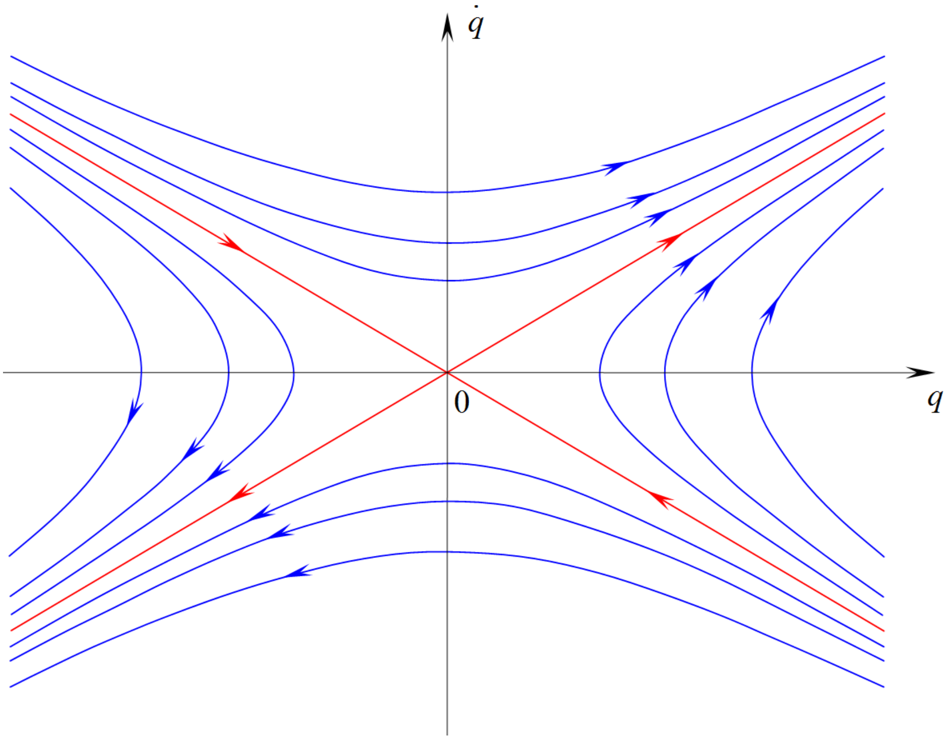
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Лопарев, А.Ю. Соколов

МЕТОДЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ



Санкт-Петербург
2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Лопарев, А.Ю.Соколов.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 24.03.02 Системы управления движением и навигация
в качестве учебного пособия для реализации образовательных программ высшего образования бакалавриата.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2019

Лопарев А.В., Соколов А.Ю. Методы теории колебаний– СПб: Университет ИТМО, 2019. – 81 с.

Рецензент:
Литвиненко Юлия Александровна, кандидат технических наук, доцент факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО.

В пособии излагаются основные положения теории колебаний, касающиеся описания свободных и вынужденных колебаний в линейных и нелинейных системах с одной и несколькими степенями свободы. Рассматриваются колебания, вызываемые внешними детерминированными воздействиями и периодически меняющимися параметрами самой системы. В практическую часть пособия включены задачи, позволяющие закрепить навыки по описанию колебательного движения различных механических систем в части составления уравнений движения и их графического моделирования в пакете Matlab/Simulink.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для развития современной техники. Только с привлечением теории колебаний могут быть корректно рассмотрены практически важные проблемы создания инерциальных чувствительных элементов, систем стабилизации, измерения вибрационных характеристик и т.п. Это позволяет проектировать приборы и системы, способные функционировать на подвижных объектах, находя свое применение в авиации, судостроении и других областях техники.

При изучении колебательных процессов, которые происходят в различных конструкциях и системах, исследуемые объекты всегда заменяются некоторыми моделями. Такая замена изучаемого объекта моделью позволяет инженеру эффективно использовать хорошо разработанный математический аппарат. Поэтому инженеру приходится выбирать одну из возможных моделей механической системы. Он должен также адекватно выбирать модели возмущений и погрешностей измерений. Корректность построения математической модели проектируемой системы во многом определяет эффективность расчетов и компьютерного моделирования.

Настоящее учебное пособие отражает основные положения теории колебаний, в нем отсутствуют разделы, касающиеся более сложных вопросов, таких как исследование колебаний в многомерных системах, в системах с распределенными параметрами, случайные колебания, теория хаоса и т.п. Подобные вопросы рассматриваются в рамках других дисциплин подготовки бакалавров и магистров; для более детального их изучения рекомендуется воспользоваться специальной литературой, в том числе приведенной в библиографическом списке.

Практическая часть настоящего пособия охватывает вопросы исследования свободных и вынужденных колебаний в линейных и нелинейных системах с одной и несколькими степенями свободы. При составлении заданий для самостоятельной работы в части исследования линейных систем за основу взят материал сборника [1]. В качестве метода исследования предлагается моделирование работы системы по дифференциальным уравнениям, описывающим закон ее движения, полученным при решении студентом конкретной задачи. Такой подход, по мнению авторов, позволяет закрепить и применить на практике навыки в области теории колебаний, приобретенные обучающимися в ходе лекционных занятий и самостоятельной работы, и далее использовать их при проектировании и исследовании систем ориентации и навигации, общая модель погрешностей которых включает в себя колебательные процессы, обусловленные различными факторами.

В качестве инструмента для моделирования авторами предлагается использовать среду Matlab, предоставляющую пользователю различные способы интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих работу систем.

В пакете Matlab/Simulink может быть собрана структурная схема колебательной системы с визуализацией ее выходных параметров, что способствует наглядной демонстрации особенностей математических моделей колебательных систем различного вида.

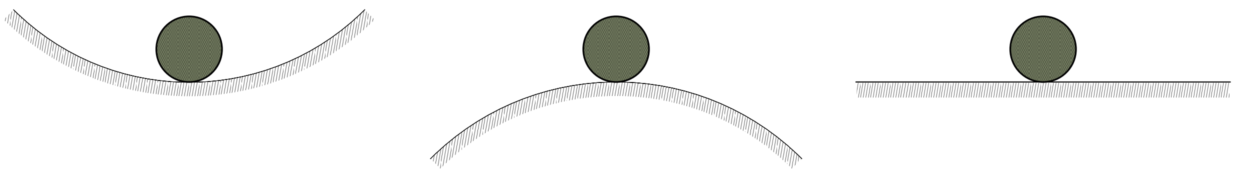
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1.1.Колебательные системы. Понятие устойчивости

Физическая система называется *колебательной*, если все или некоторые величины, определяющие ее состояние, изменяются не монотонно, а претерпевают переменные увеличения и уменьшения [2]. В случае колебательного процесса в механической системе задающие ее обобщенные координаты q_1, q_2, ..., q_n с течением времени то возрастают, то убывают. Это означает, что точки или тела, входящие в систему, совершают прямые и обратные движения. Колебательную систему называют также *осциллятором*.

Колебательное свойство какой-либо системы не следует смешивать со свойством периодичности. Под *периодичностью* подразумевается регулярная повторяемость явления, причем периодическое движение может быть как колебательным, так и прогрессивным. Например, движение маятника есть движение периодическое колебательное, а движение стрелки часов – движение периодическое прогрессивное. С другой стороны, не всякое колебание периодично. Так, случайные колебания во многих случаях являются непериодическими (нельзя указать период).

В теории колебаний важную роль играют понятия устойчивости и неустойчивости. Оценка устойчивости интуитивно понятна и почти очевидна, наглядно демонстрируется на примере шарика, находящегося на поверхности (рис. 1). Так, в случае *а* положение его устойчиво, в случае *б* – неустойчиво и, наконец, в случае *в* шарик находится в безразличном равновесии.



а) *б*) *в*)

Рис. 1. Иллюстрация понятия устойчивости равновесия

Устойчивость определяется либо как стремление системы возвратиться в исходное состояние после того, как она из него была выведена, либо как свойство оставаться вблизи этого исходного состояния. В случае механических систем различают устойчивость равновесия и устойчивость движения. Давая определения устойчивости, будем опираться на работы А.М. Ляпунова, которые считаются классическими в теории устойчивости. При этом для простоты условимся отсчитывать обобщенные координаты системы от положения равновесия.

Равновесие системы называется *устойчивым*, если при любых наперед заданных числах $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что при

$|q_i(0)| < \delta_1$, $|\dot{q}_i(0)| < \delta_2$ во все последующие моменты времени $t > 0$ будем иметь $|q_i(t)| < \varepsilon_1$, $|\dot{q}_i(t)| < \varepsilon_2$, где $i = 1, 2, ..., n$.

Устойчивость, определенную таким образом, называют *обыкновенной* устойчивостью. Если же с течением времени все обобщенные координаты q_i стремятся к нулю, то говорят, что система обладает *асимптотической* устойчивостью. Таким образом, при обыкновенной устойчивости точки системы не выходят за назначенные заранее границы, а при асимптотической устойчивости стремятся к своим равновесным положениям.

Можно установить достаточный признак, или критерий устойчивости, для консервативных систем.

Теорема Лагранжа – Дирихле. Если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, то равновесие устойчиво.

Доказательство теоремы приведено в [2].

Для консервативной системы, т.е. для системы в потенциальном силовом поле, обобщенная сила равна

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \tag{1}$$

где $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_n)$ – потенциальная энергия системы. В положении равновесия все обобщенные силы равны нулю, и согласно равенству (1) имеем $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$. При этом если получаемый экстремум доставляет минимум потенциальной энергии, то равновесие будет устойчивым.

Необходимого признака устойчивости не существует. Однако иногда можно заранее утверждать, что система неустойчива. Это можно сделать в случаях, предусмотренных теоремами Ляпунова, приводимыми здесь без доказательства.

Теорема 1. Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия не достигает минимума, и отсутствие минимума определяется уже по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии.

Теорема 2. Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия достигает максимума, определяемого членами наинизшего порядка в разложении потенциальной энергии в степенной ряд.

Упоминавшееся выше безразличное равновесие (рис. 1*в*) не подходит ни к одному из определений приведенных теорем. С точки зрения общей теории мы имеем в данном случае неустойчивость, так как сколь угодно малые начальные скорости могут унести точку далеко от начального положения. Иными словами, система, будучи устойчивой относительно статических возмущений (начальное отклонение), неустойчива относительно кинематических возмущений (начальные скорости).

Перейдем далее к рассмотрению понятия *устойчивости движения*. Предположим для определенности, что движение материальной системы описывается уравнениями Лагранжа [3]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

где K – кинетическая энергия. Положим далее, что при некоторой совокупности начальных условий $q_1^*(0)$, $q_2^*(0)$, ..., $q_n^*(0)$, $\dot{q}_1^*(0)$, $\dot{q}_2^*(0)$, ..., $\dot{q}_n^*(0)$ решение уравнения (2) имеет вид $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$, ..., $q_n^*(t)$, $\dot{q}_1^*(t)$, $\dot{q}_2^*(t)$, ..., $\dot{q}_n^*(t)$. Будем называть движение, определяемое этим решением, основным или невозмущенным. При всякой иной совокупности начальных условий $q_1(0)$, $q_2(0)$, ..., $q_n(0)$, $\dot{q}_1(0)$, $\dot{q}_2(0)$, ..., $\dot{q}_n(0)$ решения уравнения (2) $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, ..., $\dot{q}_n(t)$ будут, очевидно, уже иные, и движение, определяемое ими, называется возмущенным по отношению к основному.

Невозмущенное движение называется *устойчивым*, если при любых наперед заданных числах $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ существуют такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что при $|\Delta q_i(0)| < \delta_1$, $|\Delta \dot{q}_i(0)| < \delta_2$ во все последующие моменты времени $t > 0$ имеем $|\Delta q_i(t)| < \varepsilon_1$, $|\Delta \dot{q}_i(t)| < \varepsilon_2$, где разности $\Delta q_i = q_i - q_i^*$, $\Delta \dot{q}_i(t) = \dot{q}_i - \dot{q}_i^*$, $i = 1, 2, ..., n$, называются вариациями обобщенных координат и обобщенных скоростей соответственно.

Иными словами, невозмущенное движение устойчиво, если возмущенное остается сколь угодно близким к нему.

Проблема устойчивости движения играет большую роль в современной технике. Так, говорят об устойчивости движения железнодорожного поезда, артиллерийского снаряда, быстроходной турбины и т. п. Рассмотренное выше определение устойчивости равновесия является частным случаем приведенного здесь определения устойчивости движения, когда невозмущенное состояние есть состояние покоя.

В заключении отметим, что в некоторых задачах из уравнений движения исключается время и в качестве независимой переменной выступает какая-либо координата, называемая основной или несущей. Тогда можно оценивать устойчивость движения по отношению к этой координате. Однако это уже будет устойчивость не в смысле близости возмущенного и невозмущенного состояний системы, а в смысле близости траекторий. Такая устойчивость называется *орбитальной*. С ней приходится, например, встречаться в технике железнодорожного транспорта, когда несущей координатой является длина дуги (в частности, прямой) осевой линии рельсового пути; относительно этой координаты и оценивается устойчивость. В теории часовых механизмов существенную роль играет стабильность скорости хода по отношению к смещению якоря. Таким образом, здесь имеем также орбитальную устойчивость.

1.2.Обобщенное уравнение энергии

Для составления дифференциальных уравнений колебаний механической системы необходимо конкретизировать слагаемые, входящие в уравнение (2). Пусть система содержит N материальных точек с координатами $x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N$, которые однозначно определяются обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_n$. Проекции векторов скоростей точек на соответствующие оси могут быть представлены следующим образом:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \,, \; \dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \,, \; \dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \,.$$

Соответственно, выражение для кинетической энергии системы может быть записано как

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \,, \tag{3}$$

где

$$A_{jl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right),$$

m_i – массы материальных точек.

Обобщенная сила Q_j в достаточно общем случае может быть представлена в виде суммы трех составляющих:

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^{*},$$

где $Q_j^{\Pi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ – потенциальная (восстанавливающая) сила; $Q_j^{*} = Q_j^{*}(t)$ – возмущающая сила; Q_j^{Φ} – сила сопротивления, или диссипативная сила. Рассмотрим далее случай линейного сопротивления, когда на каждую материальную точку действует диссипативная сила F_i, пропорциональная скорости. В этом случае проекции силы сопротивления могут быть записаны в следующем виде:

$$F_{ix} = -\alpha_i \dot{x}_i \,, \; F_{iy} = -\alpha_i \dot{y}_i \,, \; F_{iz} = -\alpha_i \dot{z}_i \,,$$

где $\alpha_i > 0$ – коэффициент пропорциональности. Тогда

$$Q_j^{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

или

$$Q_j^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

где функция

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} B_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l \qquad (4)$$

носит название функции рассеяния, или диссипативной функции Рэлея. Здесь

$$B_{jl} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_l}\right).$$

Как видно из формул (3) и (4), функция рассеяния имеет такую же структуру, как и кинетическая энергия, и также является положительной величиной.

С учетом введенных обозначений уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^*,\ j = 1, 2, ..., n. \qquad (5)$$

Путем несложных преобразований [2, 5] (5) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}(K + \Pi) + 2\Phi = W, \qquad (6)$$

где $W = \sum_{j=1}^{n} Q_j^* \dot{q}_j$ – суммарная мощность возмущающих сил.

Уравнение (6) носит название *обобщенного уравнения энергии*.

В частном случае, при отсутствии внешнего возмущения имеем

$$\frac{d}{dt}(K + \Pi) = -2\Phi,$$

то есть удвоенная функция рассеяния представляет собой потерю полной энергии в единицу времени.

Наконец, для консервативной системы ($\Phi = 0$) получаем известное соотношение

$$K + \Pi = \text{const}.$$

1.3.Дифференциальные уравнения малых колебаний в окрестности положения устойчивого равновесия

На основании изложенного в предыдущем подразделе могут быть получены дифференциальные уравнения малых колебаний системы в окрестности положения равновесия, которое по умолчанию будем предполагать устойчивым. Уравнения малых колебаний представляют собой линеаризованные уравнения движения, которые по отношению к исходной системе являются уравнениями первого приближения. В этом случае вводятся следующие предположения:

$$A_{jl} \approx A_{jl}\Big|_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0} = a_{jl},$$

$$K \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l\ ; \qquad (7)$$

$$B_{jl} \approx B_{jl}\Big|_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0} = b_{jl},$$

$$\Phi \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l\ ; \qquad (8)$$

$$\Pi \approx \Pi(0,\ldots,0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\Bigg|_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0} q_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_l}\Bigg|_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0} q_j q_l =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{jl} q_j q_l\ . \qquad (9)$$

При получении последнего соотношения введено допущение о нулевом уровне потенциальной энергии в точке с нулевыми обобщенными координатами. Исходя из этого, первое слагаемое $\Pi(0,\ldots,0) = 0$. Равенство нулю второго слагаемого обусловлено тем, что в положении равновесия равны нулю обобщенные силы, т.е. $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$. Заметим, что если положение равновесия устойчиво, то в его окрестности $\Pi > 0$.

Введенные выше коэффициенты a_{ij} называются *коэффициентами инерции*; b_{ij} – *коэффициентами сопротивления*; c_{ij} – *коэффициентами жесткости*.

Для вывода уравнений малых колебаний подставим разложения (7)-(9) в выражение (5). Получим:

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = 0;$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j\ ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_j\ ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} q_j\ ;$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j\right) = Q_j^*,\quad j = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Система (10) представляет собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка; таким образом, ее порядок равен $2n$.

Изучаемые далее в разделах 2 и 3 дифференциальные уравнения линейных систем представляют собой частные случаи уравнения (10). Следует заметить, что они могут определять не только колебательные, но и апериодические движения. Уравнения (10) также сохраняют силу и для неустойчивых систем, когда некоторые коэффициенты c_{ij} или b_{ij} отрицательны, если ограничиться рассмотрением малых отклонений, допускающих использование уравнений первого приближения.

1.4.Контрольные вопросы

1. Какие системы называются колебательными? В чем разница между периодическим и колебательным движениями?
2. Дайте определение устойчивости равновесия. Что такое асимптотическая устойчивость?
3. Сформулируйте признаки устойчивости и неустойчивости равновесия.
4. Что такое безразличное равновесие? К какому типу оно относится с точки зрения определения устойчивости? Почему?
5. Дайте определение устойчивости движения.
6. Что такое орбитальная устойчивость? Приведите примеры.
7. На какие группы можно разделить силы, действующие на механическую систему?
8. Что такое функция рассеяния?
9. Запишите обобщенное уравнение энергии. Рассмотрите частные случаи этого уравнения.
10. В каких случаях справедливо линеаризованное представление уравнений движения?

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

2.1.Гармонические колебания

Гармоническими называют колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по синусоидальному (косинусоидальному) закону. Такие колебания возникают в линейных системах с одной степенью свободы при отсутствии сопротивления и внешнего возмущения. Примерами таких систем являются пружинный и математический (в случае малых амплитуд колебаний) маятники, электрический колебательный контур и др. [2, 3, 4, 5, 6]. Во всех этих случаях сопротивление считается пренебрежимо малым, кроме того, принимается ряд других допущений (пружина или нить маятника считаются невесомыми, они не закручиваются вокруг своих осей, отсутствует деформация груза и т.п.). Можно сказать, что материальная точка совершает гармонические колебания, если они происходят в результате воздействия силы, пропорциональной смещению точки и направленной противоположно этому смещению. Гармонические колебания выделяются из всех остальных видов колебаний, поскольку часто малые колебания реальных систем, как свободные, так и вынужденные, близки по своей форме к гармоническим колебаниям.

С учетом сказанного, уравнение движения для всех указанных выше систем сводится к виду

$$a\ddot{q} + cq = 0. \qquad (11)$$

Входящий в уравнение (11) коэффициент a называется *обобщенной* (приведенной) *массой*, или, как было сказано в предыдущей главе, *коэффициентом инерции*. По смыслу он всегда положителен: в простейших и наиболее распространенных случаях он представляет собой массу тела или его момент инерции (а в электрических системах – индуктивность). Коэффициент c, который, к примеру, в случае пружинного маятника представляет собой коэффициент упругости пружины, в общем случае может быть и отрицательным. Это может иметь место тогда, когда рассматривается поведение системы в окрестности положения неустойчивого равновесия (сила, действующая на материальную точку, сонаправлена смещению), о чем пойдет речь в следующем подразделе. В связи с этим коэффициент c получил название *обобщенного коэффициента жесткости*, или *квазиупругого коэффициента*. Однако гармонические колебания возможны только при положительных c.

Если далее ввести обозначение

$$k = \sqrt{c/a}\,, \qquad (12)$$

получим каноническую форму уравнения свободных колебаний:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0,$$

решение которого имеет вид

$$q = A\cos kt + B\sin kt, \qquad (13)$$

или

$$q = \alpha \sin(kt + \varphi), \qquad (14)$$

где A, B, α, φ – некоторые константы, причем

$$A = \alpha \sin\varphi, \; B = \alpha \cos\varphi;$$

$$\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}, \; \operatorname{tg}\varphi = A/B.$$

Здесь α – *амплитуда* колебаний (величина, определяющая максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия), φ – начальная *фаза*, k – *круговая*, или циклическая, *частота*, связанная с *периодом* T и *частотой* N (числом колебаний в единице времени) соотношениями

$$T = 2\pi/k, \; N = k/2\pi = 1/T. \qquad (15)$$

Периодом колебаний T назван наименьший промежуток времени, по истечении которого движение воспроизводится (рис. 2). Если в (15) k выражена в $с^{-1}$, то N выражается в герцах.

Постоянные A, B, α, φ в соотношениях (13), (14) определяются *начальными условиями* $q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$. Для нахождения указанных констант получим из формулы (14) выражение для обобщенной скорости:

$$\dot{q} = \alpha k \cos(kt + \varphi). \qquad (16)$$

Приравнивая в (14) и (16) t нулю, нетрудно получить

$$A = q_0, \; B = \dot{q}_0/k;$$

$$\alpha = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}, \; \operatorname{tg}\varphi = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}.$$

Таким образом, причиной свободных колебаний в системе являются ненулевые начальное смещение и (или) скорость.

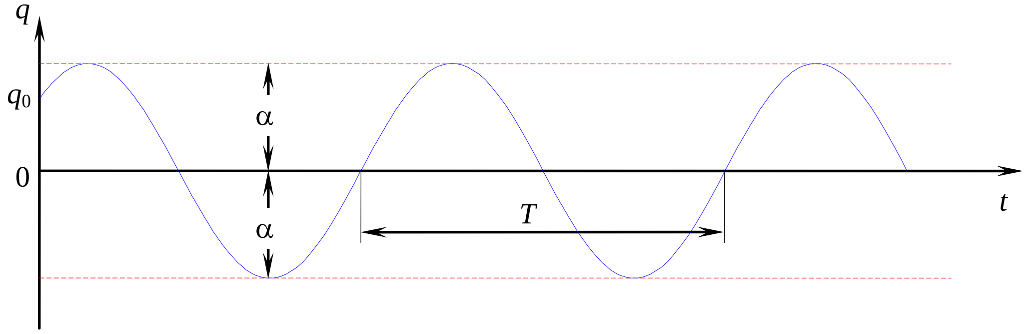


Рис. 2. Гармонические колебания

Нетрудно убедиться, что в данном случае полная энергия системы E остается постоянной. Действительно, записывая [2, 4, 5, 6] выражения для кинетической

$$K = \frac{1}{2} a\dot{q}^2 = \frac{1}{2} a\alpha^2 k^2 \cos^2(kt + \varphi) = \frac{1}{2} c\alpha^2 \cos^2(kt + \varphi)$$

и потенциальной

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2 = \frac{1}{2} c\alpha^2 \sin^2(kt + \varphi)$$

энергии, убеждаемся, что их сумма

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2} c\alpha^2 = \text{const}.$$

Из выражений (14) и (16) можно исключить время, получив в результате зависимость $\dot{q}(q)$. Изображение этой зависимости называется *фазовой траекторией*, q и $\dot{q}$ – *фазовыми координатами*, а сама система координат – *фазовой плоскостью*. Семейство фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям, называется *фазовым портретом*. В случае гармонических колебаний фазовые траектории описываются уравнением

$$q^2 + (\dot{q}/k)^2 = \alpha^2,$$

или

$$\left(\frac{q}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}}{\alpha k}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, в данном случае фазовые траектории образуют последовательность концентрических подобных эллипсов (рис. 3). Начало координат представляет собой изолированную *особую точку*, называемую *центром*. Это есть положение устойчивого равновесия, причем устойчивость здесь обыкновенная. В самом деле, если мы выберем малый эллипс, полностью входящий в область, то изображающая точка, будучи помещена на этот эллипс или на какой-либо меньший из того же семейства, никогда не выйдет из ε-области, но зато никогда и не попадет в центр. В общем случае под особой точкой понимают такую точку на фазовой плоскости, где производная $d\dot{q}/dq$ не определена.

Изображающая точка с течением времени перемещается по фазовой траектории, время в данной ситуации выступает в качестве параметра. Можно отметить определенные особенности, присущие всем фазовым траекториям (не обязательно соответствующих гармоническим колебаниям). Так как в верхней полуплоскости $\dot{q} > 0$, то изображающая точка должна двигаться вправо (в сторону увеличения q). В нижней полуплоскости, наоборот, $\dot{q} < 0$ и изображающая точка движется влево. В точках пересечения оси абсцисс фазовая координата принимает экстремальные значения ($\dot{q} = 0$), поэтому пересечение происходит под прямым углом. Отметим также, что фазовые траектории колебаний с постоянной амплитудой замкнуты, так как движение воспроизводится, но вид этих траекторий в случае нелинейных или вынужденных колебаний будет отличаться

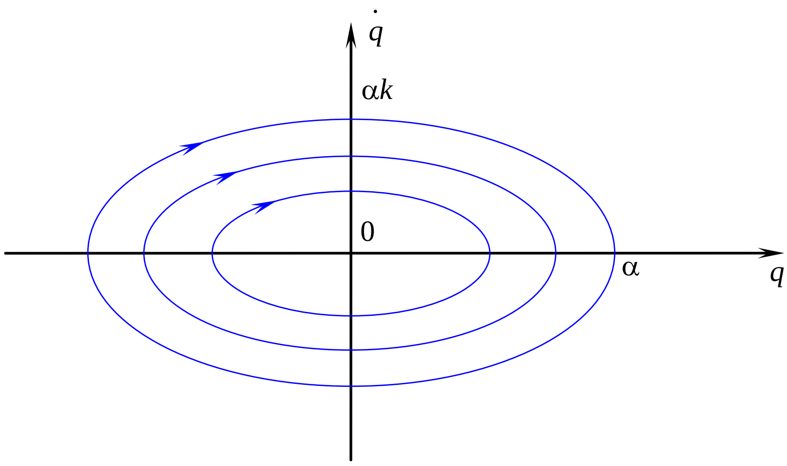


Рис. 3. Фазовые траектории гармонических колебаний

от эллипсов. Несмотря на то, что фазовое представление колебаний уступает в наглядности зависимости координат от времени, фазовый портрет представляет некоторые важные возможности, которые не могут быть реализованы при традиционном способе представления процессов.

2.2.Потеря устойчивости колебательной системы

Предположим, что в уравнении (11) коэффициент c является функцией некоторого параметра и вследствие изменения этого параметра принял отрицательное значение. Как было отмечено выше, такой случай соответствует поведению системы в окрестности положения неустойчивого равновесия.

Введем новое обозначение:

$$\kappa = \sqrt{-c/a}\,,$$

и приведем уравнение (11) к виду

$$\ddot{q} - \kappa^2 q = 0\,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1\,\mathrm{e}^{\kappa t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\kappa t}\,, \tag{17}$$

или

$$q = A\operatorname{ch}\kappa t + B\operatorname{sh}\kappa t\,, \tag{18}$$

где

$$C_1 = \frac{A+B}{2}\,,\; C_2 = \frac{A-B}{2}\,.$$

Постоянные A, B, C_1, C_2 нетрудно выразить через начальные условия, предварительно определив

$$\dot{q} = A\kappa\operatorname{sh}\kappa t + B\kappa\operatorname{ch}\kappa t\,.$$

Тогда

$$A = q_0,\ B = \dot{q}_0/\kappa;$$
$$C_1 = \frac{1}{2}\left(q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\kappa}\right),\ C_2 = \frac{1}{2}\left(q_0 - \frac{\dot{q}_0}{\kappa}\right).$$

Заметим, что движение (17) всегда будет расходящимся, кроме такой комбинации начальных условий, когда

$$q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\kappa} = 0,$$

что, вообще говоря, физически не осуществимо.

Движение системы при $c < 0$ можно интерпретировать как движение под действием силы отталкивания, линейно зависящей от отклонения точки.

Для построения фазового портрета из уравнения движений можно, как это делалось выше, исключить время. Отсюда нетрудно получить семейство кривых, задаваемых уравнениями

$$\left(\frac{q}{C}\right)^2 - \left(\frac{\dot{q}}{\kappa C}\right)^2 = \pm 1,$$
$$\dot{q} = \pm \kappa q.$$

Здесь $C = 2\sqrt{|C_1 C_2|}$. Первое уравнение определяет множество подобных гипербол, а второе – общие асимптоты указанных гипербол (рис. 4). Полученная особая точка называется *седлом*. Эта точка неустойчива. Таким образом, каждая асимптота состоит из трех фазовых траекторий: двух полупрямых и самой особой

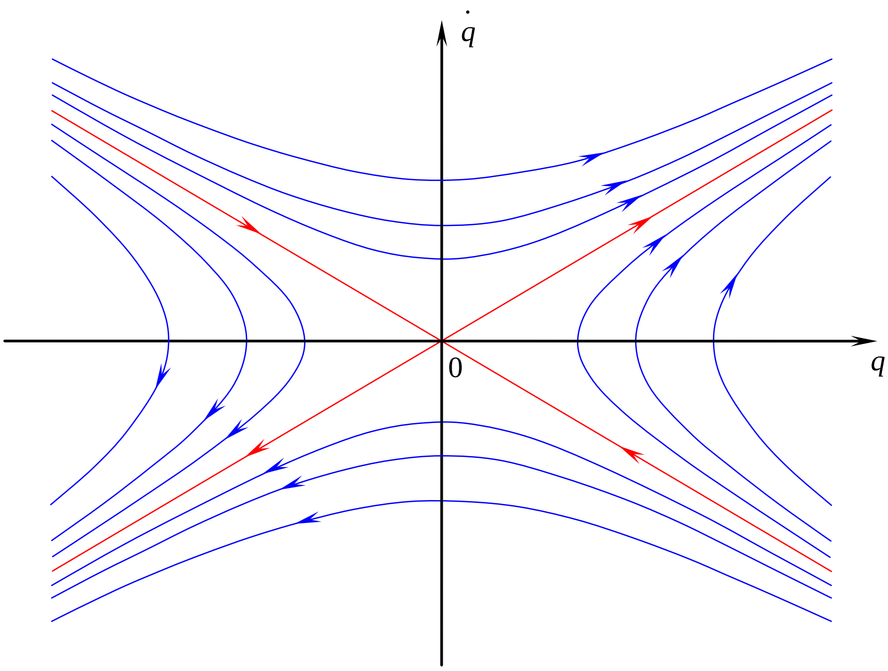


Рис. 4. Фазовые траектории системы в окрестности положения неустойчивого равновесия

точки. Эти полупрямые называются *усами* седла. Как видно из фазовой диаграммы, два уса устойчивы (во второй и четвертной четвертях) и два неустойчивы (в первой и третьей четвертях). Все прочие фазовые траектории – убегающие: они минуют особую точку, проходя лишь более или менее близко от нее. Рассмотренный нами исключительный случай, когда система асимптотически приближается к положению равновесия, соответствует начальным условиям, размещенным на устойчивых усах.

2.3.Затухающие колебания

Затухающие колебания имеют место при наличии сил сопротивления, гасящих свободные колебания. Сопротивление будем считать здесь линейно зависящим от обобщенной скорости. В этом случае дифференциальное уравнение движения приобретает вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \tag{19}$$

Оставляя в силе обозначение (12), введем еще обозначение

$$n = \frac{b}{2a}, \tag{20}$$

где n носит название *коэффициента затухания*. Уравнение (19) в канонической форме будет иметь вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{21}$$

Как известно из курса высшей математики, общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{22}$$

где $\lambda_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

а именно

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

В зависимости от соотношения параметров n и k можно выделить три случая:

а) $n < k$ – случай малого сопротивления;

б) $n > k$ – случай большого сопротивления;

в) $n = k$ – случай критического сопротивления.

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Случай малого сопротивления ($n < k$). Введем обозначение

$$\beta = \sqrt{k^2 - n^2}$$

и представим корни характеристического уравнения в виде

$$\lambda_{1,2} = -n \pm j\beta,$$

где j – мнимая единица. Тогда, как известно, решение (22) может быть записано в виде

$$q = e^{-nt}(A\cos\beta t + B\sin\beta t),$$

или по аналогии с (14)

$$q = \alpha e^{-nt}\sin(\beta t + \varphi). \qquad (23)$$

Постоянные α, φ в данном случае выражаются через начальные условия следующим образом:

$$\alpha = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{nq_0 + \dot{q}_0}{\beta}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta q_0}{nq_0 + \dot{q}_0}.$$

Зависимость (23) представляет собой затухающие колебания, график которых изображен на рис. 5. Здесь периодичность в строгом понимании отсутствует, поскольку нет полного воспроизводства движения. В то же время точки пересечения графика с осью абсцисс чередуются через равные промежутки времени. В связи с этим промежуток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия в одном и том же направлении называется *условным периодом* колебаний, который равен

$T^* = 2\pi/\beta$,

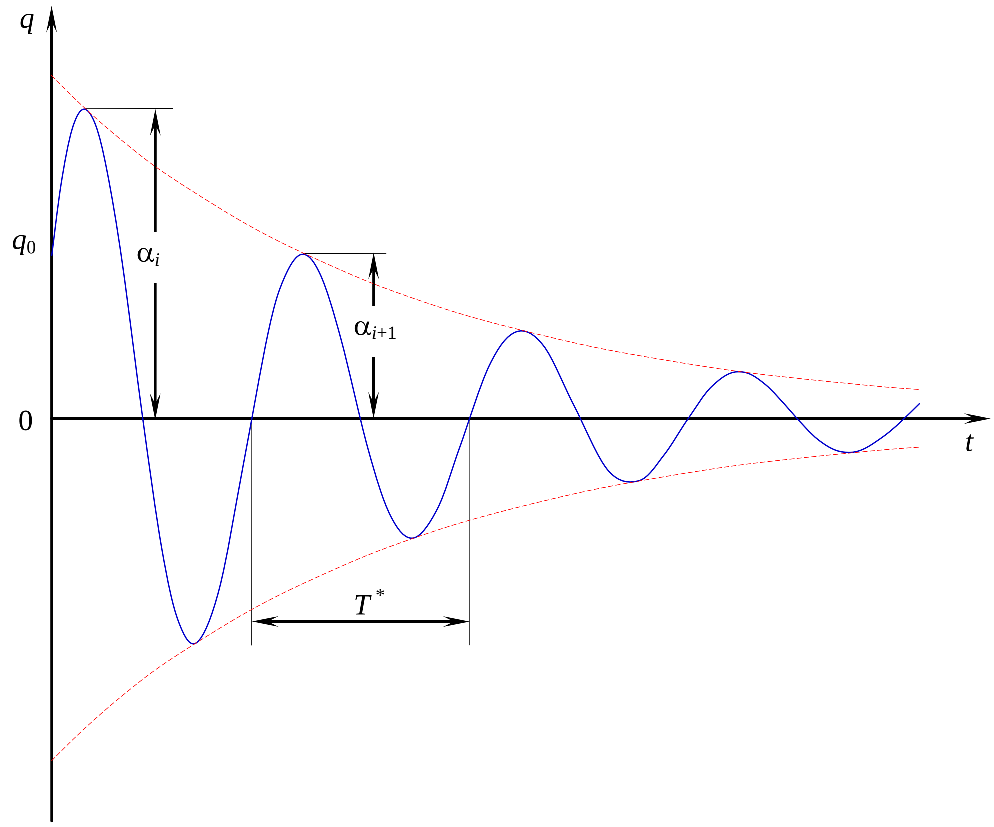


Рис. 5. Затухающие колебания

или

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx T\left(1+\frac{\zeta^2}{2}\right),$$

где T – период незатухающих колебаний, $\zeta = n/k$ – *безразмерный коэффициент затухания*.

Отсюда видно, что небольшое затухание мало влияет на период колебаний, несколько увеличивая его.

Нетрудно показать, что локальные максимумы (амплитуды) α_i процесса $q(t)$ повторяются также через интервалы T^*. Отношение соседних амплитуд

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} = \frac{\mathrm{e}^{-nt}\sin(\beta t+\varphi)}{\mathrm{e}^{-n(t+T^*)}\sin(\beta(t+T^*)+\varphi)} = \mathrm{e}^{nT^*}$$

называется *декрементом* колебаний, то есть амплитуды образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем e^{-nT^*}. Часто вместо этой величины в качестве характеристики затухания используют *логарифмический декремент* колебаний

$$\Lambda = \ln\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} = nT^*.$$

Логарифмический декремент нетрудно выразить через безразмерный коэффициент затухания:

$$\Lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2+\Lambda^2}}.$$

Эта формула имеет практическое значение, так как, найдя из наблюдений декремент колебаний, а следовательно, и Λ, можно вычислить ζ. Далее, определив расчетным путем k, легко найти коэффициент затухания n.

Обратимся к фазовому представлению движения. Вводя фазовые координаты $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, приводим дифференциальное уравнение (21) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k^2 x_1 - 2n x_2. \end{aligned} \tag{24}$$

Произведем замену переменной

$$\tilde{x}_2 = \frac{nx_1 + x_2}{\beta} \tag{25}$$

и перейдем далее к полярным координатам ρ, θ так, что $x_1 = \rho\cos\theta$, $\tilde{x}_2 = \rho\sin\theta$. Выполнив указанные подстановки, получим

$$\dot{\rho} = -n\rho,$$

$$\dot{\theta} = -\beta.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho/dt}{d\theta/dt} = \frac{n}{\beta}\rho;$$

$$\rho = C\,\mathrm{e}^{\frac{n}{\beta}\theta}. \qquad (26)$$

Здесь C – постоянная, определяемая начальными условиями. Выражение (26) задает семейство логарифмических спиралей в плоскости $x_1\tilde{x}_2$. Но поскольку преобразование (25) линейное, при переходе на плоскость x_1x_2 также получим некоторое множество закручивающихся спиралей (рис. 6). Начало координат является асимптотической точкой. Эта особая точка называется *фокусом*, который в данном случае является устойчивым.

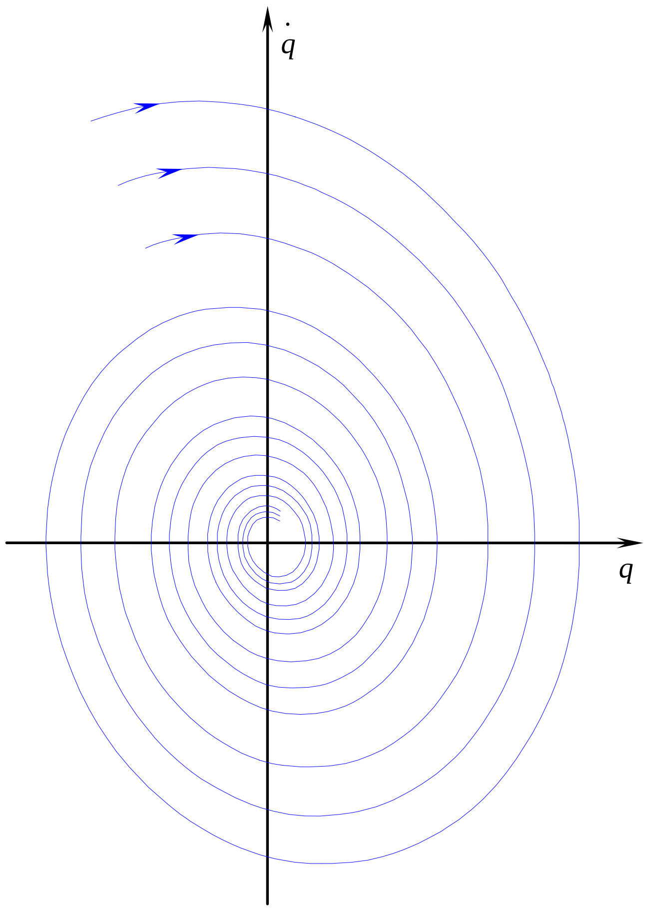


Рис. 6. Фазовые траектории затухающих колебаний

Случай большого сопротивления ($n > k$). Здесь корни характеристического уравнения вещественные. Введем обозначение

$$\varkappa = \sqrt{n^2 - k^2}$$

и представим их в виде

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \varkappa .$$

Искомое решение уравнения движения имеет вид

$$q = C_1\,\mathrm{e}^{(-n+\varkappa)t} + C_2\,\mathrm{e}^{-(n+\varkappa)t}, \qquad (27)$$

или

$$q = \mathrm{e}^{-nt}(A\,\mathrm{ch}\,\varkappa t + B\,\mathrm{sh}\,\varkappa t), \qquad (28)$$

где

$$A = q_0,\ B = (\dot{q}_0 + nq_0)/\varkappa;$$

$$C_1 = \frac{A+B}{2},\ C_2 = \frac{A-B}{2}.$$

Движение, определяемое выражением (27) или (28), не является колебательным – оно *апериодическое* и затухающее (поскольку $\varkappa < n$). На рис. 7 представлены графики возможных случаев рассматриваемого движения при $q_0 > 0$. Здесь кривая *1* соответствует «толчку вперед» ($\dot{q}_0 > 0$), кривая *2* – «слабому толчку назад» ($\dot{q}_0 \le 0$), кривая *3* – «сильному толчку назад» ($\dot{q}_0 << 0$).

Для получения фазового портрета преобразуем систему (24), перейдя к новым переменным

$$\tilde{x}_1 = x_2 + (n+\varkappa)x_1, \qquad (29)$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + (n-\varkappa)x_1. \qquad (30)$$

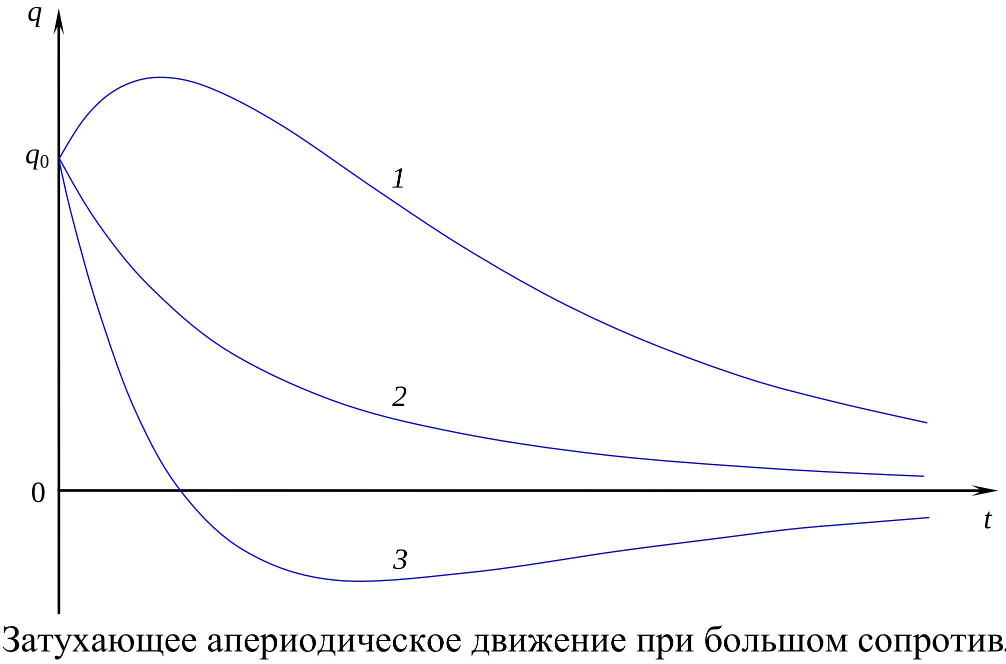


Рис. 7. Затухающее апериодическое движение при большом сопротивлении

Тогда

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -(n-\kappa)\tilde{x}_1, \quad (31)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -(n+\kappa)\tilde{x}_2. \quad (32)$$

Решениями уравнений (31), (32) являются функции

$$\tilde{x}_1 = C_1 \mathrm{e}^{-(n-\kappa)t}, \quad (33)$$

$$\tilde{x}_2 = C_2 \mathrm{e}^{-(n+\kappa)t}. \quad (34)$$

Из (33) и (34) нетрудно установить взаимосвязь $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:

$$\tilde{x}_2 = C\left|\tilde{x}_1\right|^{\frac{n+\kappa}{n-\kappa}}, \quad (35)$$

при этом прямая

$$\tilde{x}_1 = 0 \quad (36)$$

также является решением системы.

Модуль в выражении (35) необходим, чтобы исключить не определенную в математике операцию возведения в дробную степень отрицательного числа.

Уравнение (35) определяет семейство парабол (рис. 8), при этом оси координат также являются интегральными кривыми (31), (32). Поскольку преобразование (29), (30) линейное, при переходе на плоскость x_1x_2 характер зависимостей в целом сохраняется (рис. 9), но полученные параболы деформируются и ориентируются уже не относительно координатных осей, а относительно прямых, задаваемых в соответствии с (29), (30) уравнениями

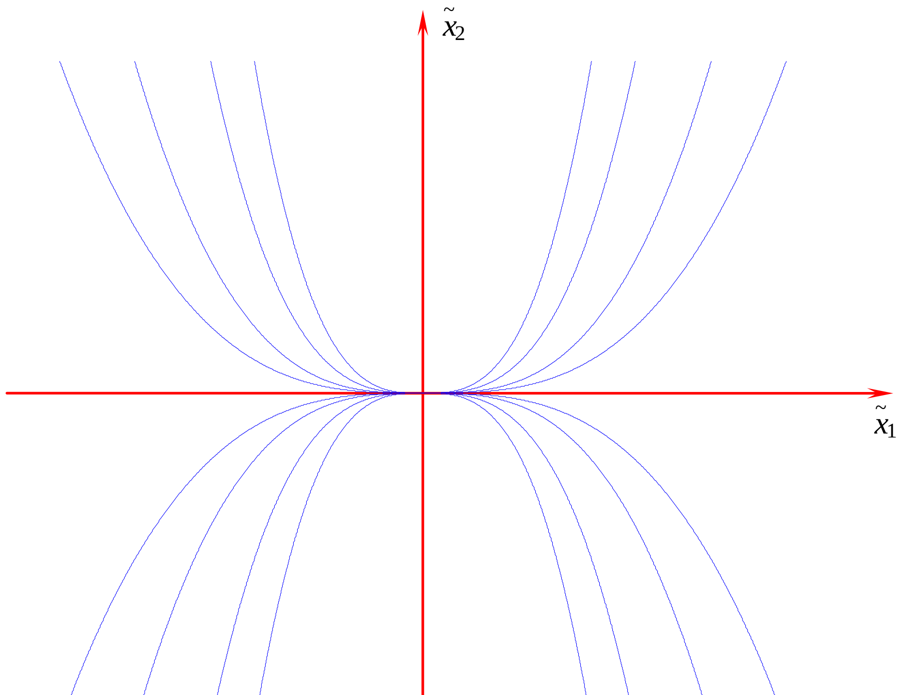


Рис. 8. Семейство парабол (35)

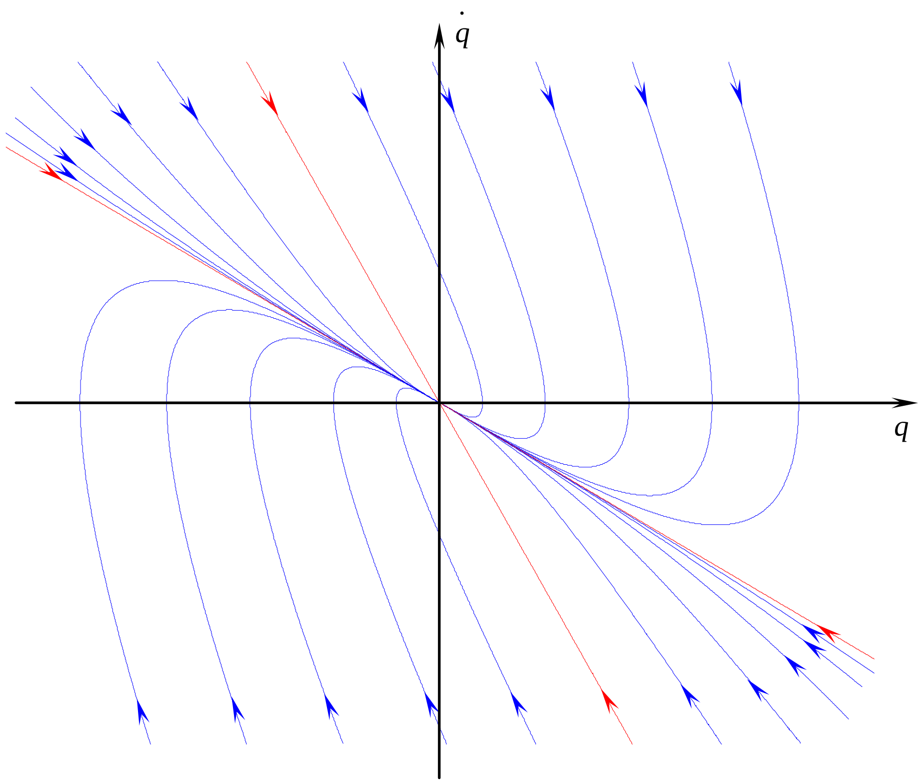


Рис. 9. Фазовые траектории затухающего апериодического движения

$$\dot{q} = -(n+\kappa)q, \tag{37}$$
$$\dot{q} = -(n-\kappa)q. \tag{38}$$

Видно, что отклонение системы от положения равновесия может иметь не более одного экстремума, что и характеризует апериодический процесс. При этом все фазовые траектории заканчиваются в начале координат, что говорит о затухании искомого процесса. Особая точка называется *узлом*, причем в данном случае это устойчивый узел.

Случай критического сопротивления ($n = k$). Так как корни характеристического уравнения являются кратными ($\lambda_1 = \lambda_2 = n = k$), решение уравнения (19) принимает вид

$$q = \mathrm{e}^{-nt}(A+Bt), \tag{39}$$

где

$$A = q_0,\ B = \dot{q}_0 + nq_0.$$

Этот случай можно трактовать как предельный, когда условный период колебаний устремляется к бесконечности, и спираль, развертываясь, дает лишь по одной точке пересечения с каждой из осей, переходя, таким образом, в кривую второго случая. Тогда, следовательно, фокус перерождается в узел. При дальнейшем увеличении сопротивления о периоде колебаний говорить уже не приходится.

2.4. Нарастающие колебания

Как было отмечено выше, в уравнении (19) обобщенная масса a всегда является положительной величиной, обобщенный коэффициент жесткости c положителен в случае восстанавливающей силы и отрицателен в случае силы отталкивания. Что касается коэффициента b, то если предполагать, что существует только сопротивление, то он не может быть отрицательным. Однако в некоторых задачах приходится учитывать поступление энергии в систему извне, причем это поступление может определяться силой, пропорциональной скорости, т.е. формально мы имеем случай так называемого «отрицательного сопротивления». Тогда мы получим силу, выраженную так же, как линейное сопротивление, но с отрицательным b. Для изучения этого случая воспользуемся полученными выше результатами, изменяя знаки у соответствующих коэффициентов.

В частности, положим

$$n' = -\frac{b}{2a} > 0,$$

при этом решения (23) и (27) соответственно примут вид

$$q = \alpha\,\mathrm{e}^{n't}\sin(\beta t + \varphi) \tag{40}$$

при $n' < k$, причем $\beta = \sqrt{k^2 - n'^2}$;

$$q = C_1\,\mathrm{e}^{(n'+\kappa)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(n'-\kappa)t} \tag{41}$$

при $n' > k$, причем $\kappa = \sqrt{n'^2 - k^2}$. Поскольку $\mathrm{e}^{n't}$ является неограниченно возрастающей функцией, выражения (40) и (41) определяют нарастающие колебания (рис. 10) и нарастающее апериодическое движение (рис. 12), соответственно. В первом случае можно говорить об условном периоде в прежнем смысле, а также об *инкременте* колебаний, определяемом как

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \mathrm{e}^{n'T^*},$$

и о логарифмическом инкременте

$$\Lambda' = \ln\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = n'T^*.$$

Фазовые траектории представляют собой раскручивающиеся спирали (рис. 11). Особая точка – неустойчивый фокус.

Во втором случае вновь получаем графики трех типов: кривая *1* соответствует «толчку вперед», кривая *2* – «слабому толчку назад», кривая *3* – «сильному толчку назад». Фазовые траектории представлены на рис. 13. Особая точка – неустойчивый узел.

Критический случай $n' = k$ может быть рассмотрен таким же образом, как это было сделано при положительном сопротивлении, когда $n' = k$.

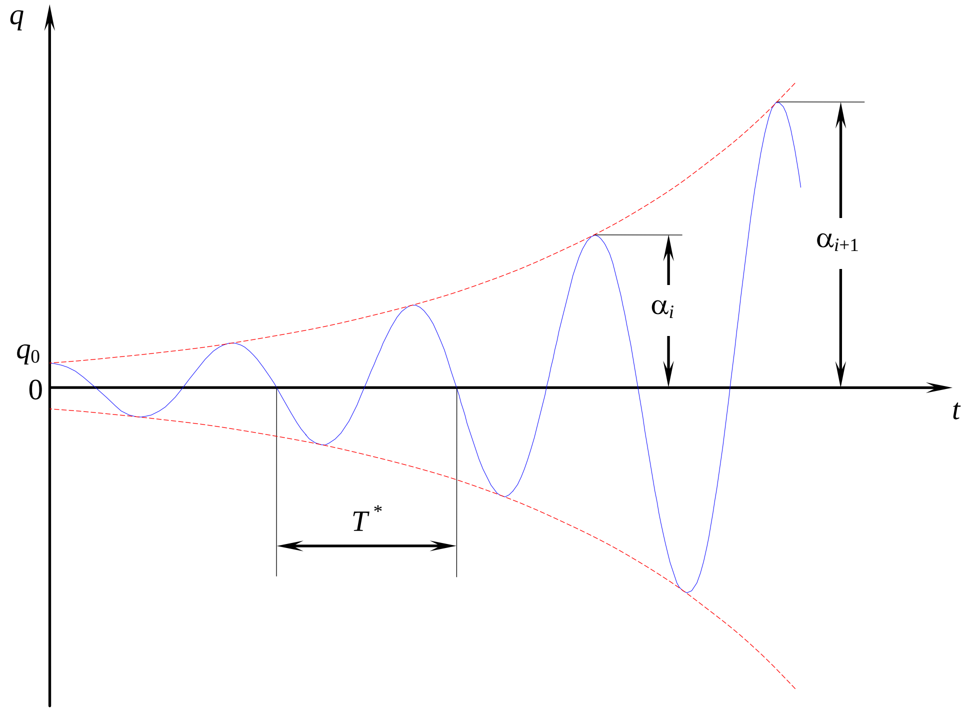


Рис. 10. Нарастающие колебания

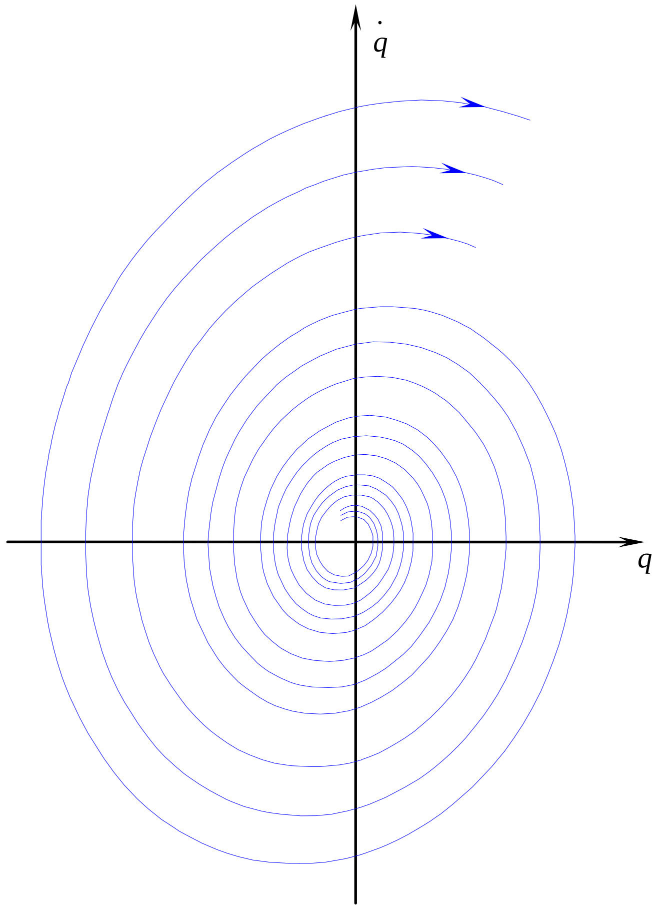


Рис. 11. Фазовые траектории нарастающих колебаний

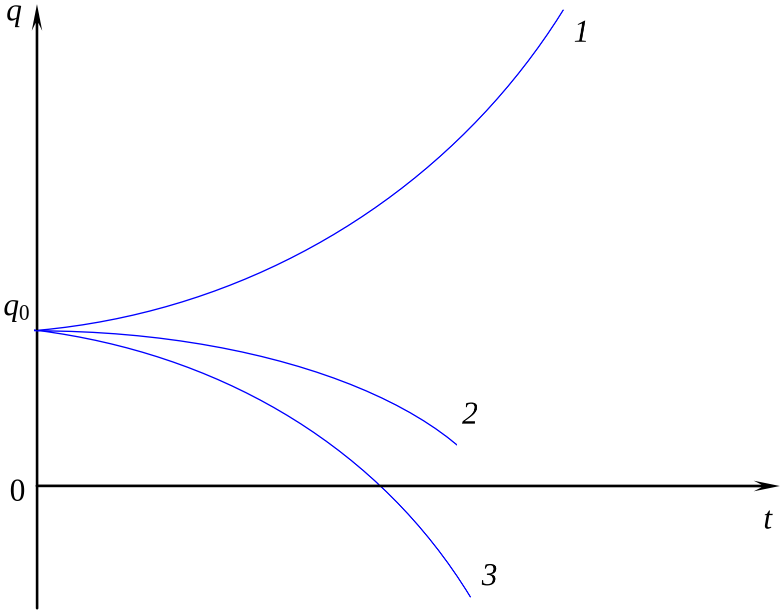


Рис. 12. Нарастающее апериодическое движение

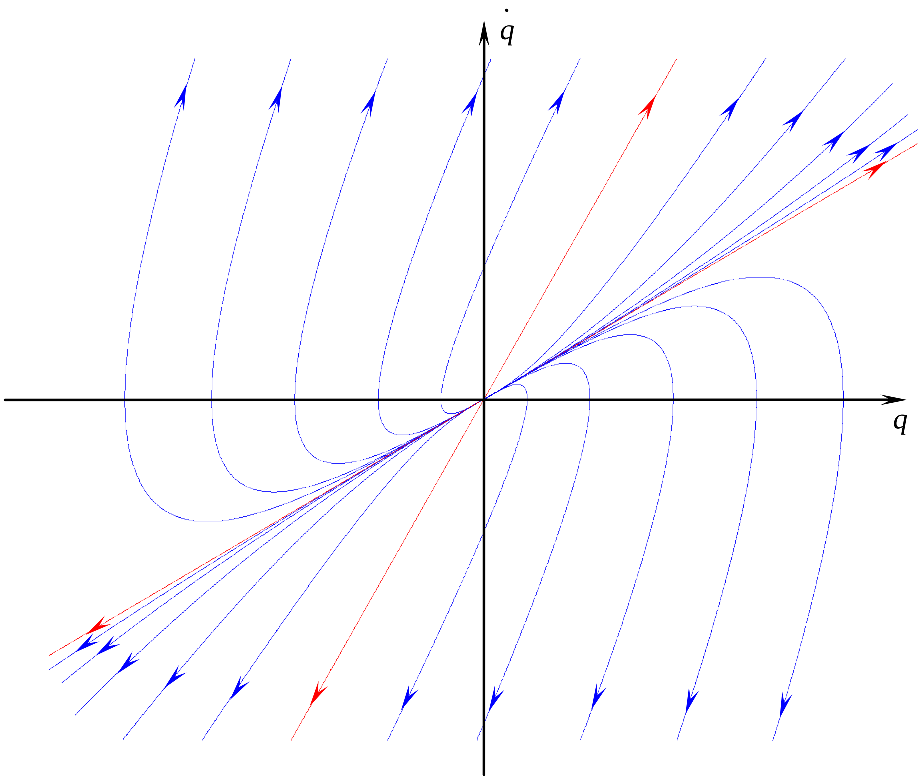


Рис. 13. Фазовые траектории нарастающего апериодического движения

2.5. Задания для самостоятельной работы

2.5.1. Исследование свободных колебаний в системах с одной степенью свободы

Задача 1. Для системы, изображенной на рис. 14, составить дифференциальное уравнение углового колебательного движения массы m, закрепленной на стержне длиной l. Один из концов стержня закреплен с помощью пружины жесткостью c. На расстоянии $l/2$ от точки крепления к стержню присоединен демпфер. Сила сопротивления демпфера прямо пропорциональна скорости движения $\dot{y}$ с коэффициентом демпфирования α, а при статической деформации пружины система находится в горизонтальной плоскости. С использованием пакета Matlab/Simulink [7-9] построить графики зависимости угловой координаты от времени. Начальные условия по угловой координате и скорости приведено в табл. 2.

Задача 2. На абсолютно жестком стержне длиной $2l$ подвешен груз массой m. К середине стержня прикреплены две упругие растяжки-пружины жесткостью c каждая. Груз помещен в сосуд, заполненный вязкой жидкостью. В процессе малых колебаний груза жидкость оказывает демпфирующее влияние на систему. Определить коэффициент вязкого сопротивления движению системы, если период затухающих колебаний системы равен T. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимости угловой координаты и скорости от времени. Определить декремент колебаний. Схема системы изображена на рис. 15.

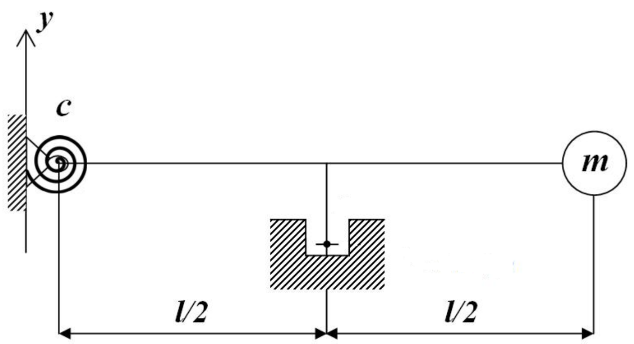


Рис. 14

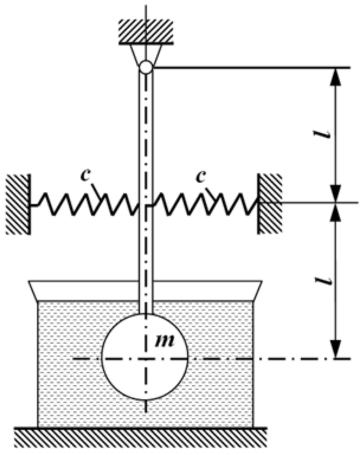


Рис. 15

Задача 3. Прибор, схема которого представлена на рис. 16, представляет собой груз массой m, укрепленный на двух пружинах жесткостью c каждая. Груз находится в трубке, заполненной жидкостью. Составить уравнение колебаний груза, считая, что сопротивление прямо пропорционально скорости движения с коэффициентом α. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимости координаты и скорости от времени, фазовую траекторию движения груза. Определить время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в сто раз. Начальные условия по координатам и скоростям приведены в табл. 2.

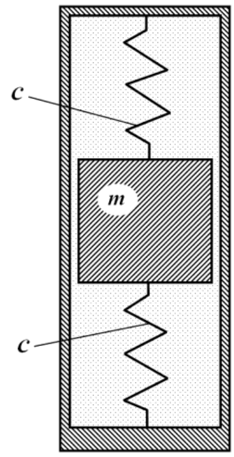


Рис. 16

2.5.2. Исследование свободных колебаний в системах с несколькими степенями свободы

Задача 4. Составить дифференциальные уравнения собственных колебаний системы, изображенной на рис. 17, считая, что моменты инерции шестерен и валиков малы по сравнению с моментами инерции дисков I_1 и I_2. Жесткости валов на кручение соответственно равны c_1 и c_2, а передаточное число зубчатой передачи $u = z_2 / z_1$, где z_2 и z_1 – числа зубьев шестерен. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимостей обобщенных координат от времени.

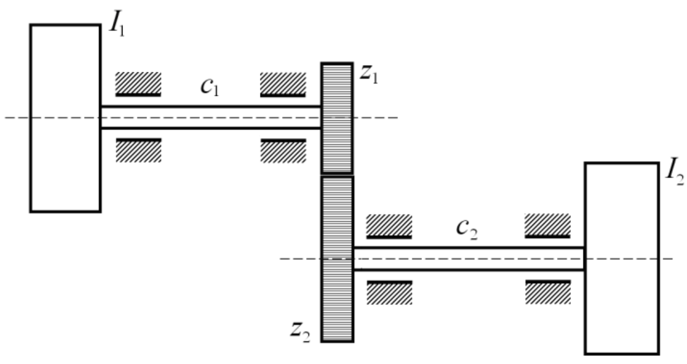


Рис. 17

Задача 5. Судовая двигательная установка, схема которой представлена на рис. 18, состоит из двух одинаковых двигателей, имеющих приведенные к оси вращения моменты инерции I_1 и I_2 вращающихся частей. Двигатели имеют одинаковую скорость вращения и приводят во вращение гребной винт, имеющий момент инерции I_3. Считая, что передаточное число редуктора $u = z_2 / z_1$, где z_2 и z_1 – числа зубьев, жесткости валов равны c_1 и c_2, а также пренебрегая моментами инерции зубчатых колес редуктора, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний системы. Затуханием в системе пренебречь. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени.

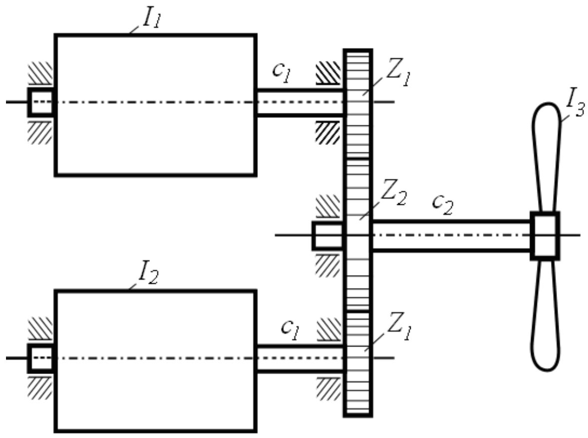


Рис. 18

Задача 6. Корпус автомобиля массой m, изображенного на рис. 19, соединен с колесами рессорами, имеющими жесткость c_1 и c_2. Расстояния от центра массы корпуса до подвесок равны l_1 и l_2. Считая, что момент инерции массы корпуса относительно центральной поперечной оси равен I, и пренебрегая упругостью шин, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний корпуса автомобиля в продольной плоскости. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики изменения обобщенных координат от времени, а также фазовые траектории.

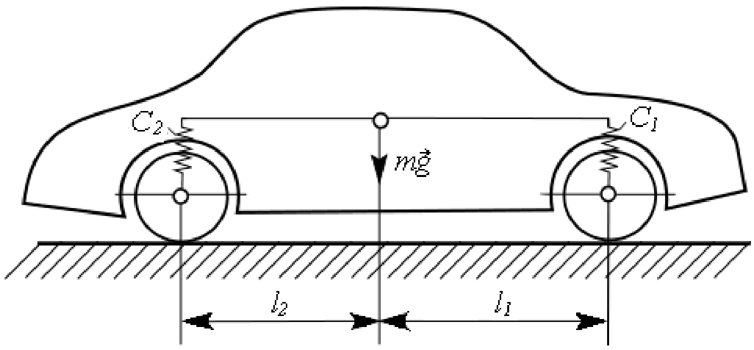


Рис. 19

Параметры систем, представленных в задачах 1 – 6, следует выбирать в соответствии с вариантом задания, указанным в табл. 2. В табл. 1 приведены списки задач для решения по вариантам.

Таблица 1. Список задач для решения по вариантам

Номер варианта	**Номер задачи**
1	1, 4
2	2, 4
3	3, 4
4	2, 5
5	3, 5
6	2, 5
7	3, 6
8	1, 6
9	2, 6
10	3, 4
11	3, 4
12	3, 4
13	1, 5
14	2, 5
15	3, 5
16	1, 6
17	1, 6

Таблица 2. Числовые данные к задачам

Задача 1						
Вариант	m, кг	l, м	c, Н/м	α, Н/м·с	φ_0, ...°	$\dot{\varphi}_0$, ...°/с
1	0,5	1	100	0,25	5	2
8	1	1,5	250	0,5	10	3
13	1,5	2	500	0,5	10	0
16	2	2	500	0,7	0	2
17	2	1,5	450	0,6	7	2
Задача 2						
Вариант	m, кг	l, м	c, Н/м	T, с	φ_0, ...°	$\dot{\varphi}_0$, ...°/с
2	1	0,5	50	1	1	1
4	1,5	0,75	100	1,5	2	2
6	2	1	125	0,5	0	2
9	2,5	1,5	150	1	0	1
14	3	2	100	2	1	0

Задача 3					
Вариант	m, кг	c, Н/м	α, Н/м·с	x_0, см	$\dot{x}_0$, см/с
3	0,5	50	0,5	1	0,5
5	1	70	0,5	1,5	1
7	1,5	100	1	2	1
10	2	120	0,6	2	0
11	2,5	120	0,6	1	0
12	1,5	150	0,3	0	2
15	3	200	0,8	1	2

Задача 4					
Вариант	I_1, кг·м^2	I_2, кг·м^2	c_1, Н·м	c_2, Н·м	u
1	5	5	100	100	2
2	7	7	125	125	3
3	5	7	100	125	2
10	10	10	200	200	2
11	15	15	300	300	3
12	10	15	250	300	2

Задача 5						
Вариант	I_1, кг·м^2	I_2, кг·м^2	I_3, кг·м^2	c_1, Н·м	c_2, Н·м	u
4	5	5	7	100	100	2
5	7	7	5	125	125	3
6	5	7	5	100	125	2
13	10	10	15	200	200	2
14	15	15	10	300	300	3
15	10	15	10	250	300	2

Задача 6						
Вариант	m, кг	c_1, кН/м	c_2, кН/м	l_1, м	l_2, м	I, кг·м^2
7	1500	200	250	1	1,5	300
8	1000	150	200	1	1	250
9	900	125	150	1	1	200
16	2000	300	400	1,5	2	400
17	2500	350	450	1,5	2,5	450

2.6.Контрольные вопросы

1. Что такое квазиупругий коэффициент? Как влияет его знак на характер движения системы?

2. Запишите в общем виде уравнение гармонических колебаний и его решение. Поясните, что такое амплитуда, период, начальная фаза.

3. Что такое фазовая траектория? Какой вид имеют фазовые траектории колебаний с постоянной амплитудой?

4. Охарактеризуйте движение системы в окрестности положения неустойчивого равновесия. Какой вид будут иметь фазовые траектории?

5. Запишите в общем виде линейное уравнение затухающих свободных колебаний. При каком соотношении параметров движение будет колебательным, а при каком – апериодическим? Как будет выглядеть решение уравнения движения в каждом из этих случаев?

6. Перечислите параметры, определяющие скорость затухания (нарастания) колебаний. Как они взаимосвязаны между собой? Что такое условный период затухающих (нарастающих) колебаний?

7. Как называются особые точки на фазовой плоскости в случае гармонических, затухающих (нарастающих) колебаний, апериодического движения?

8. В каком случае вводят понятие «отрицательного» сопротивления? Какие виды движения могут иметь место при «отрицательном» сопротивлении?

9. В чем отличие фазовых траекторий затухающих и нарастающих колебаний? Проиллюстрируйте ответ.

10. Что такое критическое сопротивление? Как изменяется период затухающих колебаний при приближении сопротивления к критическому значению?

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

3.1.Вынужденные колебания в линейных системах при периодическом возмущении. Частотные характеристики

Рассмотренные в предыдущем разделе колебания возникали при наличии ненулевых начальных условий – смещения и скорости. Возникающие при этом движения протекали без участия внешних сил либо же эти силы приводили к затуханию процессов или их нарастанию (потере устойчивости). На практике часто требуется колебания поддерживать, что возможно при периодическом сообщении колебательной системе энергии от внешнего источника. Такие колебания называются вынужденными.

Рассмотрим линейную колебательную систему, к которой приложена внешняя обобщенная сила Q:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q. \qquad (42)$$

Если правая часть уравнения (42) не зависит явно от времени, то система называется *автономной*. Нетрудно убедиться, что фазовые траектории автономных систем не пересекаются, так как в противном случае это привело бы к неопределенности движения при определенных начальных условиях. Если же система не является автономной, то такие пересечения возможны. Поведение автономных линейных систем рассматривалось в предыдущем разделе. При этом если правая часть уравнения (42) ненулевая, но является постоянной величиной, то этот случай легко сводится к рассмотренным выше (с нулевой правой частью) путем замены переменной $\tilde{q} = q - q_{ст}$, где $q_{ст} = Q/c$ – статическое смещение.

Предположим теперь, что Q – периодическая функция времени. Не ограничивая общности, будем считать, что обобщенная сила Q изменяется по гармоническому закону; в противном случае ее можно было бы разложить в ряд Фурье и рассматривать реакцию системы как сумму реакций на каждую из составляющих воздействия (что справедливо, поскольку система линейная). Будем далее полагать

$$Q = Q_m \sin \omega t,$$

где Q_m, ω – соответственно амплитуда и частота воздействия. Поделив обе части уравнения (42) на a и приняв во внимание обозначения (12), (20), запишем

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = u_m \sin \omega t, \qquad (43)$$

где $u_m = Q_m/a$ – приведенная амплитуда внешнего воздействия.

Уравнение (43) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение, как известно, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (свободной составляющей) $q_с$ и частного решения неоднородного уравнения (вынужденной составляющей) q^*:

$q = q_c + q^*$.

В зависимости от соотношения параметров n и k общее решение однородного уравнения будет иметь вид (23), (27) либо (39). При положительном значении n свободное движение будет затухающим, и в установившемся режиме поведение системы будет полностью определяться вынужденной составляющей.

Частное решение уравнения (43) будем искать в виде

$$q = q_m \sin(\omega t - \psi), \tag{44}$$

где q_m – амплитуда, а ψ – сдвиг фазы. Знак «минус» в формуле (44) подчеркивает тот факт, что движение системы запаздывает по фазе относительно возмущающего воздействия. Для определения q_m и ψ продифференцируем два раза (44) и подставим полученные выражения в уравнение (43):

$$\dot{q} = q_m \omega \cos(\omega t - \psi),$$

$$\ddot{q} = -q_m \omega^2 \sin(\omega t - \psi);$$

$$-q_m \omega^2 \sin(\omega t - \psi) + 2nq_m \omega \cos(\omega t - \psi) + k^2 q_m \sin(\omega t - \psi) = u_m \sin \omega t. \tag{45}$$

Преобразуем правую часть полученного выражения:

$$u_m \sin \omega t = u_m \sin(\omega t - \psi + \psi) = u_m \sin(\omega t - \psi)\cos\psi + u_m \cos(\omega t - \psi)\sin\psi.$$

Таким образом, для того, чтобы выражение (45) стало тождеством, т.е. было бы справедливо при любом t, должны выполняться соотношения

$$-q_m \omega^2 + k^2 q_m = u_m \cos\psi,$$

$$2nq_m \omega = u_m \sin\psi.$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно неизвестных q_m и ψ, найдем

$$q_m = \frac{u_m}{\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \tag{46}$$

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, & \omega < k, \\ \pi/2, & \omega = k, \\ \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2n\omega}{\omega^2 - k^2}, & \omega > k. \end{cases} \tag{47}$$

Зависимость

$$A(\omega) = \frac{q_m}{u_m} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \tag{48}$$

носит название *амплитудно-частотной характеристики* (АЧХ) системы, а зависимость $\psi(\omega)$ – *фазо-частотной характеристики* (ФЧХ). Графики АЧХ и ФЧХ при различных значениях коэффициента затухания n показаны на рис. 20 и 21 соответственно.

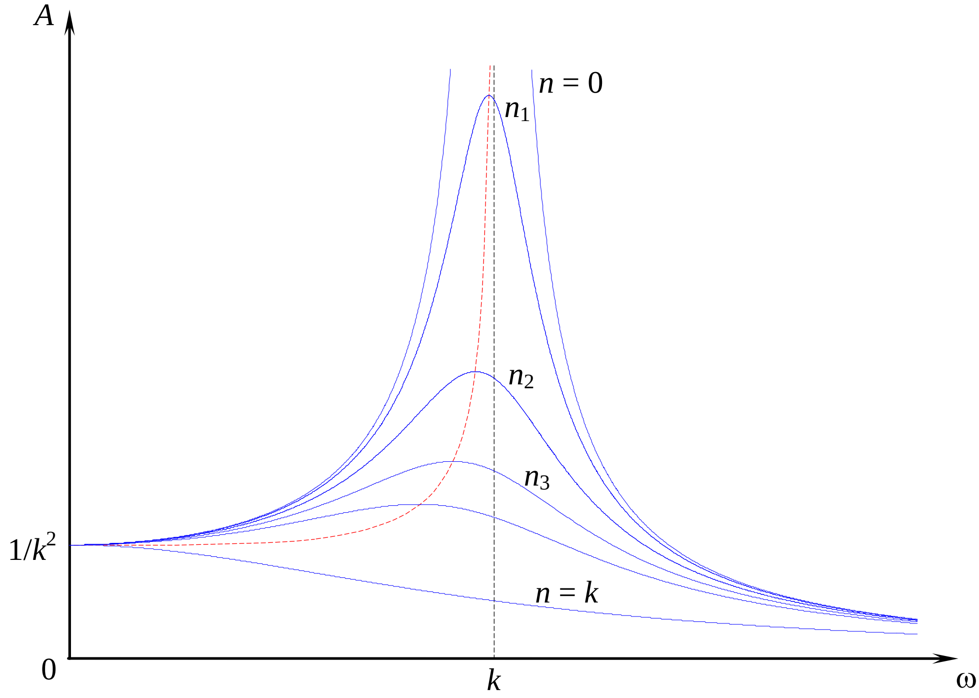


Рис.20. Амплитудно-частотные характеристики колебательной системы
($0 < n_1 < n_2 < n_3 < k$)

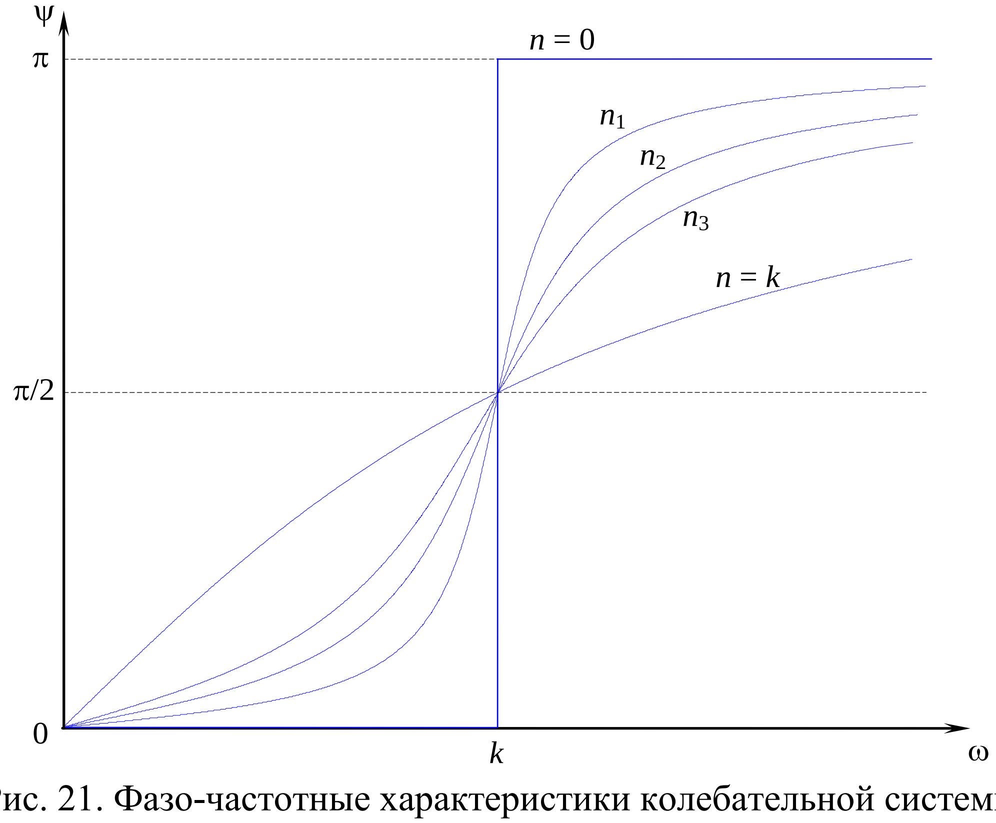


Рис. 21. Фазо-частотные характеристики колебательной системы
($0 < n_1 < n_2 < n_3 < k$)

Можно выделить три характерных диапазона частот:

а) область низких частот ($\omega << k$). Вынужденные колебания синфазны вынуждающей силе ($\psi \approx 0$), их амплитуда $q_m \approx u_m / k^2 = q_{\text{ст}}$;

б) область высоких частот ($\omega >> k$). Вынужденные колебания осуществляются в противофазе с вынуждающей силой ($\psi \approx \pi$) с амплитудой $q_m \approx q_{\text{ст}} (k/\omega)^2$;

в) область *резонанса* ($\omega \approx k$). Амплитуда вынужденных колебаний существенно больше, чем в двух предыдущих случаях, а при $n = 0$ неограниченно возрастает; фаза близка к 90° ($\psi \approx \pi/2$).

При анализе соотношений (46), (47) удобно перейти к безразмерным параметрам, к которым относятся введенный выше безразмерный коэффициент затухания ζ и безразмерная частота $z = \omega/k$. Используя указанные обозначения, получим

$$q_m = k_{\text{д}} q_{\text{ст}}, \tag{49}$$

где

$$k_{\text{д}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\zeta^2 z^2}}, \tag{50}$$

и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\zeta z}{1-z^2}. \tag{51}$$

Здесь $k_{\text{д}}$ представляет собой так называемый *коэффициент динамичности* – это число, на которое нужно умножить статическое смещение для получения амплитуды вынужденных колебаний при неизменности амплитуды вынуждающей силы. Наличие множителя $k_{\text{д}}$ обусловлено инерционными свойствами колебательной системы. Зависимости $k_{\text{д}}(z)$ и $\psi(z)$ фактически представляют собой нормированные АЧХ и ФЧХ.

В зависимости от соотношения частот ω и k процесс установления колебаний протекает по-разному. На рис. 22-24 показаны переходные процессы, соответствующие каждому из трех отмеченных случаев.

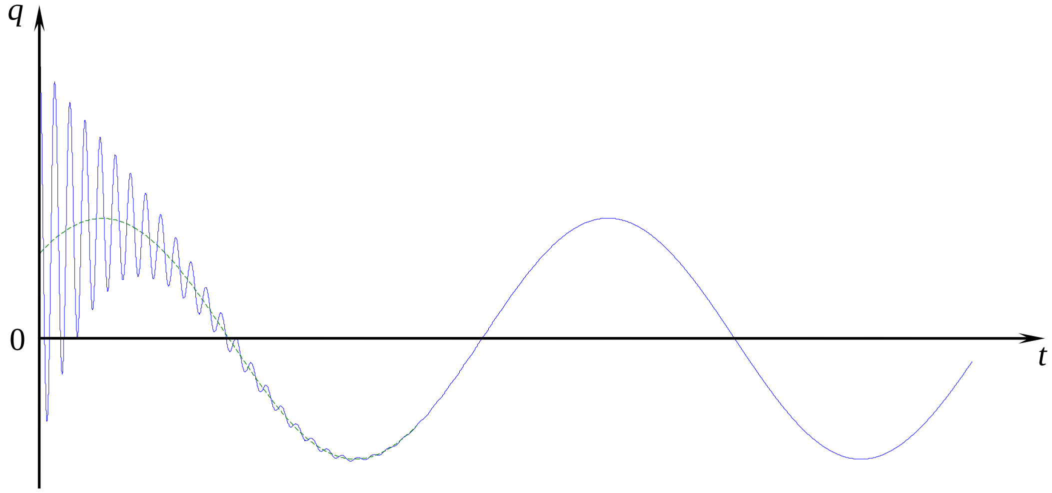


Рис. 22. Процесс установления вынужденных колебаний (ω << *k*)

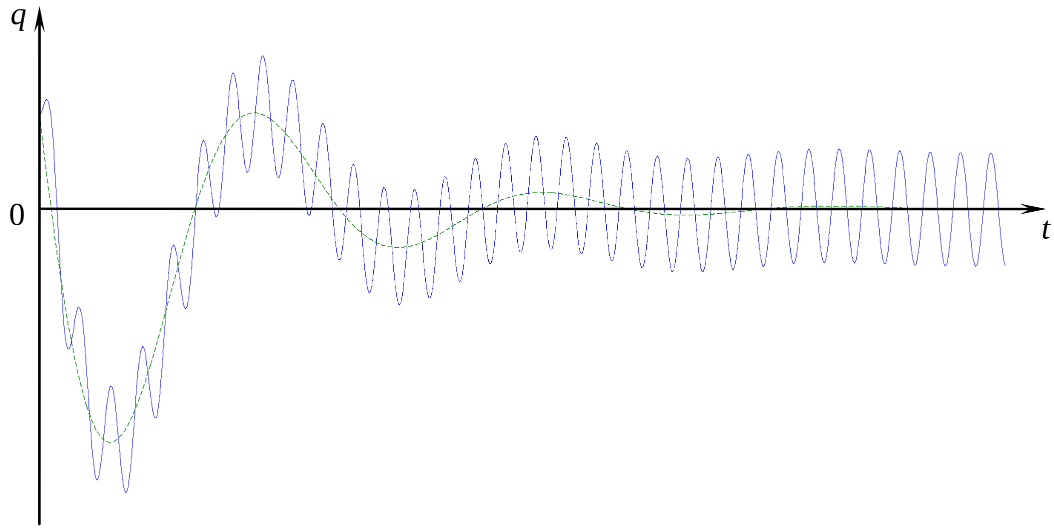


Рис. 23. Процесс установления вынужденных колебаний (ω >> *k*)

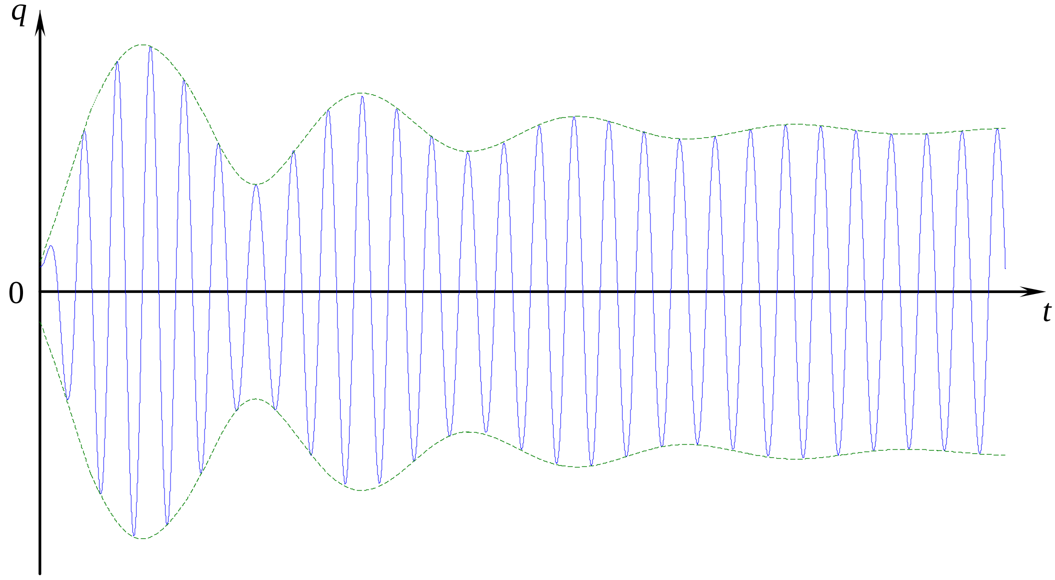


Рис. 24. Процесс установления вынужденных колебаний (ω ≈ *k*)

3.2.Резонанс. Биения

Резонансом называют совпадение одной из частот вынужденных колебаний (т.е. частоты одной из гармоник возмущающей силы) частоте свободных колебаний системы. При малом затухании амплитуда колебаний на частоте резонанса оказывается существенно больше амплитуд остальных гармоник, особенно если идет речь о так называемом резонансе первого порядка, когда частоте свободных колебаний соответствует частота первой (основной) гармоники внешнего воздействия. Резонанс можно объяснить непрерывным поступлением энергии в систему от какого-то возбудителя, когда он действует в такт с колебаниями тела.

Явление резонанса в одинаковой степени типично как для механических, так и для электрических и электромеханических колебательных систем и поэтому играет важную роль в самых разнообразных отделах физики и техники. Характер резонанса зависит от свойств как самой колебательной системы, в которой происходит явление, так и от свойств внешней возмущающей силы, действующей на систему. Особенно сложный характер явление резонанса имеет в системах с распределенными параметрами, когда имеется целый набор собственных частот. Например, в струне резонанс может наступать всякий раз, когда одна из гармоник внешней силы совпадает с одной из собственных частот.

Следует отметить, что амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум не при резонансе, а при некотором другом значении частоты ω (рис. 20, пунктирная кривая). В самом деле, дифференцируя выражение (48) по ω (либо (50) по z) и приравнивая производную нулю, устанавливаем, что максимум достигается при $z = \sqrt{1-2\zeta^2}$, или при

$$\omega_{\text{р}} = \sqrt{k^2 - 2n^2}\,. \qquad (52)$$

Частоту $\omega_{\text{р}}$ иногда называют *резонансной частотой*, хотя она и отличается от частоты k (при малом затухании отличие, как правило, не существенно). С другой стороны, из выражения (52) ясно, что АЧХ имеет максимум только при условии $n < k/\sqrt{2}$, в противном случае о резонансе говорить не приходится. Если $n = 0$, что имеет место при отсутствии сопротивления, то $\omega_{\text{р}} = k$ и $q_m \to \infty$. Это случай, однако, имеет чисто теоретическое значение, поскольку в реальных системах всегда имеет место хотя бы небольшое сопротивление, приостанавливающее рост амплитуд.

Предположим теперь, что ω и k близки, но не совпадают друг с другом. Для простоты будем считать, что сопротивление отсутствует ($n = 0$). Общее решение уравнения (43) будет иметь вид

$$q = A\cos kt + B\sin kt + q_m \sin\omega t\,\mathrm{sign}(k-\omega)\,, \qquad (53)$$

где sign(·) – знак числа (принимает значения ±1).

Отсюда получим

$$\dot{q} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt + q_m\omega\cos\omega t\,\mathrm{sign}(k-\omega). \tag{54}$$

Приравнивая $t = 0$, из (53) и (54) выразим постоянные A и B через начальные условия:

$$A = q_0,$$

$$B = \frac{\dot{q}_0 - q_m\omega\,\mathrm{sign}(k-\omega)}{k}.$$

В результате выражение (53) примет вид

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt - \frac{\omega}{k}q_m\sin kt\,\mathrm{sign}(k-\omega) + q_m\sin\omega t\,\mathrm{sign}(k-\omega) =$$

$$= q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt + \left(\sin\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right)q_m\,\mathrm{sign}(k-\omega).$$

Далее введем обозначение

$$k - \omega = 2\varepsilon,$$

где ε – малая величина. Тогда

$$\omega = k - 2\varepsilon,$$

$$k + \omega = 2(k-\varepsilon),$$

$$k^2 - \omega^2 = 4\varepsilon(k-\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\sin\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt = \sin\omega t - \sin kt + \frac{k-\omega}{k}\sin kt = -2\sin\varepsilon t\cos(k-\varepsilon)t + \frac{2\varepsilon}{k}\sin kt,$$

$$q_m\,\mathrm{sign}(k-\omega) = \frac{u_m\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}{\left|k^2-\omega^2\right|} = \frac{u_m\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}{4|\varepsilon|(k-\varepsilon)} = \frac{u_m}{4\varepsilon(k-\varepsilon)}.$$

Общее решение преобразуется к виду

$$q = q_0\cos kt + \left(\frac{\dot{q}_0}{k} + \frac{u_m}{2k(k-\varepsilon)}\right)\sin kt - \frac{u_m\sin\varepsilon t}{2\varepsilon(k-\varepsilon)}\cos(k-\varepsilon)t.$$

Первые два слагаемых определяют гармоническое колебание с частотой k. Проанализируем последнее слагаемое. Если ε – малая величина, то $\sin\varepsilon t$ изменяется существенно медленнее, чем $\cos(k-\varepsilon)t$. Рассматривая $\dfrac{u_m\sin\varepsilon t}{2\varepsilon(k-\varepsilon)}$ как амплитуду, получим колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Фактически третий член, называемый *секулярным*, или *вековым*, определяет *биения*, круговая частота которых равна $k - \varepsilon$, а период, соответственно,

$$\tau = \frac{2\pi}{k-\varepsilon} = \frac{4\pi}{k+\omega}.$$

Гармонический закон этих колебаний нарушен вследствие изменения, хотя и медленного, самой амплитуды. Половина полного периода колебаний амплитуды

$$\tau_б = \frac{\pi}{|\varepsilon|} = \frac{2\pi}{|k-\omega|}$$

называется периодом биений. Таким образом, колебания, формируемые вековым членом, графически представляются искаженной синусоидой, как показано на рис. 25. При наличии сопротивления биения наблюдаются только в переходном режиме, как показано на рис. 24.

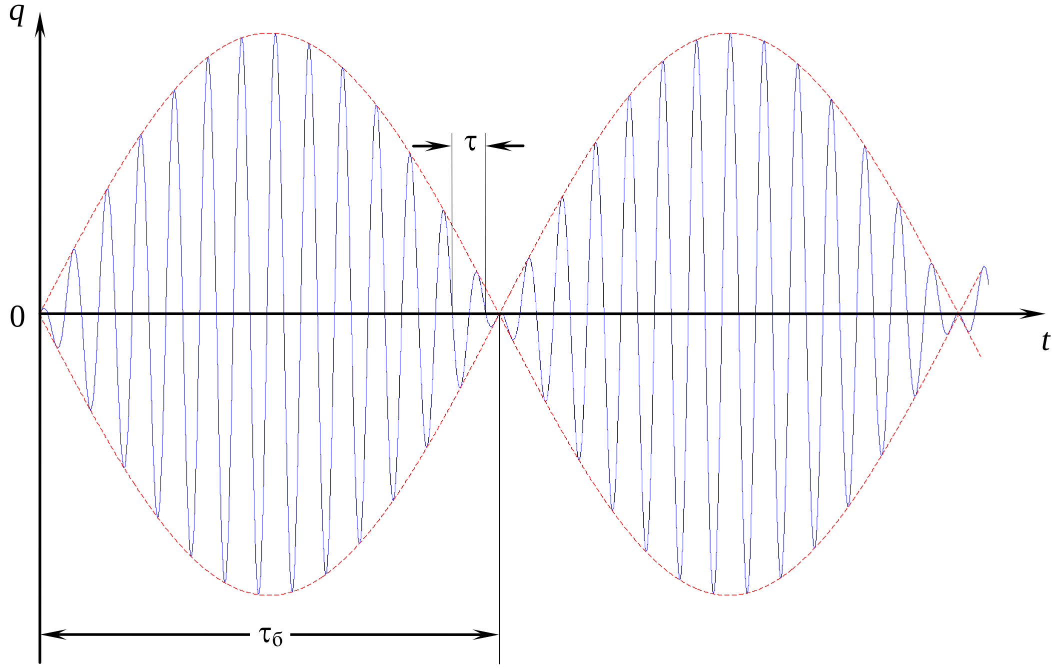


Рис. 25. Биения при отсутствии сопротивления

В предельном случае при $\varepsilon \to 0$ биения переходят в резонанс, при этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u_m \sin \varepsilon t}{2\varepsilon(k-\varepsilon)} = \frac{u_m t}{2k} \underset{t\to\infty}{\to} \infty,$$

то есть амплитуда колебаний здесь неограниченно возрастает. Кроме того, справедливость тождества

$$-\cos kt = \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

свидетельствует о том, что при резонансе сдвиг фаз составляет $\pi/2$.

Практически условия резонанса выполняются при непрерывном изменении частоты ω, например при разгоне или торможении двигателя. При постоянстве ω чаще встречаются биения, которые при большом периоде в течение нескольких размахов близки к резонансу, являющемуся их пределом.

3.3.Параметрические колебания

Рассмотренные ранее случаи возникновения и протекания колебаний характерны тем, что проявляющиеся в процессе движения силы можно было отнести к одной из трех категорий. Во-первых, встречались так называемые позиционные силы, величина которых зависит от положения тела, на которое они действуют. К позиционным силам относится большинство восстанавливающих сил, которые зависят, по большому счету, только от обобщенных координат. Диссипативные силы, как правило, являются однозначными функциями обобщенной скорости; вынуждающие силы были представлены явными функциями времени. Существует, однако, особый класс сил, которые в явном виде зависят от координат и времени одновременно, причем эти силы нельзя представить в виде некой суммы величин отдельно зависящих от координат и отдельных величин, зависящих только от времени. С точки зрения математической модели это приводит к тому, что некоторые параметры в левой части уравнения (42) уже не являются постоянными, а изменяются во времени. В том случае, когда такое изменение происходит по периодическому закону, имеет место *параметрическое* возбуждение колебаний, а линейные системы, в которых происходит это явление, называются *реолинейными* системами. Колебания, происходящие в таких системах, получили название *квазигармонических*, или *параметрических*, колебаний.

Параметрические колебания, как правило, либо происходят с фиксированными амплитудами, либо амплитуды увеличиваются во времени. Вторая ситуация получила название *параметрического резонанса*. Параметрический резонанс имеет необычные свойства и намного опаснее. Эффект параметрического возбуждения колебаний наблюдается только в тех случаях, когда изменение параметра имеет определенную частоту и должным образом фазировано относительно движения системы.

Простейшим примером реолинейной системы могут служить качели. Известно, что для раскачивания качелей человек, стоящий на доске, должен в крайних положениях приседать, а в среднем – вставать. Здесь мы имеем систему, эквивалентную математическому маятнику переменной длины, которая увеличивается в крайних положениях и уменьшается в среднем.

В механических системах параметрические колебания происходят под действием периодических сил, проявляющихся в направлениях, перпендикулярных направлению основного движения. При этом на практике частота изменения параметров, как правило, должна быть ровно в два раза выше частоты возбуждаемых колебаний.

Типичным уравнением параметрических колебаний является *уравнение Хилла*, которое имеет вид

$$\ddot{q} + c(t)q = 0,$$

где $c(t)$ – периодическая функция времени. Это уравнение имеет многочисленные приложения в технике, астрономии, физике частиц и т.д.

Важным вариантом уравнения Хилла является *уравнение Матьё*

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + (\delta + 2\varepsilon\cos 2\tau)q = 0,$$

где δ, ε – постоянные параметры, τ – приведенное (безразмерное) время. К такому виду сводится, к примеру, уравнение малых колебаний маятника с колеблющейся точкой подвеса [4]. В зависимости от значений параметров α, ε рассматриваемая колебательная система может либо совершать колебания с постоянной амплитудой, либо вследствие параметрического резонанса демонстрировать неустойчивое поведение. На рис. 26 приведена *диаграмма Айнса – Стретта*, по которой можно определить, будет ли при заданных параметрах маятник устойчив (области неустойчивости показаны серым цветом). Подобные диаграммы называют иногда *картами устойчивости*.

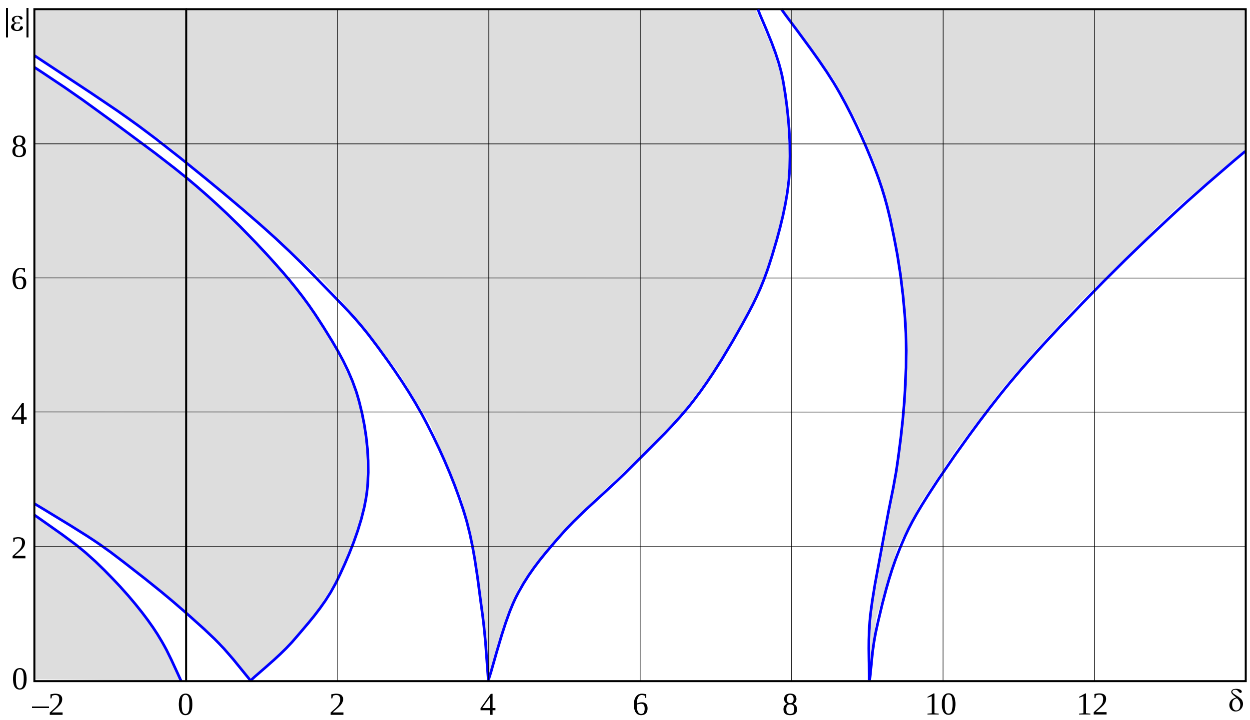


Рис. 26. Диаграмма Айнса – Стретта

3.4. Задание для самостоятельной работы

Задача 1. На рис. 27 приведена схема триммера 1 руля высоты самолета. Величина момента инерции I массы триммера относительно точки подвеса O известна. В экспериментальной установке к триммеру прикрепляют дополнительные пружины 2 и 3 жесткостью c_1 и c_2 соответственно. Определить частоту собственных колебаний триммера, если резонансная частота системы равна $\nu_к$. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимости угловой координаты и скорости триммера от времени. Амплитуду x_0 внешней вынуждающей силы выбрать любую.

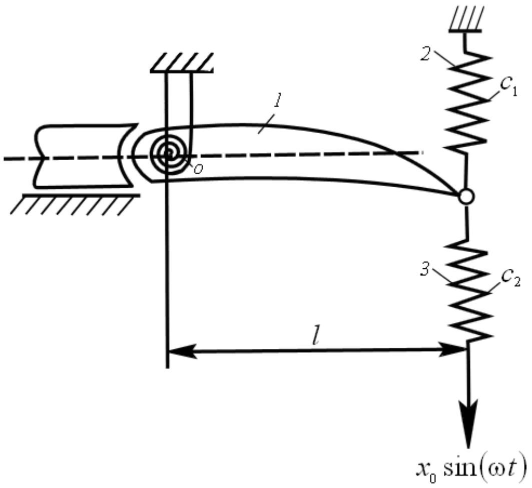


Рис. 27

Задача 2. Для системы, изображенной на рис. 28, составить уравнение малых движений. Здесь P_0 – амплитуда внешней вынуждающей силы; ω – круговая частота внешней вынуждающей силы; m – масса установленного прибора; c – жесткости пружины; l – расстояние от точки подвеса до пружины. С помощью пакета Matlab/Simulink построить графики зависимостей угловой координаты и скорости от времени.

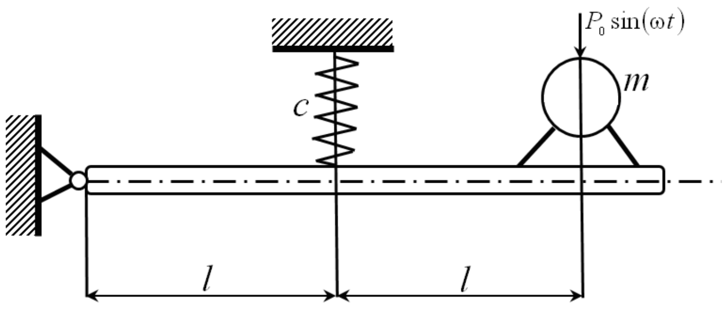


Рис. 28

Задача 3. Предыдущая задача для варианта схемы, изображенной на рис. 29.

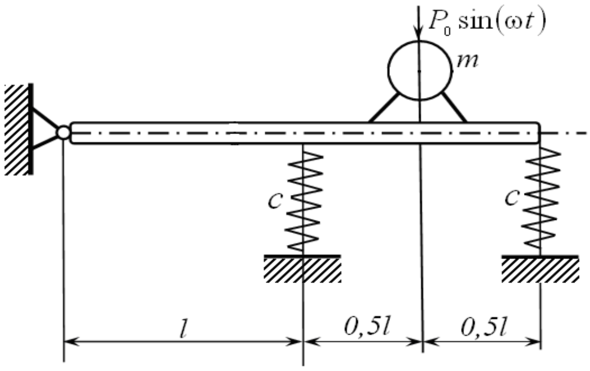


Рис. 29

Параметры систем, представленных в задачах 1 – 3, следует выбирать в соответствии с вариантом задания, указанным в табл. 4. В табл. 3 приведены списки задач для решения по вариантам.

Таблица 3. Список задач для решения по вариантам

Номер варианта	Номера задач
1	1
2	2
3	3
4	1
5	2
6	3
7	1
8	3
9	2
10	3
11	1
12	2
13	2
14	3
15	3
16	1
17	2

Таблица 4. Числовые данные к задачам

Задача 1

Вариант	I, кг·м^2	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\nu_к$, Гц
1	1	50	50	2
4	1,5	50	60	3
7	2	50	70	5
11	2,5	70	80	3
16	3	70	70	5

Задача 2

Вариант	m, кг	c, Н/м	l, м	P_0, Н	ω, рад/с	φ_0, ...°	$\dot{\varphi}_0$, ...°/с
2	2	50	1	1	2π	1	1
5	2,5	50	1,25	1,5	2π	2	1
9	3	70	1,5	2	4π	3	0
12	3,5	100	1,75	3	6π	3	1
13	4	125	2	3	10π	0	2
17	3	50	2,5	2	10π	0	1

Задача 3

Вариант	m, кг	c, Н/м	l, м	P_0, Н	ω, рад/с	φ_0, ...°	$\dot{\varphi}_0$, ...°/с
3	2	50	1	1	2π	1	1
6	2,5	50	1,25	1,5	4π	2	1
8	3	70	1,5	2	4π	3	0
10	3,5	100	1,75	3	6π	3	1
14	4	125	2	3	10π	0	2
15	3	50	2,5	2	10π	0	1

3.5. Контрольные вопросы

1. Какие системы называются автономными? Приведите примеры. Каким свойством обладают фазовые траектории автономных систем?
2. Запишите в общем виде линейное уравнение вынужденных колебаний. Как может быть получено его решение?
3. Поясните, что такое амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики линейной системы. Что такое коэффициент динамичности?
4. Что такое резонанс? Охарактеризуйте поведение АЧХ и ФЧХ в области резонанса. Какой фазовый сдвиг имеют резонансные колебания по отношению к возмущающему воздействию?
5. Как соотносятся между собой частота свободных колебаний линейной системы и резонансная частота? Используется ли понятие резонансной частоты в случае большого или критического сопротивления? Почему?
6. Приведите примеры возникновения резонанса.
7. При каком условии в линейной системе возникают биения? Можно ли назвать такие колебания гармоническими? Почему?
8. Изобразите процесс биений при отсутствии сопротивления. Что такое период биений? Как изменяется амплитуда колебаний при биениях и при резонансе?
9. Что такое параметрические колебания? Как они называются иначе? Приведите примеры реолинейных систем.
10. Что понимают под параметрическим резонансом? Для чего используется диаграмма Айнса – Стретта?

4. КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

4.1.Колебания в консервативных системах

При прежнем рассмотрении различных колебательных систем оговаривалось, что полученные уравнения их движения справедливы только для малых амплитуд колебаний. В большинстве своем это было вызвано тем, что при малых значениях смещений зависимость восстанавливающей (возвращающей) силы сохраняет свою линейность в зависимости от величин перемещений. При определенных для каждой системы значениях смещения линеаризация уравнений движения уже не дает полной картины поведения системы, и колебательная система становится существенно нелинейной.

В зависимости от характера вопроса и свойств системы допустимо пренебрегать изменением энергии колебательной системы на сравнительно небольшом интервале времени рассмотрения ее поведения, то есть привлекать консервативную идеализацию. Такая аппроксимация удобна в смысле большей простоты исследования колебаний при одновременной возможности более глубоко подойти к ряду других вопросов.

Поскольку консервативные системы характеризуются постоянством энергии, имеем

$$K + \Pi = \mathrm{const}. \qquad (55)$$

Кинетическая энергия определяется по формуле

$$K = \frac{1}{2} a\dot{q}^2,$$

а потенциальную энергию будем задавать в виде некоторой функции обобщенной координаты:

$$\Pi = \Pi(q).$$

Для большей общности можно считать коэффициент инерции a также зависящим от координаты (например, приведенная масса или момент инерции кривошипно-шатунного механизма зависят от угла поворота вала машины).

Дифференцируя по времени уравнение энергии (55), получим

$$a\dot{q}\ddot{q} + \dot{q}\Pi'(q) = 0, \qquad (56)$$

Принимая во внимание, что при наличии движения $\dot{q} \neq 0$, выражение (56) можно записать в упрощенном виде:

$$\ddot{q} = f(q), \qquad (57)$$

где $f(q) = -\frac{1}{a}\Pi'(q)$.

Исследуем движение нелинейной консервативной системы с помощью фазовой плоскости. Пусть, как и прежде, $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$. Тогда имеем

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1).$$

Отсюда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1)}{x_2},$$

или, разделяя переменные,

$$\int x_2 dx_2 = \int f(x_1) dx_1.$$

Интегрируя, получим

$$x_2^2 + F(x_1) = C,$$

где $F(q) = -2\int f(q)dq = \frac{2}{a}\Pi(q)$ представляет собой так называемую функцию энергии, пропорциональную потенциальной энергии. Фазовые траектории симметричны относительно оси абсцисс:

$$\dot{q} = \pm\sqrt{C - F(q)},$$

при этом постоянная C очевидным образом выражается через начальные условия:

$$C = \dot{q}_0^2 + F(q_0).$$

Особые точки находятся из условий

$$f(q) = 0, \quad \dot{q} = 0.$$

Изучение фазового портрета удобно осуществить с помощью функции энергии $F(q)$. Построим для некоторой системы кривую энергии и фазовую диаграмму (рис. 30).

На верхнем рисунке проведены горизонтали, соответствующие различным уровням потенциальной энергии. Кривая энергии имеет точку минимума A, точку максимума B и точку перегиба C. Минимуму энергии соответствует на фазовой диаграмме особая точка a – центр, максимуму – особая точка b – седло; наконец, точке перегиба соответствует особая точка c – точка возврата, не встречающаяся в теории линейных систем. Цифрами обозначены уровни энергии и соответствующие им фазовые траектории. Интегральные кривые, проходящие через особые точки, называются *сепаратрисами* или *разделяющими*, поскольку они делят фазовую плоскость на области, в которых структура фазовых траекторий различна. На рис. 30 сепаратрисами являются кривые *1-1′* и *4-4′-4″*.

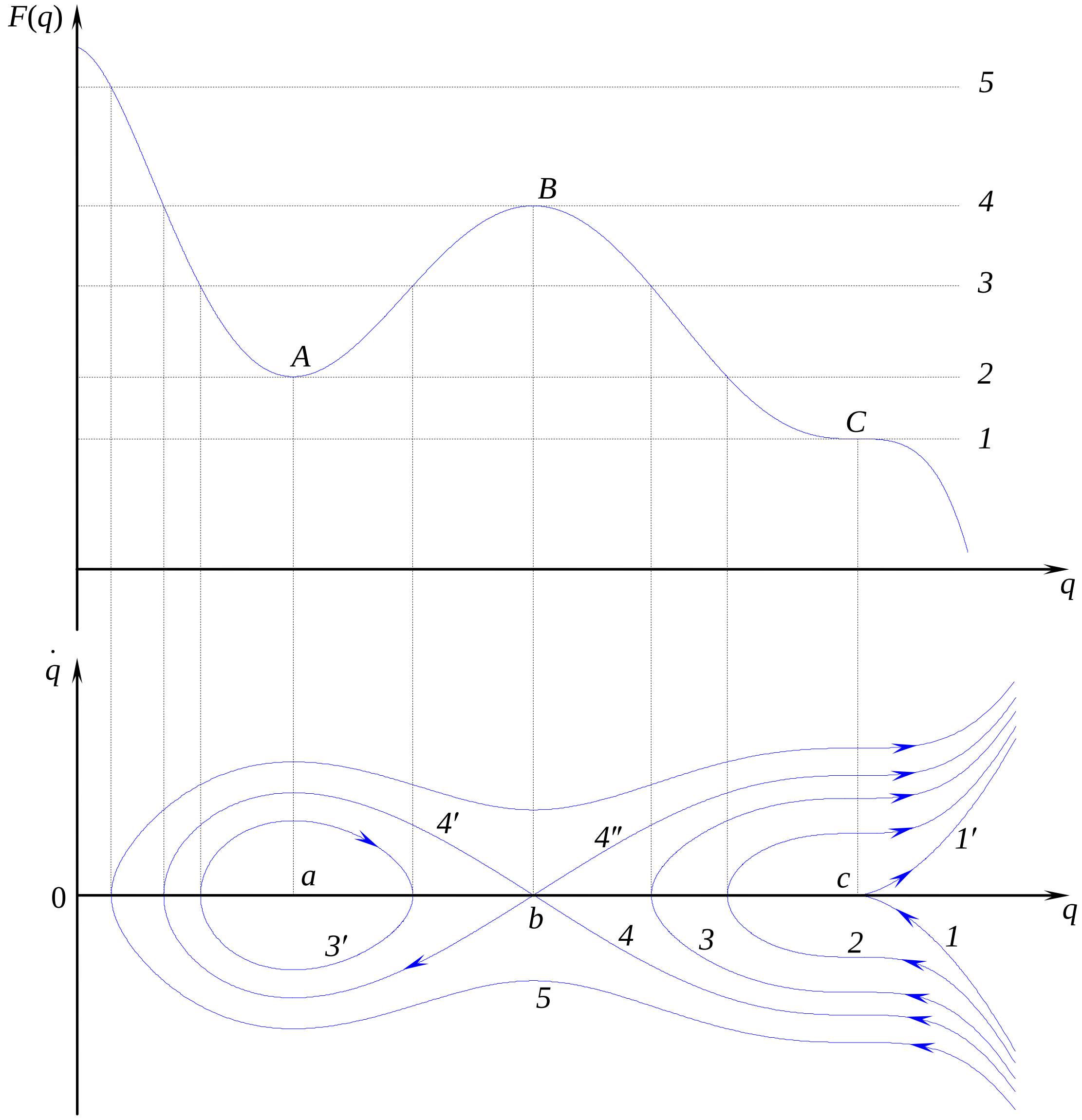


Рис. 30. Кривая энергии и фазовый портрет нелинейной консервативной системы

Движение называется *вибрационным,* если соответствующая фазовая траектория, не имея в себе особых точек, замкнута вокруг центра (кривая *3′*). В этом случае имеют место незатухающие колебания. Движение называется *лимитационным,* если изображающая точка асимптотически стремится к особой точке (кривые *1*, *4* и *4′*). Движение называется *инфинитным*, или *убегающим,* если изображающая точка уходит в бесконечность (кривые *1′*, *2*, *3*, *4″* и *5*). Наконец, движение называется *ротационным,* если фазовая траектория является периодической относительно оси q кривой (на рис. 30 не представлено). Характерным примером ротационного движения является вращательное движение маятника вокруг точки подвеса.

4.2. Колебания в диссипативных системах

Диссипативные системы характеризуются рассеянием энергии за счет сопротивлений, что при отсутствии поступления энергии извне вызывает затухание колебательного процесса. В механических колебательных системах часто проявляются силы *сухого* (*кулоновского*) *трения*, которые с достаточной для практики точностью можно считать постоянными по модулю. Характерным примером такой системы является пружинный маятник, совершающий движения на шероховатой горизонтальной плоскости в соответствии с уравнением

$$m\ddot{x} + cx = -fmg\,\mathrm{sign}\,\dot{x}. \tag{58}$$

Здесь m – масса прикрепленного к пружине груза, x – смещение груза относительно положения равновесия, c – коэффициент жесткости пружины, g – ускорение силы тяжести, f – коэффициент трения при движении, причем $f \le f_0$, где f_0 – коэффициент трения при покое.

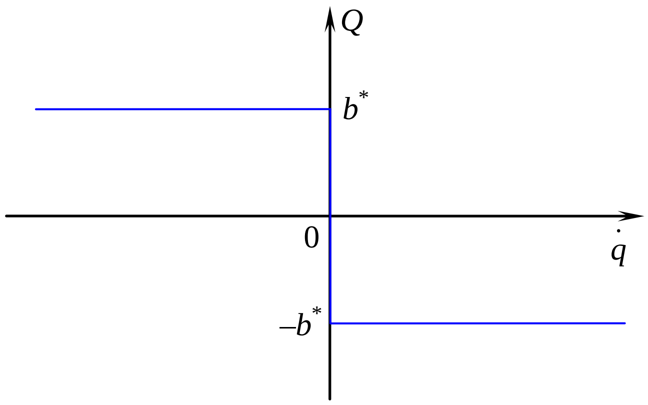


Рис. 31. Характеристика сухого трения

Система с сухим трением является принципиально нелинейной. В самом деле, характеристика сухого трения имеет вид, представленный на рис. 31, где линеаризация, то есть замена ступенчатой характеристики прямой, проходящей через начало координат, является слишком грубым приближением, существенно искажающим картину движения. При рассмотрении влияния сухого трения на свободные колебания в ряде случаев (например, в гироскопических приборах) имеют дело не с силой трения, а с моментом трения. В этом случае независимой переменной в уравнении (58) является не перемещение, а угол поворота. Дальнейшие рассуждения будем вести для общего случая свободных колебаний, перейдя к обобщенной координате q и обобщенной силе трения. Дифференциальное уравнение, описывающее изменение обобщенной координаты, будет иметь вид

$$a\ddot{q} + cq = -b^{*}\,\mathrm{sign}\,\dot{q}, \tag{59}$$

где b^* – абсолютная величина обобщенной силы трения при движении. Величина $r = b^*/c$ будет представлять собой отклонение системы от положения равновесия под действием обобщенной силы, равной силе трения движения. Введем также абсолютную величину обобщенной силы трения покоя b_0^*. Тогда величина $r_0 = b_0^*/c$ будет характеризовать так называемую *область застоя,* т.е. такую область значений координаты q по каждую сторону от положения $q = 0$, в которой система должна оставаться в покое, если она до этого имела нулевую скорость.

Учитывая принятые обозначения, уравнение (59) может быть записано в виде

$$\ddot{q} + k^2(q + r\,\mathrm{sign}\,\dot{q}) = 0. \qquad (60)$$

Пусть начальные условия таковы, что $q_0 > r$, $\dot{q}_0 = 0$. На первом интервале движения, очевидно, $\dot{q} < 0$ и уравнение (60) принимает вид

$$\ddot{q} + k^2(q - r) = 0. \qquad (61)$$

Уравнение (61) имеет общее решение

$$q = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + r. \qquad (62)$$

Отсюда

$$\dot{q} = kA_1 \sin kt - kB_1 \cos kt.$$

В соответствии с начальными условиями находим

$$A_1 = q_0 - r,\ B_1 = 0,$$

и выражение (62) приобретает вид

$$q = (q_0 - r)\cos kt + r.$$

Конечная точка первого интервала t_1 должна удовлетворять условию $\dot{q}(t_1) = 0$, поэтому $kt_1 = \pi$, соответствующая этому моменту времени обобщенная координата

$$q_1 = q(t_1) = -q_0 + 2r.$$

Конечные значения $q_1 = q(t_1)$, $\dot{q}_1 = \dot{q}(t_1) = 0$ можно интерпретировать как начальные условия для второго интервала, на котором $\dot{q} > 0$. Уравнение (60) принимает вид

$$\ddot{q} + k^2(q + r) = 0. \qquad (63)$$

Общее решение уравнения (63)

$$q = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt - r, \qquad (64)$$

где в соответствии с начальными условиями для второго интервала

$$A_2 = q_0 - 3r,\ B_2 = 0;$$

$$q = (q_0 - 3r)\cos kt - r.$$

В конце интервала $\dot{q}(t_2) = 0$, следовательно, $kt_2 = 2\pi$;

$$q_2 = q(t_2) = q_0 - 4r.$$

Нетрудно видеть, что последовательность отклонений (амплитуд колебаний) может быть представлена как

$$q_n = (-1)^n (q_0 - 2nr).$$

Пока происходят колебания, знаки отклонений должны чередоваться. Движение прекращается тогда, когда сила трения покоя будет больше или равна восстанавливающей силе, что эквивалентно условию

$$|q_n| \le r_0 < |q_{n-1}|, \tag{65}$$

или

$$q_0 - 2nr \le r_0 < q_0 - 2(n-1)r. \tag{66}$$

Заметим, что левая часть (66) может оказаться и отрицательной, что не противоречит неравенству (65) (в этом случае два последовательных отклонения будут иметь один и тот же знак, и движение прекращается, так как восстанавливающая сила не в состоянии даже перевести систему через положение равновесия).

Из (66) можно найти число интервалов движения (что соответствует удвоенному числу совершенных колебаний) до прекращения движения. Добавив ко всем частям (66) $2nr - r_0$ и поделив все части на $2r$, получим

$$\frac{q_0 - r_0}{2r} \le n < \frac{q_0 - r_0}{2r} + 1. \tag{67}$$

Отсюда можно найти искомое целое n. Иногда для упрощения принимают $f = f_0$; тогда неравенство (67) может быть записано как

$$\frac{q_0}{2r} - \frac{1}{2} \le n < \frac{q_0}{2r} + \frac{1}{2}. \tag{68}$$

На графике колебаний (рис. 32) полоса шириной $2r$ есть область застоя. На каждом интервале времени между двумя последующими остановками движение происходит по гармоническому закону с одним и тем же периодом $T = 2\pi/k$ (но с чередующимися по знаку смещениями), следовательно, сухое трение не влияет на период колебаний. Фазовая траектория таких колебаний (рис. 33) будет представлять собой последовательность сопряженных друг с другом полуэллипсов, центры которых находятся в точках с координатами $(r, 0)$ и $(-r, 0)$.

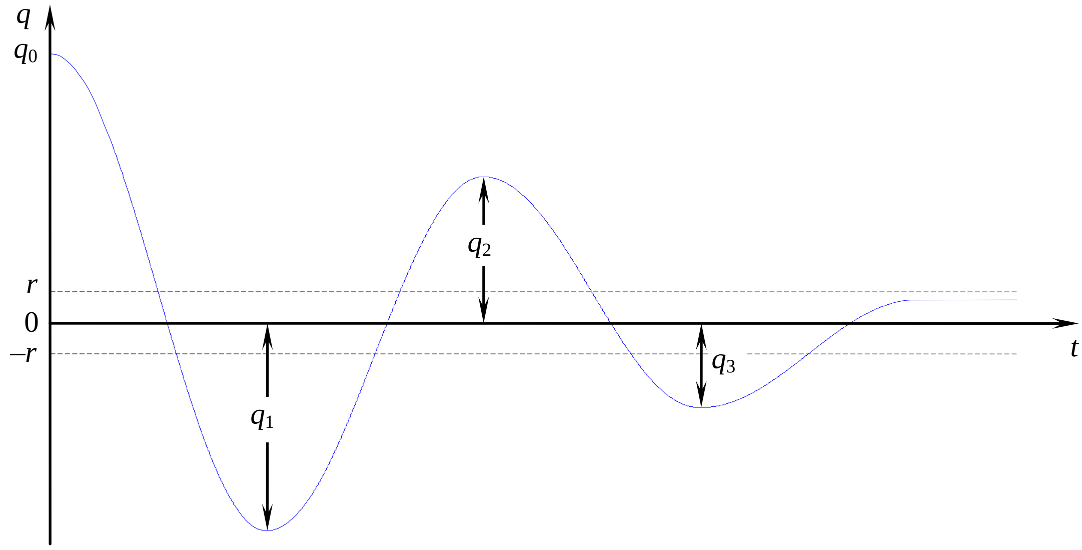


Рис. 32. Затухающие колебания в системе с сухим трением

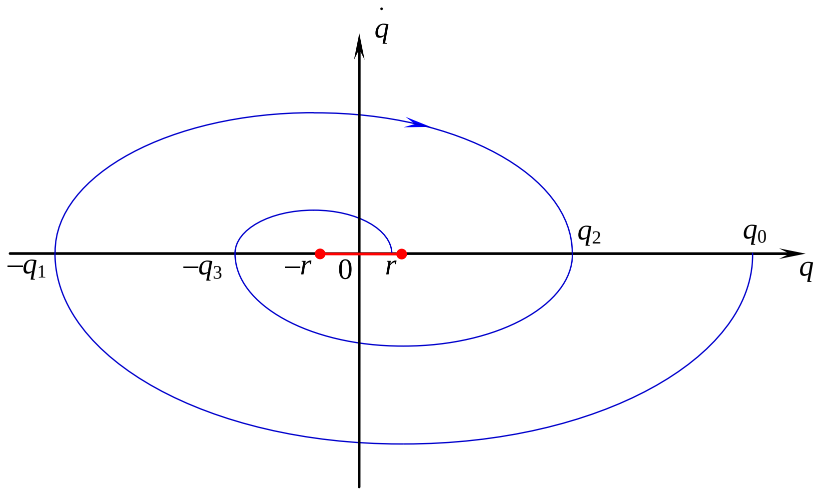


Рис. 33. Фазовая траектория колебаний в системе с сухим трением

Другим характерным примером колебаний в диссипативных системах является случай *квадратичного сопротивления*. Дифференциальное уравнения движения имеет здесь вид

$$a\ddot{q} + cq = -b^{**}\dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q}. \tag{69}$$

Обозначив $\beta = b^{**}/a$, уравнение (69) можно записать в виде

$$\ddot{q} + \beta \dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q} + k^2 q = 0. \tag{70}$$

Не останавливаясь на решении этого уравнения, которое в конечном счете не может быть выражено элементарными функциями [2], заметим, что здесь, в отличие от предыдущего случая, отсутствует зона застоя; начало координат является особой точкой – устойчивым фокусом (рис. 34). Характерно также, что по мере приближения к особой точке скорость убывания амплитуд колебаний резко уменьшается, в то время как в системах с сухим трением она постоянная (амплитуды образуют арифметическую прогрессию), а в системах с вязким трением (линейным сопротивлением) постоянно отношение между двумя соседними амплитудами (амплитуды образуют геометрическую прогрессию).

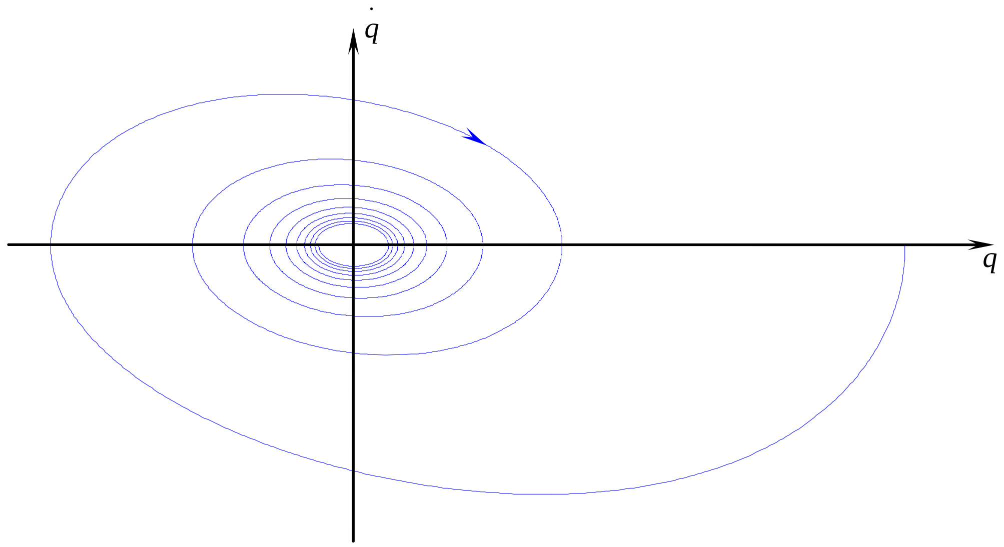


Рис. 34. Фазовая траектория колебаний в системе с квадратичным сопротивлением

4.3. Автоколебания

Нарушение консервативности системы возможно не только за счет рассеяния энергии, но и за счет ее поступления. Примером системы с притоком энергии может служить колебательная система, совершающая вынужденные колебания, обусловленные возмущающей силой, явно зависящей от времени. Однако поглощение системой энергии из какого-то внешнего источника может иметь место и при отсутствии его колебательных свойств и быть обусловлен нелинейной структурой самой системы. Иначе говоря, автономная колебательная система, получая энергию из внешнего источника, сама управляет поступлением энергии. Такое состояние системы, при котором она способна при некоторых начальных отклонениях начать отбирать энергию для своего последующего движения, называется *самовозбуждением*, а ее колебания, устанавливающиеся при балансе поступающей и рассеиваемой энергии, называются *автоколебаниями*. Система, совершающая автоколебания, называется автоколебательной системой.

Автоколебательные системы чрезвычайно распространены [2, 4, 5, 6]. Таковыми, например, являются смычковые музыкальные инструменты. При движении смычок за счет силы трения увлекает струну в сторону своего перемещения. Возрастающая сила упругости приводит при некотором отклонении струны к ее срыву со смычка и к движению в обратном направлении. При этом сила трения становится меньше, чем при покое. После наибольшего отклонения струна снова начинает двигаться в сторону смычка, который в какой-то момент времени опять захватывает ее, и процесс повторяется. Аналогичные явления происходят в тормозных колодках, которые порождают своеобразный скрип, при снятии стружки режущим инструментом, когда автоколебания обусловливают волнистость стружки. В часах с маятником, которые также являются автоколебательной системой, имеет место такое явление: для того, чтобы часы «пошли», необходимо отклонить маятник на некоторый определенный угол; после этого амплитуда колебаний устанавливается сама собой. Такое возбуждение, когда существует порог начального отклонения для порождения автоколебаний, называется *жестким*, в отличие от *мягкого*, когда сколь угодно малое начальное отклонение порождает автоколебания. В часах маятник или баланс отбирает порциями энергию от гирь или от пружины для поддержания колебательного процесса [4]. Характерным примером системы с мягким возбуждением является электрогенератор [2].

Амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий и определяется исключительно параметрами системы. Ранее было показано, что в автономной линейной колебательной системе возможен периодический процесс лишь в случае ее консервативности; при этом амплитуда колебаний определяется начальными условиями. Таким образом, автоколебательные процессы присущи только нелинейным системам.

Для большей наглядности рассмотрим энергетические соотношения в колебательных системах. Нетрудно убедиться, что в линейном случае (как при рассеянии, так и при поглощении энергии) имеет место квадратичная зависимость энергии от амплитуды. Таким образом, если на систему действуют две силы, пропорциональные скорости, графики рассеиваемой
$E_{-}(\alpha)$ и поглощаемой $E_{+}(\alpha)$ энергии будут представлять собой две параболы, не имеющие точек пересечения (рис. 35), вследствие чего система будет неограниченно раскачиваться (при $E_{+} > E_{-}$) либо асимптотически затухать (при $E_{-} > E_{+}$). Следовательно, для установления автоколебаний как минимум одна из этих сил должна быть нелинейной.

На рис. 36 представлена диаграмма энергии при нелинейной ускоряющей силе. Точки пересечения α_1 и α_2 кривых E_{-} и E_{+} соответствуют балансу энергии и определяют амплитуды автоколебаний. При этом можно заметить, что если $0 < \alpha < \alpha_1$, то расход энергии превышает приток и система стремится к состоянию покоя; при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ приток превышает расход, колебания нарастают, но только до $\alpha = \alpha_2$, так как при $\alpha > \alpha_2$ расход снова превышает приток и амплитуда уменьшается. Таким образом, автоколебания с амплитудой α_1 оказываются неустойчивыми, а с амплитудой α_2 – устойчивыми. Соответственно, здесь имеет место случай жесткого возбуждения.

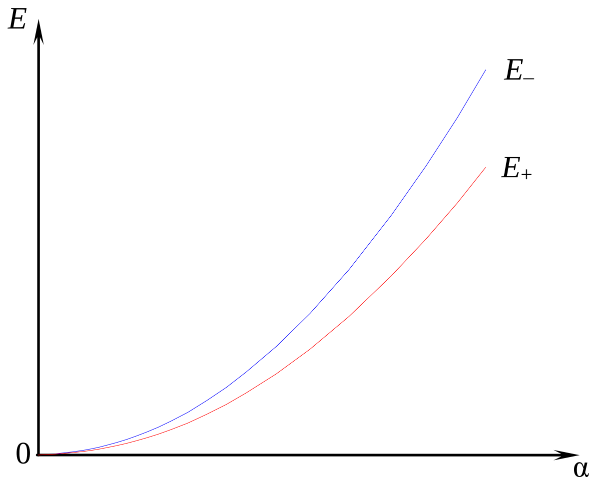


Рис. 35. Диаграмма энергии линейной системы

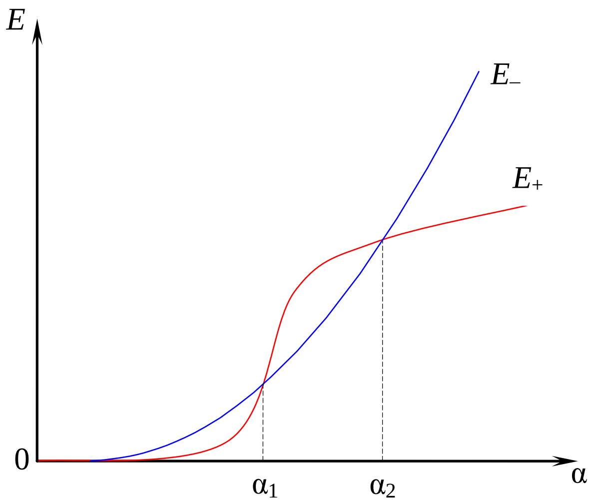


Рис. 36. Диаграмма энергии системы с жестким возбуждением

Поскольку автоколебательный процесс соответствует периодическому решению дифференциального уравнения движения, он должен отображаться на фазовой плоскости замкнутой кривой, охватывающей положение равновесия. Такая кривая получила название *предельного цикла*. Так как фазовые траектории не могут пересекаться, то траектории, не являющиеся предельными циклами, должны представлять собой кривые, асимптотически приближающиеся к предельным циклам либо сходящие с них. На рис. 37 изображена фазовая диаграмма движения для случая, соответствующего рис. 36. В данном случае особая точка – устойчивый фокус.

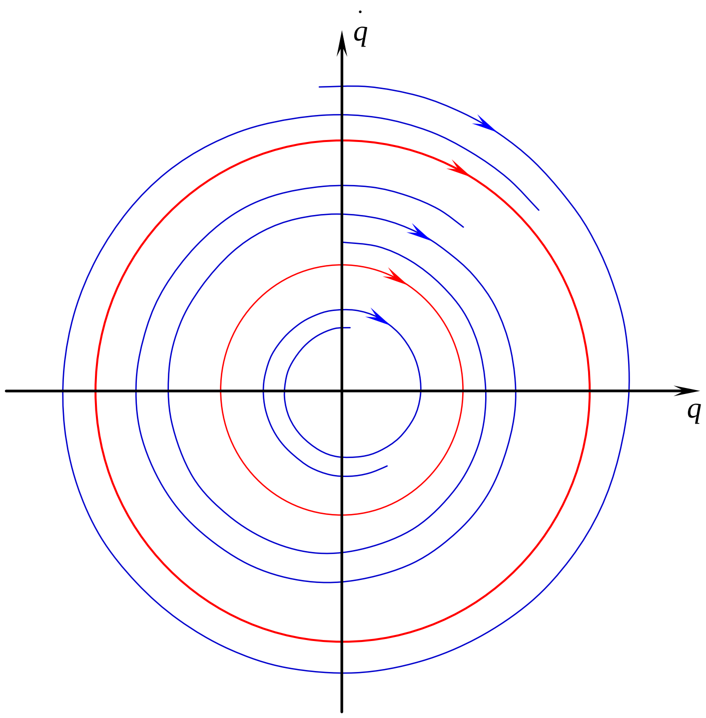


Рис. 37. Фазовый портрет с двумя предельными циклами

Автоколебания, близкие к гармоническим колебаниям, порождаются так называемыми *квазилинейными* системами, мало отличающимися от линейных. В системах с ярко выраженной нелинейностью возникают релаксационные колебания, близкие к разрывным. График релаксационных колебаний имеет вид пилообразной кривой. Таковы, например, колебания струны в музыкальном смычковом инструменте. Разрывные колебания с математической стороны характеризуются тем, что на различных интервалах они описываются различными уравнениями, решение которых приходится «сшивать» («припасовывать»), как это делалось в случае свободных колебаний с сухим трением.

Для аналитического исследования автоколебаний в квазилинейных системах может быть использован так называемый *метод осреднения*, рассматриваемый далее. Пусть система описывается квазилинейным уравнением

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \mu f(q, \dot{q}), \qquad (71)$$

где f – некоторая заданная функция, а μ – малая величина, показывающая отклонение системы от линейной. При $\mu = 0$ система обращается в линейную, и уравнение (71) имеет очевидное решение

$$q = \alpha \sin(\omega t + \varphi), \qquad (72)$$

где α и φ – постоянные.

Будем далее искать решение исходного нелинейного уравнения (71) в форме (72), предполагая, что α и φ – переменные, медленноменяющиеся параметры. Находим производную (72):

$$\dot{q} = \dot{\alpha}\sin(\omega t + \varphi) + \alpha\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) + \alpha\omega\cos(\omega t + \varphi). \qquad (73)$$

Установим взаимосвязь между α и φ такую, что

$$\dot{\alpha}\sin(\omega t + \varphi) + \alpha\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) = 0. \qquad (74)$$

Тогда (73) примет вид

$$\dot{q} = \alpha\omega\cos(\omega t + \varphi), \qquad (75)$$

откуда

$$\ddot{q} = \dot{\alpha}\omega\cos(\omega t + \varphi) - \alpha\dot{\varphi}\omega\sin(\omega t + \varphi) - \alpha\omega^2\sin(\omega t + \varphi). \qquad (76)$$

Подставляя (72) и (76) в (71), получим

$$\dot{\alpha}\omega\cos(\omega t + \varphi) - \alpha\dot{\varphi}\omega\sin(\omega t + \varphi) = \mu f(q, \dot{q}). \qquad (77)$$

Введем в рассмотрение полную фазу

$$\psi = \omega t + \varphi \qquad (78)$$

и перепишем с учетом данного обозначения уравнения (74) и (77):

$$\dot{\alpha}\sin\psi + \alpha\dot{\varphi}\cos\psi = 0, \qquad (79)$$

$$\dot{\alpha}\cos\psi - \alpha\dot{\varphi}\sin\psi = \frac{\mu}{\omega} f(\alpha\sin\psi, \alpha\omega\cos\psi). \qquad (80)$$

Уравнения (79) и (80) можно рассматривать совместно как систему линейных уравнений относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varphi}$. Решение этой системы будет иметь вид

$$\dot{\alpha} = \frac{\mu}{\omega} f(\alpha\sin\psi, \alpha\omega\cos\psi)\cos\psi, \qquad (81)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\mu}{\alpha\omega} f(\alpha\sin\psi, \alpha\omega\cos\psi)\sin\psi. \qquad (82)$$

Принимая во внимание медленное изменение α и φ, можно приближенно считать, что искомые производные могут быть найдены осреднением (81) и (82) на одном периоде. Принимая также во внимание соотношение (78), запишем

$$\dot{\alpha} \cong \frac{\mu}{\omega}\Phi(\alpha), \qquad (83)$$

$$\dot{\psi} \cong \omega + \frac{\mu}{\alpha\omega}\Psi(\alpha), \qquad (84)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\sin\psi, \alpha\omega\cos\psi)\cos\psi d\psi, \qquad (85)$$

$$\Psi(\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\sin\psi, \alpha\omega\cos\psi)\sin\psi d\psi. \qquad (86)$$

Уравнение (83) дает закон изменения амплитуды во времени, а уравнение (84) – поправку на частоту, которой является второе слагаемое в правой части. Предельные циклы наблюдаются в тех случаях, когда $\dot{\alpha} = 0$, то есть тогда, когда уравнение

$$\Phi(\alpha) = 0 \qquad (87)$$

имеет положительные корни.

Устойчивость предельного цикла можно оценить с помощью так называемого *метода возмущений*. Пусть

$$\alpha = \alpha_j + \xi,$$

где α_j – корень уравнения (87), ξ – малая величина. Разложим $\Phi(\alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки α_j, ограничившись линейным приближением:

$$\Phi(\alpha) \cong \Phi(\alpha_j) + (\alpha - \alpha_j)\Phi'(\alpha_j) = \xi\Phi'(\alpha_j).$$

Будем считать ξ независимой переменной. Уравнение (83) в окрестности предельного цикла примет вид

$$\dot{\xi} = \frac{\mu}{\omega}\Phi'(\alpha_j)\xi. \qquad (88)$$

Уравнение (88) имеет решение

$$\xi = e^{\mu/\omega \cdot \Phi'(\alpha_j)t}. \qquad (89)$$

Отсюда следует, что предельный цикл устойчив, если μ и $\Phi'(\alpha_j)$ имеют разные знаки, и неустойчив, если их знаки совпадают.

4.4.Задание для самостоятельной работы

Определите аналитически амплитуду автоколебаний в квазилинейной системе, заданной уравнением (71) в безразмерном времени ($\omega \equiv 1$), где функция f задается в соответствии с табл. 5. Определите, при каких значениях параметра μ предельный цикл будет устойчивым. Подтвердите правильность расчетов путем моделирования в пакете Matlab/Simulink. Пример выполнения задания приведен в Приложении.

Таблица 5. Варианты заданий

Вар.	$f(q,\dot{q})$
1	$(1-q^4)\dot{q}$
2	$(1-\dot{q}^4)\dot{q}$
3	$(1-\lvert q\rvert)\dot{q}$
4	$(1-\lvert\dot{q}\rvert)\dot{q}$
5	$(1-\dot{q}^2)\dot{q}$
6	$(1-q^2)\dot{q}^3$
7	$(1-\lvert q\rvert)\dot{q}^3$
8	$(1-\lvert\dot{q}\rvert)\dot{q}^3$
9	$(\lvert q\rvert-\dot{q}^2)\dot{q}$
10	$(q^2-\lvert\dot{q}\rvert)\dot{q}$

4.5.Контрольные вопросы

1. Какие системы называются консервативными, а какие – диссипативными? Приведите примеры.
2. Какое движение называется вибрационным, лимитационным, инфинитным, ротационным? Что такое сепаратрисы?
3. Запишите в общем виде уравнения колебаний систем с сухим (кулоновским) трением и с квадратичным сопротивлением. Поясните, почему такие системы являются нелинейными.
4. Изобразите график колебаний системы с сухим трением и соответствующую ему фазовую траекторию. Что такое зона застоя?
5. Каковы законы изменения амплитуд колебаний в системах с сухим и вязким трением? Как изменяются амплитуды колебаний при квадратичном сопротивлении?
6. Что такое автоколебания? Приведите примеры автоколебательных систем.
7. В каком случае автоколебательная система имеет мягкое, а в каком – жесткое возбуждение? Проиллюстрируйте сказанное диаграммами энергии.
8. Что такое предельные циклы? В каком случае предельные циклы называют устойчивыми, а в каком – неустойчивыми?
9. В каких системах возникают релаксационные колебания? Какой вид они имеют?
10. В чем суть метода осреднения? Какие расчеты могут быть выполнены на его основе?

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В.А. Задачи и примеры по теории колебаний: учебное пособие. – М.: изд-во МГТУ, 1994. Ч.1. – 308 с.

2. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1965. – 276 с.

3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.

4. Исаков А.Я., Исакова В.В. Колебательные и волновые процессы: Руководство по самостоятельной работе. – Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2008. – 328 с.

5. Алдошин Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний. – СПб.: Лань, 2013. – 311 с.

6. Камалов А.З. Краткий курс лекций по теории колебаний: Учеб. пособие. Казань: КГАСУ, 2006. – 128 с.

7. Дьяконов В.П. MATLAB7.*/R2006/R2007: Самоучитель. – М.:ДМК Пресс, 2008. – 768 с.

8. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 736 с.

9. Мироновский Л.А., Петрова К.Ю. Введение в MATLAB. Учебное пособие. СПб.: ГУАП, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пример выполнения задания 2.5.1

Задача. Составить дифференциальное уравнение движения для колебательной системы, состоящей из груза массой m, закрепленного на пружине жесткостью c. Успокоение колебаний осуществляется с помощью демпфирующего устройства D. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимости координаты и скорости груза от времени. Модель системы представлена на рис. 38.

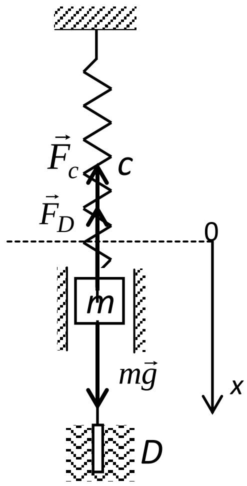


Рис. 38. Модель колебательной системы

Решение. Рассматриваемая колебательная система имеет одну степень свободы. Для описания ее движения выберем обобщенную координату $q = x$, где x – перемещение груза вдоль вертикальной оси. Начало отсчета x выберем в положении статического равновесия груза.

На рис. 38 показаны силы, действующие на груз:

$m\vec{g}$ – вектор силы тяжести;

$\vec{F}_c = -c\vec{l}$ – вектор силы упругости, где $\vec{l}$ – полная деформация пружины;

$\vec{F}_D = -\alpha\dot{\vec{x}}$ – сила вязкого трения, действующая со стороны демпфера, где α – коэффициент вязкого трения.

Уравнение движения груза вдоль оси x имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - c(x + f_c) + mg,$$

где f_c – статическая деформация пружины.

В условиях статического равновесия $\ddot{x} = \dot{x} = x = 0$, отсюда получим

$$mg = cf_c.$$

С учетом последнего равенства уравнение движения может быть записано следующим образом:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0.$$

Последнее уравнение представим в виде, удобном для построения структурной схемы колебательной системы в Simulink:

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x} - \frac{c}{m}x.$$

Структурная схема, моделирующая работу рассматриваемой системы в Simulink, представлена на рис. 39.

Графики зависимостей координаты и скорости от времени приведены на рис. 40 и 41.

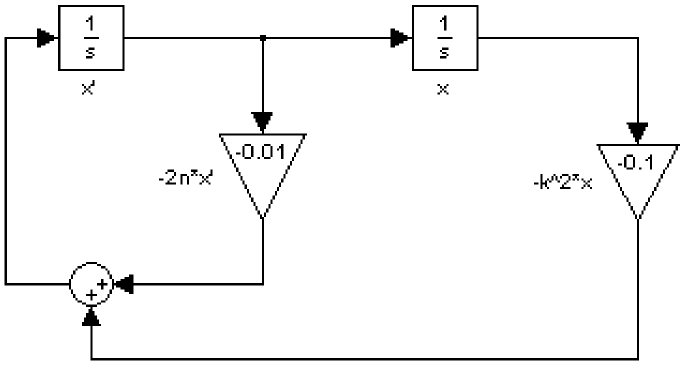


Рис. 39. Структурная схема, моделирующая работу колебательной системы

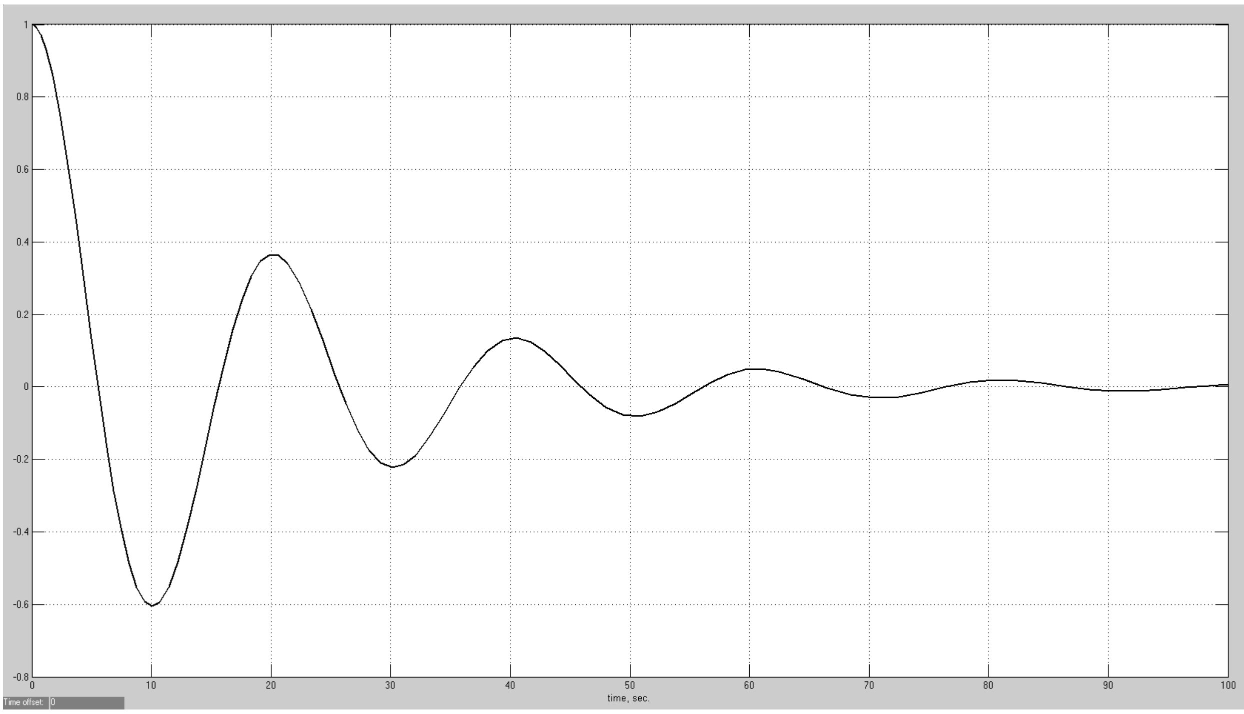


Рис. 40. Зависимость координаты *x* от времени

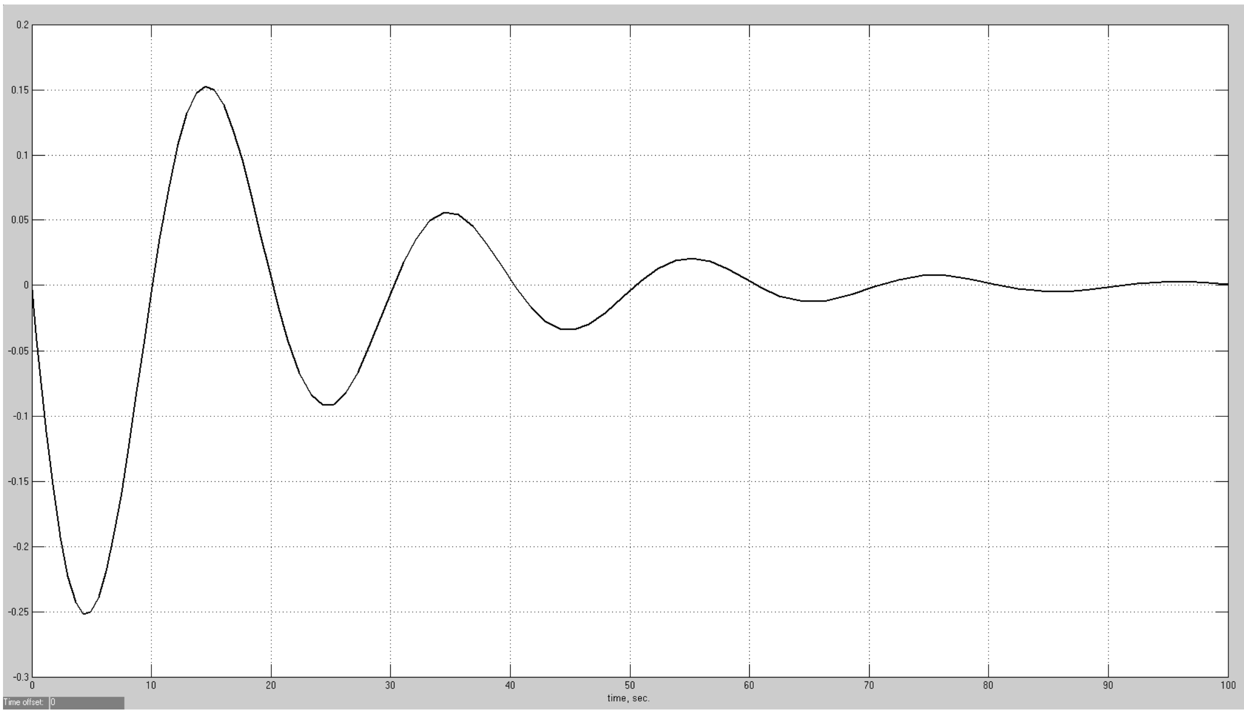


Рис. 41. Зависимость скорости $\dot{x}$ от времени

Графики координаты и скорости, приведенные на рис. 40, 41, получены подключением блоков *Scope* к выходам первого и второго интеграторов при следующих начальных условиях и параметрах системы:

x_0 = 1 м;

$\dot{x}_0 = 0$;

c = 0,1 Н/м;

m = 1 кг;

α = 0,1 (Н·с)/м.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример выполнения задания 2.5.2

Задача. Для системы, схема которой изображена на рис. 42, получить дифференциальные уравнения движения груза, массой m. Пружина жесткостью c, к которой с одной стороны прикреплен груз, со стороны точки подвеса закреплена на шарнире, позволяющем грузу совершать угловые колебания. При решении учесть, что в шарнире действует вязкое трение с коэффициентом α. Считать, что в процессе колебаний пружина в вертикальных плоскостях не изгибается и колебания по углу φ – малые. Длина пружины в недеформированном состоянии – l. С использованием пакета Matlab/Simulink построить графики зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени.

Решение. Рассматриваемая система имеет 2 степени свободы: вращательная (по углу φ) и поступательная (по координате x). Начало отсчета угла φ выберем от положения вертикали (на рис. 42 показано штриховкой), а координаты x – от положения, в котором пружина недеформирована.

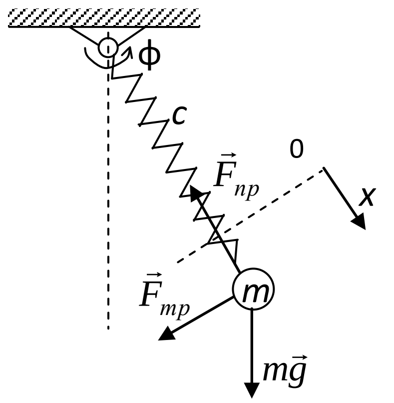


Рисунок 42 – Схема колебательной системы

Для составления уравнений движения по координатам φ и x воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j,$$

где K – кинетическая энергия системы; q_j – обобщенная координата, Q_j – обобщенная сила, $j = 1; 2$.

Кинетическая энергия системы равна:

$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, где I – момент инерции массы m относительно оси вращения: $I = \frac{1}{2}m(l + x)^2$.

Обобщенная сила является суммой потенциальных и диссипативных сил и может быть определена по формуле:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

где П – потенциальная энергия системы; Ф – диссипативная функция.

Здесь

$$\Pi = mg(l + x)(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}cx^2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\alpha\dot{\varphi}^2.$$

Полагая $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$, получим

$$Q_1 = -mg(1 - \cos\varphi) - cx;$$

$$Q_2 = -mg(l + x)\sin\varphi - \alpha\dot{\varphi}.$$

Слагаемые в уравнении Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m(l + x)^2\ddot{\varphi} + 2m(l + x)\dot{x}\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = m(l + x)\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0.$$

В результате получим систему из двух уравнений, описывающую движение системы:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx - m(l + x)\dot{\varphi}^2 + mg(1 - \cos\varphi) = 0, \\ m(l + x)^2\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + mg(l + x)\sin\varphi + 2m(l + x)\dot{x}\dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Так как по условию задачи колебания по углу φ предполагаются малыми, можно использовать приближения $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. В результате получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx - m(l + x)\dot{\varphi}^2 = 0, \\ m(l + x)^2\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + mg(l + x)\varphi + 2m(l + x)\dot{x}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \qquad (90)$$

Структурная схема, моделирующая работу колебательной системы в Simulink, имеет вид, показанный на рис. 43.

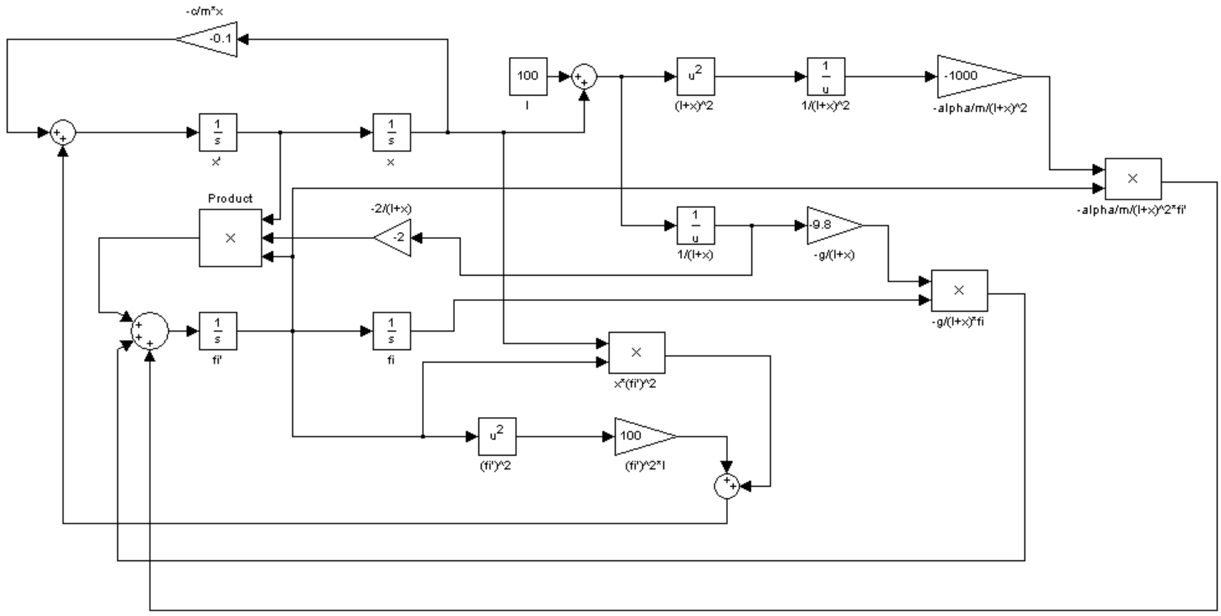


Рис. 43. Структурная схема, моделирующая работу колебательной системы

Подключая блоки *Scope* к выходам вторых интеграторов в контурах «x» и «fi», получим графики изменения обобщенных координат, представленные на рис. 44, 45.

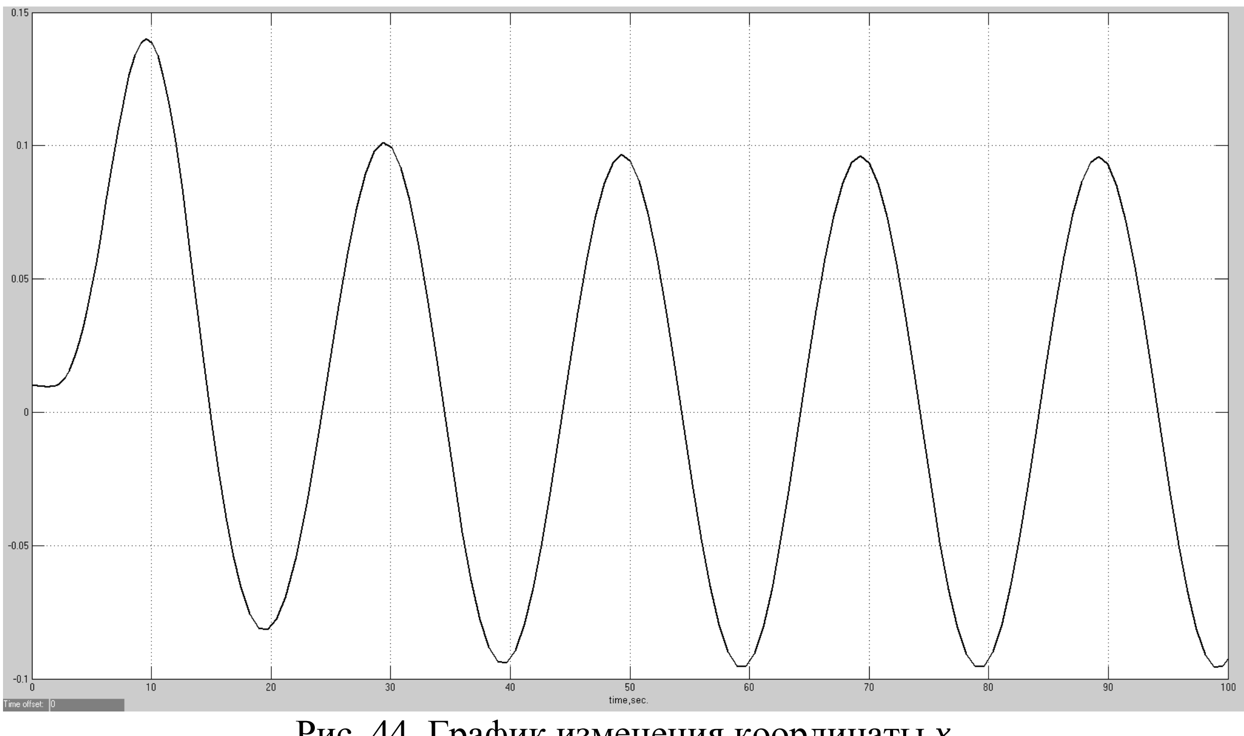


Рис. 44. График изменения координаты *x*

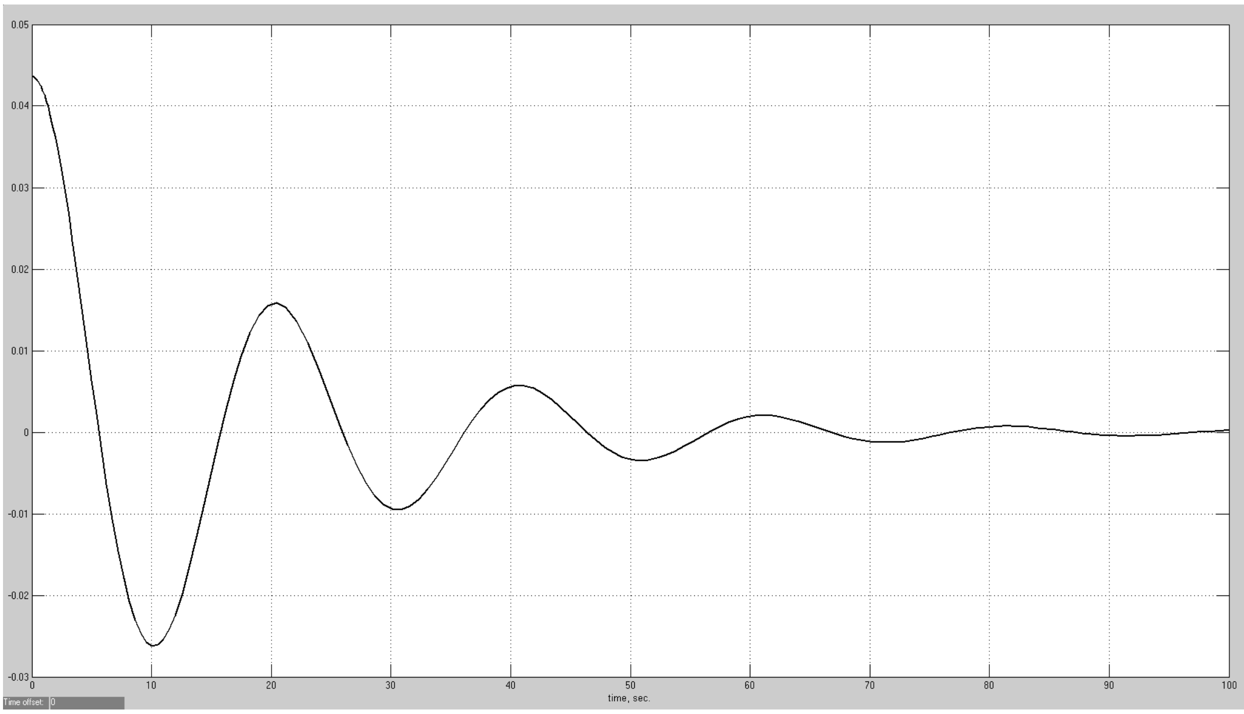


Рис. 45. График изменения координаты φ

Графическое решение системы (90), представленное на рис. 44, 45, получено при следующих начальных условиях и параметрах системы:

x_0 = 1см;

$\varphi_0 = 2°$;

$\dot{x}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$;

c = 0,1 Н/м;

α = 1000 Н·м·с;

m = 1 кг;

l = 100 м.

На рис. 46, 47 приведены графики изменения обобщенных скоростей, полученные подключением блоков *Scope* на выходы первых интеграторов.

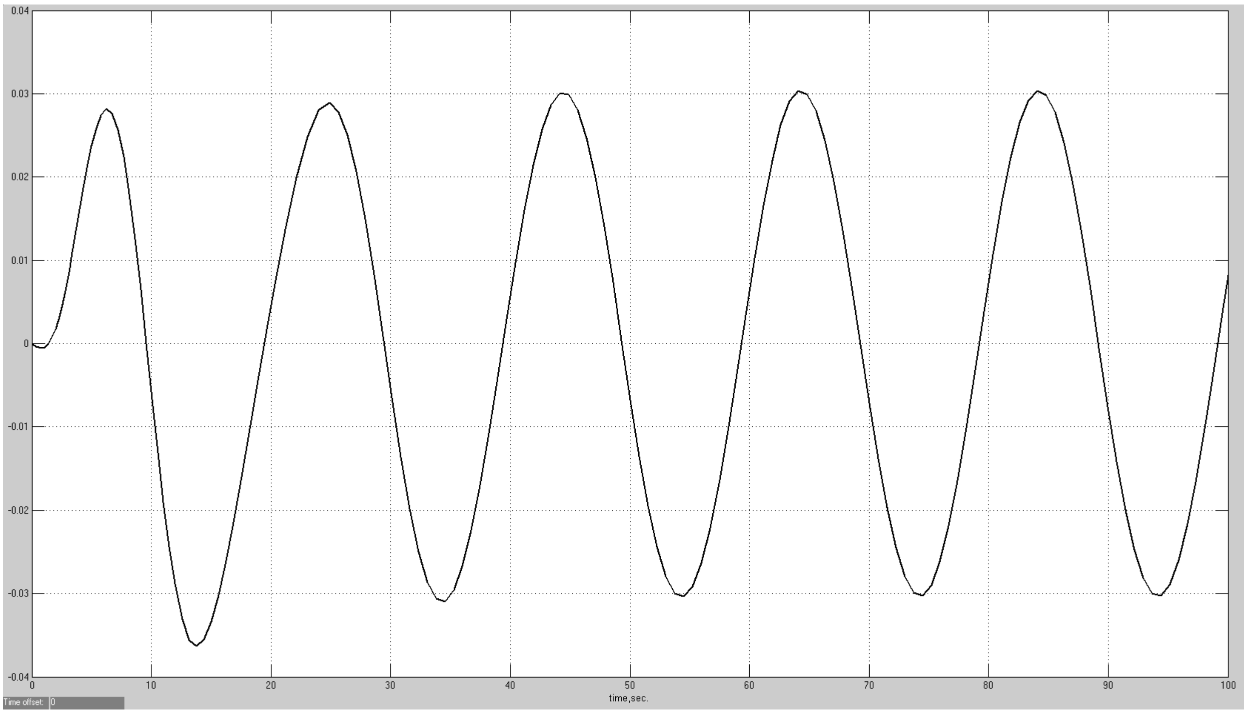


Рис. 46. График изменения скорости $\dot{x}$

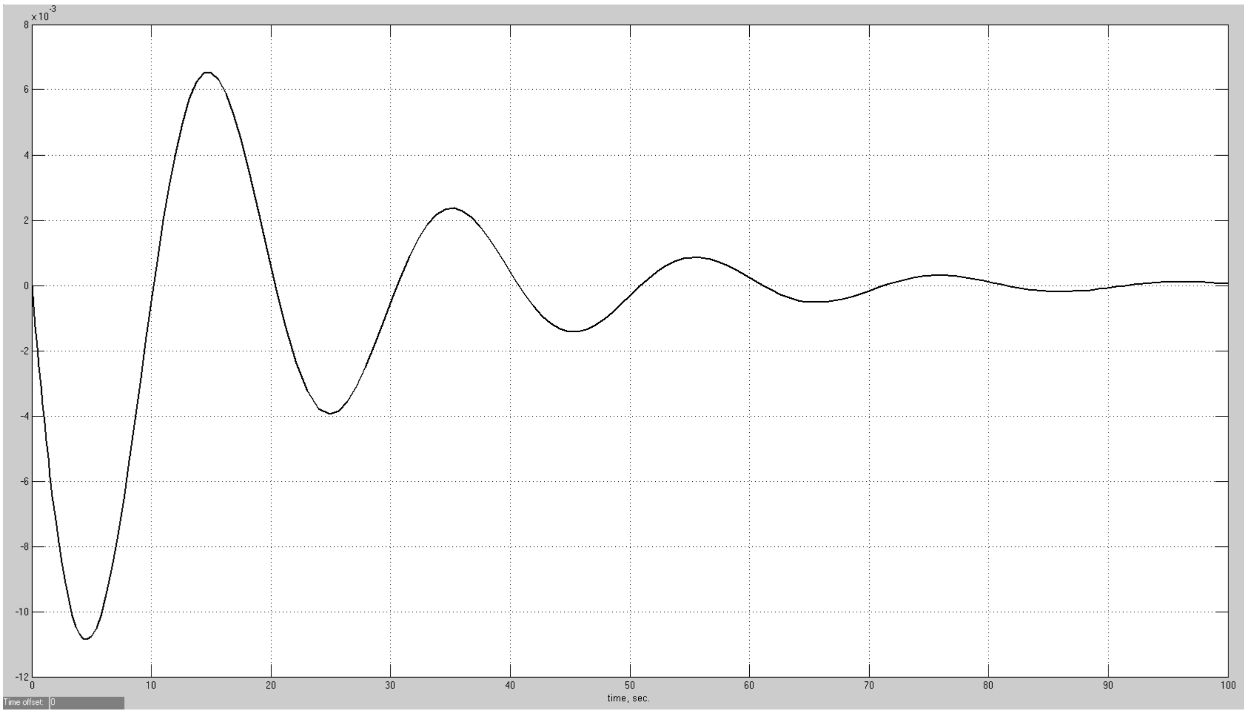


Рис. 47. График изменения скорости $\dot{\varphi}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Пример выполнения задания 3.4

Задача. Система, схема которой представлена на рис. 48, состоит из груза массой m, лежащего на плоской горизонтальной поверхности и прикрепленного к пружине жесткостью c. Свободный конец пружины движется по закону $x(t) = x_0 \sin\omega t$ вдоль горизонтальной плоскости. Считая, что при движении груза сила трения отсутствует, с использованием пакета Matlab/Simulink построить графики изменения координаты и скорости.

Решение. Колебательная система имеет одну степень свободы. Ее положение будем характеризовать обобщенной координатой y (рис. 48), выбрав начало отсчета в месте нахождения груза, когда пружина не деформирована.

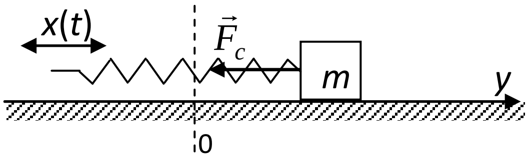


Рис. 48. Схема колебательной системы

Уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{y} = -c(y - x).$$

Отсюда

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{c}{m} x_0 \sin\omega t. \qquad (91)$$

Структурная схема, моделирующая работу колебательной системы в Simulink, приведена на рис. 49.

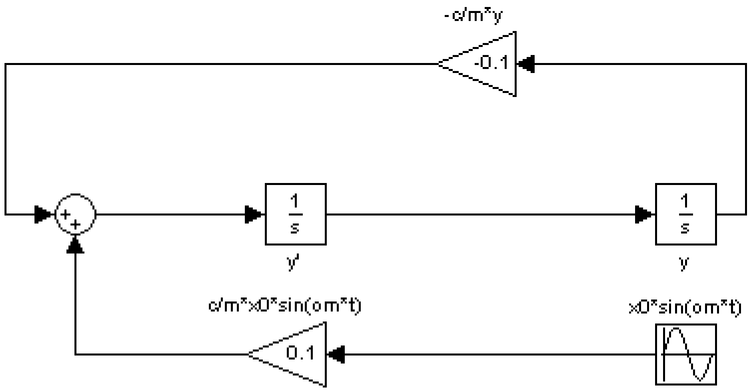


Рис. 49. Структурная схема, моделирующая работу колебательной системы

Графики координаты y и скорости $\dot{y}$ представлены на рис. 50, 51 соответственно.

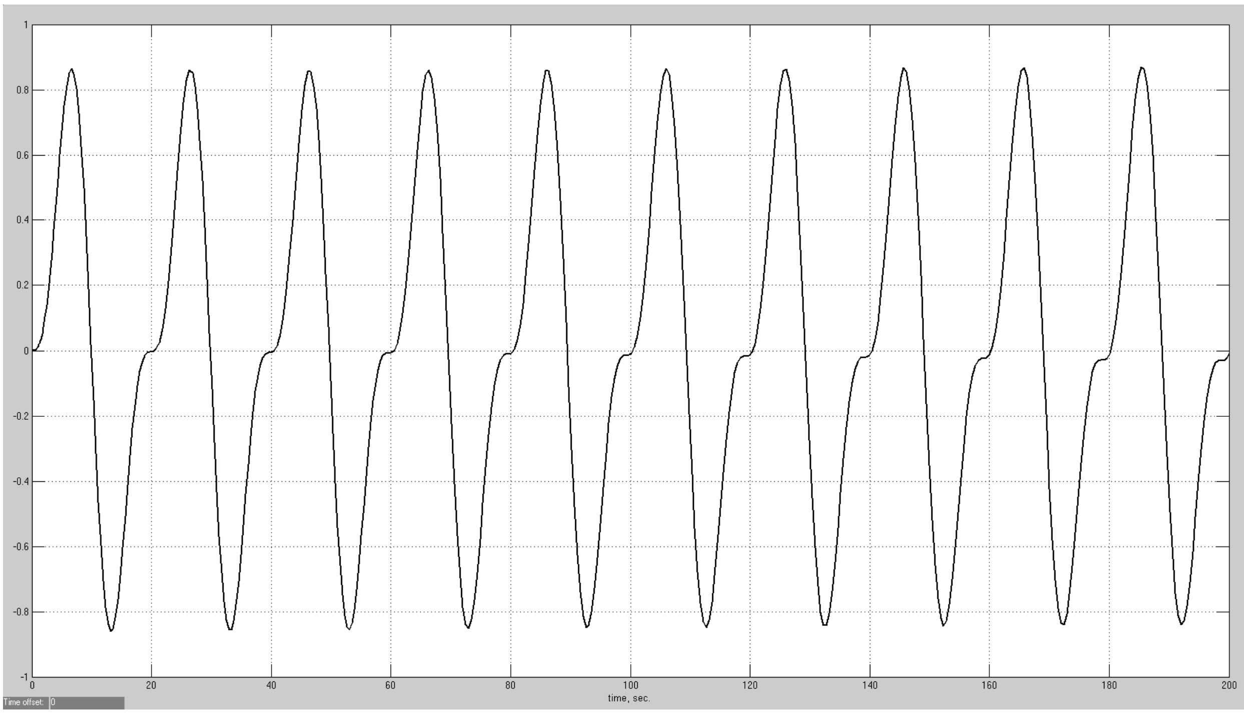


Рис. 50. График зависимости координаты y от времени

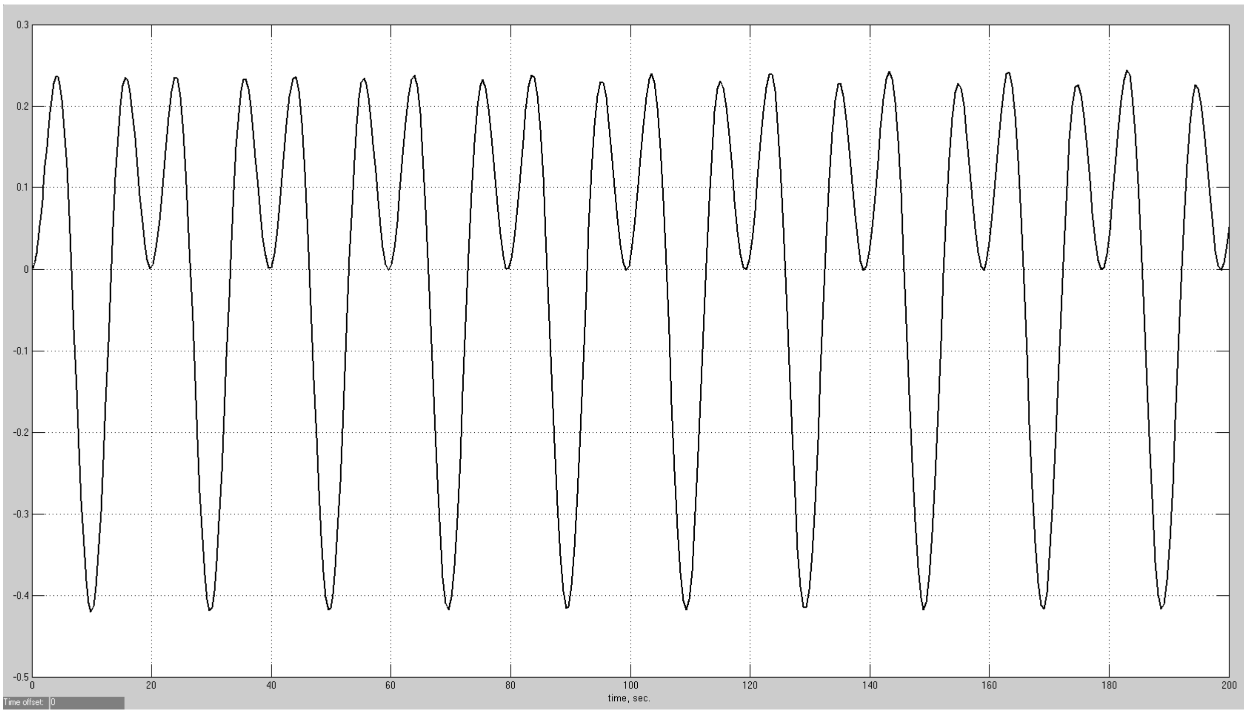


Рис. 51. График зависимости скорости $\dot{y}$ от времени

Графики, полученные решением уравнения (91) и приведенные на рис. 50, 51, построены при следующих параметрах системы и внешнего вынуждающего воздействия:

c = 0,1 Н/м;

m = 1 кг;

x_0 = 1 м;

$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$;

$y_0 = \dot{y}_0 = 0$.

Из графиков, представленных на рис. 50, 51, видно, что в отсутствии начальных условий на интеграторах «y» и «y'» в координате и скорости проявляются два типа колебаний: *сопутствующие*, происходящие с частотой собственных колебаний системы $\sqrt{\frac{c}{m}}$, и *вынужденные*, происходящие с частотой внешнего воздействия, равной в данном случае удвоенной частоте собственных колебаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Пример выполнения задания 4.4

Задача. Рассмотрим так называемое *уравнение Ван-дер-Поля*, которое в безразмерном времени имеет вид

$$\ddot{q} + q = \mu(1 - q^2)\dot{q}, \tag{92}$$

то есть $f(q, \dot{q}) = (1 - q^2)\dot{q}$. Модель вида (92) используется в электротехнике, биологии, сейсмологии и т.д.

Требуется аналитически и путем моделирования в пакете Matlab/Simulink определить амплитуду автоколебаний и установить, при каких значениях параметра μ предельный цикл будет устойчивым.

Решение. По формуле (85) найдем

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - \alpha^2\sin^2\psi)\alpha\cos^2\psi d\psi = \frac{\alpha}{8}(4 - \alpha^2). \tag{93}$$

Интеграл (93) можно вычислить с использованием инструмента символьных вычислений Matlab:

```
>> syms a x pi
>> 1/2/pi*int((1 - (a*sin(x))^2)*a*cos(x)^2,x,0,2*pi)

ans =

-(a*(a^2 - 4))/8
```

Уравнение (87) имеет неотрицательные корни $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, причем нулевой корень соответствует положению равновесия, а положительный – предельному циклу. Для оценки устойчивости равновесия и предельного цикла найдем производную:

$$\Phi'(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\alpha^2.$$

Поскольку $\Phi'(\alpha_1) = \Phi'(0) = \frac{1}{2} > 0$, а $\Phi'(\alpha_2) = \Phi'(2) = -1 < 0$, заключаем, что при $\mu > 0$ равновесие неустойчиво, а предельный цикл устойчивый; при $\mu < 0$ равновесие устойчиво, а предельный цикл неустойчивый.

Для проверки корректности вычислений может быть использована модель Matlab/Simulink, показанная на рис. 52.

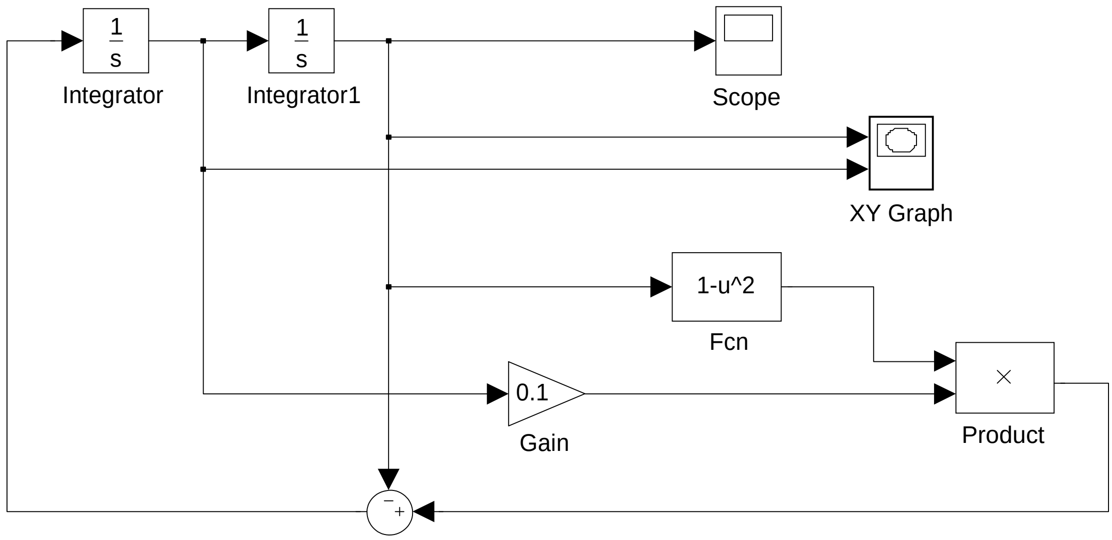


Рис. 52. Модель для проверки расчетов

Начальные условия q_0, $\dot{q}_0$ задаются соответственно в блоках *Integrator1* и *Integrator*. Коэффициент μ задается в блоке *Gain*. В блоке *Scope* отображается график переходного процесса, а в блоке *XY Graph* – фазовая траектория.

На рис. 53-60 приведены полученные в указанных блоках графики колебаний и фазовых траекторий при различных значениях μ и q_0. Начальная скорость $\dot{q}_0$ полагалась равной нулю.

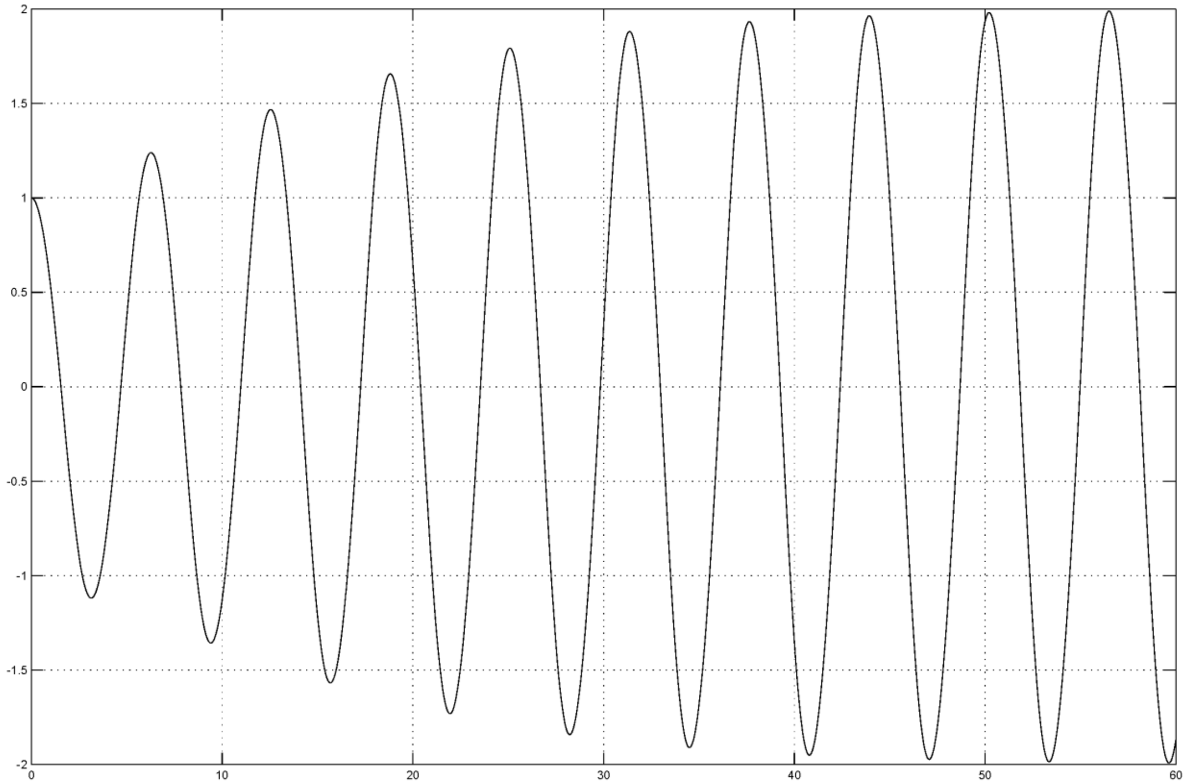


Рис. 53. График переходного процесса при q_0 = 1, μ = 0,1 (окно *Scope*)

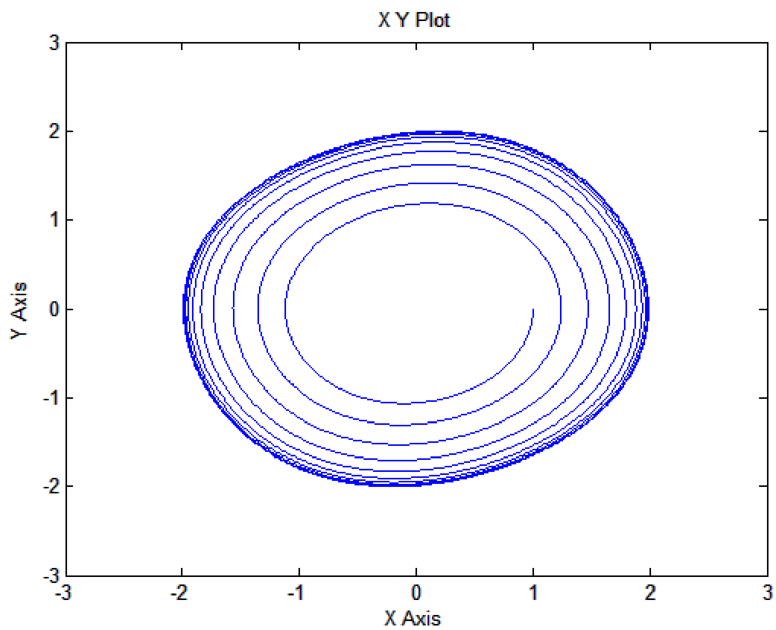


Рис. 54. Фазовая траектория колебаний при q_0 = 1, μ = 0,1 (окно *XY Graph*)

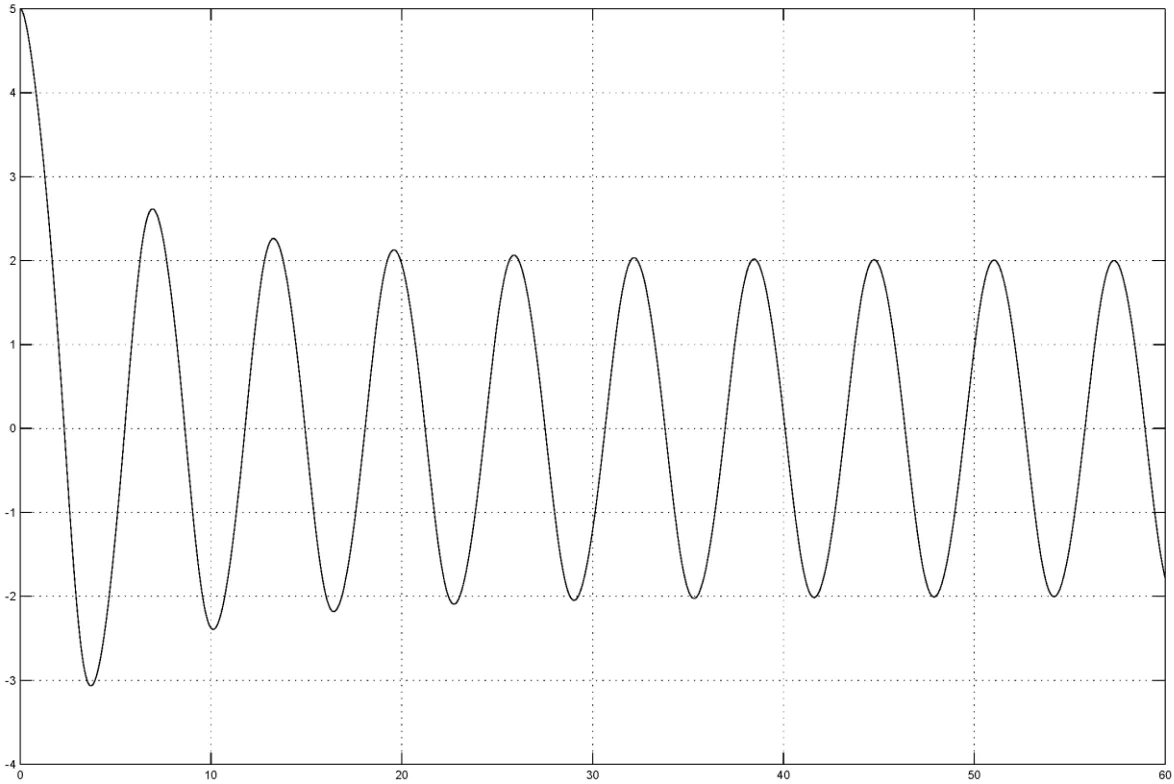


Рис. 55. График переходного процесса при $q_0 = 5$, $\mu = 0{,}1$

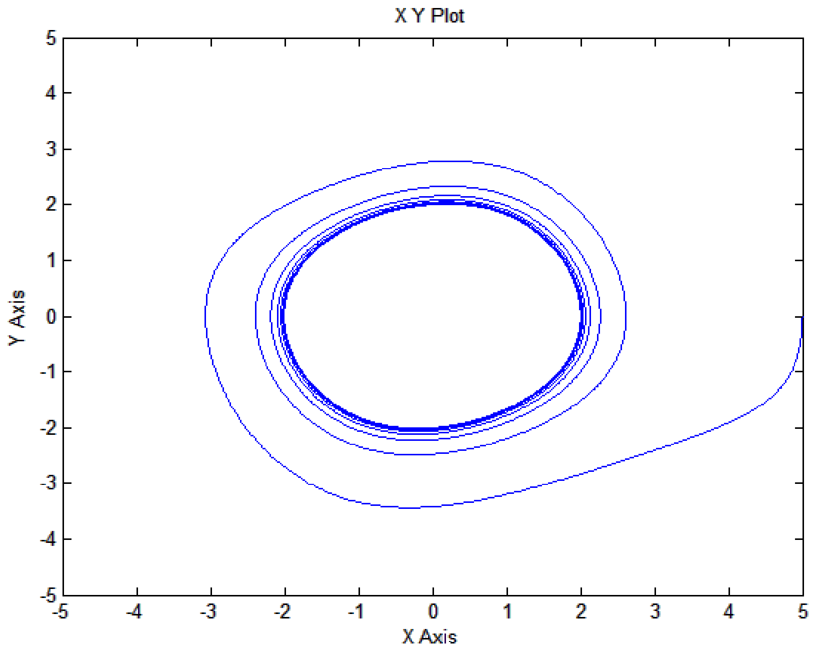


Рис. 56. Фазовая траектория колебаний при $q_0 = 5$, $\mu = 0{,}1$

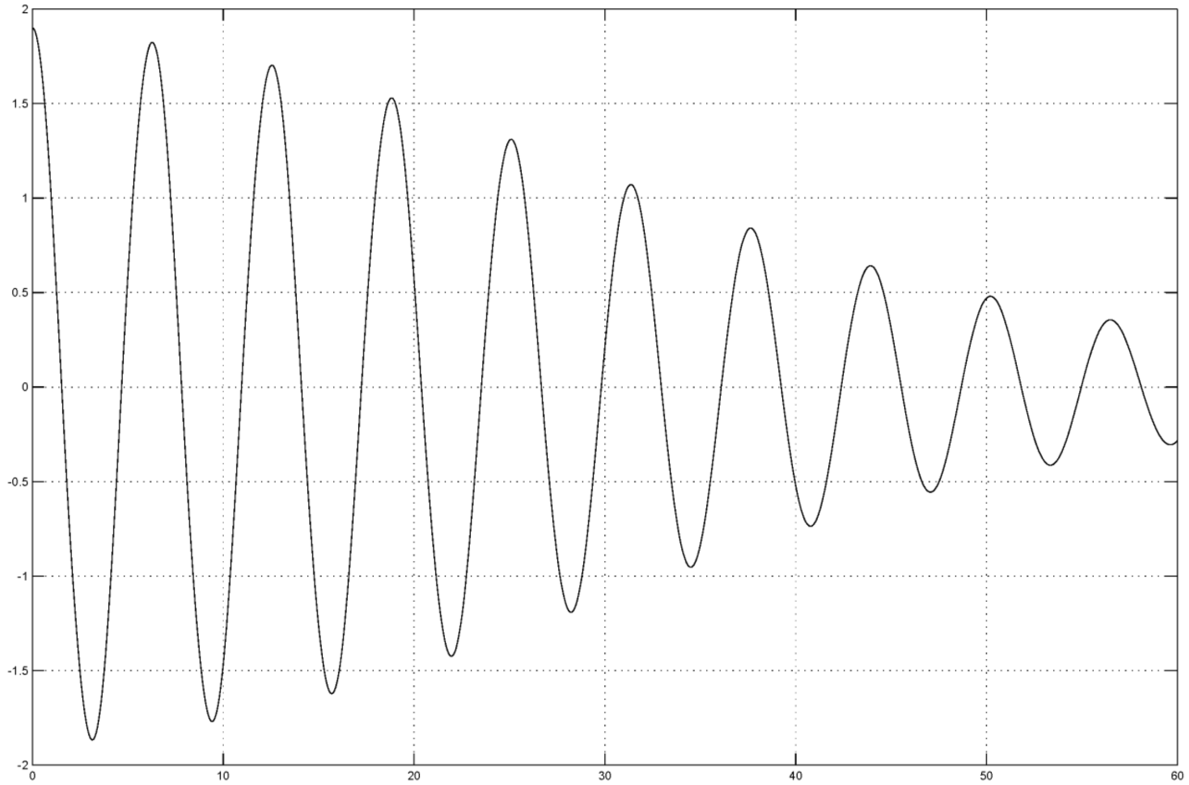


Рис. 57. График переходного процесса при $q_0 = 1{,}9$, $\mu = -0{,}1$

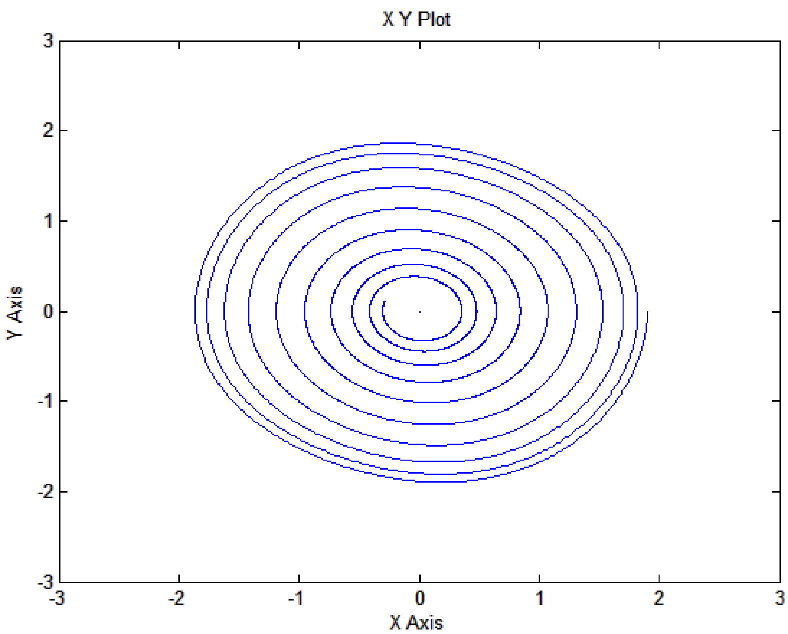


Рис. 58. Фазовая траектория колебаний при $q_0 = 1{,}9$, $\mu = -0{,}1$

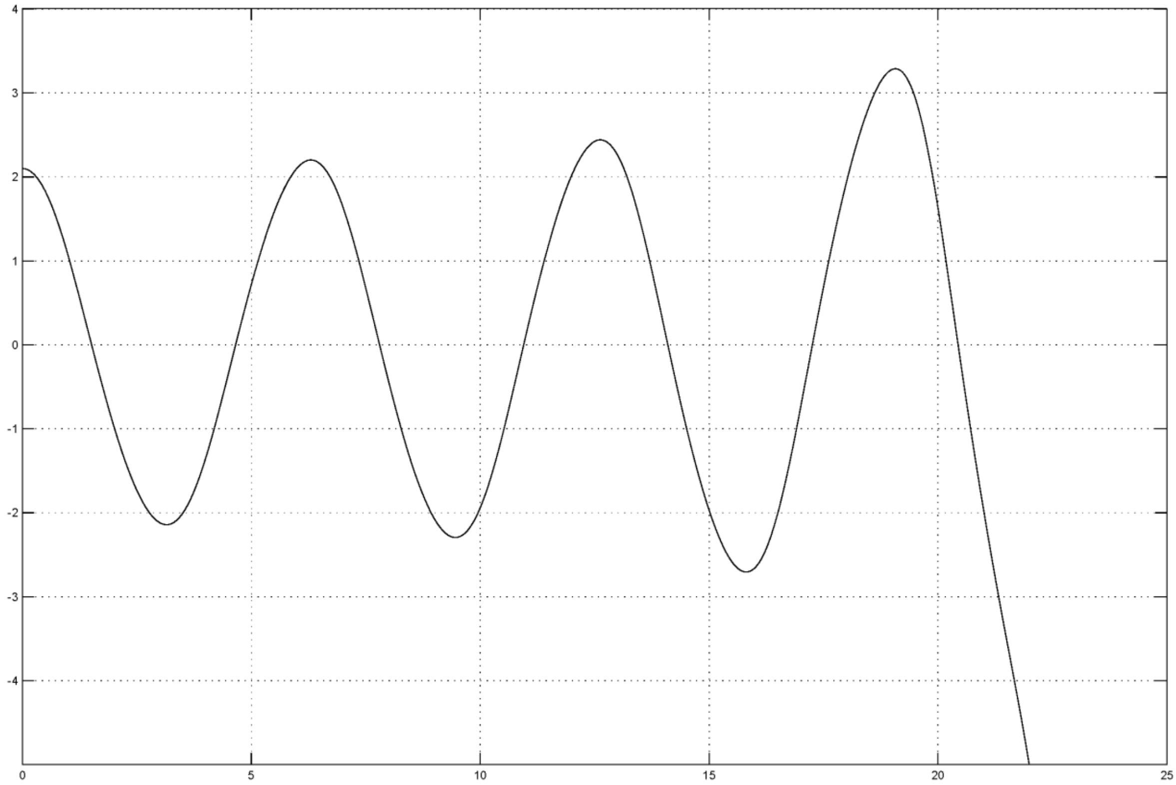


Рис. 59. График переходного процесса при q_0 = 2,1, μ = –0,1

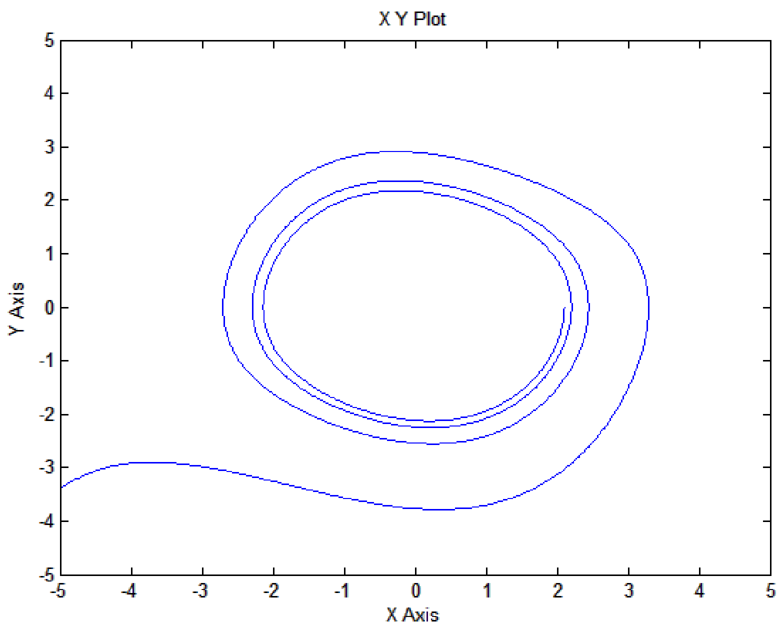


Рис. 60. Фазовая траектория колебаний при q_0 = 2,1, μ = –0,1

Лопарев Алексей Валерьевич, Соколов Аркадий Юрьевич

Методы теории колебаний
учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н. Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49