

**С.А. Колюбин**

**ДИНАМИКА  
РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ**



**Санкт-Петербург**

**2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**С.А. Колюбин**

**ДИНАМИКА  
РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ**

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлениям 15.04.06 "Мехатроника и робототехника"  
и 27.04.03 "Системный анализ и управление"  
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования магистратуры.

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Санкт-Петербург**

**2017**

Колюбин С.А., Динамика робототехнических систем. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 117 с.

#### **Рецензенты:**

- Шишлаков В.Ф., д.т.н., директор Института инновационных технологий в электромеханике и робототехнике, ФГАОУ ВО ГУАП;
- Шаветов С.В., к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных технологий промышленной робототехники Университета ИТМО.

Учебное пособие посвящено изучению вопросов моделирования динамики робототехнических систем. В емкой форме представлен необходимый для понимания динамики роботов материал, включая базовые понятия и определения, фундаментальные принципы и наиболее распространенные и эффективные методы моделирования, а также основанные на них конструктивные процедуры, расширения и специальные случаи. Отдельное внимание уделяется идентификации динамических моделей. Большинство разбираемых примеров относится к манипуляционным роботам, однако описанные методы естественным образом обобщаются и для мобильных. Пособие предназначено для студентов, обучающихся на факультете систем управления и робототехники по направлениям 15.04.06 Мехатроника и робототехника и 27.04.03 Системный анализ и управление.



**Университет ИТМО** — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2017  
© Колюбин С.А., 2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1 Базовые понятия и принципы</b>	<b>17</b>
1.1 Роботы как механические системы . . . . .	17
1.2 Понятия динамической модели и уравнения движения .	19
1.3 Задачи динамики . . . . .	21
1.4 Фундаментальные принципы механики . . . . .	22
1.5 Движение точечной массы . . . . .	26
1.6 Движение абсолютно твердого тела . . . . .	28
1.7 Формы задания и методы вывода уравнений движения .	31
1.7.1 Уравнения движения в конфигурационном про- странстве . . . . .	31
1.7.2 Уравнения движения в операционном пространстве	31
1.7.3 Уравнения движения в форме вход-состояние- выход . . . . .	34
1.7.4 Сравнение основных методов вывода уравнений движения . . . . .	34
<b>Глава 2 Метод Эйлера-Лагранжа</b>	<b>36</b>
2.1 Мотивационные примеры . . . . .	36
2.1.1 Уравнение движения точечной массы . . . . .	36
2.1.2 Принцип Д'Аламбера и уравнение Эйлера- Лагранжа . . . . .	37
2.2 Вывод уравнений движения на основе метода Эйлера- Лагранжа . . . . .	39
2.2.1 Вычисление энергии . . . . .	40

2.2.2	Связь с компонентами уравнения движения в форме (1.17) . . . . .	43
2.2.3	Пример вывода . . . . .	46
2.3	Специальные случаи . . . . .	49
2.3.1	Учет динамики двигателя и редуктора . . . . .	49
2.3.2	Замкнутые кинематические цепи . . . . .	52
2.3.3	Роботы с гибкими сочленениями . . . . .	56
<b>Глава 3</b>	<b>Метод Ньютона-Эйлера</b>	<b>59</b>
3.1	Основные положения . . . . .	59
3.2	Вывод уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера . . . . .	62
3.2.1	Прямая рекурсия . . . . .	63
3.2.2	Обратная рекурсия . . . . .	64
3.2.3	Организация вычислительной процедуры . . . . .	65
<b>Глава 4</b>	<b>Свойства уравнений движения</b>	<b>68</b>
4.1	Свойства матрицы инерции . . . . .	68
4.1.1	Матрицы инерции роботов элементарной кинематики . . . . .	69
4.2	Ограничения на компоненты . . . . .	71
4.3	Пассивность . . . . .	71
4.4	Линейность по параметрам . . . . .	74
<b>Глава 5</b>	<b>Идентификация динамических моделей</b>	<b>75</b>
5.1	Линейная параметризация уравнений движения . . . . .	76
5.2	Базовые параметры . . . . .	81
5.3	Идентификационная динамическая модель . . . . .	82
5.4	Оптимизация калибровочных траекторий . . . . .	83
5.5	Обработка экспериментальных данных . . . . .	87
5.5.1	Вычисление обобщенных скоростей и ускорений . . . . .	87
5.5.2	Фильтрация измерений обобщенных сил/моментов . . . . .	91
5.6	Оценивание динамических параметров . . . . .	92
5.6.1	Редуцирование модели . . . . .	93
5.7	Валидация полученной модели . . . . .	95
5.8	Экспериментальный пример . . . . .	96
	<b>Заключение</b>	<b>102</b>

<b>Приложение 1</b>	<b>104</b>
<b>Приложение 2</b>	<b>106</b>
<b>Приложение 3</b>	<b>109</b>

# Введение

## Где важна динамика?

Спектр приложений, в которых активно используются достижения робототехники, расширяется и включает в себя интеллектуальные транспортные системы, "умное" производство, медицинские и реабилитационные комплексы и другие. В них находят применение современные роботы, каждый из которых представляет интерес с точки зрения особенностей динамики:

- манипуляционные:
  - коллаборативные роботы или ко-боты, представляющие собой конструкции управляемой жесткости, оснащенные системами силомоментного осязания и управления по силе и предназначенные для работы в неструктурированной среде и прямого физического взаимодействия с человеком, включая легкие манипуляторы избыточной кинематики и модульной структуры с повышенным соотношением полезной нагрузки к собственной массе (см. Рис. В.1а–В.1б), гиперизбыточные бионические манипуляторы (см. Рис. В.1в), а также двурукие манипуляторы (см. Рис. В.2а–В.2б);
  - роботы-манипуляторы параллельной кинематики, предназначенные для высокоскоростной сортировки (см. Рис. В.3а–В.3б), где огромное значение имеют статическая и динамическая балансировка робота, или использующиеся для роботизированных морских, автомобильных и авиационных тренажеров, которые должны имитировать динамику реального

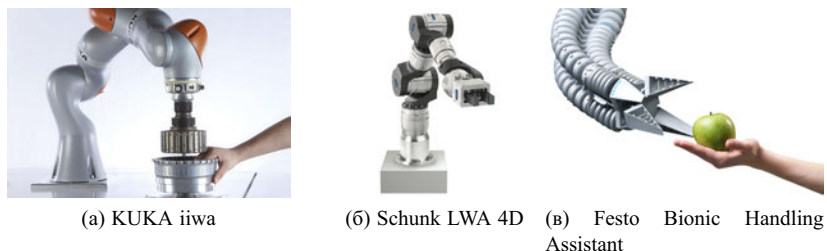


Рис. В.1. Легкие манипуляторы избыточной кинематики

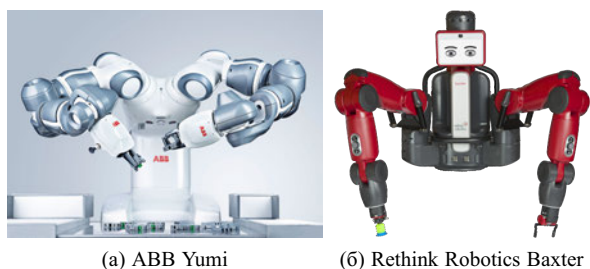
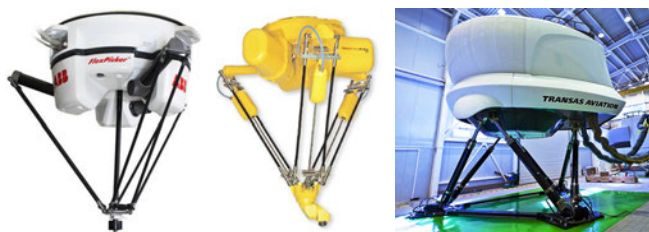


Рис. В.2. Двурукые коллаборативные роботы-манипуляторы

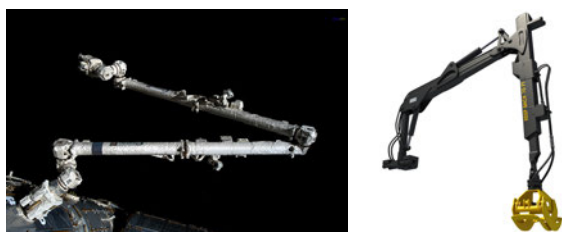
- полета или движения по пересеченной местности или при шторме (см. Рис. В.3в);
- манипуляторы высокой грузоподъемности и для большой рабочей области, в которых, во-первых, проявляется гибкость конструкции и одной из основных задач является не обеспечение высокой скорости и точности, а гашение нежелательных колебаний при перемещениях, а во-вторых, часто используются гидравлические приводы, сами по себе характеризующиеся нетривиальной нелинейной динамикой (см. Рис. В.4а–В.4б);
  - многопальцевые адаптивные схваты, в том числе с системами тактильной обратной связи и разными типами актуации для манипулирования хрупкими объектами произвольной формы и динамического манипулирования (см. Рис. В.5а–





(a) ABB Flex Picker (б) Дельта-робот Fanuc M-3iA (в) Авиатренажер Транзас

Рис. В.3. Манипуляторы параллельной кинематики



(а) Космический робот Canadarm (б) Робот-кран для лесозаготовки Forwarder

Рис. В.4. Габаритные манипуляторы

В.5в), которые в фазе движения до захвата описываются как разветвленная структура манипуляторов последовательной кинематики с общей базой, по аналогии с двурукими манипуляторами, а при контакте с объектом – уже как замкнутая кинематическая цепочка, по аналогии с параллельными манипуляторами;

- мобильные манипуляторы, находящиеся на стыке манипуляционных и локомоторных роботов и используемые для работы с протяженными объектами (сварка, покраска, механическая обработка) или в складской логистике, где необходимо координировано управлять движением руки и подвижной платформы (см. Рис. В.6а–В.6в);



(а) Трехпальцевый адаптивный схват Robotiq



(б) Schunk SVH с тактильной обратной связью



(в) Shadow Hand с пневматическими мышцами и сухожилиями

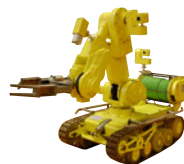
Рис. В.5. Адаптивные многопальцевые схваты



(а) Манипулятор на омни-платформе KUKA



(б) Манипулятор Fetch Robotics



(в) Мобильный робототехнический комплекс МРК-27-МА-БАЭС, СКТБ ПР

Рис. В.6. Мобильные манипуляторы

- локомоционные:

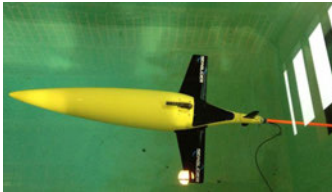
- "классические" мобильные роботы для земли (см. Рис. В.7а), воды (см. Рис. В.7б–В.7в) и воздуха (см. Рис. В.7г), в которых учет динамики системы крайне важен в задачах скоростного маневрирования или наоборот обеспечения стабильности движения при внешних возмущениях: ветровых, волновых, для сложной подстилающей поверхности и т.п.;
- биологически-инспирированные роботы, представляющие собой сложные многозвенные системы использующие различные способы перемещения, целью которых является повышение энергоэффективности, проходимости и устойчи-



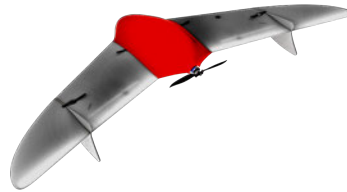
(а) Маневрирование автономного автомобиля Google



(б) Автономная трансатлантическая лодка Scout



(в) Автономный подводный аппарат Kongsberg Seaglider



(г) Беспилотный аппарат Геоскан 201

Рис. В.7. "Классические" мобильные роботы

ности движения в различных средах и по пересеченной местности, включая динамическое балансирование: шагающие с различным количеством ног и типом актуации (см. Рис. В.8а–В.8в), брахирующие<sup>1</sup> (см. Рис. В.8г) и прыгающие (см. Рис. ??), характеризующиеся кроме того гибридной динамикой, летающие (см. Рис. В.9б–В.9в), плавающие (см. Рис. В.10а–В.10в) и т.п.;

- протезы и ортезы (экзоскелеты), для которых исходя из требований безопасности и удобства использования, важным требованием является движение по траекториям, естественным для человека (см. Рис. В.11а–В.11в).

Можно провести краткую классификацию робототехнических систем с точки зрения характеристик, влияющих на их динамику:

- по характеру протекающих процессов (движения):

<sup>1</sup>Брахиация – один из видов локомоции, способность перемещаться с одного уступа на другой, раскачиваясь на руках.



(а) Антропоморфный робот Boston Dynamics Atlas (б) Четырехногий робот для динамической ходьбы StarLETH



(в) Пассивный шагатель Cornell University



(г) Брахирующий робот Georgia Tech Tarzan

Рис. В.8. Шагающие роботы

- непрерывная динамика;
- гибридная динамика (например, наличие фазы удара у шагающих роботов);
- по типу базы:
  - с фиксированной базой (стационарные роботы);
  - с подвижной/плавающей базой (мобильные роботы);
- по соотношению числа степеней свободы<sup>2</sup> системы  $n$  и числа независимых управлений  $m$ :
  - полноприводные:  $n = m$ ;

<sup>2</sup>Данные понятия будут рассмотрены более подробно далее.



Рис. В.9. Бионические роботы Festo

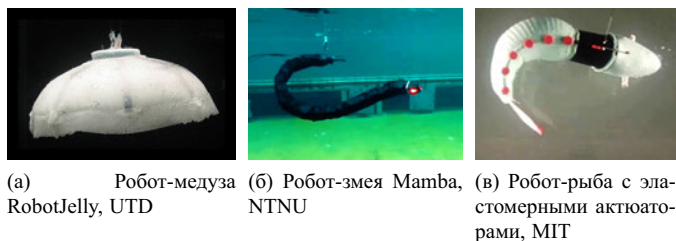


Рис. В.10. Плавающие бионические роботы

- неполноприводные:  $n > m$ ;
- избыточные:  $n < m$ ;
- по виду связей между обобщенными координатами:
  - с голономными (интегрируемыми) ограничениями;
  - с неголономными (неинтегрируемыми) ограничениями;

Из этого обзора, не претендующего на полноту, тем не менее хорошо видно, что в настоящее время существует множество различных типов роботов, для которых построение адекватных динамических моделей является востребованной и нетривиальной задачей. При этом потребности в данных моделях уже давно не ограничиваются организацией позиционного управления на циклических траекториях, а включают управление движением в неструктурированных средах, управление по силе, прецизионное позиционирование с компенсацией влияния трения, люфтов, гибкости звеньев и сочленений, оптимизацию движения



(а) Бионический протез БИНК, ИНЭУМ им. И.С. Брука  
(б) Экзоскелет Ekso Bionics  
(в) Протез ступни iWalk PowerFoot One

Рис. В.11. Активные протезы и ортезы

по скорости, энергоэффективности, минимальному механическому износу и другим критериям, статическую и динамическую балансировку и т.д.

Соответствующая задаче динамическая модель и ее анализ является отправной точкой в ее успешном решении. Полученные далее аналитические и численные описания могут использоваться далее для компьютерного моделирования системы, расчета динамических ограничений, оптимизации конструкции роботов, синтеза планировщиков траекторий и алгоритмов управления движением.

## Содержание и структура пособия

Данное учебное пособие разработано на основе авторских материалов, которые были использованы при преподавании в 2013–2016 годах курсов "Динамика робототехнических систем" в Университете ИТМО и "Моделирование и управление роботами" (Robot Modelling and Control) в Норвежском научно-технологическом университете (Norwegian University of Science and Technology, NTNU), а также получены в результате оригинальных научных исследований.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 15.04.06 Мехатроника и робототехника, 27.04.03 Системный анализ и управление, 27.04.04 Управление в технических системах. Оно призвано в емкой форме представить необходимый для понимания ключевых и актуальных вопросов динамики робототехнических систем материал, включая базовые понятия и определения, фундаментальные

принципы и наиболее распространенные и эффективные методы моделирования, такие как методы Ньютона-Эйлера и Эйлера-Лагранжа, а также производные от них конструктивные процедуры, расширения и специальные случаи. Отдельное внимание в пособии уделяется идентификации динамических моделей роботов.

Пособие состоит из 5 основных глав и приложений, в которых приводятся дополнительные материалы, необходимые в контексте изложения.

Первая глава посвящена рассмотрению базовых понятий, определений и принципов, используемых при описании и анализе динамики робототехнических систем. В частности, проводится классификация робототехнических систем; вводятся понятия обобщенных координат и сил, виртуальных перемещений и работы, уравнения движения при различных способах его задания; объясняются основные задачи динамики, фундаментальные принципы и законы сохранения, а также их применение на примере описания движения материальной точки и абсолютно твердого тела.

Во второй главе рассматривается вывод уравнений движения на основе метода Эйлера-Лагранжа, оперирующего вычислениями кинетической и потенциальной энергии многозвенных систем. Глава содержит не только теоретический материал и примеры использования метода, но и ряд дополнений. В частности, здесь рассказывается, каким образом может учитываться динамика двигателя и редуктора, а также как метод может быть использован для моделирования роботов замкнутой кинематики и роботов с гибкими сочленениями.

Третья глава уделяет внимание методу Ньютона-Эйлера, для которого отправной точкой является баланс сил в системе. Изложение в главе строится от применения второго закона Ньютона в общем виде для линейного и вращательного движения до рекурсивных процедур получения уравнений движения (и их отдельных компонент) многозвенных робототехнических систем.

В четвертой главе приводятся полезные свойства уравнений движения робототехнических систем, которые могут быть использованы при анализе их динамики, планировании траекторий и синтезе алгоритмов управления.

Пятая глава целиком посвящена вопросу идентификации динамических моделей робототехнических систем и затрагивает вопросы линейной параметризации уравнений движения, планирования оптимальных

траекторий для идентификационных экспериментов, непосредственно оценивания неизвестных динамических параметров и верификации полученных оценок.

Большинство разбираемых в пособии примеров имеют мотивацию из области манипуляционных роботов, однако описанные методы естественным образом обобщаются и для мобильных.

В пособии не затрагиваются следующие актуальные темы в области динамики роботов, по мнению автора, заслуживающие рассмотрения заинтересованным читателем:

- Динамика роботов с переменной жесткостью конструкции.
- Динамические модели трения.
- Анализ динамики неполноприводных робототехнических систем.
- Моделирование взаимодействия роботов с объектами манипулирования.
- Моделирование динамики шагающих роботов.
- Замкнутые кинематические цепи и динамика параллельных манипуляторов.
- Динамика мобильных манипуляторов.
- Вывод уравнений движения с использованием пространственных векторов.
- Эластостатическая калибровка робототехнических систем.
- Безопасность физического взаимодействия человек-робот.
- Динамическая балансировка роботов.
- Рекуперация энергии в робототехнических системах.
- Динамическое манипулирование.

В настоящее время существуют разнообразные специализированные программные средства, среды разработки и компьютерного моделирования, прикладные пакеты, библиотеки и т.д., которые могут использоваться при изучении динамики робототехнических систем и



должны помочь обучающимся в развитии соответствующих навыков и компетенций. Среди прочих можно упомянуть:

- Прикладной программный пакет Corke Robotics Toolbox для среды Matlab [1].
- Прикладной пакет для символьного моделирования роботов Open Surogo [2].
- Прикладной программный пакет ARTE для моделирования промышленных роботов в среде Matlab [3].
- Прикладной программный пакет Drake для моделирования и планирования движений роботов [4].
- C++ робототехнические библиотеки с открытым кодом OROCOS [5].
- C++ библиотека Dynamechs для моделирования динамики сложных систем твердых тел [6].
- Среда имитационного моделирования робототехнических систем V-REP [7].
- Среда компьютерного моделирования робототехнических систем Gazebo [8].

# Глава 1

## Базовые понятия и принципы

В этой главе мы охарактеризуем изучаемый предмет, приведем основные определения, рассмотрим базовые понятия и принципы, которыми оперируют при описании и анализе динамики робототехнических систем.

### 1.1 Роботы как механические системы

Для начала дадим общее определение робототехнической системы.

*Определение 1.1 **Робототехническая система (робот)** – это совокупность механизмов и устройств (электронных, электрических, оптических, пневматических, гидравлических и т.п.), формирующих единую систему, в том числе имеющую распределенную сетевую структуру и выполняющую рабочие операции, связанные со сложными пространственными перемещениями, способную к целесообразному поведению в условиях изменяющейся внешней обстановки без непосредственного участия человека за счет автоматизации процессов получения, преобразования, передачи и использования энергии, информации и материалов.*

С точки зрения механики, современный робот представляет собой управляемую систему достаточно сложной кинематической конструкции из множества **звеньев**, сопряженных посредством линейно или/и вращательно подвижных **сочленений** и взаимодействующих между собой и с окружающими объектами, приводимую в движение посредством различных типов **актюаторов** и перемещающиеся по произволь-

ным траекториям под действием **внешних, консервативных и диссипативных сил**, включая инерционные, кориолисовы и центробежные, гравитационные силы, силы трения, упругой и неупругой деформаций, аэродинамического и гидродинамического сопротивления среды и т.д.

*Определение 1.2* Звенья, образующие попарные соединения и допускающие относительные перемещения, называют **кинематическими парами**. На относительное движение звеньев в кинематической паре накладывается  $1 \leq s \leq 6$  **связей**, оставляя  $6 - s$  степеней свободы в паре, где  $s$  определяет класс кинематической пары.

*Определение 1.3* Систему звеньев, образующих кинематические пары, называют **кинематической цепью**. Если в цепи имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару, то цепь называют **разомкнутой** (последовательная кинематика). Если каждое звено входит, как минимум, в две кинематические пары, цепь считают **замкнутой** (параллельная кинематика).

Более подробно типовые конструкции роботов, виды сочленений, передаточных механизмов и способы актюации рассмотрены в [9, 10, 11, 12, 13].

Материал пособия сфокусирован на вопросах динамики управляемых многозвенных манипуляционных и локомоционных робототехнических систем, при этом мы не затрагиваем моделирование упруго и пластически деформируемых тел, жидкостей и газов, то есть влияние динамики среды.

*Определение 1.4* **Манипуляционный робот** представляет собой пространственный управляемый механизм, заканчивающийся хватом или иным рабочим инструментом, с помощью которого можно перемещать объекты в рабочем пространстве, либо выполнять технологические операции.

*Определение 1.5* **Локомоционный робот** – это свободно, автономно передвигающаяся машина, целью функционирования которой является перемещение полной собственной массы и (опционально) полезной нагрузки из исходного в конечный пункт.

## 1.2 Понятия динамической модели и уравнения движения

Теперь разберем базовые понятия, используемые при описании динамики роботов.

*Определение 1.6 Динамика (от греч. δυναμιξ сила, мощь) – состояние движения, ход развития, изменение какого-либо явления под влиянием действующих на него факторов. Раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения.*

Данное пособие ограничивается рассмотрением классической динамики, которая базируется на законах Ньютона и описывает движения объектов со скоростями от долей миллиметров в секунду до километров в секунду, что покрывает особенности подавляющего большинства робототехнических систем.

*Определение 1.7 Под динамической моделью робототехнической системы мы будем понимать математическое описание, формализующее и детализирующее причинно-следственные связи между входом и выходом в данной системе, приводящие к возникновению в ней механического движения, где*

- *вход – это действующие силы и моменты, как внутренние так и внешние;*
- *выход – это изменение взаимного положения тел, составляющих систему, или их частей, то есть координат системы во времени.*

Динамическая модель робота может выписываться в конфигурационном или операционном пространстве, в зависимости от постановки задачи (см. раздел 1.7). Аналитически она описывается уравнением движения.

*Определение 1.8 Уравнение движения механической системы представляет собой, в общем случае, систему дифференциальных уравнений, задаваемых на основе законов движения и определяющих эволюцию состояния системы во времени и пространстве.*

Переменными уравнения движения являются обобщенные координаты и их производные (скорости, ускорения), обобщенные силы и моменты, а коэффициентами – комбинации геометрических и динамических параметров составляющих систему тел, таких как массы и моменты инерции, координаты центров масс. Дадим соответствующие определения.

*Определение 1.9 Число степеней свободы  $n$  – это характеристика кинематической цепи, которая определяет минимальное количество независимых переменных, необходимых для полного описания ее конфигурации.*

*Определение 1.10 Обобщенные координаты  $q_i$ ,  $i = 1 \dots n$  – минимальный набор независимых переменных (скалярных геометрических величин), однозначно определяющих конфигурацию механической системы относительно некоторой эталонной конфигурации, то есть ее положение в пространстве.*

Может существовать несколько вариантов выбора обобщенных координат, но обычно выбираются параметры, которые упрощают запись и решение уравнения движения.

*Определение 1.11 Обобщенные скорости  $\dot{q}$  и ускорения  $\ddot{q}$  – это первые и вторые производные по времени обобщенных координат системы соответственно.*

*Определение 1.12 Обобщенной силой  $\tau_i$ , соответствующей обобщенной координате  $q_i$ , называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы  $\delta A_i$  действующих сил на перемещении механической системы, вызванном изменением обобщенной координаты  $q_i$ , к величине приращения этой координаты  $\delta q_i$ :  $\tau_i = \delta A_i / \delta q_i$ .*

Физическая размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты и может выражаться в единицах силы для линейных координат и момента – для вращательных.

Уравнения движения, дополненные начальными условиями, полностью задают состояние системы в определенной точке пространства и в определенный момент времени.

## 1.3 Задачи динамики

Можно выделить две основные задачи при работе с моделью динамики робототехнической системы.

*Определение 1.13 Основные задачи динамики:*

- *прямая* – по заданному характеру движения (координаты, скорости, ускорения) определить равнодействующую сил, действующих на тело.
- *обратная* – по заданным силам определить характер движения тела (координаты, скорости, ускорения).

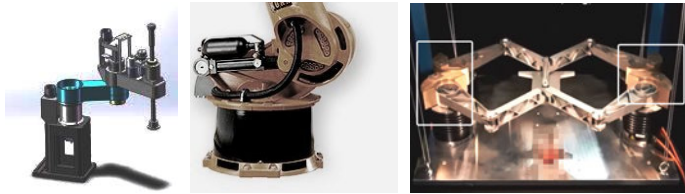
Как объект управления, роботы интересны и сложны тем, что в основном работают не на установившихся, а на переходных режимах, зачастую соответствующих траекториям с нетривиальными профилями скорости и ускорения.

В теоретической постановке можно выделить несколько подзадач управления движением роботов, для которых необходимо знание их динамики:

- планирование траекторий с учетом кинематических и динамических ограничений;
- анализ устойчивости движения при параметрических, сигнальных и структурных возмущениях;
- вычисление временного отклика, то есть анализ динамических показатели качества системы;
- идентификация режимов движения, то есть оценка оптимальных диапазонов скоростей и ускорений перемещения, при которых не происходит возбуждения нежелательных колебаний, не возникает деформаций и других явлений, не учитываемых используемой моделью и системой управления.

В практической плоскости также можно охарактеризовать ряд задач, которые невозможно решить, не имея динамической модели робота:

1. Силовой расчет – расчет внешних (синтез управления) и внутренних (реакция в кинематических парах) сил при заданном движении;



(а) Кинематическая развязка SCARA робота  
 (б) Компенсатор гравитации артикулированного манипулятора  
 (в) Контрмассы параллельного манипулятора

Рис. 1.1. Способы балансировки манипуляторов

2. Расчет быстродействия – расчет времени на цикл движений при заданных динамических характеристиках приводов и манипулятора;
3. Уравновешивание (последовательных) манипуляторов – снятие статических нагрузок с приводов звеньев:
  - кинематическая развязка (см. Рис. 1.1а);
  - корректировка распределения массы звеньев;
  - посредством разгружающих устройств (пневматические, гидравлические компенсаторы и эластичные параллельные актюаторы)(см. Рис. 1.1б);
4. Динамическая балансировка (параллельных) манипуляторов – минимизация вызванных инерционностью сил и моментов тряски за счет размещения контрмасс (см. Рис. 1.1в).

## 1.4 Фундаментальные принципы механики

В основе составления любого уравнения движения робототехнической системы лежат фундаментальные принципы механики. В этом разделе мы сформулируем и поясним основные из них, но предварительно введем определения величин, которыми оперируют эти принципы: виртуальные перемещения и виртуальная работа.

**Определение 1.14** *Виртуальное перемещение*  $\delta\vec{r}_i$  – это мысленное бесконечно малое перемещение (вектор), которое в данный момент времени материальная точка может совершить, не нарушая действующих в системе связей.

**Определение 1.15** *Виртуальная работа*  $\delta A_i$  – это работа, которую совершили бы активные силы на виртуальных перемещениях, если бы эти перемещения произошли.

Теперь сформулируем основные принципы, на основе которых выводится общее уравнение механики.

**Определение 1.16** *Принцип виртуальных перемещений*: для механической системы с идеальными (не совершающими работы, абсолютно жесткими) связями в положении равновесия работа активных (внешних) сил  $\vec{f}_i^a$  на виртуальных перемещениях  $\delta\vec{r}_i$  равна нулю.

$$\sum_i \delta A_i^a = \sum_i \left( |\vec{f}_i^a| |\delta\vec{r}_i| \cos \alpha_i \right) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\alpha_i$  – угол между направлением активной силы и направлением виртуального перемещения.

Это один из вариационных принципов в теоретической механике, устанавливающий **общее условие равновесия механической системы**. При этом под равновесием понимается такое состояние механической системы, подверженной влиянию сил, при котором все образующие систему материальные точки не меняют своего положения, то есть покоятся по отношению к этой системе. Количество линейно независимых уравнений равновесия, которые можно составить для механической системы, исходя из принципа виртуальных перемещений, равно количеству степеней свободы этой механической системы.

В случае рассмотрения механических систем, не находящихся в состоянии равновесия, нельзя игнорировать инерциальные силы. Для этого случая Жаном Д'Аламбером был сформулирован следующий принцип.

**Определение 1.17** *Принцип Д'Аламбера*: если к действующей на тело (точечную массу) активной силе  $\vec{f}_i^a$  и реакции связи  $\vec{f}_i^r$  приложить дополнительную силу инерции  $\vec{f}_i^j$ , то тело будет находиться в равновесии.



Из второго закона Ньютона, записанного для точечной массы как:

$$\delta m_i \ddot{r}_i = \vec{f}_i^a + \vec{f}_i^r, \quad (1.2)$$

где  $\delta m_i$  – точечная масса,  $\ddot{r}_i$  – ускорение перемещения точечной массы, следует, что

$$\left( \vec{f}_i^a - \delta m_i \ddot{r}_i \right) + \vec{f}_i^r = 0, \quad (1.3)$$

то есть снова возникает равновесие сил, позволяющее применить принцип виртуальных перемещения, а поэтому исключить из рассмотрения силы реакции связей  $\vec{f}_i^r$ .

Иначе говоря, принцип Д'Аламбера позволяет заключить, что работа активных сил  $\vec{f}_i^a$  вместе с силами инерции  $\vec{f}_i^j$  на виртуальных перемещениях  $\delta \vec{r}_i$  равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_i \delta A_i = \sum_i \left( \delta A_i^a + \delta A_i^j \right) \\ &= \sum_i \left( |\vec{f}_i^a| \cos \alpha_i + |\vec{f}_i^j| \cos \beta_i \right) |\delta \vec{r}_i| = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\vec{f}_i^j = -\delta m_i \ddot{r}_i$ ,  $\beta_i$  – угол между направлением инерциальной силы и направлением виртуального перемещения.

Принцип Д'Аламбера позволяет применить к решению задач динамики более простые методы статики, поэтому им широко пользуются в инженерной практике. Однако, есть способ еще упростить вывод уравнений движения, избавившись от необходимости вычисления скалярных произведений векторов, как в уравнении (1.4). Для этих целей используют интегральный вариационный принцип, известный как принцип наименьшего действия или стационарности действия или принцип Гамильтона.

**Определение 1.18 Принцип Гамильтона:** для консервативных систем переход за конечное время из одной точки конфигурационного пространства в другую происходит таким образом, что действие принимает экстремальное (наименьшее) значение.

Если в системе действуют потенциальные силы, то их виртуальная работа запишется в виде

$$\vec{f}_i^a \delta \vec{r}_i = -\delta \mathcal{P}_i(\delta \vec{r}_i, t), \quad (1.5)$$

где  $\mathcal{P}_i(\delta\vec{r}_i, t)$  – потенциальная энергия точечной массы, а  $\vec{f}_i^a \delta\vec{r}_i = \delta m_i \ddot{r}_i \delta\vec{r}_i = \delta m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i) \delta\vec{r}_i$ .

Используя в обратном порядке формулу дифференцирования произведения, получим

$$\vec{f}_i^a \delta\vec{r}_i = \delta m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i) \delta\vec{r}_i = \delta m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta\vec{r}_i) - \delta m_i \dot{r}_i \delta\dot{\vec{r}}_i,$$

причем  $\delta m_i \dot{r}_i \delta\dot{\vec{r}}_i$  есть вариация кинетической энергии точечной массы  $\mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \delta m_i \dot{r}_i^2$ .

Отсюда следует, что уравнение (1.5) можно переписать как

$$\delta m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta\vec{r}_i) - \delta(\mathcal{K}_i - \mathcal{P}_i) = 0. \quad (1.6)$$

Домножив обе части (1.6) на  $dt$  и интегрируя по времени в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ , получим

$$\delta m_i \dot{r}_i \delta\vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{K}_i - \mathcal{P}_i) dt = 0. \quad (1.7)$$

Так как в начальный и конечный моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  все возможные пути точек механической системы сходятся, то соответствующие вариации в эти моменты времени  $\delta\vec{r}_i = 0$ , то есть выполняется соотношение

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{K} - \mathcal{P}) dt = 0, \quad (1.8)$$

где  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$  – называется действием, а  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$  – лагранжианом системы, который может быть выписан как функция обобщенных координат и скоростей системы<sup>1</sup>.

Таким образом, вариация действия в системе равна нулю, то есть действие принимает экстремальное значение. Максимум исключается вследствие того, что кинетическая энергия  $\mathcal{K}$  может увеличиваться как угодно далеко. Остается только одна возможность – минимум, что и утверждает принцип Гамильтона.

Это вариационный принцип, так как зависимость обобщенных координат от времени находится из условия минимума интеграла действия,

<sup>1</sup>См. главу 2

и наиболее важный среди семейства экстремальных принципов, который служит фундаментальной основой лагранжевой и гамильтоновой<sup>2</sup> формулировок механики.

Одним из преимуществ применения принципа Гамильтона является то, что в него входят только скалярные функции, которые можно пересчитать к произвольным обобщенным координатам. Поэтому уравнения, которые вытекают из вариационного принципа, оказываются сразу записанными в обобщенных координатах.

## 1.5 Движение точечной массы

Начнем с записи второго закона Ньютона для точечной массы (см. Рис. 1.2). Для поступательного движения справедливо уравнение

$$\vec{f}_i^a = \delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (\delta m_i \dot{\vec{r}}_i) = \dot{\vec{p}}_i, \quad (1.9)$$

где  $\vec{p}_i = \delta m_i \dot{\vec{r}}_i$  – импульс или линейный момент частицы,  $\dot{\vec{r}}_i$  и  $\ddot{\vec{r}}_i$  – скорость и ускорение частицы соответственно. Вращательное движение частицы при этом может быть аналитически описано уравнением

$$\Gamma_i = \vec{\xi} \times \vec{f}_i^a = \vec{\xi} \times \delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (\vec{\xi} \times \delta m_i \dot{\vec{r}}_i) = \dot{\vec{N}}_i, \quad (1.10)$$

где  $\vec{\xi}$  радиус-вектор, соединяющий начало отсчета инерциальной системы координат с частицей,  $\Gamma_i$  – момент, создаваемый действующими на систему активными силами,  $\vec{N}_i = \vec{\xi} \times \delta m_i \dot{\vec{r}}_i$  – угловой момент частицы.

Отсюда следует, что чтобы привести частицу в состояние равновесия, к ней нужно приложить внешнюю силу  $-\dot{\vec{p}}_i$ , где  $\vec{p}_i$  – импульс данной частицы.

Теперь рассмотрим группу частиц с голономными связями (см. Рис. 1.3).

Для данного случая справедлива следующая цепочка рассуждений:

- каждая точечная масса имеет 3 степени свободы – всего  $3k$  степеней свободы;

<sup>2</sup>В лагранжевой механике при задании уравнений движения в качестве переменных используются обобщенные координаты  $q$  и скорости  $\dot{q}$ , в то время как в гамильтоновой – вектора обобщенных координат  $q$  и импульсов  $p$  (подробнее см. [14]).

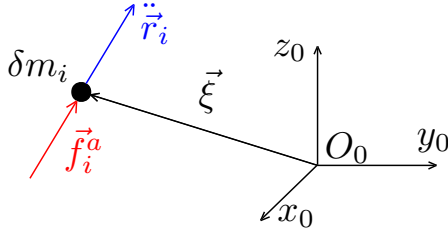


Рис. 1.2. Иллюстрация движения точечной массы

- на систему наложено  $l$  голономных (геометрических) связей вида

$$g_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k) = 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, l;$$

- в связанной системе остается  $n = 3k - l$  обобщенных координат  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  так что  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$
- виртуальные перемещения  $\delta \vec{r}_i$  сохраняют голономные связи

$$g_i(\vec{r}_1 + \delta \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k + \delta \vec{r}_k) = 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, l;$$

- виртуальные (неограниченные) перемещения по обобщенным координатам  $\delta q_j$  и исходные виртуальные перемещения связаны со-

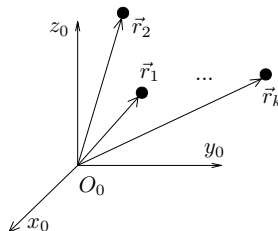


Рис. 1.3. Ансамбль частиц, связанных голономными ограничениями

отношением

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

$$i = 1, \dots, k;$$

- результирующая сила складывается из внешней силы  $\vec{f}_i^a$  и силы реакции  $\vec{f}_i^j$ ;
- если сила реакции связи между двумя точечными массами  $\vec{f}_i^j$  действует вдоль вектора, соединяющего эти частицы, то работа сил реакции  $\sum_{i=1}^k \vec{f}_i^{jT} \delta \vec{r}_i = 0$ .

Принцип Д'Аламбера для точечной массы может быть выражен через соотношение

$$\delta A_i = \delta \xi^T (\ddot{\xi} dm - d\vec{F}_i) = 0, \quad (1.11)$$

где  $d\vec{F}_i$  обозначает вектор внешних сил и моментов, действующих на точечную массу.

## 1.6 Движение абсолютно твердого тела

*Определение 1.19 Абсолютно твердое тело – это совокупность материальных точек (точечных масс), связанных между собой (недеформированными) голономными ограничениями.*

На Рис. 1.4 использованы следующие обозначения:

- $\{I\}$  и  $\{B\}$  – инерциальная и "прикрепленная" к телу системы координат соответственно;
- $m = \int_B \delta m_i$  – масса тела, где  $\delta m_i$  –  $i$ -ая точечная масса, составляющая тело;
- $S$  – центр масс тела;
- $\rho$  – вектор, соединяющий центр масс тела с  $i$ -ой точечной массой;

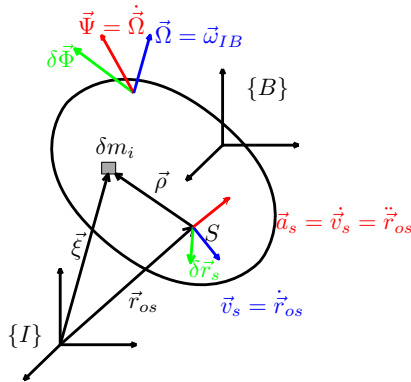


Рис. 1.4. Абсолютно твердое тело

- $r_{OS}$  – радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат с центром масс тела, координаты которого в инерциальной системе координат вычисляются как

$$r_{OS} = \frac{1}{m} \int_B \rho dm;$$

- $\vec{v}_S$  и  $\vec{a}_S$  – линейные скорость и ускорение центра масс тела относительно инерциальной системы координат соответственно;
- $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{\Psi}$  – угловые скорость и ускорение тела относительно инерциальной системы координат соответственно;
- $\delta \vec{r}_S$  и  $\delta \vec{\Phi}$  – виртуальные линейные и угловые перемещения тела относительно инерциальной системы координат;
- $\vec{\xi} = \vec{r}_{OS} + \vec{\rho}$  – вектор, соединяющий центр инерциальной системы координат с  $i$ -ой точечной массой.

Фактически, задача вывода уравнений движения тела может быть интерпретирована как согласование уравнений движения всех точечных масс, это тело составляющих. Для этого свяжем скорости и ускорения перемещения отдельной точечной массы со скоростями и ускорениями поступательного и вращательного движения всего тела:

Скорость точечной массы вычисляется как производная соответствующего вектора положения:

$$\dot{\xi} = \vec{v}_S + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} = (I_{3 \times 3} \quad -\tilde{\rho}) \begin{pmatrix} \vec{v}_S \\ \vec{\Omega} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $I_{3 \times 3}$  – это единичная матрица размерности  $[3 \times 3]$ , а  $\tilde{\rho}$  – это косо-симметрическая матрица от вектора  $\vec{\rho}$ .

Ускорение точечной массы вычисляется как вторая производная вектора положения соответственно:

$$\ddot{\xi} = \vec{a}_S + \vec{\Psi} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) = (I_{3 \times 3} \quad -\tilde{\rho}) \begin{pmatrix} \vec{a}_S \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix} + \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} \vec{\rho}, \quad (1.13)$$

где  $\tilde{\Omega}$  – это косо-симметрическая матрица от вектора  $\vec{\Omega}$ .

При этом виртуальное перемещение точечной массы можно выразить как

$$\delta \vec{\xi} = \delta \vec{r}_S + \delta \vec{\Phi} \times \vec{\rho} = (I_{3 \times 3} \quad -\tilde{\rho}) \begin{pmatrix} \delta \vec{r}_S \\ \delta \vec{\Phi} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Следовательно, уравнение движения тела можно вывести на основе принципа Д’Аламбера из выражения для виртуальной работы:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_B \delta A_i = \int_B \delta \xi^T (\dot{\xi} dm - d\vec{F}_i) \\ &= \int_B \begin{pmatrix} \delta \vec{r}_S \\ \delta \vec{\Phi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} \left[ (I_{3 \times 3} \quad -\tilde{\rho}) \begin{pmatrix} \vec{a}_S \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix} dm + \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} \vec{\rho} dm - d\vec{F}^{a,B} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \delta \vec{r}_S \\ \delta \vec{\Phi} \end{pmatrix}^T \int_B \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} dm & \tilde{\rho}^T dm \\ \tilde{\rho} dm & -\tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_S \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} \vec{\rho} dm \\ \tilde{\rho} \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} \vec{\rho} dm \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\vec{F}^{a,B} \\ \tilde{\rho} d\vec{F}^{a,B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta \vec{r}_S \\ \delta \vec{\Phi} \end{pmatrix}^T \left[ \begin{pmatrix} m I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \Theta_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_S \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Omega} \Theta_S \tilde{\Omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{F}^{a,B} \\ \vec{\Gamma}^{a,B} \end{pmatrix} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\Theta_S = \int_B \tilde{\rho} \tilde{\rho}^T dm$  – это момент инерции тела относительно его центра масс, а  $\vec{F}^{a,B}$  и  $\vec{\Gamma}^{a,B}$  – это векторы активных (внешних) сил и моментов, приложенных к телу  $B$ , соответственно.

Обозначим приращение импульса тела как

$$\dot{\vec{p}} = m \vec{a}_S,$$

а приращение углового момента тела относительно его центра масс как

$$\dot{\vec{N}} = \Theta_S \dot{\vec{\Psi}} + \vec{\Omega} \times \Theta_S \vec{\Omega},$$

тогда законы сохранения импульса и углового момента для абсолютно твердого тела запишутся в векторно-матричной форме следующим образом:

$$\delta A = \begin{pmatrix} \delta \vec{r}_S \\ \delta \vec{\Phi} \end{pmatrix}^T \left[ \begin{pmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{N}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{F}^{a,B} \\ \vec{\Gamma}^{a,B} \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (1.16)$$

## 1.7 Формы задания и методы вывода уравнений движения

### 1.7.1 Уравнения движения в конфигурационном пространстве

Для механических систем уравнения движения, как правило, задаются в *конфигурационном пространстве* в следующем стандартном виде:

$$\underbrace{M(q)\ddot{q}}_{\text{инерция}} + \underbrace{c(q, \dot{q})}_{\text{кориолисовы/центробежные силы}} + \underbrace{g(q)}_{\text{гравитация}} = \tau, \quad (1.17)$$

где  $q(t) \in R^n$ ,  $\dot{q}(t) \in R^n$ ,  $\ddot{q}(t) \in R^n$  – векторы обобщенных координат, скоростей и ускорений,  $M(q)$  –  $[n \times n]$  матрица инерции,  $c(q, \dot{q})$  –  $[n \times 1]$  вектор кориолисовых и центробежных сил,  $g(q)$  –  $[n \times 1]$  вектор гравитации, а  $\tau(t)$  –  $[n \times 1]$  вектор обобщенных сил и моментов.

### 1.7.2 Уравнения движения в операционном пространстве

В ряде задач, связанных с планированием и управлением движением роботов, удобнее использовать модели, выписанные не в обобщенных координатах, то есть в конфигурационном пространстве, а в декартовых координатах, то есть в рабочем или *операционном пространстве*.





Рис. 1.5. Системы координат манипулятора в операционном пространстве:  $\{I\}$  – инерциальная (базовая) система координат,  $\{E\}$  – система координат, "прикрепленная" к рабочему инструменту манипулятора

Примером таких задач, где принципиальное значение имеет динамика рабочего инструмента, включая развиваемые силы и моменты, является механическая обработка поверхностей с использованием манипуляторов.

На Рис. 1.5 проиллюстрирован манипулятор и обозначены системы координат базы, задающая систему отсчета операционного пространства, и прикрепленная к рабочему инструменту манипулятора. Динамика системы в операционном пространстве может быть описана уравнением, по структуре схожим с (1.17):

$$\Lambda(\vec{x}_E)\ddot{\vec{x}}_e + \mu(\vec{x}_E, \dot{\vec{x}}_E) + \rho(\vec{x}_E) = F_e, \quad (1.18)$$

где  $\vec{x}_E$ ,  $\dot{\vec{x}}_E$ ,  $\ddot{\vec{x}}_E$ ,  $\vec{F}_E$  обозначают  $[6 \times 1]$  векторы координат, скоростей и ускорений, а также сил и моментов рабочего инструмента в операционном пространстве соответственно,  $\Lambda$  – матрица инерции в операционном пространстве,  $\mu$  и  $\rho$  – вектора компонентов квадратичных по скоростям и гравитационных сил, выраженные в операционном пространстве, соответственно.

*Замечание 1.1 Уравнения движения, записанные напрямую в лагранжевой форме в операционных координатах, полностью описы-*

вают динамику только для избыточных манипуляторов. Для манипуляторов избыточной кинематики (более 6 степеней свободы) такое описание является неполным, что может привести к внутренним движениям робота в звеньях, которые не приводят к движению рабочего инструмента.

Чтобы вывести преобразования, связывающие компоненты уравнений движения в конфигурационном и операционном пространстве, справедливые для манипуляторов как избыточной, так и избыточной кинематики, воспользуемся следующей цепочкой рассуждений.

1. Разрешим (1.17) относительно ускорения:

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)c(q, \dot{q}) - M^{-1}(q)g(q) + M^{-1}(q)\tau$$

2. Выпишем кинематические преобразования между скоростями, ускорениями и силами в операционном и конфигурационном пространстве

- $\dot{x}_e = J_e \dot{q}$ , где  $J_e$  – аналитический Якобиан размерности  $[6 \times n]$ , связывающий обобщенные скорости в конфигурационном и операционном пространстве;
- $\ddot{x}_e = J_e \ddot{q} + \dot{J}_e \dot{q}$ ;
- $\tau = J_e^T F_e$ ;

3. Из соотношения для ускорений получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_e &= -J_e M^{-1}(q)c(q, \dot{q}) - J_e M^{-1}(q)g(q) + \dot{J}_e \dot{q} + J_e M^{-1}(q)\tau \Rightarrow \\ \ddot{x}_e &= J_e M^{-1} (J_e^T F_e - (c(q, \dot{q}) + g(q))) + \dot{J}_e \dot{q} \Rightarrow \\ \ddot{x}_e + J_e M^{-1}(c(q, \dot{q}) + g(q)) - \dot{J}_e \dot{q} &= J_e M^{-1} J_e^T F_e \end{aligned}$$

4. Таким образом, компоненты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda &= (J_e M^{-1} J_e^T)^{-1}, \\ \mu &= \Lambda J_e M^{-1} c(q, \dot{q}) - \Lambda \dot{J}_e \dot{q}, \\ \rho &= \Lambda J_e M^{-1} g(q). \end{aligned}$$

*Замечание 1.2 Приведенные преобразования справедливы при условии, что аналитический Якобиан  $J_e$  имеет полный ранг.*

### 1.7.3 Уравнения движения в форме вход-состояние-выход

В современной теории управления базовым способом аналитического описания динамики системы является запись в форме вход-состояние-выход, поэтому в ряде задач для синтеза регуляторов или, например, наблюдателей состояния может быть удобно привести исходное описание (1.17), представляющее собой систему  $n$  дифференциальных уравнений 2-го порядка, к стандартной форме  $2n$  уравнений 1-го порядка.

Для этого необходимо ввести  $[2n \times 1]$  вектор состояния  $x$ . Вектор состояния может вводиться произвольным образом, например, как

$$x = [x_1 \quad x_2]^T = [q \quad \dot{q}]^T$$

В этом случае, (1.17) можно записать как

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)u, \quad (1.19)$$

где  $f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x_1)[c(x_1, x_2) + g(x_1)] \end{bmatrix}$ ,  $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(x_1) \end{bmatrix}$ ,  $u = \tau$  – вектор управлений.

На Рис. 1.6 представлена типовая структурная схема, которая может использоваться для компьютерного моделирования динамики робототехнической системы в форме вход-состояние-выход. При этом здесь используются переменные (матриц и векторов) исходного уравнения движения (1.17).

### 1.7.4 Сравнение основных методов вывода уравнений движения

Далее большая часть материала пособия посвящена основным методам, используемым для вывода уравнений движения робототехнических систем: (Эйлера–Лагранжа и Ньютона(–Эйлера)).

Каждый из этих методов имеет свои особенности, которые определяют области их преимущественного применения:

- *Метод Эйлера–Лагранжа:*

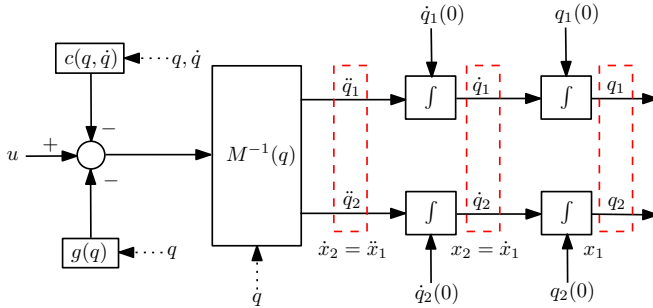


Рис. 1.6. Пример структурной схемы моделирования динамики робототехнической системы с 2-мя степенями свободы в форме вход-состояние-выход.

- основные вычисления связаны с кинетической и потенциальной энергией системы;
  - динамика многозвенного робота рассматривается в целом;
  - внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений;
  - уравнения выписываются в символьной форме;
  - получаемые выражения лучше подходят для задач моделирования и анализа свойств системы;
- *Метод Ньютона–Эйлера:*
    - оперирует понятиями баланса сил и моментов в системе;
    - уравнения записываются отдельно для каждого тела/звена, составляющего систему;
    - в явном виде выписываются силы реакции связей между звеньями системы;
    - модель выписывается в рекурсивной форме, наиболее подходящей для численной реализации;
    - наиболее подходит для задач синтеза алгоритмов управления и их реализации в программном обеспечении систем управления роботами.

# Глава 2

## Метод Эйлера-Лагранжа

Во этой главе рассматривается вывод уравнений движения на основе метода Эйлера-Лагранжа. Глава содержит теоретический материал и примеры использования метода, а также ряд дополнений, в частности, описываются способы учета динамики двигателя и редуктора, а также моделирование роботов замкнутой кинематики и роботов с гибкими сочленениями.

### 2.1 Мотивационные примеры

#### 2.1.1 Уравнение движения точечной массы

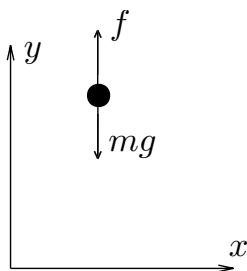


Рис. 2.1. Частица в поле гравитации и действующие на нее силы.

В качестве простого мотивационного примера рассмотрим вывод уравнения движения частицы (точечной массы), движущейся в гравитационном поле (см. Рис. 2.1).

Для этого примера уравнение движения легко записать через второй закон Ньютона

$$m\ddot{y} = f - mg, \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса частицы,  $\ddot{y}$  – ускорение частицы,  $mg$  – сила тяжести, действующая на частицу,  $f$  – внешняя сила, приложенная к частице.

Развернем запись слагаемых в левой и правой частях (2.1), чтобы представить их как функции от кинетической и потенциальной энергии частицы. Так для члена в правой части (2.1) справедлива следующая цепочка преобразований:

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (0.5m\dot{y}^2) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}}, \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{K} = 0.5m\dot{y}^2$  – кинетическая энергия частицы.

С другой стороны, для слагаемого в правой части (2.1) справедлива запись

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$\mathcal{P} = mgy$  – потенциальная энергия частицы.

С учетом выражений (2.2) и (2.3), уравнение движения (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f, \quad (2.4)$$

где  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$  – лагранжиан системы.

*Определение 2.1* Под **лагранжианом** системы  $\mathcal{L}$  понимается разность между ее кинетической и потенциальной энергией.

Уравнение вида (2.4) называют уравнением Эйлера-Лагранжа. Таким образом, мы показали, что уравнение движение частицы может быть выведено из соотношений для ее кинетической и потенциальной энергии и записано в виде (2.4). Продемонстрируем, что это справедливо для общего случая механических систем.

### 2.1.2 Принцип Д’Аламбера и уравнение Эйлера-Лагранжа

*Замечание 2.1* Далее для простоты записи мы опустим векторное обозначение для векторов виртуальных перемещений, скоростей частиц и т.п.

Кинетическую энергию частиц, составляющих абсолютно твердое тело (АТТ) можно вычислить как

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} m_i \nu_i^T \nu_i, \quad (2.5)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й частицы, а  $\nu_i = \dot{r}_i$  – скорость  $i$ -й частицы.

Виртуальную работу внутренних сил частиц АТТ можно вычислить как

$$\delta A^j = \sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (2.6)$$

где  $\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$  – виртуальные перемещения частицы, а  $\delta q_j$  – виртуальные перемещения частицы по обобщенным координатам.

Используя правило производной произведения, можем записать

$$\sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \nu_i^T \frac{\partial \nu_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \nu_i^T \frac{\partial \nu_j}{\partial q_j} \right\}. \quad (2.7)$$

Тогда выражение (2.6) примет вид

$$\delta A^j = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j. \quad (2.8)$$

При этом виртуальная работа внешних сил может быть вычислена как

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i = \sum_{j=1}^n \psi_j \delta q_j, \quad (2.9)$$

где  $\psi_j = \sum_{i=1}^k f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$  обозначает  $j$ -ую обобщенную силу.

Как мы знаем из принципа Д'Аламбера (см. раздел 1), суммарная работа, совершаемая активными силами и силами инерции на виртуальных перемещениях, равна нулю, то есть

$$\delta A^j + \delta A^a = 0. \quad (2.10)$$

Подставляя выражения (2.8) и (2.9) в (2.10), получаем

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} - \psi_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (2.11)$$

Если обобщенная сила  $\psi_j$  включает только консервативные внешние силы и силы гравитации, то ее можно записать как

$$\psi_j = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j} + \tau_j, \quad (2.12)$$

где  $\mathcal{P}$  – это потенциальная энергия системы, а  $\tau_j$  обозначает  $j$ -ую внешнюю силу или момент.

Тогда, с учетом (2.12), (2.11) можно переписать в виде системы уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j} = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Как мы показали, применяя фундаментальный принцип механики – принцип Д’Аламбера, движение произвольного абсолютно твердого тела может быть аналитически описано посредством уравнения Эйлера-Лагранжа. Описанию систематической процедуры вывода уравнений Эйлера-Лагранжа для произвольной системы, а также анализу свойств этого уравнения посвящено дальнейшее изложение в данном разделе.

## **2.2 Вывод уравнений движения на основе метода Эйлера-Лагранжа**

Существует стандартная процедура, следуя которой, на основе метода Эйлера-Лагранжа можно вывести уравнения движения произвольной робототехнической системы. Она состоит из следующих последовательных шагов:

1. выбрать обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ;
2. получить выражения для кинетической  $\mathcal{K}$  и потенциальной  $\mathcal{P}$  энергии системы, записанные в обобщенных координатах;
3. получить выражение для Лагранжиана системы  $\mathcal{L}$ ;



4. составить систему уравнений движения, соответствующих каждой обобщенной координате  $q_j$  в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Ключевым в этой процедуре является шаг номер 2. Разберемся, каким образом можно получить выражения для кинетической и потенциальной энергии механической системы.

### 2.2.1 Вычисление энергии

#### Кинетическая энергия

Пусть каждое звено робота представляет собой абсолютно твердое тело, имеющее собственные линейную и угловую скорости движения (см. Рис. 2.2).

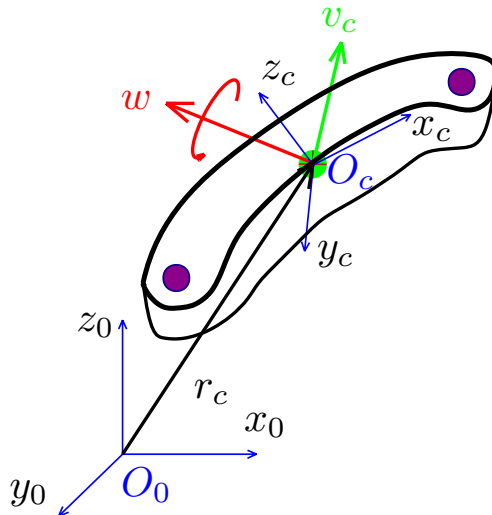


Рис. 2.2. Звено робота и ассоциированные с ним системы координат и линейная и угловая скорости.

**Утверждение 2.1 (Теорема Кёнига)** *Кинетическая энергия тела есть энергия (поступательного) движения его центра масс плюс энергия (вращательного) движения относительно центра масс*

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m|v_c|^2 + \frac{1}{2}\omega^T \mathcal{I}\omega, \quad (2.16)$$

где  $m$  - полная масса тела,  $v_c = \dot{r}_c$  и  $\omega$  - векторы линейной и угловой скорости тела,  $\mathcal{I}$  - тензор инерции тела,  $r_c$  - вектор, соединяющий инерциальную систему координат и центр масс тела.

**Замечание 2.2** *При выводе формул для расчета энергии системы принципиально, чтобы все величины были выражены в единой инерциальной системе координат.*

Угловую скорость тела в инерциальной системе координат  $\omega$  можно вычислить из соотношения

$$S(\omega) = \dot{R}(t)R^T(t),$$

где  $R(t)$  - это матрица поворота от собственной системы координат твердого тела  $O_c x_c y_c z_c$  к инерциальной системе координат  $O_0 x_0 y_0 z_0$  (см. Рис. 2.2)<sup>1</sup>.

С другой стороны, линейная и угловая скорости  $i$ -го звена робота являются функциями его обобщенных координат  $q$  и скоростей  $\dot{q}$  и могут быть получены через якобианы, ассоциированные с центрами масс звеньев

$$v_{c,i} = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad (2.17)$$

$$\omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q}, \quad (2.18)$$

где  $v_{c,i}$  и  $\omega_i$  - линейная и угловая скорости, а  $J_{v_i}(q)$  и  $J_{\omega_i}(q)$  - якобианы поступательного и вращательного движения  $i$ -го звена соответственно, вычисляемым на основе геометрических параметров характеризующих расположение звеньев, а также их центров масс относительно локальной системы координат звена,  $q$  и  $\dot{q}$  - вектора обобщенных координат и

<sup>1</sup>Способ задания систем координат звеньев робота на основе соглашения Денавита-Хартенберга и вычисления соответствующих поворотных матриц  $R(t)$  проиллюстрирован в Приложении 2.

скоростей всех звеньев робота (более подробный расчет прямой кинематики и кинетики роботов см. в [9, 10, 11]).

Таким образом, подставляя выражения (2.17)-(2.18) в (2.16) и используя принцип суперпозиции, получаем формулу для вычисления полной кинетической энергии робота:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_{i=1}^n m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i^0(q) I R_i^0(q)^T J_{\omega_i}(q) \right] \dot{q} \quad (2.19)$$

где  $I$  – тензор инерции звена в собственной системе координат<sup>2</sup>.

Альтернативой использования формул (2.17)-(2.18) для роботов последовательной кинематики являются следующие выражения, представляющие собой формулы для рекуррентных вычислений:

- угловых скоростей:

$$\omega_i = \left( R_i^{i-1}(q_i) \right)^T [\omega_{i-1} + (1 - \sigma_i) \dot{q}_i z_{i-1}] = \left( R_i^{i-1}(q_i) \right)^T \omega_i^{i-1}, \quad (2.20)$$

где  $R_i^{i-1}(q_i)$  – поворотная матрица для пары систем координат  $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  и  $O_i x_i y_i z_i$ ,

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, & \text{если звено вращательное,} \\ 1, & \text{если звено призматическое,} \end{cases}$$

$z_{i-1} = [0 \ 0 \ 1]^T$  – вектор координат оси  $z$  (если системы координат назначены в соответствии с соглашением Денавита-Хартенберга),  $\omega_i^{i-1}$  – угловая скорость  $i$ -го звена относительно систем координат  $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ ,

- линейных скоростей:

$$v_{c,i} = v_i + \omega_i \times r_{c,i}, \quad (2.21)$$

где

$$v_i = \left( R_i^{i-1}(q_i) \right)^T [v_{i-1} + \sigma_i \dot{q}_i z_{i-1} + \omega_i^{i-1} \times r_{i-1,i}^{i-1}] \quad (2.22)$$

<sup>2</sup>Более подробная информация о значении и способе вычисления тензора инерции тела приведена в Приложении 3.

обозначает линейную скорость начала координат  $O_i$ ,  $r_{c,i}$  – вектор положения центра масс  $i$ -го звена относительно  $O_i$ ,  $r_{i-1,i}^{i-1}$  – координаты радиус-вектора, соединяющего  $O_{i-1}$  и  $O_i$  относительно системы координат  $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ .

### Потенциальная энергия

Потенциальная энергия  $i$ -го звена робота может быть найдена как

$$\mathcal{P}_i = m_i g^T r_{c,i}$$

где  $r_{c,i}$  – вектор, описывающий расположение центра масс звена относительно инерциальной системы координат (см. Рис. 2.2). Этот вектор может быть рассчитан на основе следующего соотношения:

$$\begin{bmatrix} r_{c,i} \\ 1 \end{bmatrix} = H_1^0(q_1) H_2^1(q_2) \cdots H_i^{i-1}(q_i) \begin{bmatrix} r_{c,i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где  ${}^i r_{c,i} - [3 \times 1]$  вектор координат центра масс звена в его собственной системе координат,  $H_k^{k-1} - [4 \times 4]$  матрицы однородных преобразований между последовательными системами координат (см. Приложение 2).

Таким образом, полная потенциальная энергия робота может быть рассчитана на основе принципа суперпозиции в соответствии с формулой

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^n m_i g^T r_{c,i}. \quad (2.24)$$

*З а м е ч а н и е 2.3 Для кинематической цепи потенциальная энергия звена зависит только от текущих значений обобщенных координат, соответствующих данному звену и предшествующим ему:*

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q_j, j \leq i)$$

### 2.2.2 Связь с компонентами уравнения движения в форме (1.17)

После того, как мы нашли выражения для полной кинетической и потенциальной энергии робота, мы можем вычислить лагранжиан системы и вывести ее уравнение движения соответствующей подстановкой

в формулу (2.15). При этом интересно выяснить связь между компонентами уравнения движения в конфигурационном пространстве, приведенного к стандартной форме (1.17), и уравнения Эйлера-Лагранжа (2.15), что позволит получить прямые формулы для вычисления матрицы инерции системы, а также векторов кориолисовых/центробежных и гравитационных сил.

В действительности, (2.15) имеет четкую структуру. Если обратить внимание, что потенциальная энергия системы (2.24) зависит только от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей, то каждое уравнение в (2.15) можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Разберем каждое из слагаемых (2.25).

Выражение для кинетической энергии системы (2.19) можно переписать в виде

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{k,j} m_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (2.26)$$

где матрица

$$M(q) = \left[ \sum_{i=1}^n m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i^0(q) I R_i^0(q)^T J_{\omega_i}(q) \right], \quad (2.27)$$

а переменные  $m_{kj}(q)$  обозначают ее соответствующие элементы.

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = \sum_{j=1}^n m_{kj} \dot{q}_j,$$

и в соответствии с правилом производной сложной функции первое слагаемое в (2.25) можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n m_{kj} \dot{q}_j \right] = \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} [m_{kj}(q)] \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \dot{q}_j \end{aligned}$$

или иначе

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.28)$$

При этом второе слагаемое в (2.25) можно расписать как

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{q} M(q) \dot{q} - \mathcal{P} \right] = \frac{1}{2} \dot{q} \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} M(q) \right] \dot{q} - \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{P} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Комбинируя (2.28) и (2.29), получаем итоговое выражение для уравнения движения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{P} = \tau_k \end{aligned}$$

или в более компактной форме

$$\sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.30)$$

где символы Кристофеля

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right),$$

а градиент потенциальной энергии

$$g_k(q) = \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{P}.$$

Сопоставляя структуру уравнений (2.30) и (1.17), легко увидеть связь между матрицей инерции, а также векторами кориолисовых/центробежных и гравитационных сил в (1.17) и слагаемыми (2.30),

являющимися сомножителями при обобщенных ускорениях  $\ddot{q}_j$  и скоростях  $\dot{q}_j$ , а также градиентом потенциальной энергии соответственно. При этом уравнение (2.27) является формулой для прямого расчета компонентов матрицы инерции  $M(q)$ , использующихся также для вычисления символов Кристофеля, по известным геометрическим параметрам робота, например, параметрам Денавита-Хартенберга, а также массам и тензорам инерции его звеньев и якобианам поступательного и вращательного движения.

### 2.2.3 Пример вывода

В качестве примера рассмотрим вывод уравнения движения плоского манипулятора с двумя вращательными звеньями, центр масс которых находится на их кинематических осях, перемещающихся в вертикальной плоскости (см. Рис. 2.3).

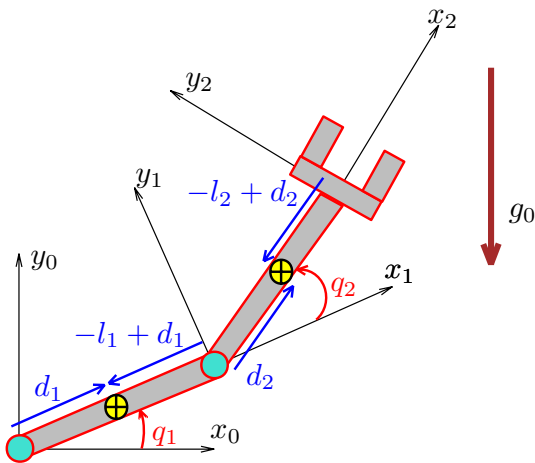


Рис. 2.3. Плоский манипулятор с двумя вращательными сочленениями.

Для этого случая можно провести инициализацию системы со следующими параметрами:

- вектор гравитации  $g_0 = [0, -9.81, 0]^T$ ;

- поворотные матрицы

$$R_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- для вращательных звеньев  $\sigma_i = 0$ ;
- координаты центров масс звеньев  $r_{c,i} = [-l_i + d_i, 0, 0]^T$ ;
- скорости базы робота  $\omega_0 = 0, v_0 = 0$ .

Для итеративного вычисления скоростей звеньев воспользуемся формулами (2.20)–(2.22):

- $i = 1$

$$\omega_1 = (R_1^0(q_1))^T \left[ \omega_0 + \dot{q}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix};$$

$$v_1 = (R_1^0(q_1))^T \left[ v_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 \\ l_1 \sin q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v_{c,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l_1 + d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- $i = 2$

$$\omega_2 = (R_2^1(q_2))^T \left[ \omega_1 + \dot{q}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} v_2 &= (R_2^1(q_2))^T \left[ v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_2 \cos q_2 \\ l_2 \sin q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} l_1 \sin q_2 \dot{q}_1 \\ l_1 \cos q_2 \dot{q}_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
v_{c,2} &= v_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \text{dot}q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l_2 + d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_1 \sin q_2 \dot{q}_1 \\ l_1 \cos q_2 \dot{q}_1 + d_2 (\dot{q}_1 + \text{dot}q_2) \\ 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

Далее, подставляя полученные значения линейных и угловых скоростей в формулу (2.19), вычислим кинетическую энергию звеньев:

- $i = 1$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{c1,zz} \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + I_{c1,zz}) \dot{q}_1^2; \quad (2.31)$$

- $i = 2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{q}_1^2 + d_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 d_2 \cos q_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} I_{c2,zz} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2
\end{aligned} \quad (2.32)$$

Соответственно, суммируя выражения (2.31) и (2.32) и группируя слагаемые, получаем выражение для полной кинетической энергии манипулятора в компактной векторно-матричной форме записи:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}(q_2) & m_{12}(q_2) \\ m_{12}(q_2) & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

где

$$m_{11}(q_2) = I_{c1,zz} + m_1 d_1^2 + I_{c2,zz} + m_2 l_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 l_1 d_2 \cos q_2 = a_1 + 2a_2 \cos q_2,$$

$$m_{12}(q_2) = I_{c2,zz} + m_2 d_2^2 + m_2 l_1 d_2 \cos q_2 = a_3 + a_2 \cos q_2,$$

$$m_{22} = I_{c2,zz} + m_2 d_2^2 = a_3,$$

где  $a_1 = I_{c1,zz} + m_1 d_1^2 + I_{c2,zz} + m_2 l_1^2 + m_2 d_2^2$ ,  $a_2 = m_2 l_1 d_2$ ,  $a_3 = I_{c2,zz} + m_2 d_2^2$  – постоянные параметры.

Из выражения (2.33) мы видим матрицу инерции робота, а также на основании формулы (2.30) можем вычислить компоненты вектора Кориолисовых и центробежных сил:

$$c_1(q, \dot{q}) = -a_2 \sin q_2 (\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2),$$

$$c_2(q, \dot{q}) = a_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2.$$

Далее, с использованием выражения (2.24) выведем соотношения для потенциальной энергии звеньев манипулятора:

$$\mathcal{P}_1 = m_1 g_0 d_1 \sin q_1, \quad \mathcal{P}_2 = m_2 g_0 (l_1 \sin q_1 + d_2 \sin(q_1 + q_2)) \quad (2.34)$$

Следовательно, на основании формул (2.34) и (2.30), мы можем получить выражения для вектора гравитационных сил системы

$$\begin{aligned} g(q) &= \begin{pmatrix} g_0 (m_1 d_1 \cos q_1 + m_2 l_1 \cos q_1 + m_2 d_2 \cos(q_1 + q_2)) \\ g_0 m_2 d_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, на примере манипулятора с двумя вращательными звеньями мы выполнили расчет всех членов уравнения движения системы на основе метода Эйлера-Лагранжа.

## 2.3 Специальные случаи

В этом подразделе мы рассмотрим некоторые дополнительные случаи робототехнических систем и продемонстрируем, как метод Эйлера-Лагранжа может быть использован для вывода их уравнений движений.

### 2.3.1 Учет динамики двигателя и редуктора

Безусловно, наличие в работе двигателей и редукторов оказывает влияние на общую динамику системы, и в ряде случаев это необходимо дополнительно учитывать при выводе динамических моделей.

Здесь мы будем опираться на следующие допущения:

- привод устанавливается на звене, предшествующем вращающему им сочленению;
- оси вращения ротора двигателя и звена совпадают.

При этом общие принципы расширения уравнений с учетом влияния актюаторов достаточно просты:

- масса двигателя добавляется к общей массе звена;
- инерция ротора учитывается в общей кинетической энергии системы;
- скорости и силы/моменты пересчитываются с учетом коэффициентов передачи редукторов.

*Замечание 2.4* Иногда в редукторах, в частности, манипуляционных роботов возникают перекрестные связи между приводами и управляемыми сочленениями. В этом случае составляется матрица передаточных чисел, имеющая не диагональную структуру.

В качестве примера разберем, как динамика, связанная с приводом, может учитываться в уравнении движения плоского однозвенного поворотного маятника (см. Рис. 2.4).

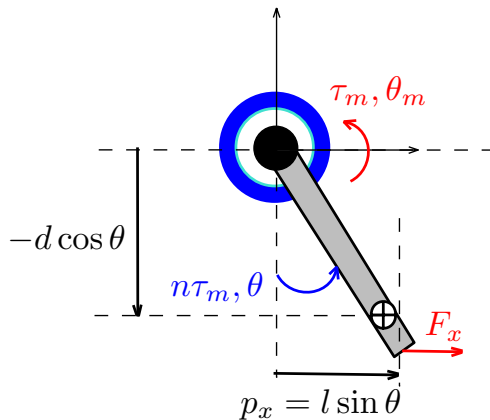


Рис. 2.4. Однозвенный маятник с двигателем и редуктором.

Кинетическая энергия самого маятника может быть вычислена по формуле:

$$\mathcal{K}_l = \frac{1}{2} (I_l + md^2) \dot{\theta}^2,$$

где  $I_l$  – момент инерции звена относительно его центра масс,  $m$  – масса звена,  $d$  – расстояние от оси вращения до центра масс звена,  $\dot{\theta}$  – скорость вращения звена (после редуктора).

При этом кинетическая энергия привода

$$\mathcal{K}_m = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_m^2,$$

где  $\dot{\theta}_m = n\dot{\theta}$  – скорость вращения двигателя (до редуктора),  $n$  – передаточное число редуктора,  $I_m$  – момент инерции привода относительно оси вращения.

Тогда суммарная кинетическая энергия системы

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_l + \mathcal{K}_m = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad (2.35)$$

где  $I = I_l + md^2 + n^2 I_m$  – суммарный момент инерции системы относительно оси вращения.

Потенциальная энергия системы вычисляется по формуле

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - mg_0 d \cos \theta. \quad (2.36)$$

Группируя выражения (2.35)–(2.36), получаем формулу Лагранжiana системы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mg_0 d \cos \theta - \mathcal{P}_0. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в уравнение Эйлера-Лагранжа (2.15), получаем уравнение движения:

$$I \ddot{\theta} + mg_0 d \sin \theta = \tau. \quad (2.38)$$

Если мы хотим дополнительно учесть силы трения в двигателе и сочленении, а также влияние внешних не консервативных сил, то мы можем записать следующее выражение для обобщенного момента:

$$\tau = n\tau_m - k_{fl}\dot{\theta} - nk_{fm}\dot{\theta}_m + \dot{p}_x F_x = n\tau_m - (k_{fl} + n^2 k_{fm})\dot{\theta} + l \cos \theta F_x, \quad (2.39)$$

где  $\tau_m$  – момент на двигателе до редуктора,  $k_{fm}$  и  $k_{fl}$  – коэффициенты вязкого трения в двигателе и сочленении соответственно,  $F_x$  – внешняя сила, приложенная к концу маятника,  $p_x$  – плечо внешней силы,  $l$  – длина звена маятника.

Также можно записать уравнение движение, приняв за обобщенную координату угол поворота двигателя (до редуктора), а не маятника:

$$\frac{I}{n^2} \ddot{\theta}_m + \frac{m}{n} g_0 d \sin \frac{\theta_m}{n} = \tau_m - \left( \frac{k_{fl}}{n^2} + k_{fm} \right) \dot{\theta}_m + \frac{l}{n} \cos \frac{\theta_m}{n} F_x.$$

### 2.3.2 Замкнутые кинематические цепи

В ряде приложений востребовано использование в роботах замкнутых кинематических цепей. В частности, в манипуляторах используются пятирычажные механизмы, придающие конструкции большую жесткость, а значит повышающие их грузоподъемность и расширяющие диапазон рабочих скоростей (см. Рис. ??). В данном подразделе мы рассмотрим, как изученный ранее метод вывода уравнений движения может быть адаптирован для синтеза динамических моделей подобных систем. В общем случае, представленная здесь процедура может быть применена для роботов параллельной кинематики.

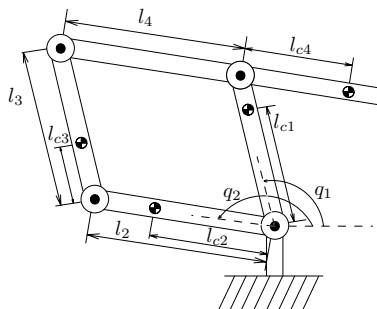


Рис. 2.5. Кинематическая схема пятирычажного механизма.

Начнем рассмотрение основных шагов процедуры с более общего случая, когда пятирычажный механизм не является параллелограммом, то есть  $l_1 \neq l_3$ ,  $l_2 \neq l_4$ .

Выпишем выражения для координат центров масс звеньев в механизме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 \\ l_2 \sin q_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_3 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_4 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти выражения, мы получим формулы для линейных и угловых скоростей звеньев. Так, например, для первого звена:

$$v_{c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}.$$

Используя формулы (2.19) и (2.24), мы получаем выражения для кинетической и потенциальной энергии механизма:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \left[ m_1 |v_{c1}|^2 + \omega_1^T \mathcal{I}_1 \omega_1 \right] + \frac{1}{2} \left[ m_2 |v_{c2}|^2 + \omega_2^T \mathcal{I}_2 \omega_2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ m_3 |v_{c3}|^2 + \omega_3^T \mathcal{I}_3 \omega_3 \right] + \frac{1}{2} \left[ m_4 |v_{c4}|^2 + \omega_4^T \mathcal{I}_4 \omega_4 \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

и

$$\mathcal{P} = m_1 g y_{c1} + m_2 g y_{c2} + m_3 g y_{c3} + m_4 g y_{c4}. \quad (2.41)$$

Звенья в замкнутой кинематической цепи объединены голономными связями  $N_c(q)$ . Для пятирычажного механизма их можно выписать как

$$N_c(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + l_4 \cos q_4 - l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \\ l_1 \sin q_1 + l_4 \sin q_4 - l_2 \sin q_2 - l_3 \sin q_3 \end{bmatrix} = 0$$

Изначально уравнение движения механизма может быть описано в координатах  $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \in \mathbb{R}^4$ . С учетом наличия двух независимых голономных связей  $N_c(q) \in \mathbb{R}^2$ , такое описание является избыточным.

Данные связи вызывают силы связей  $F_c \in \mathbb{R}^2$ . В этом случае правая часть уравнения Эйлера-Лагранжа, описывающего динамику системы, должно содержать соответствующий член:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q} = \tau + J_c^T F_c,$$

где  $J_c$  – Якобиан сил связей.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы вычислить силы связей и редуцировать динамику до  $4 - 2 = 2$  обобщенных координат  $\{q_1, q_2\} \in \mathbb{R}^2$ .

Для этого предварительно получим выражения первой и второй производной уравнений голономных связей:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_c(q) &= J_c(q) \dot{q} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & l_2 \sin q_2 & l_3 \sin q_3 & -l_4 \sin q_4 \\ l_1 \cos q_1 & -l_2 \cos q_2 & -l_3 \cos q_3 & l_4 \cos q_4 \end{bmatrix} \dot{q} \\ &= J_{c,1}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + J_{c,2}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} N_c(q) &= [\dot{J}_{c,1}(q, \dot{q}) \quad \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q})] \dot{q} + [J_{c,1}(q) \quad J_{c,2}(q)] \ddot{q} = 0, \end{aligned}$$

где  $J_{c,1}$  и  $J_{c,2}$  – Якобианы по соответствующим наборам координат.

Выделяем два набора координат: обобщенные (свободные)  $q_r = [q_1, q_2]^T$  и связанные  $q_c = [q_3, q_4]^T$ .

Соответственно, уравнение движения в конфигурационном пространстве может быть переписано как

$$\begin{bmatrix} M_1(q) \\ M_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{c,1}^T F_c \\ J_{c,2}^T F_c \end{bmatrix}$$

Тогда силы связей вычисляются как

$$F_c = \begin{bmatrix} F_{c,x} \\ F_{c,y} \end{bmatrix} = [J_{c,2}^T]^{-1} \left[ M_2(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + C_2(q, \dot{q}_r) \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + g_2 \right]$$

Далее мы можем выразить связанные координаты и их производные через обобщенные:

$$q_c = f(q_r),$$

$$\dot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) J_{c,1}(q) \dot{q}_r$$

$$\ddot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) \left[ \dot{J}_{c,1}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r + J_{c,1}(q) \ddot{q}_r + \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_c \right],$$

где функция  $f : N(q_r) \rightarrow q_c$ .

Подставляя эти выражение в исходное уравнение движения, после группировки слагаемых мы можем получить выражения редуцированной динамики механизма:

$$M_r(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + C_r(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + g_r = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Далее разберем упрощенный случай, когда механизм представляет собой параллелограмм, то есть  $l_1 = l_3, l_2 = l_4$ , а значит  $q_3 = q_1, q_4 = q_2$ . Здесь мы сразу используем обобщенные координаты  $\{q_1, q_2\}$ , так как выражения для сил связей выводятся по описанной ранее процедуре тривиально.

Повторим те же шаги, что для общего случая. Сначала вычислим координаты центров масс звеньев:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_1 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

и соответствующие линейные и угловые скорости

$$\begin{aligned} v_{c1} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}, \\ v_{c2} &= \begin{bmatrix} 0 & -l_{c2} \sin q_2 \\ 0 & l_{c2} \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}, \\ v_{c3} &= \begin{bmatrix} -l_{c3} \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 \\ l_{c3} \cos q_1 & l_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}, \\ v_{c4} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & l_{c4} \sin q_2 \\ l_1 \cos q_1 & -l_{c4} \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}, \\ \omega_1 = \omega_3 &= \dot{q}_1 \vec{k}, \\ \omega_2 = \omega_4 &= \dot{q}_2 \vec{k}, \end{aligned}$$

где  $\vec{k} = [0, 0, 1]^T$ .

Подставляя полученные выражения для координат центров масс и скоростей звеньев в уравнение для кинетической и потенциальной энергии (2.40)–(2.41), мы получим уравнение движением системы.



В частности, мы можем переписать уравнение для кинетической энергии в векторно-матричной форме:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \dot{q}$$

при

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3, \\ m_{12} &= [m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] \cdot \cos(q_2 - q_1), \\ m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4. \end{aligned}$$

*Замечание 2.5* Если механизм сконструирован так что  $[m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] = 0$ , тогда матрица инерции диагональная и постоянная, а значит динамика не содержит Кориоллисовых и центробежных сил и уравнения движения не имеют перекрестных связей:

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{P} &= \tau_1, \\ m_{22} \ddot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{P} &= \tau_2. \end{aligned}$$

### 2.3.3 Роботы с гибкими сочленениями

В роботах с гибкими сочленениями привод и звено связаны через эластичный, то есть деформируемый элемент (см. Рис. ??). На практике это имеет место, например, когда:

- привод имеет длинный вал;
- в работе используется гармонический редуктор;
- для передачи движения используются ремни и/или тросы.

Кроме того, гибкость может специально конструктивно вноситься в сочленения, когда на робот устанавливаются последовательные эластичные актюаторы (SEA) или актюаторы прерывной жесткости (VSA). Это особенно востребовано в приложениях, где необходимо обеспечить безопасное физическое взаимодействие робота с человеком или средой либо наоборот где робот должен производить быстрые "взрывные" движения.

Мы рассмотрим моделирование динамики робота с гибкими сочленениями при следующие допущениях:

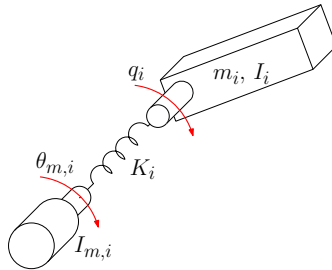


Рис. 2.6. Схема гибкого вращательного сочленения.

1. деформация сосредоточена в сочленении;
2. гибкость вызывает небольшие смещения, которые описываются моделью линейной пружины;
3. роторы приводов имеют равномерное распределение массы с центром масс на оси вращения;
4. привод располагается до приводимого им в движение звена.

Стандартную схему модификации уравнений движения, чтобы учесть эластичность приводов, можно разложить на 4 шага:

1. Вводим  $2n$  обобщенных координат:  $q \in R^n$  – координаты звеньев робота, а  $\theta \in R^n$  – координаты приводов, измеренные после редуктора, то есть  $\theta_i = \theta_{m,i}/r_i$ , где  $\theta_{m,i}$  – координата привода до редуктора, например, угол поворота вала двигателя, а  $r_i$  – передаточное число редуктора.
2. К кинетической энергии звеньев добавляем кинетическую энергию приводов робота, рассчитываемую по формулам:

$$\mathcal{K}_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{m,i} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathcal{I}_m \dot{\theta},$$

где энергия каждого отдельного привода

$$\mathcal{K}_{m,i} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_{m,i} r_i^2 \dot{\theta}_i^2,$$

$\mathcal{I}_m = \text{diag}(\mathcal{I}_{m,i}) - [n \times n]$  диагональная матрица инерции приводов.

3. К потенциальной энергии звеньев добавляем потенциальную энергию эластичных сочленений, рассчитываемых по формуле энергии деформированной пружины:

$$\mathcal{P}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{e,i} = \frac{1}{2}(q - \theta)^T K(q - \theta),$$

где энергия деформации в каждом сочленении

$$\mathcal{P}_{e,i} = \frac{1}{2}K_i(q_i - \theta_i)^2,$$

$K = \text{diag}(K_i) - [n \times n]$  диагональная матрица коэффициентов жесткости сочленений.

4. С учетом модифицированных выражений для кинетической и потенциальной энергии составляем уравнение движения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) + K(q - \theta) &= 0, \\ \mathcal{I}_m\ddot{\theta} + K(\theta - q) &= \tau \end{aligned}$$

# Глава 3

## Метод Ньютона-Эйлера

### 3.1 Основные положения

В этом разделе мы рассмотрим метод Ньютона-Эйлера, которые также широко используются в робототехнике для синтеза динамических моделей. Как уже было сказано в Главе 1, в отличие от рассмотренного ранее метода Эйлера-Лагранжа, при выводе уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера используется принцип баланса сил и моментов в системе, а сами уравнения записываются отдельно для каждого звена робота. При этом отправной точкой является составление уравнений на основе таких базовых физических законов, как 2-ой и 3-ий законы Ньютона.

*Утверждение 3.1 (2-й закон Ньютона) Сумма сил и моментов, действующих на тело, равна изменению линейного или углового момента (импульса) тела для поступательного и вращательного движения соответственно, то есть:*

- для поступательного движения:

$$\sum_{i=1}^k f_i = \frac{d}{dt} (mv_c) = m\dot{v}_c,$$

где  $f_i$  – действующая сила,  $m$  – масса тела,  $\dot{v}_c$  – скорость движения центра масс тела;

- для вращательного движения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \tau_i &= \frac{d}{dt} (\mathcal{I}\omega) = \mathcal{I}\dot{\omega} + \frac{d}{dt} (R\mathcal{I}_i R^T) \omega = \mathcal{I}\dot{\omega} + (\dot{R}\mathcal{I}_i R^T + R\mathcal{I}_i \dot{R}^T) \omega \\ &= \mathcal{I}\dot{\omega} + S(\omega)R\mathcal{I}_i R^T \omega + R\mathcal{I}_i R^T S^T(\omega)\omega = \mathcal{I}\dot{\omega} \times \mathcal{I}\omega \end{aligned}$$

где  $\mathcal{I} = R\mathcal{I}_i R^T$  – момент инерции тела в инерциальной системе координат,  $\mathcal{I}_i$  – момент инерции тела в собственной системе координат,  $\omega$  – угловая скорость тела относительно его центра масс.

**Утверждение 3.2 (3-й закон Ньютона)** Сила/момент, приложенные телом  $i$  к телу  $i+1$  равны силе/моменту, приложенным телом  $i+1$  к телу  $i$  и взятым с противоположным знаком, что устанавливает баланс действия и противодействия в системе.

**Замечание 3.1** Исключая силы реакции и осуществляя обратную подстановку, из уравнений Ньютона-Эйлера можем получить уравнения движения, аналогичные уравнениям Эйлера-Лагранжа.

Для начала рассмотрим поступательное движение звена робота и действующие при этом силы (см. Рис. 3.1).

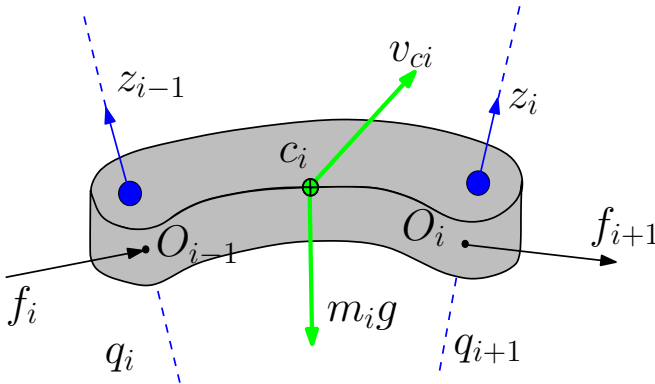


Рис. 3.1. Поступательное движение звена робота.

На основе утверждений 3.1–3.2 мы можем составить уравнение баланса сил при поступательном движении звена (уравнение Ньютона):

$$f_i - f_{i+1} + m_i g = m_i a_{c_i}, \quad (3.1)$$

где  $f_i$  - сила, с которой звено  $i - 1$  действует на звено  $i$ ,  $f_{i+1}$  - сила, с которой звено  $i$  действует на звено  $i + 1$ ,  $m_i g$  - сила гравитации,  $a_{c_i} = \dot{v}_{c_i}$  - линейное ускорение центра масс  $i$ -го звена.

*Замечание 3.2* Все величины в уравнениях баланса сил и моментом являются векторными, причем они выражены в единой локальной системе координат звена.

Далее проанализируем вращательное движение звена робота и действующие при этом моменты (см. Рис. 3.2).

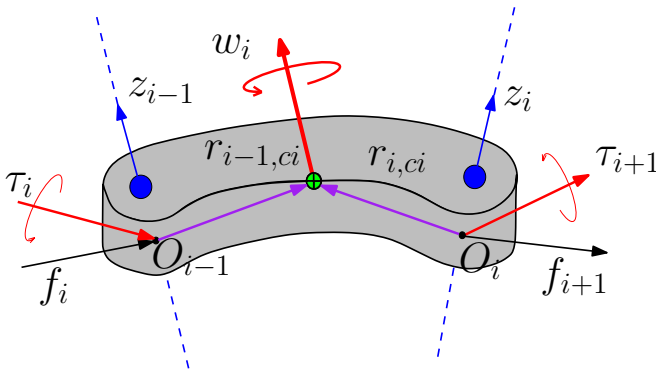


Рис. 3.2. Вращательное движение звена робота.

Аналогично анализу поступательного движения, на основе утверждений 3.1–3.2 выведем уравнение баланса моментов для вращательного движения (уравнение Эйлера):

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_{i+1} + f_i \times r_{i-1, c_i} - f_{i+1} \times r_{i, c_i} \\ = \mathcal{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathcal{I}_i \omega_i), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\tau_i$  - момент, с которым звено  $i - 1$  действует на звено  $i$ ,  $\tau_{i+1}$  - момент, с которым звено  $i$  действует на звено  $i + 1$ ,  $f_i \times r_{i-1, c_i}$  - момент из-за

действия силы  $f_i$ ,  $-f_{i+1} \times r_{i,c_i}$  - момент из-за действия силы  $-f_{i+1}$ ,  $r_{i-1,c_i}$  - радиус-вектор, из точки соединения звеньев  $i-1$  и  $i$  к центру масс  $i$ -го звена,  $r_{i,c_i}$  - радиус-вектор, из точки соединения звеньев  $i$  и  $i+1$  к центру масс  $i$ -го звена,  $\dot{\omega}_i$  - угловое ускорение  $i$ -го звена.

### 3.2 Вывод уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера

Вывод уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера представляет собой рекурсивную процедуру, которая для  $n$ -звенного манипулятора последовательной кинематики может быть разбита на следующие шаги:

#### 1. Инициализация.

- Определить количество тип каждого звена: призматическое или вращательное.
- Выбрать системы координат  $O_i x_i y_i z_i$  для  $i = 0, \dots, n$  где  $i$ -ая система координат прикреплена к звену  $i$ , а система координат с индексом 0 является инерциальной. Например, на основании соглашения Денавита-Хартенберга (см. Приложение 2).
- Определить соответствующие геометрические параметры, входящие в выражения для матриц однородных преобразований, задающих взаимное расположение соседних систем координат.
- Определить динамические параметры робота: масса, тензор инерции и координаты центра масс для каждого звена, на основе которых также должны быть вычислены координаты радиус-векторов  $r_{i-1,c_i}$  и  $r_{i,c_i}$ .
- Задать начальные значения линейных и угловых скоростей и ускорений базы робота.
- Задать начальные значения внешних сил и моментов, приложенных к терминальному звену робота.

2. **Прямая рекурсия.** Вычислить линейные и угловые скорости и ускорения звеньев робота последовательно от 1-го до  $n$ -го.

3. **Обратная рекурсия.** Вычислить силы и моменты, действующие на звенья робота последовательно от  $n$ -го до 1-го, стартуя с терминальных условий на  $f_{n+1}$  и  $\tau_{n+1}$ .

*Замечание 3.3* Предполагаем, что желаемая траектория движения робота в конфигурационном пространстве задана через  $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$ .

Далее мы приведем рекуррентные выражения, которые используются на каждом из описанных шагов с учетом следующим замечаний:

- выражения приводятся для вращательных звеньев;
- если в обозначении вектора опущен верхний индекс, то вектор выражен в собственной системе координат звена.

### 3.2.1 Прямая рекурсия

Для манипулятора последовательной кинематики с вращательными звеньями на этом этапе требуется вычислить угловые скорости  $\omega_i$  и ускорения  $\dot{\omega}_i$ , а также линейные ускорения центров масс  $a_{ci}$  для всех звеньев.

За основу здесь берутся формулы линейной и угловой скоростей звеньев, приведенные в Главе 2, а ускорение вычисляется по формуле производной вектора в подвижной системе координат (см. Приложение 1).

Инициализируя значения угловых скоростей  $\omega_0$  и ускорений  $\dot{\omega}_0$ , а также линейных ускорений  $a_0$  базы робота, для  $i$  от 1 до  $n$  на основе следующих формул вычисляем последовательно:

- угловую скорость  $i$ -го звена:

$$\omega_i = (R_i^{i-1})^T [\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}]; \quad (3.3)$$

- угловое ускорение  $i$ -го звена:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= (R_i^{i-1})^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} - \dot{q}_i z_{i-1} \times (\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1})] \\ &= (R_i^{i-1})^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1}]; \end{aligned} \quad (3.4)$$



- линейное ускорение локальной подвижной (кинематической) системы координат, прикрепленной к  $i$ -му звену:

$$a_i = (R_i^{i-1})^T a_{i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i-1,i}^i + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i-1,i}^i); \quad (3.5)$$

- линейное ускорение центра масс  $i$ -го звена:

$$a_{c_i} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_{i,c_i} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,c_i}); \quad (3.6)$$

где  $\dot{q}_i$  и  $\ddot{q}_i$  обозначают обобщенные скорости и ускорения в  $i$ -ом сочленении робота,  $z_{i-1}$  - координатный вектор оси вращения  $(i-1)$ -го звена.

### 3.2.2 Обратная рекурсия

На этом этапе требуется вычислить силы  $f_i$  и моменты  $\tau_i$ , действующие на звенья робота, для  $i$  от  $n$  до 1, стартуя с начальных значений для внешних сил  $f_{n+1}$  и моментов  $\tau_{n+1}$ , действующих на терминальное звено робота.

Вывод формул производится на основе соотношений (3.1) и (??)<sup>1</sup>

- для сил:

$$f_i = f_{i+1} + m_i (a_{c_i} - g^i), \quad (3.7)$$

- для моментов:

$$\tau_i = \tau_{i+1} - f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) + f_{i+1} \times r_{i,c_i} + \mathcal{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathcal{I}_i \omega_i). \quad (3.8)$$

В действительности, уравнения (3.7)–(3.8) являются векторными и позволяют на каждом шаге вычислить вектора сил и моментов, приложенных к каждому звену робота, включая силы реакции в кинематических парах. Чтобы получить вместо этого  $n$  скалярных уравнений,

---

<sup>1</sup>Если при инициализации значений ускорения базы робота в прямой рекурсии учесть ускорение свободного падения  $g^0$ , то можно исключить силу гравитации из вычислений сил и моментов в обратной рекурсии.

## 3.2 Вывод уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера

нужно выполнить **проекцию** векторов сил и моментов из декартова пространства в конфигурационное:

$$u_i = \begin{cases} f_i^T \cdot z_{i-1}^i + \eta_i \dot{q}_i, & \sigma_i = 0 \\ \tau_i^T \cdot z_{i-1}^i + \eta_i \dot{q}_i, & \sigma_i = 1 \end{cases}$$

где  $u_i$  - обобщенная сила в  $i$ -ом сочленении, являющаяся скалярной величиной, аналогичной по смыслу вводимой в уравнение Эйлера-Лагранжа,  $\sigma_i = 0$  для линейных звеньев,  $\sigma_i = 1$  для вращательных звеньев,  $\eta_i \dot{q}_i$  - диссипативная сила вязкого трения,  $z_{i-1}^i$  - координатный вектор оси вращения  $(i - 1)$ -го звена, выраженный в  $i$ -ой системе координат.

### 3.2.3 Организация вычислительной процедуры

*Замечание 3.4 Для численной реализации процедуры вывода уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера вычислительная сложность растет линейно с увеличением числа звеньев  $n$  робота ( $O(n)$ ), при этом на каждом шаге сложность вычислений одинакова. Таким образом, только численная реализация метода, когда на каждом шаге рекурсий подставляются текущие значения обобщенных координат, скоростей и ускорений робота, рекомендуется для использования в реальном времени.*

Разберем схему организации вычисления **обратной динамики**, когда по заданным значениям обобщенных координат, скоростей и ускорений  $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$  требуется найти соответствующие значения обобщенных сил  $u_i(t)$ .

Обозначим FR полный шаг прямой рекурсии (3.3)–(3.6) для вычисления скоростей и ускорений, BR – шаг обратной рекурсии (3.7)–(3.8) для вычисления сил и моментов, а P – операцию (3.2.2) проецирования сил и моментов. Схема вычислений представлена на Рис. 3.3.

С использованием той же вычислительной процедуры можно находить и численные значения вдоль заданной траектории для отдельных **компонентов уравнения движения** робота. Если мы обозначим функцию расчета на основе метода Ньютона-Эйлера обобщенных сил по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям как  $NE(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ , то обозначенную ранее опцию можно реализовать следующим выбором аргументов (входных значений) и параметров функции:

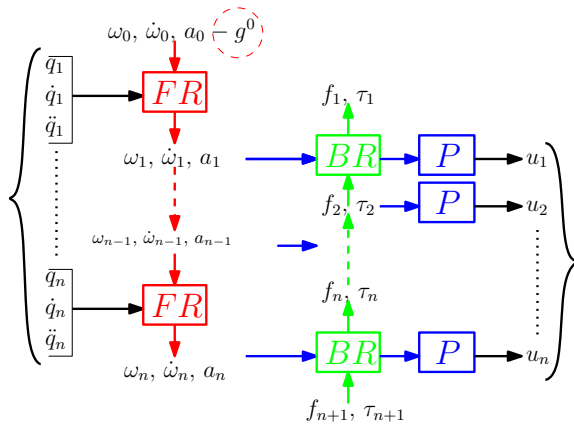


Рис. 3.3. Схема численного решения обратной задачи динамики на основе метода Ньютона-Эйлера.

- расчет инверсной динамики:  $u = NE(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ ;
- расчет вектора гравитации:  $g(q) = NE(q_d, 0, 0)$
- расчет вектор Кориолисовых/центробежных сил:  $c(q, \dot{q}) = NE(q_d, \dot{q}_d, 0)|_{g=0}$ ;
- постолбцовый расчет матрицы инерции:  $m_i(q) = NE(q_d, 0, 1)|_{g=0}$
- вычисление обобщенного момента:  $M(q)\dot{q} = NE(q_d, 0, \dot{q})|_{g=0}$ .

Кроме того, численную реализацию метода Ньютона-Эйлера можно использовать и для вычисления **прямой динамики**, то есть нахождения значений обобщенных ускорений робота вдоль траектории по заданным значениям обобщенных координат, скоростей и сил. Решение такой задачи востребовано для компьютерного моделирования робототехнических систем, и может быть получено следующим образом:

1. Вычислить совместно Кориолисовы/центробежные и гравитационные силы  $n(q(t_i), \dot{q}(t_i)) = NE(q_d(t_i), \dot{q}_d(t_i), 0)$ .

### 3.2 Вывод уравнений движения на основе метода Ньютона-Эйлера

---

2. Вычислить постолбцово матрицу инерции  $m_i(q(t_i)) = NE(q_d(t_i), 0, 1)|_{g=0}$ .
3. Обратить матрицу инерции  $M^{-1}(q(t_i)) = inv(M(q(t_i)))$ .
4. Для заданных обобщенных сил вычислить  $\ddot{q}(t_i) = inv(M(q(t_i)))(u(t_i) - n(q(t_i), \dot{q}(t_i)))$ .
5. Численно проинтегрировать  $\ddot{q}(t_i)$  и вычислить следующее состояние  $(q(t_{i+1}), \dot{q}(t_{i+1}))$ .

# Глава 4

## Свойства уравнений движения

Данный раздел посвящен анализу некоторых свойств уравнений движения робототехнических систем, имеющих значение при планировании траекторий и синтезе алгоритмов управления.

### 4.1 Свойства матрицы инерции

В этом подразделе коротко охарактеризуем некоторые свойства матрицы инерции  $M(q)$ , которые могут оказаться полезными при анализе динамики робототехнических систем.

1.  $M(q)$  – квадратная матрица, то есть  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;
2.  $M(q)$  – симметричная матрица, то есть  $M(q) = M(q)^T$ ;
3.  $M(q)$  является положительно определенной, так как кинетическая энергия механической системы всегда неотрицательна, то есть

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \geq 0;$$

4.  $M(q)$  имеет положительные собственные числа  $0 < \lambda_1(q) \leq \dots \leq \lambda_n(q)$  такие, что

$$\lambda_1(q) I_{n \times n} \leq M(q) \leq \lambda_n(q) I_{n \times n},$$

где  $I_n$  обозначает единичную матрицу размерности  $[n \times n]$

5. если робототехническая система содержит только вращательные звенья, то матрица инерции включает только функции синуса и косинуса от обобщенных координат, являющиеся ограниченными, следовательно, матрица инерции является равномерно ограниченной, то есть можно найти ограничения, не зависящие от обобщенных координат вида

$$\lambda_m I_{n \times n} \leq M(q) \leq \lambda_M I_{n \times n} < \infty,$$

где  $\lambda_m < \lambda_M$ ) – соответствующие константы.

#### 4.1.1 Матрицы инерции роботов элементарной кинематики

Приведем общий вид матриц инерции для некоторых типовых кинематических схем манипуляционных роботов:

- прямоугольный (декартов) манипулятор (см. Рис. 4.1а) характеризуется диагональной матрицей инерции, компоненты которой являются константами, то есть отсутствует взаимное влияние при перемещении звеньев, а также динамические параметры не зависят от текущей конфигурации робота, а значит отсутствуют кориолисовы и центробежные силы ( $c(q, \dot{q}) = 0$ ):

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}$$

- манипулятор с одним призматическим и одним вращательным звеном (PR кинематика, см. Рис. 4.1б) характеризуется матрицей инерции, диагональные компоненты которой являются константами, а внедиагональные, определяющие перекрестные связи между звеньями, зависят только от угла поворота второго звена:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}(q_2) \\ m_{12}(q_2) & m_{22} \end{bmatrix}$$

- плоский манипулятор с двумя вращательными звеньями (2R кинематика, см. Рис. 4.1в) характеризуется матрицей инерции, в которой последний диагональный компонент, определяющий собственную инерцию второго звена, является постоянным, а все остальные зависят только от угла поворота второго звена:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11}(q_2) & m_{12}(q_2) \\ m_{12}(q_2) & m_{22} \end{bmatrix}$$

- артикулированный манипулятор с тремя вращательными звеньями (3R кинематика, см. Рис. 4.1г) характеризуется матрицей инерции, по которой можно сказать, что инерциальные параметры звена зависят только от координат последующих звеньев в кинематической цепи, причем отсутствуют перекрестные связи между движением первого звена и двух последующих:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11}(q_2, q_3) & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(q_3) & m_{23}(q_3) \\ 0 & m_{23}(q_3) & m_{33} \end{bmatrix}$$

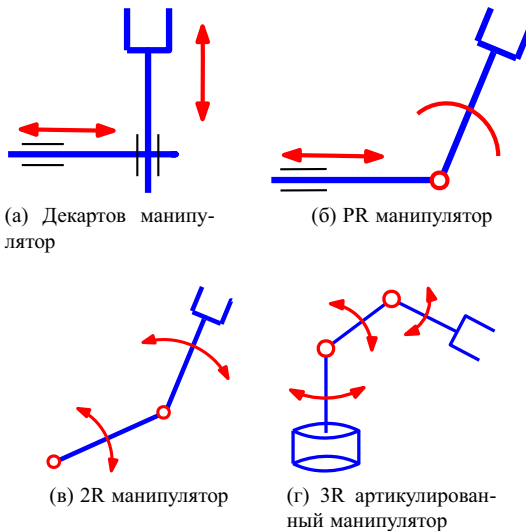


Рис. 4.1. Манипуляторы элементарной кинематики.

## 4.2 Ограничения на компоненты

Для манипуляционных роботов определенной кинематической структуры существуют дополнительные ограничения на компоненты уравнения движения:

- Манипулятор последовательной кинематики:
  - матрица инерции  $k_0 \leq \|M(q)\| \leq k_1 + k_2\|q\| + k_3\|q\|^2$ ;
  - матрица Кориолисовых/центробежных сил  $\|C(q, \dot{q})\| \leq (k_4 + k_5\|q\|)\|\dot{q}\|$ ;
  - вектор гравитационных сил  $\|G(q)\| \leq k_6 + k_7\|q\|$ ;
- Манипулятор только с вращательными звеньями
  - матрица инерции  $k_0 \leq \|M(q)\| \leq k_1$ ;
  - матрица Кориолисовых/центробежных сил  $\|C(q, \dot{q})\| \leq k_4\|\dot{q}\|$ ;
  - вектор гравитационных сил  $\|G(q)\| \leq k_6$ , где  $k_0, \dots, k_7$  – положительные константы;

## 4.3 Пассивность

Помимо лагранжиана для любой механической системы характерной является величина, характеризующая ее полную энергию.

*Определение 4.1 Гамильтонианом системы называется величина, вычисляемая как сумма ее кинетической и потенциальной энергии*

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{P}.$$

Анализ гамильтониана, а точнее его производной по времени  $\frac{d}{dt}\mathcal{H}$ , позволяет судить о таком свойстве системы, как **пассивность**.

*Определение 4.2 Пассивной называется механическая система, в которой часть ее полной энергии, рассеивающаяся в процессе движения, имеет ограничение снизу, то есть система, обладающая свойством диссипативности энергии.*



Принимая во внимание выражение для кинетической энергии системы (2.26), мы можем переписать формулу для вычисления гамильтониана системы как

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{P}(q)$$

Дифференцируя  $\mathcal{H}$  вдоль решения системы и используя соотношения (1.17) и (2.30), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{P}(q) \right] \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{d}{dt} [M(q)] \dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\ &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{d}{dt} [M(q)] \dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\ &= \dot{q}^T [\tau - C(q, \dot{q}) - g(q)] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{d}{dt} [M(q)] \dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}, \end{aligned}$$

где элементы матрицы  $C(q, \dot{q})$  вычисляются на основе  $\sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i$ , а  $g(q) = [g_1(q), \dots, g_n(q)]^T$ .

Группируя слагаемые, получаем приведенное выражение для производной гамильтониана системы:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \dot{q}^T \tau + \dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [M(q)] - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - g(q) \right). \quad (4.1)$$

По определению градиента потенциальной энергии в (2.30)

$$\left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - g(q) \right) = 0. \quad (4.2)$$

Проанализируем второе слагаемое в (4.1). Введем величину

$$N = \frac{d}{dt} [M(q)] - 2C(q, \dot{q})$$

и проверим ее  $(k, j)$ -ый компонент

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{kj} - 2c_{kj} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \left[ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right] \right\} \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i \end{aligned}$$

Так как матрица инерции  $M(q)$  является симметричной, то есть  $m_{ij} = m_{ji}$ , то

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} = \frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}, \quad (4.3)$$

а следовательно,

$$n_{kj} = -n_{jk},$$

то есть матрица  $N$  является косо-симметрической, а значит и

$$\dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [M(q)] - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, с учетом (4.4) и (4.2), можно переписать (4.1) как

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \dot{q}^T \tau. \quad (4.5)$$

Дифференциальное соотношение (4.5) может быть проинтегрировано, так что

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \mathcal{H}(q(t), \dot{q}(t)) dt = \mathcal{H}(q(T), \dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0), \dot{q}(0)) \quad (4.6)$$

$$= \int_0^T \dot{q}(t)^T \tau(t) dt. \quad (4.7)$$

Так как полная механическая энергия системы есть величина неотрицательная, мы можем заключить, что

$$\int_0^T \dot{q}(t)^T \tau(t) dt \geq -\beta,$$

где  $\beta = \mathcal{H}(q(0), \dot{q}(0))$ .

Таким образом, мы показали, что энергия, рассеиваемая в системе, имеет ограничение снизу, то есть система является пассивной.

Соотношение (4.5) называется соотношением пассивности (диссипативности), а (4.7) – соотношением пассивности (диссипативности) в интегральной форме.

## 4.4 Линейность по параметрам

Уравнения движения робототехнических систем являются **линейными по динамическим параметрам**, таким как массы, моменты инерции и первые моменты звеньев.

*Утверждение 4.1 Уравнение движения (1.17) является линейным по параметрам, так как существует известная векторная функция от обобщенных координат, скоростей и ускорений  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  размерности  $[n \times l]$ , называемая регрессором, такая что (1.17) может быть переписано в виде*

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta = \tau, \quad (4.8)$$

где  $\Theta - [l \times 1]$  вектор динамических параметров.

Более детально это свойство, а также способы сведения исходного нелинейного уравнения движения к линейной регрессионной форме (4.8) и определения минимального набора независимых динамических параметров, однозначно характеризующих движение робота, будут рассмотрены в следующем разделе.

# Глава 5

## Идентификация динамических моделей

Данный раздел посвящен вопросу оценивания динамических параметров, входящих в уравнения движения робототехнических систем, иначе говоря, динамической калибровке. В качестве примера мы рассмотрим динамическую калибровку манипулятора последовательной кинематики с избыточным числом степеней свободы.

Истинные значения динамических параметров роботов, таких как моменты инерции и координаты центров масс звеньев, зависящие не только от их массы, но и геометрии и других факторов, могут существенно отличаться от номинальных, заданных CAD моделью или спецификациями производителей. С другой стороны, установка оснастки или добавление полезной нагрузки оказывает влияние практически на все динамические параметры робота. Кроме того, некоторые динамические параметры, например, коэффициенты трения в приводах меняются в процессе работы, что связано как с нагревом, так и с износом механизмов.

Мы рассмотрим задачу динамической калибровки, когда оценивание параметров производится в оффлайн режиме по данным специально организованных экспериментов. В этом случае процедуру можно разбить на 5 шагов, которые и будут рассмотрены далее:

1. Получить модель системы, адаптированную для динамической калибровки.
2. Рассчитать оптимальные калибровочные траектории.

3. Провести эксперимент, записать и обработать полученные измерения.
4. Вычислить оценки динамических параметров.
5. Провести валидацию, то есть проверить качество полученной модели.

## 5.1 Линейная параметризация уравнений движения

Первым шагом в динамической калибровке является приведение динамической модели робота к специальному виду – линейной регрессионной форме, когда мы переписываем исходное нелинейное уравнение движения как систему уравнений, линейных по параметрам.

С каждым звеном робота мы будем ассоциировать три системы координат (см. Рис. 5.1):

1. базовая инерциальная  $O_0x_0y_0z_0$ ;
2. кинематическая  $O_ix_iy_iz_i$ , например, назначенная в соответствии с соглашением Денавита-Хартенберга или Халила-Клейнфингера [9?];
3. барицентрическая, то есть связанная с центром масс звена и ориентированная как и кинематическая  $O_{c,i}x_{c,i}y_{c,i}z_{c,i}$ .

Если не рассматривать эластичность звеньев и сочленений, а также возникающие в силы трения, то каждое звено робота характеризуется набором из **10** исходных постоянных динамических параметров:

- масса звена  $m_i$ ;
- **три** координаты центра масс звена относительно кинематической системы координат  $r_{ci} = [r_{xi} \ r_{yi} \ r_{zi}]^T$ ;
- тензор инерции звена относительно барицентрической системы координат, определяемый **шестью** моментами инерции

$$I_{ci} = \begin{bmatrix} I_{ci,xx} & I_{ci,xy} & I_{ci,xz} \\ - & I_{ci,yy} & I_{ci,yz} \\ - & - & I_{ci,zz} \end{bmatrix}$$

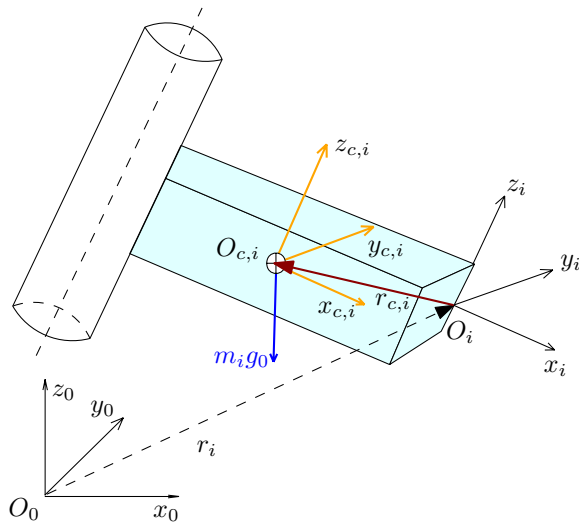


Рис. 5.1. Системы координат звена робота.

Задача преобразования формы записи динамической модели обусловлена тем, что слагаемые уравнений движения в конфигурационном пространстве включают *нелинейные* зависимости от исходных физических параметров звеньев. Чтобы проиллюстрировать это, проанализируем, например, выражения для кинетической и потенциальной энергии, которые используются для вычисления матрицы инерции, векторов кориолисовых и центробежным, а также гравитационных сил:

- потенциальная энергия:

$$P_i = -m_i g_0^T r_{0,ci} = -m_i g_0^T (r_i + r_{ci}) = -m_i g_0^T r_i - g_0^T (m_i r_{ci}); \quad (5.1)$$

- кинетическая энергия:

$$\begin{aligned}
K_i &= \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{ci} \omega_i & (5.2) \\
&= \frac{1}{2} m_i (v_i - S(r_{ci}) \omega_i)^T (v_i - S(r_{ci}) \omega_i) + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{ci} \omega_i \\
&= \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T (I_{ci} + m_i S^T(r_{ci}) S(r_{ci})) \omega_i - v_i S(m_i r_{ci}) \omega_i,
\end{aligned}$$

где скорость поступательного движения центра масс звена вычисляется на основе фундаментального кинематического соотношения

$$v_{ci} = v_i + \omega_i \times r_{ci} = v_i + S(\omega_i) r_{ci} = v_i - S(r_{ci}) \omega_i.$$

С другой стороны, можно заметить, что выражения (5.1)–(5.2) линейны относительно другого набора постоянных параметров:  $m_i$ ,  $m_i r_{ci}$  и  $(I_{ci} + m_i S^T(r_{ci}) S(r_{ci}))$ .

Причем, последний перечисленный параметр в действительности представляет собой тензор инерции звена относительно кинематической системы координат, что легко показать, применив рассмотренную ранее теорему Штейнера:

$$\begin{aligned}
I_{ci} + m_i S^T(r_{ci}) S(r_{ci}) &= I_{ci} + m_i (||r_{ci}||^2 E - r_{ci}^T r_{ci}) \\
&= I_i = \begin{bmatrix} I_{i,xx} & I_{i,xy} & I_{i,xz} \\ - & I_{i,yy} & I_{i,yz} \\ - & - & I_{i,zz} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого звена мы можем ввести вектор *стандартных динамических параметров*, состоящий из  $n_{sj} = 10$  постоянных параметров для каждого звена, относительно которых в выражениях для кинетической и потенциальной энергий наблюдается линейная зависимость:

$$\chi_i = \begin{pmatrix} m_i \\ m_i r_{ci} \\ I_i \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где  $m_i r_{ci}$  обозначает вектор первых моментов звена относительно кинематической системы координат  $O_i x_i y_i z_i$ .

**Утверждение 5.1** Так как уравнения движения получаются из соотношений для кинетической и потенциальной энергии (5.1)–(5.2) вследствие только линейных преобразований, уравнения движения механической системы всегда можно переписать в линейной регрессионной форме:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \omega(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \chi, \quad (5.4)$$

где  $\chi = [\chi_1^T \chi_2^T \dots \chi_n^T]^T$  – это  $[1 \times n_s]$  вектор неизвестных стандартных динамических параметров,  $n_s = n_{sj} \cdot n$ , а  $[n \times n_s]$  регрессор

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

содержит только измеряемые величины и применительно к динамической калибровке называется **параметрическим якобианом** инверсной динамической модели, где  $\omega_i = [\omega_{i,1} \ \omega_{i,2} \ \dots \ \omega_{i,n}]$  –  $[1 \times n_s]$  вектор-строка, а  $[1 \times n_{sj}]$  вектор-строка  $\omega_{i,j}$  соответствует влиянию динамических параметров  $j$ -го звена на обобщенные силы/моменты  $i$ -го звена:

$$\tau_i = \omega_i \chi = \omega_{i,1} \chi_1 + \omega_{i,2} \chi_2 + \dots + \omega_{i,n} \chi_n.$$

**Замечание 5.1** Для последовательной кинематики параметрический якобиан имеет верхне-треугольную форму

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,n} \\ 0 & \omega_{2,2} & \dots & \omega_{2,n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{n,n} \end{pmatrix},$$

то есть  $i$ -е динамическое уравнение зависит только от параметров звеньев от  $i$  до  $n$ .

Динамика  $n$ -звенного робота последовательной кинематики с абсолютно упругими звеньями и сочленениями с учетом динамики приводов и сил трения описывается следующими уравнениями движения:

$$\tau_l = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_{fl}, \quad (5.5)$$

$$\tau_d = I_a \ddot{q} + \tau_l + \tau_{fd}, \quad (5.6)$$



где  $q \in R^n$ ,  $\dot{q} \in R^n$ ,  $\ddot{q} \in R^n$  – это обобщенные координаты, скорости и ускорения соответственно,  $I_a$  – это  $[n \times n]$  диагональная матрица инерции приводов,  $\tau_d \in R^n$  и  $\tau_l \in R^n$  – это обобщенные моменты в сочленениях и на приводах соответственно, а  $\tau_{fl} \in R^n$  и  $\tau_{fd} \in R^n$  – это моменты сил трения в сочленениях и приводах соответственно.

В этом случае вектор обобщенных сил/моментов для каждого звена  $\tau_j = [\tau_{l,j} \ \tau_{d,j}]^T$ .

*Замечание 5.2* Если обобщенные моменты  $\tau$  не измеряются напрямую, для электроприводов они могут быть косвенно рассчитаны по измерениям соответствующих токов

$$\tau_j = g_j i_j,$$

где  $g_j$  – коэффициент пропорциональности, а  $i_j$  – ток электропривода. На достаточно медленных движениях такая аппроксимация обеспечивает приемлемую точность.

Если учитывать только сухое и вязкое трения, а также асимметричность сил трения относительно направления движения [15], то моменты трения описываются следующими уравнениями:

$$\tau_{fl} = F_{vl}\dot{q} + F_{cl}\text{sign}(\dot{q}) + \text{offl}, \quad (5.7)$$

$$\tau_{fd} = F_{vm}\dot{q} + F_{cm}\text{sign}(\dot{q}) + \text{offm}. \quad (5.8)$$

где  $F_{vm}$ ,  $F_{cm}$ ,  $F_{vl}$ ,  $F_{cl}$  –  $[n \times n]$  диагональные матрицы постоянных коэффициентов сухого и вязкого трения в приводах и сочленениях соответственно, а  $\text{offm} \in R^n$  и  $\text{offl} \in R^n$  – постоянные коэффициенты, учитывающие асимметричность сил трения.

*Замечание 5.3* При моделировании трения (5.7)–(5.8) мы допускаем, что оно не зависит от нагрузки на работе. В некоторых приложениях, в связи с особенностями передаточных механизмов роботов, это предположения может не выполняться, что потребует использование более сложных моделей.

Таким образом, мы можем свести модель (5.5)–(5.8) к регрессионной форме

$$\tau(t) = \omega(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \chi, \quad (5.9)$$

где вектор неизвестных параметров имеет расширенный вид по сравнению с (5.3)  $\chi = [\chi_1^T \chi_2^T \dots \chi_n^T]^T$ , где

$$\chi_j = [I_{j,XX}, I_{j,XY}, I_{j,XZ}, I_{j,YY}, I_{j,YZ}, I_{j,ZZ}, m_j, \\ m_j r_{cj,X}, m_j r_{cj,Y}, m_j r_{cj,Z}, F_{vl,j}, F_{cl,j}, offl_j \\ I_{a,j}, F_{vm,j}, F_{cm,j}, offm_j]^T.$$

Для этого случая  $n_{sj} = 17$  и суммарно имеем  $n_s = 17 \cdot n$  стандартных динамических параметров.

## 5.2 Базовые параметры

В действительности, некоторые параметры, составляющие вектор (5.3) не оказывают влияния на динамику системы, что соответствует нулевым столбцам регрессора в (5.4). Также часть стандартных параметров из (5.3) входят в регрессионную модель (5.4) только в устойчивых комбинациях с другими, что соответствует линейно-зависимым столбцам регрессора. Перечисленные выше параметры не могут быть идентифицированы и должны быть исключены из модели.

Еще до планирования оптимальных калибровочных траекторий необходимо выбрать  $n_b < n_s$  независимых динамических параметров, которые соответствуют ненулевым независимым столбцам регрессора  $\omega(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))$  в (5.4). Эти параметры, составляющие редуцированный вектор  $\chi_B$ , называются *базовыми динамическими параметрами*.

*Утверждение 5.2* Подмножество  $n_b$  базовых параметров  $\chi_B$ ,  $n_b \leq n$  достаточно для решения обратной задачи динамики, то есть восстановления управляющих моментов  $\tau(t)$  единственным образом:

$$\tau(t) = \omega_B(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \chi_B, \quad \forall t. \quad (5.10)$$

где базовый параметрический якобиан инверсной динамической модели  $\omega_B(\cdot)$  – это матрица, составленная из  $n_b$  ненулевых независимых столбцов исходного регрессора  $\omega(\cdot)$ , по индексации соответствующих индексам базовых параметров в исходном векторе стандартных параметров  $\chi$ .

Выделение базовых параметров из исходного набора стандартных можно осуществить не единственным образом и с помощью разных подходов. Среди наиболее распространенных способов минимальной параметризации инверсной динамической модели – рекуррентный алгоритм, представленный в [16] и алгоритмы QR-разложения в различных модификациях (см. [17]). В любом случае, эти методы основаны на анализе свойств регрессора в модели (5.4).

### 5.3 Идентификационная динамическая модель

Из-за шумов полученные измерения обобщенных сил/моментов и координат, а как следствие и скоростей и ускорений, и будут отличаться от действительных значений соответствующих физических величин:

$$\tau_m(t) = \tau(t) + \epsilon(t) = \omega_B (q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \chi_B + \epsilon(t), \quad (5.11)$$

где  $\epsilon(t)$  обозначает шум в измерениях.

*Замечание 5.4 Модель (5.11) справедлива, если мы рассматриваем шум в измерениях как аддитивный. В действительности, зашумленными являются и измерения  $q_m(t)$ ,  $\dot{q}_m(t)$ ,  $\ddot{q}_m(t)$ , которые входят в регрессор  $\omega_B$  нелинейно. Однако, для малой амплитуды шумов, особенно для роботов с вращательными сочленениями, когда в регрессор входят тригонометрические функции  $\sin$  и  $\cos$  от обобщенных координат, скоростей и ускорений, допустима линейная аппроксимация, приводящая к модели (5.11).*

Оффлайн динамическая калибровка подразумевает, что мы записываем соответствующие измерения координат и сил/моментов вдоль всей калибровочной траектории. Следовательно, мы можем записать агрегированную форму (5.11):

$$\Upsilon = \Omega_B \chi_B + E, \quad (5.12)$$

где  $\Upsilon = [\Upsilon^1 \dots \Upsilon^n]^T$  и  $E = [E^1 \dots E^n]^T$  – вектора агрегированных измерений сил/моментов и шума измерений соответственно размерности  $[r \times 1]$ , где  $\Upsilon^j = [\tau_j(t_1) \dots \tau_j(t_{n_e})]^T$ ,  $E^j = [e_j(t_1) \dots e_j(t_{n_e})]^T$ ,  $r = n \cdot n_e$

и  $n_e$  – число тактов измерений,  $\Omega_B$  – матрица наблюдений, полученная вертикальным составлением блоков  $\Omega_B^j$ , где

$$\Omega_B^j = \begin{bmatrix} \omega_B^j(q(t_1), \dot{q}(t_1), \ddot{q}(t_1)) \\ \vdots \\ \omega_B^j(q(t_{n_e}), \dot{q}(t_{n_e}), \ddot{q}(t_{n_e})) \end{bmatrix},$$

а  $\omega_B^j$  – это  $j$ -ая строка базового регрессора  $\omega_B$ .

Модель (5.5)–(5.8) учитывает совокупную динамику звеньев робота и приводов, хотя на практике нас может интересовать оценивание по-отдельности параметров, ассоциированных с каждой из упомянутых подсистем. Таким образом, мы можем работать с тремя различными идентифицируемыми моделями:

- Модель 1 – учитываться только динамика звеньев робота без учета приводов, то есть при выводе линейной регрессионной модели вида (5.10) используются только уравнения (5.5) и (5.7), причем силы/моменты в звеньях приравниваются к силам/моментам в приводах  $\tau_l = \tau_d$ .
- Модель 2 – учитываться полная динамика, ассоциированная со звеньями и приводами, то есть при выводе линейной регрессионной модели вида (5.10) используется весь набор уравнений (5.5) – (5.8).
- Модель 3 – учитывается только динамика приводов, то есть при выводе линейной регрессионной модели вида (5.10) используются только уравнения (5.6) и (5.8) и разность сил/моментов в приводах и в сочленениях  $\tau_d - \tau_l$ .

## 5.4 Оптимизация калибровочных траекторий

На этом этапе должен решаться вопрос, как выбрать калибровочные траектории  $q_i^*(t)$ , обеспечивающие наилучшую сходимость оценок параметров  $\chi_B$ .

Для начала траектории нужно параметризовать, то есть описать аналитически как функции времени. Широко распространенным подходом является Фурье-параметризация [18], когда движение  $i$ -го звена ( $i = 1, \dots, n$ ) описывается как сумма тригонометрического ряда

$$q_i^*(t) = q_{i,0} + \sum_{k=1}^{n_{i,f}} [a_{i,k} \sin(k \cdot w_0 t) + b_{i,k} \cos(k \cdot w_0 t)]. \quad (5.13)$$

где  $q_{i,0}$  – начальный сдвиг,  $w_0$  – базовая частота,  $n_{i,f}$  – число гармоник, а  $a_{i,k}$  и  $b_{i,k}$  – постоянные коэффициенты Фурье функции, для которых и понадобится вычислить оптимальные значения.

Такой способ параметризации, обеспечивающий движение по периодическим траекториям с ограниченным набором гармоник, имеет ряд преимуществ [18]:

- возможно усреднение экспериментальных данных по времени, что улучшает соотношение сигнал/шум в измерениях;
- возможна оценка характеристик шума в измерениях;
- возбуждая системы на определенных частотах, мы можем контролировать проявление различных динамических эффектов, в частности, таких как эластичность в звеньях и сочленениях;
- обобщенные скорости и ускорения могут быть рассчитаны аналитически на основе уравнения для координат (5.13).

*Замечание 5.5* Порядок ряда Фурье  $n_{i,f}$  и базовая частота  $w_0$  в (5.13) назначаются разработчиком до решения оптимизационной задачи, однако существует ряд рекомендаций по их выбору:

1. Необходимо избежать в системе резонанса, то есть среди частот  $k \cdot w_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{i,f}$  не должно быть резонансных. Один из способов обеспечить это – выбрать  $n_{i,f} \cdot w_0 < w_{i,r}$ , где  $w_{i,r}$  – наименьшая резонансная частота для данной подсистемы.
2. При увеличении  $w_0$  и/или  $n_{i,f}$  необходимо иметь в виду, что возбуждаются высокочастотные движения, которые могут привести к проявлению гибкости звеньев и сочленений.

3. Так как скорости и ускорения звеньев робота, вычисляемые как первые и вторые производные суммы ряда (5.13), зависят от  $\omega_0$  линейно и квадратично соответственно, а с другой стороны, имеют ограничения, связанные с характеристиками приводов робота, то при увеличении базовой частоты  $\omega_0$  калибровочная траектория будет покрывать меньшую часть рабочего пространства робота.
4. Число гармоник в калибровочной траектории  $n_{i,f}$  должно быть не менее чем число идентифицируемых базовых параметров для соответствующей подсистемы деленное пополам.

Далее для организации вычисления наилучших значений коэффициентов ряда необходимо ввести соответствующий критерий оптимизации.

Классическим критерием для динамической калибровки является минимизация числа обусловленности матрицы наблюдений  $\Omega_B$  [19]

$$\text{cond}(\Omega_B) \rightarrow \min, \quad (5.14)$$

при этом должно гарантироваться выполнение условия  $\text{rank}(\Omega_B) = n_b$ , то есть матрица наблюдений должна иметь полный столбцовый ранг.

Так как число обусловленности матрицы  $\Omega_B$  соответствует отношению максимального и минимального сингулярных чисел, то его минимизация преследует цель равномерно распределить чувствительность измерений обобщенных сил/моментов  $\Upsilon$  по изменениям всех базовых параметров  $\chi_B$ , и как следствие сходимость их оценок<sup>1</sup>

Использование классического критерия (5.14) имеет недостаток, связанный с тем, что не учитывает непосредственно амплитуды возбуждающих сигналов. На практике это может привести к тому, что, в частности, для манипуляторов последовательной кинематики, последние звенья которых слабо нагружены, не обеспечивается достаточное соотношение сигнал/шум при измерениях обобщенных сил/моментов.

Альтернативой классическому критерию, учитывающей упомянутый недостаток, является мультикритериальная оптимизация, когда ис-

<sup>1</sup>Если отметить, что матрица наблюдений является оператором, преобразующим вектор  $\chi_B \in R^{n_b}$  в вектор  $\Upsilon \in R^{n \cdot n_e}$ , то для геометрической интерпретации сингулярного разложения матрицы  $\Omega_B$ , как совокупности операций растяжений и поворота, сингулярные числа являются длинами полуосей соответствующего эллипсоида.

пользуется векторная целевая функция. В качестве такой можно предложить [20]

$$F = \left[ \begin{array}{c} \frac{\text{cond}(\Omega_B)}{(|\tau_j^*(t)| - \tau_j^{sn})} \\ \dots \end{array} \right] \rightarrow \min, \quad (5.15)$$

где  $|\tau_j^*(t)|$  и  $\tau_j^{sn} > 0$  обозначают абсолютное значение амплитуды и минимальный уровень необходимый для приемлемого соотношения сигнал/шум для обобщенных сил/моментов на траектории для данного звена соответственно, а  $(\bar{\cdot})$  – среднее значение соответствующей величины.

Так как любая робототехническая система имеет кинематические и динамические ограничения, их необходимо ввести и при организации численной оптимизации калибровочных траекторий. К таким ограничениям относятся:

- ограничения на диапазон изменения координат звеньев;
- геометрические ограничения, вводимые для избежания столкновений в рабочем пространстве робота;
- динамические ограничения на обобщенные скорости и управляющие моменты;
- дополнительные ограничения, связанные с особенностями организации калибровочного эксперимента, например, нулевые обобщенные скорости и ускорения в начальный и конечный моменты времени.

Постановка задачи численной нелинейной оптимизации с учетом ограничений, адаптированная для использования Matlab-функции 'fgoalattain', и учитывающая средние амплитуды сил/моментов в последних двух звеньях манипулятора последовательной кинематики, мо-

жет быть записана как

$$\min_{q_{i,0}, a_{i,k}, b_{i,k}, \gamma} \gamma \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} F(q_{i,0}, a_{i,k}, b_{i,k}, t) - \gamma \cdot \Psi \leq \Lambda, \\ [\dot{q}_i^*(0), \ddot{q}_i^*(0)] = [0, 0], \\ \dot{q}_i^*(t) \in (q_{i,min}, q_{i,max}), \\ \ddot{q}_i^*(t) \in (\dot{q}_{i,min}, \dot{q}_{i,max}), \\ \tau_i^*(t) \in (\tau_{i,min}, \tau_{i,max}), \\ d_{xy}(t) \geq d_{xy}^{min}, \\ z(t) \geq z^{min}, \end{cases} \quad (5.16)$$

$$i = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots n_f,$$

где  $\Lambda = [g_{\Omega_b}; k_{\tau_{n-1}} \cdot \tau_{n-1,max}; k_{\tau_n} \cdot \tau_{n,max}]$  – это желаемое значение векторной целевой функции

$$F(\cdot) = \left[ \text{cond}(\Omega_B); \overline{(\tau_{n-1,max} - |\tau_{n-1}^*(t)|)}; \overline{(\tau_{n,max} - |\tau_n^*(t)|)} \right],$$

$\gamma$  – это скалярный коэффициент достижимости, а  $\Psi = |\Lambda|$  – это весовой вектор,  $d_{xy}(t)$ ,  $z(t)$ ,  $d_{xy}^{min}$  и  $z^{min}$  устанавливают расстояния от базы робота по горизонтали и вертикали, а также их минимальные допустимые значения соответственно.

*Замечание 5.6 Целевые параметры  $g_{\Omega_b}$ ,  $k_{\tau_{n-1}}$ , and  $k_{\tau_n}$  существенно влияют на результат оптимизации, поэтому их выбор должен быть обоснован и зависит от особенностей идентифицируемой системы. Один из способов из выбора состоит в предварительном решении оптимизационной задачи с классическим критерием (5.14).*

## 5.5 Обработка экспериментальных данных

Так как получаемые во время эксперимента измерения зашумлены, для обеспечения несмещенности оценок параметров необходимо их предварительно обработать.

### 5.5.1 Вычисление обобщенных скоростей и ускорений

#### Фильтры нижних частот

Для вычисления обобщенных скоростей и ускорений по измерениям обобщенных координат важно предварительно отсечь в них высокоча-



стотные шумы. Для этого можно предварительно пропустить измеренный сигнал координат  $q_m(t)$  через фильтр нижних частот

$$\hat{q}(t) = H(p)q_m(t),$$

где  $H(p)$  – это передаточная функция фильтра,  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования.

Для этих целей подходит, например, фильтр Баттерворта [21], описываемый передаточной функцией

$$H(s) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^{n_c} (s - s_k) / w_c},$$

где  $G_0$  – коэффициент усиления фильтра,  $s$  – оператор Лапласа,  $w_c$  – частота среза фильтра,  $s_k = w_c e^{\frac{j(2k+n_c-1)\pi}{2n_c}}$ ,  $j = \sqrt{-1}$ , а  $n_c$  – порядок фильтра. Преимуществом фильтра Баттерворта является обеспечение наиболее плоской характеристики в полосе пропускания.

Чтобы обеспечить эквивалентность исходного и отфильтрованного сигналов в рабочем диапазоне частот, частота среза фильтра  $w_c$  должна выбираться исходя из максимальной полезной частоты, задаваемой найденной калибровочной траекторией. На практике оправданным является соотношение  $w_c > 10w_0 \max_i n_{i,f}$  [21]. Порядок фильтра  $n_c$  определяет крутизну наклона его амплитудно-частотной характеристики вне полосы пропускания, соответствующей  $20n_c$  дБ на декаду. Также при увеличении порядка фильтра обеспечивается более плоская характеристика в пределах полосы пропускания, однако с возрастанием порядка увеличивается и сдвиг между оригинальным и отфильтрованным сигналом. Минимальный порядок фильтра можно рассчитать по заданному коридору его амплитудно-частотной характеристики на основе соотношения

$$n_c = \frac{\log(\epsilon_s/\epsilon_p)}{\log(w_1/w_0)},$$

где  $\epsilon_p = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}$ ,  $\epsilon_s = \sqrt{10^{R_s/10} - 1}$ , а смысл параметров  $R_p$ ,  $R_s$ ,  $w_1$  и  $w_0$  пояснен на Рис. 5.2.

*Замечание 5.7 При работе с массивами дискретных измерений для избежания смещения по фазе можно использовать цифровую фильтрацию сигналов в прямом и обратном направлении, что можно реализовать с помощью Matlab-функции 'filtfilt'.*

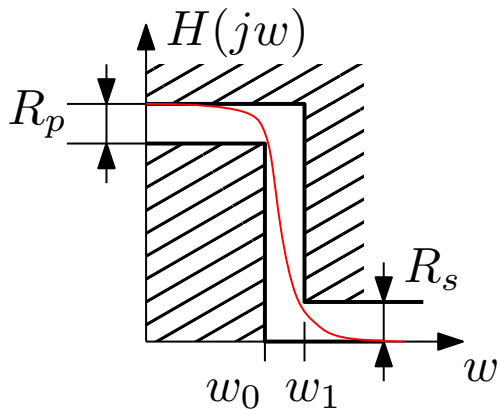


Рис. 5.2. Коридор желаемой амплитудно-частотной характеристики фильтра Баттлерворта.

Далее, оценки обобщенных скоростей  $\hat{q}(t)$  и ускорений  $\hat{\dot{q}}(t)$  робота можно найти посредством центрированного разностного алгоритма по отфильтрованным значениям обобщенных координат:

$$\hat{q}(t) = \frac{\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t - \Delta t)}{2\Delta t},$$

$$\hat{\dot{q}}(t) = \frac{\hat{q}(t + \Delta t) - 2\hat{q}(t) + \hat{q}(t - \Delta t)}{\Delta t^2}.$$

### Усреднение и точное дифференцирование

С другой стороны, если калибровочные траектории являются периодическими<sup>2</sup> и частота измерений  $f_s$  [Гц] минимум в два раза больше максимальной частоты полезного сигнала, можно улучшить соотношение сигнал/шум в измерениях, не прибегая к использованию фильтров нижних частот, а за счет *методов усреднения* [22].

<sup>2</sup>Использование Фурье-параметризации (5.13) гарантирует периодичность калибровочных траекторий.

Вариация измерений может быть вычислена на основе формулы

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{MK - 1} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M (q_m(k) - \bar{q}(k))^2, \quad (5.17)$$

где  $K$  – это число измерений, укладываемых в одном периоде траектории,  $M$  – общее число периодов,  $q_m(k)$  –  $k$ -ое измерение внутри  $m$ -го периода, а среднее по всем периодам значение находится как

$$\bar{q}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M q_m(k).$$

Применение в этом случае схемы численного дифференцирования измерений обобщенных координат для вычисления оценок обобщенных скоростей  $\hat{q}(t)$  и ускорений  $\hat{\ddot{q}}(t)$  приведет к усилению влияния шума, поэтому здесь должны использоваться схемы точного дифференцирования, основанные на анализе частотного спектра сигналов [22].

Если  $q(t)$  является периодической функцией, и мы рассматриваем массив измерений  $q_m(t)$ , в котором укладывается целое число периодов  $M$ , а шум в измерениях является гауссовым с нулевым средним, то может быть использована следующая процедура:

1. Перевести измерения  $q_m(t)$  из временной в частотную область с использованием дискретного Фурье-преобразования.
2. Проанализировать полученный частотный спектр и выбрать только те частоты, которые соответствуют полезной информации.
3. По отбрасываемым частотам спектра установить нулевые множители, а для полезных частот установить множители спектра 1,  $jw(k)$  и  $w^2(k)$  для вычисления координат  $\hat{q}(w)$ , скоростей  $\hat{\dot{q}}(w)$  и ускорений  $\hat{\ddot{q}}(w)$  соответственно, где  $w(k) = \frac{2\pi k f_s}{MK}$ ,  $f_s$  – это частота измерений, а  $k$  – это индекс соответствующей выбираемой частоты дискретного спектра сигнала  $q_m(w)$ . Выбранные множители для скоростей и ускорений эквивалентны представлению в частотной области передаточных функций дифференцирующего и двойного дифференцирующего звеньев соответственно.
4. С помощью обратного дискретного Фурье-преобразования вернуть представление сигналов для обобщенных координат  $\hat{q}(t)$ ,

скоростей  $\hat{q}(t)$  и ускорений  $\hat{\dot{q}}(t)$  из частотной во временную область.

### 5.5.2 Фильтрация измерений обобщенных сил/моментов

Измерения обобщенных сил/моментов, получаемые в результате эксперимента по динамической калибровке, как правило, также зашумлены и должны быть предварительно отфильтрованы.

Для исключения высокочастотного шума и избежания автокорреляции в шуме измерений  $E$  в (5.10) к регрессору  $\Omega_B$ <sup>3</sup> и вектору измерений  $\Upsilon$  применяется процедура параллельного прореживания: сигналы пропускают через одинаковые фильтры нижних частот и делают ресэмплирование измерений, то есть оставляют по одному измерению на каждые  $n_d$  измерений в исходных векторах [23]:

$$\hat{\tau}_j = D(w_{cd}, n_d)\tau_j, \quad (5.18)$$

$$\hat{\Omega}_{B,l} = D(w_{cd}, n_d)\Omega_{B,l}, \quad (5.19)$$

где оператор  $D(w_{cd}, n_d)$  соответствует операции параллельного прореживания,  $\hat{\tau}_j \in R^{n_f}$ ,  $n_f = \frac{n_e}{n_d}$ , а  $\Omega_{B,l}$  обозначает  $l$ -ый столбец матрицы наблюдений  $\Omega_B$ ,  $\hat{\Omega}_{B,l}$  имеет размерность  $[n_f \cdot n \times 1]$ ,  $l = \{1, 2, \dots, n_b\}$ .

Параметры параллельного прореживания настраиваются исходя из следующих соображений:

- Частота среза фильтра  $w_{cd}$  выбирается так, что  $w_{cd} = k_{cd}w_0 \max_i [n_{i,f}], k_{cd} \in [2, 5]$ .
- Для настройки частоты среза по критерию некоррелированности шумов в измерениях можно использовать статистический тест Дарбина-Уотсона [23], где коэффициент автокорреляции

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^r (E(i) - E(i-1))^2}{\sum_{i=1}^r (E(i))^2}$$

<sup>3</sup>Матрица наблюдений  $\Omega_B$  фильтруется постолбцово.

должен приниматься значения от 1 до 3. При полном отсутствии автокорреляции  $dw = 2$ .

- Параметр прореживания выбирается как  $n_d = \frac{0.8\pi f_s}{2w_{cd}}$ .

*Замечание 5.8* Для реализации параллельного прореживания может быть использована Matlab-функция 'decimate'.

## 5.6 Оценивание динамических параметров

После того, как были найдены оптимальные калибровочные траектории, проведен эксперимент и полученные в ходе него данные предварительно обработаны, они используются для нахождения оценок неизвестных базовых параметров идентификационной динамической модели робототехнической системы.

Цель данного этапа – найти оценки  $\hat{\chi}_B$  базовых параметров  $\chi_B$  такие, что отклонение между реальными  $\tau$  и вычисленными  $\tau_c$  моментами на приводах вдоль всей калибровочной траектории будет минимальным.

Так как мы имеем дело и не с реальными значениями, и не с их зашумленными измерениями, а с предварительно обработанными сигналами, модель (5.12) нужно переписать в следующем виде:

$$\Upsilon_f = \Omega_{Bf}\chi_B + E_f, \quad (5.20)$$

где используются отфильтрованные вектор агрегированных измерений

$$\Upsilon_f = [\hat{\tau}_1(t_1) \dots \hat{\tau}_1(t_{n_f}) \hat{\tau}_2(t_1) \dots \hat{\tau}_n(t_{n_f})]^T$$

и матрица наблюдений

$$\Omega_{Bf} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{B,1} & \hat{\Omega}_{B,2} & \dots & \hat{\Omega}_{B,n_b} \end{bmatrix}.$$

**Допущение 5.1** Мы допускаем, что сигнал  $E_f$  последовательно некоррелирован и имеет нулевое среднее, то есть является несмещенным Гауссовым шумом.

Таким образом, цель оценивания параметров можно сформулировать как

$$\hat{\chi}_B : \|\Upsilon_f - \Omega_{Bf}\hat{\chi}_B\|_2 \rightarrow \min, \quad (5.21)$$

где  $\|\cdot\|_2$  обозначает евклидову норму вектора.

Для вычисления оценок параметров в режиме оффлайн по отфильтрованным измерениям может использоваться любой из подходящих алгоритмов оценивания. Таковым является, например, взвешенный метод наименьших квадратов. Выбор обратной матрицы стандартных отклонений измерений обобщенных сил/моментов в качестве весовой матрицы алгоритма позволяет получить оптимальные по вариации оценки  $\hat{\chi}_B$  [18]:

$$\hat{\chi}_B = (\Omega_{Bf}^T R^{-1} \Omega_{Bf})^{-1} \Omega_{Bf}^T R^{-1} \Upsilon_f, \quad (5.22)$$

где  $R$  – это матрица ковариации измерений обобщенных сил/моментов, с учетом принятых допущений имеющая блочно-диагональную структуру

$$R = \text{diag}(\sigma_1^2 \mathbf{I}_{n_f} \cdots \sigma_j^2 \mathbf{I}_{n_f} \cdots \sigma_n^2 \mathbf{I}_{n_f}), \quad (5.23)$$

где  $\mathbf{I}_{n_f}$  – это  $[n_f \times n_f]$  единичная матрица, а вариация ошибки оценивания обобщенных сил/моментов  $\sigma_j^2$  вычисляется для  $j$ -й подсистемы в (5.20) как

$$\sigma_j^2 = \frac{\|\Upsilon_f^j - \Omega_{Bf}^j \chi_B^j\|^2}{n_f - n_b}.$$

### 5.6.1 Редуцирование модели

Некоторые базовые параметры, входящие в модель (5.10), могут не оказывать существенного влияния на динамику робота, а значит вычисление их точных оценок по инверсной динамической модели крайне затруднено. Сохранение этих параметров ухудшает общую конфиденциальность (точность) получаемой модели, и их исключение приводит к выделению подмножества из  $n_{es}$  *значимых параметров*.

Подобное редуцирование проводится непосредственно на этапе оценивания параметров, и может реализовываться двумя способами:

- После первой итерации анализируется дисперсия полученных оценок<sup>4</sup>, и исключаются параметры, для которых данная характеристика превышает установленное пороговое значение. Данный способ является эвристическим, но часто используется на практике.

<sup>4</sup>Формула для вычисления дисперсии оценок представлена в следующем подразделе.

- По результатам статистического теста Фишера (F-теста), который используется для проверки ограничений на число учитываемых параметров линейной регрессии:

1. Вычислить вектор ошибки  $\|E_f\| = \|\Upsilon_f - \Omega_{Bf}\hat{\chi}_B\|$  для полного набора из  $n_b$  базовых параметров.
2. Для каждого из параметров, входящих в  $\chi_B$ , рассчитать вектор ошибки  $\|E_{c,i}\| = \|\Upsilon_f - \Omega_{Bf}^{c,i}\hat{\chi}_B^{c,i}\|$ , где вектор  $\hat{\chi}_B^{c,i}$  и матрица  $\Omega_{Bf}^{c,i}$  получаются удалением  $i$ -ой строки и столбца из исходных вектора  $\chi_B$  и матрицы  $\Omega_{Bf}$  соответственно.
3. Для каждого из параметров рассчитать показатель F-статистики:

$$F_i = \frac{(\|E_{c,i}\|^2 - \|E_f\|^2) / (n_b - n_{es})}{\|E_f\|^2 / (n \cdot n_f - n_b)}.$$

4. Если полученное значение F-статистики не превосходит порогового значения  $F_i < F_d$ , то данный параметр может быть исключен. Пороговое значение  $F_d$  определяется для F-распределения по таблице Фишера-Снедекора [24]. При большом объеме выборки  $n \cdot n_f$ , для одного исключаемого параметра  $n_b - n_{es} = 1$  и желаемого отклонения в вычислениях между полной и редуцированной моделями в 5%  $F_d = 3, 842$ .

Аналогичную процедуру можно проделать и для сразу нескольких исключаемых параметров, когда  $n_b - n_{es} > 1$ .

При редуцировании базовым параметрам из вектора  $\chi_B$ , не вошедшим в подмножество значимых, присваиваются нулевые значения и на основе алгоритма (5.22) вычисляются новые оценки оставшихся параметров

$$\hat{\chi}_{es} = (\bar{\Omega}_{Bf}^T R^{-1} \bar{\Omega}_{Bf})^{-1} \bar{\Omega}_{Bf}^T R^{-1} \Upsilon_f, \quad (5.24)$$

где матрица  $\bar{\Omega}_{Bf}$  получается исключением соответствующих редуцированным параметрам столбцов исходной матрицы наблюдений  $\Omega_{Bf}$ .

## 5.7 Валидация полученной модели

Заключительным этапом динамической калибровки является проверка качества полученных оценок параметров. Важно провести валидацию модели до ее использования в расчетах при планировании движения робототехнической системы или синтезе регуляторов.

Для проверки точности оценок можно использовать две различные метрики:

- дисперсия полученных оценок по каждому параметру, характеризующая их достоверность;
- погрешность между измеренными и вычисленными значениями обобщенных сил/моментов.

Для первой метрики случае сначала вычисляется матрица ковариации оценок  $\Sigma = \left( \Omega_{Bf}^T R^{-1} \Omega_{Bf} \right)^{-1}$ , которая характеризует параметрическую неопределенность в  $\hat{\chi}_B$  в целом. Далее вычисляется среднеквадратичное отклонение оценки  $i$ -го параметра в  $\hat{\chi}_B$ :

$$\% \bar{\sigma}_{\hat{\chi}_B^i} = \frac{100 \cdot \bar{\sigma}_{\hat{\chi}_B^i}}{|\hat{\chi}_B^i|} \% , \quad (5.25)$$

где  $\bar{\sigma}_{\hat{\chi}_B^i}^2$  – это  $i$ -й диагональный элемент в матрице ковариации  $\Sigma$ .

Для определения второй метрики можно использовать метод вычисленного момента, заключающийся в том, для проверочной траектории, задаваемой на интервале времени  $t \in [t_1, t_v]$  обобщенными координатами, скоростями и ускорениями  $\{q^v(t), \dot{q}^v(t), \ddot{q}^v(t)\}$  и отличающейся от калибровочной траектории сравниваются измеренные и отфильтрованные  $\Upsilon_m^v = [\hat{\tau}_1(t_1) \dots \hat{\tau}_1(t_v) / \hat{\tau}_2(t_1) \dots \hat{\tau}_n(t_v)]^T$  и вычисленные

$$\Upsilon_f^v = \bar{\Omega}_{Bf} \hat{\chi}_{es} \quad (5.26)$$

значения обобщенных сил/моментов, где  $\hat{\chi}_{es}$  находится на основе (5.24).

Количественными характеристиками точности модели здесь могут являться относительное

$$\tilde{\tau}_j = \frac{\|\hat{\tau}_j - \bar{\Omega}_{Bf}^j \hat{\chi}_{es}\|}{\|\hat{\tau}_j\|}$$



и среднеквадратичное

$$\bar{r}_j = \frac{\|\hat{\tau}_j - \bar{\Omega}_{Bf}^j \hat{\chi}_{es}\|}{n_b}$$

отклонения вычисленного момента от измеренного по каждому звену.

Дополнительная валидация оценок динамических параметров - это важный тест на состоятельность полученных данных с точки зрения их соответствия физическим закономерностям. Так полученные оценки массы звеньев и моментов инерции привода должны быть положительными числами. Также тензор инерции каждого звена, вычисляемый на основе теоремы Гюйгенса как

$$J_j = \begin{bmatrix} I_{j,XX} & I_{j,XY} & I_{j,XZ} \\ I_{j,XY} & I_{j,YY} & I_{j,YZ} \\ I_{j,XZ} & I_{j,YZ} & I_{j,ZZ} \end{bmatrix} - \frac{1}{m_j} \begin{bmatrix} m_j r_{cj,Y}^2 + m_j r_{cj,Z}^2 & -m_j r_{cj,X} m_j r_{cj,Y} & -m_j r_{cj,X} m_j r_{cj,Z} \\ -m_j r_{cj,X} m_j r_{cj,Y} & m_j r_{cj,X}^2 + m_j r_{cj,Z}^2 & -m_j r_{cj,Y} m_j r_{cj,Z} \\ -m_j r_{cj,X} m_j r_{cj,Z} & -m_j r_{cj,Y} m_j r_{cj,Z} & m_j r_{cj,X}^2 + m_j r_{cj,Y}^2 \end{bmatrix}$$

должен удовлетворять свойству положительной определенности. Проверка этого свойства может осуществляться любым из известных способов, включая разложение по собственным числам с использованием соотношения Сильвестра или разложения Холецкого.

## 5.8 Экспериментальный пример

В качестве экспериментального примера разберем здесь задачу идентификации динамической модели семизвенного манипулятора последовательной кинематики KUKA LWR 4+.

Для лучшего возбуждения на фланце робота была закреплена дополнительная откалиброванная нагрузка массой  $\approx 3.28$  кг, центр масс которой смещен относительно оси вращения последнего звена робота (см. Рис. 5.3). В процедуре динамической калибровки этот груз был учтен как дополнительное восьмое звено робота.

Прикладной программный пакет *Symoro+* [2] был использован для вывода динамических моделей робота в символьной форме (5.10) и

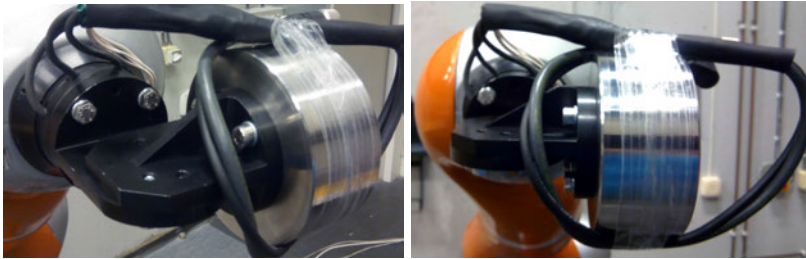


Рис. 5.3. Экспериментальная установка с дополнительно установленной нагрузкой.

определения множества базовых параметров. Кроме этого, данное программное обеспечение позволяет автоматически оптимизировать символьные выражения с точки зрения количества используемых в них математических операций.

Рассмотрим здесь идентификацию более полной модели 2, учитывающей в совокупности динамику робота и приводов (см. подраздел 5.3). В рассматриваемом примере мы имеем  $17 \cdot 8 = 136$  стандартных динамических параметров  $\chi$ , из которых можно исключить **18** неидентифицируемых параметров и перегруппировать еще **16**. В итоге остается **102** базовых параметра  $\chi_B$ , из которых можно выбрать **49** значимых динамических параметров  $\chi_{es}$ .

Калибровочные эксперименты проводились для трех типов траекторий:

- не оптимизированная траектория, то есть движение между произвольными точками с трапецевидным профилем скорости;
- траектория, полученная в результате оптимизации с использованием классического критерия  $\text{cond}(\Omega_B) \rightarrow \min$  (Траектория А);
- траектория, полученная в результате многокритериальной оптимизации с  $g_{\Omega_b} = 35$ ,  $k_{\tau_6} = k_{\tau_7} = 0.9$  (Траектория Б).

Численная однокритериальная и многокритериальная оптимизация траекторий была выполнена с помощью функций '*fmincon*' и '*fgoalattain*' пакета программ *Matlab Optimization Toolbox* соответствен-

но. Использованные при оптимизации кинематические и динамические ограничения на траектории указаны в таблице 5.1.

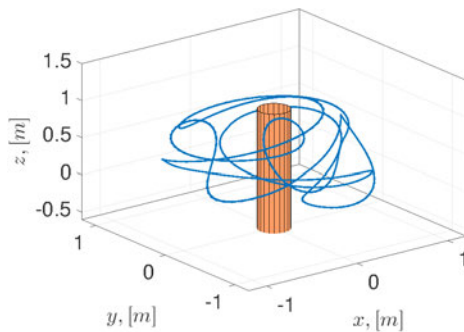
Таблица 5.1. Ограничения на калибровочные траектории

<b>Углы звеньев, [рад]:</b>	$ q_{1,3,5,7}  \leq \frac{17\pi}{18};  q_{2,4}  \leq \frac{2\pi}{3};  q_6  \leq \frac{\pi}{2}$
<b>Скорости звеньев, [рад/с]:</b>	$ \dot{q}_{1,2}  \leq \frac{11\pi}{18};  \dot{q}_{3,4}  \leq \frac{32\pi}{45};  \dot{q}_5  \leq \frac{51\pi}{45};  \dot{q}_{6,7}  \leq \frac{46\pi}{45}$
<b>Моменты звеньев, [Нм]:</b>	$ \tau_{1,2}  \leq 176;  \tau_{3,4,5}  \leq 100;  \tau_{6,7}  \leq 38$
$d_{xy}^{\min}$ , [м]:	0,2
$z^{\min}$ , [м]:	-0.1

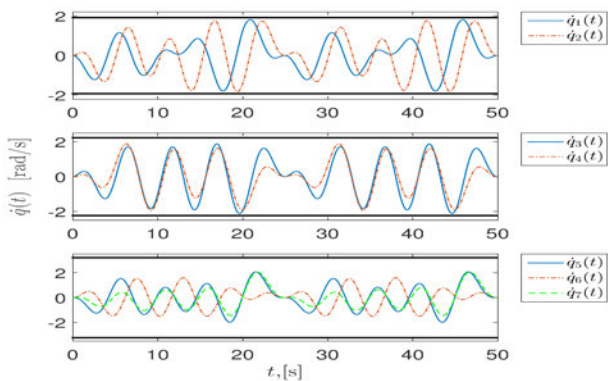
Характеристики данных траекторий представлены в таблице 5.2. На Рис. 5.4а–5.4в приведены графики примера оптимизированной на основе векторной целевой функции Траектории Б для Модели 2 при базовом периоде  $T_0 = 25$  сек. Как видно из графиков, полученные траектории характеризуются достаточно агрессивными профилями скоростей и моментов и покрывают большую часть рабочего пространства робота.

Таблица 5.2. Характеристики калибровочных траекторий

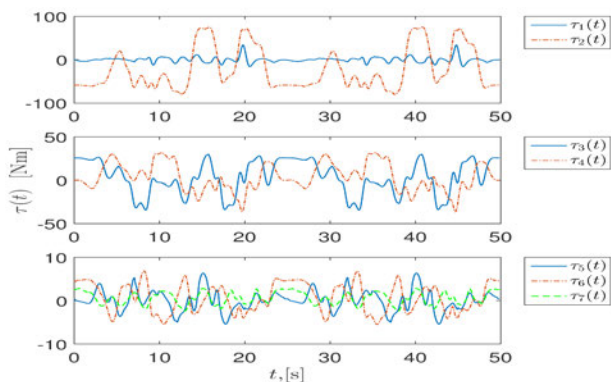
Траект.	Огранич.	cond ( $\Omega_B$ )	Средний момент $ \tau_1 , \dots,  \tau_7 $
<i>Неопт.</i>	выполн.	84.21	[3.05, 45.09, 6.78, 18.58, 2.17, 2.28, 1.04]
<i>A</i>	выполн.	34.01	[3.12, 41.71, 9.30, 13.24, 2.12, 1.56, 0.92]
<i>Б</i>	выполн.	37.23	[4.63, 42.26, 10.23, 14.05, 1.56, 1.64, 1.64]



(а) Траектория в декартовом пространстве.



(б) Скорости в сочленениях.



(в) Моменты в сочленениях.

Рис. 5.4. Пример оптимизированной калибровочной траектории.

Таблица 5.3. Оценки значимых параметров для Модели 2

Пар.	$\hat{\chi}_{es}$	$\% \hat{\sigma}_{\chi_{es}^i}$	Пар.	$\hat{\chi}_{es}$	$\% \hat{\sigma}_{\chi_{es}^i}$	Пар.	$\hat{\chi}_{es}$	$\% \hat{\sigma}_{\chi_{es}^i}$
<b>Ia<sub>1</sub></b>	3.14	1.68	<b>Fvm<sub>1</sub></b>	16.68	0.84	<b>Fcm<sub>1</sub></b>	15.04	1.02
<b>Ia<sub>2</sub></b>	2.58	5.42	<b>Fvm<sub>2</sub></b>	19.09	1.29	<b>Fcm<sub>2</sub></b>	16.48	1.43
<b>offm<sub>2</sub></b>	2.09	6.91	<b>Ia<sub>3</sub></b>	2.14	1.85	<b>Fvm<sub>3</sub></b>	7.87	1.14
<b>Fcm<sub>3</sub></b>	8.77	1.12	<b>Ia<sub>4</sub></b>	1.97	4.20	<b>Fvm<sub>4</sub></b>	11.63	1.61
<b>Fcm<sub>4</sub></b>	9.96	2.11	<b>Ia<sub>5</sub></b>	0.67	8.37	<b>Fvm<sub>5</sub></b>	5.39	1.87
<b>Fcm<sub>5</sub></b>	5.58	1.47	<b>Ia<sub>6</sub></b>	0.38	6.51	<b>Fvm<sub>6</sub></b>	3.64	1.63
<b>Fcm<sub>6</sub></b>	4.41	1.41	<b>Ia<sub>7</sub></b>	0.42	3.18	<b>Fvm<sub>7</sub></b>	2.03	1.78
<b>Fcm<sub>7</sub></b>	4.16	1.62	<b>offm<sub>7</sub></b>	-0.54	7.31	<b>Fcl<sub>1</sub></b>	0.79	2.70
<b>offl<sub>1</sub></b>	0.28	7.33	<b>Fcl<sub>2</sub></b>	0.41	2.24	<b>offl<sub>2</sub></b>	-0.87	1.37
<b>Fcl<sub>3</sub></b>	0.22	2.85	<b>Fcl<sub>4</sub></b>	0.17	4.63	<b>offl<sub>4</sub></b>	0.26	2.97
<b>Fcl<sub>5</sub></b>	0.35	2.47	<b>offl<sub>5</sub></b>	0.10	8.12	<b>Fcl<sub>7</sub></b>	0.34	6.05
<b>offl<sub>7</sub></b>	0.29	6.96	<b>XX<sub>2R</sub></b>	1.36	0.93	<b>ZZ<sub>2R</sub></b>	1.40	1.01
<b>MY<sub>2R</sub></b>	3.46	0.06	<b>XX<sub>4R</sub></b>	0.44	0.58	<b>ZZ<sub>4R</sub></b>	0.45	0.73
<b>MY<sub>4R</sub></b>	-1.37	0.08	<b>MY<sub>5R</sub></b>	0.04	1.89	<b>MY<sub>6R</sub></b>	0.03	3.23
<b>XX<sub>8</sub></b>	0.09	2.65	<b>YY<sub>8</sub></b>	0.07	3.85	<b>YZ<sub>8</sub></b>	0.03	5.03
<b>ZZ<sub>8</sub></b>	0.02	12.70	<b>MY<sub>8</sub></b>	-0.22	0.55	<b>MZ<sub>8</sub></b>	0.48	0.34
<b>M<sub>8</sub></b>	3.34	0.09						

Во время эксперимента робот был переведен в режим управления по позиции звеньев. Опорные траектории исполнялись с помощью пакета Reflexxes On-Line Motion Library для программной библиотеки Stanford FRI Library<sup>5</sup>.

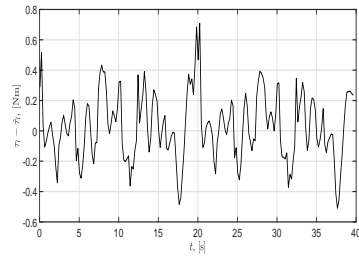
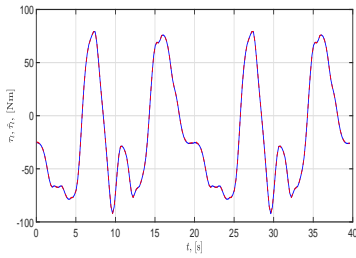
Запись экспериментальных данных измерений моментов на приводах и углов звеньев робота проводилась с тактовой частотой 1 кГц. Длительность записи для каждой калибровочной траектории составляла 60 сек.

В качестве предварительной обработки экспериментальных данных была применена фильтрация измерений с энкодеров робота с помощью фильтра Баттерворта  $n_c = 4$  порядка с частотой среза  $w_c = 10$  Гц. Для фильтрации данных, входящих в матрицу наблюдений и измерений моментов на приводах использовалась процедура параллельного прореживания с частотой среза  $w_{cd} = 2$  Гц и шагом прореживания  $n_d = 20$ .

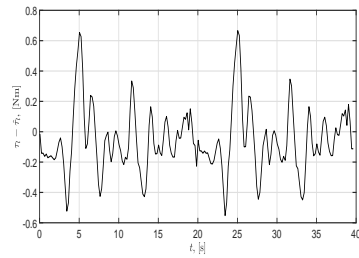
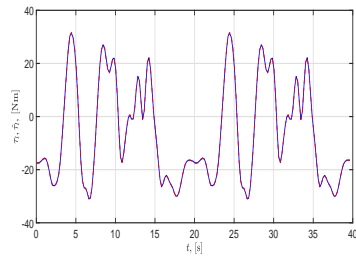
Оценки значимых динамических параметров для Модели 2, полученные на основе алгоритма (5.24) представлены в таблице 5.3.

На Рис. 5.5 представлены графики, соответствующие валидации полученной модели на основе метода вычисленного момента. Из графиков видно, что полученная невязка по моменту не превышает 5%.

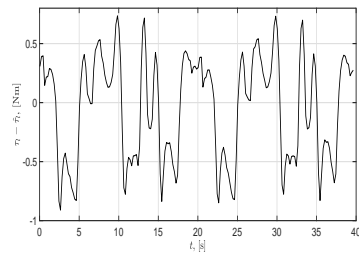
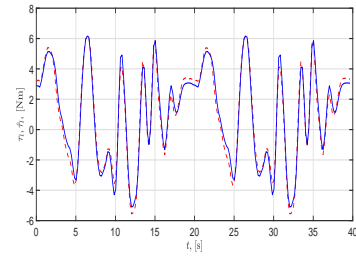
<sup>5</sup><http://cs.stanford.edu/people/tkr/fri/html/index.html>



(а) Звено 2.



(б) Звено 4.



(в) Звено 6.

Рис. 5.5. Тест по методу вычисленного момента: отфильтрованные измерения моментов в сочленениях  $\hat{\tau}_j$  (синий), их вычисленные на основе (5.26) значения  $\bar{\Omega}_{Bf}^j \hat{\chi}_{es}$  (красный) и невязка между измеренными и вычисленными значениями (черный).

# Заключение

Учебное пособие посвящено рассмотрению тем, имеющих отношение к моделированию и анализу динамики роботов. Оно рекомендуется как основной методический материал по курсу "Динамика робототехнических систем читаемому автором в Университете ИТМО, и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 15.04.06 Мехатроника и робототехника, 27.04.03 Системный анализ и управление и 27.04.04 Управление в технических системах.

В пособии представлен необходимый для понимания ключевых вопросов материал, включая наиболее распространенные и эффективные методы и конструктивные процедуры моделирования и идентификации динамики роботов.

Первая глава посвящена рассмотрению базовых понятий, определений и принципов, используемых при описании и анализе динамики робототехнических систем. В частности, проводится классификация робототехнических систем; вводятся понятия обобщенных координат и сил, виртуальных перемещений и работы, уравнения движения при различных способах его задания; объясняются основные задачи динамики, фундаментальные принципы и законы сохранения, а также их применение на примере описания движения материальной точки и абсолютно твердого тела.

Во второй главе рассматривается вывод уравнений движения на основе метода Эйлера-Лагранжа, оперирующего вычислениями кинетической и потенциальной энергии многозвенных систем. Глава содержит не только теоретический материал и примеры использования метода, но и ряд дополнений. В частности, здесь рассказывается, каким образом может учитываться динамика двигателя и редуктора, а также как метод может быть использован для моделирования роботов замкнутой

кинематики и роботов с гибкими сочленениями.

Третья глава уделяет внимание методу Ньютона-Эйлера, для которого отправной точкой является баланс сил в системе. Изложение в главе строится от применения второго закона Ньютона в общем виде для линейного и вращательного движения до рекурсивных процедур получения уравнений движения многозвенных робототехнических систем.

В четвертой главе приводятся полезные свойства уравнений движения робототехнических систем, которые могут быть использованы при анализе их динамики, планировании траекторий и синтезе алгоритмов управления.

Пятая глава целиком посвящена вопросу идентификации динамических моделей робототехнических систем и затрагивает вопросы линейной параметризации уравнений движения, планирования оптимальных траекторий для идентификационных экспериментов, организации экспериментов и обработки полученных данных, оценивания и верификации качества полученных оценок.



# Приложение 1

## Некоторые сведения из линейной алгебры

1. **Косо-симметрическая матрица**  $S(a)$  от вектора  $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$  в трехмерном пространстве вычисляется как

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Векторное произведение и его свойства:**

- $a \times b = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

- $a \times b = S(a) \cdot b$

- $a \times b = -b \times a$

3. **Производная поворотной матрицы**  $\dot{R}_i^0 = S(\omega_i^0)R_i^0$ , где  $\omega_i^0$  обозначает вектор угловых скоростей подвижной системы координат относительно инерциальной.
4. **Производная вектора в подвижной системе координат.** Допустим, что вектор линейной скорости  $\nu_i^i$  задан в локальной подвижной системе координат, а также задана поворотная матрица  $R_i^0$ , связывающая инерциальную и подвижную системы координат, так что  $\nu_i^0 = R_i^0 \nu_i^i$ . Для начала вычислим производную заданного вектора, выраженную в инерциальной системе координат  $\dot{\nu}_i^0 = \dot{\nu}_i^0$ . Используя формулы для производной произведения,

а также производной поворотной матрицы, мы получим следующие выражения:

$$a_i^0 = R_i^0 a_i^i = R_i^0 \dot{\nu}_i^i + \dot{R}_i^0 \nu_i^i = R_i^0 \dot{\nu}_i^i + \omega_i^0 \times R_i^0 \nu_i^i = R_i^0 (\dot{\nu}_i^i + \omega_i^i \times \nu_i^i).$$

Следовательно, линейное ускорение в собственной подвижной системе координат может быть найдено как

$$a_i^i = \dot{\nu}_i^i + \omega_i^i \times \nu_i^i.$$

# Приложение 2

## **Соглашение Денавита-Хартенберга и матрица однородных преобразований**

Стандартно системы координат, прикрепленные к звеньям робота, задаются на основании соглашения Денавита-Хартенберга (подробности см. в [9]), как это проиллюстрировано для случая последовательно соединенных вращательных звеньев на Рис. А.1:

1. в качестве оси  $z_i$  выбираем ось вращения  $(i+1)$ -го звена: для вращательного звена это ось, относительно которой оно вращается, причем в положительное направление оси выбирается в соответствии с "правилом правой руки"; для призматического звена – это ось, вдоль которой оно совершает линейные перемещения;
2. ось  $x_i$  выбирается так, что она одновременно перпендикулярна осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$  и пересекает ось  $z_{i-1}$  (основные условия назначения систем координат);
3. ось  $y_i$  выбирается, чтобы вместе с осями  $x_i$  и  $z_i$  составить правую тройку ортогональной системы координат;
4. процедура аналогично продолжается для всех звеньев робота.

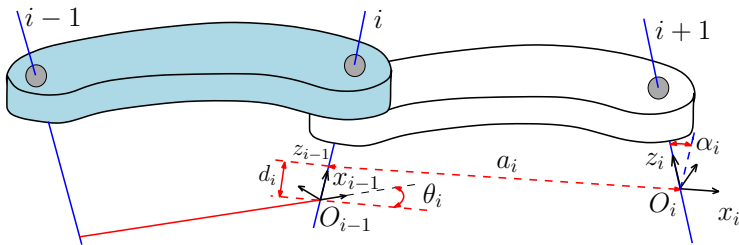


Рис. А.1. Задание систем координат на основе соглашения Денавита-Хартенберга.

При таком правиле назначения взаимное расположение систем координат соседних звеньев однозначно задается с помощью всего 4 (геометрических) параметров:

- $a_i$  – это расстояние между осями  $z_{i-1}$  и  $z_i$ , измеренное вдоль оси  $x_i$ ;
- $\alpha_i$  – это угол между осями  $z_{i-1}$  и  $z_i$ , измеренный в плоскости, перпендикулярной оси  $x_i$ , при этом положительное направление изменения угла определяется в соответствии с "правилом правой руки";
- $d$  – это расстояние от начала точки отсчета системы координат  $O_{i-1}$  до точки пересечения осей  $x_i$  и  $z_{i-1}$ , измеренное вдоль оси  $z_{i-1}$ ;
- $\theta$  – это угол между осями  $x_{i-1}$  и  $x_i$ , измеренный в плоскости, перпендикулярной оси  $z_{i-1}$ , при этом положительное направление изменения угла определяется в соответствии с "правилом правой руки";

посредством матрицы однородных преобразований  $H_i^{i-1}(t)$  размерности  $[4 \times 4]$ , связывающей  $i$ -ую и  $(i - 1)$ -ую системы координат, назначаемой как

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Так как по определению

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0_{[1 \times 3]} & 1 \end{bmatrix},$$

где вектор  $o_i^{i-1}$  размерности  $[3 \times 1]$  задает координаты центра системы координат  $O_i x_i y_i z_i$  в системе координат  $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ , матрица поворота вычисляется как

$$R_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

При этом матрица, описывающая расположение системы координат  $O_j x_j y_j z_j$  относительно произвольной системы координат  $O_i x_i y_i z_i$  может вычислена как

$$H_j^i = H_{i+1}^i \cdot H_{i+2}^{i+1} \dots H_j^{j-1}. \quad (5.29)$$

# Приложение 3

## Тензор инерции абсолютно твердого тела

Определение П 5.1 Тензор инерции – это симметричная матрица размерности  $[3 \times 3]$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

которая включает:

- *главные моменты инерции – диагональные элементы*

$$I_{xx} = \int \int \int (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{yy} = \int \int \int (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{zz} = \int \int \int (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- *перекрестные моменты инерции – внедиагональные элементы*

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int \int \int xy \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \int \int \int xz \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int \int \int yz \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $\rho(x, y, z)$  – это функция, определяющая пространственное распределение плотности тела.

**Утверждение П 5.1** Тензор инерции абсолютно твердого тела (АТТ) в собственной (прикрепленной к нему) системе координат  $I$  – постоянная величина.

**Утверждение П 5.2** Тензор инерции движущегося АТТ, выраженный в инерциальной системе координат  $\mathcal{I}$ , может быть найден по формуле

$$\mathcal{I} = R(t)IR^T(t),$$

где  $R(t)$  – это  $[3 \times 3]$  поворотная матрица, связывающая собственную и инерциальную системы координат.

**Теорема П 5.1 (Теорема Штейнера)** Тензор инерции АТТ в произвольной системе координат может быть найден на основе соотношения

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_c + mS^T(\vec{r})S(\vec{r}),$$

где  $\mathcal{I}_c$  – тензор инерции тела относительно собственной системы координат, с началом отсчета в центре масс тела,  $m$  – масса тела,  $\vec{r}$  – вектор, связывающий начало произвольной системы координат с центром масс тела,  $S(\cdot)$  – это кососимметрическая матрица от вектора.

**Замечание П 5.1** Теорема Штейнера, может быть выписана поэлементно для моментов инерции тела:

$$\mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}_{ij,c} + md^2, \quad (5.30)$$

где  $\mathcal{I}_{ij}$  – соответствующий элемент тензора инерции,  $d$  – расстояние между соответствующими осями двух систем координат.

**Пример П 5.1** Тензор инерции параллелепипеда (см. Рис. А.2)

- Основной момент инерции вокруг оси  $x$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \rho \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

- Компоненты тензора инерции тела

$$- I_{yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$- I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

$$- I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

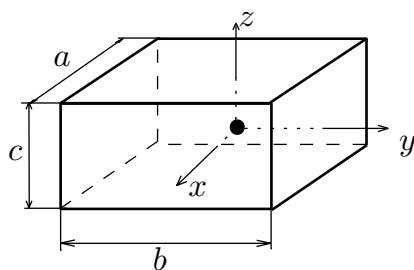


Рис. А.2. Параллелепипед с равномерным распределением массы.



# Литература

- [1] Corke robotics toolbox. URL. [www.petercorke.com/Robotics\\_Toolbox.html](http://www.petercorke.com/Robotics_Toolbox.html).
- [2] Wisama Khalil and Denis Creusot. SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots. *Robotica*, 15(2):153–161, March 1997.
- [3] Программный пакет arte для моделирования в среде matlab. URL. [www.arvc.umh.es/arte](http://www.arvc.umh.es/arte).
- [4] Программный пакет моделирования и планирования движений роботов drake. URL. [www.drake.mit.edu](http://www.drake.mit.edu).
- [5] C++ библиотеки orocos. URL. [www.orocos.org](http://www.orocos.org).
- [6] C++ библиотека моделирования динамики систем твердых тел dynamechs. URL. [www.sourceforge.net/projects/dynamechs](http://www.sourceforge.net/projects/dynamechs).
- [7] Среда моделирования v-rep. URL. [www.coppeliarobotics.com](http://www.coppeliarobotics.com).
- [8] Среда компьютерного моделирования робототехнических систем gazebo. URL. <http://gazebosim.org/>.
- [9] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley and Sons, Hoboken (N.J.), 2006.
- [10] Bruno Siciliano and Oussama Khatib. *Springer Handbook of Rob.* Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [11] Юревич Е.И. *Основы робототехники /Учебное пособие. — 3-е изд.* СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 368 с.

- [12] Шахинпур М. *Курс робототехники*. М.: Мир, 1990. — 527 с.
- [13] Тывес Л.И. Корендяев А.И., Саламандра Б.Л. *Теоретические основы робототехники. В 2 кн. Кн. 1*. М.: Наука, 2006. — 383 с.
- [14] Раус Э. *Динамика системы твердых тел. Пер. с англ. В 2-х томах. Том 1/ Под ред. Ю.А. Архангельского и В.Г. Демина*. М.: Наука, 1983 — 464 с.
- [15] Liley M., Gourdon D., Stamou D., Meseth U., and Fischer T.M. et al. Friction anisotropy and asymmetry of a compliant monolayer induced by a small molecular tilt. *Science*, 280(5361):273—275, 1998.
- [16] W. Khalil, M. Gautier, and Ch. Enguehard. Identifiable parameters and optimum configurations for robots calibration. *Robotica*, 9(01):63–70, jan 1991.
- [17] W. Khalil and M. Gautier. Calculation of the identifiable parameters for robot calibration. In *The 9<sup>th</sup> IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 888–892, Budapest, Hungary, 1991.
- [18] J. Swevers, C. Ganseman, D.B. Tukel, J. de Schutter, and H. Van Brussel. Optimal robot excitation and identification. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 13(5):730–740, October 1997.
- [19] W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Elsevier Science, 2004.
- [20] S. Kolyubin, A. Shiriaev, and A. Jubien. Refining dynamics identification for co-bots: Case study on KUKA LWR4+. In *Preprints of the 20th IFAC World Congress*, pages 15191–15196, July 2017.
- [21] Maxime Gautier, Alexandre Janot, and Pierre-Olivier Vandanjon. A new closed-loop output error method for parameter identification of robot dynamics. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 21(2):428–444, mar 2013.
- [22] J. Swevers, W. Verdonck, and J. De Schutter. Dynamic model identification for industrial robots. *IEEE Control Systems*, 27(5):58–71, 2007.

- [23] A. Jubien, M. Gautier, and A. Janot. Dynamic identification of the Kuka LWR robot using motor torques and joint torque sensors data. *IFAC Proc. Volumes*, 19:8391–8396, 2014.
- [24] Catherine Forbes, Merran Evans, Nicholas Hastings, and Brian Peacock. *F (Variance Ratio) or Fisher-Snedecor Distribution*, pages 102–106. John Wiley and Sons, Inc., 2010.

**Миссия университета** — генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра Систем Управления и Информатики (до 2001 г. кафедра Автоматики и Телемеханики) факультета Компьютерных Технологий и Управления была основана в 1945 г. на базе факультета Электроприборостроения ЛИТМО. На кафедре Автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Первый выпуск молодых инженеров состоялся в 1948 г. и составил 17 человек. Первым заведующим кафедры был крупный специалист в области систем телеизмерений, профессор Марк Львович Цуккерман.

В 1955 г. при кафедре образована научно-исследовательская лаборатория (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 г. по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана доцент Ефимий Аполлонович Танский. За время его руководства в научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения, что привело к длительному научно-техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса “Газета-2”.

С 1970 по 1990 г., за время руководства кафедрой известного в стране специалиста в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктора технических наук, профессора Юрия Алексеевича

Сабинина, заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам “Теория автоматического регулирования и следящие системы”, “Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы”, “Элементы автоматики” и “Телемеханика” были добавлены дисциплины: “Теоретические основы кибернетики”, “Локальные системы управления”, “САПР систем управления” и другие. Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов.

С 1990 г. научно-исследовательская работа кафедры велась по федеральным целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивных систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 г. образована научная Лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 г. существенно расширились международные контакты кафедры, участие в самых престижных международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. С 1998 г. на базе кафедры в университете ежегодно проводится Международная студенческая олимпиада по автоматическому управлению, а с 2009 года проводится Всероссийский Фестиваль Мехатроники и Робототехники.

В 2001 г. кафедра была переименована и получила название “Кафедра Систем управления и информатики”. В 2010 г. кафедру возглавил доктор технических наук, профессор Бобцов Алексей Алексеевич, работающий в то время уже в должности декана факультета Компьютерных технологий и управления.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области систем автоматического управления, робототехники и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI столетия.

Колобин Сергей Алексеевич

## **Динамика робототехнических систем**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49