z возрастает по y_i (в точке y), тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} > 0$ и эластичность положительна; если z убывает по y_i, тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} < 0$ и эластичность отрицательна.

Пороговым значением для эластичности является число 1. Для объяснения этого рассмотрим графическое изображение эластичности функции спроса (c) на один товар, зависящей только от его цены: $c = c(p)$.

Известно (см.рис. 2.1.1), что спрос является убывающей функцией цены. Вычислим эластичность $\varepsilon_p(c)$ в произвольной точке $A(p,c)$ графика функции $c = c(p)$ (рис. 2.6.1).

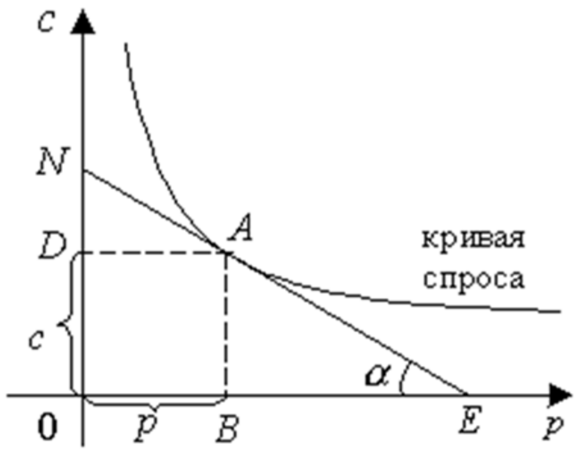


Рис. 2.6.1. Схема вычисления эластичности в точке A

Пресечение касательной в точке A с осями координат обозначим через E и N. По определению $\varepsilon_p(c)=\frac{dc}{dp}\frac{p}{c}$.

Выразим правую часть равенства через элементы графика.

Из $tg\alpha=\frac{AB}{BE}$ имеем $BE=\frac{AB}{tg\alpha}=\frac{OD}{tg\alpha}=\frac{c}{-\frac{dc}{dp}}$ (здесь знак минус показывает убывание функции c в точке A). Из подобия треугольников *ABE* и *ADN* имеем: $\frac{AN}{AE}=\frac{AD}{BE}=\frac{OB}{BE}=\frac{p}{-\left(c\Big/\frac{dc}{dp}\right)}=-\frac{dc}{dp}\frac{c}{p}=-\varepsilon_p(c)$.

Следовательно,

$$\varepsilon_p(c)=-\frac{AN}{AE}. \qquad (2.6.4)$$

Можно показать, что для возрастающей функции (например, предложения, как функции от цены) эластичность по абсолютной величине также будет равна отношению $\frac{AN}{AE}$. Потому в общем случае эластичность следует оценивать по ее абсолютной величине. Эта величина равна 1, если в (2.6.4) числитель равен знаменателю; больше 1, если числитель больше знаменателя и меньше 1 - если числитель меньше знаменателя. Это говорит о том, что эластичность $\varepsilon_{y_i}(z)$ зависит от кривизны графика функции z в рассматриваемой точке.

Если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|>1$, то функция z называется эластичной (по y_i); если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|<1$, то функция z называется неэластичной (по y_i); если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|=1$, то говорят, что функция z имеет единичную эластичность (по y_i).

Относительно спроса различают товары эластичного спроса и товары неэластичного спроса. Для товаров первого вида повышению цены на 1% соответствует понижение спроса более, чем на 1% и, наоборот, понижение цены на 1% приводит к росту покупок более, чем на 1% ($\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|>1$). Для товаров второго вида повышение цены на 1% влечет за собой понижение спроса менее, чем на 1% и, наоборот, уменьшение цены на 1% приводит к росту покупок менее чем на 1% ($\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|<1$).

Вычислим эластичность некоторых из функций полезности приведенных в предыдущем параграфе (для простоты будем полагать $n=2$).

Для функции с полным взаимозамещением благ (2.5.3) $\varepsilon_{x_i}(u)=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_i}{u}=\frac{b_i x_i}{b_1x_1+b_2x_2},\quad i=1,2.$

Например, в точке $\bar{x}=\left(\frac{1}{b_1},\frac{2}{b_2}\right)$ получаем: $\varepsilon_{x_1}(u)\Big|_{x_1=\bar{x}_1}=\frac{1}{3}$, $\varepsilon_{x_2}(u)\Big|_{x_2=\bar{x}_2}=\frac{2}{3}$.

Видим, что в точке $\bar{x}$ полезность в целом неэластична; при этом неэластичность по второму товару "выше", чем по первому товару.

Для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) имеем:

$$\varepsilon_{x_1}(u) = b_1 a x_1^{b_1-1} x_2^{b_2} \frac{x_1}{a x_1^{b_1} x_2^{b_2}} = b_1,$$

$$\varepsilon_{x_2}(u) = b_2 a x_1^{b_1} x_2^{b_2-1} \frac{x_1}{a x_1^{b_1} x_2^{b_2}} = b_2.$$

Итак, параметры b_1 и b_2 в функции Кобба-Дугласа как раз являются коэффициентами эластичности по видам товаров; они постоянны, то есть не зависят от объема потребления. Поэтому функция Кобба-Дугласа относится к классу функций полезности с постоянной эластичностью (вернее, неэластичностью, так как $b_1, b_2 < 1$).

Рассмотрим еще одно понятие, определяемое с помощью дифференцирования.

Предположим, что имеется пять наборов товаров $x^1 = 1{,}16$, $x^2 = 2{,}10$, $x^3 = 3{,}6$, $x^4 = 4{,}4$, $x^5 = 5{,}2$ с одинаковой полезностью, то есть $u\left(x^1\right) = \ldots = u\left(x^5\right)$. Пусть первый вид товара ($i = 1$) - продукт питания, второй ($i = 2$) -одежда. Эти точки лежат на одной кривой безразличия $u\left(x\right) = c$ (рис.2.6.2).

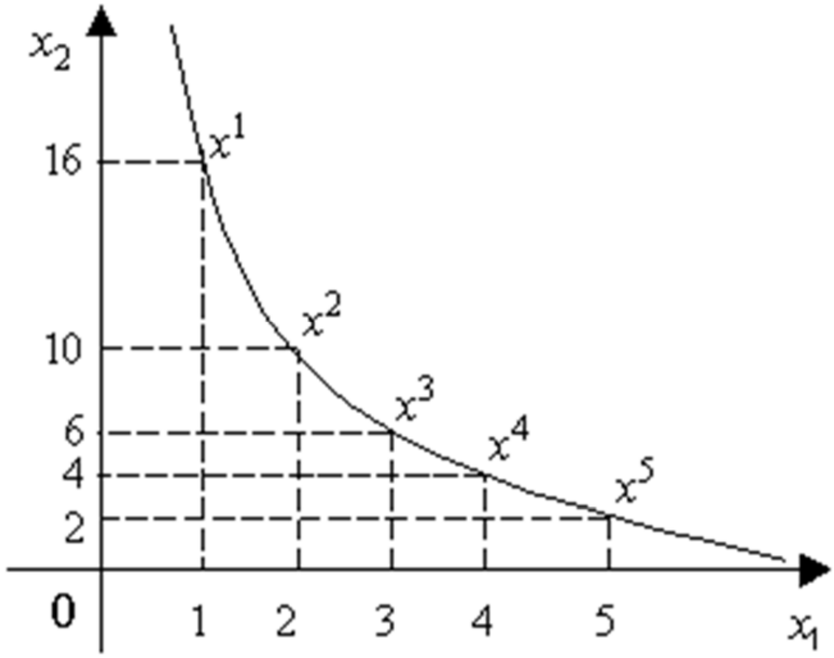


Рис. 2.6.2. Замещение наборов товаров

Как видно из графика, замена набора x^1 набором x^2 требует отказа от 6 единиц одежды взамен на одну единицу продукта питания; замена x^2 на x^3 - отказа от 4 единиц одежды ради одной единицы продукта питания и т.д.

Чтобы количественно определить объем некоторого товара, которым потребитель готов пожертвовать ради другого товара, используют меру, называемую **предельной нормой замещения**. Более точно, предельная норма замещения показывает, на сколько единиц нужно уменьшить (увеличить) количество одного товара при увеличении (уменьшении) другого товара на единицу, чтобы при этом полезность осталась неизменной.

Обозначим предельную норму замещения i-го товара j-м товаром через S_{ij} и выведем формулу для ее вычисления.

Пусть при уменьшении потребления j-го товара на величину Δx_j для поддержания прежнего уровня полезности необходимо увеличить потребление i-го товара на величину Δx_i:

$$u\left(x_1,\ldots,x_n\right)=u\left(x_1,\ldots,x_i+dx_i,\ldots,x_j+dx_j,\ldots,x_n\right), \tag{2.6.5}$$

где $dx_i=\Delta x_i$, $dx_j=-\Delta x_j$. По определению предельной нормы замещения

$$S_{ij}=\left.\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\right|_{u=const}. \tag{2.6.6}$$

Из (2.6.5) получаем

$$\Delta u=u\left(x_1,\ldots,x_i+dx_i,\ldots,x_j+dx_j,\ldots,x_n\right)-u\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0. \tag{2.6.7}$$

Для полного приращения Δu функции u в математическом анализе существует формула:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n+\varepsilon\left(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right), \tag{2.6.8}$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_i$ - частные дифференциалы, а $\varepsilon>0$ таково, что

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\varepsilon\left(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right)=0,\quad i=1,\ldots,n \tag{2.6.9}$$

Выражение $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$ есть полный дифференциал функции u.

Из (2.6.7)-(2.6.9) с учетом того, что $dx_k=0$ для $k\neq i,j$, имеем $du=\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j=0$.

Отсюда $\frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j}=-\frac{dx_j}{dx_i}=\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$ и из (2.6.6) получаем окончательно

$$S_{ij}=\frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j}. \tag{2.6.10}$$

Следовательно, предельная норма замещения товаров выражается через отношение их предельных полезностей.

Например, для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) имеем: $S_{ij}=\frac{b_i}{b_j}\frac{x_j}{x_i},\quad i,j=1,..,n$ $\left(i\neq j\right)$.

Из закона об убывающей предельной полезности следует выпуклость кривых безразличия (не путать с вогнутостью функции u) (см.(2.5.2)). Поэтому при движении вниз вдоль кривой безразличия (рис. 2.6.2) S_{12} убывает: $S_{12}\left(x^1\right)=6$, $S_{12}\left(x^2\right)=4$, $S_{12}\left(x^3\right)=2$, $S_{12}\left(x^4\right)=1$.

Этот факт в экономике называется **законом убывающей предельной нормы замещения:** при стремлении поддерживать неизменным уровень полезности путем замещения i-го товара j-м товаром, субъективное удовлетворение, получаемое от предельного потребления i-го товара, в сравнении с удовлетворением, получаемым от предельного потребления товара j, будет неуклонно уменьшаться.

Формы кривых безразличия показывают на разные степени желательности замены одного товара другим.

Пусть кривые безразличия для двух различных потребителей относительно напитка ($i=1$) и сока ($i=2$) имеют следующий вид (рис.2.6.3 и 2.6.4):

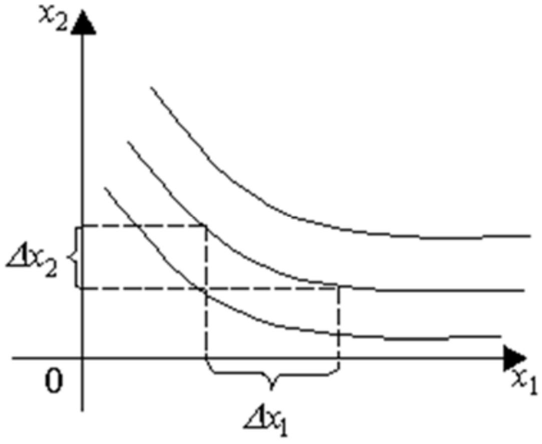


Рис. 2.6.3. Предпочтение первого потребителя

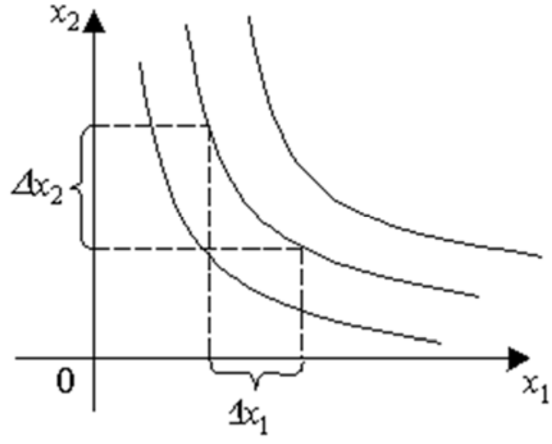


Рис. 2.6.4. Предпочтение второго потребителя

У первого потребителя (рис.2.6.3) низкая предельная норма замещения напитка соком - он готов отказаться от очень небольшого количества сока ради напитка ($\Delta x_2 < \Delta x_1$). У второго потребителя (рис.2.6.4), наоборот, высокая предельная норма замещения напитка соком ($\Delta x_2 > \Delta x_1$).

Предельная норма замещения применяется при изучении спроса (например, что нужнее в данный момент для домашнего хозяйства, один диван или два кресла; насколько нужно жертвовать технической характеристикой автомобиля ради увеличения комфорта и т.д.).

2.7 Связь предельной нормы замещения со средними рыночными ценами на потребительские блага и ее содержательная интерпретация

Приведем и исследуем классическую математическую модель задачи индивидуального потребительского выбора. Содержательно эту задачу можно сформулировать так: потребителю нужно приобрести (купить) на рынке необходимые ему виды товаров в таком количестве, чтобы их потребление доставило максимальное удовлетворение (пользу); при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его дохода (бюджета).

Последнее условие называется бюджетным ограничением и оно подчеркивает всегда ограниченные покупательские возможности потребителя.

Обращает на себя внимание "скудность" постановки задачи. Так, например, не говорится о минимальном прожиточном уровне, ниже которого объем потребления не может опускаться; нет ограничения на доход потребителя и т.д. Однако следует исходить из того, что эта постановка общая и в случае необходимости более подробного моделирования все недостающие сведения можно "прочитать между строчками" этой постановки. Мы же будем принимать эту постановку как исходную, ее и будем моделировать.

В начале пункта 2.5 перечислены те важнейшие факторы, которые, будучи формализованы и связаны подходящими математическими соотношениями, и дают требуемую модель. Это товар и его цена, цель и бюджет потребителя, его покупательская способность.

Приведем сначала необходимые обозначения: пусть $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in R_+^n$ - набор товаров, где x_i - количества товара вида i, n - число видов товаров, R_+^n - пространство товаров; $p=\left(p_1,...,p_n\right)$ - вектор цен товаров, где p_i - цена единицы товара вида i; K - доход (бюджет) потребителя.

Мы рассматриваем статическую задачу, поэтому эти величины не зависят от фактора времени. Параметры p_i и K считаются постоянными величинами, причем цены считаются рыночными, а доход не структурируется, то есть нас не интересует из каких частей он складывается. Компоненты x_i вектора являются неизвестными переменными. Модель составляется как раз для определения "оптимальных" значений этих переменных для данного потребителя. Цель потребителя будем описывать с помощью функции полезности $u: R_+^n \to R^1$ (см. определение 2.5.1), относительно которой будем предполагать выполнение условий (2.5.1) и (2.5.2). Наконец, мы рассматриваем некоторого "обобщенного" потребителя, никак не характеризуя его индивидуальные особенности, за исключением априорного предложения о существовании функции полезности, отражающей его индивидуальные предпочтения в R_+^n (см. теорему 2.5.1).

С учетом всего сказанного выше, модель задачи потребительского выбора имеет вид:

$$u(x)\to \max, \tag{2.7.1}$$

$$\langle p,x\rangle \le K, \quad x\ge 0. \tag{2.7.2}$$

Обозначим через $B\left(p,K\right)$ множество всевозможных товаров, допустимых потребителю при ценах p и доходе K:

$$B\left(p,K\right)=\left\{x\in R_+^n \,/\, \langle p,x\rangle \le K\right\} \tag{2.7.3}$$

называемое **бюджетным множеством**.

Графическое изображение этого множества показано на рис.2.7.1.

Граница $\overline{B}\left(p,K\right)=\left\{x\in R_+^n \,/\, \langle p,x\rangle = K\right\}$ множества $B\left(p,K\right)$ называется **бюджетной линией**.

Оптимальным решением задачи (2.7.1)-(2.7.2) называется такой вектор $x^*=\left(x_1^*,...,x_n^*\right)$, что

$$u\left(x^*\right)=\max_{x\in B(p,K)} u(x). \tag{2.7.4}$$

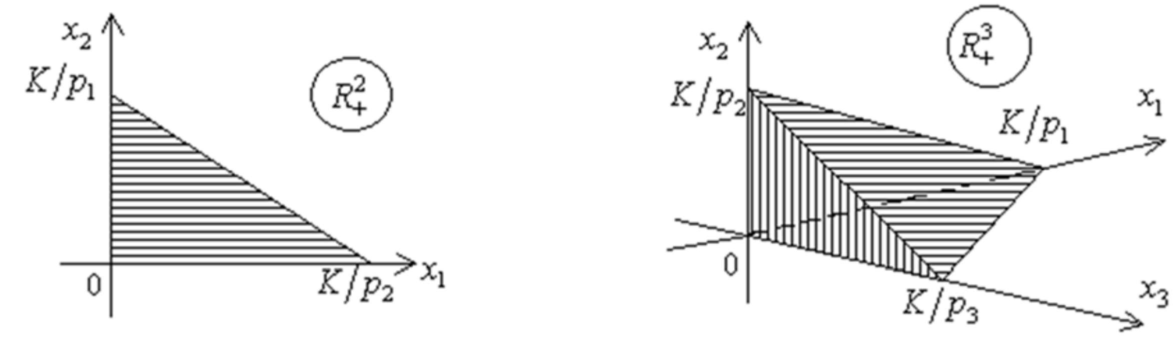


Рис. 2.7.1. Графическое изображение бюджетного множества

Определение 2.7.1. Оптимальное решение x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) называется **спросом потребителя.**

Данное формальное определение спроса отражает классическое понятие спроса как платежеспособную потребность.

Всегда ли существует оптимальное решение задачи (2.7.1) - (2.7.2)?

Поскольку мы имеем дело с оптимизационной задачей (линейный или нет в зависимости от функции полезности u), то на этот вопрос следует ответить с точки зрения теоремы Вейерштрасса. Так как функция полезности непрерывна по факту ее существования (см. теорему 2.5.1), основная сложность заключается в компактности множества (2.7.3), на котором ищется максимум функции u (см.(2.7.4)). В метрическом пространстве R_+^n, как известно, компактность множества равнозначно его замкнутости и ограниченности. Так как бюджетное множество замкнуто по определению, то остается изучить его ограниченность.

Покажем, что ограниченность не всегда имеет место. Предположим, для некоторого i $p_i = 0$. Как следует из (2.7.2) , в этом случае "допустимым" становится любой вектор $\tilde{x} = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$, то есть $\tilde{x} \in B\left(p, K\right)$, что говорит о неограниченности бюджетного множества. А это, в свою очередь, может привести к отсутствию оптимального решения задачи (2.7.1)-(2.7.2) (например, в случае неограниченности функции u , что является следствием ненасыщаемости потребителя (см. свойство **a'**$_5$ в пункте 2.5)). Однако, если потребитель ненасыщаем по всем товарам, то множество $B\left(p, K\right)$ оказывается ограниченным. Более строго этот факт сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 2.7.1. Пусть бюджетное множество (2.7.3) обладает следующим свойством: если в последовательности $x^k \in B\left(p, K\right)$ при $k \to \infty$ имеет место $x_j^k \to \infty$ для некоторого j, то $x_i^k \to \infty$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда бюджетное множество ограничено и в задаче (2.7.1)-(2.7.2) существует оптимальное решение. Если при этом функция u строго вогнута на множестве $B\left(p, K\right)$, то оптимальное решение единственно.

Итак, при фиксированных ценах $p_1, \ldots, p_n$ и заданном доходе K оптимальное потребление определяется компонентами $x_1^*, \ldots, x_n^*$ решения x^* задачи (2.7.1)-(2.7.2).

Выяснив существование оптимального решения задачи потребителя, займемся вопросом его вычисления. Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа для нашей задачи: $L\left(x, \lambda, \mu\right) = u\left(x\right) + \lambda\left(K - \left\langle p, x\right\rangle\right) + \mu x$, где λ, μ - множители Лагранжа. Выпишем необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера), которые благодаря условиям (2.5.2) будут и достаточными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \lambda p + \mu = 0, \\ \lambda\left(K - \langle p, x\rangle\right) = 0, \\ \mu x = 0, \\ K - \langle p, x\rangle \geq 0, \\ x \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases}$$

Не умаляя общности рассуждений, примем следующее предложение: потребитель приобретает все виды товаров, то есть $x_i > 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$ (в противном случае можно уменьшить размерность пространства R_+^n) и будем считать, что $p_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда из третьего равенства следует $\mu = 0$ и необходимые и достаточные условия принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \lambda p = 0, & (2.7.5) \\ \lambda\left(K - \langle p, x\rangle\right) = 0, & (2.7.6) \\ K - \langle p, x\rangle \geq 0, & (2.7.7) \\ \lambda > 0. & (2.7.8) \end{cases}$$

Эта система разрешима относительно $n+1$ неизвестных $x_1,\ldots,x_n,\lambda$, так как имеется $n+1$ уравнение (2.7.5) и (2.7.6). Все переменные и частные производные здесь вычисляются в точке x^*. Значение λ соответствующее (в силу уравнений (2.7.5) и (2.7.6)) точке x^* обозначим λ^*.

Для пары (x^*, λ^*) из (2.7.5) получаем:

$$\frac{1}{p_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^*} = \lambda^*, \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (2.5.9)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что в условиях оптимального потребления (то есть в условиях набора x^*) отношение предельной полезности к цене одинаково для всех товаров. Исходя из (2.5.9) оптимальный множитель Лагранжа λ^* интерпретируется как предельная полезность одной единицы цены или просто предельная полезность денег.

Поэтому равенство $\dfrac{1}{p_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{1}{p_2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \ldots = \dfrac{1}{p_n}\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ означает, что предельная полезность одной единицы денег одинаково для каждого товара и именно при таком распределении бюджета потребитель получает максимум полезности.

Для объяснения этого факта обратимся к рис.2.6.2. Если полезность от расходования дополнительного доллара на продукт питания выше, чем от доллара на одежду, то потребитель может увеличить полезность за счет роста расходов на питание. Таким образом, увеличение расходов на питание вызовет уменьшение расходов на одежду и это будет продолжаться до тех пор, пока предельная полезность на питание будет выше, чем на одежду. По закону Госсена предельная полезность продуктов питания постепенно снизится, вызывая рост расходов на одежду. Только тогда, когда предельная полезность дополнительного доллара расходов становится одинаковой для питания и одежды, будет достигнут максимум полезности.

Из равенства (2.5.9) следует так же вывод о том, что цены должны определяться исходя из предельной полезности товаров и денег: $p_i = \frac{1}{\lambda^*}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^*}$, $i = 1,...,n$.

Так как $\lambda^* > 0$ (следует из (2.7.5)), то из (2.7.6) получаем $K - \langle p, x^* \rangle = 0$.

Последнее означает, что точка максимума x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) лежит на бюджетной линии. В случае двух товаров имеем (см. рис. 2.7.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \lambda p_2 = 0 \\ K - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}.$$

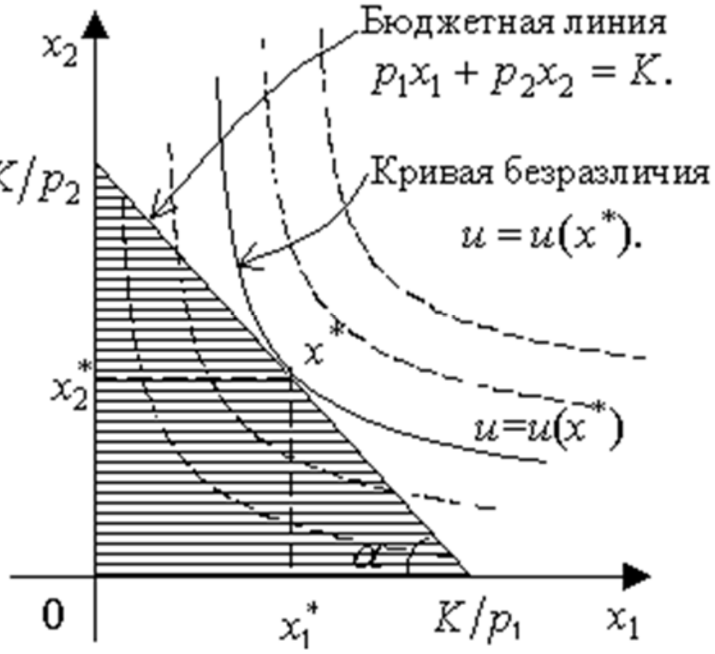


Рис. 2.7.2. Решение задачи потребителя

Наклон бюджетной линии равен $tg\alpha = -\frac{K/p_2}{K/p_1} = -\frac{p_1}{p_2}$.

Наклон кривой безразличия $u(x_1, x_2) = const$ находится из выражения $du = 0$, то есть $\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 = 0$ и составляет $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$.

Так как в точке касания x^* наклон кривой безразличия равен наклону бюджетной линии, то $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{p_1}{p_2}$ или

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.7.10)$$

Как видно из (2.7.9) , и в частности, из (2.7.10),

$$S_{ij}\Big|_{x=x^*} = \frac{p_i}{p_j}, \quad i, j = 1,...,n,$$

то есть в оптимальном наборе товаров $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ предельная норма замещения товара i товаром j оценивается отношением их цен (то есть зависит исключительно от их цен).

Как показывает рис. 2.7.2, оптимальное решение задачи (2.7.1)-(2.7.2) геометрически является точкой касания кривой безразличия и бюджетной линии. Для строго вогнутой функции полезности такая точка касания единственна (см. теорему 2.7.1).

С помощью рис. 2.7.2 можно анализировать различные последствия, связанные с изменением цен и дохода.

Будем считать, что все товары нормальные (качественные), то есть при увеличении дохода потребление увеличивается. Нас интересуют следующие вопросы:

а) изменение покупательской способности: как изменится спрос на товары при изменении их цен и неизменном доходе?

б) эффект замещения: как изменится потребление товаров, когда при изменении цен полезность должна оставаться на прежнем уровне?

в) эффект дохода: как изменится потребление товаров при изменении дохода потребителя и неизменных ценах?

Обсудим случай **а)**. Предположим, что снижается цена первого товара. Тогда бюджетная линия из положения АВ переходит в положение АС (рис. 2.7.3).

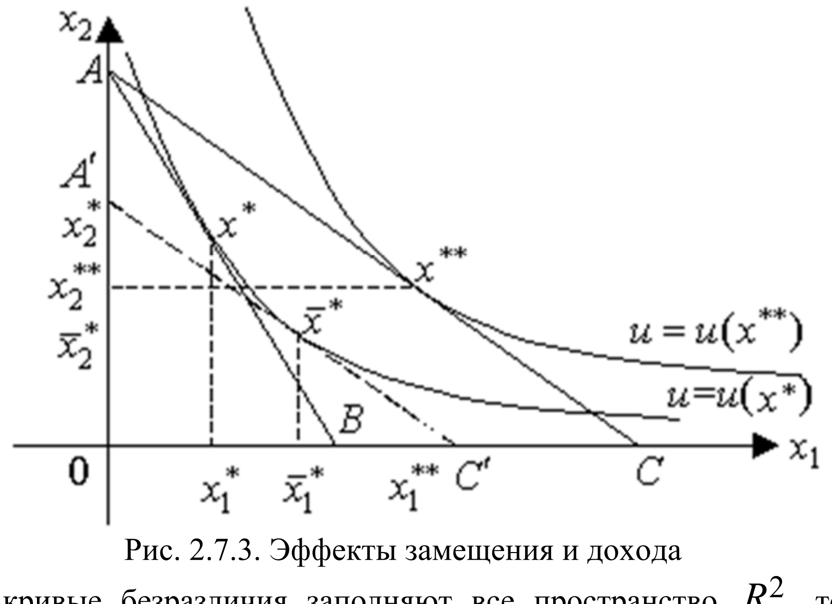


Рис. 2.7.3. Эффекты замещения и дохода

Так как кривые безразличия заполняют все пространство R_+^2, то обязательно найдется одна кривая безразличия, имеющая с бюджетной линией АС точку касания. Обозначим эту точку x^{**}. Она и будет оптимальным решением задачи потребителя при новых ценах. В точке x^{**} полезность будет больше чем в точке x^*, за счет увеличения на величину $x_1^{**}-x_1^*>0$ потребления первого товара. Это стало возможным в результате роста покупательской способности потребителя (его реального дохода), благодаря снижению цены на первый товар. Что произошло при этом с объемом потребления второго товара? Он снизился на величину $x_2^{**}-x_2^*>0$. Здесь отражена та реальность, когда люди потребляют большее количество (качественного) товара, который подешевел, и меньшее количество тех товаров, которые остались на прежнем ценовом уровне или подорожали.

Рассмотрим эффект замещения (случай б)). Предположим опять, что первый продукт стал более дешевым (по сравнению с тем, что было в точке x^*). Так как при этом полезность не должна меняться, то эффект замещения отражается смещением точки x^* вдоль кривой безразличия $u=u\left(x^*\right)$, то есть новое оптимальное решение $\bar{x}^*$ задачи потребителя будет находиться на одной кривой безразличия с точкой x^* (рис. 2.7.3). Бюджетная линия A'C', касающаяся кривой безразличия $u=u\left(x^*\right)$ в точке $\bar{x}^*$, параллельна изменившейся бюджетной линии AC и удалена от нее на величину изменения реального дохода (покупательской способности). Следовательно, эффект замещения представляется величиной $\bar{x}_1^*-x_1^*>0$.

Проверив эффект дохода (случай в)) можно убедиться, что он характеризуется ростом потребления первого товара на величину $x_1^{**}-\bar{x}_1^*>0$.

Итак, пользуясь решением задачи (2.7.1) - (2.7.2) можно анализировать различные ситуации и ответить на многие вопросы, круг и глубина которых зависит от творческих способностей исследователя.

В зависимости от условий конкретной задачи, свойств товаров и прочего в выражении (2.7.1) можно либо использовать одну из известных функций полезности, например, одну из функций (2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.12), либо построить новую функцию полезности.

2.8 Связь потребления с уровнем дохода

В предыдущем параграфе спрос был определен как оптимальное решение x^* задачи потребителя (2.7.1)-(2.7.2) (см. определение 2.7.1). Спрос есть платежеспособная потребность, а платежеспособность предполагает соответствие цен и дохода. Поэтому мы можем утверждать, что общее решение задачи потребителя вычисляется как функция от цен и дохода: $x^*=x^*(p,K)$. Точно так же $\lambda^*=\lambda^*(p,K)$. К этому же выводу можно прийти исходя из вида задачи (2.7.1) - (2.7.2), так как p и K являются параметрами этой задачи.

Решение оптимизационной задачи - это лишь один из способов определения спроса, который схематично можно представить так: $(p,K)\xrightarrow{D}x^*(p,K)$, где D - отображение, представленное максимизацией функции u с учетом бюджетного ограничения. В общем случае D - это некоторая совокупность правил, с помощью которых потребитель определяет свой спрос.

Пусть $X\subset R_+^n$ - множество допустимых наборов товаров, $P\subset R_+^n$ - пространство цен. **Функцией спроса** (индивидуального потребителя) называется отображение D, которое каждой паре $(p,K)\in P\times R_{+}^{1}$ ставит в соответствие множество наиболее предпочтительных наборов товаров

$$D:P\times R_{+}^{l}\to 2^{X}, \tag{2.8.1}$$

где 2^{X} - множество всех подмножеств множества X.

Это же отображение можно записать как $(p,K)\to D(p,K)\subset X$.

Любая точка $x^{*}\in D(p,K)$ называется спросом (при ценах p и доходе K).

Итак, в общем случае функция спроса - это многозначное отображение.

Действительно, если x^{*} - вектор спроса, а множество $D^{*}=\left\{y\in X:\ y\sim x^{*}\right\}$ не пусто, то любая точка множества D^{*} является спросом.

Для отображения D, представленного задачей (2.7.1) - (2.7.2), имеем:

$$D(p,K)=\begin{cases}\left\{x^{*}\in B(p,K):u(x^{*})=\max\limits_{x\in B(p,K)}u(x)\right\}, & \textit{если } \max \textit{ достигается}\\ \varnothing, & \textit{если } \max \textit{ не достигается.}\end{cases} \tag{2.8.2}$$

Если в (2.7.1) функция полезности u строго вогнута, то функция спроса D однозначна, т.е. множество $D(p,K)$ состоит из одной точки x^{*} максимума функции $u: x^{*}=D(p,K)$.

В случае неоднозначности функции спроса возникает дополнительная проблема выбора единственной точки $x^{*}=D(p,K)$.

Принимая во внимание тот факт, что доход потребителя зависит от цен товаров, $K=K(p)$, можно в пространстве $P\subset R_{+}^{n}$ определить функцию спроса $\tilde{D}:p\to 2^{X}$, так что $\tilde{D}(p)=D(p,K(p))$.

При увеличении цен на товары, вообще говоря, доход потребителя должен быть компенсирован. Это требование формализуется как свойство **однородности первой степени** (или линейной однородности) функции дохода: для любых $\alpha\geq 0$ $K(\alpha\cdot p)=\alpha\cdot K(p)$.

Как должен при этом измениться спрос? Интуитивно ясно, что если повышение цен пропорциональным образом компенсируется повышением дохода, то спрос должен оставаться на прежнем уровне.

Если для любых $\alpha\geq 0$ $D(\alpha\cdot p,K(\alpha\cdot p))=D(\alpha\cdot p,\alpha\cdot K(p))=D(p,K(p))$, то говорят, что функция спроса **однозначна нулевой степени** (относительно всех цен и дохода). Это есть инвариантность спроса относительно пропорционального повышения цен и дохода.

Для n функций спроса,

$$x_{1}^{*}=x_{1}^{*}(p,K),\dots,x_{n}^{*}=x_{n}^{*}(p,K), \tag{2.8.3}$$

полученных как решение задачи (2.7.1) - (2.7.2), это свойство выполнено.

Действительно, при изменении цен в α раз задача (2.7.1)-(2.7.2) трансформируется в следующую:

$$u(x)\to\max$$

$$\langle \alpha p, x\rangle \le K(\alpha, p),$$
$$x \ge 0.$$

Оптимальной решение этой задачи обозначим $x^*\left(\alpha p, K\left(\alpha p\right)\right)$.

Бюджетное ограничение можно записать как $\alpha\langle p, x\rangle \le \alpha K(p)$. Так как $\alpha \ge 0$, то мы приходим к исходной задаче, так что $x_i^*\left(\alpha p, K\left(\alpha p\right)\right) = x_i^*\left(p, K\right)$, $i = 1,...,n$.

Для функции спроса однородной нулевой степени объем потребления зависит не от цен, как таковых, и дохода, а от отношений цен (**относительных цен**) и от отношения денежного дохода к цене (**реального дохода**). Выбирая какой-либо товар, например, товар $i = 1$, в качестве "единицы измерения" (эквивалента) и полагая коэффициент пропорциональности $\alpha = \dfrac{1}{p_1}$, функцию спроса можно записать в виде: $x_i^* = x_i^*\left(1, \dfrac{p_2}{p_1}, ..., \dfrac{p_n}{p_1}, \dfrac{K}{p_1}\right)$, $i = 1,...,n$, где $\dfrac{p_i}{p_1}$ - относительная цена, $\dfrac{K}{p_1}$ - реальный доход. В качестве коэффициента пропорциональности можно выбрать, например, величины $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$ или $\alpha = \dfrac{1}{K}$.

Какова чувствительность спроса $x^*(p, K)$ на изменение цен и дохода? Как мы видели в пункте 2.6, она измеряется эластичностью.

Напомним, что эластичность спроса по цене показывает, какое процентное изменение спроса последует за однопроцентным увеличением цены товара: $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right) = \dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \dfrac{p_i}{x_i^*}$, $i = 1,...,n$.

Так как $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right) = \dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \dfrac{p_i}{x_i^*}$, $i = 1,...,n$ (закон спроса для нормальных товаров), $x_i^* > 0$, $p_i \ge 0$, то $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right) \le 0$ (см. также (2.6.4)). Так как при движении по кривой безразличия $u = u\left(x^*\right)$ величина $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ меняется (за исключением некоторых тривиальных случаев) и тем более изменяются p_i и x^*, то эластичность спроса по цене в различных точках кривой безразличия различна.

Тривиальным является случай, когда функция спроса линейна: $x_i^* = a_i - b_i p_i$, $a_i, b_i - const$.

В этом случае $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ постоянна и равна $-b_i$, однако, эластичность не постоянна, ввиду непостоянства отношения $\dfrac{p_i}{x_i^*}$.

Например (рис.2.8.1), в случае одного товара:

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{(a,0)} = 0,$$

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2b}\right)}=-1,$$

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{\left(0,\frac{a}{b}\right)}=-\infty.$$

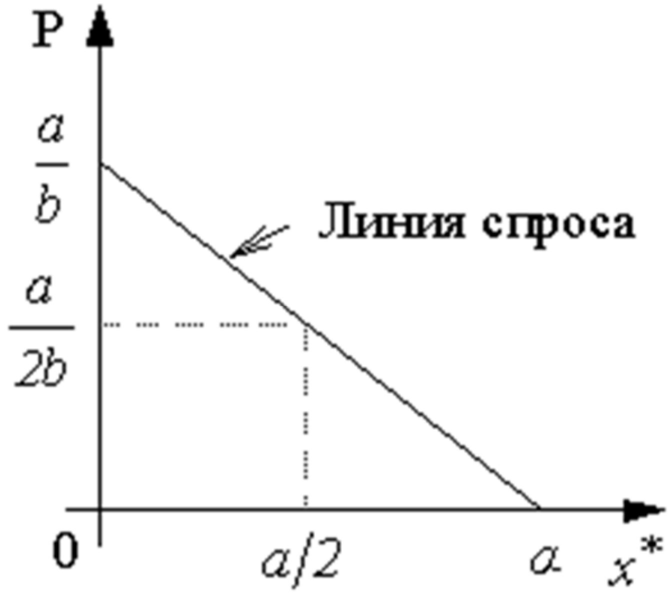


Рис. 2.8.1. Линейная функция спроса

Имеется еще два тривиальных (особых) случая эластичности спроса по цене, показанных на рис. 2.8.2.

В случае, изображенном на рис. 2.8.2(а) $\varepsilon_p\left(x^*\right)=-\infty$ - имеется только одна цена p^*, по которой потребитель будет приобретать товар; даже при малейшем увеличении цены выше этого уровня требуемое количество товара упадет до нуля, и любое снижение цены приведет к неограниченному росту спроса.

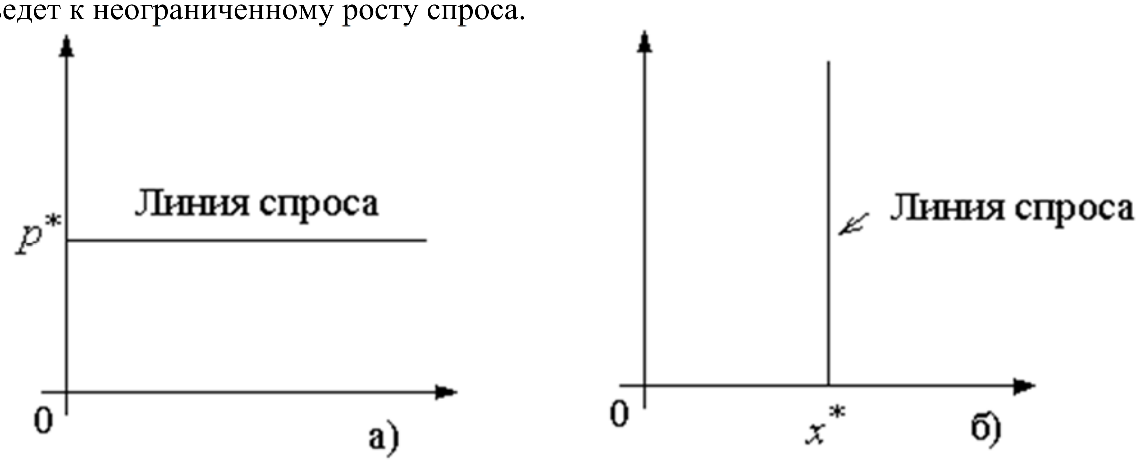


Рис. 2.8.2. Особые случаи эластичности спроса по цене

Кривая же спроса, изображенная на рис.2.8.2(б) совершенно неэластична. Потребитель приобретет фиксированное количество товара x^* независимо от цены.

Координатная запись функции спроса (2.8.3) $x_i^* = x_i^*\left(p_1,...p_n,K\right)$ говорит о том, что спрос на один вид товара зависит, вообще говоря, от цен и других товаров.

Процентное изменение количества товара вида i при однопроцентном увеличении цены товара вида j ($i \neq j$) называется **перекрестной эластичностью** спроса по цене:

$$\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*\right) = \lim_{\Delta p_j \to 0}\left(\frac{\Delta x_i}{x_i^*}\bigg/\frac{\Delta p_j}{p_j}\right) = \frac{\Delta p_j}{x_i^*}\cdot\lim_{\Delta p_j \to 0}\left(\frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}\right)$$

или

$$\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*\right) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\cdot\frac{p_j}{x_i^*}. \tag{2.8.4}$$

Для взаимозаменяемых товаров (таких, как чай и кофе) повышение цены товара j увеличивает спрос на товар i, поэтому перекрестная эластичность положительна. Для взаимодополняющих друг друга товаров (таких, как кофе и сахар) повышение цены одного товара влечет понижение спроса на другой, поэтому перекрестная эластичность отрицательна.

До сих пор мы говорили о **точечной эластичности**, т.е. о эластичности, измеряемой в отдельной точке кривой спроса. Если требуется измерение эластичности на отрезке (точнее, на дуге) кривой спроса, то применяют **дуговую эластичность** спроса по цене:

$$\bar{\varepsilon}_{p_i}\left(x_i^*\right) = \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_i}\cdot\frac{\bar{p}_i}{\bar{x}_i^*}, \tag{2.8.5}$$

где $\Delta x_i^* = x_i^{*\prime\prime} - x_i^{*\prime}$, $\Delta p_i = p_i'' - p_i'$, $\bar{p}_i = \dfrac{p_i' + p_i''}{2}$, $\bar{x}_i^* = \dfrac{x_i^{*\prime} + x_i^{*\prime\prime}}{2}$, $\left(p_i', x_i^{*\prime}\right)$, $\left(p'', x_i^{*\prime\prime}\right)$ - цена и количество товара в начальной (конечной) точке рассматриваемой дуги кривой спроса. Дуговая эластичность тем точнее, чем ближе друг к другу точки $\left(p_i', x_i^{*\prime}\right)$ и $\left(p'', x_i^{*\prime\prime}\right)$. Устремляя расстояние между ними к нулю, очевидно, мы получим формулу точечной эластичности.

Задача 2.8.1. Пусть кривая спроса имеет вид $p = 200 - \left(x^*\right)^2$. Требуется вычислить эластичность спроса по цене при изменении последней от $p' = 136$ до $p'' = 119$.

Решение: Нарисуем кривую спроса (см. рис.2.8.3)

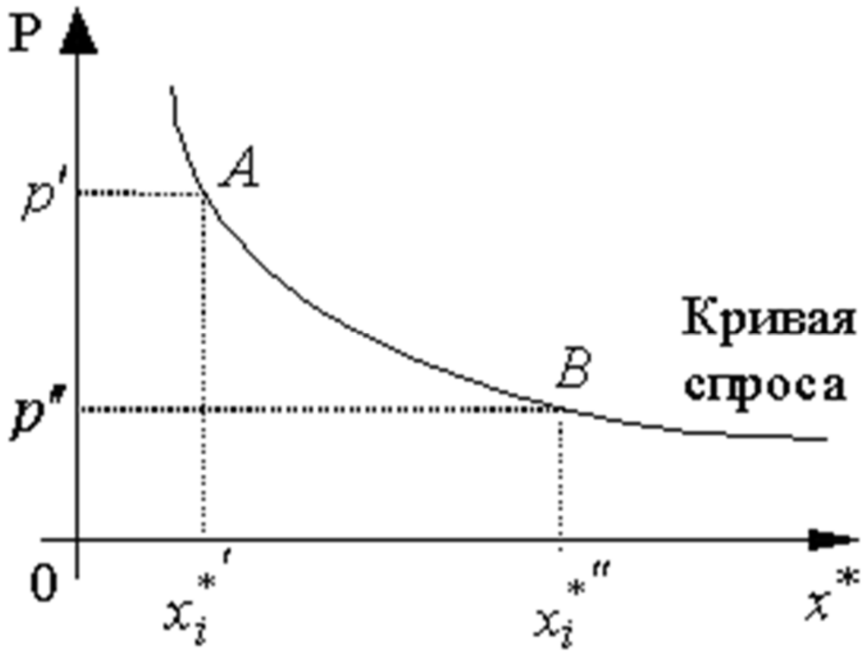


Рис. 2.8.3. Схема задачи 2.8.1

Прежде всего, пользуясь формулой спроса, найдем соответствующие этим ценам количества товаров:

$x^{*\prime} = \pm\sqrt{200 - p'} = \pm\sqrt{200 - 136}$,

$x^{*\prime\prime} = \pm\sqrt{200 - p''} = \pm\sqrt{200 - 119}$.

Отбрасывая отрицательные значения корней, как не имеющих смысла, найдем: $x^{*\prime} = 8$, $x^{*\prime\prime} = 9$.

Теперь наша задача сводится к вычислению дуговой эластичности спроса по цене для участка (дуги) кривой спроса $p = 200 - \left(x^*\right)^2$ от точки *A=(136,8)* до точки *B=(119,9)*.

Пользуясь формулой (2.8.5), получаем: $\bar{\varepsilon}_p\left(x^*\right) = \frac{1}{17} \cdot \frac{127,5}{8,5} = 0,88$.

Для сравнения вычислим точечную эластичность в точке *A*:

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{(136,8)} = \frac{dx^*}{dp}\Big|_{(136,8)} \cdot \frac{136}{8} = \frac{d\left(\sqrt{200-p}\right)}{dp}\Bigg|_{p=136} \cdot \frac{136}{8} = \frac{1}{2\sqrt{200-136}} \cdot \frac{136}{8} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{136}{8} = \frac{136}{128} = 1,0625.$$

(Здесь учли неравенство $x^* > 0$).

Представляет определенный интерес также **эластичность спроса по доходу**. Это есть процентное изменение количества требуемого товара (спроса) при однопроцентном изменении дохода: $\varepsilon_k\left(x^*\right) = \frac{\partial x^*}{\partial K} \cdot \frac{K}{x^*}$.

Пользуясь схемой проведенного выше анализа эластичности спроса по цене, можно провести анализ эластичности спроса по доходу.

2.9 Парадокс Гиффина. Оптимизация потребительского предпочтения

Для оценки различных ситуаций в сфере потребления применяются предельный спрос и предельная полезность денег по ценам ($\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}$) и доходу ($\frac{\partial x_i^*}{\partial K}$ и $\frac{\partial \lambda^*}{\partial K}$). Поэтому желательно иметь формулы для их вычисления. Если общее решение задачи (2.7.1)-(2.7.2) для конкретной функции полезности u найдено в виде функций

$$x_1^*\left(p,K\right),\ldots,\, x_n^*\left(p,K\right),\lambda^*\left(p,K\right) \tag{2.9.1}$$

от $n+1$ параметра $p_1,\ldots,p_n,K$, то требуемые предельные величины можно найти, вычисляя частные производные функций (2.9.1) по p_i и K. Но эти же предельные величины можно найти и не решая задачу (2.7.1) - (2.7.2) , а сразу из системы необходимых и достаточных условий оптимальности (2.7.5) - (2.7.8).

Зная теперь, что оптимальное решение x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) лежит на бюджетной линии (см.рис. 2.7.2), мы можем априори считать, что доход K будет использован полностью.

Тогда в (2.7.2) будет строгое равенство, и система (2.7.5) - (2.7.8) примет вид:

$$\begin{cases} K-\langle p,x\rangle=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial p}-\lambda p=0. \end{cases} \tag{2.9.2}$$

Так как эта система зависит от параметров p, K и содержит неизвестные λ, x, то нам удобно ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi^1\left(\lambda,x,p,K\right)&=K-\langle p,x\rangle, \\ \varphi^2\left(\lambda,x,p,K\right)&=\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda p. \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

Как и ранее, будем предполагать, что функция u дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям (2.5.1) - (2.5.2) .

Система (2.9.2) будет разрешимой относительно $n+1$ переменных $x_1,\ldots,x_n,\lambda$, если определитель матрицы Якоби (матрица первых производных системы (2.9.2)) $I=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial\lambda} & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial\lambda} & \frac{\partial\varphi^2}{\partial x} \end{pmatrix}$ отличен от нуля.

Покажем, что это так и есть. С учетом обозначений (2.9.3) получаем $I=\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix}$, где p' - транспонированный вектор p, H - матрица Гессе (матрица вторых производных системы (2.9.2)).

В координатной форме $I=\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \dots & -p_n \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_n & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ - есть "окаймляющая" ценами товаров матрица Гессе.

По условию (2.5.2) матрица Гессе отрицательно определена и поэтому невырожденна.

Следовательно, определитель матрицы Якоби не равен нулю, и система (2.9.2) имеет решение (по λ и x).

Перейдем к вычислению требуемых предельных величин.

1. Вычисление предельных величин $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial K}$ и $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K}$ (влияние дохода на x^* и λ^*).

Подставим (2.9.1) в систему (2.9.2):

$$\begin{cases} K-\left\langle p, x^*(p,K)\right\rangle = 0 \\ \dfrac{\partial u\left(x^*(p,K)\right)}{\partial x} - \lambda^*(p,K)\,p = 0. \end{cases} \tag{2.9.4}$$

и продифференцируем ее по K: $\begin{cases} 1-p\dfrac{\partial x^*}{\partial K}=0 \\ H\dfrac{\partial x^*}{\partial K}-p\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K}=0. \end{cases}$

Перепишем эту систему в форме, удобной для перехода к матричной записи:

$$\begin{cases} -p\dfrac{\partial x^*}{\partial K}=-1 \\ -p\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K}+H\dfrac{\partial x^*}{\partial K}=0. \end{cases}$$

В матричной форме эта система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9.5}$$

где $\dfrac{\partial x^*}{\partial K}=\left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial K},\dots,\dfrac{\partial x_n^*}{\partial K}\right)$.

Решая систему (2.9.5), можно найти искомые предельные величины по доходу.

2. Вычисление предельных величин $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$, $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}$ (влияние цены p_i на x^* и λ^* при условии постоянства остальных цен p_j $(j \neq i)$ и дохода K).

Дифференцируя систему (2.9.4) по p_i, получаем (в координатной форме):

$$\begin{cases} -x_i^* - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \dfrac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{ji} = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{2.9.6}$$

где $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & если \quad j = i \\ 0, & если \quad j \neq i \end{cases}$ - символ Кронекера.

Запишем систему (2.9.6) сначала в векторной, затем в матричной форме:

$$\begin{cases} \qquad -p\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = x^*, \\ -p'\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} + H\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = \lambda^* E_n; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix}, \tag{2.9.7}$$

где $\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} = \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \right)$, E_n - единичная $n \times n$ -матрица ($E_n = \left\| \delta_{ij} \right\|$ - матрица с нулевыми элементами за исключением диагональных, равных 1) .

Решая систему (2.9.7), можно найти искомые предельные величины по цене i-го товара.

Вычисление предельных величин $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{comp}$, $\left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_j} \right)_{comp}$ (влияние цен $p_1, \ldots, p_n$ на x^* и λ^* при условии компенсации дохода так, чтобы полезность была неизменной).

Используя систему (2.9.2), найдем полные дифференциалы функций u и K :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \lambda \left\langle p, dx \right\rangle,$$

$$dK = d\left\langle p, x \right\rangle = \left\langle p, dx \right\rangle + \left\langle dp, x \right\rangle.$$

Для того чтобы полезность оставалась неизменной, т.е. чтобы $du = 0$, необходимо, чтобы $p \cdot dx = 0$ (так как $\lambda > 0$), а это справедливо, если $dK = \left\langle dp \cdot x \right\rangle = dp_1 x_1 + dp_2 x_2 + \ldots + dp_n x_n$. Содержательно это означает, что при возрастании, например, цены p_i до $p_i + dp_i$ приращение дохода, обеспечивающее неизменность полезности, равно $dK = dp_i \cdot x_i$.

Дифференцируя (2.9.4) по p_i, когда $dK = dp_i \cdot x_i$, получаем:

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \dfrac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{ji} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Поясним, что первое уравнение этой системы получается из (2.9.6) при условии $\langle p, dx \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0,$ так как в этом случае из (2.9.6) следует $x_i^* = 0$.

В векторной форме эта система имеет вид:

$$\begin{cases} -p\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p}\right)_{comp} = 0, \\ -p\left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} + H\left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^* E_n, \end{cases}$$

где $(\square)_{comp}$ - означает компенсированное изменение цен.

Запишем теперь в матричную форму:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \tag{2.9.8}$$

Решая систему (2.9.8), можно найти искомые предельные величины при компенсированном изменении цен.

Все три матричных (2.9.5), (2.9.7) и (2.9.8) могут быть объединены в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^* & 0 \\ 0 & \lambda^* E_n & \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \tag{2.9.9}$$

Это уравнение называется **основным матричным уравнением теории потребления**.

Матрица $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix}$ называется матрицей сравнительной статики, а ее элементы - **показателями сравнительной статики**. Такое название объясняется тем, что эти показатели характеризуют чувствительность x^* и λ^* к изменениям параметров p и

K путем сравнения положения оптимума в статике до и после того, как эти параметры изменились.

Поскольку левая часть уравнения (2.9.9) есть невырожденная матрица (ибо такой является Якобиан), то оно может быть разрешено относительно показателей сравнительной статики. Решение уравнения (2.9.9) связано с понятием уравнения Слуцкого.

Основное матричное уравнение (2.9.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & x^* & 0 \\ 0 & \lambda^* E_n & \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \tag{2.9.10}$$

Решение этой системы относительно показателей сравнительной статики по спросу имеет вид:

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = -\mu H^{-1} p', \tag{2.9.11}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\mu H^{-1} p'\right) x^* + \left(\mu H^{-1} p'\right) \cdot \left(p' H^{-1} \lambda^*\right) + H^{-1} \lambda^*, \tag{2.9.12}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \left(\mu H^{-1} p'\right) \cdot \left(p' H^{-1} \lambda^*\right) + H^{-1} \lambda^*. \tag{2.9.13}$$

Здесь H^{-1} - обратная матрица Гессе, а $\mu = -\dfrac{1}{pH^{-1}p'} > 0$ - скалярная величина.

Можно показать, что $\mu = -\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} = -\dfrac{\partial}{\partial K}\left(\dfrac{\partial u\left(x^*\left(p,K\right)\right)}{\partial K}\right) = -\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial K^2}$, поэтому скаляр μ можно интерпретировать как коэффициент убывания предельной полезности денег.

Сравнивая (2.9.12) и (2.9.13) замечаем, что $\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\mu H^{-1} p'\right) x^* + \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}$.

Сопоставляя это уравнение с (2.9.11), получаем,

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} + \frac{\partial x^*}{\partial K} \cdot x^*. \tag{2.9.14}$$

Равенство (2.9.14) называется **уравнением Слуцкого**. Это же уравнение называют основным уравнением теории ценности.

В координатной форме уравнение Слуцкого выглядит так:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^*, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.9.15}$$

Левую часть уравнения принято называть **общим эффектом** (от влияния цены на спрос), первое слагаемое в правой части - **влиянием замены** (т.е. компенсированного изменения цены на спрос), второе слагаемое - **влиянием дохода** (влияние изменения дохода на спрос).

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^*, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{2.9.16}$$

Из (2.9.13) следует, что матрица влияния замены симметрична и отрицательно определена. Из отрицательной определенности следует

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.9.17}$$

Отсюда вывод - компенсированное возрастание цены товара приводит к уменьшению спроса на этот товар.

Их симметричности матрицы влияния замены и уравнения (2.9.16) получаем: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*}{\partial K} \cdot x_j^*, \quad i, j = 1, ..., n$.

Поэтому уравнение Слуцкого, в частности, означает, что:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^*, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.9.18}$$

Здесь производная $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}$ называется влиянием на спрос (на j-й товар) изменения частной цены (цены j-го товара). Равенство (2.9.18) используют для характеристики типов товаров.

Определение 2.9.1. Товар вида j называется **нормальным**, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; **товаром Гиффина**, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$; **ценным**, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$; **малоценным**, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$. Два товара i и j являются **взаимозаменяемыми**, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$; **взаимодополняемыми**, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$.

Как следует из (2.9.17) и (2.9.18), должно быть $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^* < 0$.

С учетом условия $x_j^* \geq 0$ приходим к следующим выводам:

а) если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$, то обязательно $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$;

б) если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$, то обязательно $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$.

Отсюда, товар Гиффина не может быть ценным, т.е. он обязательно малоценный.
В общем случае каждый товар попадает в одну из следующих категорий.

1. Нормальный и ценный ($\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$);
2. Нормальный и малоценный ($\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$);
3. Товар Гиффина и малоценный ($\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$; $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$).

Существование товара Гиффина кажется не вполне реальным. Действительно, его определение противоречит закону о спросе (спрос есть убывающая функция цены). Однако когда какой-либо популярный среди населения товар продается по слишком низкой цене, появляется подозрение о его качестве. Это может оказаться причиной снижения спроса на него. Последующее же поднятие цены может повысить спрос на этот товар.

Нормальный и ценный товар отличается от нормального малоценного товара высоким качеством. Например, фрукты южных сортов по питательным и вкусовым качествам превосходят северные сорта, но они и дороже; масло дороже маргарина, так как качество его выше; вычислительная техника завода-изготовителя, как правило, качественнее и поэтому дороже, чем та же техника, но лицензионной сборки и т.д.).

Умножим обе части равенства (2.9.13) на вектор p:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \cdot p' = -p\left(\frac{1}{pH^{-1}p'} \cdot \mu H^{-1} p'\right) \cdot \left(pH^{-1}\lambda^*\right) + pH^{-1}\lambda^* =$$

$$= -pH^{-1}\lambda^* + pH^{-1}\lambda^* = 0.$$

Следовательно, в координатной форме имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \cdot p_i' = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.9.19}$$

Принимая во внимание положительность всех цен и неравенство (2.9.17), приходим к выводу о том, что для каждого j существует i ($i \neq j$) такое, что $\left(\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$.

Таким образом, в наборе $x^* = \left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$ каждому товару соответствует по крайней мере один такой товар, который составляет с ним взаимозаменяемую пару.

Из уравнения Слуцкого (2.9.14) и равенства (2.9.19) получаем $\frac{\partial x^*}{\partial p}\cdot p' = -\frac{\partial x^*}{\partial K}\left\langle p, x^*\right\rangle$ или $\frac{\partial x^*}{\partial p}\cdot p' + \frac{\partial x^*}{\partial K}K = 0$.

Запишем это равенство в координатной форме $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}p_i + \frac{\partial x_j^*}{\partial K}K = 0,\quad i = 1,\ldots,n$ и разделим обе части каждого из n равенств на $x_j^* > 0$: $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\cdot\frac{p_i}{x_j^*} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K}\cdot\frac{K}{x_j^*} = 0,\quad j = 1,\ldots,n$.

В обозначениях эластичности (см. (2.6.2) , (2.8.4)) имеем: $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{p_i}\left(x_j^*\right) + \varepsilon_K\left(x_j^*\right) = 0,\quad i = 1,\ldots,n$.

Отсюда вывод: для каждого товара j сумма всех n перекрестных эластичностей спроса по цене и эластичности спроса по доходу должна быть равна нулю, т.е. сумма всех эластичностей по цене равна отрицательной эластичности по доходу.

Умножая (2.9.11) на вектор цен p, получим $p\cdot\frac{\partial x^*}{\partial K} = \frac{pH^{-1}p'}{pH^{-1}p'} = 1$ **-условие агрегации Энгеля**.

В координатной форме имеем:

$$\sum_{j=1}^{n}p_j\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial K} = 1. \tag{2.9.20}$$

Отсюда должно быть $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$ для некоторого $j = 1,\ldots,n$.

Следовательно, в наборе $x^* = \left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$ все товары одновременно не могут быть малоценными.

С учетом (2.9.19) и (2.9.20) из уравнения Слуцкого можно получить $p\frac{\partial x^*}{\partial p} + x^* = 0$ **условие агрегации Курно**.

В координатной форме имеем: $x_i^* = -\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i},\quad i = 1,\ldots,n$.

Отсюда вывод: значение спроса на товар вида i равно отрицательной взвешенной сумме изменений спроса на все товары по отношению к цене товара i , в которой в качестве весов выступают цены товаров.

Изучая уравнение Слуцкого можно получить и другие выводы по интересующим исследователя проблемам теории ценности и потребления.

В завершение параграфа приведем геометрическую интерпретацию изложенного выше материала для $n=2$ (рис. 2.9.1). Пусть p_1 возрастает до $\bar{p}_1$, а $\bar{x}^*$ - решение задачи потребителя для параметров $\bar{p}_1$, p_2, K. Тогда $\bar{x}^*$ лежит в пересечении бюджетной линии, проходящей через точки $\left(\frac{K}{p_1},0\right)$ и $\left(0,\frac{K}{p_2}\right)$ с кривой безразличия $u=u\left(\bar{x}^*\right)$. Общий эффект $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$ изменения p_1 выражается отрезком $\left[x^*,\bar{x}^*\right]$.

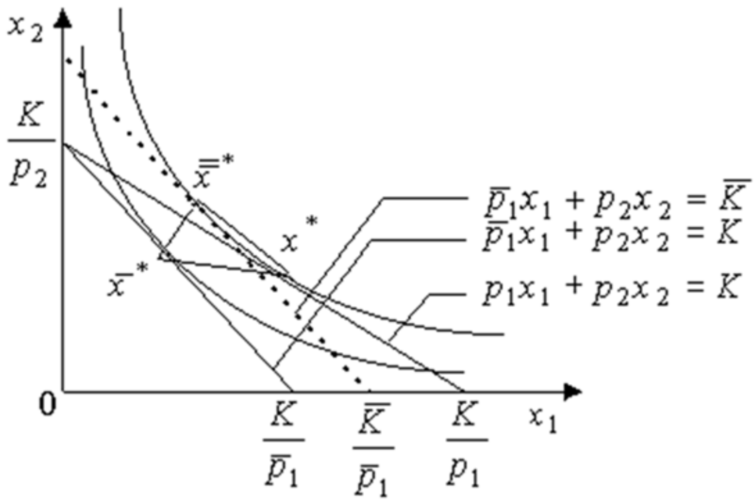


Рис. 2.9.1. Геометрическая иллюстрация уравнения Слуцкого

Точка $\bar{x}^*$ лежит левее x^* (т.к. $\bar{x}_1^* < x^*$ из-за $\bar{p}_1 > p_1$), т.е. при возрастании цены первого товара спрос на него снизился. Следовательно, товар 1 нормален $\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}<0\right)$. Предположим теперь, что происходит компенсированное увеличение цены p_1 до $\bar{p}_1$. Через $\bar{K}$ обозначим соответствующее компенсированное изменение (увеличение) дохода, т.е. $u\left(x^*\left(\bar{p}_1,p_2,\bar{K}\right)\right)=u\left(x^*\left(p_1,p_2,K\right)\right)$.

Геометрически бюджетная линия изменится (пройдет через $\left(\frac{\bar{K}}{p_1},0\right)$, $\left(0,\frac{\bar{K}}{p_2}\right)$), а точка $\bar{x}^*=x^*\left(\bar{p}_1,p_2,\bar{K}\right)$ будет лежать в пересечении этой бюджетной линии с кривой безразличия $u=u\left(x^*\right)$ (по определению компенсированного изменения цены p_1).

Так как бюджетная линия $\bar{p}_1x_1+p_2x_2=\bar{K}$ параллельна бюджетной линии $\bar{p}_1x_1+p_2x_2=K$ (один и тот же наклон $\frac{\bar{p}_1}{p_2}$), то точка $\bar{\bar{x}}^*$ будет лежать левее точки x^*. Это подтверждение того, что влияние замены отрицательно. Влияние замены ($\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{comp}$) выражается отрезком $\left[x^*,\bar{\bar{x}}^*\right]$, а влияние дохода $\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial K}\right)$ выражается отрезком $\left[\bar{\bar{x}}^*,\bar{x}^*\right]$. Точка $\bar{x}^*$ лежит левее точки $\bar{\bar{x}}^*$ ($\bar{x}_1^*<\bar{\bar{x}}_1^*$), т.е. при возрастании дохода (от K до $\bar{K}$) спрос на товар 1 увеличился. Следовательно, товар 1 является ценным ($\frac{\partial x_1^*}{\partial K}>0$).

ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА

3.1 Производственные функции, их определение и свойства. Виды производственных функций

Под **производством** понимается процесс взаимодействия экономических факторов, завершаемый выпуском какой-либо продукции. Правила, предписывающие определенный порядок взаимодействия экономических факторов, составляют способ производства или, иначе говоря, **технологию производства**. Производство - основная область деятельности фирмы (или предприятия). **Фирма** - это организация, производящая затраты экономических ресурсов для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям, в том числе, другим фирмам. Производственными единицами являются не только заводы и фабрики, но и отдельные лица - фермеры, ремесленники и др.

Производство можно представить как систему "затраты-выпуск", в которой **выпуском** является то, что фактически произведено, а **затратами** - то, что потребляется с целью выпуска (капитал, труд, энергия, сырье). Поэтому формально можно сказать, что производство - это функция, которая каждому набору затрат и конкретной технологии ставит в соответствие определенный выпуск. Именно такое упрощенное понимание производства как "черного ящика" заложено в математической модели производства. Во "вход" этого черного ящика подаются затраты, а на "выходе" получаем выпуск (произведенную продукцию).

Подобное описание производства на первый взгляд кажется сильно абстрактным, так как в нем не отражены технологические процессы, происходящие внутри черного ящика. В математической модели технология производства учитывается обычно посредством задания соотношений между затратами и выпуском т.е. нормой затрат каждого из ресурсов, необходимых для получения одной единицы выпускаемой продукции. Такой подход объясняется тем, что математическая экономика изучает суть экономических процессов, а сугубо технические операции как таковые (а не их экономические следствия) остаются за рамками этой науки.

Задача фирмы, как производственной единицы, сложна и многогранна - начиная от организации производства и кончая благотворительной деятельностью. Естественно, математической моделью нельзя охватить весь спектр деятельности фирмы и отразить все преследуемые цели. Поэтому при формализации задачи рационального функционирования фирмы учитываются лишь основные конечные цели.

Конечной целью фирмы является получение наибольшей прибыли от реализации своей продукции. Напомним в этой связи, что **прибыль** понимается как разность двух величин: выручки от реализации продукции (дохода) и издержек производства. **Издержки** производства равны общим выплатам за все виды затрат, иначе говоря, издержки - это денежный эквивалент материальных затрат. В общем случае издержки состоят из двух слагаемых: постоянных издержек и переменных издержек. **Постоянные издержки** (расходы на закупку и ремонт оборудования, содержание фирмы, страховку и пр.) фирма несет независимо от объема выпуска. **Переменные издержки** (расходы на заработную плату, сырье и пр.) касаются использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей и меняются вместе с объемом выпуска.

Согласно с поставленной целью, задача фирмы сводится к поиску такого способа производства (сочетания затрат и выпуска), который обеспечивает ей наибольшую прибыль с учетом и в рамках имеющихся у нее ограниченных ресурсов. Данная трактовка цели фирмы и наилучшего способа производства не является единственно возможной. Речь идет о некоторой гипотезе относительно предпочтений производителя, а не о логической необходимости. В действительности же мотивы принимаемых руководителями фирм решений могут быть продиктованы другими соображениями, например, гуманного или социально-политического характера. Поэтому в отличие от математической теории потребления, где существовала единственная, логически оправданная оптимизационная модель потребителя, здесь нецелесообразно говорить об "оптимизационной модели фирмы" как таковой. Задачи фирмы могут существенно отличаться как преследуемой целью, так и временным периодом ее решения.

Обсужденную выше задачу будем называть **задачей фирмы на максимизацию прибыли**. Двойственной к ней (в некотором смысле) является **задача фирмы на минимизацию издержек** при фиксированном уровне планируемого выпуска (дохода). Именно такая формализация цели производства в последнее время становится более популярной в связи с глобальной проблемой "устойчивого развития" общества, так как она созвучна с задачами рационального использования природных ресурсов.

Из приведенного выше краткого описания сути производства видно, что основными факторами, которые должны быть учтены при моделировании задачи фирмы, являются выпуск продукции, затраты ресурсов, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы. Перед тем, как построить ту или иную оптимизационную модель задачи фирмы, более подробно остановимся на способах формализации этих понятий и рассмотрим некоторые их свойства.

Предположим, что фирма производит n видов продуктов. Виды продуктов будем обозначать индексом j, а их количества - через y_j, $j=1,\ldots,n$. Технология производства каждого вида продукта требует использования ряда ресурсов в некоторых количествах. Двойными индексами k_j обозначим виды ресурсов, используемых для выпуска продукта вида j. Пусть $k_j=1,2,\ldots,m_j$. Обозначим через x_{k_j} - количества этих ресурсов, $k_j=1,2,\ldots,m_j$, $j=1,\ldots,n$. Следовательно, имеется всего $m_1+\ldots+m_n$ видов ресурсов.

Использование такой двойной индексации привлекательно с точки зрения информативности (видно, какой ресурс относится к какому продукту), но неудобно чисто технически. Во-первых, усложняется запись формул; во-вторых, увеличивается размерность задачи (т.к. среди $m_1, m_2, .., m_n$ могут быть одни и те же наименования) и, в-третьих, такие операции как сложение, вычитание затрат в векторной форме, а также составление уравнений становятся невозможными без дополнительных преобразований индексов (идентификация, упорядочение и т.д.).

Поэтому в дальнейшем виды ресурсов будем обозначать одинарными индексами k, их количества - x_k, где $k = 1, ..., m$. Здесь m - достаточно большое число (равное сумме $m_1 + ... + m_n$, где каждый ресурс считается только один раз). Теперь можно говорить, что для производства n видов продуктов фирма использует m видов затрат. Это не приводит к недоразумениям, так как в случае неиспользования k-го ресурса для выпуска данного продукта полагаем $x_k = 0$.

Введем в рассмотрение два вида векторов: $x = (x_1, ..., x_m)$ - **вектор затрат** и $y = (y_1, ..., y_n)$ - **вектор выпуска**. Положительный ортант $R_+^m = \{x \in R^m / x_k \geq 0, k = 1, ..., m\}$ называется **пространством затрат**.

Аналогично определяется **пространство выпуска**: $R_+^n = \{x \in R^n / y_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$.

Для отражения реальных возможностей фирмы в математических моделях часто применяются более узкие множества $X \subset R_+^m$ и $Y \subset R_+^n$.

Технологическая связь между затратами и выпуском описывается с помощью производственной функции.

Определение 3.1.1. Любая функция $f : R_+^m \to R_+^n$, ставящая в соответствие каждому вектору затрат x вектор $y = f(x)$ максимального выпуска, который может быть получен при этих затратах, называется **производственной функцией**.

Это есть определение производственной функции для многопродуктовой фирмы, т.е. векторной производственной функции. Если фирма выпускает только один вид продукта, то производственная функция является скалярной:

$$f : R_+^m \to R_+^1 \text{ или } y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (3.1.1)$$

В общем случае производственную функцию можно записать в неявной форме: $F(x, y, A) = 0$, где A - $n \times m$ - матрица параметров (технологическая матрица). В некоторых моделях применяется следующее выражение для производственной функции: $F(z_1, ..., z_r, A) = 0$, где переменные z_i со знаком "-" - обозначают затраты, а со знаком "+" - выпуски.

Если в качестве независимых переменных (аргументов) выступают затраты (см.(3.1.1)), то производственную функцию иногда называют **функцией выпуска**, если же фиксирована величина выпуска (y), то производственная функция является **функцией затрат** ($x = f^{-1}(y)$). Таким образом, функция выпуска и функция затрат являются взаимно обратными друг другу функциями.

Применение производственных функций не ограничивается выявлением зависимости затраты-выпуск. Различные приемы математического аппарата позволяют использовать их для вычисления численных характеристик производства, анализа эффективности изменения масштаба производства и технологического прогресса, исследования эластичности производственных факторов, рационального ведения хозяйства, оптимального планирования и прогнозирования вариантов развития фирмы и др.

Поэтому очень важно, чтобы производственная функция объективно отражала моделируемую действительность, т.е. чтобы она удовлетворяла содержательно-логическим и экономическим требованиям. Основные из них следующие:

- в число аргументов производственной функции должны быть включены все существенные для данного процесса факторы;
- все величины должны иметь отчетливый экономический смысл;
- все экономические величины, входящие в производственную функцию, должны быть измеримы;
- выпуск продукции без затрат невозможен;
- если величина какого-либо ресурса ограничена, то выпуск не может расти бесконечно;
- увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Вопрос об адекватном описании экономической реальности на языке производственных функций тесно связан с их математическими свойствами. Ради простоты эти свойства приведем для однопродуктового производства, т.е. для производственной функции вида (3.1.1) .

1. Монотонность: из $x^1, x^2 \in R_+^m$ и $x^1 \ge x^2$ следует $f(x^1) \ge f(x^2)$.
2. Вогнутость: для любых $x^1, x^2 \in R_+^m$ и $0 \le \alpha \le 1$ справедливо неравенство $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \ge \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$.
3. Поведение в начале координат: $f(0) = 0$.
4. Однородность: $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$, где $\lambda > 0$ - масштабное число, $\alpha > 0$ - степень однородности.

Если производственная функция дифференцируема по всем аргументам, то свойства 1 и 2 соответственно могут быть заменены следующими неравенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \ge 0, k = 1, ..., m, \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} < 0, k = 1, ..., m. \qquad (3.1.3)$$

Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ называются **предельными продуктами**.

Условие (3.1.2), как и свойство 1, означает, что увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Условие (3.1.3) показывает, что увеличение затрат одного вида ресурса (при постоянном уровне затрат других ресурсов) приводит ко все меньшему приросту выпуска. Это свойство в экономической теории называется **законом убывающей доходности (отдачи)**.

Свойство 3 является отражением бездеятельности, так как без затрат нет и выпуска. Свойство 4 описывает реакцию производства на изменение затрат. Параметр λ показывает масштаб изменения производства (расширения производства – если $\lambda > 1$, сужения производства - если $\lambda < 1$), а α - эффект от изменения масштабов производства. Если $\alpha > 1$, то одновременное увеличение всех факторов в λ раз приводит к возрастанию объема выпуска больше, чем в λ раз ($\lambda^{\alpha} > \lambda$), т.е. эффект от расширения масштаба производства положителен. При $\alpha = 1$ получаем: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ - выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты. Такие функции называются **линейно-однородными** (или однородными в первой степени).

Если $f(\lambda x) > \lambda f(x)$ $\left(f(\lambda x) < \lambda f(x)\right)$, то говорят о возрастающем (убывающем) доходе от расширения масштаба производства. Заметим, что свойство 4 определено в точке, тогда как свойства 1 и 2 - во всем пространстве затрат.

Как мы видим, перечисленные свойства производственной функции вполне согласуются с ее определением, так как они касаются только соотношения затраты-выпуск. Действительно, здесь нет никаких требований на бесперебойную работу станков, нормирования движения конвейера и т.д. Поэтому производственная функция, как отображение количественной связи между затратами и выпуском, представляет собой регрессионную модель. Следовательно, она может быть построена на основе статистических данных и с применением методов математической статистики. Приведем примеры наиболее удачно построенных и потому часто применяемых на практике производственных функций. При этом для простоты будем рассматривать двухфакторную однопродуктовую производственную функцию вида $f(x_1, x_2)$

1. Производственная функция Кобба-Дугласа. Первый успешный опыт построения производственной функции, как уравнения регрессии на базе статистических данных, был получен американскими учеными - математиком Д. Коббом и экономистом П. Дугласом в 1928 году. Предложенная ими функция изначально имела вид:

$$Y = a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \quad \left(f(x_1, x_2) = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}\right), \tag{3.1.4}$$

где Y - объем выпуска, K - величина производственных фондов (капитал), L - затраты труда, $a > 0$, $\alpha > 0$ - числовые параметры (масштабное число и показатель эластичности). Благодаря своей простоте и рациональности, эта функция широко применяется до сих пор и получила дальнейшие обобщения в различных направлениях.

Функцию Кобба-Дугласа иногда мы будем записывать в виде $f\left(x_1,x_2\right)=a\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Легко проверить, что $Y\left(0,0\right)=0$ и $\frac{\partial Y}{\partial K}\geq 0$, $\frac{\partial Y}{\partial L}\geq 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}<0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}<0$.

Кроме того, функция (3.1.4) линейно-однородна: $Y\left(\lambda K,\lambda L\right)=a\left(\lambda K\right)^{\alpha}\left(\lambda L\right)^{1-\alpha}=\lambda aK^{\alpha}L^{1-\alpha}=\lambda Y\left(K,L\right)$.

Таким образом, функция Кобба-Дугласа (3.1.4) обладает всеми вышеуказанными свойствами.

Для многофакторного производства функция Кобба-Дугласа имеет вид: $f\left(x\right)=a\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{\alpha_m}$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_m=1$.

Для учета технического прогресса в функцию Кобба-Дугласа вводят специальный множитель (технического прогресса) $e^{\nu t}$, где t - параметр времени, ν - постоянное число, характеризующее темп развития. В результате функция принимает "динамический" вид: $f\left(x\right)=a\cdot e^{\nu t}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, где не обязательно $\alpha+\beta=1$. Показатели степени в функции (3.1.4) имеют смысл эластичности выпуска по капиталу и труду.

2. Производственная функция CES (с постоянной эластичностью замещения) имеет вид:

$$f\left(x_1,x_2\right)=a\cdot\left[\delta x_1^{-p}+\left(1-\delta\right)x_2^{-p}\right]^{-\frac{\gamma}{p}}, \tag{3.1.5}$$

где $a>0$ - коэффициент шкалы, $\delta>0$ - коэффициент распределения, ρ - коэффициент замещения, γ - степень однородности. Если выполнены условия $0<\gamma<1$, $\rho>-1$, то функция (3.1.5) удовлетворяет неравенствам (3.1.2) и (3.1.3). С учетом технического прогресса функция CES записывается:

$$f\left(x_1,x_2\right)=ae^{\nu t}\cdot\left[\delta x_1^{-p}+\left(1-\delta\right)x_2^{-p}\right]^{-\frac{\gamma}{p}}.$$

3. Производственная функция с фиксированными пропорциями. Эта функция получается из (3.1.5) при $\rho\to\infty$ и имеет вид:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{ax_1^{\gamma},bx_2^{\gamma}\right\}. \tag{3.1.6}$$

4. Производственная функция затрат-выпуска (функция Леонтьева) получается из (3.1.6) при $\gamma=1$: $f\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{ax_1,bx_2\right\}$.

Содержательно эта функция задает пропорцию, с помощью которой определяется количество затрат каждого вида, необходимое для производства одной единицы выпускаемой продукции. Поэтому в литературе часто встречаются другие формы записи:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{\frac{x_1}{c_1},\frac{x_2}{c_2}\right\} \qquad (3.1.7)$$

или

$$x_k \geq c_k y, \quad k=1,2.$$

Здесь $c_k \geq 0$ - количество затрат вида k, необходимое для производства одной единицы продукции, а y - выпуск.

5. Производственная функция анализа способов производственной деятельности. Данная функция обобщает производственную функцию затрат-выпуска на случай, когда существует некоторое число (r) базовых процессов (способов производственной деятельности), каждый из которых может протекать с любой неотрицательной интенсивностью. Она имеет вид "оптимизационной задачи"

$$f\left(x_1,x_2\right)=\sum_{j=1}^{r} d_j y_j, \text{ где } \sum_{j=1}^{r} x_{kj} y_j \leq x_k, \ k=1,2. \qquad (3.1.8)$$

Здесь y_j - выпуск продукции при единичной интенсивности j-го базового процесса, d_j - уровень интенсивности, x_{kj} - количество затрат вида k, необходимых при единичной интенсивности способа j.

Как видно из (3.1.8), если выпуск, произведенный при единичной интенсивности и затраты, необходимые на единицу интенсивности, известны, то общий выпуск и общие затраты находятся путем сложения выпуска и затрат соответственно для каждого базового процесса при выбранных интенсивностях.

Заметим, что задача максимизации функции f по $y_1,\ldots,y_r$ в (3.1.8) при заданных ограничениях-неравенствах является моделью анализа производственной деятельности (максимизация выпуска при ограниченных ресурсах).

6. Линейная производственная функция (функция с взаимозамещением ресурсов) применяется при наличии линейной зависимости выпуска от затрат:

$$f\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1+a_2x_2, \qquad (3.1.9)$$

где $a_k \geq 0$ - норма затрат k-го вида для производства единицы продукции (предельный физический продукт затрат).

Среди приведенных здесь производственных функций наиболее общей является функция CES. Действительно, как будет показано в следующем параграфе с применением понятий предельной нормы замещения и эластичности замещения, она обобщает функции Кобба-Дугласа, Леонтьева и линейную производственную функцию.

Для анализа процесса производства и различных его показателей наряду с предельными продуктами, $f_1^{\Pi}\left(x_1\right)=\dfrac{\partial f\left(x_1,\bar{x}_2\right)}{\partial x_1}$, $f_2^{\Pi}\left(x_2\right)=\dfrac{\partial f\left(\bar{x}_1,x_2\right)}{\partial x_2}$ (верхние черточки обозначают фиксированные значения переменных), показывающими величины дополнительных доходов, получаемых при использовании дополнительных количеств затрат, применяются понятия **средних продуктов**.

Средним продуктом по k-му виду затрат называется объем выпуска, приходящийся на единицу затрат k-го вида при фиксированном уровне затрат других видов: $f_1^C\left(x_1\right)=\dfrac{f\left(x_1,\bar{x}_2\right)}{x_1}$, $f_2^C\left(x_2\right)=\dfrac{f\left(\bar{x}_1,x_2\right)}{x_2}$.

Зафиксируем затраты второго вида на некотором уровне $\bar{x}_2$ и сравним графики трех функций: $f_1^0=f_1^0\left(x_1\right)=f\left(x_1,\bar{x}_2\right)$, $f_1^C=f_1^C\left(x_1\right)$, $f_1^П=f_1^П\left(x_1\right)$.

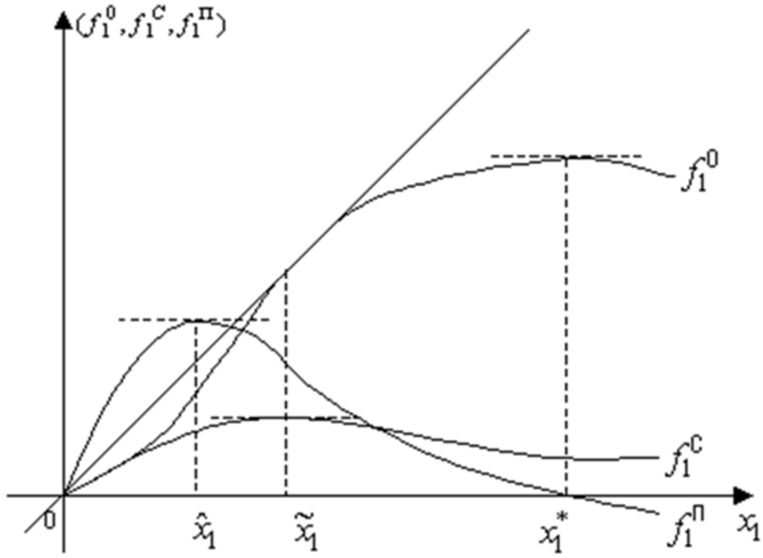


Рис.3.1.1. Кривые выпуска

Пусть график функции f_1^0 имеет три критические точки (как это показано на рис.3.1.1): $\hat{x}_1$ - точка перегиба, $\tilde{x}_1$ - точка касания с лучом из начала координат, x_1^* - точка максимума. Эти точки соответствуют трем стадиям производства. Первая стадия соответствует отрезку $\left[0,\tilde{x}_1\right]$ и характеризуется превосходством предельного продукта над средним: $f_1^П>f_1^C>0$. Следовательно, на этой стадии осуществление дополнительных затрат целесообразно. Вторая стадия соответствует отрезку $\left[\tilde{x}_1,x_1^*\right]$ и характеризуется превосходством среднего продукта над предельным: $f_1^C>f_1^П\geq 0$ (дополнительные затраты не целесообразны). На третьей стадии $\left(x_1^*,\infty\right)$, $f_1^П<0$ и дополнительные затраты приводят к обратному эффекту. Это объясняется тем, что x_1^* является оптимальным объемом затрат и дальнейшее увеличение их неразумно.

Для конкретных наименований ресурсов средние и предельные величины приобретают смысл конкретных экономических показателей. Рассмотрим, например, функцию Кобба-Дугласа (3.1.4) , где $x_1=K$ - капитал, а $x_2=L$- труд. Средние продукты $f_L^C=\dfrac{Y}{L}=aK^{\alpha}L^{-\alpha}$, $f_K^C=\dfrac{Y}{K}=aK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$

имеют смысл соответственно **средней производительности труда** и **средней производительности капитала** (средней фондоотдачи). Видно, что средняя производительность труда убывает с ростом трудовых ресурсов. Это и понятно, так как производственные фонды (K) остаются неизменными, и потому вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Аналогичное рассуждение верно и для фондоотдачи как функции от капитала.

Для функции (3.1.4) предельные продукты $f_L^{П} = \frac{\partial Y}{\partial L} = a(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-a)f_L^C$, $f_K^{П} = \frac{\partial Y}{\partial K} = a\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha f_K^C$ имеют смысл соответственно предельной производительности труда и предельной производительности капитала (предельной фондоотдачи). В микроэкономической теории производства считается, что предельная производительность труда $\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)$ равна заработной плате (цене труда), а предельная производительность капитала $\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)$ - рентным платежам (цене услуг капитальных благ). Из условия (3.1.2) следует, что при неизменных основных фондах (трудовых затратах) увеличение численности работающих (объема основных фондов) приводит к падению предельной производительности труда (предельной фондоотдачи). Видно, что для функции Кобба-Дугласа предельные продукты пропорциональны средним продуктам и меньше их.

3.2 Эластичность – важная общая характеристика моделей производства и потребления

Сначала остановимся на понятии **эластичности производства**. Уже знакомое нам из предыдущего параграфа свойство однородности производственной функции оценивает технологию производства в различных точках пространства затрат. А именно, производственная функция в одних точках этого пространства может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства, а в других - его увеличением или, наоборот, уменьшением. Локальным показателем измерения дохода от расширения масштаба производства и служит **эластичность производства**. Ее мы будем обозначать символом $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)$ ("эластичность f по λ в точке x"). Можем написать (см.2.6.2): $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right) = \left(\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta f(\lambda x)}{\Delta\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}$. Однако это соотношение не отражает изменение масштаба производства в точке x. Поэтому

вычислительная формула эластичности производства выглядит так: $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim\limits_{\lambda x\to x}\dfrac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{f(\lambda x)}$ или так

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}. \qquad (3.2.1)$$

В случае постоянства дохода при расширении масштаба производства (т.е. для линейно-однородной производственной функции) эластичность производства равна единице.

Действительно,

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial\left[\lambda f(x)\right]}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda f(x)}=\lim_{\lambda\to 1}f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=1.$$

Задача 3.2.1. Вычислить эластичность производства, описываемого функцией Кобба-Дугласа $f\left(x_1,x_2\right)=a\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2},\quad \alpha_1+\alpha_2=1.$

Решение: Для функции Кобба-Дугласа имеем:

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial\left[a\cdot\left(\lambda x_1\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\lambda x_2\right)^{\alpha_2}\right]}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{a\cdot\left(\lambda x_1\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\lambda x_2\right)^{\alpha_2}}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial\left[a\cdot\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\right]}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{a\cdot\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 1}\left[a\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot\lambda^{\alpha_1+\alpha_2-1}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\frac{\lambda}{a\cdot\lambda^{\alpha_1+\alpha_2-1}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}}\right]=$$

$$=\lim_{\lambda\to 1}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=1.$$

Задача 3.2.2. Вычислить эластичность производства, описываемого линейной функцией $f\left(x_1,x_2\right)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$.

Решение: Для линейной производственной функции имеем:

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial\left(\alpha_1\cdot\lambda x_1+\alpha_2\cdot\lambda x_2\right)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\alpha_1\cdot\lambda x_1+\alpha_2\cdot\lambda x_2}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 1}\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\right)\cdot\frac{1}{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2}=1$$

Как легко видеть, здесь мы воспользовались линейной однородностью этих двух функций.

Легко убедиться в том, что в случае возрастания (убывания) дохода при изменении масштаба производства его эластичность больше (меньше) единицы. Естественно, что предпочтение отдается производству с большей эластичностью, так как увеличивать затраты имеет смысл, если только это приводит к увеличению выпуска. Объективность оценки эластичности производства безусловно зависит от того, насколько адекватно производственная функция, как модель, отражает взаимосвязь затрат с выпуском. Можно говорить, что каждая производственная функция "по-своему" оценивает эластичность производства.

Для практического анализа производства также представляет интерес **эластичность выпуска по видам ресурсов** как величина, характеризующая процент прироста продукции при увеличении затрат на **1%**:

$$\varepsilon_{x_k}(f(x)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f(x)},\ k = 1,\dots,m. \qquad (3.2.2)$$

Теорема 3.2.1. Эластичность производства, описываемого дифференцируемой линейно-однородной функцией, в любой точке пространства затрат равна сумме эластичностей выпуска по всем видам затрат.

Доказательство. Дифференцируя по λ обе части равенства $f(\lambda x) = f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_m)$ по правилу дифференцирования сложной функции, имеем: $\dfrac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot \dfrac{\partial(\lambda x_k)}{\partial \lambda} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot x_k.$

Пользуясь этим равенством, выражение (3.2.1) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \lim_{\lambda \to 1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot \frac{\lambda x_k}{f(\lambda x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f(x)}.$$

Здесь мы воспользовались линейной однородностью производственной функции *f*. Теперь ясно, что (см. (3.2.2)) $\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varepsilon_{x_k}(f(x))$, а это и требовалось доказать.

Задача 3.2.3. Проверьте справедливость теоремы 3.2.1. для функции Кобба-Дугласа $f(x_1, x_2) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2},\quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$

Решение: $\varepsilon_{x_1}(f(x)) = \alpha_1$, $\varepsilon_{x_2}(f(x)) = \alpha_2$, $\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Задача 3.2.4. Проверьте справедливость теоремы 3.2.1. для линейной функции $f(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Решение: $\varepsilon_{x_1}(f(x)) = \dfrac{\alpha_1 x_1}{f(x)}$, $\varepsilon_{x_2}(f(x)) = \dfrac{\alpha_2 x_2}{f(x)}$,

$$\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{f(x)} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}.$$

На практике по разным причинам часто возникает необходимость замены одних ресурсов другими. Например, при расширении производства фирма должна решить: либо полностью автоматизировать производство за счет дорогостоящего оборудования и сократить количество рабочих мест (сократить фонд заработной платы), либо использовать предназначенные для этого средства для частичной модернизации технологии и увеличения фонда заработной платы. Что выгодно для фирмы? Для получения ответа на этот вопрос вводят понятия **предельной нормы замещения** одних ресурсов другими и **эластичности замещения** одних ресурсов другими.

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска. Предположим, что двухфакторное производство описывается производственной функцией $Y = F(K, L)$, где Y - выпуск, K - капитал (основные фонды), L - трудовые ресурсы. Предположим, часть рабочих (ΔL) уволилась. На какую величину (ΔK) следует увеличить основные фонды, чтобы выпуск остался на прежнем уровне, т.е. чтобы имело место равенство $F(K+\Delta K, L-\Delta L) = F(K, L)$? Рассуждая как в пункте 2.6 (см. (2.6.5)-(2.6.10)), получаем, что количество основных фондов надо увеличить на величину $S_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$. Число S_{LK} называется предельной нормой замещения трудовых ресурсов основными фондами ($S_{LK}S_{KL} = 1$).

Например, для функции Кобба-Дугласа (3.1.4) $S_{LK} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$, т.е. предельная норма замещения прямо пропорциональна фондовооруженности. Чем больше фондовооруженность, тем выше уровень компенсации одной единицы трудовых ресурсов основными фондами.

В общем случае, т.е. для производственной функции $y = f(x_1, ..., x_m)$, формула для вычисления предельной нормы замещения i-го ресурса k-м ресурсом имеет вид:

$$S_{ik} = \frac{\partial f/\partial x_i}{\partial f/\partial x_k}, \; i,k = 1,..m. \tag{3.2.3}$$

Из формул (3.2.2) и (3.2.3) вытекает взаимосвязь между эластичностью и предельной нормой замещения: для любых i и k: $S_{ik} = \frac{\varepsilon_{x_i}(f(x))}{\varepsilon_{x_k}(f(x))} \cdot \frac{x_k}{x_i}$.

Отсюда, в частности, можно сделать вывод о том, что для тех ресурсов, по которым выпуск неэластичен ($\varepsilon_{x_k}(f(x)) = 0$), нет смысла говорить о предельной норме замещения ими других ресурсов. Дробь $\frac{x_k}{x_i}$, где i - заменяемый, а k - замещающий ресурсы, показывает, сколько единиц замещающего ресурса приходится на одну единицу заменяемого ресурса.

Итак, предельная норма замещения показывает величину ресурса одного вида, которой производитель готов пожертвовать ради одной единицы ресурса другого вида.

Поставим теперь "обратный" вопрос: как изменится величина $\frac{x_k}{x_i}$ при изменении предельной нормы замещения S_{ik} на **1%**? Согласно определения эластичности, это есть "эластичность $\frac{x_k}{x_i}$ по S_{ik}". По формуле вычисления эластичности (2.6.2) имеем:

$$\varepsilon_{s_{ik}}\left(x_k/x_i\right)=\frac{d\left(x_k/x_i\right)}{dS_{ik}}\cdot\frac{S_{ik}}{x_k/x_i}=\frac{d\left(x_k/x_i\right)/\left(x_k/x_i\right)}{dS_{ik}/S_{ik}}. \qquad (3.2.4)$$

Эта величина называется эластичностью предельной нормы замещения (или просто эластичностью замещения). Введем более простое обозначение $\sigma_{ik}=\varepsilon_{s_{ik}}\left(x_k/x_i\right)$. С учетом формулы $\frac{df}{f}=d\ln f$, где $f>0$, эластичность (3.2.4) можно представить в виде:

$$\sigma_{ik}=\frac{d\ln\left(x_k/x_i\right)}{d\ln S_{ik}}. \qquad (3.2.5)$$

Для практики особый интерес представляет случай постоянства эластичности замещения, т.е. независимость отношения $\frac{x_k}{x_i}$ от предельной нормы замещения S_{ik}.

Покажем, что таким свойством обладает производственная функция CES (для простоты рассмотрим случай двухфакторного производства (3.1.5). С этой целью сперва вычислим предельную норму замещения для функции CES:

$$S_{12}=\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}=\frac{-a\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta x_1^{-\rho}+\left(1-\delta\right)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot\left(-\delta\rho x_1^{-\rho-1}\right)}{-a\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta x_1^{-\rho}+\left(1-\delta\right)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot\left(-\left(1-\delta\right)\rho x_2^{-\rho-1}\right)}=\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}.$$

Подставляя это в формулу (3.2.4) , получим:

$$\sigma_{12}=\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{\delta}{1-\delta}\cdot d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}\cdot\frac{\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=$$

$$=\left[\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=\left(\rho+1\right)^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=\frac{1}{\rho+1}=const.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\sigma_{21}=const$ и, более того, $\sigma_{21}=\sigma_{12}$. Поэтому эластичность замещения для функции CES можно обозначить просто как σ. Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \to 0} \sigma = 1, \quad \lim_{\rho \to \infty} \sigma = 0. \tag{3.2.6}$$

Нулевая эластичность означает отсутствие замещения. В общем, чем больше величина σ, тем шире возможность замещения одних ресурсов другими. Стремление значения σ к бесконечности означает, что каждый ресурс используется независимо от других.

Заметим, что к классу производственных функций с постоянной эластичностью относится и функция Кобба-Дугласа. Для нее $\sigma = 1$. Поэтому с учетом (3.2.6) можно сказать, что при $\rho \to 0$ производственная функция CES идентична с функцией Кобба-Дугласа.

3.3 Неоклассическая производственная функция и ее частный вид – функция Кобба-Дугласа

Все те применения производственных функций, о которых было рассказано в предыдущих параграфах, будут иметь место на практике экономических исследований и приносить реальную пользу только в том случае, если они как модели взаимосвязи "затраты-выпуск" будут адекватно отражать действительность. Поэтому важная задача теории - разработка достоверных и реалистических методов построения производственных функций.

По существу, производственная функция f есть совокупность "правил", с помощью которых для каждого набора затрат $(x_1,...,x_m)$ определяется соответствующий выпуск y: $y = f(x_1,...,x_m)$. Поэтому построение производственной функции означает нахождение математической формулы, отражающей эти правила или, иначе говоря, закономерности превращения набора ресурсов в конечный продукт. Этот процесс условно можно представить схемой:

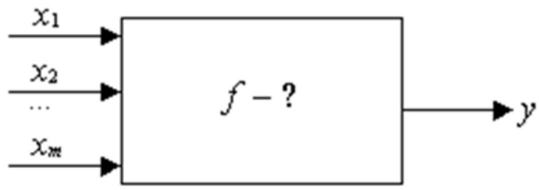


Рис. 3.3.1. Схема превращения ресурсов в конечный продукт

В блоке f (см.рис.3.3.1), образно говоря, происходит "смешивание" ресурсов $x_1,...,x_m$ в определенных "пропорциях" таким образом, чтобы получился требуемый продукт. Эти "пропорции" определяются спецификой производства и математически выражаются с помощью различных коэффициентов и показателей степени для величин $x_1,...,x_m$. "Смешивание" их математически выражается с помощью разных формальных операций между ними (суммирования, произведения, логарифмирования и т.д.), вид и сочетание которых также определяется спецификой моделируемого производства. Так что вопрос построения производственной функции в каждом конкретном случае сводится к нахождению этих "пропорций" и к определению характера их "смешивания".

Из сказанного выше следует, что для построения производственных функций нужно знать технологию производства, ее структуру и организацию, а также принципы работы сложных машин и оборудования, т.е. надо быть одновременно и технологом, и инженером, и математиком. Оказывается, что знание всего этого сложного производственного механизма не требуется, если владеть подходящими математическими приемами. Речь идет об использовании методов регрессионного анализа на основе статистических (опытных, экспертных) данных о затратах и выпуске. Не умаляя достоинства других математических и иных методов построения производственных функций, можно сказать, что именно методы регрессионного анализа наилучшим образом оправдали себя на практике и потому являются наиболее популярными.

Идею применения статистических данных для построения производственной функции можно объяснить на рисунке 3.3.1. Имеются известные величины $x_1,...,x_m,y$ (реальные результаты производства) и одно неизвестное выражение f, их связующее. Наблюдая в течение достаточно большого периода времени функционирования производства за различными значениями затрат $x_1,...,x_m$ и соответствующими им значениями выпуска y, можно выявить закономерность $f:(x_1,...,x_m)\xrightarrow{f}y$.

Например, свою знаменитую функцию (3.1.4) Кобб и Дуглас получили на основе изучения статистических данных по расходованию капитала (K), труда (L) и индекса производства (Y) в американской обрабатывающей промышленности за период с 1899 по 1922 гг. Практическая значимость этой функции подтверждается тем, что соответствующая замена исходных данных позволяет использовать ее для анализа любого производства.

Кратко остановимся на этапах построения производственной функции. Пусть нам известны виды ресурсов ($i=1,...,m$), используемых для выпуска данной продукции, и имеется необходимое количество статистических данных по объемам затрат $x_1,...,x_m$ и выпуска y. Требуется установить зависимость $y=f\left(x_1,...,x_m\right)$, т.е. найти аналитический вид производственной функции f. Эта задача распадается на два этапа:

1. спецификация функции f, т.е. выявление общего вида функции f от аргументов $x_1,...,x_m$ с неопределенными параметрами (коэффициентами и показателями степеней при x_i и свободным членом);
2. оценка параметров - определение конкретных числовых значений неизвестных параметров.

Картина "расположения" статистических данных в пространстве затраты-выпуск может подсказать линейный или нелинейный характер зависимости функции f от аргументов $x_1,...,x_m$. Например, в случае линейной производственной функции результатом спецификации будет гипотеза о линейной зависимости вида

$$f(x)=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_m x_m+\alpha, \qquad (3.3.1)$$

в случае производственной функции Кобба-Дугласа - в виде мультипликативной функции

$$f(x)=b\cdot\prod_{k=1}^{m} x_k^{b_k}, \qquad (3.3.2)$$

в случае производственной функции CES - в виде степенного многочлена

$$f(x)=c\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k^r\right)^l \qquad (3.3.3)$$

и т.д. Здесь $a, a_k, b, b_k, c, c_k, r, l$ являются неизвестными параметрами, подлежащими определению (оценке).

Чаще остальных на практике применяется аппроксимация вида (3.3.1), называемая линейной регрессией. Для определения ее параметров используется (линейный) метод наименьших квадратов. В некоторых случаях к линейной аппроксимации удается свести и нелинейные относительно ресурсов производственные функции. Например, логарифмируя функцию (3.3.2) , получим: $\ln f(x)=\ln b+\sum_{k=1}^{m} b_k \ln x_k$.

Далее, вводя обозначения $z=\ln f(x), \beta=\ln b, z_i=\ln x_i$, приходим к линейной регрессии вида (3.3.1): $z=\beta+\beta_1 z_1+...+\beta_m z_m$.

Применяя такой способ на основе статистических данных упомянутого выше периода, Кобб и Дуглас получили следующую оценку параметров для своей функции: $a\approx 1{,}01, \alpha_1\approx 0{,}27, \alpha_2\approx 0{,}73$ и, следовательно, их производственная функция выглядела так: $Y=1{,}01\cdot K^{0{,}27}\cdot L^{0{,}73}$.

Дальнейший анализ показал, что за исключением некоторых случаев (например, учета технического прогресса), имеет место соотношение $\alpha_1+\alpha_2\approx 1$. Так как величина $\alpha_1+\alpha_2$ показывает эластичность производства, равенство $\alpha_1+\alpha_2=1$ является признаком линейной однородности производственной функции (задача 3.2.1). Этот факт позволяет записывать функцию Кобба-Дугласа в виде $Y=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где $0<\alpha<1$.

В отличие от функции Кобба-Дугласа, функция (3.3.3) даже после логарифмирования остается нелинейной. Поэтому для оценки параметров функции CES применяется более сложный нелинейный метод наименьших квадратов.

3.4 Автономный и овеществленный способы учета научно-технического прогресса на макроуровне в производственных функциях

В этом параграфе будут рассмотрены оптимизационные модели производства. Строго говоря, мы будем моделировать не само производство, как таковое, а задачу принятия решения относительно планирования производства. Поэтому будем предполагать выполненными следующие аксиомы:

- любое производство начинается с этапа планирования;
- принимаются только реалистичные планы;
- принятые планы выполняются.

На основе этих положений задача фирмы как организации, производящей затраты производственных ресурсов для изготовления товаров, сводится к определению количества выпускаемой продукции и необходимых для этого затрат.

Фирма должна решить свою задачу наилучшим (т.е. оптимальным) образом. При этом "оптимальность" можно понимать двояко: либо как получение наибольшей прибыли (с учетом имеющихся возможностей фирмы относительно затрат ресурсов), либо как достижение необходимого (фиксированного) уровня выпуска с наименьшими затратами. Фирма может поставить перед собой только одну из этих целей. В противном случае задача будет некорректной, т.е. нереализуемой. Действительно, нельзя осуществить наибольший выпуск при наименьших затратах. В теории многокритериальной оптимизации этот факт устанавливается строго.

С точки зрения временного промежутка (горизонта планирования) можно различить задачи двух типов - задачу текущего производства (**краткосрочная задача**) и задачу перспективного развития (**долгосрочная задача**).

Краткосрочная задача ставится на один производственный цикл - от начала производства товара до момента выхода фирмы со своим товаром на рынок. Здесь решается задача рационального использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей, сырья, расходов на заработную плату. Поэтому математические модели краткосрочной задачи фирмы представляют собой оптимизационные задачи с ограничениями.

Долгосрочная задача охватывает период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращивания или сокращения основных фондов, изменения структуры производства, определения долгосрочных инвестиций, страховок и др. Эти затраты непосредственно не зависят от объема текущего выпуска. Поэтому математические модели долгосрочной задачи фирмы являются задачами безусловной оптимизации.

Для моделирования задач фирмы нам нужно формализовать такие понятия, как затраты, выпуск, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы.

Не умаляя общности, будем считать, что фирма производит один вид продукта, используя m видов ресурсов. Эти величины, как и ранее, будем обозначать соответственно через y и $x_1,...,x_m$. Предположим, что "технология" производства достаточно хорошо изучена, т.е. известна производственная функция $f: y = f(x) = f(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через p цену выпускаемой продукции, а через w_k - цену k-го вида ресурса, $k = 1,...,m$. Эти цены порождают понятия дохода (выручки от продажи произведенной продукции) и издержек. Доход от реализации готовой продукции $y = f(x)$ определяется формулой $p \cdot f(x)$. Издержки, соответствующие вектору затрат $x = \left(x_1, \ldots, x_m\right)$, т.е. общие выплаты за все виды затрат, равны $w_1 x_1 + \ldots + w_m x_m$. Эти издержки называются **переменными издержками**, так как они связаны (меняются вместе) с объемом выпуска. Кроме того, фирма несет и **постоянные издержки** (обозначим c_0), связанные с расходами на содержание фирмы. Поэтому общие издержки (обозначим C) складываются из двух компонент: $C(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + c_0$. Поскольку постоянные издержки не связаны с выпуском, то при составлении краткосрочных моделей мы их учитывать не будем. Тогда общий результат производства (x, y) (затраты-выпуск) можно оценить величиной $p \cdot f(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$. Если эта величина положительна, то пара (x, y) приносит прибыль, в противном случае - убыток.

С помощью полученных формул построим математические модели различных задач фирмы.

1. Долгосрочная задача. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому модель задачи имеет вид: $P\left(x_1, \ldots, x_m\right) = p \cdot f\left(x_1, \ldots, x_m\right) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max, \quad x_k \geq 0, k = 1, \ldots, m.$

Это есть задача безусловной максимизации прибыли. Здесь постоянные затраты c_0 не учтены, так как они не влияют на максимизацию функции P по переменным затратам $x_1, \ldots, x_m$.

В векторной форме долгосрочная задача имеет вид:

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \quad x \geq 0, \qquad (3.4.1)$$

где $w = \left(w_1, \ldots, w_m\right)$ - вектор цен затрат.

2. Краткосрочная задача. Эта задача планируется с учетом наличных на данный период запасов ресурсов, поэтому ее модель строится на условную оптимизацию: $P\left(x_1, \ldots, x_m\right) = p \cdot f\left(x_1, \ldots, x_m\right) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max$, при ограничениях $x_k \in X_k, k = 1, \ldots, m$, где $X_k \subset R_+^m$ - множество допустимых значений затрат k-го вида.

Введя обозначение $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ множества допустимых наборов затрат, эту задачу можно написать в векторной форме

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \qquad (3.4.2)$$

при ограничениях $x \in X$.

Здесь явный вид множества X может быть описан различными способами. Например, в виде

$X=\left\{x\in R_{+}^{m} \,/\, a_i\le x_i\le b_i, i=1,...,m\right\}$ (параллелепипеда),

$X=\left\{x\in R_{+}^{m} \,/\, Ax\le b\right\}$ (многогранника),

$X=\left\{x\in R_{+}^{m} \,/\, g_l\left(x\right)\le 0, l=1,...,r\right\}$ (криволинейного многообразия) и т.д.

3. Задача многопродуктового производства. Предположим теперь, что фирма выпускает не один, а несколько (n) видов продуктов. Пусть для каждого j-го вида продукта известны производственная функция $f_j : y_j = f\left(x_1,...,x_m\right)$ и цена p_j ($k=1,...,m$); для каждого k-го вида ресурса известны функция g_k, описывающая суммарные затраты этого ресурса для производства всех n видов продуктов, и его наличное количество $b_k>0$ ($k=1,...,m$). В этом случае модели долгосрочной и краткосрочной задач соответственно имеют вид:

$$P(x)=\langle p, f(x)\rangle-\langle w,x\rangle\to\max,$$
$$x\ge 0$$

и

$$P(x)=\langle p, f(x)\rangle-\langle w,x\rangle\to\max, \tag{3.4.3}$$

при ограничениях $g\left(x\right)\le b, x\ge 0$.

Здесь $p=\left(p_1,...,p_n\right)$ - вектор цен выпускаемых товаров, $g\left(x\right)=\left(g_1\left(x\right),...,g_m\left(x\right)\right)$ - вектор-функция затрат, $b=\left(b_1,...,b_m\right)$ - вектор наличных запасов ресурсов.

4. Задача на минимизацию затрат. Во всех приведенных выше моделях производства ставится задача максимизации прибыли, т.е. целевая функция имеет смысл прибыли. Для постановки задачи на минимизацию затрат предположим, что фирма планирует выпуск продуктов в объемах $y_1^*,...,y_n^*$, т.е. рассмотрим фиксированные объемы выпуска. В этом случае оптимизационная задача производства может быть поставлена следующим образом:

$$C\left(x_1,...,x_m\right)=\sum_{k=1}^{m} w_k x_k\to\min,$$
$$f_j\left(x_1,...,x_m\right)=y_j^*, j=1,...,n, \tag{3.4.4}$$
$$x_k\ge 0, k=1,...,m.$$

Желая "перевыполнить" план выпуска, ограничения-равенства можно заменить на ограничения-неравенства $f_j\left(x_1,...,x_m\right)\ge y_j^*$.

5. Видоизменения постановок задач. В зависимости от целей и характера исследования производства, можно пользоваться различными модификациями приведенных выше моделей. Например, в задачах (3.4.1) и (3.4.2) по тем или иным техническим соображениям производственную функцию можно "исключить" из целевой функции, записывая их в виде

$$P(x) = py - \langle w, x \rangle \to \max,$$
$$y = f(x),\ x \ge 0$$

и

$$P(x) = py - \langle w, x \rangle \to \max,$$
$$y = f(x),\ x \in X.$$

Задачу производства можно поставить в "чисто финансовой" форме. Предположим, что для приобретения необходимых ресурсов выделена фиксированная сумма ν. Тогда задачу максимизации дохода можно поставить в следующей форме:

$$\langle p, f(x) \rangle \to \max,$$
$$\langle w, x \rangle \le \nu,\ x \ge 0.$$

Любое видоизменение моделей допустимо, если оно адекватно описывает реальную задачу. Оценивается не вид модели, а практическая польза от ее применения.

Видно, что во всех моделях производства максимизация и минимизация целевой функции осуществляется по переменным $x_1,...,x_m$, т.е. фирма принимает решение только относительно объемов затрат. Поэтому решениями этих задач являются оптимальные значения $x^* = \left(x_1^*,...,x_m^*\right)$ векторов затрат. Выбор метода нахождения оптимального решения задач зависит, прежде всего, от линейности или нелинейности участвующих в их постановке функций f и g. Если эти функции нелинейны, то соответствующую задачу можно решить методом множителей Лагранжа или каким-либо приближенным методом. В случае линейности всех функций можно применить симплекс-метод.

Для примера рассмотрим задачу (3.4.3). Если в ней функции $f_1,...,f_n$, $g_1,...,g_m$ дифференцируемы в R_+^m и среди них имеются нелинейные, то ее оптимальное решение x^* можно найти с помощью функции Лагранжа $L(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k(x) - b\right) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k$ и необходимых условий оптимальности Куна-Таккера.

Предположим, что все функции в (3.4.3) линейные:

$f_j(x) = c_{j1}x_1 + ... + c_{jm}x_m,\quad j = 1,...,n$;

$g_k(x) = a_{k1}x_1 + ... + a_{km}x_m,\quad k = 1,...,m$.

В этом случае целевая функция задачи (3.4.3) принимает вид: $P(x) = c_1 x_1 + ... + c_m x_m$, где $c_k = p_1 c_{1k} + ... + p_n c_{nk} + w_k$, $k = 1,...,m$, а ограничения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0.$$

Следовательно, мы имеем задачу линейного программирования:

$$\langle c, x \rangle \to \max,$$

$$Ax \le b, x \ge 0,$$

где $c = \left(c_1, \ldots, c_m\right)$, A - технологическая матрица, элементы a_{ik} которой показывают расход ресурса вида i для производства единицы продукта вида k.

Двойственная к ней задача

$$\langle b, z \rangle \to \min,$$

$$A^T z \le c, z \ge 0$$

имеет смысл минимизации затрат при фиксированном объеме выпуска.

Пусть в задаче (3.4.1) производственная функция f дважды дифференцируема в R_+^m и удовлетворяет условиям (3.1.2)-(3.1.3). Для нахождения ее оптимального решения $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_m^*\right)$ (относительно затрат) построим функцию Лагранжа $L\left(x, \lambda\right) = pf\left(x\right) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \ge 0$, и выпишем необходимые условия Куна-Таккера: $p \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x=x^*} - w_k - \lambda_k = 0, k = 1, \ldots, m$ (стационарность),

$\lambda_k x_k^* = 0, k = 1, \ldots, m$ (дополняющая нежесткость),

$x_k^* \ge 0, k = 1, \ldots, m$ (допустимость).

Ввиду предположения о выполнении (3.1.3) эти условия становятся и достаточными условиями оптимальности. Упростим их, предположив $x_k^* > 0, k = 1, \ldots, m$. Содержательно это означает необходимость затрат всех видов. Это условие не является жестким, так как в случае $x_k^* = 0$ можно было исключить ресурс k-го вида из рассмотрения, сократив тем самым размерность пространства затрат.

С учетом последнего предположения из условия дополняющей нежесткости следует $\lambda_k = 0, k = 1, \ldots, m$. Заметим сразу, что это не противоречит условию о невозможности одновременного равенства нулю всех множителей Лагранжа - оно является следствием изменения условия задачи (3.4.1). В результате необходимый и достаточный признак оптимальности принимает вид:

$$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\bigg|_{x=x^*} - w_k = 0, k = 1,...,m. \qquad (3.4.5)$$

Величину $p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$ естественно назвать стоимостью предельного продукта.

Поэтому (3.4.5) содержательно означает равенство стоимости предельного продукта и платы за ресурсы в точке x^*:

$$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\bigg|_{x=x^*} = w_k, k = 1,...,m.$$

Обозначим $\psi_k(x) = p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} - w_k, k = 1,...,m$ и составим матрицу Якоби для системы (3.4.5): $\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}\right|_{x=x^*}$.

Из алгебры известно, что если матрица Якоби невырожденна, то система (3.4.5) имеет решение. Здесь невырожденность следует из условий (3.1.2)-(3.1.3). Таким образом, система (3.4.5) разрешима и оптимальное решение задачи (3.4.1) может быть выражено как функция $m+1$ параметров: $p, w_1,..., w_m$:

$$x^* = x^*(p,w) = x^*\left(p, w_1,..., w_m\right). \qquad (3.4.6)$$

В координатной форме имеем m **функций спроса на затраты** $x_k^* = x_k^*\left(p, w_1,..., w_m\right),\ k = 1,..,m$, выражающих оптимальные объемы затрат в зависимости от цен.

Оказывается, спрос не зависит от масштаба цен, точнее, от пропорционального изменения цены продукции и цен ресурсов.

Действительно, из (3.4.1) для любых $\alpha > 0$ имеем: $\alpha pf(x) - \langle \alpha w, x\rangle = \alpha\left(pf(x) - \langle w, x\rangle\right) = \alpha P(x)$. Так как постоянный коэффициент α не влияет на максимизацию функции P по x, то задача $\alpha P(x) \to \max,\ x \ge 0$ имеет такое же оптимальное решение, что и задача (3.4.1).

Следовательно, $x^*(\alpha p, \alpha w) = x^*(p, w),\ \alpha > 0$ и функции спроса на затраты являются однородными нулевой степени функциями.

Подставляя решение (3.4.6) в производственную функцию f, получаем выпуск как функцию от тех же $m+1$ параметров:

$$f\left(x^*(p,w)\right) = f^*(p,w) = f^*\left(p, w_1,..., w_m\right). \qquad (3.4.7)$$

Это есть **функция предложения готовой продукции**.

Так как $f^*(\alpha p, \alpha w) = f\left(x^*(\alpha p, \alpha w)\right) = f\left(x^*(p, w)\right) = f^*(p, w)$, то функция предложения также является однородной нулевой степени функцией, т.е. объем предложения товара остается неизменным при повышении (снижении) цен на ресурсы, если в той же пропорции повышается (снижается) цена готовой продукции.

3.5 Изокванты, предельная производительность и предельная норма замещения ресурсов

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию оптимального решения (3.4.6) задачи (3.4.1) в пространстве затрат. Для этого введем два геометрических понятия - **изокванты** и **изокосты**. **Изокванты** в теории производства играют такую же роль, что и кривые безразличия в теории потребления (см. пункт 2.5., определение 2.5.2).

Определение 3.5.1. Изоквантой (производственной функции $f: R_+^m \to R^1$) называется геометрическое место всех векторов затрат x, использование которых приводит к одному и тому же объему выпуска продукции $y^0: \left\{x \in R_+^m / f(x) = y^0\right\}$.

Таким образом, изокванта - это линия уровня производственной функции. Для различных уровней выпуска y^0 линии уровня $f(x) = y^0$ заполняют все пространство затрат (R_+^m) и составляют карту изоквант. Для примера на рис.3.5.1 приведен вид изоквант $\alpha \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} = y^0$ $\left(y^0 = const\right)$ производственной функции Кобба-Дугласа.

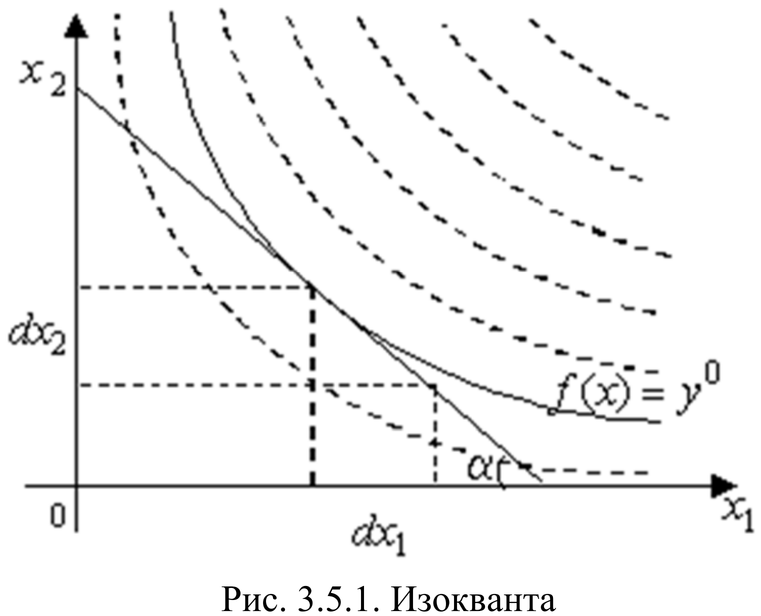


Рис. 3.5.1. Изокванта

Пусть производственная функция $y=f\left(x_1,x_2\right)$ дифференцируема по обеим переменным. Тогда вдоль изокванты $f\left(x_1,x_2\right)=const$ имеем: $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)\right|_{изокв.}=0$.

Отсюда найдем отношение:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокв.}=-\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}. \tag{3.5.1}$$

Следовательно, наклон $tg\alpha=\frac{dx_2}{dx_1}$ изокванты производственной функции выражается через отношение предельных продуктов. Дальнейшие геометрические построения, связанные с изоквантами, проведем на рис.3.5.2.

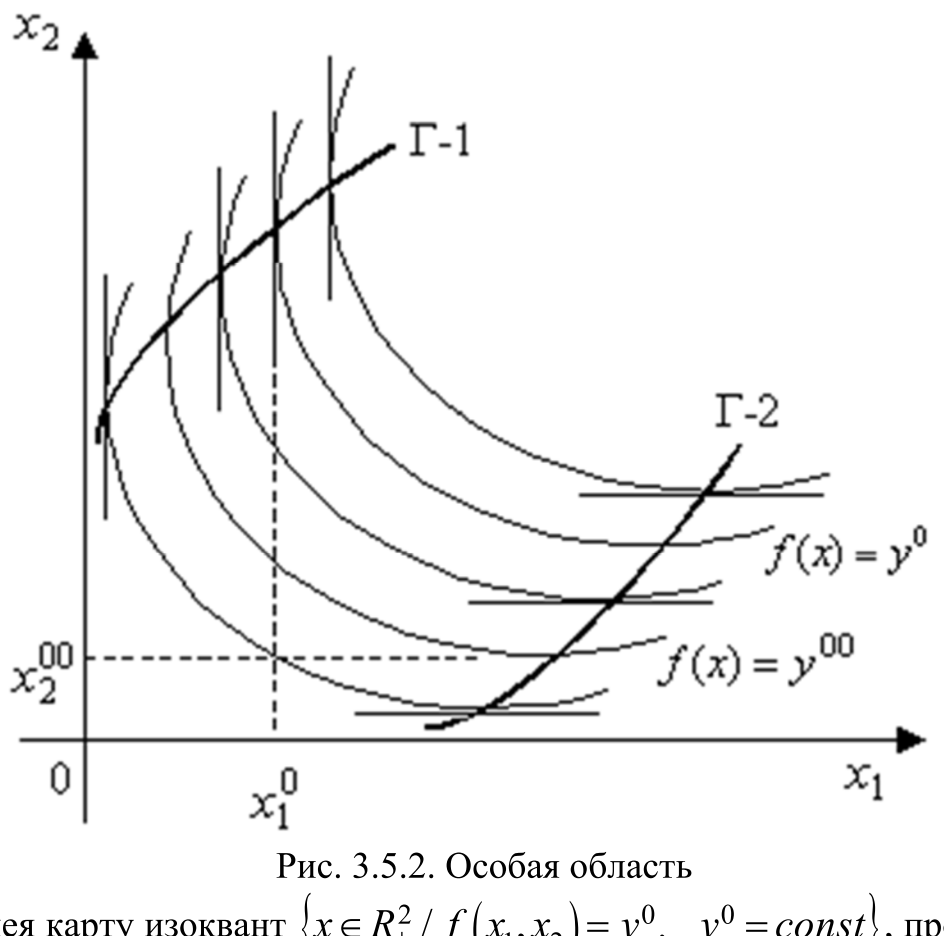


Рис. 3.5.2. Особая область

Имея карту изоквант $\left\{x\in R_+^2\,/\,f\left(x_1,x_2\right)=y^0,\quad y^0=const\right\}$, проведем касательные к каждой из них с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1}=\infty$ ($\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$). Эти касательные проходят параллельно к оси Ox_2 ($\alpha=90^0$). Так как изокванты заполняют все пространство R_+^2, то, соединяя точки касания, получим непрерывную линию Г-1, которую назовем границей первого ресурса.

Аналогично проведем касательные к изоквантам с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1}=0$ ($\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$). Эти касательные проходят параллельно к оси Ox_1 ($\alpha=0^0$). Соединяя точки касания, получаем непрерывную линию Г-2, которую назовем границей второго ресурса.

Построенная область в R_+^2, заключенная между линиями Г-1 и Г-2, называется **особой областью**. Она характеризуется неотрицательностью обоих предельных продуктов $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, так как для $0^0 \le \alpha \le 90^0$ $tg\alpha$ неположителен. Можно показать, что в особой области справедливы и неравенства (3.1.3), т.е. это та область затрат, где выполнен закон убывающей доходности. Пользуясь условиями (3.1.3), можно доказать, что особая область является выпуклым подмножеством пространства затрат. Граница первого ресурса Г-1 является геометрическим местом минимального количества затрат x_1, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, для производства продукции в размере y^0 необходимо затратить первый ресурс как минимум в x_1^0 единиц (рис.3.5.2). Точно также, граница второго ресурса Г-2 является геометрическим местом минимального количества затрат x_2, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, чтобы произвести продукцию в количестве y^{00}, необходимо как минимум x_2^{00} единиц второго ресурса.

Изокванта является одним из основных инструментов графического анализа технической результативности производства.

Поскольку производственная функция выражает зависимость между количеством используемых факторов и **максимально** возможным выпуском, то изокванта представляет множество сочетаний **минимально** необходимых объемов труда и капитала для заданного выпуска. Это означает, что изокванта не может иметь положительный наклон.

Изокванта свидетельствует о взаимозаменяемости факторов производства: заданный объем продукции можно эффективно произвести при различных сочетаниях труда и капитала (различной капиталовооруженности труда). В какой пропорции один из факторов можно заменить другим, зависит от исходной капиталовооруженности труда.

Определение 3.5.2. Изокостой называется геометрическое место векторов затрат, для которых издержки производства постоянны: $\left\{x \in R_+^m \mid \sum_{k=1}^{m} w_k x_k = const\right\}$.

Для двухфакторного производства изокоста задается уравнением $C(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = const$. Так как цены w_1 и w_2 предполагаются заданными, дифференцируя последнее уравнение, имеем:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокос.} = -\frac{w_1}{w_2}. \tag{3.5.2}$$

Следовательно, для разных $const$ изокосты являются параллельными линиями с одним и тем же наклоном $tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_1}$ (рис.3.5.3) и этот наклон выражается через отношение цен на ресурсы.

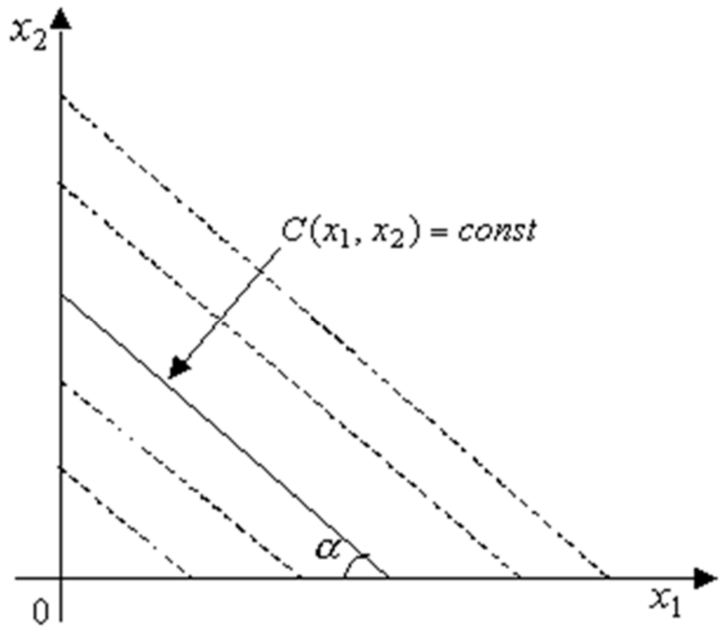


Рис. 3.5.3. Изокосты

Сравнивая (3.5.1) и (3.5.2) , видим:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокв.} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокос.}. \tag{3.5.3}$$

Покажем, что равенство (3.5.3) достигается именно в точке x^*, являющейся решением задачи (3.4.1). Из (3.4.5) в случае двухфакторного производства имеем:

$$p\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x^*} = w_1, \quad p\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x^*} = w_2.$$

Разделяя первое равенство на второе почленно, получаем

$$\left.\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}\right|_{x=x^*} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Сопоставляя полученное равенство с (3.5.1) и (3.5.2), приходим к выводу: совпадение наклонов изокванты и изокосты имеет место в одной и той же точке x^*, являющейся оптимальным решением задачи (3.4.1), и эта точка, конечно, является точкой касания изокосты и изокванты (рис.3.5.4).

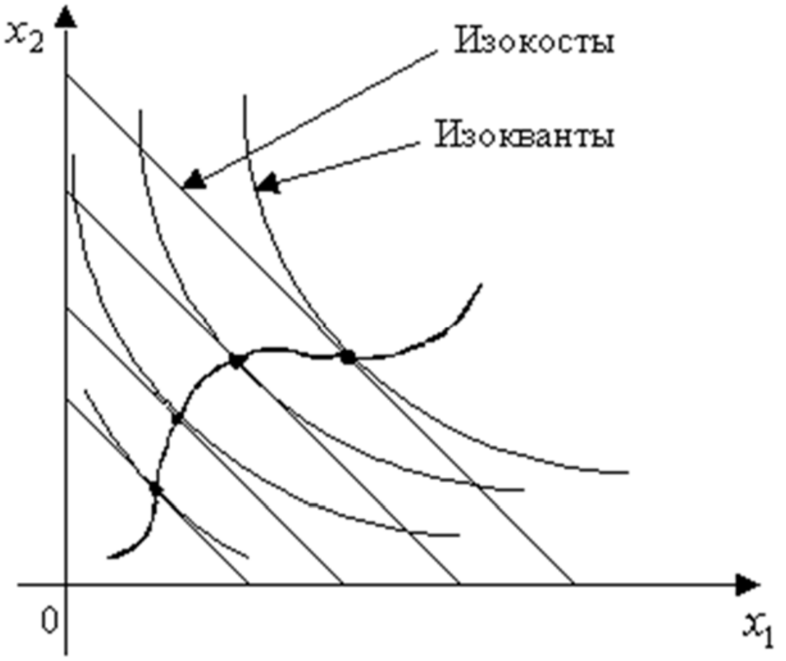


Рис. 3.5.4. Долгосрочный путь расширения

Так как изокванты и изокосты заполняют все пространство затрат, соединяя все точки их касания, получаем непрерывную линию. Как легко понять, эта линия расположена в особой области, изображенной на рисунке 3.5.2, и потому чем дальше на ней расположена точка x^*, тем больше соответствующие значения затрат и выпуска. Поэтому данная линия называется **долгосрочным путем расширения** производства.

Таким образом, геометрическое место пересечений изоквант и изокост показывает оптимальный сценарий развития производства.

Этот путь описывает, с одной стороны, затраты, максимизирующие прибыль фирмы, при любом фиксированном уровне издержек, с другой - затраты, минимизирующие издержки, при заданном уровне выпуска. Поэтому долгосрочный путь расширения иногда называют **кривой издержек**, имея в виду, что вдоль нее оптимальные издержки выражаются как функция от выпуска.

В случае краткосрочной задачи (3.4.2) (или (3.4.3)) необходимый и достаточный признак оптимальности будет иметь более сложный, чем (3.4.5), вид из-за наличия ограничений. Однако и в этом случае при выполнении условий (3.1.2)-(3.1.3) краткосрочный путь расширения, как геометрическое место векторов оптимальных затрат, будет проходить в особой области.

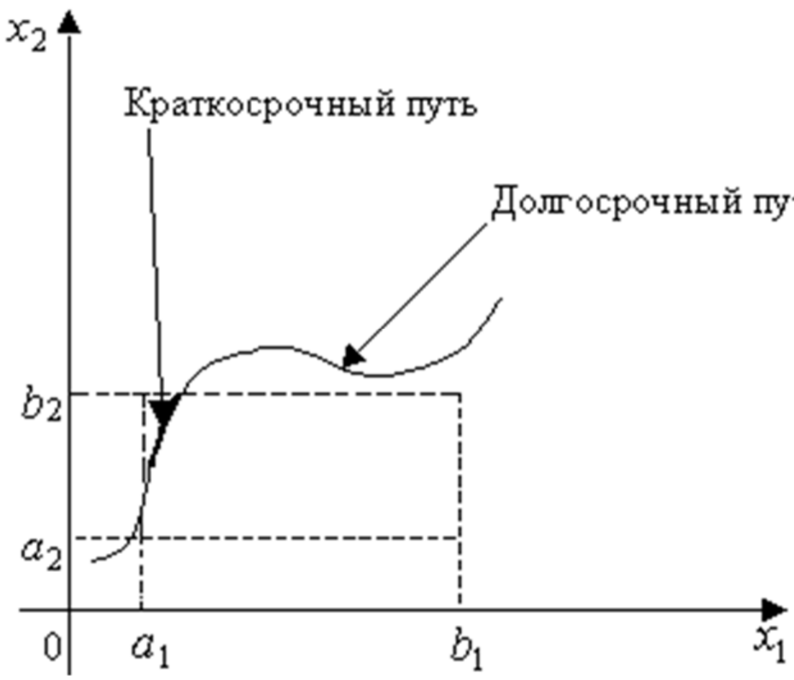


Рис. 3.5.5. Краткосрочный путь

Причем можно высказать гипотезу о том, что если множество допустимых затрат X (см. задачу (3.4.2)) краткосрочной задачи имеет непустое пересечение с долгосрочным путем расширения, то краткосрочный путь расширения совпадает (в области X) с долгосрочным путем, т.е. он является частью долгосрочного пути расширения. Если эта гипотеза верна, то для каждой точки $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ на краткосрочном пути существует такое постоянное число c^*, что изокоста $w_1 x_1 + w_2 x_2 = c^*$ и изокванта $f\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ из долгосрочной задачи будут иметь точкой касания точку x^*. Последнее означает совпадение краткосрочной и долгосрочной кривых издержек, что говорит о согласованности краткосрочной задачи фирмы с ее долгосрочными планами.

3.6 Связь предельной нормы замещения ресурсов с рыночными ценами на них и содержательная интерпретация

Исследуем чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям параметров $p, w_1, ..., w_m$. Для этого сделаем дополнительное к условиям предыдущего параграфа предположение: функции x_k^* и f^* дифференцируемы по всем переменным.

Подставляя в систему (3.4.5) функции спроса (3.4.6) и присоединяя к ней выражение для функции предложения (3.4.7), получим замкнутую тождественную систему из $m+1$ уравнения с $m+1$ параметром:

$$
\begin{cases}
f^*\left(p,w_1,\dots,w_m\right)=f\left(x^*\left(p,w_1,\dots,w_m\right)\right),\\
p\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^*\left(p,w_1,\dots,w_m\right)\right)=w_k,\ k=1,\dots,m.
\end{cases}
\qquad (3.6.1)
$$

Так как чувствительность оптимальных затрат и выпуска по ценам оценивается величинами $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial p},\dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_i},\quad k,i=1,..,m,\ \dfrac{\partial f^*}{\partial p},\dfrac{\partial f^*}{\partial w_k},\quad k=1,\dots,m,$ то систему (3.6.1) будем дифференцировать по переменным $p,w_1,\dots,w_m$. Первые $2m$ частных производных характеризуют изменение оптимального объема затрат при изменении цены готовой продукции и цен ресурсов; вторая группа частных производных показывает реакцию объема оптимального выпуска на колебание тех же цен.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$
\frac{\partial x^*}{\partial p}=\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p},\dots,\frac{\partial x_m^*}{\partial p}\right),\ \frac{\partial f^*}{\partial w}=\left(\frac{\partial f^*}{\partial w_1},\dots,\frac{\partial f^*}{\partial w_m}\right),\ \frac{\partial x^*}{\partial w}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_m^*}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m^*}{\partial w_m}\end{pmatrix}.
$$

Будем считать выполненными условия (3.1.2)-(3.1.3), т.е. анализ чувствительности затрат и выпуска проведем в пределах особой области, изображенной на рисунке 3.5.2.

Сначала продифференцируем обе части системы (3.6.1) по p:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f^*}{\partial p}=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial x_k^*}{\partial p},\\
\dfrac{\partial f}{\partial x_k}+p\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p}=0,\quad k=1,\dots,m.
\end{cases}
$$

Применяя обозначение матрицы Гессе $\nabla^2 f=\left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}\right\|_{m\times m}$ перепишем эту систему в векторной форме:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f^*}{\partial p}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\\
\dfrac{\partial f}{\partial x}+p\nabla^2 f\cdot\dfrac{\partial x^*}{\partial p}=0.
\end{cases}
\qquad (3.6.2)
$$

Продифференцируем теперь систему (3.6.1) по w_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w_k} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, \quad k = 1,...,m, \\ p \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k} = \delta_{kl}, \quad l = 1,...,m, \end{cases}$$

где δ_{kl} - использованный ранее в пункте 2.9 главы 2 символ Кронекера.

Применяя обозначение единичной матрицы $E_m = \left\| \delta_{kl} \right\|_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ перепишем эту систему в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w}, \\ p \cdot \nabla^2 f \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w} = E_m. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

Запишем теперь системы (3.6.2) и (3.6.3) в матричных формах:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x} \right)^T \end{pmatrix}, \tag{3.6.4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f^*}{\partial w} \right)^T \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ E_m \end{pmatrix}. \tag{3.6.5}$$

Здесь через Θ обозначен m-мерный вектор-столбец с нулевыми элементами, $(\ )^T$ - знак транспонирования.

Объединяя уравнения (3.6.4) и (3.6.5) в одно, получим **основное матричное уравнение теории производства (фирмы):**

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial f^*}{\partial w} \right)^T \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x} \right)^T & E_m \end{pmatrix}. \tag{3.6.6}$$

Это есть система из $(m+1)^2$ уравнений с $(m+1)^2$ неизвестными показателями сравнительной статики.

Разрешая ее относительно показателей сравнительной статики, перепишем: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & E_m \end{pmatrix}$. Выполним матричное умножение в последнем уравнении и найдем решение. Запишем его в векторной форме:

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\nabla^2 f^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T, \tag{3.6.7}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\nabla^2 f^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T, \tag{3.6.8}$$

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\nabla^2 f^{-1}, \tag{3.6.9}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p}\nabla^2 f^{-1}, \tag{3.6.10}$$

где $\nabla^2 f^{-1}$ - обратная матрица Гессе.

Как и в теории потребления (см. пункт 2.9 главы 2), при помощи показателей сравнительной статики можно классифицировать типы затрат.

Определение 3.6.1. Затраты (**ресурсы**) вида k называются **нормальными**, если $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0$; **ценными** (**малоценными**), если $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} > 0 \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0\right)$. Два вида затрат i и k называются **взаимозаменяемыми** (**взаимодополняемыми**), если $\frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0,\ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0$ ($\frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} < 0,\ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} < 0$).

Неравенство $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} > 0$ означает возрастание затрат k-го вида с ростом их цены. Такие затраты исключены, так как напрямую уменьшают прибыль фирмы (см. целевые функции задач (3.4.1) - (3.4.3)). Поэтому кривая спроса на затраты всегда является убывающей и, в отличие от теории потребления, здесь нет товаров Гиффина.

Некоторые выводы относительно чувствительности затрат и выпуска по ценам, к которым можно прийти, анализируя соотношения (3.6.7)-(3.6.10), таковы:

1. повышение цены на выпускаемый продукт всегда приводит к увеличению объема выпуска;
2. повышение цены на выпускаемый продукт влечет повышение спроса на некоторые виды затрат;

3. в рамках закона об убывающей доходности нельзя обходиться исключительно малоценными затратами;
4. повышение платы за малоценные ресурсы ведет к увеличению объема выпуска;
5. повышение платы за некоторый вид затрат приводит к увеличению объема выпуска;
6. повышение цен на затраты приводит к сокращению спроса на них;
7. чувствительность объема затрат k-го вида на изменение цен затрат i-го вида такая же, что и чувствительность объема затрат i-го вида на изменение цен затрат k-го вида;
8. для взаимозаменяемых затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет увеличение (уменьшение) спроса на другую;
9. для взаимодополняющих друг друга затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет уменьшение (увеличение) спроса на другую.

Обоснуем кратко эти утверждения, часть которых подтверждает "очевидные истины".

Первый вывод следует из неравенства

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} > 0, \qquad (3.6.11)$$

которое немедленно вытекает из (3.6.7) с учетом отрицательной определенности обратной матрицы Гессе ($\nabla^2 f^{-1}$) и неотрицательности предельного продукта ($\frac{\partial f}{\partial x_k}$) в особой области. Данное неравенство подтверждает факт о том, что кривая предложения продукта является возрастающей.

Неравенство (3.6.11) с учетом (3.6.1) перепишется как

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (3.6.12)$$

Такое соотношение возможно только в том случае, если для некоторых k будет иметь место неравенство

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} > 0, \qquad (3.6.13)$$

которое и является обоснованием второго вывода.

Сравнивая (3.6.8) и (3.6.9) , можно заметить, что

$$\frac{\partial f^*}{\partial w_k} = -\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \quad k = 1, \ldots, m\,. \qquad (3.6.14)$$

Поэтому вывод 2) можно уточнить так: повышение цены выпускаемой продукции приводит к повышению спроса на затраты k-го вида всегда, если и только если увеличение платы за этот вид затрат приводит к сокращению объема выпуска.

Действительно, с учетом (3.6.14) неравенство (3.6.13) влечет неравенство $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$. В частности, если x_k - малоценные затраты (т.е. $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0$), то увеличение цены w_k приведет к увеличению выпуска (т.е. $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} > 0$), о чем и утверждает вывод 4.

Обоснованность вывода 3) следует также из неравенства (3.6.14).

Из соотношений (3.6.11), (3.6.12) и (3.6.14) получаем: $0 < \frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial w} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f^*}{\partial w_k}$. Поэтому в особой области для некоторых видов затрат выполнено неравенство $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$. Оно доказывает справедливость вывода 5).

Соотношение (3.6.10) указывает на симметричность матрицы $\frac{\partial x^*}{\partial w}$, причем, как и правая часть этого уравнения, она отрицательно определена. Поэтому ее диагональные элементы отрицательны: $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0, \quad k = 1,...,m.$ Отсюда следует вывод 6).

Симметричность матрицы $\frac{\partial x^*}{\partial w}$ означает, что $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, \quad k,i = 1,...,m.$ Содержательный смысл этого равенства приведен в выводе 7).

Выводы 8) и 9) вытекают непосредственно из определений взаимозаменяемых и взаимодополняемых затрат.

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ИГР

4.1 Игровые модели

Теория игр – раздел исследования операций, в котором изучаются процессы принятия решений в условиях конфликта. Другими словами, теория игр дает математический прогноз конфликтной ситуации. Для возможности проведения анализа конфликта, необходимо построить её абстрактную модель, которую будем называть **игрой**. Стороны, участвующие в конфликте, называются **игроками**, а исход конфликта — **выигрышем**.

Платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей (в конечной игре). Пусть игрок 1 имеет m стратегий A_i, а игрок 2 - n стратегий B_j, ($i=1,...,m$, $j=1,...,n$). Игра может быть названа игрой $m \times n$. Представим матрицу эффективности игры двух лиц с нулевой суммой, сопроводив ее необходимыми обозначениями (табл. 4.1.1).

Таблица 4.1.1

Игрок 1 \ Игрок 2	B_1	B_2	……	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	α_2
…………………………	……	……	……	……	……
A_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

В данной матрице элементы a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 – могут означать и математическое ожидание выигрыша (среднее значение), если выигрыш является случайной величиной. Величины α_i,– соответственно минимальные значения элементов a_{ij} по строкам и β_j - максимальные по столбцам. Их содержательный смысл будет отражен в следующих параграфах.

Целью каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Для каждой формализованной игры вводятся **правила**, т.е. система условий, определяющая: варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш - нулем, выигрыш - единицей, а ничью - $1/2$.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется **ходом** игрока. Ходы могут быть личными и случайными. **Личный ход** — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). **Случайный ход** — это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе, возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. (Так можно осуществить игру с помощью ЭВМ).

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию **оптимальности**, т.е. один из игроков должен получать **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый придерживается своей стратегии. Такие **стратегии** называются **оптимальными**. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять **условию устойчивости**, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если **игра повторяется достаточно много раз**, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а **средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях**.

Цель теории игр: определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.

Важнейшее ограничение теории игр: единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Однако конфликты приводят к разным исходам, а значит, и к различным видам игр, для каждой из которых есть свой метод решения.

Игры классифицируются по целому списку направлений:

1. **По количеству игроков:** парные игры и игры n игроков.

Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух.

2. **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные.

В конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является бесконечной.

3. **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Если игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, то такая игра относится к бескоалиционным; если игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции - коалиционной. Кооперативная игра - это игра, в которой заранее определены коалиции.

4. **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические).

Игра с нулевой суммой предусматривает условие: «сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю». Игры двух игроков с нулевой суммой относят к классу антагонистических. Естественно, выигрыш одного игрока при этом равен проигрышу другого. Игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой. Конечная игра с ненулевой суммой называется биматричной игрой. Доказано, что игру n лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру n+1 лиц с нулевой суммой путем добавления “фиктивного игрока”.

5. **По количеству ходов:** одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры бывают позиционными, стохастическими, дифференциальными и др.

6. **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией.

Если каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее примененные другими игроками на предыдущих ходах стратегии, такая игра определяется как игра с полной информацией.

Если игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны, то игра классифицируется как игра с неполной информацией.

Мы далее убедимся, что игра с полной информацией имеет решение. Решением будет седловая точка при чистых стратегиях.

Степень неполноты информации. По этому критерию игры подразделяются на статистические (в условиях частичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности (см. пункт 4.7)). Игры с природой часто относят к статистическим играм. В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статистического эксперимента, при котором вычисляется или оценивается распределение вероятностей состояний (стратегий) природы. С теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений.

7. **По виду выигрыша:** матричные, биматричные и непрерывные.

Матричная игра - конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В общем случае ее платежная матрица является прямоугольной (см. таблицу 4.1.1). Номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1. Номер столбца соответствует номеру стратегии игрока 2. Выигрыш игрока 1 является элементом матрицы. Выигрыш игрока 2 равен проигрышу игрока 1. Матричные игры всегда имеют решения в смешанных стратегиях. Они могут быть решены методами линейного программирования.

Биматричная игра - конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей, в которой строка соответствует стратегии игрока 1, а столбец — стратегии игрока 2. Однако элемент первой матрицы показывает выигрыш игрока 1, а элемент второй матрицы - выигрыш игрока 2. Для биматричных игр так же, как и для матричных, разработана теория оптимального поведения игроков.

Если функция выигрышей каждого игрока в зависимости от стратегий является непрерывной, игра считается непрерывной.

4.2 Нижняя и верхняя цена игры. Чистые стратегии. Седловая точка

Рассмотрим матричную игру, представленную матрицей выигрышей $m \times n$, где число строк $i = 1,...,m$, а число столбцов $j = 1,...,n$ (см. табл. 4.1.1).

Применим принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Игрок 1 стремится принять такую стратегию, которая должна обеспечить максимальный проигрыш игрока 2. Соответственно игрок 2 стремится принять стратегию, обеспечивающую минимальный выигрыш игрока 1. Рассмотрим оба этих подхода.

Подход игрока 1. Он должен получить максимальный гарантированный результат при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой стратегии он должен выбрать гарантированный результат в наихудших условиях, т.е. наименьшее значение своего выигрыша, которое обозначим

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{4.2.1}$$

Чтобы этот гарантированный эффект в наихудших условиях был максимальным, нужно из всех α_i, выбрать наибольшее значение. Обозначим его α и назовем **чистой нижней ценой игры** («**максимин**»):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \tag{4.2.2}$$

Таким образом, максиминной стратегии отвечает строка матрицы, которой соответствует элемент α_i. Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией гарантировал себе выигрыш, не меньший, чем α_i. Таково оптимальное поведение игрока 1.

Подход игрока 2. Своими оптимальными стратегиями он стремится уменьшить выигрыш игрока 1, поэтому при каждой j-й чистой стратегии он отыскивает величину своего максимального проигрыша

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \tag{4.2.3}$$

в каждом j-м столбце, т.е. определяет максимальный выигрыш игрока 1, если игрок 2 применит j-ю чистую стратегию. Из всех своих n j-х чистых стратегий он отыскивает такую, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т.е. определяет **чистую верхнюю цену игры** («**минимакс**»):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \tag{4.2.4}$$

Чистая верхняя цена игры показывает, какой максимальный выигрыш может гарантировать игрок 1, применяя свои чистые стратегии, - выигрыш, не меньший, чем α. Игрок 2 за счет указанного выше выбора своих чистых стратегий не допустит, чтобы игрок 1 мог получить выигрыш, больший, чем β.

Таким образом, минимаксная стратегия отображается столбцом платежной матрицы, в котором находится элемент β (см. табл. 4.1.1). Она является оптимальной чистой гарантирующей стратегией игрока 2, если он ничего не знает о действиях игрока 1.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**.

Чистая цена игры ν - цена данной игры, если нижняя и верхняя ее цены совпадают:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu \tag{4.2.5}$$

В этом случае игра называется **игрой с седловой точкой.**

Задача 4.2.1. Определить верхнюю и нижнюю цены при заданной матрице игры и указать максиминную и минимаксную стратегии. Представим матрицу игры с обозначениями стратегий β_j, α_i.

Таблица 4.2.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	2	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Решение. Определим нижнюю цену игры:
$\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Определим верхнюю цену игры:
$\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (см. строку β_j).

Таким образом, $\alpha = \beta = 4$, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu = 4.$$

Значит, $\nu = 4$ - чистая цена игры при стратегиях A_2 и B_1. Следовательно, имеем игру с седловой точкой.

Задача 4.2.2. Определим максиминную и минимаксную стратегии при заданной матрице эффективности.

Таблица 4.2.2

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	7	6	10	2
A_2	8	4	9	5	4
β_j	8	7	9	10	

Решение. Определим максиминную стратегию:
$\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Максиминная стратегиях - строка A_2.

Определим минимаксную стратегию:
$\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 9$; $\beta_4 = 10$; $\beta = 7$ (см. столбец β_j).

Максиминная стратегия – столбец B_2.

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, Седловой точки нет.

Если матрица игры содержит элемент, минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце, то он, как уже сказано выше, является седловой точкой. В этом случае мы имеем игру с седловой точкой.

Пусть в игре с седловой точкой один игрок придерживается седловой точки, тогда другой получит лучший результат, если также будет придерживаться этой точки. Лучшее поведение игрока не должно повлечь уменьшение его выигрыша. Зато худшее поведение может привести к этому.

В данном случае решением игры являются:
• чистая стратегия игрока 1;
• чистая стратегия игрока 2;
• седловой элемент.

Оптимальные чистые стратегии — это чистые стратегии, образующие седловую точку.

В игре без седловой точки, если игрок 1 информирован о стратегии, принятой игроком 2, он сможет принять оптимальную стратегию, которая не совпадает с максиминной.

Задача 4.2.3. Дана матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Допустим, игроку 1 стало известно, что игрок 2 принял минимаксную стратегию. Игрок 1 должен выбрать оптимальную стратегию при условии, что B_2 – стратегия игрока 2 ($\beta = 5$).

Решение. Определим максиминную стратегию игрока 1:
$\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$.

Стратегия игрока 1 - A_2 - максиминная.

Выберем оптимальную стратегию для игрока 1. Ею будет не максиминная A_2, дающая игроку 1 выигрыш $\alpha = 4$, а та стратегия, которая соответствует $\max\limits_i a_{ij}$. В этом случае его максимальный гарантированный выигрыш будет равен верхней цене игры $\beta = 5$, поэтому он выберет свою оптимальную стратегию A_1, зная, что игрок 2 выбрал свою стратегию B_2.

Таким образом, рассмотренная задача дает результат, отличный от результата при игре с седловой точкой.

Стратегия является **оптимальной**, если ее применение обеспечит игроку наибольший гарантированный выигрыш при любых возможных стратегиях другого игрока.

В задаче 4.2.3 показано, что бывают ситуации, когда игрок 1 может получить выигрыш, превосходящий максиминный, если ему известны намерения игрока 2.

При многократном повторении игры в сходных условиях можно добиться гарантированного среднего выигрыша, превосходящего для игрока 1 максиминный.

4.3 Смешанные стратегии

Если в матричной игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях, то находят верхнюю и нижнюю цены игры. Они показывают, что игрок 1 не получит выигрыша, превосходящего верхнюю цену игры, и что игроку 1 гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры. В примере 4.2.3 игрок 1 получил по своей оптимальной стратегии A_1, отличной от максиминной, выигрыш, равный верхней цене игры. Такова плата за информированность о стратегии игрока 2. Это крайний случай. Не улучшится ли результат игрока 1, если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, но игрок будет многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью?

В такой ситуации, оказывается, можно получать выигрыши, в среднем большие нижней цены игры, но меньшие верхней.

Смешанная стратегия игрока - это полный набор применения его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Подведем итоги сказанного и перечислим условия применения смешанных стратегий:

• игра без седловой точки;

• игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями;

• игра многократно повторяется в сходных условиях;

• при каждом из ходов ни один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

• допускается осреднение результатов игр.

Применяются следующие обозначения смешанных стратегий:

Для игрока 1 смешанная стратегия, заключающаяся в применении чистых стратегий A_1, A_2,..., A_m с соответствующими вероятностями p_1, p_2,..., p_m,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}, \qquad (4.3.1)$$

где $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0$.

Для игрока 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}, \qquad (4.3.2)$$

где $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1, q_j \geq 0$, q_j – вероятность применения чистой стратегии B_j.

В случае, когда $p_i = 1$, для игрока 1 имеем чистую стратегию:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ,\dots, & A_i & ,\dots, & A_m \\ 0 & 0 & ,\dots, & 1 & ,\dots, & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.3.3)$$

Чистые стратегии игрока являются единственно возможными несовместными событиями. В матричной игре, зная матрицу A (она относится и к игроку 1, и к игроку 2), можно определить при заданных векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$ средний выигрыш (математическое ожидание эффекта) игрока 1:

$$M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j, \qquad (4.3.4)$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - векторы; p_i и q_j - компоненты векторов.

Путем применения своих смешанных стратегий игрок 1 стремится максимально увеличить свой средний выигрыш, а игрок 2 - довести этот эффект до минимально возможного значения.

Игрок 1 стремится достигнуть

$$\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (4.3.5)$$

Игрок 2 добивается того, чтобы выполнялось условие

$$\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (4.3.6)$$

Обозначим $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков 1 и 2, т.е. такие векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$, при которых будет выполнено равенство

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0\right). \qquad (4.3.7)$$

Цена игры γ – средний выигрыш игрока 1 при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Следовательно, решением матричной игры являются:

1) $\vec{p}_0$ - оптимальная смешанная стратегия игрока 1;

2) $\vec{q}_0$- оптимальная смешанная стратегия игрока 2;

3) γ - цена игры.

Смешанные стратегии будут оптимальными ($\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$), если они образуют седловую точку для функции $M\left(A,\vec{p},\vec{q}\right)$, т.е.

$$M\left(A,\vec{p},\vec{q}_0\right)\le M\left(A,\vec{p}_0,\vec{q}_0\right)\le M\left(A,\vec{p}_0,\vec{q}\right). \tag{4.3.8}$$

Теорема 4.3.1. (основная теорема теории матричных игр). Для матричной игры с любой матрицей А величины $\alpha=\max\limits_{\vec{p}}\min\limits_{\vec{q}} M\left(A,\vec{p},\vec{q}\right)$ и $\beta=\min\limits_{\vec{q}}\max\limits_{\vec{p}} M\left(A,\vec{p},\vec{q}\right)$ существуют и равны между собой: $\alpha=\beta=\gamma$.

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Следует отметить, что при выборе оптимальных стратегий игроку 1 всегда будет гарантирован средний выигрыш, не меньший, чем цена игры, при любой фиксированной стратегии игрока 2 (и, наоборот, для игрока 2). Активными стратегиями игроков 1 и 2 называют стратегии, входящие в состав оптимальных смешанных стратегий соответствующих игроков с вероятностями, отличными от нуля. Значит, в состав оптимальных смешанных стратегий игроков могут входить не все априори заданные их стратегии.

Теорема 4.3.2. (об активных стратегиях). Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры γ, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Эта теорема имеет большое практическое значение — она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Решить игру - означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрение методов нахождения оптимальных смешанных стратегий для матричных игр начнем с простейшей игры, описываемой матрицей 2х2.

Игры с седловой точкой специально рассматриваться не будут. Если получена седловая точка, то это означает, что имеются невыгодные стратегии, от которых следует отказываться. При отсутствии седловой точки можно получить две оптимальные смешанные стратегии. Как уже отмечалось, эти смешанные стратегии записываются так:

$$S_1^0 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \tag{4.3.9}$$

$$S_2^0 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.10}$$

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях.

Если игрок 1 придерживается своей оптимальной стратегии S_1^0, то его средний выигрыш будет равен цене игры γ, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок 2. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) — случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока 1 (оптимальная стратегия) будет равен γ и для 1-й, и для 2-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. (4.3.11)

Средний выигрыш игрока 1, если он использует оптимальную смешанную стратегию S_1^0, а игрок 2 — чистую стратегию B_1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы A), равен цене игры γ: $a_{11}p_1^0 + a_{21}p_2^0 = \gamma$. Тот же средний выигрыш получает игрок 1, если 2-й игрок применяет стратегию B_2, т.е. $a_{12}p_1^0 + a_{22}p_2^0 = \gamma$.

Учитывая, что $p_1^0 + p_2^0 = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_1^0 и цены игры γ:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^0 + a_{21}p_2^0 = \gamma \\ a_{12}p_1^0 + a_{22}p_2^0 = \gamma \\ p_1^0 + p_2^0 = 1 \end{cases} \qquad (4.3.12)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию p_1^0 и p_2^0:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_2^0 &= \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}. \qquad (4.3.13)$$

Зная p_1^0 и p_2^0 находим γ:

$$\gamma = \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \qquad (5.3.14)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_2^0 оптимальной стратегии игрока 2, получаем, что при любой чистой стратегии игрока 1 (A_1 или A_2) средний проигрыш игрока 2 равен цене игры γ, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^o + a_{12}q_2^o = \gamma \\ a_{21}q_1^0 + a_{22}q_2^o = \gamma \\ q_1^0 + q_2^0 = 1 \end{cases}. \qquad (4.3.15)$$

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

$$\begin{aligned} q_1^0 &= \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ q_2^0 &= \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}. \qquad (4.3.16)$$

Задача решена, так как найдены векторы $\vec{q}_0\left(q_1^0, q_2^0\right)$, $\vec{p}_0\left(p_1^0, p_2^0\right)$ и цена игры γ.

Имея матрицу платежей A, можно решить задачу графически. При этом методе алгоритм решения весьма прост (рис. 4.3.1):

1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.
2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии A_1.
3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 откладываются выигрыши при стратегии A_2.
4. Концы отрезков обозначаются $a_{11}-b_{11}$, $a_{12}-b_{21}$, $a_{22}-b_{22}$, $a_{21}-b_{12}$ и проводятся две прямые линии $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$
5. Определяется ордината точки пересечения c. Она равна γ.

Данный метод имеет достаточно широкую область приложения. Это основано на **общем свойстве игр** $m \times n$, состоящем в том, что в любой игре $m \times n$ каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, в которой число чистых стратегий не больше, чем $\min(m,n)$. Из этого свойства можно получить известное **следствие**: в любой игре $2 \times n$ и $m \times 2$ каждая оптимальная стратегия S_1^0 и S_2^0 содержит не более двух активных стратегий.

Значит, любая игра $2 \times n$ и $m \times 2$ может быть сведена к игре 2×2. Следовательно, игры $2 \times n$ и $m \times 2$ можно решить графическим методом.

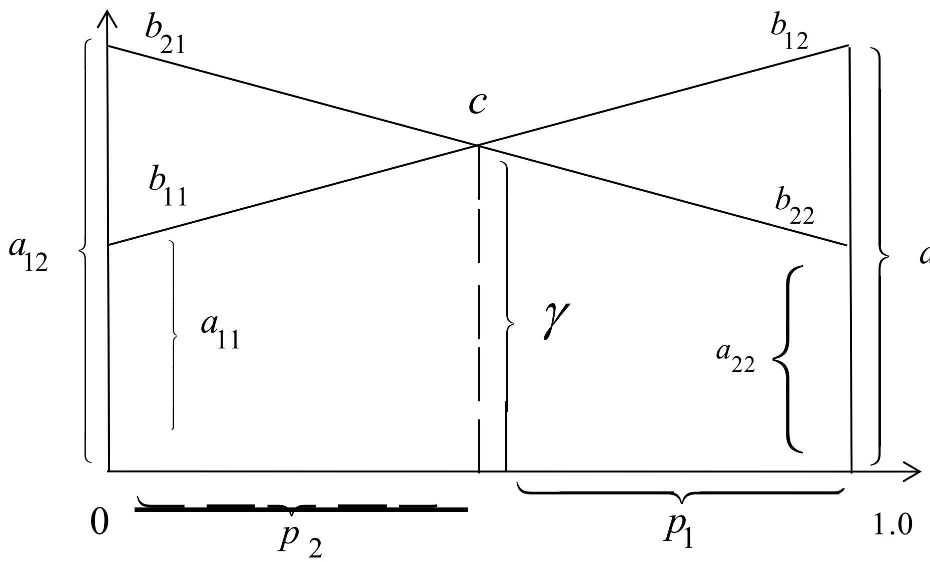


Рис. 4.3.1. Оптимальная смешанная стратегия

Рассмотрим некоторые практические задачи, в которых используются критерии игр для оценки наиболее эффективного поведения оперирующей стороны.

Задача 4.3.1. Выбрать оптимальный режим работы новой системы компьютеров, состоящей из компьютеров типов A_1 и A_2. Известны выигрыши от внедрения каждого типа компьютеров в зависимости от внешних условий, если сравнить со старой системой. При использовании компьютеров типов A_1 и A_2 в зависимости от характера решаемых задач B_1 и B_2 (долговременные и краткосрочные) будет разный эффект. Предполагается, что максимальный выигрыш соответствует наибольшему значению критерия эффекта от замены техники старого поколения на компьютеры типов A_1 и A_2.

Итак, дана матрица игры (таблица 4.3.1), где A_1, A_2 - стратегии руководителя; B_1, B_2 - стратегии, отражающие характер решаемых задач.

Таблица 4.3.1

Игрок 2 / Игрок 1	B_1	B_2	α_i
A_1	0.3	0.8	0.3
A_2	0.7	0.4	0.4
β_j	0.7	0.8	

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию руководителя и гарантированный средний результат, т.е. определить, какую долю времени должны использоваться компьютеры типов A_1 и A_2.

Решение. Запишем условия в принятых индексах:

$a_{11} = 0.3,\ a_{12} = 0.8,\ a_{21} = 0.7,\ a_{22} = 0.4.$

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

$\alpha_1 = 0.3;\ \alpha_2 = 0.4,\ \alpha = 0.4.$

$\beta_1 = 0.7;\ \beta_2 = 0.8,\ \beta = 0.7.$

Получаем игру без седловой точки, так как

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 0.4\,,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{21} = 0.7.$$

Максиминная стратегия руководителя компьютерного центра – A_2. Для этой стратегии гарантированный выигрыш равен = 0.4 (40 %) по сравнению со старой системой.

Решение для определения γ, p_1 и p_2 проведем графически (рис. 4.3.2).

Алгоритм решения

1. По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.
2. По оси ординат отложим выигрыши при стратегии A_1.
3. На вертикали в точке 1 отложим выигрыши при стратегии A_2.
4. Проводим прямую $b_{11}b_{12}$, соединяющую точки $a_{11}a_{21}$.
5. Проводим прямую $b_{21}b_{22}$, соединяющую точки $a_{12}b_{22}$.
6. Определяем ординату точки пересечения c линий $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$. Она равна γ.
7. Определим абсциссу точки пересечения c. Она равна p_2, а $p_1 = 1 - p_2$.

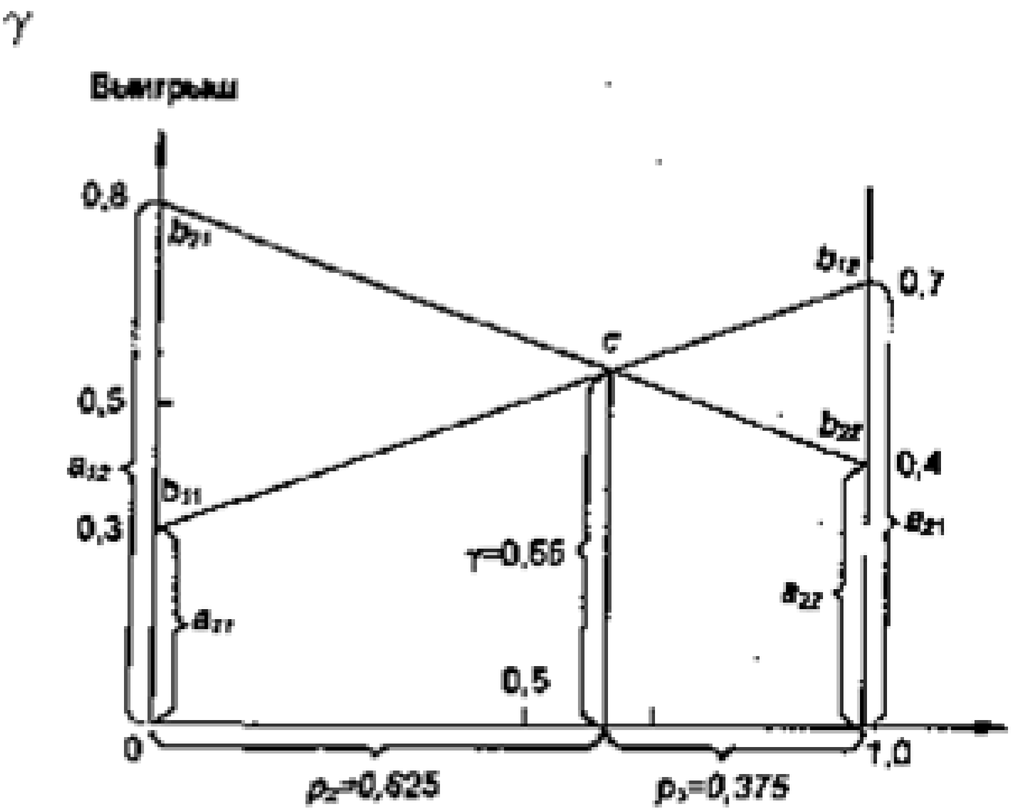


Рис. 4.3.2. Графическая интерпретация алгоритма решения

Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:

$$p_1 = 0.3751; p_2 = 0.625; \gamma = 0.55; \quad S^o = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Вывод. При установке компьютеров новой системы, если неизвестны условия решения задач заказчика, на работу компьютеров типа A_1 должно приходиться 37.5 % времени, а на работу компьютеров типа A_2 - 62.5 %. При этом выигрыш составит 55 % по сравнению с предыдущим поколением компьютеров.

4.4 Мажорирование стратегий по строкам и столбцам

Мажорирование представляет отношение между стратегиями, наличие которого во многих практических случаях дает возможность сократить размеры исходной платежной матрицы игры.

Рассмотрим это понятие на примере матрицы

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая с позиции игрока 2, можно обнаружить преимущество его третьей стратегии перед второй, поскольку при первой стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-3) (вторая стратегия) и 1 (третья стратегия), а при второй стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-2) (вторая стратегия) и (-0.5) (третья стратегия).

Таким образом, при любой стратегии игрока 1 игроку 2 выгоднее применять свою третью стратегию по сравнению со второй; при наличии третьей стратегии игрок 2, если он стремится играть оптимально, никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее можно исключить из игры, т.е. в исходной платежной матрице можно вычеркнуть 2-й столбец:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, так как по первой стратегии он только проигрывает. Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрицу игры преобразовать к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку, выбирая вторую стратегию, игрок 2 оказывается в проигрыше (0.5 - выигрыш игрока 1), и матрица игры принимает простейший вид: (0), т.е. имеется седловая точка.

Мажорирование можно распространить и на смешанные стратегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк, то эту стратегию можно исключить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для первых двух чистых стратегий игрока 1 возьмем частоты их применения (вероятности) равными 0.25 и 0.75.

Третья стратегия игрока 1 мажорируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с частотами 0.25 и 0,75 соответственно, т.е. смешанной стратегией

$$24 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 6 > 4;$$

$$0 \cdot 0.25 + 8 \cdot 0.75 = 6 > 5.$$

Поэтому третью стратегию игрока 1 можно исключить, используя вместо нее указанную выше смешанную стратегию.

Аналогично, если каждый элемент некоторого столбца больше или равен некоторой выпуклой линейной комбинации соответствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить из рассмотрения (вычеркнуть из матрицы).

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ третья стратегия игрока 2 мажорируется смешанной стратегией из первой и второй его чистых стратегий, взятых с частотами 0.5 и 0.5:

$$10 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 5 < 6;$$

$$0 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5 = 5 < 7.$$

Таким образом, исходная матрица игры эквивалентна матрице следующего вида: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Как видно, возможности мажорирования смешанными стратегиями в отличие от чистых значительно менее прозрачны (нужно должным образом подобрать частоты применения чистых стратегий), но такие возможности есть, и ими полезно уметь пользоваться.

Рассмотрим экономическую задачу, сводящуюся к игровой модели.

Задача 4.4.1. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия A_1), отправить на склад для хранения (стратегия A_2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия A_3) для длительного хранения. Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия B_1), в течение небольшого времени (B_2), после длительного периода времени (B_3). В случае стратегий A_2 и A_3, предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для A_1, однако при A_2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии B_2 или B_3. Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий A_1, A_2, A_3 руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 4.4.1.

Таблица 4.4.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Решение. Получаем игру с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид $P=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить.

Игра упростилась: $P=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

По формулам (4.3.13) и (4.3.14) находим: $p_2^0=\dfrac{8-10}{6+8-10-10}=\dfrac{1}{3}$, $p_3^0=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, $\gamma=\dfrac{6\cdot 1}{3}+\dfrac{10\cdot 2}{3}=\dfrac{26}{3}=8\dfrac{2}{3}$.

Вывод. Оптимальная стратегия производителя продукции $S_A^0=\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, т.е. стратегия A_1 не применяется, **1/3** продукции отправляется на склад (стратегия A_2), **2/3** продукции дополнительно обрабатывается (стратегия A_3), при этом цена игры $\gamma=8\dfrac{2}{3}$.

4.5 Приведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $p = \left(a_{ij}\right)$, $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$. Игрок A обладает стратегиями A_1, A_2,..., A_m, игрок B - стратегиями B_1, $B_2,\ldots,B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ и $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$, где p_i^0, q_j^0 — вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j, $p_1^0 + p_2^0 + ... + p_m^0 = 1$, $q_1^0 + q_2^0 + ... + q_n^0 = 1$.

Оптимальная стратегия S_A^0 удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока B. Без ограничения общности полагаем $v > 0$: этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \geq 0$. Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ против любой чистой стратегии B_j игрока B, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m$, $j = 1,...,n$ (т.е. элементы j-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий A_1, A_2,..., A_m и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S_A^0 все средние выигрыши не меньше цены игры v, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge v \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge v. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., x_m = \frac{p_m}{v}. \tag{4.5.2}$$

Тогда система (5.5.1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1. \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Цель игрока A — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v. Разделив на $v \ne 0$ равенство $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, получаем, что переменные x_i $(i = 1,...,m)$ удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}$.

Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины $\frac{1}{v}$.

Поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $x_i \ge 0$, $i = 1,...,m$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (4.5.3) и при этом линейная функция

$$Z = x_1 + x_2 + ... + x_m \tag{4.5.4}$$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования. Решая задачу (4.5.3)—(4.5.4), получаем оптимальное решение $\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ и оптимальную стратегию S_A^0.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max \frac{1}{x}$. Переменные $q_1, q_2, ..., q_n$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \le v \\ .... \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \le v, \end{cases} \tag{4.5.5}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок A.

Если обозначить

$$y_1 = \frac{q_1}{v}, y_2 = \frac{q_2}{v}, ..., y_n = \frac{q_n}{v}, \tag{4.5.6}$$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1 \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Переменные y_j $(j = 1, ..., n)$ удовлетворяют условию $y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}$

.

Игра свелась к следующей задаче: определить значения переменных $y_j \ge 0$, $j = 1, ..., n$, которые удовлетворяют системе неравенств (4.5.7) и максимизируют линейную функцию

$$Z' = y_1 + y_2 + ... + y_n. \tag{4.5.8}$$

Решение задачи линейного программирования (4.5.6), (4.5.7) определяет оптимальную стратегию $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$.

При этом цена игры

$$v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z}. \tag{4.5.9}$$

Составив расширенные матрицы для задач (4.5.3), (4.5.4) и (5.5.7), (4.5.8), убеждаемся, что одна матрица получилась из другой транспонированием:

$$\begin{array}{c} \geq \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \min Z \end{array}\right) \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \leq \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \max Z' \end{array}\right) \end{array}$$

Таким образом, задачи линейного программирования (4.5.3), (4.5.4) и (4.5.7), (4.5.8) являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности. Приведем пример задачи, которая описывается игровыми моделями $m \times n$ и может быть решена методами линейного программирования.

Задача 4.5.1. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2 и A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица (см. табл. 4.5.1), ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-и продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия A против спроса B задана платежной матрицей (см. табл. 4.5.1).

Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие.

Таблица 4.5.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 4.5.1)) является явно невыгодной для игрока B по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока B — уменьшить выигрыш игрока A. Поэтому второй столбец можно отбросить.

Получим матрицу размера **3×3**: $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Таблица 4.5.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
β_j	9	6	8	6 \ 4

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в таблице 4.5.2. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, p_3^0 \right)$ и $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, q_3^0 \right)$.

Обозначив $x_i = \dfrac{p_i}{v}$, $i = 1,2,3$ и $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $j = 1,2,3$ составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования (см. (5.5.2)-(5.5.3) и (5.5.6)-(5.5.7)).

1. $\begin{cases} 3x_1+9x_2+7x_3\ge 1 \\ 6x_1+4x_2+5x_3\ge 1 \\ 8x_1+2x_2+4x_3\ge 1 \end{cases}$
$x_1\ge 0,\, x_2\ge 0,\, x_3\ge 0$

$Z=x_1+x_2+x_3\to\min$

2. $\begin{cases} 3y_1+6y_2+8y_3\le 1 \\ 9y_1+4y_2+2y_3\le 1 \\ 7y_1+5y_2+4y_3\le 1 \end{cases}$
$y_1\ge 0,\, y_2\ge 0,\, y_3\ge 0$

$Z'=y_1+y_2+y_3\to\max$

Решаем 2 задачу симплексным методом, поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и перейдем к уравнениям:

$$\begin{cases} 3y_1+6y_2+8y_3+y_4=1 \\ 9y_1+4y_2+2y_3+y_5=1 \\ 7y_1+5y_2+4y_3+y_6=1. \end{cases}$$
$$y_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,6$$

I шаг. Основные переменные — y_4, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_2, y_3.

$$\begin{cases} \boxed{y_4=1-3y_1-6y_2-8y_3} \\ y_5=1-9y_1-4y_2-2y_3 \\ y_6=1-7y_1-5y_2-4y_3 \end{cases}$$
$$Z'=y_1+y_2+y_3.$$

Базисное решение $Y_1=(0;0;0;1;1;1)$ допустимое; переводим y_2 в основные; переводим y_4 в неосновные переменные.

II шаг. Основные переменные — y_2, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4.

Получим после преобразований: $\begin{cases} y_2 = \frac{1}{6} - \frac{3}{6}y_1 - \frac{8}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4 \\ y_5 = \frac{1}{3} - 7y_1 + \frac{10}{3}y_3 + \frac{2}{3}y_4 \\ \boxed{y_6 = \frac{1}{6} - \frac{27}{6}y_1 - \frac{16}{6}y_3 + \frac{5}{6}y_4} \end{cases}$

$$Z' = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4.$$

Базисное решение: $Y_2 = \left(0; \frac{1}{6}; 0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$. Переводим y_4 в основные; $y_1 = \min\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{21}; \frac{1}{27}\right\} = \frac{1}{27}$. Переводим y_6 в неосновные переменные.

III шаг. Основные переменные — y_1, y_2, y_5; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4, y_6.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{27} - \frac{16}{27}y_3 + \frac{5}{27}y_4 - \frac{6}{27}y_6 \\ y_2 = \frac{4}{27} - \frac{28}{27}y_3 - \frac{7}{27}y_4 + \frac{1}{9}y_6 \\ y_5 = \frac{2}{27} + \frac{202}{27}y_3 - \frac{17}{27}y_4 + \frac{14}{9}y_6 \end{cases}$$

$$Z' = \frac{5}{27} - \frac{17}{27}y_3 - \frac{2}{27}y_4 - \frac{1}{9}y_6.$$

Базисное решение: $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$.

Так как отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то критерий оптимальности выполнен, $\max Z' = \frac{5}{27}$ и базисное решение $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$ является оптимальным.

Установим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач и определим оптимальное базисное решение задачи с помощью теорем двойственности:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{27} \end{array}.$$

Оптимальное базисное решение: $\left(\frac{2}{27}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, 0, \frac{17}{27}\right)$, причем $\min Z = \max Z' = \frac{5}{27}$. Из соотношений (5.5.9) находим цену игры $v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z} = \frac{27}{5} = 5.4$. Оптимальную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, p_3^0\right)$ находим, используя (5.5.2): $p_i^0 = x_i \cdot v, \quad i = 1, 2, 3,$ т.е. $p_1^0 = 5.4 \cdot \frac{2}{27} = 0.4$, $p_2^0 = 5.4 \cdot 0 = 0$, $p_3^0 = 5.4 \cdot \frac{1}{9} = 0,6$, $S_A^0 = \left(0.4; 0; 0.6\right)$.

Следовательно, предприятие должно выпустить **40%** продукции A_1 и **60%** продукции A_3, а продукцию A_2 не выпускать. Оптимальная стратегия спроса S_B^0 определяется аналогично: $q_j^* = y_j \cdot v, \quad j = 1, 2, 3,$ т.е. $S_A^0 = \left(0.2; 0; 0.8; 0\right)$ (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный). Таким образом, оптимальный спрос в **20%** находится в состоянии B_1 и в **80%** — в состоянии B_3.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока A (игрока B) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера 2×2, $2 \times n$, $n \times 2$ возможно геометрическое решение.

4.6 Биматричные игры. Основные понятия и ситуация равновесия

В матричной игре интересы двух игроков были прямо противоположны, то есть речь шла об антагонистической игре. Однако гораздо чаще случаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но не обязательно являются противоположными.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:
игрок A – может выбрать любую из стратегий A_1, A_2,..., A_m,
игрок B – любую из стратегий B_1, B_2,…, B_n.

При этом в ситуации $\left(A_i, B_j\right)$ выигрыш первого игрока будет равен a_{ij}, а выигрыш второго b_{ij}. Причем, вообще говоря $b_{ij} \neq a_{ij}$.

Тогда получаем две платежные матрицы размерности $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.6.1)$$

Здесь A - платежная матрица первого игрока, B - платежная матрица второго игрока. В этом случае говорят, что речь идет о биматричной игре двух игроков с платежными матрицами (5.6.1).

Отметим, что при $b_{ij} = -a_{ij}$ получаем обычную матричную игру.

В общем случае биматричная игра – это **игра с ненулевой суммой**.

Класс биматричных игр значительно шире класса матричных (разнообразие новых моделируемых конфликтных ситуаций весьма заметно), а, значит, неизбежно увеличиваются и трудности, встающие на пути их успешного разрешения.

Рассмотрим один пример биматричной игры.

Задача 4.6.1. (Студент — Преподаватель). Студент (игрок A) готовится к зачету, который принимает Преподаватель (игрок B). Можно считать, что у Студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (-). У Преподавателя также две стратегии – поставить зачет [+] и не поставить зачета [-]. В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента	Сдал зачет [+]	Не сдал зачет [-]
Готовился к зачету (+)	оценка заслужена	очень обидно
Не готовился к зачету (-)	удалось обмануть	оценка заслужена

Выигрыш преподавателя	Поставил зачет [+]	Не поставил зачет [-]
Готовился к зачету (+)	все нормально	был не прав
Не готовился к зачету (-)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, так

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В приведенной задаче описана ситуация, в которой интересы игроков не совпадают. Встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась.

Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на это вопрос так: **вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.**

Не пытаясь сразу выражать эту мысль совсем точно, скажем – попробуем найти некую **равновесную ситуацию**, явное отклонение от которой одного из игроков уменьшало бы его выигрыш.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр. Напомним, что возникающее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая, существует не всегда – конечно, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков A и B, т.е. стратегиями A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,…, B_n.

Однако при расширении матричной игры путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (чистые) стратегии с определенными частотами:

игрок A – стратегии A_1, A_2,..., A_m с частотами $p_1, p_2, ...p_m$, где

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, ...p_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

а игрок B – стратегии B_1, B_2,…, B_n с частотами $q_1, q_2, ...q_n$, где

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, ...q_n \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Выяснилось, что в смешанных стратегиях равновесная ситуация всегда существует.

Иными словами, **любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.**

Поэтому, рассматривая биматричные игры, перейдем к смешанным стратегиям игроков (этим мы предполагаем, что каждая игра может быть многократно повторена в неизменных обстоятельствах) и определим средние выигрыши игроков математическим ожиданием:

$$H_A(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j\ ,\ H_B(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_iq_j\ . \tag{4.6.2}$$

Определение 4.6.1. Будем говорить, что пара векторов $p^0=\left(p_1^0,p_2^0,...,p_m^0\right)$ и $q^0=\left(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0\right)$ определяют **равновесную ситуацию (равновесие по Нэшу)**, если при любых p и q, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{m}p_i=1,\ \sum_{j=1}^{n}q_j=1,\ 0\le p_i\le 1,\ 0\le q_j\le 1$, справедливы неравенства:

$$H_A\left(p,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right),\ H_B\left(p^0,q\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right). \tag{4.6.3}$$

Неравенства (4.6.3) означают, что если игрок отклонится от равновесной ситуации $\left(p^0,q^0\right)$, то его выигрыш может только уменьшится.

Тем самым, получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

На вопрос о существовании ситуации равновесия отвечает следующая теорема.

Теорема 4.6.1. (Дж. Нэш). Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Если некоторая пара чисел $\left(p^0,q^0\right)$ претендует на то, чтобы определять ситуацию равновесия, то для того, чтобы убедиться в обоснованности этих претензий, или, наоборот, доказать их необоснованность, необходимо проверить справедливость неравенств (4.6.3) для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации нужно искать где-то в ином месте.

Рассмотрим биматричную игру 2×2: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ с вероятностями $p_1=p$, $p_2=1-p$, $q_1=q$, $q_2=1-q$.

Вычислим средние выигрыши игроков

$$H_A(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+a_{22}(1-p)(1-q), \qquad (4.6.4)$$

$$H_B(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+b_{22}(1-p)(1-q). \qquad (4.6.4')$$

Для таких игр оказывается справедливой следующая теорема, позволяющая находить смешанные стратегии.

Теорема 4.6.2. Выполнение неравенств (4.6.3):

$$H_A(p,q^0)\le H_A(p^0,q^0),\ H_B(p^0,q)\le H_B(p^0,q^0),$$

равносильно выполнению следующих неравенств:

$$\begin{cases} H_A(0,q^0)\le H_A(p^0,q^0) \\ H_A(1,q^0)\le H_A(p^0,q^0) \\ H_B(p^0,0)\le H_B(p^0,q^0) \\ H_B(p^0,1)\le H_B(p^0,q^0) \end{cases}, \qquad (4.6.5)$$

Другими словами, чтобы убедиться в том, что пара (p^0,q^0) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств (4.6.3) не для всех $p\in[0,1]$ и $q\in[0,1]$, а только для двух чистых стратегий каждого игрока.

Перепишем формулу (4.6.4) в более удобном виде

$$H_A(p,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22}.$$

Положим здесь $p=0$ и $p=1$:

$$H_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{12}+(a_{21}-a_{22})q,$$

$$H_A(0,q)=(a_{21}-a_{22})q+a_{22}$$

и рассмотрим разности

$$H_A(p,q)-H_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p-$$
$$-(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{22}-a_{12},$$
$$H_A(p,q)-H_A(0,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p.$$

Полагая

$$\begin{cases} C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \\ \alpha=a_{22}-a_{12} \end{cases}, \tag{4.6.6}$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q)-H_A(1,q)=Cpq-\alpha p-Cq+\alpha=Cq(p-1)-\alpha(p-1)=$$
$$=(p-1)(Cq-\alpha),$$
$$H_A(p,q)-H_A(0,q)=Cpq-\alpha p=p(Cq-\alpha).$$

Так как в точке равновесия эти разности должны быть неотрицательными, то приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha)\ge 0 \\ p(Cq-\alpha)\ge 0. \end{cases}$$

Для $H_B(p,q)$, при обозначениях:

$$\begin{cases} D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22} \\ \beta=b_{22}-b_{21} \end{cases}, \tag{4.6.7}$$

Получаем аналогичным образом: $\begin{cases} (q-1)(Dp-\beta)\ge 0 \\ q(Dp-\beta)\ge 0. \end{cases}$

Таким образом, для того, чтобы пара (p,q) определяла равновесную ситуацию в биматричной игре 2×2 необходимо и достаточно выполнение следующей системы:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha)\ge 0 \\ p(Cq-\alpha)\ge 0 \\ (q-1)(Dp-\beta)\ge 0 \\ q(Dp-\beta)\ge 0 \\ p\in[0,1],\quad q\in[0,1] \end{cases}, \tag{4.6.8}$$

где C, D, α, β вычисляются по формулам (4.6.6)-(4.6.7).

Задача 4.6.2. Решить биматричную игру из задачи 4.6.1.

Решение. Вычислим параметры, входящие в систему (4.6.8):

$C=2-(-1)-1+0=2, \alpha=0+1=1,$

$D=1-(-3)-(-2)-1=5, \beta=-1-(-2)=1.$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(2q-1)\ge 0 \\ p(2q-1)\ge 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (q-1)(5p-1)\ge 0 \\ q(5p-1)\ge 0 \end{cases}.$$

Решим первую из систем:

1) $p=1,\ 2q-1\ge 0,\ q\ge\frac{1}{2};$

2) $p=0,\ 2q-1\le 0,\ q\le\frac{1}{2};$

3) $0<p<1,\ q=\frac{1}{2}.$

Решим вторую систему:

1) $q=1,\ 5p-1\ge 0,\ p\ge\frac{1}{5};$

2) $q=0,\ 5p-1\le 0,\ p\le\frac{1}{5};$

3) $0<q<1,\ 5p-1=0,\ p=\frac{1}{5}.$

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага»:

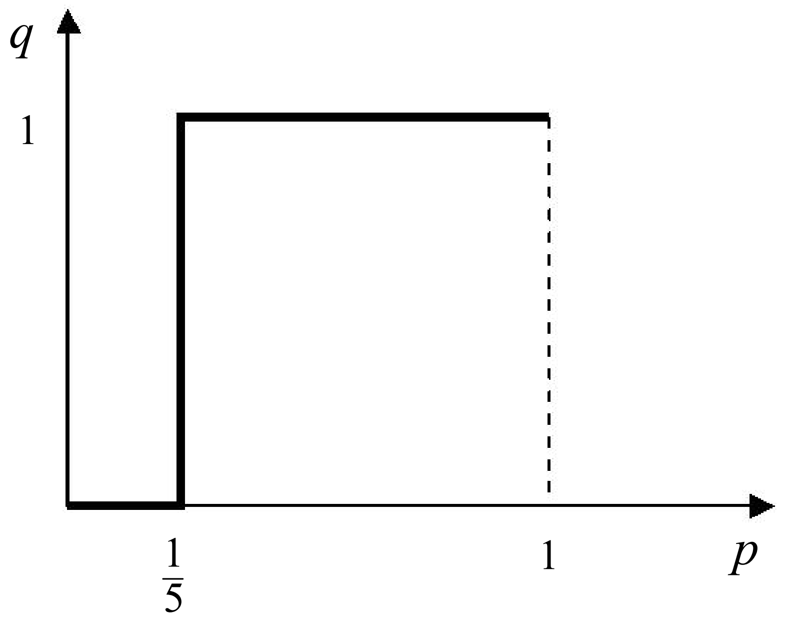


Рис. 4.6.1

Объединим эти рисунки.

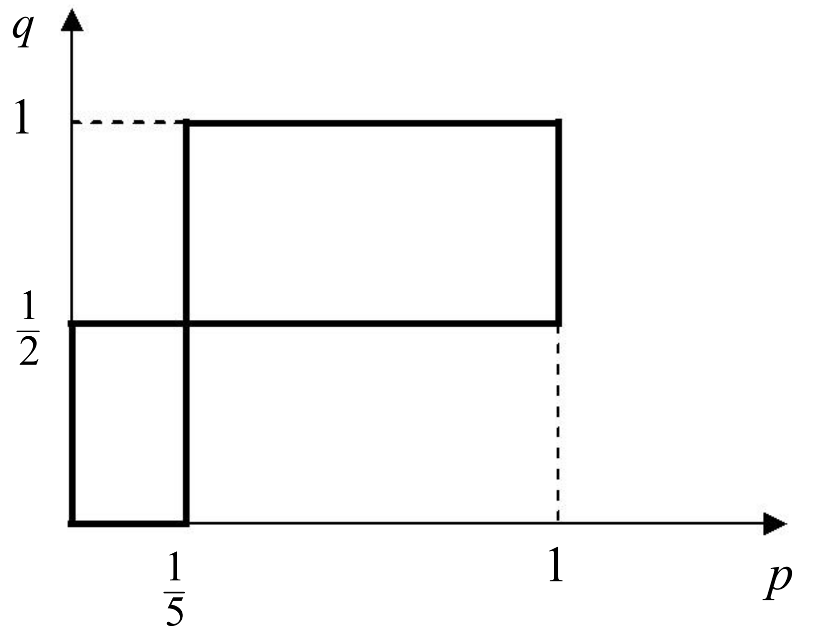


Рис. 4.6.2

Видим, что игра имеет три равновесные ситуации с соответствующими выигрышами:

1) $p=1,\ q=1,\ H_A\left(1,1\right)=2,\ H_B\left(1,1\right)=1;$

2) $p=0$, $q=0$, $H_A\left(0{,}0\right)=0$, $H_B\left(0{,}1\right)=-1$;

3) $p=\frac{1}{5}$, $q=\frac{1}{2}$, $H_A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $H_B\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{5}$.

Вывод. Из этих трех смешанных стратегий лучшей является первая с $p=q=1$, то есть хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет.

В этой задаче реализуется весьма редкая для биматричных игр ситуация. Функции выигрышей игроков достигают максимума одновременно.

Задача 4.6.3. (Борьба за рынки). Небольшая фирма A намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, монополизируемых другой, более крупной фирмой B. Для этого фирма A готова предпринять по одному из рынков соответствующие приготовления, например, развернуть рекламную кампанию. Фирма B может воспрепятствовать этому, предприняв по одному из рынков предупредительные меры. Если фирма A встречает противодействие, то терпит поражение, в противном случае – захватывает рынок. Будем считать, что проникновение фирмы A на первый рынок более выгодно для нее, чем на второй, но и поражение на первом рынке принесет фирме A большие потери, чем на втором рынке. Таким образом, фирмы имеют по две стратегии: A_1 и B_1 - выбор первого рынка; A_2 и B_2 - выбор второго рынка. Составьте и решите биматричную игру.

Решение. Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц видно, что если обе фирмы выберут один рынок, то выигрывает фирма B, если разные – то фирма A.

Найдем равновесные ситуации, вычислив параметры системы (4.6.8):
$C=-10-2-1-1=-14, \alpha=-1-2=-3$, $D=5+2+1+1=9, \beta=1+1=2$.

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)\ge 0\\ p(-14q+3)\ge 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(9p-2)\ge 0\\ q(9p-2)\ge 0\end{cases}.$$

Решим первую систему:

1) $p=1$, $-14q+3\ge 0$, $q\le\frac{3}{14}$;

2) $p=0$, $-14q+3\le 0$, $q\ge\frac{3}{14}$;

3) $0<p<1$, $-14q+3=0$, $q=\frac{3}{14}$.

Решим вторую систему:

1) $q=1$, $9p-2\ge 0$, $p\ge\frac{2}{9}$;

2) $q=0$, $9p-2\le 0$, $p\le\frac{2}{9}$;

3) $0<q<1$, $9p-2=0$, $p=\frac{2}{9}$.

Изобразим эти решения на рисунке:

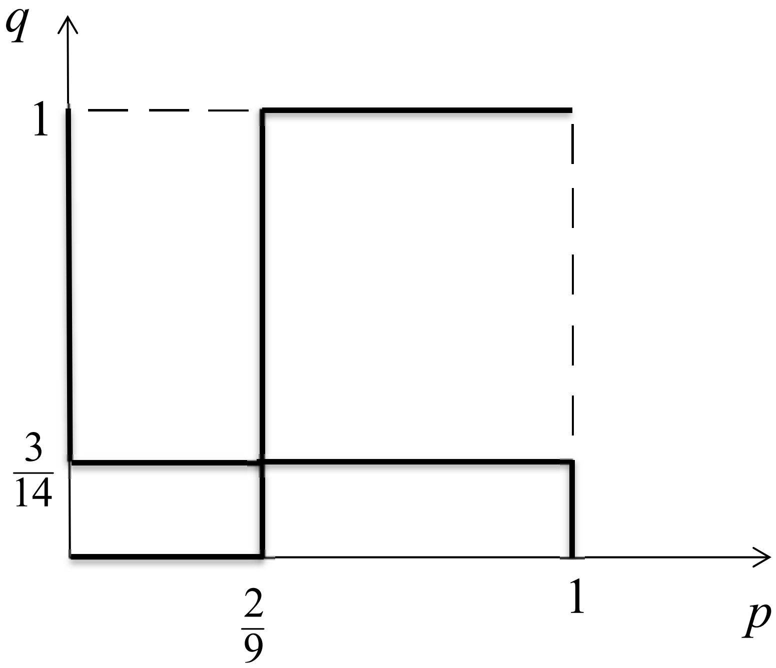


Рис. 4.6.4

Видно, что получилась одна точка равновесия $p=\frac{2}{9}$, $q=\frac{3}{14}$. Это дает нам следующие оптимальные смешанные стратегии игроков: $p^0=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)$, $q^0=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right)$, которым соответствуют оптимальные (средние) выигрыши $H_A\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^0q_j^0=-\frac{4}{7}$, $H_B\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_i^0q_j^0=\frac{1}{3}$.

Вывод. Таким образом, если игра может быть повторена многократно в схожих условиях, то фирма A в 22.22% случаев должна осуществлять попытки проникновения на первый рынок, а в 77.78% - на второй рынок. При этом (в среднем) она не проиграет больше, чем $\frac{4}{7}$ у.е. Фирме B рекомендуется в 21.43% случаев оказывать противодействие на первом рынке, а в 78.57% - на втором. В этом случае ее средний выигрыш составит не менее $\frac{1}{3}$ у.е.

Отметим, что в этой задаче получилась одна равновесная точка, и $v_A \neq v_B$. В других биматричных играх можно получить несколько равновесных ситуаций, как, например, в примере «Студент - Преподаватель». В этом случае встает проблема выбора оптимальной в некотором смысле ситуации из нескольких равновесных. Эту задачу можно попытаться решить, исходя из содержательного смысла игры.

Из рассмотренных примеров видно, что точка равновесия определяется парой

$$p=\frac{\beta}{D},\ q=\frac{\alpha}{C}. \qquad (4.6.9)$$

А это означает, что в равновесной ситуации выбор одного игрока полностью определяется платежной матрицей другого игрока и не зависит от собственной платежной матрицы. Иначе говоря, равновесная ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

Проиллюстрируем это, пользуясь условием примера 4.6.3. Для этого разобьем биматричную игру на две матричные игры с матрицами

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и решим их:

$$v_A=-\frac{4}{7},\ p^0=\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right),\ q^0=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right),$$

$$v_B=\frac{1}{3},\ p^0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ q^0=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right).$$

То есть, если каждый игрок будет применять свои стратегии в биматричной игре, исходя только из собственной матрицы выигрышей, то он найдет свой оптимальный выигрыш и оптимальную стратегию другого игрока.

Таким образом, в биматричной игре вновь встречаемся с антагонизмом. А что же будет, если игроки попробуют договориться? Возможен ли больший выигрыш в этой ситуации? Оказывается, в биматричной игре кооперации может улучшить положение обоих игроков. Рассмотрим эту ситуацию на следующем примере.

Задача 4.6.4. Имеются два продавца, продающие определенный товар на рынке. Оба из них знают, что чем выше цена, тем меньше общий объем продаж. Для простоты предположим, что каждый из них может продать либо 400 единиц некоторого товара, либо 100 единиц. Известно, что при продаже 800 единиц на рынке складывается цена равная 100 фунтам, при 500 единицах - 200 фунтов, а при объеме продаж 200 единиц - 500 фунтов.

Решение. Матрицы выигрышей продавцов следующие:

Выигрыш 1 продавца.		Стратегии 2 продавца	
		400 ед.	100 ед.
	400 ед.	40000 фунтов	80000 фунтов

Стратегии 1 продавца	100 ед.	20000 фунтов	50000 фунтов

Выигрыш 2 продавца.		Стратегии 1 продавца	
		400 ед.	100 ед.
Стратегии 2 продавца	400 ед.	40000 фунтов	20000 фунтов
	100 ед.	80000 фунтов	50000 фунтов

Если бы игроки имели возможность и желание согласовывать свои действия, то они решили бы продать по 100 единиц и получить прибыль по 50000 единиц каждый.

Предположим теперь, что по каким-либо причинам они принимают решения независимо друг от друга.

Каковы оптимальные стратегии для игроков в этом случае?

Пара стратегий (400,100) не является ситуацией равновесия, так как в этом случае второму игроку выгодно изменить свою стратегию на 400 и тем самым увеличить свой выигрыш с 20000 до 40000.

Если рассмотреть пару стратегий (100,100), то она также не является ситуацией равновесия, поскольку каждому отдельному игроку выгодно поменять свою стратегию на 100 и получить вместо 50000 выигрыш в 80000.

Если же мы рассмотрим пару стратегий (400,400), то, как легко заметить, отклонение каждого отдельного игрока является для него невыгодным. Такую ситуацию называют ситуацией равновесия (**равновесия по Нэшу**) или некооперативного равновесия.

Напротив, когда возможность достигать определенные договоренности между игроками существует, игроки стараются найти такую пару стратегий, для которой не существует другой пары, одновременно улучшающей выигрыши обоих игроков. Такая пара стратегий называется ситуацией кооперативного ***(оптимальность по Парето)*** равновесия. Таковой является пара стратегий (100,100).

Таким образом, очевиден выигрыш от кооперации. Работать – меньше, а прибыль – больше.

Подчеркнем различие ситуации равновесия по Нэшу от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Итак, в биматричных играх существует несколько критериев оптимальности. Важнейшими из них являются ситуация равновесия по Нэшу и критерий оптимальности по Парето.

Отметим, что в биматричных играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия).

Наконец, еще одно, не менее интересное обстоятельство. Достаточно сложной является и проблема перехода от качественных оценок ситуации к количественным оценкам. То есть, если, например, в примере «Студент-Преподаватель» принять другие количественные оценки выигрышей, то можно получить и другие ситуации равновесия. Однако если эти изменения будут не слишком значительными – элементы платежной матрицы "пошевельнутся" слегка – то слегка "пошевельнутся" и зигзаги, не изменяя ни своей общей формы, ни взаимного расположения, а значит, число равновесных ситуаций не изменится. Впрочем, сказанное относится лишь к случаю, когда множество ситуаций равновесия конечно и состоит из нечетного числа точек (одной или трех). Как принято говорить в подобных случаях, это число «устойчиво относительно малых шевелений».

Конечно, в некоторых биматричных играх равновесные ситуации случаются и в чистых стратегиях. Но, как показывают разобранные примеры, во-первых, чистой ситуации равновесия может вовсе не быть, и, во-вторых, даже при ее наличии не исключено существование равновесных ситуаций в смешанных стратегиях. И, чтобы найти их все, неизбежно приходится обращаться к описанному выше подходу.

4.7 Игра двух лиц, в которой одним из игроков является "природа"

Ситуации, описываемые рассмотренными выше моделями в виде игр, на практике могут не в полной мере оказаться адекватными действительности, поскольку реализация модели предполагает многократность повторения действий (решений), предпринимаемых в похожих условиях. В реальности количество принимаемых решений в неизменных условиях жестко ограничено. Нередко ситуация является уникальной, и решение в условиях неопределенности должно приниматься однократно. Это порождает необходимость развития методов моделирования принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Традиционно следующим этапом такого развития являются игры с природой. Формально изучение игр с природой должно начинаться с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения.

Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

Мажорирование стратегий (см. пункт 4.4) в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех $j = 1,...,n$ $a_{kj} \le a_{lj}$, $k, l = 1,...,m$, то k-ю стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из матрицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычеркивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопустимо, поскольку природа не стремится к выигрышу в «игре» с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она действует неосознанно[1].

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя ЛПР никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место **ситуация риска** или **ситуация неопределенности**.

Собственно разница между риском и неопределённостью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определённых событий. **Риск** присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях, о подобных изучаемой ситуациях и т.п.). **Неопределённость** существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т.к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

[1] Впрочем, в матричных представлениях игр с природой значения выигрышей принимающего решения игрока не всегда располагаются по строкам. Это допустимо делать и по столбцам, принимая ЛПР как игрока 2, понимая, однако, что мажорировать можно только стратегии принимающего решения игрока.

Задача выбора решения в условиях неопределённости сводится к следующему.

Пусть задан некоторый **вектор** $S=\left(S_1,S_2,...,S_n\right)$, описывающий n **состояний внешней среды**, и **вектор** $X=\left(X_1,X_2,...,X_m\right)$, описывающий m **допустимых решений**. Требуется найти такой вектор $X^*=\left(0,0,...,0,X_i,0,...,0\right)$, который бы обеспечивал **оптимум** некоторой **функции полезности** $W=\left(X,S\right)$ **по** некоторому **критерию** K.

Значение оптимума функции $W=\left(X,S\right)$ раскрывается, исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если себестоимость – минимизировать).

Информацию об указанной функции полезности (по сути *исходные данные задачи* такого типа) представляют **матрицей размерности** $m\times n$ с элементами $W_{ij}=F\left(X_i,S_j\right)$, где F - **решающее правило** (определяемое из постановки конкретной задачи).

Формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим).

При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\left\{W_{ij}\right\}$.

Критерий принятия решения в ситуации риска

Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W = \left(X, S, P\right)$ и определить вектор X^*, обеспечивающий

$$W = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} P_j \,. \qquad (4.7.1)$$

Критерии принятия решения в ситуации неопределённости.

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной». В таких случаях для определения наилучших решении используются следующие критерии: Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

1. Критерий Лапласа

По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют *равные вероятности*, находят *средний эффект для каждого из рассматриваемых вариантов решения* и выбирается тот из них, где средний эффект максимален:

$$W = \max_{i=1,\ldots,m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \qquad (4.7.2)$$

2. Критерий Вальда (критерий наибольшей осторожности/ пессимиста).

Для каждого из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается *самая худшая ситуация* (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} W_{ij} \qquad (4.7.3)$$

3. Критерий Гурвица

Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица *предлагает некоторый компромисс*:

$$W = \max_{i=1,\dots,m}\left[\alpha \max_{j=1,\dots,n} W_{ij} + (1-\alpha)\min_{j=1,\dots,n} W_{ij}\right], \qquad (4.7.4)$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как *коэффициент оптимизма*. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0.5$ мы расцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0.2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0.2), чем возможную неудачу.

4. Критерий Сэвиджа

Суть его - *нахождение минимального риска*. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица - *матрица сожалений*

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_i W_{ij}, \qquad (4.7.5)$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т.е. выгоду, упущенную в результате принятия i-го решения в j-м состоянии;

- по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1,\dots,m}\min_{j=1,\dots,n} D_{ij}. \qquad (4.7.6)$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения**. Вместе с тем *возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения* (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). ***Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.***

Задача 4.7.1. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты - 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет).

Итак: $X = \left\{X_i\right\} = \left\{2,3,4,5\right\}$ – количество яхт $(i = 1,2,3,4)$; $S = \left\{S_j\right\} = \left\{10,15,20,25\right\}$ – количество членов яхт-клуба $(j = 1,2,3,4)$.

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i- го решения при j -ом количестве членов яхт-клуба:

$$W_{ij} = 100 \cdot \min\left(5X_i; S_j\right) - 170X_i - 730,$$

т.е. решающее правило в нашей задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\left\{W_{ij}\right\}$ в таблице 4.7.1.:

Таблица 4.7.1

	$S_1=2$	$S_2=15$	$S_3=20$	$S_4=25$
$X_1=2$	-70	-70	-70	-70
$X_2=3$	-240	260	260	260
$X_3=4$	-410	90	590	590
$X_4=5$	-580	-80	420	920

Например, $W_{11}=100\cdot\min(5\cdot2;10)-170\cdot2-730=-70$

$$W_{12}=100\cdot\min(5\cdot2;15)-170\cdot2-730=-70$$

$W_{13}=W_{14}=-70$ (спрос на яхты останется неудовлетворенным).

Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска

Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: $P=(0.1;0.2;0.4;0.3)$. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$W_1=(-70\cdot)0.1+(-70)\cdot0.2+(-70)\cdot0.4+(-70)\cdot0.3=-70$;

$W_2=(-240)\cdot0.1+(260)\cdot0.2+(260)\cdot0.4+(260)\cdot0.3=210$;

$W_3=390$; $W_4=370$.

***Вывод*:** в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Принятие решения в ситуации неопределенности

1. Для применения ***критерия Лапласа*** находим:

$W_1 = ((-70)+(-70)+(-70)+(-70))/4 = -70$;

$W_2 = ((-240)+(260)+(260)+(260))/4 = 135$;

$W_3 = 215$; $W_4 = 170$.

***Вывод*:** в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

2. ***Критерий Вальда*** (выбор осторожной, пессимистической стратегии) - для каждой альтернативы (количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max\{-70; -240; -410; -580\} = -70$$

***Вывод*:** принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

3. ***Критерий Гурвица*** (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

Таблица 4.7.2

	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$
$X_1 = 2$	**-70**	-70	-70
$X_2 = 3$	-140	10	160
$X_3 = 4$	-210	90	390
$X_4 = 5$	-380	**170**	**620**

***Вывод*:** при $\alpha \geq 0{,}5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 170 д.е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при $\alpha = 0{,}2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

4. ***Критерий Сэвиджа*** (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D - для нашего примера, вычитанием (-70) из первого столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно.

Таблица 4.7.3

	$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$X_1 = 2$	0	-330	-660	**-990**
$X_2 = 3$	-170	0	-330	**-660**
$X_3 = 4$	**-340**	-170	0	-330
$X_4 = 5$	**-510**	-340	-170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$\max\{-990; -660; -340; -510\} = -340$

Вывод**:** покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акулич И.Л.* Математическое моделирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1986.

2. *Аллен Р.* Математическая экономика/ Р. Аллен. – М.: Ил, 1963.

3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984.

4. *Бигель Дж.* Управление производством / Дж. Бигель. – М.: Мир, 1973.

5. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Тома I-III / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972-1973 гг.

6. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 1997.

7. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей / Д. Гейл. – М.: Ил, 1963.

8. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. - М.: Наука, 1976.

9. *Данилов Н.Н.* Исследование операций и математическое программирование / Н.Н. Данилов. - Кемерово: КемГУ, 1995.

10. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики / Н.Н. Данилов. - М.: Высшая школа, 2006.

11. *Дюбин Г.Н.* Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. - М.: Наука, 1981.

12. *Замков О.О.* Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997.

13. *Иванилов Ю. П.* Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. – М.: Наука, 1979.

14. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.

15. Исследование операций. Том I, том II. / под. ред. Дж.Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981.

16. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ, 1997.

17. *Карасев А.И.* Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева. – М.: Экономика, 1987.
18. *Крушевский А.В.* Теория игр / А.В. Крушевский. - Киев: Вища школа, 1977.
19. *Кузнецов Ю.Н.* Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов и др.- М.: Высшая школа, 1986.
20. *Ланкастер К.* Математическая экономика / К. Ланкастер. – М.: Советское радио, 1972.
21. *Левин М.И.* Математические модели экономического взаимодействия / М.И. Левин, В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1993.
22. *Льюс Р.Д.* Игры и решения / Р.Д. Льюс, Х. Райфа - . М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
23. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. - М.: Физматгиз, 1960.
24. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу / Э. Маленво. – М.: Наука, 1985.
25. Математический аппарат экономического моделирования / Под. ред. Гольштейна Е. Г. – М.: Наука, 1983.
26. *Мулен Э.* Теория игр / Э. Мулен. - М.,1985.
27. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972.
28. *Оуэн Г.* Теория игр / Г. Оуэн. - М.: Мир,1971.
29. *Садовин Н.С.* Основы теории игр / Н.С. Садовин, Т.Н. Садовина. – Йошкар-Ола: ГОУВПО «Марийский государственный университет», 2011.
30. *Столерю А.* Равновесие и экономический рост / А. Столерю. – М.: Статистика, 1974.
31. *Экланд И.* Элементы математической экономики / И. Экланд. – М.: Мир, 1983.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ИННОВАЦИЯМИ

Кафедра была основана в 2007 г. Основная цель кафедры - подготовка грамотных специалистов в области таможенного дела и логистики, что, с одной стороны, отвечает потребностям времени. С 2006 г. кафедра ИСиУИ является платформой опорной организации Роспатента в Северо-Западном федеральном округе. Кафедра ведет учебную, научную, проектную и международную деятельность, которая координируется и экспертируется Экспертным Советом по интеллектуальной собственности Северо-Западного федерального округа. Учебная деятельность ведется по программам магистратуры, программам дополнительного профессионального образования и программам Летних школ. Научно-исследовательская деятельность кафедры ведется в рамках открытой в 2008 г. научной школы "Модернизация инновационной среды в целях эффективного развития российской экономики", основанной в 2008 г. профессором, д.э.н., Е.Л.Богдановой и Секции «Интеллектуальная собственность и инноватика» Дома Учёных им. М.Горького Российской Академии Наук, которая функционирует с 2011 г. С сентября 2011 г. кафедра ИСиУИ входит в проект Роспатента и ВОИС по созданию сети Центров поддержки технологий и инноваций – Technology and Innovation Support Centers, целью которых является упрощение доступа к техническим знаниям и повышение эффективности использования патентной информации в ряде стран, в региональных и областных центрах научно-технической информации. Работа кафедры по данному направлению представлена в справочнике Роспатента. В 2011 г. почетным знаком Роспатента "Во благо России" награждена заведующая кафедрой ИСиУИ Богданова Е.Л. В 2014 г. благодаря активному содействию кафедры Университет был награжден высшей наградой Всемирной организации интеллектуальной собственности для Инновационных Предприятий (WIPO Trophy for Innovative Enterprises) в качестве признания вклада Университета в развитие инновационного и технического творчества и содействия развития и охраны интеллектуальной собственности мира. В 2015 г. ведущие преподаватели кафедры награждены дипломами, серебряными и золотыми орденами Салона изобретений и инновационных технологий "Архимед 2015", а в 2016 г. – серебряными и золотыми орденами Салона изобретений и инновационных технологий "Архимед 2016", Почетный знак Салона "Гранд Архимед" вручен заведующей кафедрой ИСиУИ Богдановой Е.Л.

Богданова Елена Леонардовна
Соловейчик Кирилл Александрович
Аркина Ксения Георгиевна

Экономико-математическое моделирование в риск-менеджменте

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49