МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

О.В. Сильванович, Г.В. Тимофеева

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ (МОДУЛЬ 2)

ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по направлению подготовки 09.03.01, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.05, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 44.03.04 в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2018

О.В. Сильванович, Г.В. Тимофеева. Индивидуальные домашние задания по высшей математике (модуль 2). Предел, непрерывность, дифференцирование функции одной переменной. – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 66 с.

Рецензенты: к.ф.-.м.н., доцент ОЦМ Университета ИТМО А.И. Трифанов

Пособие предназначено для студентов бакалавриата. В первом разделе представлены подробные решения всех типов задач, которые распределены по 7 темам: 1)предел последовательности, предел функции; 2)непрерывность и точки разрыва функции; 3)производная функции одной переменной; 4)раскрытие неопределённостей в пределе с помощью правила Лопиталя; 5) разложение функции в ряд Тейлора (Маклорена); 6)геометрический смысл производной; 7)исследование функции и её график; 8)исследование функции на максимум (минимум). Каждая тема содержит различное количество задач, отличающихся как содержанием, так и сложностью. Во второй части данного пособия все рассмотренные типы задач представлены в 30 вариантах, что позволяет преподавателю сформировать индивидуальный вариант для самостоятельной работы студента по представленным темам.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО - ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО - участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект "5 в 100". Цель Университета ИТМО - становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализцию всех направлений деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основу данного учебно-методического пособия составляют задания, представленные в [4], которые были дополнены задачами по следующим темам:

- решение пределов с помощью разложения функции в ряд Тейлора, (Маклорена)
- геометрический смысл производной функции одной переменной.

Пособие состоит из 2-х частей, в первой из которых содержится подробный разбор решений задач по темам "Предел, непрерывность, дифференцирование функции одной переменной". Задачи распределены не только по тематике, но и по уровню сложности - наиболее трудные из них отмечены знаком *. Это позволяет составить варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов с различным уровнем математической подготовки. Вторая часть пособия содержит каждый из рассмотренных ранее типов задач в 30 вариантах. При возникновении трудностей по выполнению данных заданий, студент может воспользоваться теоретическим материалом, представленным в [1] и [2].

При выполнении заданий №№2,5,6,7 рекомендовано применять доступные графические редакторы или МПП (математические пакеты программ): Geogebra, Desmos, Wolfram Mathematica, MathLab и другие.

Основные типы задач и методические указания по их решению

Рассмотрим пример индивидуального варианта заданий для самостоятельной работы студента, составленный из задач различных типов (в данном варианте представлено максимально возможное количество заданий).

Задача 1. Найти пределы:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+...+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)$ 1.2 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}$

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ 1.4 $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

1.5 $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x+19}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{4x}-2}$ 1.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

1.7* а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ в) $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

Задача 2. Исследовать функции на непрерывность и построить их графики:

2. а) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x},\ x\le0,\\ 0,\ 0<x\le2,\\ x-2,\ x>2\end{cases}$ 2.б) $f(x)=\frac{|x+5|}{x^2+2x-15}$ 2.в)* $f(x)=5^{\frac{9}{x^2-9}}$

Задача 3.

3.1.Продифференцировать функцию $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. Упростить полученное выражение.

3.2 Продифференцировать функции:

а) $y=\frac{(x-4)^7\cdot(5x+1)^3}{(5x^2+3)\cdot(\operatorname{tg}(0{,}1x)-4)^8}$ б) $y=x^{\operatorname{arcctg}(5x-2)}$

3.3* Найти производную функции $f(x)=\sqrt[3]{5x-2}$, пользуясь непосредственно определением производной.

3.4* Записать формулу для производной $n-$го порядка функции $y=\frac{1}{x+5}$.

Задача 4.

Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{5}{1+x^5}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$;

Задача 5.

5.1. Используя разложение функций по формуле Тейлора (или Маклорена), найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^4}{2}}-\cos\left(x^2\right)}{3x^8}$.

5.2. Многочлен $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-3x-7$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

Задача 6.

а) Под каким углом пересекаются кривые $y_1=10-7x^3$ и $y_2=3x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.

б) Найти точки пересечения кривых $y=-x^2+1$, $y^2=4x+1$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

в) Найти точки пересечения кривых $y=\sin 2x$, $y=\cos x$ принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$. Среди найденных точек выбрать любую так, чтобы она не являлась нулём функций $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$, и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

г) Найти точки пересечения кривых $4x^2+y^2=5,\ 4x^2-y^2=3$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Задача 7.

Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ б) * $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ в) * $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Задача 8.

а) Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 20. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

б) * Определить наибольшее отклонение от нуля функции $y=x+\sin 2x$ на отрезке [0; π].

в) * Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+2$ и отрезками прямых $x=1; x=5; y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

1. Решение задач по теме " Предел последовательности, предел функции"

Задача 1.1 Найти предел последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)$.

Решение. Представим дробь $\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$ в виде разности двух дробей $\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}$. Тогда n-ый член последовательности можно переписать в виде

$$\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}.$$

Дробь $\frac{1}{3n+4}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Задача 1.2 Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to-\frac{1}{3}$, то есть получается неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, воспользовавшись информацией о том, что один корень $x=-\frac{1}{3}$ уже известен, тогда

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(x-1)}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+1}{x-1}=-\frac{1}{4}.$$

Задача 1.3 Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

Решение. Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть $\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}\right)^{x+1}$.

Дробь $\dfrac{1}{5(5x+7)}$ является бесконечно малой при $x\to\pm\infty$, тогда при $x\to+\infty$ получим $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty}\right]=0$, при $x\to-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\infty}\right]=+\infty$.

Задача 1.4 Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. По формулам приведения $\operatorname{tg}2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}2x$,

поэтому

$$\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\operatorname{ctg}2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\left(-\frac{1}{5x}\right)\cdot(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}.$$

Используя второй замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}=e$. Так как $y=e^{x}$ непрерывная на всей числовой оси функция, поменяем местами знаки вычисления предела и показательной функции: $\lim\limits_{x\to 0}e^{(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{tg}2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}}=e^{2,5}$. При решении предела было использовано правило замены на эквивалентные бесконечно малые функции: $\operatorname{tg}2x\sim 2x$ при $x\to 0$.

Задача 1.5 Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x+19}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{4x}-2}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-8$, тогда $t\to 0$. Функцию преобразуем следующим образом

$$\frac{\sqrt[3]{t+8+19}-\sqrt{t+8+1}}{\sqrt[5]{4(t+8)}-2}=\frac{\left(\sqrt[3]{t+27}-3\right)-\left(\sqrt{t+9}-3\right)}{\sqrt[5]{4t+32}-2}=\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)-3\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}.$$

Далее можно использовать эквивалентные бесконечно малые функции: $(1+y)^{m}-1\sim my$ при $y\to 0$. Предел разности функций запишем в виде разности пределов и получим:

$$\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)-3\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t}{27}}{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{t}{8}}-\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{9}}{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{t}{8}}=\frac{3}{2}\left(\frac{40}{81}-\frac{20}{9}\right)=-\frac{70}{27}.$$

Задача 1.6 Найти предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Решение. Заметим, что при $x\to+\infty$ функции $\sin\sqrt{x+1}$ и $\sin\sqrt{x}$ не имеют предела, а принимают все возможные значения от -1 до 1. Воспользуемся формулой для разности синусов и получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).$$

Функция $\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ ограничена. Аргумент функции $\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$ преобразуем, домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$. Полученная функция $\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую будет бесконечно малым, а, значит,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0.$$

Задача 1.7* **а)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-1$; $t\to0$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{100}-2(1+t)+1}{(1+t)^{50}-2(1+t)+1}.$$

Разложим по формуле бинома Ньютона

$$(1+t)^{100}=1+100t+\frac{100\cdot99}{2}t^2+...+t^{100},\ (1+t)^{50}=1+50t+\frac{50\cdot49}{2}t^2+...+t^{50}.$$

Для вычисления предела будем пренебрегать бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем t. Тогда

$$\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{100}-2(1+t)+1}{(1+t)^{50}-2(1+t)+1}=\lim_{t\to0}\frac{1+100t-2(1+t)+1}{1+50t-2(1+t)+1}=\lim_{t\to0}\frac{98t}{48t}=\frac{49}{24}.$$

Задача 1.7* **б)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-3$; $t\to0$,тогда

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t+3)}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t\cdot\cos 3+\cos t\cdot\sin 3}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(\sin t\cdot\operatorname{ctg}3+\cos t\right)^{\frac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\left(\sin t\cdot\operatorname{ctg}3+\cos t-1\right)\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Здесь функция $\cos t-1$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\sin t\operatorname{ctg}3$,

поэтому ею можно пренебречь. Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, найдем $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\sin t\operatorname{ctg}3\right)^{\frac{1}{\sin t\operatorname{ctg}3}\cdot\frac{\sin t\operatorname{ctg}3}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\operatorname{ctg}3}{t}}=e^{\operatorname{ctg}3}$.

Задача 1.7* в) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Раскроем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, введя новую переменную $t=x+1; t\to +0$. Далее домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и получим

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{t\to +0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos(t-1)}}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to +0}\frac{\pi-\arccos(t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}.$$

Бесконечно малую функцию $\pi-\arccos(t-1)$ при $t\to +0$ заменим на эквивалентную

$$\sin\left(\pi-\arccos(t-1)\right)=\sin\arccos(t-1)=\sqrt{1-(t-1)^2}=\sqrt{t}\cdot\sqrt{2-t}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to +0}\frac{\pi-\arccos(t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}=\lim_{t\to +0}\frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt{2-t}}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2. Решение задач по теме " Непрерывность, точки разрыва функции"

Задача 2а) Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0,\\ 0, 0<x\le 2,\\ x-2, x>2.\end{cases}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, но не является на ней непрерывной, так как эта функция неэлементарная. Она задана тремя различными формулами для разных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрывы в точках $x=0$ и $x=2$, где меняется её аналитическое выражение. Исследуем поведение функции при приближении к точке $x=0$ слева и справа:

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\sqrt{1-x}=1, \text{ а } f(+0)=\lim_{x\to+0}0=0.$$

Значит, это точка разрыва 1 рода (или конечного разрыва). Далее

$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0}0=0,\ f(2+0)=\lim_{x\to2+0}x-2=0,$$

то есть в точке $x=2$ функция непрерывна. График функции представлен на рис. 1.

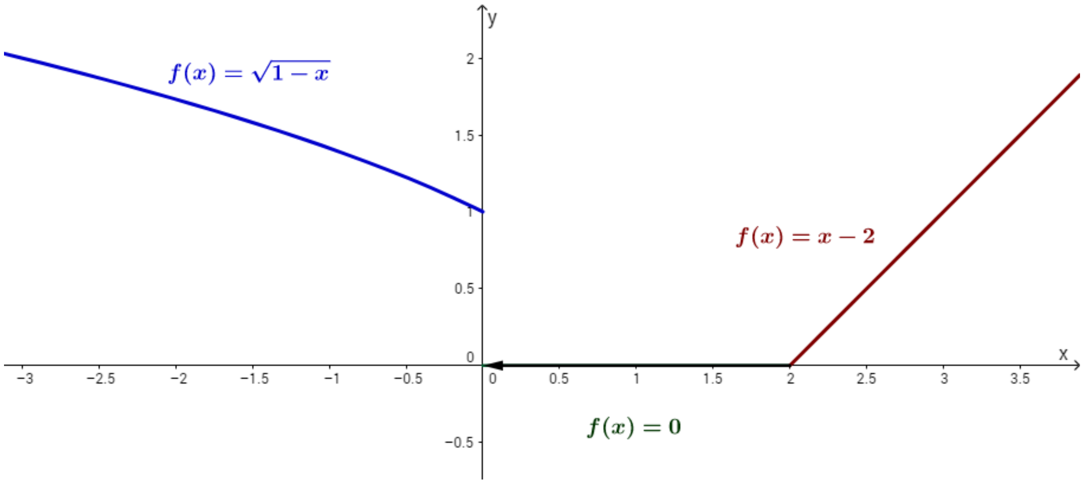

Рис. 1.График функции $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0,\\ 0, 0<x\le 2,\\ x-2, x>2.\end{cases}$

Задача 2б) Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2+2x-15}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Разложим знаменатель этой элементарной функции на множители и получим $f(x)=\dfrac{|x+5|}{(x+5)(x-3)}$. Эта функция определена и непрерывна во всех точках области определения: $-\infty<x<-5; -5<x<3; 3<x<+\infty$.

В точках $x=-5$ и $x=3$ она не определена, поэтому имеет в них разрывы. Вычислим лево и правосторонние пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x\to-5-0}f(x)=\lim_{x\to-5-0}\frac{-(x+5)}{(x+5)(x-3)}=\lim_{x\to-5-0}\frac{-1}{x-3}=\frac{1}{8},$$

$$\lim_{x\to-5+0}f(x)=\lim_{x\to-5+0}\frac{x+5}{(x+5)(x-3)}=\lim_{x\to-5+0}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{8},$$

$$\lim_{x\to3-0}=\lim_{x\to3-0}\frac{x+5}{(x+5)(x-3)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x+5}{(x+5)(x-3)} = \infty .$$

Следовательно, в точке $x=-5$ функция имеет конечный разрыв, её скачок $\omega = \left| \lim_{x\to -5+0} f(x) - \lim_{x\to -5-0} f(x) \right| = \frac{1}{4}$, а в точке $x=3$ функция имеет бесконечный разрыв (или разрыв 2 рода). График функции представлен на рис. 2.

Задача 2в)* Исследовать функцию $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Элементарная функция $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x=\pm 3$. Так как выполнено условие $f(x) = f(-x)$, то функция является четной, а, значит, можно исследовать на разрыв только одну точку, например, $x=3$. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке.

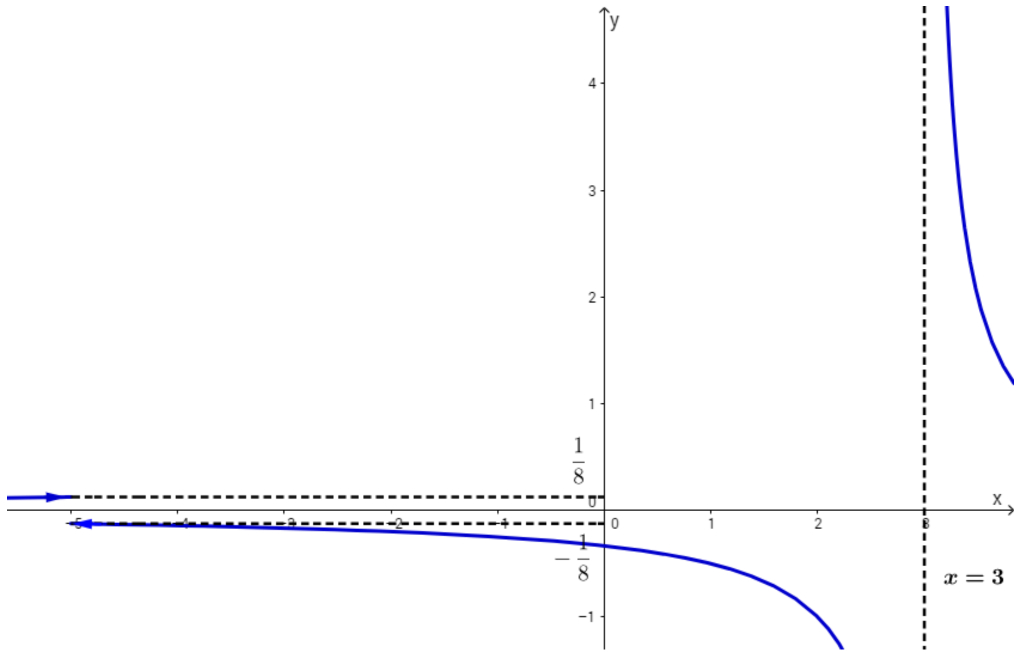

Рис. 2. График функции $f(x) = \frac{|x+5|}{x^2+2x-15}$.

Так как $\lim_{x\to 3-0} \frac{9}{x^2-9} = -\infty$, то $\lim_{x\to 3-0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = \left[5^{-\infty}\right] = 0$. Далее, $\lim_{x\to 3+0} \frac{9}{x^2-9} = +\infty$, поэтому $\lim_{x\to 3+0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = \left[5^{+\infty}\right] = +\infty$. Следовательно, точка $x=3$, как и точка $x=-3$, является точкой разрыва 2 рода. График функции представлен на рис. 3.

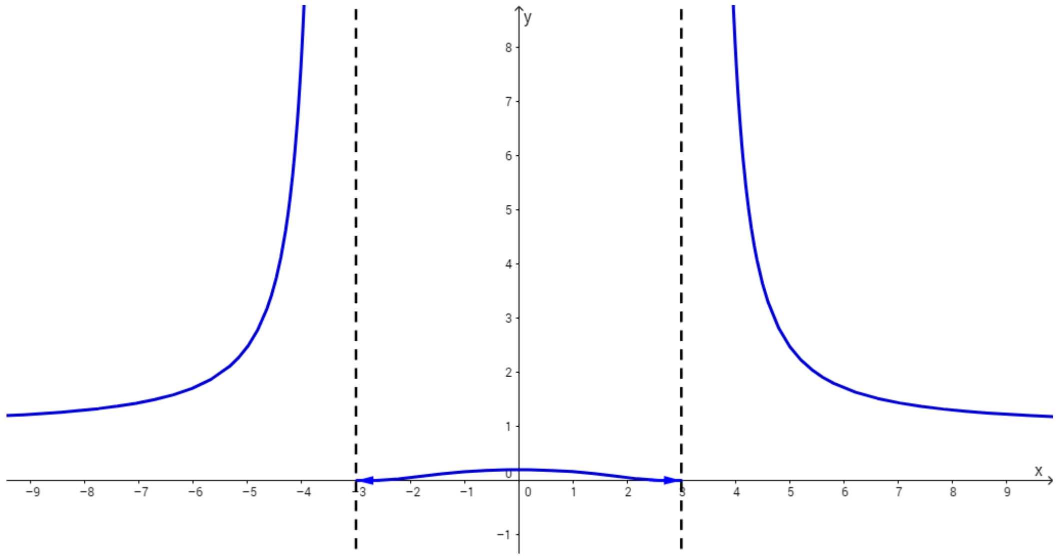

Рис. 3. График функции $f(x)=5^{\frac{9}{x^2-9}}$.

3. Решение задач по теме "Производная функции одной переменной"

Задача 3.1 Продифференцировать функцию $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. Упростить полученное выражение.

Решение. Продифференцируем функцию как сумму двух функций и упростим результат:

$$y'=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-e^{2x}\right)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot\left(-2e^{2x}\right)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\frac{e^{2x}}{e^x\sqrt{1-e^{2x}}}=0.$$

Задача 3.2 а) Продифференцировать функцию $y=\dfrac{(x-4)^7\cdot(5x+1)^3}{\left(5x^2+3\right)\cdot\left(\mathrm{tg}(0,1x)-4\right)^8}$.

Решение. Вначале преобразуем функцию согласно свойствам логарифмов

$$\ln y=7\ln(x-4)+3\ln(5x+1)-\ln\left(5x^2+3\right)-8\ln\left(\mathrm{tg}(0,1x)-4\right),$$

а затем применим логарифмическое дифференцирование и найдем:

$$\frac{y'}{y}=\frac{7}{x-4}+\frac{15}{5x+1}-\frac{10x}{5x^2+3}-\frac{8}{\mathrm{tg}(0,1x)-4}\cdot\frac{0,1}{\cos^2(0,1x)},$$

$$y'=\frac{(x-4)^7\cdot(5x+1)^3}{\left(5x^2+3\right)\cdot\left(\mathrm{tg}(0,1x)-4\right)^8}\cdot\left(\frac{7}{x-4}+\frac{15}{5x+1}-\frac{10x}{5x^2+3}-\frac{8}{\mathrm{tg}(0,1x)-4}\cdot\frac{0,1}{\cos^2(0,1x)}\right).$$

Задача 3.2 б) Продифференцировать функцию $y=x^{\mathrm{arcctg}(5x-2)}$.

Решение. Запишем функцию в виде показательной $y=e^{\mathrm{arcctg}(5x-2)\cdot\ln x}$, а затем продифференцируем, используя теорему о производной произведения:

$$y'=e^{\mathrm{arcctg}(5x-2)\cdot\ln x}\left(-\frac{5}{1+(5x-2)^2}\cdot\ln x+\mathrm{arcctg}(5x-2)\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Теперь вернемся к первоначальной форме записи функции и получим ответ

$$y' = x^{\operatorname{arcctg}(5x-2)}\left(-\frac{5\ln x}{1+(5x-2)^2}+\frac{\operatorname{arcctg}(5x-2)}{x}\right).$$

Задача 3.3* Найти производную функции $y=\sqrt[3]{5x-2}$, пользуясь непосредственно определением производной.

Решение. Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy: $y+\Delta y=\sqrt[3]{5(x+\Delta x)-2}$, откуда $\Delta y=\sqrt[3]{5(x+\Delta x)-2}-\sqrt[3]{5x-2}$. Исходя из определения производной, найдем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5(x+\Delta x)-2\right)^{\frac{1}{3}}-(5x-2)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{5x-2+5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\Delta x}.$$

Заменим бесконечно малую функцию $\left(1+\frac{5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1$ на эквивалентную $\frac{1}{3}\cdot\frac{5\Delta x}{5x-2}$ и получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5\Delta x}{3(5x-2)}}{\Delta x}=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-2)^2}}.$$

Задача 3.4* Записать формулу для производной $n-$го порядка функции $y=\frac{1}{x+5}$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, найдем

$$y'=\frac{-1}{(x+5)^2},\ y''=\frac{(-1)(-2)}{(x+5)^3},\ y'''=\frac{(-1)(-2)(-3)}{(x+5)^4},\ldots,y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+5)^{n+1}}.$$

4. Решение задач по теме "Раскрытие неопределённостей в пределе по правилу Лопиталя"

Задача 4а) Найти предел $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{5}{1+x^5}\right)$, используя правило Лопиталя.

Решение. Предел представляет собой неопределённость вида $[\infty-\infty]$, поэтому преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к 0, а затем применим правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3\left(1+x^5\right)-5\left(1+x^3\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(3\left(1+x^5\right)-5\left(1+x^3\right)\right)'}{\left(\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)\right)'}=\lim_{x\to -1}\frac{15x^4-15x^2}{3x^2\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{15x^2\left(x^2-1\right)}{x^2\left(3\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(15\left(x^2-1\right)\right)'}{\left(3\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{30x}{15x^4+3x^2\cdot 5x^2+\left(1+x^3\right)\cdot 10x}=\lim_{x\to -1}\frac{30x}{40x^4+10x}=-1.$$

Задача 4 б) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$, используя правило Лопиталя.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем функцию $\ln a=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$. Найдем предел её логарифма:

$$\ln a=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)\right)'}{\left(x\right)'}=3\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{6}{\pi}.$$

Теперь, по найденному пределу логарифма функции, найдем предел самой функции $a=e^{-\frac{6}{\pi}}$.

5. Решение задач по теме "Решение пределов с помощью разложения функции в ряд Тейлора (Маклорена)"

Задача 5.1 Используя разложение функций по формуле Тейлора (или Маклорена), найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^4}{2}}-\cos\left(x^2\right)}{3x^8}$.

Решение. Предел представляет собой неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Используя разложение функций $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+o\left(t^2\right)$ и $\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o\left(t^4\right)$ по формуле Маклорена, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^4}{2}}-\cos\left(x^2\right)}{3x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{8}+o\left(x^8\right)\right)-\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}+o\left(x^8\right)\right)}{3x^8}=\frac{1}{36}.$$

Задача 5.2 Многочлен $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-3x-7$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

Решение. Запишем формулу Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4+o\left((x-a)^4\right).$$

По условию $a=-2$. Вычислим производные заданной функции: $f'(x)=4x^3+9x^2-4x-3$, $f''(x)=12x^2+18x-4$, $f'''(x)=24x+18$, $f^{(4)}(x)=24$. Производные более высоких порядков равны 0. В указанной точке найдём значения функции и производных: $f(-2)=-17$, $f'(-2)=9$, $f''(-2)=8$, $f'''(-2)=-30$, $f^{(4)}(-2)=24$.

Тогда разложение многочлена будет иметь вид

$$x^4+3x^3-2x^2-3x-7=-17+9(x+2)+4(x+2)^2-5(x+2)^3+(x+2)^4.$$

Графики многочлена и полученного разложения представлены https://www.desmos.com/calculator/iuzbeyswqx и на рис. 4.

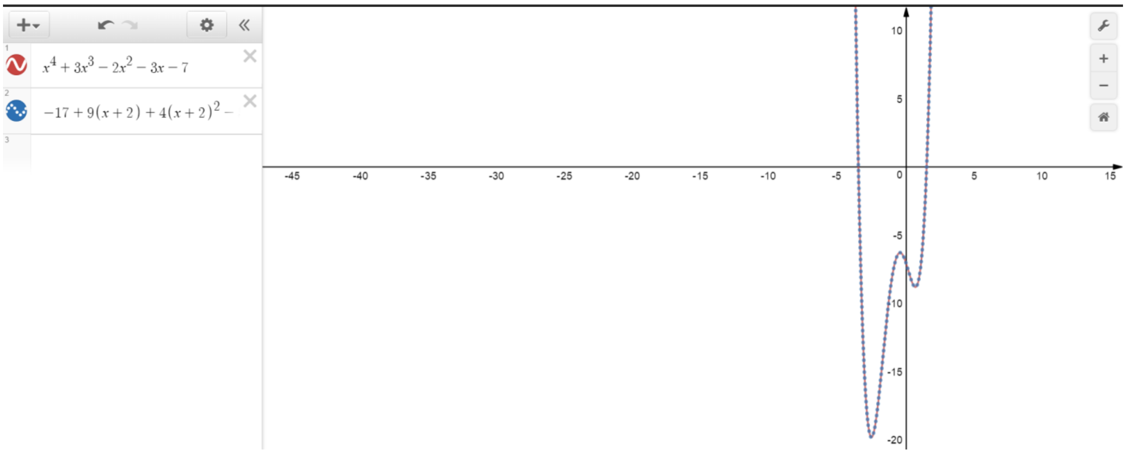

Рис. 4. График функции $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-3x-7$ и её разложения по целым положительным степеням бинома $x+2$.

6. Решение задач по теме "Геометрический смысл производной"

Задача 6 а) Под каким углом пересекаются кривые $y_1=10-7x^3$ и $y_2=3x^2$? Нарисуйте графики кривых и укажите угол между ними.

Решение. Найдём точку пересечения заданных кривых. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y=10-7x^3 \\ y=3x^2 \end{cases}$. Подставив вместо y в первое уравнение его выражение через x, получим кубическое уравнение $7x^3+3x^2-10=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(7x^2+10\right)=0$. Значит, абсцисса точки пересечения $x=1$. Угол между кривыми в точке пересечения определяется как угол между касательными к кривым, проведённым в этой точке. Воспользуемся формулой для нахождения тангенса угла α межу прямыми $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2'(x) - y_1'(x)}{1 + y_1'(x)\cdot y_2'(x)}$. Найдём значения производных в точке $x = 1$. Так как $y_1' = -21x^2$, а $y_2' = 6x$, то $y_1'(1) = -21$, $y_2'(1) = 6$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{6+21}{1+6\cdot(-21)}$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{27}{125}$.

Для построения угла между кривыми найдём уравнения касательных к кривым в точке их пересечения (1;3). Уравнение касательной находим по формуле $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$, где $x_0 = 1$, $y_1' = -21x^2$, $y_1'(1) = -21$. Тогда уравнения касательных к кривым $y_1 = 10 - 7x^3$ и $y_2 = 3x^2$ имеют вид $y = -21x + 24$ и $y = 6x - 3$ соответственно.

На рис. 5 представлены графики кривых и касательных к ним, а также указан найденный угол в градусах.

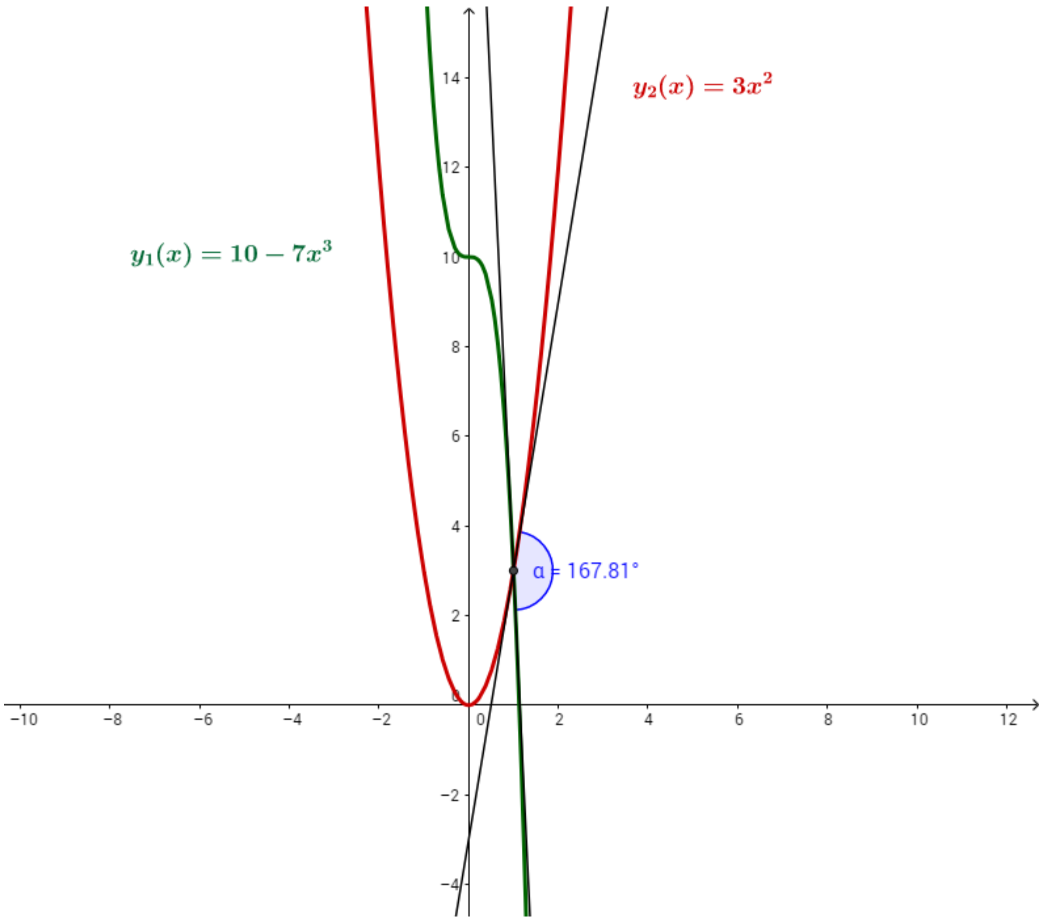

Рис. 5. Угол между кривыми $y_1 = 10 - 7x^3$ и $y_2 = 3x^2$.

Задача 6 б) Найти точки пересечения кривых $y = -x^2 + 1$, $y^2 = 4x + 1$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Решение. Найдём точки пересечения заданных кривых. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y^2=4x+1 \end{cases}$. Подставив вместо y во второе уравнение его выражение через x, получим уравнение $x^4-2x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x^3-2x-4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+2)=0$. Значит, абсциссы точки пересечения $x=0$ и $x=2$. Выберем точку с абсциссой $x=2$ ($y=-3$). Угол между кривыми в точке пересечения определяется как угол между касательными к кривым, проведённым в этой точке. Воспользуемся формулой для нахождения тангенса угла α между прямыми $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y_2'(x)-y_1'(x)}{1+y_1'(x)\cdot y_2'(x)}$. Найдём значения производных в точке $x=2$. Так как $y_1'=-2x$, а $y_2'=\left(-\sqrt{4x+1}\right)'=-\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$, то $y_1'(2)=-4$, $y_2'(2)=-\dfrac{2}{3}$, т.е

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{2}{3}-(-4)}{1+(-4)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{10}{11}.$$

Для построения угла между кривыми найдём уравнения касательных к кривым в точке их пересечения (2; -3). Уравнение касательной находим по формуле $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$, где $x_0=2$; $y_1'=-2x$; $y_1'(2)=-4$. Тогда уравнение касательной к кривой $y=-x^2+1$ имеет вид $y=-4x+5$. Далее $y_2'=\left(-\sqrt{4x+1}\right)'=-\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$, $y_2'(2)=-\dfrac{2}{3}$. Тогда уравнение касательной к кривой $y^2=4x+1$ (её нижней ветке $y=-\sqrt{4x+1}$) имеет вид $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$. На рис. 6 представлены графики кривых и касательных к ним, а также указан найденный угол в градусах.

Задача 6 в) Найти точки пересечения кривых $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$. Среди найденных точек выбрать любую так, чтобы она не являлась нулём функций $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$, и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание. При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

Решение. Найдём точки пересечения заданных кривых. Для этого решим уравнение

$$\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\end{array}\right., k \in Z.$$

По условию среди найденных точек пересечения необходимо выбрать любую из тех, которая не является нулём функций $y = \sin 2x$ и $y = \cos x$ и принадлежит отрезку $[0; 2\pi]$. Выберем точку $x = \frac{\pi}{6}$ $(y = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87)$. Угол между кривыми в точке пересечения определяется как угол между касательными к кривым, проведённым в этой точке. Воспользуемся

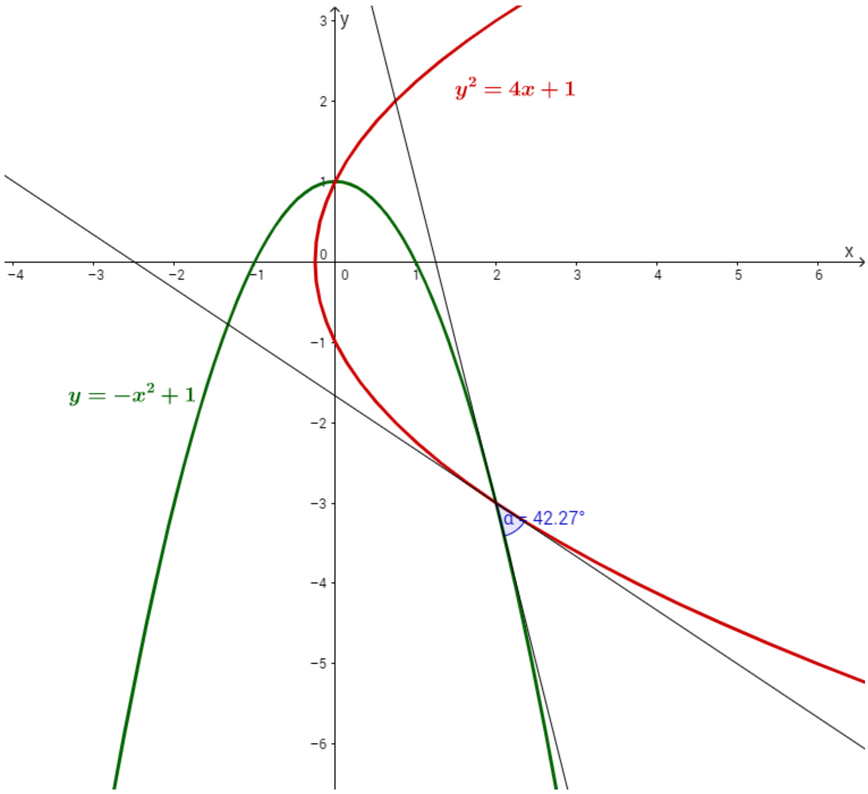

Рис. 6. Угол между кривыми $y = -x^2 + 1$ и $y^2 = 4x + 1$ в точке (2;-3).

формулой для нахождения тангенса угла α межу прямыми $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2'(x) - y_1'(x)}{1 + y_1'(x) \cdot y_2'(x)}$. Найдём значения производных в точке $x = \frac{\pi}{6}$. Так как $y_1' = 2\cos 2x$, а $y_2' = -\sin x$, то $y_1'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $y_2'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -3.$$

Для построения угла между кривыми найдём уравнения касательных к кривым в точке их пересечения $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Уравнение касательной находим по формуле $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$, где $x_0=\frac{\pi}{6}$;

$y_1'=2\cos 2x$; $y_1'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$. Тогда уравнение касательной к кривой $y=\sin 2x$ имеет вид $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$ или $y=x+0,35$. Далее $y_2'=-\sin x$; $y_2'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, тогда уравнение касательной к кривой $y=\cos x$ имеет вид $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или $y=-\frac{1}{2}x+1,13$.

На рис. 7 представлены графики кривых, касательных к ним и указан найденный угол в градусах.

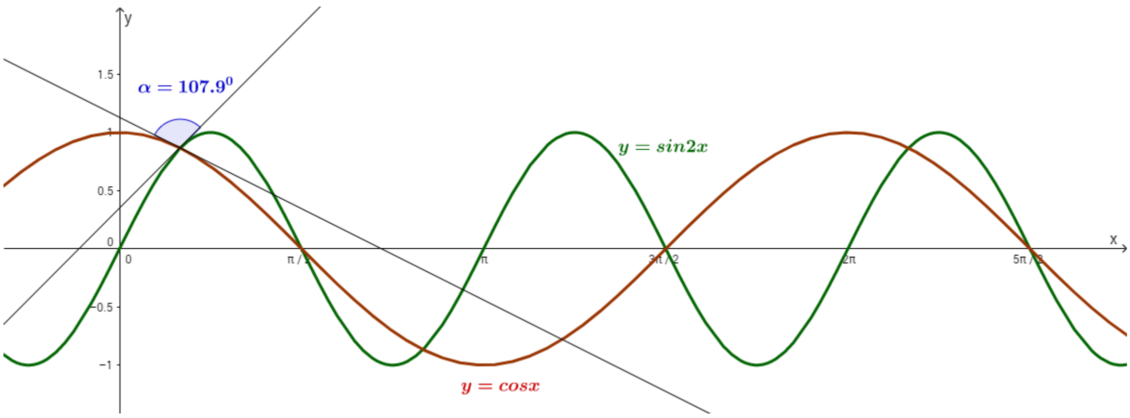

Рис. 7. Угол между кривыми $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 6 г) Найти точки пересечения кривых $4x^2+y^2=5,\ 4x^2-y^2=3$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Решение. Найдём точки пересечения заданных кривых. Для этого решим систему уравнений

$\begin{cases}4x^2+y^2=5\\4x^2-y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow 8x^2=8\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. Выберем точку с абсциссой $x=-1$ ($y=\pm 1$), например точку $(-1{,}1)$. Угол между кривыми в точке пересечения определяется как угол между касательными к кривым, проведённым в этой точке. Воспользуемся формулой для нахождения тангенса угла α межу прямыми $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2'(x) - y_1'(x)}{1 + y_1'(x)\cdot y_2'(x)}$. Найдём значения производных в точке $x = -1$.

Так как $y_1' = \left(\sqrt{5-4x^2}\right)' = -\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}}$, $y_2' = \left(\sqrt{4x^2-3}\right)' = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$, то $y_1'(-1) = 4$, $y_2'(-1) = -4$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-4-4}{1+(-4)\cdot 4} = \dfrac{8}{15}$. Для построения угла между кривыми найдём уравнения касательных к кривым в точке их пересечения (-1,1). Уравнение касательной находим по формуле $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$, где $x_0 = -1$; $y_1'(x) = -\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}}$; $y_1'(-1) = 4$. Тогда уравнение касательной к кривой $4x^2 + y^2 = 5$ (эллипсу) имеет вид $y = 4x + 5$. Далее, $y_2'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$; $y_2'(-1) = -4$. Тогда уравнение касательной к кривой $4x^2 - y^2 = 3$ (гиперболе) имеет вид $y = -4x - 3$.

На рис. 8 представлены графики кривых и указан найденный угол в градусах.

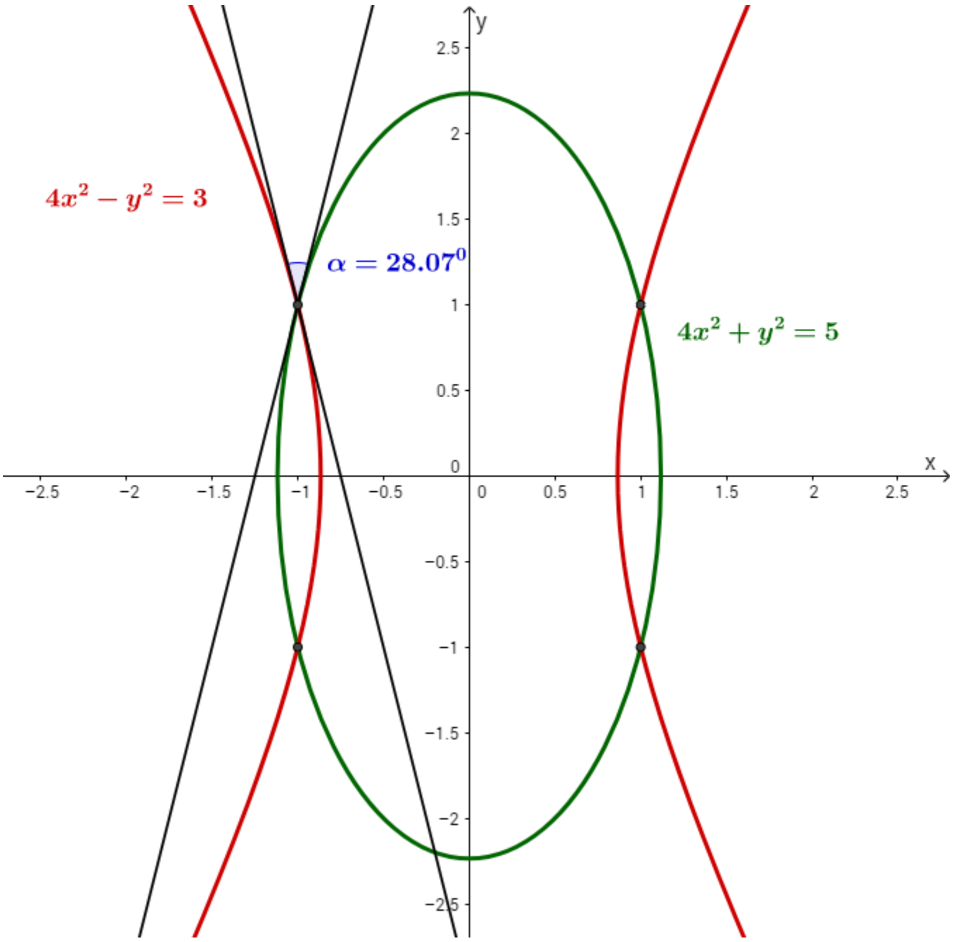

Рис. 8.Угол между кривыми $4x^2 + y^2 = 5$ и $4x^2 - y^2 = 3$ в точке (-1,1).

7. Решение задач по теме "Исследование функции, график функции"

Задача 7. Провести полное исследование функций и построить их графики. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и указать, как эти свойства влияют на вид графика функции.
3. Исследовать функцию с помощью первой производной: найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
4. Исследовать функцию с помощью второй производной: найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
5. Проверить наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найти значения функции в некоторых дополнительных точках.

Задача 7 а) Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точки $x=2$.
2. Функция не является периодической. Проверим чётность (нечётность):

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-3}{-x-2};\quad f(-x)=\frac{x^2-3}{-x-2};\; f(-x)\neq f(x);\, f(-x)\neq -f(x).$$

Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной. График функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

3. Найдём первую производную функции $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$:

$$y'=\left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-3\right)'(x-2)-\left(x^2-3\right)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2+3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

.

Тогда $y'=0$ при $x_1=1,\ x_2=3$.

Проверим знаки производной и определим промежутки монотонности функции (см. Рис.9). Таким образом, функция $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ возрастает при $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ и убывает при $x\in(1;2)\cup(2;3)$. Далее, так как при переходе через стационарную точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x=1$ - точка максимума ($y_{\max}=y(1)=2$). Аналогично, при переходе через стационарную точку $x=3$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x=3$ - точка минимума ($y_{\min}=y(3)=6$).

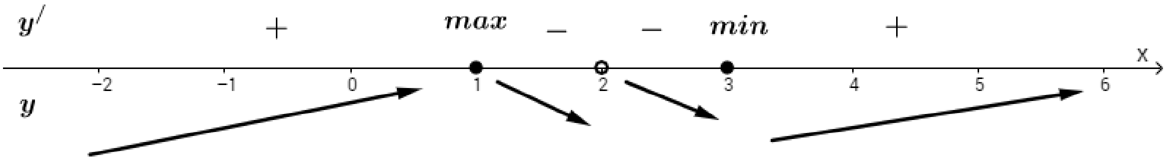

Рис.9. Промежутки монотонности функции $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.

4. Найдём вторую производную функции $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$:

$$y''=\left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)''=\left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2-(x^2-4x+3)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции и определим промежутки выпуклости (вогнутости) функции (см. Рис.10).

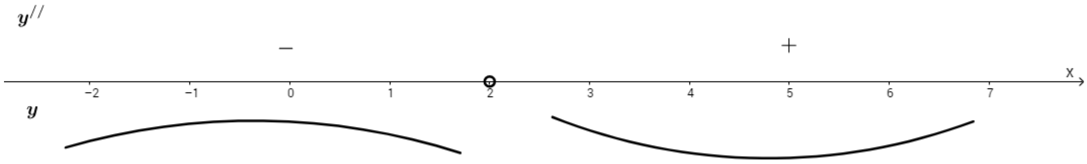

Рис.10. Промежутки выпуклости (вогнутости) функции $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.

Таким образом, функция $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ выпукла вверх при $x\in(-\infty;2)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x\in(2;+\infty)$. Так как точка $x=2$ не принадлежит области определения функции, она не является и точкой перегиба функции.

5. а) Так как функция $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ не является непрерывной в точке $x=2$, проверим в этой точке наличие вертикальной асимптоты:

Найдём $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\left[\dfrac{1}{-0}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\left[\dfrac{1}{+0}\right]=+\infty$, откуда следует, что прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y=b$:

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\pm\infty\neq const$, откуда следует, что горизонтальной асимптоты нет.

в) Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:
$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = 1$,
$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{(x-2)} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3-x(x-2)}{(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) = 2$.
Значит, прямая $y = x + 2$ - наклонная асимптота.
6. Находим точки пересечения функции с координатными осями: Ox: $y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-3}{x-2} = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{3}$; Oy: $y(0) = \frac{3}{2}$. Дополнительные точки: $y(4) = 6{,}5$; $y(-4) \approx -2{,}17$.
График функции представлен на рис. 11:

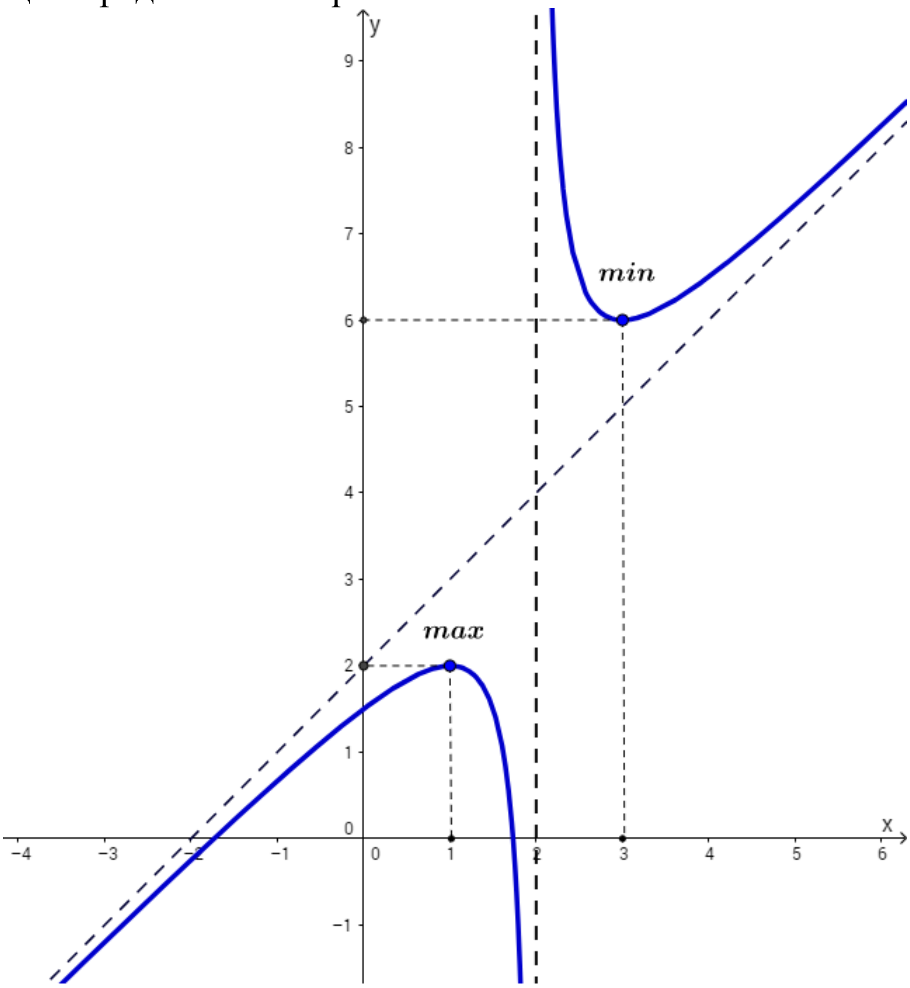

Рис. 11. График функции $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.

Задача 7 б*) Провести полное исследование функции $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ и построить её график.
Решение. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точек x, удовлетворяющих уравнению: $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$ $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

1. Функция является периодической, её период Т=2π. Проверим чётность (нечётность):

$$f(-x)=\frac{1}{\sin(-x)+\cos(-x)};\quad f(-x)=\frac{1}{\cos x-\sin x};\; f(-x)\neq f(x);\, f(-x)\neq -f(x).$$

Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной. График функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра координат.

2. Найдём первую производную функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$:

$$y'=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)'=-\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

Тогда $y'=0$ при $\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Проверим знаки производной на интервале длины Т=2π $\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и определим промежутки монотонности функции (см. Рис.12).

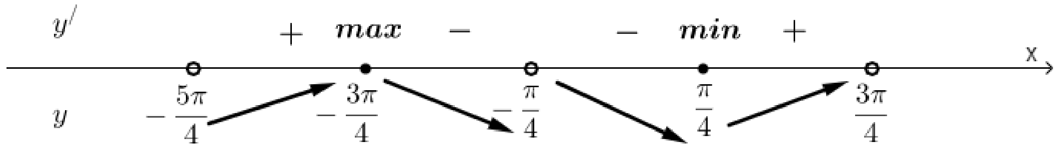

Рис. 12. Промежутки монотонности функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

Таким образом, функция $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ возрастает при $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4};-\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и убывает при $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. Так как при переходе через стационарную точку $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ - точка максимума ($y_{\max}=y(-\dfrac{3\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$). Аналогично, при переходе через стационарную точку $x=\dfrac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x=\dfrac{\pi}{4}$ - точка минимума ($y_{\min}=y(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

3. Найдём вторую производную функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$:

$$y''=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)''=\left(\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\right)'=\frac{3-2\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}=\frac{3-\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции между точками разрыва (так как числитель второй производной в нуль не обращается ни при каких x) и определим промежутки выпуклости (вогнутости) функции (см. Рис.13).

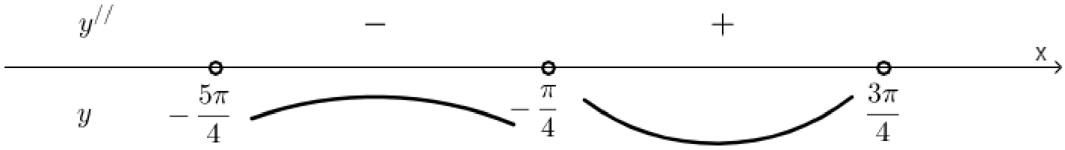

Рис.13. Промежутки выпуклости (вогнутости) функции $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

Таким образом, функция $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ выпукла вверх при $x \in \left(-\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Так как точка $x = -\dfrac{\pi}{4}$ не принадлежит области определения функции, она не является и точкой перегиба функции.

4. а) Так как функция не является непрерывной в точках $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$, проверим в этих точках наличие вертикальных асимптот:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}-0} \frac{1}{\sin x + \cos x} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}+0} \frac{1}{\sin x + \cos x} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

Значит, прямая $x = -\dfrac{\pi}{4}$ является вертикальной асимптотой;

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ - не существует, поэтому горизонтальной асимптоты нет.

в) Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x(\sin x + \cos x)} = 0$, $\quad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{\sin x + \cos x}\right)$-не существует, поэтому наклонных асимптот нет.

5. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

Ox: $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$; $\dfrac{1}{\sin x + \cos x} \neq 0$ ни при каких x;

Oy: $y(0) = \dfrac{1}{\sin 0 + \cos 0} = 1$.

График функции представлен на рис. 14.

Задача 7в[*]) Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Проверим чётность (нечётность): $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2-1} \Rightarrow f(-x)=f(x)$ - функция является чётной (её график симметричен относительно оси ординат).

4. Найдём первую производную функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$:

$$y'=\left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}.$$

Тогда $y'=0$ при $x=0$ и разрывна при $x=\pm1$. Так как сама функция непрерывна в этих точках, то они являются критическими точками – при выполнении достаточного условия экстремума (смене знака производной при переходе через эти точки) в них может быть "острый" экстремум.

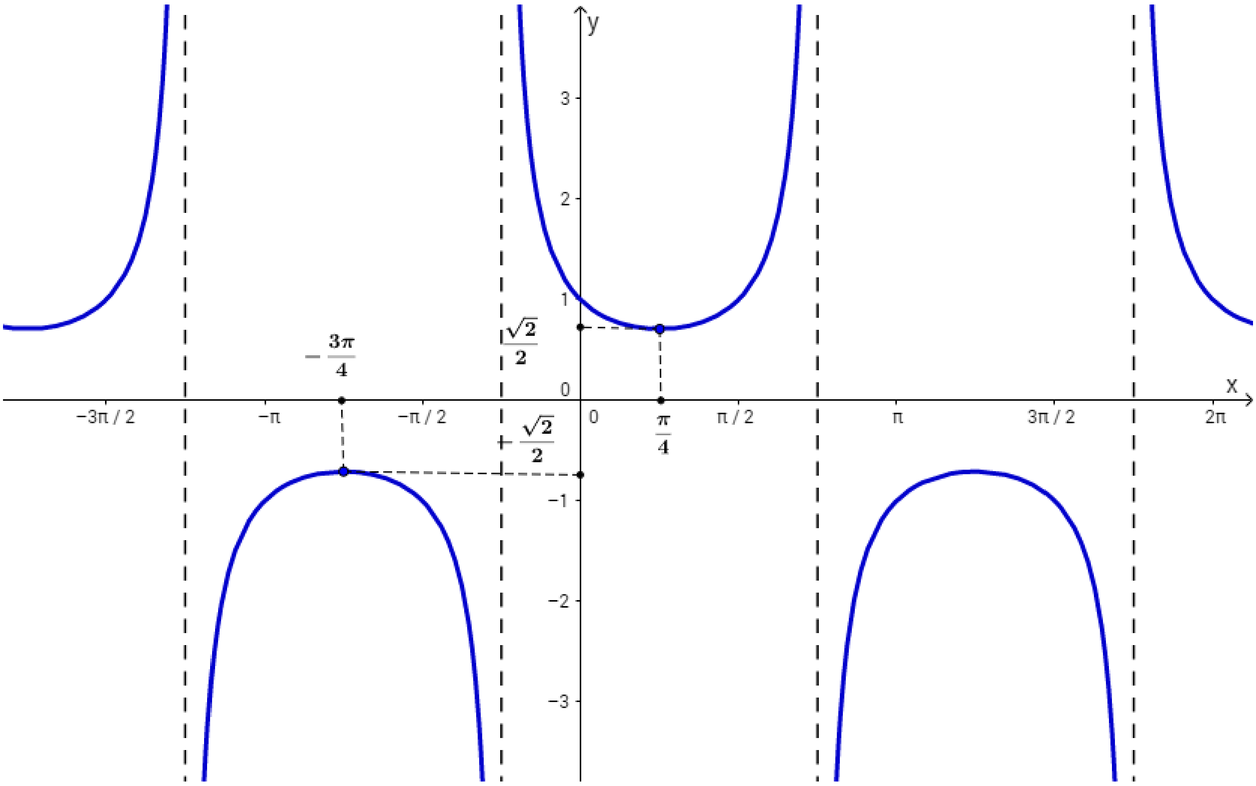

Рис. 14. График функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

Проверим знаки производной функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ и определим промежутки её монотонности (см. Рис.15).

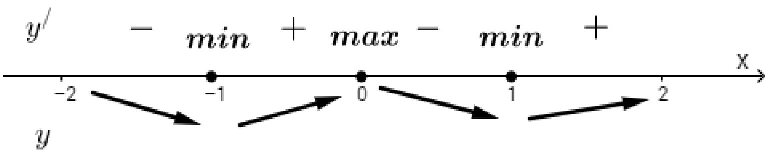

Рис.15. Промежутки монотонности функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Таким образом, функция возрастает при $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$ и убывает при $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$. Так как при переходе через стационарную точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x=0$ - точка максимума ($y_{\max} = y(0) = 1$). Аналогично, при переходе через критические точки $x = \pm 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = \pm 1$ - точки острого минимума ($y_{\min} = y(\pm 1) = 0$).

5. Найдём вторую производную функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$:

$$y'' = \left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right)'' = \left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}\right)' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)} - x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\left(x^2-1\right) - 2x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2-3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}.$$

Проверим знаки второй производной функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ при переходе через точки $x = \pm\sqrt{3}$ и $x = \pm 1$ и определим промежутки выпуклости (вогнутости) функции (см. Рис.16).

6.

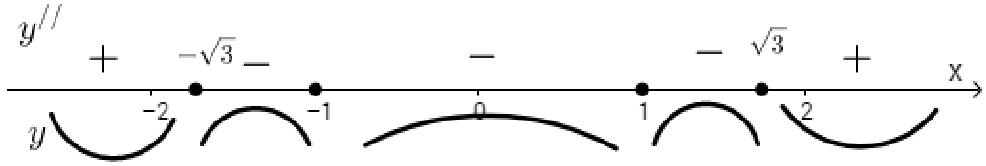

Рис.16. Промежутки выпуклости (вогнутости) функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Таким образом, функция $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ выпукла вверх при $x \in \left(-\sqrt{3};-1\right) \cup (-1;1) \cup \left(1;\sqrt{3}\right)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right)$. Точки $M_{1,2}\left(\pm\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right)$ являются точками перегиба функции.

7. а) Так как функция является непрерывной везде на числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = +\infty$ - горизонтальной асимптоты нет.

в) Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{x} = 0,\ b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right) = +\infty,$$

поэтому наклонных асимптот нет.

8. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

Оx: $y = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = 0$ при $x = \pm 1$; Оy: $y(0) = 1$.

График функции представлен на рис. 17.

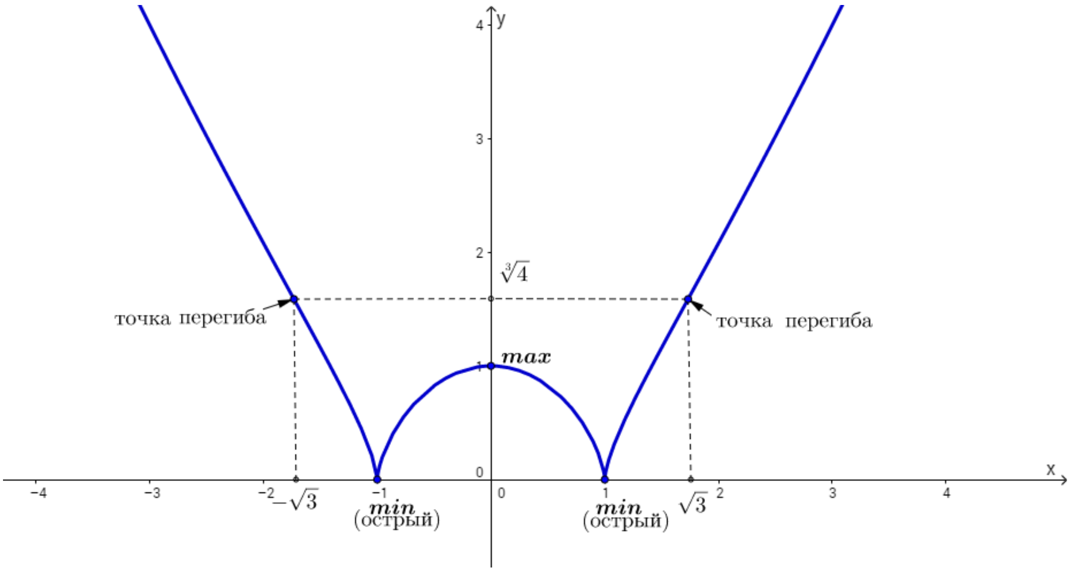

Рис. 17. График функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

8. Решение задач по теме "Исследование функции на максимум (минимум)"

Задача 8 а) Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 20. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

Решение. По условию задачи $x+y=20$, поэтому $y=20-x$ и можно составить функцию $f\left(x\right)=x^3\cdot\left(20-x\right)$, которую будем исследовать на экстремум:

$f'(x)=\left(20x^3-x^4\right)'=60x^2-4x^3=0$ при $x=0$ и $x=15$. В точке $x=0$ экстремума нет, так как производная не меняет знак при переходе через эту точку, а в точке $x=15$ производная меняет знак с “+” на “-“. Значит, это точка максимума. Тогда искомые значения чисел $x=15$ и $y=5$.

Задача 8 б)* Определить наибольшее отклонение от нуля функции $y=x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$.

Решение. Для нахождения наибольшего отклонения от нуля функции на отрезке $\left[a;b\right]$ нужно из значений функции $f\left(x\right)$ на концах отрезка и в точках экстремума, принадлежащих отрезку, выбрать наибольшее по модулю. Найдем значения функции на концах отрезка: $y\left(0\right)=0$; $y\left(\pi\right)=\pi$. Далее продифференцируем функцию $y'=1+2\cos 2x$ и приравняем полученную производную к нулю, откуда

$$1+2\cos 2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 2x=-0,5 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Отрезку $[0;\pi]$ принадлежат две точки из найденных, а именно, $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислим в них значения функции: $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Среди четырёх полученных значений функции выберем наибольшее по модулю: $y(\pi)=\pi$.

Задача 8. в)* Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+2$ и отрезками прямых $x=1;\ x=5;\ y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Решение. Обозначим искомую точку через $x_\circ$ (см. Рис. 18) и найдём значение функции в этой точке: $y(x_0)=x_0{}^2+2$.

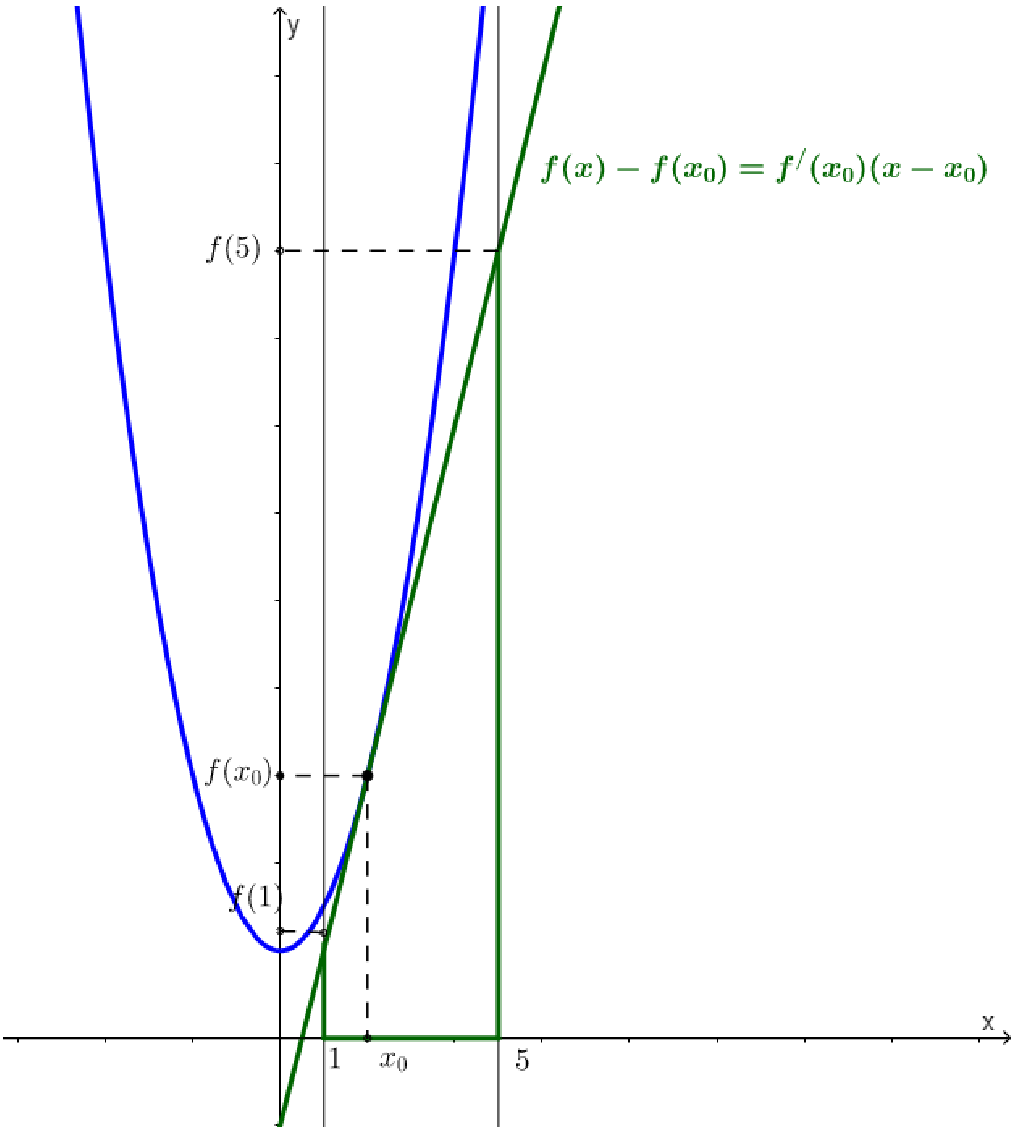

Рис. 18. График функции $y=x^2+2$ и её касательной.

Далее вычислим значение производной функции в этой точке: $y' = 2x$ и $y'(x_0) = 2x_0$. Уравнение касательной к графику функции в точке $x_\circ$ имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, тогда искомая касательная задаётся уравнением $y = x_0{}^2 + 2 + 2x_0(x - x_0)$. Основаниями трапеции служат отрезки $y(1)$ и $y(5)$, а высота равна 4. Вычислим $y(1) = 2 + 2x_0 - x_0{}^2$, $y(5) = 2 + 10x_0 - x_0{}^2$ и найдем площадь трапеции $S = \dfrac{y(1) + y(5)}{2} \cdot 4 = 2\left(4 + 12x_0 - 2x_0{}^2\right)$. Точка максимума этой квадратичной функции получается из соотношений:

$$S' = 24 - 8x_0 \Rightarrow 24 - 8x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 3.$$

Расчетные задания

1. Предел последовательности, предел функции

Задача 1. Найти пределы:

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+5+...+(3n-1)}{n+5} - \dfrac{3}{2}n\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1,5}\dfrac{2x^3+7x^2+4x-3}{2x^3-5x^2-32x-30}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{5x+2}\right)^{1-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0,3}\left(\dfrac{10x}{3}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x-0,3)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32-x^2}-2}{(e^x-e^{2x})\cdot\operatorname{arctg} x}$ f) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{1-\cos\sqrt{x+1}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin\left(0,5\sqrt{x^2-3}\right)-\arccos\left(0,5\sqrt{x+1}\right)}{2x^2-3x-2}$ h)* $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{6-2x}+x\right)}{\sqrt{\sin\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi(1-x)}{4}}}$

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^5\cdot\left(\sqrt[3]{2n^9-3n}-\sqrt[3]{2n^9}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4-4x^2-2x}{3x^3+5x^2+x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{1+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x+3\right)^{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x+2)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(\sqrt[5]{1+x^2}-1)}{e^{\pi x}-3x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\cdot\ln\cos 2x}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{9x^2-1}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{3x+1}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ h)* $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-...+(-1)^n\cdot\frac{2}{3^n}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-8x+5}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{1-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0,2}\left(\frac{5x+1}{2}\right)^{\frac{3x+2}{\sin(x-0,2)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{(1-4x^2)(\sqrt[3]{2-2x}-1)}{\sin^2(2x-1)}$ f) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt[4]{1-x^2}-\sqrt[3]{1+2x}}{3\sqrt{x\cdot\sin 2x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\left(\sqrt{2+x}-1\right)\cdot\left(\arccos\frac{2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{10}-2^{10}-10\cdot 2^9(x-2)}{(x-2)^2}$

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+8+...+(3n+2)}{\sqrt{9n^4-n+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^3+57x^2-41x+7}{36x^4-24x^3+22x^2-12x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$ d) $\lim\limits_{x\to 0,4}\left(\frac{5x}{2}\right)^{\frac{2x}{\ln(5x-1)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1+x\sin x-\cos 2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(2\pi(x+0,5))}}{2-\sqrt[6]{3x+64}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$ h)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-4x\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)}$

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 12}+...\frac{3}{(5n-3)\cdot(5n+2)}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{12x^4-12x^3+23x^2-20x+5}{4x^3-4x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1-2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-4)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin(0,5x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{3x}-8}{(2-x)^5-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{6}}{x^2+4x-5}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(20x+1)^{30}-(30x+1)^{20}}{\sqrt[20]{1-30x^2}-1}$

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 4^n-3^{n+2}}{4^{n+1}+3^{n-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x^3+5x^2+x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+7}\right)^{4x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\left(\cos\frac{\pi x}{6}\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin x-\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[4]{1+x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arccos\left(0,5\sqrt{2x+6}\right)-\arcsin\left(0,5\sqrt{-x}\right)}{\sqrt[5]{2x+5}-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{2}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)^{3\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+8+\ldots+(3n+2)}{6n+7}-\dfrac{n}{4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}{5x^3-16x^2+4x+16}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{5}{\sin(3-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\arcsin(x-\pi/4)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[4]{1+x^2}}{3\ln\left(1-2x^2\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(5x+2)\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{5x+2}{5x-2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ h)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^4}+2\cdot\sqrt[10]{3x^3}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}-\sqrt[10]{5x}\right)}$

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{4n^6+3n^5-1}-\sqrt[3]{4n^6+2}}{7n+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-x^2-16x-20}{4-2x^4-8x^3-7x^2+4x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+11}\right)^{1+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{\frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{(x-5)^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(0,2(\pi-3x)\right)}{1-2\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\left(e^{\sqrt{x-2}}-1\right)}{\sqrt[5]{22+5x}-(x^2-2)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\arcsin\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}-0,5\pi\right)\cdot\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{1-x^2}$ h)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^{101}-101x+201}{3x^3-12x^2+12x}$

9. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}-\dfrac{1}{6}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{4x^4+4x^3+5x^2+4x+1}{4x^3-4x^2-7x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x+17}\right)^{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{4x}{\pi}\right)^{\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{25-5(x-\pi)^2}-5}{\ln(2+\cos x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$

g)* $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2-13}}{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x+7}}{3}}{3x^2+11x-4}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x\cdot 2^x\right)-\cos\left(x\cdot 2^{-x}\right)}{\ln\left(1+x^3\right)}$

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+7+\ldots+(6n-5)}{5n^2-\sqrt{3n}+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-x^2-16x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+19}{2x-1}\right)^{x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2(x-1)}-e^{3(x-1)}}{\sin \pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt[7]{1+7x}-(1-x^2)}{\sqrt{2x}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\dfrac{\sqrt{2-x}}{2}-\dfrac{\pi}{3}}{\sin(x+1)}$

h)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{7\operatorname{ctg}(2x)}$

11. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4\cdot 10}+\dfrac{3}{10\cdot 16}+\ldots\dfrac{3}{(6n-2)\cdot(6n+4)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{2x^3-12x^2+24x-18}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{9x+12}\right)^{5x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3x-6}{\sin^2(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(\operatorname{tg}4x+x-\pi)\cdot\ln\dfrac{x}{\pi}}{1+\cos 5x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-\sqrt[3]{27-x}}{6^{2x}-6^{5x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln(x+4)}{\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{10+2x}}-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}}$

h)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin\dfrac{x+2}{5}+\sin\dfrac{\pi(2-x)}{4}}{\ln\left(\sqrt[5]{30-x}+0,5x\right)}$

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(0,5)^{n+2}-(0,3)^{n}}{(0,5)^{n-3}+2\cdot(0,3)^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x-14}\right)^{-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{4x}{\pi}\right)^{(2\operatorname{tg}x-2)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln(x+4)}{7^{x^2-8}-7}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-(1+x)}{\arcsin(\sqrt{x+1}-1)}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{8x^3-1}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2-7x}{2+7x}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

h)* $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{\cos 2}{\cos x}\right)^{(\ln(x+3))^{-1}}$

13. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+9+\ldots+(4n+1)}{3n-1}-\dfrac{2n+1}{3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+6x^3+8x^2-6x-9}{2x^3+13x^2+24x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+13}{5x-3}\right)^{-4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{x}{9}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{18}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}1}{\sin \pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1-2x-x^2}-(1+x^2)}{e^{3x}-e^{0,25x^2}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 3+0}\left(\sin\sqrt{x^2-9}\right)\cdot\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x^2-5}}-\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^7-3^7-7\cdot 3^6(x-3)}{(x-3)^2}$

14. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{27n^3-2n^2+1}-3n\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-9x+27}{2x^4-12x^3+19x^2-6x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{5x-1}\right)^{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2-\frac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\operatorname{tg}x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln(1-x)+\ln(1+x+x^2)}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3+0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-1}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{9-x^2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)}$ h)* $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)\right)^{\frac{3}{\cos x}}$

15. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{48}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 4^n}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^4+3x^3+2x^2+6x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+11}\right)^{6x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{2}{\sin x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-0,3x}-1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{10-3x}-2}{e^{0,5x}-e}$

g)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{x}}{4}}{\sqrt[3]{2x-7}-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(5x+1)^{20}-(20x+1)^5}{\sqrt[5]{1+20x^2}-1}$

16. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+7+...+(5n-3)}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{8n^6+n-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+13}{4x-1}\right)^{1-2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x+2}\right)^{(\ln(1+x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\sin 4x}{\ln\cos(0,5x)}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(4-x^2)\cdot\left(\sqrt[5]{5+2x}-1\right)}{\left(e^{x^2-4}-e^{x+2}\right)\cdot\sin(2+x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)}{x^3+1}$ h)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{2}{x}+\sin\frac{5}{x}\right)^{\left(3\sin\frac{1}{x}\right)^{-1}}$

17. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 16}+...\frac{5}{(7n-5)\cdot(7n+2)}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^4-8x^3+19x^2-24x+48}{x^3+7x^2-104x+240}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left(2-\frac{4x}{\pi}\right)^{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(1-\sin 2x)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{\ln(1+\cos 3x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt[4]{81-5x}}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+\sqrt{x^4-1}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3-2x}{3+2x}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

h)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^5}-2\cdot\sqrt[7]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[4]{7x}+2\cdot\sqrt[11]{x}\right)}$

18. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10\cdot5^{n-1}-4^{n+2}}{13\cdot4^{n-1}+6\cdot5^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+7x^2+8x-16}{x^4+8x^3+20x^2+32x+64}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{x+4}\right)^{4x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(x+2)^2}{4}\right)^{\left(\sqrt{1-3x}-1\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x-\cos^22x}{3^{x+1}-3}$

f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x^2-9\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(x-3\right)}{\left(e^x-e^3\right)^2}$

g)* $\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{\arccos\left(0,5\sqrt{x^2-2}\right)-0,25\pi}{2^{x+2}-x-3}$

h)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+3)^{99}+99x+197}{x^3+2x^2-x-2}$

19. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5+\ldots+(4n-3)}{10n+1}-\dfrac{n}{5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{14x+5}\right)^{1-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin(7x)\right)^{\left(\sqrt[5]{1-9x+x^2}-1\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos2x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\ln\left(1+4x^2\right)}{\left(1-2x^3\right)^8-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(x+1)}{\operatorname{arctg}\sqrt{3x+6}+\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}}$

h)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(x^2\cdot5^x\right)-\cos\left(x^2\cdot5^{-x}\right)}{\sqrt[3]{1-2x^5}-1}$

20. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(3n^2-1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(3n^2+1\right)^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-11}{x+6}\right)^{2+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}x}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{\cos2x}-1}{\sin^2x+\operatorname{tg}^2x}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+0,2x^2}-3}{\left(e-e^{7x+1}\right)\cdot\ln(1-0,2x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to3}\left(x^2-9\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}-\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{\left(3x\cdot(1-\cos2x)\right)^{-1}}$

21. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}+\dfrac{5}{2}+\ldots+\dfrac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+x-3}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2-\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{\sin x}}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\ln\cos 4x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{\cos x}-1}{\left(3^{2x}-1\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(0{,}3x\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\arccos\dfrac{\sqrt{3x-1}}{2}}$

h)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(\sqrt{4x+1}-x\right)}{\sin\dfrac{x-2}{3}-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

22. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n+3n^2}{2+6+\ldots+(4n-2)}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+9x^2+24x+20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right)^{-1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin\left(3x^2\right)\right)^{\frac{1}{x\cdot\operatorname{arctg}x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-5}{\left(5^x-3^{2x}\right)\cdot\ln\left(1-\operatorname{tg}x\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+4}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{6-x}{6+x}+\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 4}\right)^{\left(\sin(x-4)\right)^{-1}}$

23. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{1\cdot 9}+\dfrac{4}{9\cdot 17}+\ldots\dfrac{4}{(8n-7)\cdot(8n+1)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-9x^2-27x+27}{x^3+10x^2+33x+36}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{3x+2}{2}\right)^{\frac{5x}{\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos 2x-\sin x}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt{2x}\cdot\left(e^{\sqrt{x^3}}-1\right)}{\ln\left(1-2x\right)\cdot\left(\sqrt[7]{1+3x}-1\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{\arcsin\left(x^2-3\right)-0{,}5\pi}{\sqrt{4-x^2}}$

h)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^6-4^6-6\cdot 4^5\left(x-4\right)}{\left(x-4\right)^2}$

24. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5\cdot 8^n+(-7)^n}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}{x^4-6x^3+x^2+48x-72}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{tg}2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\left(e^{x-0{,}5\pi}-1\right)\cdot\operatorname{tg}x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)\cdot\ln\left(1-3x\right)}{\left(1+x^2\right)^5-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x+2}}{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}\cdot\left(x^2-1\right)}$ h)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{16}}\left(\operatorname{tg}4x\right)^{\left(\sin\left(14x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-1}}$

25. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+8+...+(5n-2)}{4+7+...+(3n+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{2x^3+7x^2+8x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\left(1+5x\right)\right)^{\left(\ln\left(1-3x\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5^{3x^2+1}-5}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{\sqrt{x-1}-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{6-x}}+\dfrac{\pi}{4}}{2x^2+5x+2}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(10x+1\right)^7-\left(7x+1\right)^{10}}{\sqrt[7]{1-10x^2}-1}$

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5\left(5n-3\right)}-\sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-13x^2-48}{\left(x+1\right)\left(2x-7\right)\left(x-3\right)-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^{\left(\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-\sin 4x\right)}{4^{x+1}-4}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-4\right)}{\left(2x+5\right)^9-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\sqrt[4]{5x+1}-2}{\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1-\sin x}\right)^{\left(5x\cdot(\cos x-1)\right)^{-1}}$

27. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{25}-...+3\cdot\dfrac{(-1)^n}{5^n}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x-2\right)\left(2x+1\right)\left(3x-1\right)+12}{x^3-3x^2+x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{x+4}{2}\right)^{\left(\arcsin\left(x^2-x\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln\left(1+2x^3\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{x^2-9}-5^{2x-6}}{\sqrt{4-\sin^2\left(x-3\right)}-2}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{8x^4-2x+3}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-2}{x^2+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ h)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\sqrt[9]{4x}+\sqrt{8x^3}\right)}{\ln\left(1+2\cdot\sqrt[15]{x}+\sqrt[3]{25x^2}\right)}$

28. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{7+9+...+(2n+5)}$ b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-4x^2-3x-10}{\left(x+1\right)\left(x-4\right)\left(3x-14\right)-6}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x^2+11}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}\left(3x^2\right)\right)^{\left(\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin 2x}-\cos x}{7^{2x+1}-7}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+3)-\ln x}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt[5]{x+4}-1\right)\cdot\left(\arccos\dfrac{\sqrt{x^2-6}}{x+5}-\dfrac{\pi}{6}\right)^{-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)^{200}-200x+599}{2x^3-9x^2+27}$

29. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(11-x)(0{,}1x+1)(2x-19)-2}{x^3-10x^2+2x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\left(\sqrt{1-\cos 4x}\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{25-3x}-5}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2^{4+2x}-2^{x^2-4}}{\ln(-x)-\ln(x+4)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}}{\ln(3-x)}$ h)* $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\cdot 3^x\right)-\cos\left(\sqrt{x}\cdot 3^{-x}\right)}{\sin\left(\pi-3x^2\right)}$

30. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-1}+(-3)^{n+1}}{5^{n+2}+(-3)^n}$ b) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{3x^3+17x^2-27x+7}{(2x+13)(x+9)^2+4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-3x}{1-2x}\right)^{0{,}3x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\arcsin\dfrac{x^2}{3}\right)^{\left(\ln\left(1+3x^2\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{5^{x^3+1}-5}$ f) $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{\ln\left(\sqrt{3x}-2\right)}{\sqrt[4]{13-4x}-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\arcsin\dfrac{\sqrt{x+5}}{2}-\dfrac{\pi}{4}}{\sqrt{2+x/3}-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(5^{2x}-x^3\right)}{\ln\left(7^{2+x}-x^3\right)}$

2. Непрерывность и точки разрыва функции

Задача 2. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и построить её график:

1.

а) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<-1,\\ x^3+1, & |x|\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

в)* $f(x)=3^{\frac{3}{x^2-4}}$

2.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le -1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1<x\le 0,\\ 2x+3, & x>0.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=x-\frac{2|x+3|}{x+3}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$$

3.

а)
$$f(x)=\begin{cases} (2-x)^{-1}, & x\le 2,\\ 2-x, & 2<x\le 5,\\ -3e^{x-5}, & x>5.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{|x-2|}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$$

4.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1, & x<0,\\ 1-x^3, & 0\le x\le 1,\\ (x-1)^{-1}, & x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2+5x-6}{|x+6|}$$

в)*
$$f(x)=\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|$$

5.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\le -1\\ x+3, & |x|<1\\ 16(x+3)^{-1}, & x\ge 1\end{cases}$$

б)
$$f(x)=2x-\frac{|1-x|}{x-1}$$

в)*
$$f(x)=\frac{x-2}{4^x-2^x-12}$$

6.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4,\\ \lg(x+4), & -4<x<6,\\ 7-x, & x\ge 6.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-x-6}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$$

7.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2x^{-2}, & x<0\\ 2x+5, & 0\le x\le 3,\\ 2+x^2, & x>3.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$$

в)*
$$f(x)=2^{\frac{1}{4-x^2}}$$

8.

а)

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin 0,5x, & x\le 0,\\ \cos 0,5x, & 0<x\le 0,5\pi,\\ (x-0,5\pi)^{-1}, & x>0,5\pi.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=3x+\frac{2|x+1|}{x+1}$$

в)*

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+2}$$

9.

а)

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\le -2,\\ x^2, & -2<x\le -1,\\ (x+1)^{-1}, & x>-1.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$$

в)*

$$f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$$

10.

а)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2,\\ |x-1|, & |x|\le 2,\\ x^2-3, & x>2.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{2x^2+x-3}{|x-1|}$$

в)*

$$f(x)=\frac{9^x-3^x-6}{x-1}$$

11.

а)

$$f(x)=\begin{cases}x+0,5\pi, & x\le -0,5\pi,\\ \operatorname{tg}x, & -0,5\pi<x\le 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=x-\frac{3|x+2|}{x+2}$$

в)*

$$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$$

12.

а)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ \lg(3x+1) & 0<x\le 3,\\ 10-x^2, & x>3.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|x+2|}{2x^2+3x-2}$$

в)*

$$f(x)=2^{\frac{2}{1-x^2}}$$

13.

а)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3, & x\le -1,\\ 3^{-x}, & -1<x\le 0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-5}{|x+1|}$$

в)*

$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{x-2}$$

14.

а)

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le -1,\\ |x-1|, & |x|<1,\\ x^2-1, & x\ge 1.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=2x+\frac{|x+3|}{x+3}$$

в)*

$$f(x)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

15.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x-1, \quad x\le 0,\\ -x^2-2x-1, 0<x\le 1,\\ (1-x)^{-1}, x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|1-x|}{3x-x^2-2}$$

в)*
$$f(x)=\frac{1}{4^{1/x}+1}$$

16.

а)
$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |x|\le\frac{\pi}{2},\\ \cos\frac{x}{2}, \quad |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$$

17.

а)
$$f(x)=\begin{cases} (x+3)^{-1}, x<-3\\ 3^{x+2}, -3\le x<0,\\ |x-9|, \quad x\ge 0.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x}{|x|}-3x+2$$

в)*
$$f(x)=2^{\frac{3}{x^2-2}}$$

18.

а)
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4},\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x>\frac{\pi}{4}, x\le-\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|2-x|}{3x^2-4x-4}$$

в)* $f(x)=\dfrac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$

19.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 3x^3+1, \quad x\le -1,\\ x^2+3x, -1<x\le 2,\\ 3^{\frac{1}{x-2}}, \quad x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{|x+1|}$$

в)*
$$f(x)=\mathrm{arcctg}\,\frac{x-2}{x}$$

20.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x+2}}, \quad x<-2,\\ x+2, -2\le x\le 2,\\ \frac{2}{2-x}, \quad x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=2x-\frac{|2x+1|}{2x+1}$$

в)*
$$f(x)=\frac{3}{3^{x+1}-1}$$

21.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+\pi},\ x<-\dfrac{\pi}{2},\\ |x|,\quad |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi^2}{2x+\pi},\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3}}$$

22.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1},\ x<-1,\\ |x-1|,|x|\le 1,\\ 2^x-2,\quad x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{3x^2-x-2}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=3^{\frac{2}{x^2-2}}$$

23.

а)
$$f(x)=\begin{cases}e^x-e,\quad x<0,\\ \ln(3x+1),\ 0\le x\le 1,\\ \ln(5x-1),\quad x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=x-\frac{3(x+1)}{|x+1|}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x^2}}$$

24.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x-1,\ x\le 0,\\ |x-1|,\quad 0<x\le 2,\\ \dfrac{4}{2-x},\quad x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x+2|}{2x^2+x-6}$$

в)*
$$f(x)=4^{\frac{1}{4-x^2}}$$

25.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+0,5\pi}},\ x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x,\quad |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 2^{\frac{1}{x-0,5\pi}},\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{x+1}$$

26.

а)

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+0,5\pi},\ x<-0,5\pi, \\ \sin 2x,\ |x|\le 0,5\pi, \\ 2^{x-0,5\pi}-1,\ x>0,5\pi. \end{cases}$$

б)

$$f(x)=3x+\frac{|x-1|}{x-1}$$

в)*

$$f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$$

27.

а)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-0,5,\ x<0, \\ \dfrac{1}{x-2},\ 0\le x<2, \\ \sqrt{x-2},\ \ x\ge 2. \end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-4x+3}$$

в)*

$$f(x)=\frac{x}{e^{2x}+e^{x}-2}$$

28.

а)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1,\ x<-1, \\ \ln(x+2),\ -1\le x\le 2, \\ (4x-8)^{-1},\quad x>2. \end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{|x-1|}$$

в)*

$$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-5}}$$

29.

а)

$$f(x)=\begin{cases} -x-1,\qquad x\le 0, \\ \operatorname{tg}(x-0,25\pi),\ 0<x<0,75\pi, \\ x-0,75\pi,\quad x\ge 0,75\pi. \end{cases}$$

б)

$$f(x)=2x-\frac{|x+3|}{x+3}$$

в)*

$$f(x)=5^{\frac{1}{5-x^2}}$$

30.

а)

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x-4,\ x<-1, \\ \sqrt[3]{x^2},\quad -1\le x\le 1, \\ (x-1)^{-1},\quad x>1. \end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|x+3|}{x^2+3x}$$

в)*

$$f(x)=(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}\frac{1}{x+3}\,.$$

3. Производная функции одной переменной

Задача 3

3.1 Продифференцировать указанную функцию. Упростить полученное выражение:

1. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right)$

2. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3x}}{1-x}$

3. $y=x-\ln\left(1+e^{x}\right)-\frac{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{x}}}{\sqrt{e^{x}}}-\left(\operatorname{arctg}\sqrt{e^{x}}\right)^{2}$

4. $y=\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sin x}{2}-\frac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^{2}x}}\right)$

5. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^{2}+\sqrt{3}x+1}{x^{2}-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^{2}-1}{\sqrt{3}\cdot x}$

6.

$$y=\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\ln\left(1-x+x^{2}\right)}{x}+$$
$$+\ln\frac{\sqrt{1-x+x^{2}}}{x}$$

7. $y=\frac{x\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{3x^{2}+2}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3x^{2}+2}$

8. $y=\ln\frac{(x-3)^{2}}{x^{2}-5x+7}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}$

9. $y=x\cdot\arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

10. $y=\frac{\arccos\left(x\sqrt{x}\right)}{3\left(1-x^{3}\right)}+\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^{3}}}$

16. $y=\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sin^{2}x\right)$

17. $y=(x-1)\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}-2x+2\right)$

18. $y=\frac{1}{10\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}x}{\sqrt{1-x^{2}}}-\frac{\arcsin x}{10\left(1+5x^{2}\right)}$

19. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+2x^{4}}+x}{\sqrt[4]{1+2x^{4}}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+2x^{4}}}{x}$

20. $y=x-e^{-x}\cdot\arcsin e^{x}-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

21.
$y=\ln(1+x)-3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}$

22.

$$y=\frac{1}{8}\ln\left(2x^{2}-x+2\right)+\frac{\sqrt{15}}{12}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+$$
$$+\frac{3}{2}\ln(x-2)+\frac{x}{2}$$

23.

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\arcsin e^{x}+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$$

24. $y=\frac{\sqrt{x^{2}-4x+3}}{1-x}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$

25. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^{2}-2x+4}{(x+2)^{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}$

11. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x}\right)+$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}$

12. $y=\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}$

13. $y=\sqrt{1+\cos^2 x}-$
$-\cos x\cdot\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

14. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}$

15. $y=\frac{1}{14}\ln\frac{(x+1)^2}{9x^2+6x+4}+\frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}$

26. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x}$

27. $y=x-\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+e^x\right)\sqrt{1+e^{2x}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x$

28. $y=\sqrt{e^{2x}+e^{4x}-1}+\ln\left(2+e^x+\sqrt{e^{2x}+e^{4x}-1}\right)-$
$-\arcsin\frac{2-e^{-x}}{\sqrt{5}}$

29. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\cdot x}$

30. $y=e^x\cdot\arcsin e^x+\sqrt{1-e^{2x}}$

3.2 а) Продифференцировать функцию:

1. $y=\frac{(2x+3)^5\cdot(\sin(3x)+1)^7}{\left(3x^3-2\right)\cdot(7x-1)^6}$

2. $y=\sqrt[10]{\frac{(2x-1)^9\cdot(x+3)^3}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin^7(x+1)}}$

3. $y=\frac{\left(\cos^3(5x)-2x\right)^4\cdot\left(x^2+2\right)^3}{\arcsin^2 x\cdot\left(3x^3+2x+1\right)^5}$

4. $y=\sqrt[11]{\frac{\arccos^5(3x+1)\cdot(2x+1)^2}{\left(x^4+x^3\right)\cdot(7x+3)^2}}$

16. $y=\frac{\sqrt[7]{\left(x^2+3\right)^2}\cdot\sin^5(2x+1)}{(4x+1)^3\cdot\left(3x^2+2\sqrt{x}+1\right)^4}$

17. $y=\frac{\left(3^{5x}+1\right)^4\cdot\left(x^3+2\right)^2}{\arccos^3(2x+1)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)^5}$

18. $y=\sqrt[19]{\frac{(2x+1)^5\cdot\left(3x^2+2\right)^7}{\operatorname{arctg}^5(0.3x)\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^2}}$

19. $y=\frac{\operatorname{tg}^3(0.5x)\cdot\left(3\sqrt[5]{x}+2\right)^2}{\left(2x^7+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(3^x+x^2\right)}$

5. $y=\dfrac{\left(x^2+3\right)^5\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x)+1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\cdot\left(5x-2\right)^4}$

6. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\left(2x^3+3\right)^5}\cdot\cos^7(3x-2)}{\left(3x-1\right)^5\cdot\left(6x^2+3x+1\right)^3}$

7. $y=\dfrac{\left(e^{2x}+1\right)^3\cdot\left(x^5+3x\right)^4}{\arcsin^3\left(2x\right)\cdot\left(2x^3+x^2\right)^5}$

8. $y=\sqrt[12]{\dfrac{\arcsin^5(3x)\cdot\left(x^2+5\right)^7}{\left(6x^3-2\right)^3\cdot(2^x+1)^2}}$

9. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3(0,2x)\cdot\left(4\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(x^2+\sqrt{10}\right)^7\cdot\left(3x^5+4x^2+1\right)^4}$

10. $y=\sqrt[15]{\dfrac{\sin^6(3x-4)\cdot\cos^2(2x-1)}{\left(\sqrt{x}-3\right)^4\cdot(3x^6+2)^3}}$

11. $y=\dfrac{\left(7x+2\right)^5\cdot\left(3x^2-1\right)^3}{\left(\cos^2(5x)+1\right)\cdot\left(2\sqrt[5]{x}-1\right)^2}$

12. $y=\sqrt[11]{\dfrac{\left(5x+2\right)^2\cdot\left(x-7\right)^3}{\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin^5(2x+1)}}$

13. $y=\dfrac{\left(\sin^2\left(7x\right)+2\right)^3\cdot\left(x^4-1\right)^2}{\operatorname{arctg}^7\left(6x-1\right)\cdot\left(x^3+2x+1\right)^4}$

14. $y=\sqrt[17]{\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}+2x\right)\cdot\left(2x-3\right)^3}{\operatorname{tg}^6(7x+1)\cdot(x+1)^2}}$

15. $y=\dfrac{\left(2x^5-3\right)^2\cdot\left(\operatorname{arcctg}(5x)-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3x+2\right)^2\cdot\left(x-2\right)^5}$

20. $y=\sqrt[17]{\dfrac{\cos^7(0.2x)\cdot\operatorname{tg}^2(3x)}{\left(\sqrt[5]{x}+2\right)^3\cdot(x^8+3)^2}}$

21. $y=\dfrac{\left(3x+1\right)^5\cdot\left(2x^3+5\right)^7}{\left(\sin^3(5x)+2\right)\cdot\left(3\sqrt[7]{x}+2\right)^4}$

22. $y=\sqrt[9]{\dfrac{\left(7x^2+3\right)^2\cdot\left(x+\sqrt{5}\right)^4}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\arccos^2(3x-2)}}$

23. $y=\dfrac{\left(\cos^3(5x)+2\right)^2\cdot\left(x^5+2\right)^3}{\operatorname{arcctg}\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\left(x^4+3\sqrt[4]{x}\right)^2}$

24. $y=\sqrt[7]{\dfrac{\left(6x+5\right)^3\cdot\left(\sqrt[4]{x}+3\right)^2}{\sin^5(0,3x)\cdot(2x-\sqrt{7})^2}}$

25. $y=\dfrac{\left(3x^4-2\right)^{11}\cdot\left(\operatorname{arctg}^3(2x)+1\right)^5}{\left(5x-1\right)^3\cdot\left(x+3\right)^6}$

26.
$$y=\frac{\sqrt[9]{\left(x^3+3\right)^2}\cdot\cos^7(2x-1)}{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2\cdot\left(5x^3+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}\right)^2}$$

27. $y=\dfrac{\left(5^{\sqrt{x}}+2\right)^3\cdot\left(x^4-\sqrt{5}\right)^2}{\arcsin^5\left(\sqrt{2x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^4}$

28. $y=\sqrt[5]{\dfrac{\left(3x+1\right)^3\cdot\left(2\sqrt{x}+5\right)^4}{\operatorname{arcctg}^3(0,1x)\cdot(\sqrt[5]{x}+1)^3}}$

29. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^5\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\left(7\sqrt[4]{x^3}+2\right)^2}{\left(3x^5+2\right)^2\cdot\left(7^x-2x\right)^3}$

30. $y=\sqrt[7]{\dfrac{\sin^5(2x+3)\cdot\operatorname{ctg}^2(x+1)}{\left(x^9+3\right)^2\cdot\left(\sqrt[7]{x^3}-\sqrt{3}\right)^3}}$

3.2 б) Продифференцировать функцию:

1. $y=x^{\operatorname{tg}(2x+1)}$

16. $y=(2x)^{\operatorname{ctg}(3x)}$

2. $y=\sqrt[x]{3x^7-2}$

3. $y=\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)^x$

4. $y=(2x+1)^{2^x}$

5. $y=x^{(3^x+x)}$

6. $y=\left(\sin(2x)\right)^{0,5x}$

7. $y=2\cdot x^{x^3-x}$

8. $y=\left(\ln(x^2+2)\right)^x$

9. $y=(5x+1)^{\frac{1}{3x+2}}$

10. $y=\left(\sin(x^2)\right)^{\cos(2x)}$

11. $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\sin(2x)}$

12. $y=\left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{x+2}}$

13. $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{\cos(3x)}}$

14. $y=(7x+1)^{\arcsin(\sqrt{2}x)}$

15. $y=(4x-3)^{\arccos(\sqrt{3}x)}$

17. $y=\sqrt[2x]{x^5+2}$

18. $y=(2x)^{2^x}$

19. $y=(x^3+x)^{3x}$

20. $y=(3x+1)^{\mathrm{arcctg}(\sqrt{5}x)}$

21. $y=\left(\ln(x+2)\right)^{3^x}$

22. $y=(x^3)^{\mathrm{arctg}(2\sqrt{x})}$

23. $y=(3x)^{e^{x^3}}$

24. $y=(2x-1)^{\sin x^5}$

25. $y=(\sqrt{x}+2)^{(\sqrt{3}x-1)}$

26. $y=(\sqrt[3]{x})^{\mathrm{ctg}(3x)}$

27. $y=(4x^5-5)^{\mathrm{tg}(\sqrt{x})}$

28. $y=\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{\sqrt{x-2}}$

29. $y=\left(\mathrm{tg}(5x)\right)^{5^x}$

30. $y=(6x)^{\cos x^6}$

3.3* Найти производную функции, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y=\sqrt{5x^2-x}$

2. $y=e^{3x-2}$

3. $y=\sin(4x+3)$

4. $y=\log_2(5x+2)$

5. $y=7^{2x-1}$

6. $y=\dfrac{1}{3(3x-7)}$

7. $y=(2x-5)^3$

8. $y=e^{\sin(2x-1)}$

9. $y=\mathrm{tg}\,\dfrac{3x}{4}$

10. $y=3\cdot(x-2)^{-2}$

16. $y=\dfrac{1}{4(4x+3)}$

17. $y=(3x+1)^3$

18. $y=e^{\cos(4x+1)}$

19. $y=\mathrm{ctg}\,\dfrac{4x}{5}$

20. $y=\dfrac{5}{(x+3)^2}$

21. $y=\sqrt{2x^2+5x}$

22. $y=e^{0,5x+9}$

23. $y=\sin(7-3x)$

24. $y=\log_3(4-3x)$

25. $y=8^{6x+1}$

11. $y=\sqrt{6x-x^2}$

12. $y=e^{7-2x}$

13. $y=\cos(0,5x-3)$

14. $y=\log_5(2x-1)$

15. $y=9^{3-2x}$

26. $y=\dfrac{1}{7(5-7x)}$

27. $y=(3-2x)^3$

28. $y=e^{\sin(3-2x)}$

29. $y=\operatorname{tg}\dfrac{2x}{7}$

30. $y=\dfrac{4}{(x-4)^2}$

3.4* Записать формулу для производной $n-$го порядка указанной функции:

1. $y=\sqrt[7]{e^{3x+1}}$

2. $y=\dfrac{7x}{2x^2-5x-3}$

3. $y=\log_3(4x-1)$

4. $y=5^{6x+7}$

5. $y=\dfrac{4x-1}{11(3x+2)}$

6. $y=\cos(2x-1)+\sin(3x+1)$

7. $y=\dfrac{-x^2}{(2x+1)(x+1)^2}$

8. $y=(x-2)^3\cdot\ln(x-2)$

9. $y=(x+3)e^{x-3}$

10. $y=\dfrac{4x-7}{2x^2+3x-2}$

11. $y=\sqrt[5]{e^{2-3x}}$

12. $y=\log_2(5x+3)$

13. $y=\dfrac{-14x}{3x^2+16x+5}$

14. $y=7^{3x-2}$

15. $y=\dfrac{9x+1}{23(5x-2)}$

16. $y=\cos(0,5x+1)-\sin(4x-1)$

17. $y=\dfrac{x^2}{(3-2x)(x-3)^2}$

18. $y=(x+3)^3\cdot\ln(x+3)$

19. $y=(x-2)e^{x+2}$

20. $y=\dfrac{11x-1}{3x^2-5x-2}$

21. $y=\sqrt[3]{e^{7x-1}}$

22. $y=\dfrac{5x}{2x^2+9x-18}$

23. $y=\log_4(2x-3)$

24. $y=3^{4x+5}$

25. $y=\dfrac{7x-2}{15(4x+1)}$

26. $y=\sin(0,2x+1)-\cos(3x-1)$

27. $y=\dfrac{x^2}{(1-2x)(x-1)^2}$

28. $y=(x+1)^3\cdot\ln(x+1)$

29. $y=(x+1)e^{x-1}$

30. $y=\dfrac{x+2}{2x^2-7x+5}$

4. Правило Лопиталя

Задача 4

4а) Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{\ln(x+2)}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{6}{1-x^3}-\dfrac{10}{1-x^5}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^x}{e^x-e}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{\operatorname{arctg}(x-1)}-\dfrac{2}{x-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x^7+1}-\dfrac{3}{x^{21}+1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{\ln(x-2)}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x+\sin^2 x}-\dfrac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{3}{x^3+3x}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{x^9-1}-\dfrac{4}{x^{12}-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{\pi}-\dfrac{\pi}{4}}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{e^{x-1}}{x^2-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^5}+\dfrac{6}{x^{15}-1}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{4}{\ln(x+4)}-\dfrac{4}{x+3}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{5}{x^5+1}-\dfrac{7}{x^7+1}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{\ln(x-1)}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\cos x\cdot\operatorname{ctg}^2 x\right)$

18. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4}{1-x^4}+\dfrac{5}{x^{10}-1}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x}{2^x-1}-\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x+1)}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{7}{x^7+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{2}{\ln(x+5)}-\dfrac{2}{x+4}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}+\dfrac{1}{\dfrac{4x^2}{\pi}-\dfrac{\pi}{4}}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{e^x-1}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{6}{x^4-1}+\dfrac{9}{1-x^6}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin(5x)}-\dfrac{1}{e^{5x}-1}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x}{2x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{11}{x^{11}+1}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2}{\ln(x-2)}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^{10}-1}-\dfrac{3}{x^{15}-1}\right)$

4 б) Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3x\right)^{(e^x-1-5x)^{-1}}$

16. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+3x^3\right)^{\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin^2 x}-1\right)^{\frac{1}{5x^2}}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos(2x)\right)^{\operatorname{tg}(2x)}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{3}{x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\frac{2}{e^x-1}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)^{\frac{1}{x+\ln x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\left(\cos(0{,}5\pi x)\right)^{-1}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{(2e^x-2+3x)^{-1}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{5}{x^2}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x-1\right)^{\frac{4}{\ln x}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\cdot\operatorname{tg}x}}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{-x}+3x\right)^{\frac{2}{3x}}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{\sqrt{x^2+x}}\right)^{x-10}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)^{\frac{5}{\ln x}}$

19. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\frac{x}{x+1}}$

20. $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\sin^{-1}(\pi x)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{(3e^x-3+5x)^{-1}}$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x+2^{-x}\right)^{(3x+2)^{-1}}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-2^x+3x\right)^{\frac{1}{2x}}$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^{-x}+3x\right)^{\frac{2}{5x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\cos 3}{\cos x}\right)^{\frac{3}{x-3}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{(3x)^{-1}}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)^{\frac{4}{\ln x}}$

29. $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\frac{2}{3\sin(\pi x)}}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^x+2^{-x}\right)^{3\cdot(2x-5)^{-1}}$

5. Решение пределов с помощью разложения функции в ряд Тейлора (Маклорена)

Задача 5

5.1 Используя разложение функций по формуле Тейлора (или Маклорена), найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(xe^{-\frac{1}{x^2}}-\sqrt[4]{x^4-4x^2}\right).$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)-x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}{11\sin\left(x^6\right)}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-\ln(1+x)-1}{5\sin(x^3)}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-\sqrt[3]{x^3-3x^2}-\frac{5}{3}\right).$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{6}\right)\cdot\sin\dfrac{x}{3}+\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)}{2x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{\ln(1-7x)+\sin(7x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(\ln\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right)-\cos\dfrac{1}{x}+1\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2x^4}}{\sqrt[4]{x^8+4x^9}-\sqrt[5]{x^{10}+5x^{11}}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x\cdot e^x+1,5x^2}{\sqrt[5]{1-x^3}-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\left(x^2-1\right)\cdot e^{\frac{1}{x^2}}-x^2\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\cdot\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)-x\cos x-2x^2}{\ln\left(1-x^3\right)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(3x^2\right)+4,5x^2-1}{e^{3x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-3\cdot\sqrt[3]{x^3+5}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sqrt[5]{1+x}-x\cdot e^{0,2x}}{\ln\left(1+2x^3\right)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3x^2\right)-3\left(x^2\cdot\cos\left(\sqrt{3}x^2\right)\right)}{x^2\left(\sqrt[4]{1-4x^4}-1+x^4\right)}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt[4]{x^4-5x^2}-\sqrt{x^2-2,5}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[5]{1-5x}}{\ln(1+2x)-2x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)-1+e^{5x}}{x\left(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[4]{1+4x}\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)-\dfrac{1}{x}\cdot e^{-\frac{2}{x}}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\sqrt[4]{1+20x}}{\sqrt[4]{1-2x}-\sqrt{1-x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}-x\sqrt[4]{1+8x}}{x\ln(1+2x)-\sin(2x)}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x}}+\ln\left(1-\dfrac{1}{4x}\right)-1\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos(0{,}5x)-\sin x}{x\left(\sqrt[3]{1+x}-e^{\frac{x}{3}}\right)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sqrt[5]{1-2,5x}-\ln(1+x)}{\sin x-x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^8+2x^6}-\sqrt[3]{x^{12}+3x^{10}}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\left(\sqrt[4]{1-x}-e^{-0,25x}\right)}{\sqrt[5]{1+7x^3}-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1-x)+\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{\sin\left(2x^3\right)-3x^3}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[4]{x^4+x^2}-\dfrac{1}{12x}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1+0,5x)-0,5x^2\cdot e^{-0,25x}}{\sqrt{1-3x^4}-\sqrt{1+5x^4}}$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt{x^2-4}-x\cdot\cos\dfrac{2}{x}\right)$.

5.2

1. Многочлен $f(x)=x^4-10x^3+31x^2-13x-57$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

2. Многочлен $f(x)=x^4+9x^3+19x^2+6x+5$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

3. Многочлен $f(x)=x^4-11x^3+35x^2-36x-1$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

4. Многочлен $f(x)=x^4+13x^3+53x^2+73x+1$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

5. Многочлен $f(x)=x^4-8x^3+21x^2-24x-3$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

6. Многочлен $f(x)=x^4+13x^3+50x^2+73x+33$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

7. Многочлен $f(x)=x^4-13x^3+70x^2-181x+192$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

8. Многочлен $f(x)=x^4+10x^3+17x^2+16x+5$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

9. Многочлен $f(x)=x^4-11x^3+44x^2-87x+75$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

10. Многочлен $f(x)=x^4+10x^3+27x^2+3x-43$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

11. Многочлен $f(x)=x^4+2x^3-23x^2+26x-5$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

12. Многочлен $f(x)=x^4+10x^3+26x^2+3x-31$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

13. Многочлен $f(x)=x^4-3x^3-26x^2+110x-91$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

14. Многочлен $f(x)=x^4-5x^3-13x^2-14x-12$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

15. Многочлен $f(x)=x^4-7x^3+11x^2+5x-26$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

16. Многочлен $f(x)=x^4+11x^3+37x^2+22x-64$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

17. Многочлен $f(x)=x^4-8x^3+20x^2-13x-9$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

18. Многочлен $f(x)=x^4+5x^3+11x^2+14x-9$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

19. Многочлен $f(x)=x^4-5x^3-11x^2+94x-125$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

20. Многочлен $f(x)=x^4+8x^3+15x^2+11x+14$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

21. Многочлен $f(x)=x^4-10x^3+31x^2-27x-16$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

22. Многочлен $f(x)=x^4+15x^3+86x^2+225x+210$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

23. Многочлен $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+25x-11$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

24. Многочлен $f(x)=x^4+6x^3+9x^2-11x-35$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

25. Многочлен $f(x)=x^4-15x^3+76x^2-167x+160$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

26. Многочлен $f(x)=x^4-3x^3-13x^2-8x-1$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

27. Многочлен $f(x)=x^4-9x^3+38x^2-91x+87$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.
28. Многочлен $f(x)=x^4+8x^3+16x^2+x+1$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+3$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.
29. Многочлен $f(x)=x^4-3x^3-4x^2+17x-26$ разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.
30. Многочлен $f(x)=x^4+13x^3+47x^2+63x+27$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+2$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многочлена и полученного разложения.

6. Геометрический смысл производной

Задача 6
6.1
1. Под каким углом пересекаются кривые $y=-5-2x^3$ и $y=-1-2x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.
2. Найти точки пересечения кривых $y=-2x^2+1$, $y^2=2x+3$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.
3. Найти точки пересечения кривых $y=\cos 2x$, $y=\sin x$ принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$. Среди найденных точек выбрать любую так, чтобы функции $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$ были положительны и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.
Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.
4. Найти точки пересечения кривых $5x^2+2y^2=7, 5x^2-2y^2=3$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.
5. Под каким углом пересекаются кривые $y=7-3x^3$ и $y=5-x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.
6. Найти точки пересечения кривых $y=-2x^2+1$, $y^2=2x-1$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.
7. Найти точки пересечения кривых $y=\cos 3x$, $y=\sin 6x$ принадлежащие интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Среди найденных точек выбрать любую так, чтобы она не

являлась нулём функций $y=\cos 3x$ и $y=\sin 6x$ и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

8. Найти точки пересечения кривых $2x^2+5y^2=7,\ -2x^2+5y^2=3$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

9. Под каким углом пересекаются кривые $y=-2+4x^3$ и $y=5-3x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.

10. Найти точки пересечения кривых $y=-2x^2-1$, $y^2=-x+8$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

11. Найти точки пересечения кривых $y=\sin 3x$, $y=\cos 6x$ принадлежащие интервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Среди найденных точек выбрать любую и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

12. Найти точки пересечения кривых $2x^2+7y^2=9,\ -2x^2+7y^2=5$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

13. Под каким углом пересекаются кривые $y=-2+4x^3$ и $y=1+x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.

14. Найти точки пересечения кривых $y=4x^2-1$, $y^2=-x+8$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

15. Найти точки пересечения кривых $y=\sin 3x$, $y=\sin x$ принадлежащие отрезку $[0;\pi]$. Среди найденных точек выбрать любую и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

16. Найти точки пересечения кривых $7x^2+2y^2=9,\ 7x^2-2y^2=5$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

17. Под каким углом пересекаются кривые $y=-1-3x^3$ и $y=1+x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.

18. Найти точки пересечения кривых $y=4x^2-1$, $y^2=4x+5$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

19. Найти точки пересечения кривых $y = \cos 2x$, $y = \sin 2x$ принадлежащие интервалу $(0;\pi)$. Среди найденных точек выбрать любую и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

20. Найти точки пересечения кривых $2x^2 + 3y^2 = 5, -2x^2 + 3y^2 = 1$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

21. Под каким углом пересекаются кривые $y = -1 - 3x^3$ и $y = 5 - 3x^2$? Нарисуйте графики кривых и угол между ними.

22. Найти точки пересечения кривых $y = 2x^2 - 1$, $y^2 = 4x + 5$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

23. Найти точки пересечения кривых $y = \cos 4x, y = \sin 4x$ принадлежащие интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Среди найденных точек выбрать любую и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

24. Найти точки пересечения кривых $4x^2 + y^2 = 5, -4x^2 + y^2 = 3$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

25. Найти точки пересечения кривых $y = 3 - x^3$ и $y = -1 - 3x^2$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

26. Найти точки пересечения кривых $y = 2x^2 - 1$, $y^2 = -4x + 5$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

27. Найти точки пересечения кривых $y = \cos 3x, y = \sin 3x$ принадлежащие интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Среди найденных точек выбрать любую и определить в этой точке угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

Замечание: При нахождении уравнения касательных вычисления проводить с точностью до сотых.

28. Найти точки пересечения кривых $2x^2 + 4y^2 = 3, 2x^2 - 4y^2 = 1$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

29. Найти точки пересечения кривых $y = 2x^2 - 1$, $y^2 = -x + 2$. Определить угол пересечения кривых в любой из точек пересечения и сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

30. Найти точки пересечения кривых $8x^2 + 4y^2 = 9, 8x^2 - 4y^2 = 7$. Выбрать любую из найденных точек и определить в ней угол пересечения исходных кривых. Сделать рисунок, отметив на нём найденный угол пересечения.

7. Исследование функции, график функции

Задача 7

7 а) Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$

2. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3. $y = \dfrac{x^3 - 32}{x^2}$

4. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

5. $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$

6. $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

7. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$

8. $y = \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x^3}$

9. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

10. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$

11. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$

12. $y = \dfrac{(2x+3)^3}{(2x+1)^2}$

13. $y = \dfrac{x^3}{12 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

16. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x-2}$

17. $y = \dfrac{12 + 4x - x^2}{4x+1}$

18. $y = \dfrac{(x-3)^2}{7 - 2x}$

19. $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}$

20. $y = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

21. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$

22. $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}$

23. $y = \dfrac{(x^2 - 4)x}{3x^2 - 4}$

24. $y = \dfrac{(x^2 - 5)x}{5 - 3x^2}$

25. $y = \dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}$

26. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

27. $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x - 3}$

28. $y = \dfrac{x^3}{9(x-3)^2}$

29. $y = \dfrac{4x^3}{(1-2x)^2}$

15. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^3$

30. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

7б*

Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y=5x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$

2. $y=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$

3. $y=2x+4-3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$

4. $y=0,5e^{\sqrt{2}\cos x}$

5. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$

6. $y=\sqrt[3]{1+\sin x}$

7. $y=2\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$

8. $y=\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$

9. $y=\sqrt[3]{8-x^3}$

10. $y=\ln\left(2\cos^2 x\right)$

11. $y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}$

12. $y=2x-\sin\dfrac{x}{2}$

13. $y=3\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x$

14. $y=\sqrt[3]{1+\cos x}$

15. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}$

16. $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

17. $y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x\right)^2}$

18. $y=\sin x(1-\cos x)$

19. $y=-\sqrt[3]{\left(x^2-6x+5\right)^2}$

20. $y=\dfrac{10\sin x}{2+\cos x}$

21. $y=\dfrac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$

22. $y=(2+\sin x)\cdot\cos x$

23. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-2)^3$

24. $y=\sqrt[3]{1-\cos x}$

25. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{x}}$

26. $y=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{2}}$

27. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x^2}}$

28. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$

29. $y=(4-x)\cdot\sqrt[3]{x}$

30. $y=\ln(\sin x)+\sin x$

8. Исследование функции на максимум (минимум)

Задача 8

8.1

1. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 15. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

2. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 16. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?
3. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=18$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
4. Известно, что сумма двух положительных чисел $2x$ и y равна 15. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
5. Известно, что удвоенное произведение двух положительных чисел x и y равно 18. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?
6. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=50$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
7. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+3y=12$. При каких значениях x и y величина xy^3 будет наибольшей?
8. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=2$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+4)$ будет наименьшей?
9. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=27$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
10. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x+y=15$. При каких значениях x и y величина x^4y будет наибольшей?
11. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=3$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+9)$ будет наименьшей?
12. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=48$. При каких значениях x и y величина $x\,y^2$ будет наибольшей?
13. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+2y=3$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?
14. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x\cdot y^2=5$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2+25)$ будет наименьшей?
15. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=32$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?
16. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 21. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
17. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 25. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?
18. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=72$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
19. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+2y=36$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?
20. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=1$. При каких значениях x и y величина x^2+9y будет наименьшей?

21. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=8$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?

22. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x+y=18$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?

23. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3\cdot y=4$. При каких значениях x и y величина $y(x^4+12)$ будет наименьшей?

24. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=48$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

25. Для двух положительных чисел x и y известно, что $6x+y=8$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

26. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3\cdot y^2=4$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+1)$ будет наименьшей?

27. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=15$. При каких значениях x и y величина x^3y^2 будет наибольшей?

28. Для двух положительных чисел x и y известно, что $5x+y=60$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

29. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y^3=16$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2+4)$ будет наименьшей?

30. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=96$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?

8.2 Определить наибольшее отклонение от нуля заданной функции на отрезке:

1. $y=x+\sin(2x)$, $[\pi;2\pi]$

2. $y=\operatorname{tg}x-2x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

3. $y=e^x\cos x$, $[0;\pi]$

4. $y=e^{4x}\operatorname{tg}x$, $\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$

5. $y=\operatorname{tg}(4x)-16x$, $\left[\frac{\pi}{24};\frac{\pi}{6}\right]$

6. $y=x+\cos(2x)$, $[0;\pi]$

7. $y=\operatorname{ctg}x+2x$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

16. $y=\operatorname{ctg}x-x$, $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right]$

17. $y=e^{-x}\sin x$, $[0;\pi]$

18. $y=\sqrt{3}x+\cos(2x)$, $[0;\pi]$

19. $y=\operatorname{tg}(2x)-4x$, $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

20. $y=e^{2x}\sin(2x)$, $[0;\pi]$

21. $y=\sqrt{3}x-\cos(2x)$, $[-\pi;0]$

22. $y=4x-\operatorname{tg}(2x)$, $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$

8. $y = e^x \sin x$, $[0;\pi]$

9. $y = x - \cos(2x)$, $[0;\pi]$

10. $y = \operatorname{tg} x - x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

11. $y = e^{-x} \cos x$, $[0;\pi]$

12. $y = \sqrt{3}x + \sin(2x)$, $[\pi;2\pi]$

13. $y = e^{2x} \operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$

14. $y = e^{2x} \sin^2 x$, $[0;\pi]$

15. $y = \operatorname{tg}(3x) + 4x$, $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$

23. $y = e^{2x} \cos^2 x$, $[0;\pi]$

24. $y = \operatorname{tg} x + 8\sin x$, $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

25. $y = \operatorname{ctg}(2x) + 4x$, $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$

26. $y = -e^{4x} \operatorname{tg} x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

27. $y = \operatorname{ctg} x + 8\cos x$, $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{3}\right]$

28. $y = \operatorname{tg}(3x) - 4x$, $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

29. $y = -e^{2x} \operatorname{tg} x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

30. $y = e^{2x} \cos(2x)$, $\left[\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{6}\right]$

8.3

1. В прямой круговой конус с углом 30° в осевом сечении и радиусом основания r вписан цилиндр. Определить радиус основания и высоту цилиндра, при которых его полная поверхность будет наибольшей.

2. Найти наибольшее значение площади прямоугольного треугольника *ABC,* в котором угол C прямой, если одной вершиной является точка $A(0;0)$, вершина *B* лежит на графике функции $y = 5x^3 e^{4-3x} + \frac{8}{x}$, а вершина *C* расположена на оси абсцисс и её абсцисса удовлетворяет соотношению $0{,}5 \le x \le 10$.

3. Определить радиус цилиндра, вписанного в шар радиуса R, который имеет наибольшую боковую поверхность. Указать значение площади полной поверхности такого цилиндра.

4. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+m}$-ую часть курса, а забывает at-ую часть. Сколько дней надо затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса, если $m = 0{,}5$ и $a = \frac{2}{49}$?

5. Найти радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S, который имеет наибольший объём.

6. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=e^{-x}$ и отрезками прямых $x=0;\quad x=1; y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Указать значение этой площади.
7. Найти радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в конус с высотой h и радиусом r, боковая поверхность которого будет наибольшей.
8. В пространстве задана стандартная прямоугольная система координат $Oxyz$. Нужно пройти кратчайшим путем от точки $C(-1;-1;1)$ до точки $D(2;-2;0)$, обязательно заходя по пути на ось Oz. Определить длину такого кратчайшего пути.
9. Найти размеры правильной треугольной пирамиды заданного объёма V, которая имеет наименьшую сумму рёбер.
10. Провести через заданную точку $A(a;b)$, лежащую внутри некоторого угла φ, прямую, которая отсечёт от этого угла треугольник наименьшей площади. Указать значение этой площади.
11. По двум прямолинейным дорогам, составляющим угол в 60°, в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два пешехода: один со скоростью v_1 км/ч, а другой - v_2 км/ч. В начальный момент первый пешеход находится на расстоянии a км от перекрестка, а другой на расстоянии b км. Через какое время после начала движения расстояние между ними будет наименьшим? Определить это расстояние.
12. Найти наибольшее возможное значение отношения объёма конуса, вписанного в шар радиуса R, к объёму шара. Определить расстояние от центра шара до основания конуса.
13. В прямоугольник $ABCD$ со сторонами 24 и 27 см вписаны две касающиеся друг друга окружности. Одна окружность касается сторон AB и AD, а другая – сторон BC и CD. Найти наименьшее значение суммы площадей, ограниченных этими окружностями.
14. Проволокой длины L необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Найти радиус круга, при котором площадь клумбы будет наибольшей.
15. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты точки D и E соответственно так, что прямая DE параллельна стороне AB. Точка P делит сторону AB на части так, что $BP=8AP$. Площадь треугольника ABC равна 1. Определить значение $k=BD:CE$, чтобы площадь трапеции $APDE$ была наибольшей.
16. Найти радиус и высоту цилиндра, имеющего наибольший объём, который вписан в куб с ребром a так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба.
17. Вершинами треугольника ABC являются точки $A(3;0)$ и $B(0;5)$, а третья вершина C лежит на параболе $y=3x^2-48x+200$. Найти наименьшее возможное значение площади такого треугольника.

18. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R, который имеет наибольшую площадь полной поверхности. Указать значение площади полной поверхности такого конуса.

19. В какой точке с абсциссой $x_\circ$ графика функции $y = -x^4 + x$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой $x = x_\circ + 2$ была наименьшей?

20. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса R с центральным углом φ.

21. В прямоугольном круговом конусе произведение высоты и радиуса основания равны a. Какое наименьшее значение может принимать радиус шара, описанного вокруг этого конуса?

22. Найти наибольший объём правильного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид вращения $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

23. Определить высоту конуса, описанного около полушара радиуса R, который имеет наименьший объём, если его основание и основание полушара лежат в одной плоскости и концентричны.

24. На координатной плоскости Oxy задано множество всех равносторонних треугольников, две вершины которых лежат на прямой $y = -3x + 3$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $\dfrac{1}{2} \cdot x^2 \le y \le -3x + 3$. Найти наибольшее возможное значение площади таких треугольников.

25. В сферу вписаны правильная треугольная пирамида со стороной основания 9 и правильная четырехугольная призма, нижние плоскости оснований которых совпадают. Центр сферы делит высоту призмы в отношении $\sqrt{5} : 1$, считая от вершины. Найти наибольшее возможное значение объёма призмы.

26. Провести через заданную точку $A(a;b)$, лежащую внутри некоторого угла α, прямую, которая отсечёт от этого угла два отрезка, суммарная длина которых будет наименьшей. Указать значение этой суммы.

27. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$ и $y = 0$ нужно вырезать прямоугольник наибольшей площади. Определить стороны этого прямоугольника.

28. Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y = \mathrm{e}^{ax}$ и $y = \dfrac{\ln x}{a}$, $a > 0$.

29. В треугольной пирамиде $SABC$ расстояние от каждой из вершин до середины ребра AB равны a см. При какой величине двугранного угла при ребре SC объём пирамиды будет наибольшим? Найти этот объём.

30. В какой точке с абсциссой $x_\circ$ графика функции $y = x^4 + 2x^2$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой $x = x_\circ - 1$ была наименьшей?

Список литературы

1. Берман, А.Ф. Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 736 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2660. — Загл. с экрана.
2. Бесов, О.В. Лекции по математическому анализу [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2014. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59678. — Загл. с экрана.
3. Родина Т.В., Трифанова Е.С. Задачи и упражнения по математическому анализу-I.-СПб: ИТМО, 2011.-208 с.
4. Сильванович О.В., Тимофеева Г.В. Типовые расчёты по высшей математике. 1 семестр (2 модуль). Предел и непрерывность функции. Дифференцирование функции одной переменной. - СПб: Университет ИТМО, 2012. - 49 с.

Миссия Университета - генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечить опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИКИ

Образовательный центр математики Университета ИТМО был создан на базе кафедры математики - крупнейшей в Университете. С момента основания на ней работали такие выдающиеся учёные, как И.П. Натансон, А.Г. Аленицын, В.В. Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники ОМЦ активно активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).