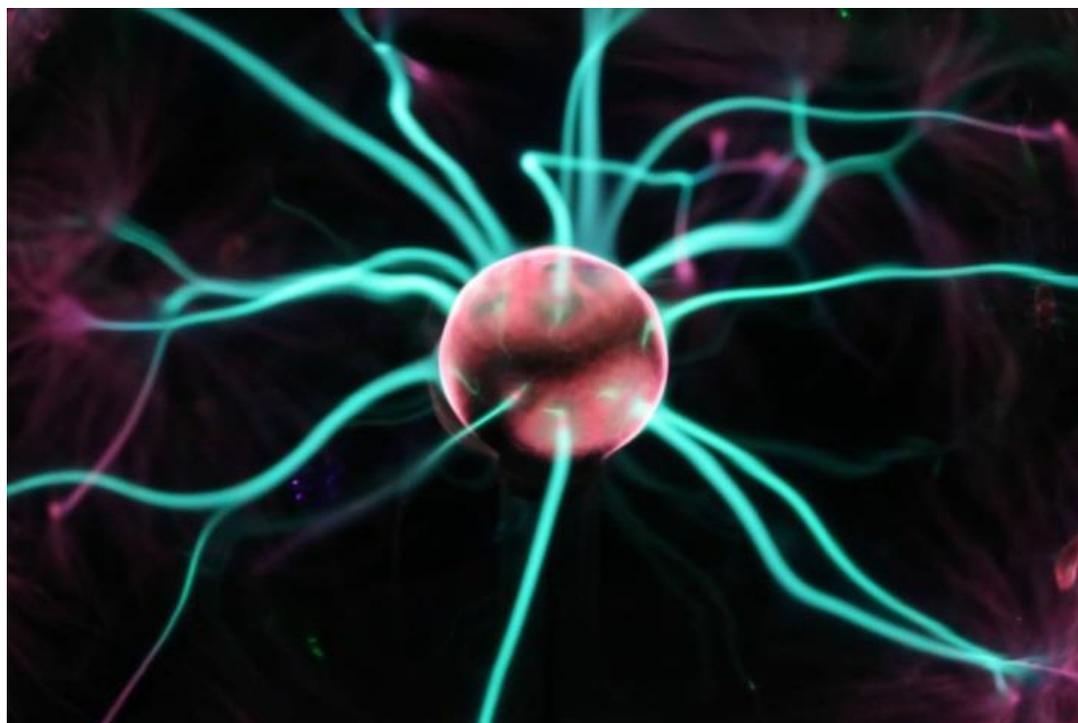


 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Г.Г. Зегря, М.И. Векслер, И.Г. Смирнова, И.А. Устинова

**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ**



**Санкт-Петербург
2019**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Г.Г. Зегря, М.И. Векслер, И.Г. Смирнова, И.А. Устинова

**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ**
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 12.03.05 Лазерная техника и лазерные
технологии и 16.03.01 Техническая физика
в качестве учебно-методического пособия для реализации образовательных
программ высшего образования бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2019

Зегря Г.Г., Векслер М.И., Смирнова И.Г., Устинова И.А. Расчет стационарных электрических и магнитных полей – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 98 с.

Рецензент:

Кучинский В.И., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник, ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН;

Пособие рекомендовано бакалаврам факультета Лазерной фотоники и оптоэлектроники, обучающимся по направлениям подготовки 12.03.05 «Лазерная техника и лазерные технологии» и 16.03.01 «Техническая физика» для работы на практических занятиях и закрепления лекционного материала курса «Физика полупроводников». Каждый раздел пособия содержит краткую теорию и рекомендации по решению задач.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© Зегря Г.Г., Векслер М.И., Смирнова И.Г., Устинова И.А., 2019

Содержание

Содержание	3
Введение	5
1. Вакуум	6
1.1 Закон Кулона. Поле и потенциал распределенной системы зарядов в вакууме	6
1.2 Уравнения Максвелла для электростатики. Векторные операторы в различных системах координат	9
1.3 Уравнение Пуассона. Его применения для расчета полей в вакууме	12
1.4 Случай бесконечной плотности объемного заряда и бесконечного суммарного заряда	15
1.5 Поток вектора через поверхность. Применение теоремы Гаусса как метод расчета полей в симметричных случаях	16
1.6 Проводники в электрическом поле. Электростатический метод изображений	23
1.7 Расчет дипольных моментов и полей, ими создаваемых	26
1.8 Вычисление электрической энергии и электрических сил	29
2. Поляризуемые среды	32
2.1 Расчет электрических полей при наличии диэлектриков. Поляризованность. Связанный заряд	32
2.2 Расчет поля между эквипотенциальными поверхностями в отсутствие объемного заряда при $\epsilon \neq \mathit{const}$	34
2.3 Расчет поля симметричного распределения зарядов по теореме Гаусса при $\epsilon \neq \mathit{const}$	36
2.4 Расчет поляризованности и плотности связанного заряда	38
2.5 Граничные условия на стыке двух диэлектриков. Теорема о циркуляции	41
2.6 Вычисление емкости	45
2.7 Утечка заряда в конденсаторах	48
2.8 Сегнетоэлектрики	50

3. Вакуум.....	54
3.1 Нахождение магнитных полей и потенциалов в вакууме путем интегрирования закона Био–Савара.....	54
3.2 Уравнения Максвелла для магнитостатики. Векторные операторы в различных системах координат	61
3.3 Уравнение Пуассона. Его применение для расчета полей в вакууме	62
3.4 Случай бесконечной плотности тока и тока на бесконечность	64
3.5 Циркуляция вектора по контуру. Применение теоремы Стокса как метод расчета полей в симметричных случаях.....	64
3.6 Идеальные проводники в магнитном поле. Магнитостатический метод изображений	69
3.7 Расчет магнитных дипольных моментов и полей, ими создаваемых	71
3.8 Вычисление сил магнитного взаимодействия и энергии	73
4. Намагничивающиеся среды	78
4.1 Расчет магнитных полей при наличии магнетиков. Намагниченность. Молекулярные токи.....	78
4.2 Расчет поля между эквипотенциальными поверхностями в отсутствие токов.....	80
4.3 Расчет поля симметричного распределения токов по теореме Стокса.....	81
4.4 Расчет намагниченности и плотности молекулярных токов	82
4.5 Условия на границе двух магнетиков. Теорема Гаусса.....	85
4.6 Вычисление индуктивности	87
4.7 Перенос заряда в катушках.....	92
4.8 Ферромагнетики.....	93
Список использованной и рекомендованной литературы	97

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие рекомендовано к использованию в Университете ИТМО бакалаврам факультета Лазерной фотоники и оптоэлектроники, обучающимся по направлениям подготовки 12.03.05 «Лазерная техника и лазерные технологии» и 16.03.01 «Техническая физика» для закрепления лекционного материала курса «Физика полупроводников». Пособие также рекомендовано для использования в качестве вспомогательного материала для проведения контактной работы (лекционных занятий). Учебное пособие будет полезно студентам для освоения теоретической части курса в ходе выполнения самостоятельной работы (в том числе, при подготовке к сдаче экзамена). Каждый раздел пособия содержит краткую теорию и рекомендации по решению задач. Контроль знаний предполагает решение студентом задач на экзамене, а также его защиту преподавателю, включающую развернутые ответы на дополнительные вопросы. Целью защиты является контроль приобретенных студентом компетенций, предусмотренных направлениями подготовки, формируемых в рамках осваиваемой дисциплины, включая уровень достижения студентом конкретных результатов обучения (умений, навыков). При подготовке к решению задач студенту может потребоваться изучение дополнительной литературы, список которой приведен в конце настоящего пособия.

1. Вакуум

1.1 Закон Кулона. Поле и потенциал распределенной системы зарядов в вакууме

Пусть O – начало координат, P – точка, в которой ищется поле, A – точка, в которой расположен заряд q (рисунок 1). Вектор \overrightarrow{OP} обычно обозначают \vec{r}_p , вектор \overrightarrow{OA} обозначают \vec{r}' . Тогда напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые зарядом, записываются как:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}$$

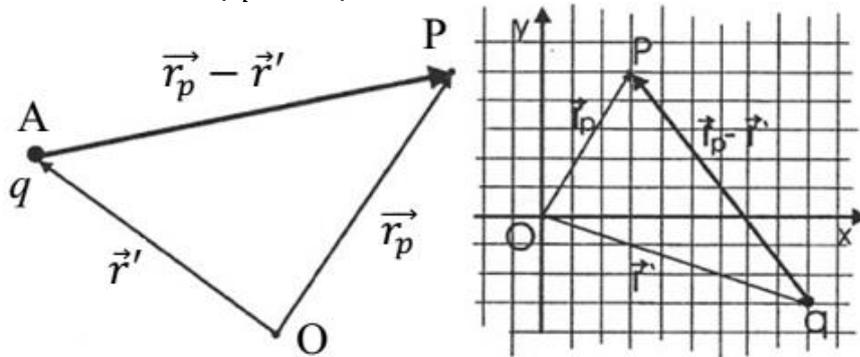


Рисунок 1 – O – начало координат, P – точка, в которой ищется поле, A – точка, в которой расположен заряд q

Задача 1. Найти поле, которое в точке $\vec{r}_p = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ создает заряд q , находящийся в точке $\vec{r}' = 9\vec{i} - 3\vec{j}$.

Ответ: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-6\vec{i} + 8\vec{j}}{1000}$.

При наличии распределенного заряда, создающего поле, необходимо провести интегрирование:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}') dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}$$

При этом \vec{r}' пробегает всевозможные положения из начала координат в точки, где есть заряд dq . Последний записывается как

$$dq = \begin{cases} \rho dV - \text{объемный заряд, Кл/см}^3, \\ \sigma dS - \text{поверхностный заряд, Кл/см}^2, \\ \lambda dl - \text{линейный заряд, Кл/см}^1, \\ \text{просто } q - \text{точечный заряд (интегрирования нет)}. \end{cases}$$

Если рассматривается равномерно заряженная частица зарядом Q объемная (объема V), поверхностная (площади S), или линейная (длины L) область, то, соответственно,

$$\rho = \frac{Q}{V}, \sigma = \frac{Q}{S}, \lambda = \frac{Q}{L}.$$

Как записать dV , dS и dl ? Это зависит исключительно от геометрии:

$$dV = \begin{cases} dx dy dz - \text{элемент объема куба,} \\ r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi - \text{элемент объема шара,} \\ r dr dz d\varphi - \text{элемент объема цилиндра.} \end{cases}$$

$$dS = \begin{cases} dx dy - \text{элемент площади на плоскости,} \\ r dr d\varphi - \text{элемент площади круга,} \\ R dz d\varphi - \text{элемент площади боковой поверхности цилиндра,} \\ R^2 \sin\theta d\theta d\varphi - \text{элемент площади сферы.} \end{cases}$$

$$dl = \begin{cases} dx - \text{элемент длины на прямой,} \\ R d\varphi - \text{элемент длины окружности.} \end{cases}$$

Задача 2. Нить, равномерно заряженная с плотностью λ_0 , имеет длину $2a$ и расположена в плоскости xu вдоль оси x симметрично относительно оси y (рисунок 2). Найти поле на оси y как функцию y .

Ответ: $\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + a^2}} \vec{j}$.

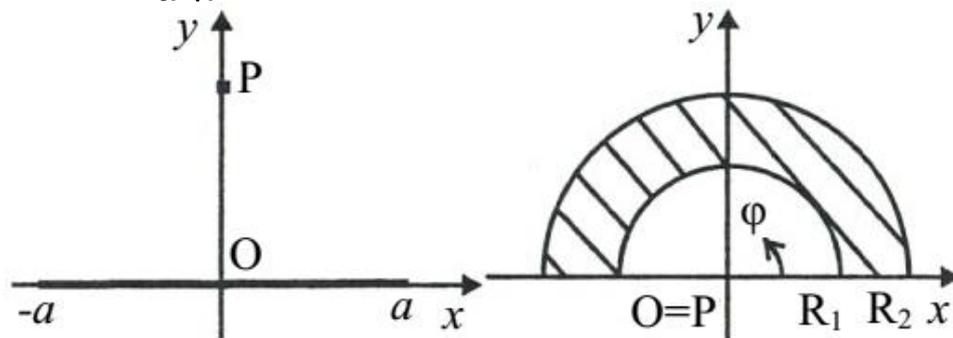


Рисунок 2 – Нить, равномерно заряженная с плотностью λ_0 , длиной $2a$

Задача 3. Найти потенциал в центре пластины в форме полудиска. Внутренний и внешний радиусы R_1 и R_2 , заряд $\sigma = \sigma_0 \sin\varphi$, где φ – угол в плоскости xu .

Решение. Потенциал рассчитываем по стандартной формуле (2):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}$$

При этом

$$\begin{aligned} \vec{r}_p &= \vec{0}. \\ \vec{r}' &= r \cos\varphi \vec{i} + r \sin\varphi \vec{j}. \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \vec{r}_p - \vec{r}' &= -r \cos\varphi \vec{i} - r \sin\varphi \vec{j}. \\ |\vec{r}_p - \vec{r}'| &= r. \end{aligned}$$

С учетом формы тела, создающего поле,

$$dq = \sigma(r, \varphi) \cdot dS = \sigma_0 \sin\varphi \cdot r dr d\varphi,$$

причем φ изменяется в пределах от 0 до π , а r – от R_1 до R_2 . Теперь можно продолжить интегрирование формулы для φ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_0 \sin\varphi \cdot r dr d\varphi}{r} = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} (R_2 - R_1) \cdot 2 = \frac{\sigma_0(R_2 - R_1)}{2\pi\epsilon_0}.$$

Задача 4. Кольцо расположено в плоскости xy (рисунок 3). Найти поле на оси кольца радиуса R , заряженного как $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$.

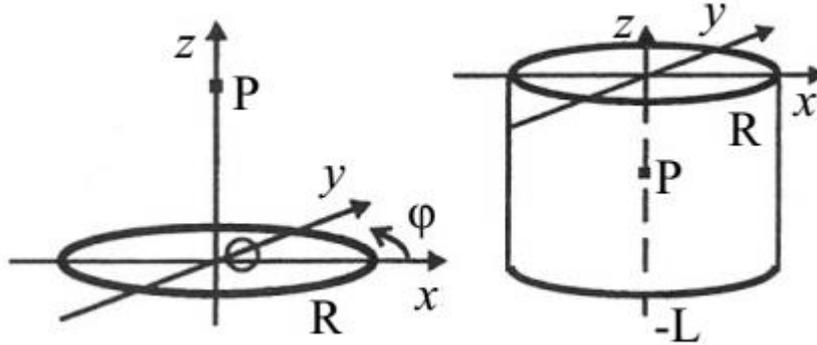


Рисунок 3 – Кольцо радиуса R

Ответ: $\vec{E} = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}} \vec{l}$.

Задача 5. Найти потенциал на оси цилиндрической поверхности радиуса R (рисунок 4). Цилиндр заряжен как $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ и расположен соосно с z , занимаемая область $-L \dots 0$.

Ответ: $\varphi(z) = 0$.

Задача 6. Найти поле в центре шарового сектора с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 , равномерно заряженного зарядом ρ_0 , занимающего область $\varphi = 0 \dots 2\pi, \theta = 0 \dots \pi/4$.

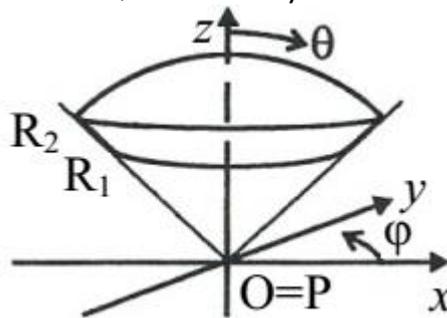


Рисунок 4 – Шаровой сектор с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2

Решение. Заряженный объект (шаровой сектор) является объемным, так что

$$dp = \rho dV = \rho_0 \cdot r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$

где использовано выражение для элемента объема шара. У нас начало координат совпадает с точкой, где ищется поле, так что

$$\vec{r}_p = \vec{0}.$$

Вектор \vec{r}' запишется как:

$$\vec{r}' = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \vec{r}_p - \vec{r}' &= -r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} - r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} - r \cos \theta \vec{k}. \\ |\vec{r}_p - \vec{r}'| &= r. \end{aligned}$$

Теперь у нас уже есть все составные компоненты для проведения интегрирования. Пределы интегрирования вытекают из условия задачи:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}') dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{-r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} - r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} - r \cos \theta \vec{k}}{r^3} \cdot p_0 \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что члены, содержащие $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$, при интегрировании по φ от 0 до 2π дадут ноль (это интегрирование по периоду), поэтому их можно дальше не выписывать.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{-r \cos \theta \vec{k}}{r^3} \cdot p_0 \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (R_2 - R_1) \cdot 2\pi \cdot p_0 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \vec{k} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (R_2 - R_1) \cdot 2\pi \cdot p_0 \cdot \frac{\sin \theta^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{k} = -\frac{p_0(R_2 - R_1)}{8\epsilon_0} \vec{k}. \end{aligned}$$

Направление вектора \vec{E} против оси z естественно из симметрии задачи. Если заряд положителен, то поле должно быть ориентировано от заряженного сектора, что и имеет место.

1.2 Уравнения Максвелла для электростатики. Векторные операторы в различных системах координат

Уравнения Максвелла для электростатики имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= p. \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

При этом

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi.$$

В вакууме $\epsilon = 1$, так что

$$\operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = -\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\epsilon_0 \Delta \varphi \quad (\Delta - \text{оператор Лапласа}).$$

Потенциал φ считается равным нулю на бесконечности, если не оговорено иное.

Векторные операторы ($grad, div, rot$), фигурирующие в уравнениях Максвелла, по-разному записываются в различных системах координат:

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} - \text{декартова,} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r - \text{цилиндрическая,} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r - \text{сферическая система.} \end{cases}$$

$$div\vec{A} = \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \text{декартова,} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) - \text{цилиндрическая,} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) - \text{сферическая система.} \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \text{декартова,} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) - \text{цилиндрическая,} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) - \text{сферическая система.} \end{cases}$$

Для цилиндрической и сферической систем выписана лишь радиальная часть соответствующих операторов. Этого достаточно для решения задач, в которых электрические величины зависят только от r .

$$rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Задача 1. Электрическое поле зависит только от координаты x согласно формуле $\vec{E} = ax \exp(-\beta x^2) \vec{i}$. Требуется вычислить распределение заряда $p(x)$ и распределение потенциала $\varphi(x)$. При нахождении $\varphi(x)$ принять $\varphi|_{x=0} = 0$.

Решение. Распределение заряда находится непосредственно из уравнения Максвелла:

$$p = div\vec{D} = \varepsilon_0 div\vec{E}.$$

$$p = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx} = \varepsilon_0 a \exp(-\beta x^2) (1 - 2\beta x^2).$$

Для нахождения потенциала $\varphi(x)$ необходимо интегрирование уравнения (4), причем с обоснованно взятыми пределами, а именно от точки $x = x^*$, в которой $\varphi(x^*) = 0$ до точки x , в которой ищется потенциал:

$$\varphi(x) = - \int_{x^*, \varphi(x^*)=0}^x E_x(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

В условии сказано, что $\varphi(0) = 0$ – это и диктует выбор нижнего предела:

$$\varphi(x) = - \int_0^x E_x(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

В качестве переменной интегрирования мы используем \tilde{x} , чтобы избежать путаницы с x . Теперь мы проводим вычисление и приходим к окончательному ответу:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= - \int_0^x a\tilde{x} \exp(-\beta\tilde{x}^2) d\tilde{x} = \\ &= \frac{a}{2\beta} \cdot \exp(-\beta\tilde{x}^2) \Big|_0^x = -\frac{a}{2\beta} (1 - \exp(-\beta\tilde{x}^2)). \end{aligned}$$

Задача 2. В некоторой области распределение потенциала является цилиндрически–симметричным и подчиняется закону $\varphi = ar^5$, где r – расстояние от оси. Найти $E_r(r)$ и $p(r)$ для этой области.

Ответ: $E_r(r) = -5ar^4, p(r) = -25\varepsilon_0 ar^3$.

Задача 3. Потенциал внутри шара зависит от координаты r следующим образом: $\varphi(r) = ar^2 + b$ (a, b – константы). Найти $p(r)$.

Решение. Мы имеем дело со сферической системой и должны работать в ней. Ввиду симметрии, электрическое поле направлено от центра шара (или, вообще говоря, к нему – это зависит от знака a). Поле находим как градиент потенциала:

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r = -2ar \vec{e}_r.$$

После этого сразу записывается \vec{D} (у нас $\varepsilon = 1$):

$$\vec{D} (= D_r \vec{e}_r) = \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Далее используем уравнение Максвелла для нахождения заряда:

$$p = \text{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-\varepsilon_0 \cdot 2ar^3) = -6\varepsilon_0 a.$$

Задача 4. В цилиндрической системе имеется электрическое поле $\vec{E} = A \exp(-ar) \vec{e}_r, a > 0$. Выяснить, какому распределению заряда $p(r)$ и какому потенциалу $\varphi(r)$ такое поле соответствует.

Ответ: $p(r) = A\varepsilon_0 \exp(-ar) (2 - ar), \varphi(r) = \frac{A}{a^2} \exp(-ar) (1 + ar)$.

Задача 5. Проверить, выполняется ли критерий потенциальности ($\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$) для следующих полей: $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 + y^2)\vec{j}$ и для поля $\vec{E} = 2axy^2\vec{i} + a(x^2 + y^2)\vec{j}$.

Ответ: Для первого поля – да, для второго – нет.

1.3 Уравнение Пуассона. Его применения для расчета полей в вакууме

Уравнение Пуассона для $\varepsilon = 1$ выглядит так:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Это уравнение – основа практических численных расчетов.

В задачах, решаемых аналитически, φ и ρ обычно зависят только от одной координаты. При интегрировании можно вычислять интегралы как неопределенные, не забывая выписывать $+const$, а затем отдельно находить эти константы. Если рассматриваются отдельные диапазоны координат, то на незаряженных границах необходимо «сшивать» потенциал: φ и $-d\varphi/dx$ (или $d\varphi/dr$) не должны иметь разрыва. Если граница заряжена (σ), то $d\varphi/dx$ испытывает скачок на величину $-\sigma/\varepsilon_0$. Кроме того, если ρ и суммарный заряд конечны, то φ всюду конечен.

Другой вариант – сразу правильно писать пределы интегрирования. Для этого используется известное (или очевидное из симметрии задачи) значение поля ($-\nabla\varphi$) в одной какой-либо точке и значение потенциала в какой-либо точке (не обязательно в той же, где знаем поле). Если в задаче не оговорено иное, то следует принимать $\varphi = 0$. Так, например, для случая зависимости потенциала только от одной сферической координаты r

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}.$$

после переноса r^2 в правую часть и двух последовательных интегрирований получаем:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \int_0^r \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}.$$

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^r \frac{d\varphi}{d\tilde{r}} d\tilde{r} = -\int_r^{\infty} \frac{d\varphi}{d\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r} \right) d\tilde{r}.$$

При этом взято $\varphi|_{r=\infty} = 0$ и учтено то обстоятельство, что при всюду конечном ρ поле в центре равно нулю ($-d\varphi/dr|_{r=0} = 0$) (рисунок 5).

Задача 1. Пластина ширины $2a$ (ее $\varepsilon = 1$) заряжена равномерно по объему ($\rho(x) = \rho_0$); при $x = 0$ (центр пластины) $\varphi = 0$. Найти $\varphi(x)$.

Ответ: $\varphi(x) = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0}, |x| < a$; $\varphi(x) = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} |x| + \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}, |x| > a$.

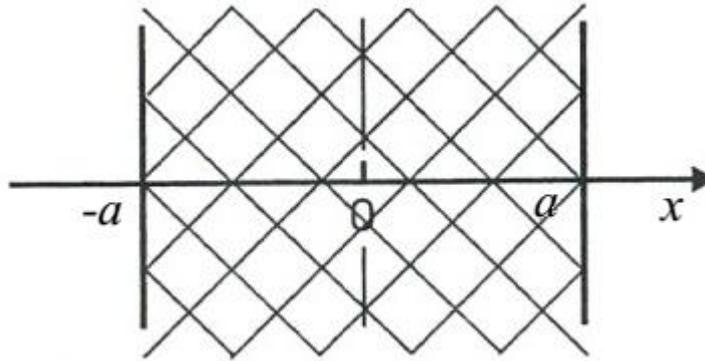


Рисунок 5 – Пластина ширины $2a$

Задача 2. Пластины ширины $2a$ (ее $\varepsilon = 1$) заряжена как $p(x) = ax^2$; при $x = 0$ (центр пластины) $\varphi = 0$. Найти $\varphi(x)$.

Решение. Мы работаем в декартовой системе координат, причем очевидно, что и поле, и потенциал зависят только от x . Если $p > 0$ ($a > 0$) то поле – из симметрии задачи – направлено по оси x при $x > 0$ и против оси x при $x < 0$. Согласно уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{ax^2}{\varepsilon_0}, \quad -a < x < a,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad x > a \text{ или } x < -a.$$

После первого интегрирования (интеграл берем как неопределенный)

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{ax^3}{3\varepsilon_0} + A_c, \quad -a < x < a,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = A_L, \quad x < -a,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = A_R, \quad x > a.$$

Неверным было бы записать одну общую константу для $d\varphi/dx$ при $x > a$ и $x < -a$. Второе интегрирование дает:

$$\varphi(x) = -\frac{ax^4}{12\varepsilon_0} + A_c x + B_c, \quad -a < x < a,$$

$$\varphi(x) = A_L x + B_L, \quad x < -a,$$

$$\varphi(x) = A_R x + B_R, \quad x > a.$$

Для нахождения шести констант у нас есть четыре условия сшивания (по два для границ $x = -a$ и $x = a$). Кроме того, дано указание взять $\varphi(0) = 0$. Видно также, что $E_x|_{x=0} = -d\varphi/dx|_{x=0} = 0$. Последнее очевидно из симметрии задачи. Отсюда сразу

$$A_c = 0, B_c = 0.$$

Из симметрии следует также, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$ и что $E_x(x) = -E_x(-x)$, вследствие чего

$$A_R = -A_L, B_R = B_L.$$

Это делает достаточным рассмотрение условий сшивания только на одной из границ, например при $x = a$:

$$-\frac{ax^4}{12\varepsilon_0} \Big|_{x=a} = (A_R x + B_R) \Big|_{x=a},$$

$$-\frac{ax^3}{3\varepsilon_0} \Big|_{x=a} = A_R \Big|_{x=a}.$$

Сначала получаем A_R ($A_R = -aa^3/3\varepsilon_0$), а затем B_R ($B_R = aa^4/4\varepsilon_0$), после чего остается выписать ответ:

$$\varphi(x) = -\frac{ax^4}{12\varepsilon_0}, \quad -a < x < a,$$

$$\varphi(x) = -\frac{aa^4}{3\varepsilon_0}x + \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, \quad x < -a,$$

$$\varphi(x) = \frac{aa^3}{3\varepsilon_0}x + \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, \quad x > a.$$

Альтернативой было бы интегрирование с выписыванием пределов сразу:

$$E_x(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x p(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

$$\varphi = -\int_0^x E_x(\tilde{x}) d\tilde{x} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x \int_0^{\tilde{x}} p(\tilde{\tilde{x}}) d\tilde{\tilde{x}} d\tilde{x}.$$

Такое интегрирование верно всегда, в том числе при $x < 0$. Точки $x = \pm a$ при этом ничем не выделены, но надо помнить, что $p = 0$ вне следующего участка: $-a < x < a$ и учитывать это при подстановке плотности заряда в выражение для интеграла. После взятия интеграла в таком виде сшивание потенциала не требуется.

Задача 3. Шар радиуса R заряжен как $p(r) = p_0(1 - r/R)$ (рисунок б). Найти полный заряд шара Q , поле $E_r(r)$, а также потенциал $\varphi(r)$ при $r = 0 \dots + \infty$.

Решение. Полный заряд шара находится как

$$Q = \int p dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi r^2 dr =$$

$$= 4\pi \int_0^R p_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = \frac{\pi p_0 R^3}{3}.$$

При вычислении мы использовали выражение для элемента объема dV в сферических координатах (не следует смешивать фигурирующий при этом φ с обозначением потенциала).

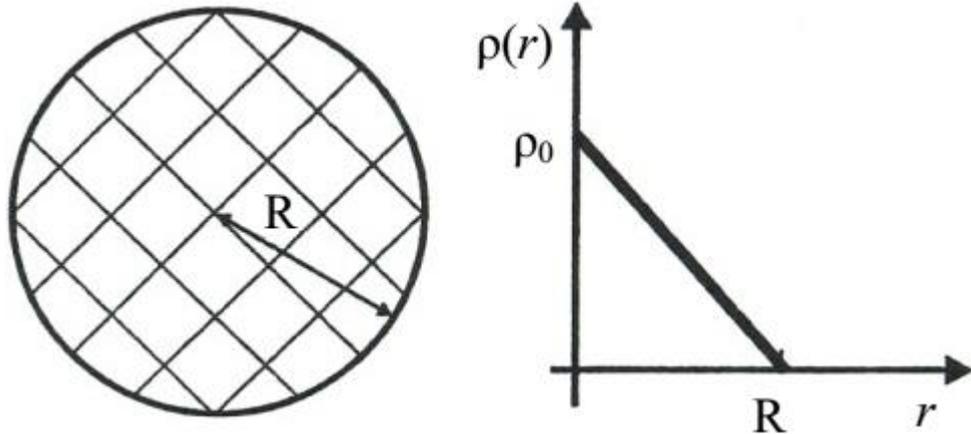


Рисунок 6 – Шар радиуса R

Уравнение Пуассона записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r}{R} \right), r < R,$$

$$0, r > R.$$

После однократного интегрирования в пределах $0 \dots r$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right), r < R, \\ -\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}, r > R. \end{cases}$$

Заметим, что – с точностью до знака – мы уже получили поле, поскольку $\vec{E} = E_r \vec{e}_r = -\nabla\varphi(x)$. Для нахождения потенциала $\varphi(x)$ требуется повторное интегрирование:

$$r > R: \varphi(r) = \int_{+\infty}^r \left(-\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 \tilde{r}^2} \right) d\tilde{r} = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 \tilde{r}^2} \Big|_{\infty}^r = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r}.$$

$$r < R: \varphi(r) = \int_{+\infty}^R \left(-\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 \tilde{r}^2} \right) d\tilde{r} + \int_R^r -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\tilde{r}}{3} - \frac{\tilde{r}^2}{4R} \right) d\tilde{r} =$$

$$= \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 R} - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\tilde{r}^2}{6} - \frac{\tilde{r}^3}{12R} \right) \Big|_R^r = \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r}{2R} \right).$$

1.4 Случай бесконечной плотности объемного заряда и бесконечного суммарного заряда

Случаи с бесконечной плотностью заряда ρ физически абсолютно невозможны, но они «появляются» в задачах с точечными зарядами, заряженными нитями и плоскостями. При этом возникают некоторые сложности, а именно:

- неограниченность поля и потенциала;
- $p = \pm\infty$ – как записать уравнение Пуассона?
- поле точечного заряда ($\vec{E} = q/4\pi\epsilon_0 \cdot \vec{r}/r^3$): пытаемся посчитать div , а получается ноль – где же заряд?
- невозможность наличия каких-либо диэлектриков: если $|\vec{E}| = \infty$, то любой диэлектрик пробивается.

Преодолеть математическую часть описанных сложностей можно путем записи p через δ – функцию. В частности,

$$p(x, y, z) = q \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0')$$

$p(x, y, z) = \lambda(z) \cdot \delta(x)\delta(y)$ – бесконечная нить по оси z (заряд $\lambda(z)$),

$p(x, y, z) = \sigma(y, z) \cdot \delta(x)$ – бесконечная плоскость yz (заряд $\sigma(y, z)$).

Мы не будем применять такой подход. Вместо этого, мы далее считаем p конечной величиной, в то время как заряженные бесконечно тонкие поверхности, нити и точечные заряды рассматриваем отдельно.

Смежная проблема: бесконечный суммарный заряд и – как следствие – некорректное поведение потенциала на ∞ . Такое происходит в декартовой системе при $p = p(x)$ и в цилиндрической ($p = p(r)$). В реальной задаче этого быть не может, т.к. есть ограничение и по другим координатам. В учебных примерах либо должен быть обеспечен нулевой суммарный заряд $q_{total} = \int p(x)dx = 0$ ($\int p(r)rdr = 0$), или же, понимая некорректность ситуации, необходимо задать $\varphi = 0$ в какой-либо точке не на бесконечности. Примером такой задачи является нахождение потенциала равномерно заряженного цилиндра.

1.5 Поток вектора через поверхность. Применение теоремы Гаусса как метод расчета полей в симметричных случаях

Для решения задач применяется выражение

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{inside},$$

представляющее собой комбинацию уравнения Максвелла с теоремой Гаусса: $\int div \vec{D} \cdot dV = \int \vec{D} \cdot d\vec{S}$ – собственно теорема Гаусса, $div \vec{D} = p$ – уравнение Максвелла ($\int p dV = q_{inside}$).

Если \vec{A} – некоторый вектор, то $\Phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S}$ – поток вектора \vec{A} через поверхность. В частности, в вышеприведенном выражении стоит поток вектора \vec{D} . Векторный элемент площади $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$. Орт нормали \vec{n} зависит от геометрии задачи (рисунок 7):

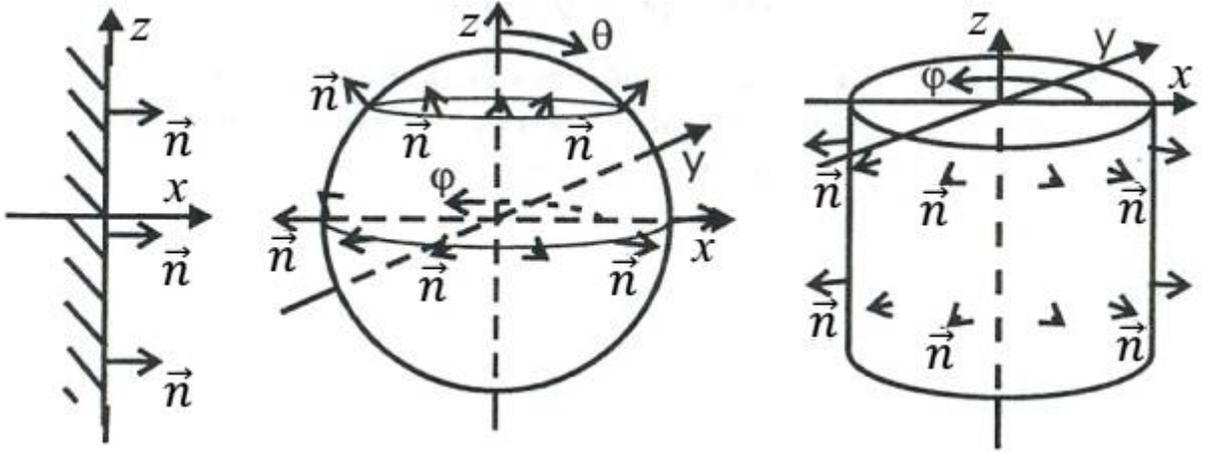


Рисунок 7 – Геометрия задачи

$$\vec{n} = \begin{cases} \vec{i}, \vec{j}, \text{ или } \vec{k} - \text{ к плоскости,} \\ \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} - \text{ к сфере,} \\ \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} - \text{ к боковой поверхности цилиндра.} \end{cases}$$

Задача 1. Заряд q расположен в точке $(0,0,l)$. Найти поток вектора \vec{E} через круг радиуса R с центром в начале координат, лежащий в плоскости xu (рисунок 8).

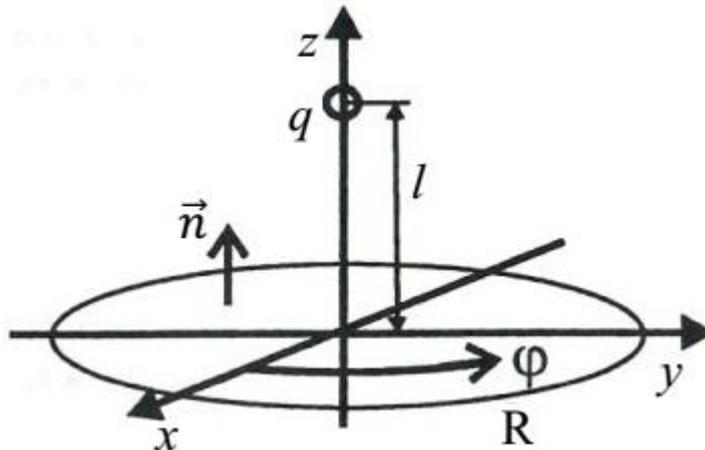


Рисунок 8 – Заряд q , расположенный в точке $(0,0,l)$

Решение. В плоскости xu зарядом создается поле

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - l\vec{k}}{(x^2 + y^2 + l^2)^{3/2}}$$

При вычислении потока нам потребуется величина $\vec{E} \cdot \vec{n}$, где \vec{n} – вектор нормали к кругу, который во всех точках ориентирован одинаково, а именно по $+\vec{k}$ или $-\vec{k}$. Примем для определенности

$$\vec{n} = +\vec{k}.$$

Тогда, поскольку $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, а $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, имеем:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{(x^2 + y^2 + l^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{(r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

В последнем выражении сделан переход к полярным координатам: r – это расстояние от начала координат в плоскости $xу$. Теперь можно производить интегрирование по площади круга:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot r dr d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot r dr d\varphi = - \frac{ql \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= - \frac{ql \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{(r^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^R = - \frac{ql}{2\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{l} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right]. \end{aligned}$$

Задача 2. Вычислить поток вектора $\vec{E} = a \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$ через сферу радиуса R .

Ответ: $\Phi = 4\pi R a$.

Теорема Гаусса верна всегда (это математический закон), но помогает только в симметричных случаях, когда очевидна геометрия поля. В декартовом случае заряд должен изменяться только вдоль одной координаты (например x), в цилиндрическом – только в зависимости от удаления от оси цилиндра r , а в сферическом тоже только от r , но r – удаление от центра шара. Тогда при правильном выборе гауссовой поверхности поток вычисляется очень просто, так как \vec{n} параллелен вектору \vec{D} на части поверхности и ортогонален ему на другой ее части (рисунок 9).

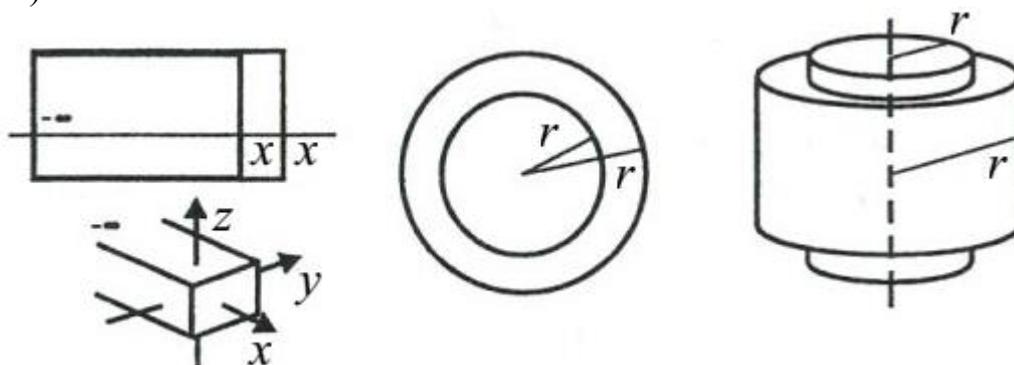


Рисунок 9 – Выбор гауссовой поверхности при расчете поля

Выбор гауссовой поверхности при расчете поля в точке x (или r):

- плоскостная геометрия: цилиндрическая поверхность любой формы сечения yz и любой его площади (S), занимающая область $(-\infty \dots x)$ вдоль оси x ;
- сферическая геометрия: сфера радиуса r ;
- цилиндрическая геометрия: цилиндрическая поверхность круглого сечения радиуса r , имеющая произвольную длину L вдоль оси z .

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} D_r(r) \cdot 4\pi r^2 - \text{сферическая геометрия,} \\ D_r(r) \cdot 2\pi rL - \text{цилиндрическая,} \\ D_x(x) \cdot S - D_x(-\infty) \cdot S - \text{плоская геометрия.} \end{cases}$$

$D_x(-\infty) \neq 0$ только в некорректных задачах. При этом записывается $D_x(-\infty) = -q_{inside}(x = +\infty)/2S$.

Как записать q_{inside} для разных геометрий? Если мы различаем между зарядами p, σ, λ, q (то есть не пытаемся все свести к p , приписывая ему и бесконечные значение), то

$$q_{inside}(r) = q_c + \sum_{i, R_i < r} 4\pi\sigma_i R_i^2 + 4\pi \int_0^r \tilde{r}^2 p(\tilde{r}) d\tilde{r} - \text{сфера,}$$

$$q_{inside} = q_{inside}(r) = \lambda_a L + \sum_{i, R_i < r} 2\pi\sigma_i R_i L + 2\pi L \int_0^r \tilde{r} p(\tilde{r}) d\tilde{r} - \text{цилиндр,}$$

$$q_{inside}(x) = \sum_{i, x_i < x} \sigma_i S + S \int_{-\infty}^x p(\tilde{x}) d\tilde{x} - \text{пластина.}$$

q_c – точечный заряд в центре, σ_i – заряды концентрических сфер радиусов R_i (таких сфер может быть произвольное количество), а $\int \tilde{r}^2 p(\tilde{r}) d\tilde{r}$ интегрирует объемный заряд. Аналогично в другой геометрии: λ_a – заряженная нить по оси цилиндра z , σ_i – заряды цилиндров радиусов R_i .

Задача 3. Пластина ширины $2a$ (ее $\varepsilon \approx 1$) заряжена как $p(x) = ax^2$; при $x = 0$ (центр пластины) $\varphi = 0$ (рисунок 10). Найти $\varphi(x)$, применяя теорему Гаусса.

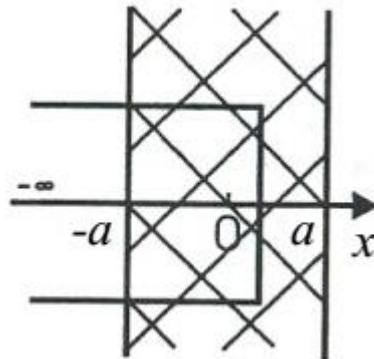


Рисунок 10 – Пластина ширины $2a$

Решение. Начать следует с нахождения поля как функции координаты $E_x(x)$. Берем гауссову поверхность в виде цилиндрической поверхности, занимающей область $(-\infty \dots x)$ вдоль оси x и имеющей площадь сечения S в плоскости yz .

Поскольку

$$D_x(-\infty) = -\frac{q_{inside}(+\infty)}{2S} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} ax^2 dx = -\frac{aa^3}{3},$$

мы имеем выражение теоремы Гаусса в виде

$$\frac{q_{inside}(x)}{2S} = \int_{-\infty}^x p(\tilde{x}) d\tilde{x} = D_x(x) - D_x(-\infty) = \varepsilon_0 E_x(x) + \frac{aa^3}{3}.$$

В зависимости от того, в какой диапазон попадает x ($x < -a$, $-a < x < a$, $x > a$), левая часть дает

$$\frac{q_{inside}(x)}{S} = \begin{cases} \int_{-a}^a a\tilde{x}^2 d\tilde{x} = \frac{2aa^3}{3}, & x > a, \\ \int_{-a}^x a\tilde{x}^2 d\tilde{x} = \frac{a}{3}(x^2 + a^2), & -a < x < a, \\ 0, & x < -a. \end{cases}$$

Подставляя q_{inside} в теорему Гаусса, с учетом $D_x = \varepsilon_0 E_x$ получаем поле

$$E_x = -\frac{aa^3}{3\varepsilon_0}, x < -a; \quad E_x = -\frac{ax^3}{3\varepsilon_0}, -a < x < a; \quad E_x = \frac{aa^3}{3\varepsilon_0}, x > a.$$

Теперь можно найти φ с учетом условия $\varphi|_{x=0} = 0$, применяя формулу

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

в которой x может быть как больше, так и меньше нуля. Соответственно, для каждого из трех отрезков, на которых найдено E_x , получаем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\int_0^x \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0} d\tilde{x} = -\frac{ax^4}{12\varepsilon_0}, & -a < x < a, \\ -\int_0^a \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0} d\tilde{x} - \int_a^x \frac{aa^3}{3\varepsilon_0} d\tilde{x} = -\frac{aa^3x}{3\varepsilon_0} + \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, & x > a, \\ -\int_0^{-a} \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0} d\tilde{x} - \int_a^x \left(\frac{aa^3}{3\varepsilon_0}\right) d\tilde{x} = \frac{aa^3x}{3\varepsilon_0} - \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, & x < -a. \end{cases}$$

Как видим, в итоге получается тот же результат, который был ранее получен путем решения уравнения Пуассона.

Задача 4. Имеются две концентрические заряженные сферы (σ_1, R_1 и σ_2, R_2) (рисунок 11). Найти $E_r(r)$ и $\varphi(r)$.

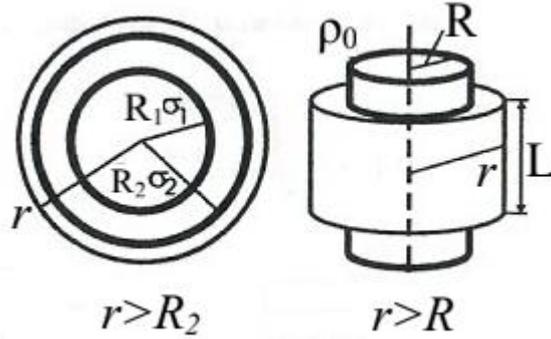


Рисунок 11 – Концентрические заряженные сферы

Решение. По теореме Гаусса,

$$q_{inside} = 4\pi r^2 D_r(r) = 4\pi \epsilon_0 r^2 E_r,$$

причем

$$q_{inside} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1, \\ 4\pi \sigma_1 R_1^2 & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ 4\pi \sigma_1 R_1^2 + 4\pi \sigma_2 R_2^2 & \text{при } r > R_2. \end{cases}$$

Соответственно, поле на каждом из участков будет

$$E_r = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1, \\ \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2} & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0 r^2} & \text{при } r > R_2. \end{cases}$$

При вычислении потенциала мы должны вычислить интеграл $\int_r^{+\infty} E_r(\tilde{r}) d\tilde{r}$.

При этом необходимо правильно выписывать E_r на каждом участке:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{R_1} 0 d\tilde{r} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} + \int_{R_2}^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= 0 + \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad \text{при } r < R_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} + \int_{R_2}^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad \text{при } R_1 < r < R_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{при } r > R_2. \end{aligned}$$

В этих выражениях для $\varphi(r)$ возможны очевидные алгебраические упрощения, но мы оставим их в таком виде, поскольку в дальнейших задачах они нам потребуются именно такими.

Задача 5. Имеется равномерно заряженный по объему (p_0) бесконечно длинный цилиндр круглого сечения радиуса R . Найти поле $E_r(r)$ и потенциал $\varphi(r)$; при вычислении потенциала положить $\varphi|_{r=0} = 0$.

Решение. В цилиндрической системе координат при наличии только объемного заряда имеем:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_r(r) \cdot 2\pi rL = q_{inside},$$

$$q_{inside} = 2\pi L \int_0^r \tilde{r} p_0(\tilde{r}) d\tilde{r}.$$

Здесь L – произвольно выбранная длина вдоль оси цилиндра, которая далее сокращается. При вычислении q_{inside} необходимо отдельно рассматривать случаи $r < R$ и $r > R$:

$$q_{inside} = \begin{cases} 2\pi L \int_0^r \tilde{r} p_0(\tilde{r}) d\tilde{r} = \pi L p_0 r^2, r < R, \\ 2\pi L \int_0^R \tilde{r} p_0 d\tilde{r} = \pi L p_0 R^2, r > R. \end{cases}$$

После этого, так как $D_r = \varepsilon_0 E_r$, получаем поле:

$$E_r(r) = \frac{1}{2\pi L \varepsilon_0 r} \cdot 2\pi p_0 r^2 = \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \cdot r, r < R,$$

$$E_r(r) = \frac{1}{2\pi L \varepsilon_0 r} \cdot 2\pi p_0 R^2 = \frac{p_0 R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, r > R.$$

Потенциал находится интегрированием E_r с оговоренным в задаче условием $\varphi|_{r=0} = 0$:

$$\varphi(r) = - \int_0^r E_r(\tilde{r}) d\tilde{r},$$

$$\varphi(r) = - \int_0^r \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \cdot \tilde{r} d\tilde{r} = - \frac{p_0}{4\varepsilon_0} \cdot r^2, r < R,$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= - \int_0^R \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \cdot \tilde{r} d\tilde{r} - \int_R^r \frac{p_0 R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\tilde{r}} d\tilde{r} = - \frac{p_0 R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{p_0 R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{R} = \\ &= - \frac{p_0 R^2}{4\varepsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right), r > R. \end{aligned}$$

Из вида получившегося $\varphi(r)$ ясно, что на бесконечности потенциал оказывается бесконечным. Это следствие некорректности ситуации: описанный в задаче цилиндр имеет бесконечную длину и несет бесконечный суммарный заряд, чего на практике быть не может. Чтобы избежать проблем, возникающих при естественном условии $\varphi|_{r=\infty} = 0$, искусственно задано $\varphi|_{r=0} = 0$.

1.6 Проводники в электрическом поле. Электростатический метод изображений

Поле внутри проводника равно нулю, поэтому проводники геометрически ограничивают область, где должны решаться уравнения электростатики. На поверхности проводника $\varphi = const$ (эквипотенциальность). Это достигается индуцированием зависящей от координаты поверхностной плотности заряда σ . Поле ортогонально к поверхности проводника, но не обязательно однородно. Заряд σ на поверхности связан с полем как $\sigma = \varepsilon_0 E$.

Метод изображений состоит в замене системы «заряды + проводящая поверхность» на систему «заряды + изображения». Правила построения изображений обеспечивают эквипотенциальность требуемой поверхности. Для точечного заряда q , расположенного на расстоянии l от плоскости или центра сферы, а также для прямой нити λ , расположенной на расстоянии l от оси цилиндра (рисунок 12):

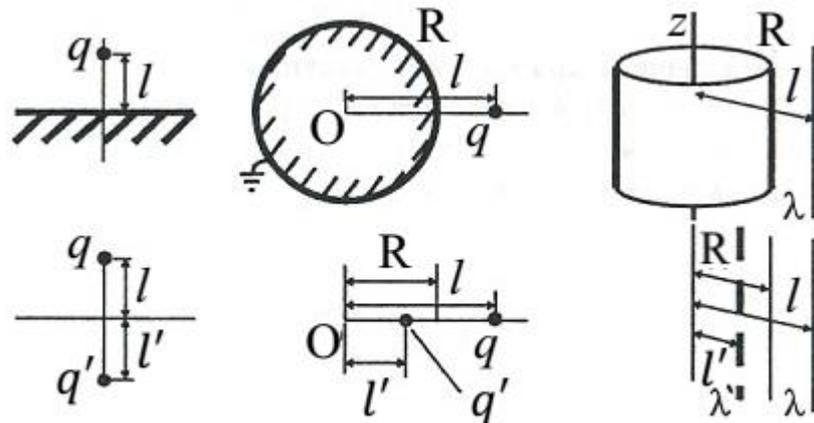


Рисунок 12 – Правила построения изображений

плоскость $q \rightarrow q' = -q, l \rightarrow l' = l$;

заземленная сфера $q \rightarrow q' = -qR/l, l \rightarrow l' = R^2/l$;

цилиндр $\lambda \rightarrow -\lambda, l \rightarrow l' = R^2/l$.

Если сфера не заземлена, то надо еще дополнительно поставить заряд $+qR/l$ в начало координат. Цилиндр и плоскость заземлены по определению (они простираются до бесконечности, где $\varphi = 0$).

Основным практическим случаем является проводящая плоскость: например, Земля. Он легко обобщается на систему зарядов (нитей, колец и т. д.) – всю ее надо отобразить относительно плоскости.

Задача 1. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости (рисунок 13). Найти плотность индуцированного заряда как функцию расстояния r от проекции заряда на плоскость.

Ответ: $\sigma(r) = -\frac{ql}{2\pi(l^2+r^2)^{3/2}}$.

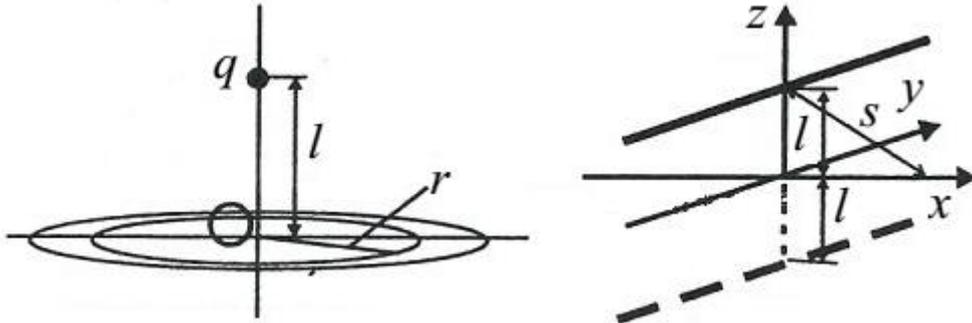


Рисунок 13 – Точечный заряд q на расстоянии l от проводящей плоскости

Задача 2. Бесконечная прямая нить, несущая заряд λ на единицу длины, висит над проводящей плоскостью на расстоянии l от нее. Найти распределение электрического поля и поверхностной плотности индуцированного заряда вблизи плоскости.

Решение. Сначала находим поле одной нити по теореме Гаусса, затем отображаем нить и ищем поле от нити–изображения $-\lambda$, далее векторно суммируем эти поля. После этого можно найти σ в любой точке следующим образом: $-\varepsilon_0 \cdot E_{wire+image}$.

Поле одной нити на расстоянии s от нее равно

$$E_{wire} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}$$

и направлено от оси нити или к ней. Поэтому поле одной нити в плоскости на расстоянии x от проекции нити на плоскость будет ($s = \sqrt{l^2 + x^2}$):

$$E_{wire} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2}}$$

Такое же по абсолютной величине поле создается нитью–изображением. При векторном суммировании полей двух нитей параллельные плоскости компоненты уничтожаются, а перпендикулярные ей – удваиваются:

$$E_{wire+image} = 2 \cdot E_{wire,\perp} = 2 \cdot E_{wire} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{\lambda l}{\pi\varepsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2}}$$

Соответственно, имеем плотность индуцированного заряда:

$$\sigma(x) = -\varepsilon_0 E_{wire+image} = -\frac{\lambda l}{\pi(l^2 + x^2)}$$

Проинтегрировав $\sigma(x)$ по x от $-\infty$ до $+\infty$, можно убедиться, что суммарный индуцированный заряд на единицу длины проекции нити составляет $-\lambda$, как и должно быть.

Задача 3. Очень длинная равномерно заряженная зарядом λ_0 нить расположена по оси z и не доходит до проводящей плоскости xu на расстояние l (рисунок 14). Найти поле вблизи плоскости xu как функцию расстояния r от начала координат.

Ответ: $\sigma(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{l^2+r^2}}$.

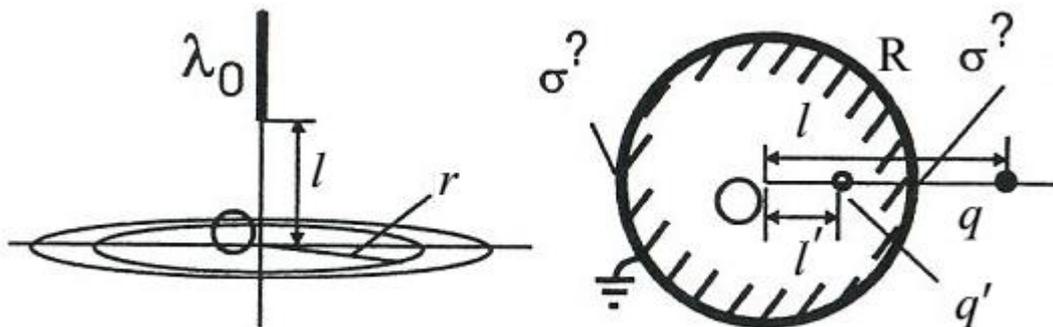


Рисунок 14 – Равномерно заряженная зарядом λ_0 нить

Задача 4. На расстоянии l от центра заземленной сферы радиуса $R < l$ расположен точечный заряд q . Найти плотность заряда, индуцированного в ближайшей к заряду и в наиболее удаленной от него точках шара.

Решение. По правилам размещения заряда–изображения помещаем заряд $-qR/l$ в точку на оси «центр сферы – заряд q », удаленную от центра на расстояние R^2/l . Тогда расстояние от заряда–изображения до ближайшей к заряду точки сферы будет $R - R^2/l$. В этой точке и поле от истинного заряда, и поле от заряда–изображения направлены к центру сферы, а их сумма по абсолютной величине будет

$$E_{near} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(l-R)^2} + \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{\left(R - \frac{R^2}{l}\right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(l-R)^2} + \frac{R}{l \left(R - \frac{R^2}{l}\right)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1+l/R}{(l-R)^2}.$$

Сразу же находится σ :

$$\sigma_{near} = -\epsilon_0 E_{near} = -\frac{q}{(l-R)^2} \cdot (1+l/R).$$

Аналогично находим плотность индуцированного заряда в удаленной точке, только там поле от заряда q направлено от центра, а от изображения – на центр. Сумма этих полей оказывается направленной к центру и по модулю равной:

$$E_{far} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{l}{R} - 1}{(l+R)^2},$$

так что

$$\sigma_{far} = -\varepsilon_0 E_{far} = -\frac{q}{4\pi(l+R)^2} \cdot \left(\frac{l}{R} - 1\right).$$

1.7 Расчет дипольных моментов и полей, ими создаваемых

Если нас интересует только поле на большом расстоянии от системы зарядов с нулевым суммарным зарядом ($\int dq = 0$), то можно добиться упрощения расчетов по сравнению с непосредственным интегрированием закона Кулона, применяя формулы:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3\vec{r}_p(\vec{p} \cdot \vec{r}_p) - r_p^2 \vec{p}}{r_p^5}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_p}{r_p^3}.$$

Эти формулы содержат дипольный момент системы \vec{p} :

$$\vec{p} = \int \vec{r}' dq,$$

где \vec{r}' – вектор из произвольно выбранного начала отсчета в элемент, создающий поле, как при интегрировании закона Кулона (рисунок 15). В зависимости от геометрии задачи, величина dq – это ρdV , σdS , λdl или просто q (в последнем случае нет интегрирования).

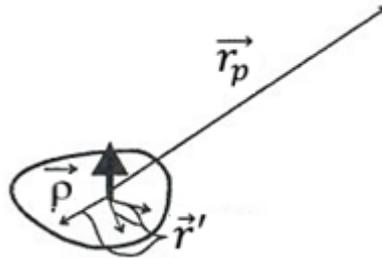


Рисунок 15 – Система зарядов

Задача 1. Найти дипольный момент кольца радиуса R , заряженного по закону $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ (рисунок 16).

Ответ: $\vec{p} = \lambda_0 R^2 \pi \vec{i}$.

Задача 2. Найти \vec{p} для заряженного диска ($\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$) радиуса R .

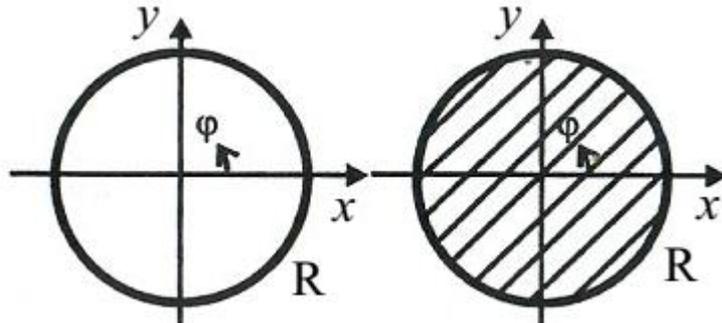


Рисунок 16 – Заряженный диск радиуса R

Решение. Мы имеем дело с заряженной поверхностью, так что элемент заряда должен быть записан как

$$dq = \sigma \cdot dS.$$

При круговой симметрии логично принять начало координат за начало

отсчета. Тогда

$$\vec{r}' = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j},$$

$$dS = r dr d\varphi.$$

где r – удаление от начала координат, которое пробегает значения от 0 до R . Угол φ изменяется от 0 до 2π , вне зависимости от r . Поэтому для дипольного момента имеем:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int \vec{r}' dq = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j}) \sigma_0 \cos \varphi r dr d\varphi = \\ &= \frac{\sigma_0 R^3}{3} \cdot \left[\vec{i} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \vec{j} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{\sigma_0 R^3}{3} \cdot [\pi \vec{i} + 0 \vec{j}] = \frac{\sigma_0 \pi R^3}{3} \vec{i}. \end{aligned}$$

Разумеется, в ответе надо сохранить вектор, так как дипольный момент – векторная величина. Как видно, \vec{p} сонаправлен с \vec{i} , как и должно быть, поскольку \vec{p} должен идти от “–” к “+”.

Задача 3. Сфера радиуса R заряжена как $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ (рисунок 17). Найти дипольный момент \vec{p} .

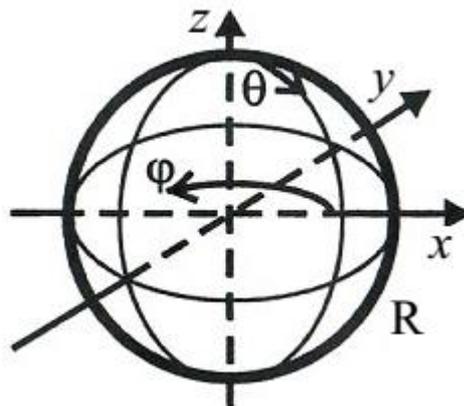


Рисунок 17 – Сфера радиуса R

Ответ: $\vec{p} = \frac{4}{3} \pi \sigma_0 R^3 \vec{k}$.

Задача 4. Найти поле и потенциал, создаваемые двумя разноименно ($\lambda, -\lambda$) заряженными бесконечными нитями в точке P на очень большом расстоянии s от нитей (рисунок 18). Нити разнесены на расстояние l , угол в плоскости, перпендикулярной нитям, между соединяющей нити прямой и направлением на точку P составляет α .

Решение. В данном случае мы не можем непосредственно применять формулы для поля диполя, так как дипольный момент описанной системы равен бесконечности. Тем не менее можно вычислить поле, разбивая описанные в условии две нити на систему пар коротких кусочков длины dz , а затем проинтегрировав потенциалы $d\varphi$, создаваемые такими парами. Мы при этом выбираем ось z совпадающей с нитью $-\lambda$, а ось x по прямой,

соединяющей нити (от оси x отсчитывается угол a , упомянутый в условии).

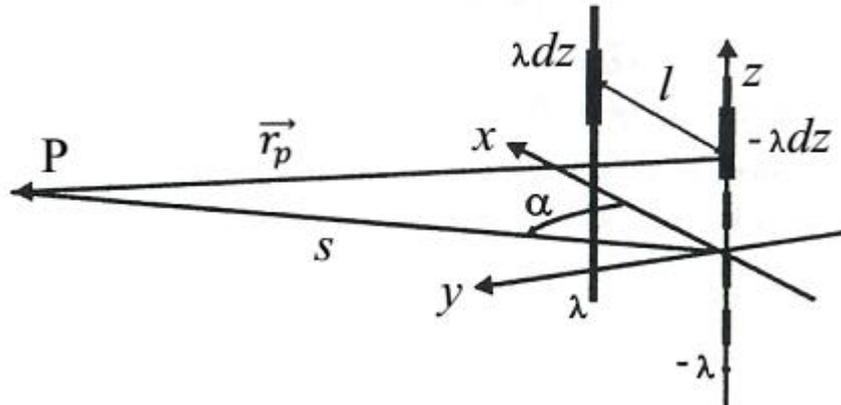


Рисунок 18 – Разноименно $(\lambda, -\lambda)$ заряженные бесконечные нити
 Один из кусочков пары несет заряд λdz , а другой $-\lambda dz$. Каждая такая пара обладает дипольным моментом

$$d\vec{p} = l \cdot \lambda dz \vec{i}.$$

Вектор \vec{r}_p оказывается разным для каждой пары. Мы будем его отсчитывать от точки $(0,0,z)$, характеризующей положение одного из кусочков каждой пары. При этом

$$\vec{r}_p = s \cos a \vec{i} + s \sin a \vec{j} - z \vec{k},$$

так что потенциал, создаваемый парой кусочков в точке P, равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}_p}{r_p^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda l s \cos a dz}{(z^2 + s^2)^{3/2}}.$$

Теперь необходимо проинтегрировать $d\varphi$ ($\varphi = \int d\varphi$):

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda l s \cos a dz}{(z^2 + s^2)^{3/2}} = \frac{\lambda l s \cos a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{s^2 \sqrt{z^2 + s^2}} = \frac{\lambda l \cos a}{2\pi\epsilon_0 s}.$$

Чтобы вычислить поле, необходимо вычислить градиент от полученного потенциала. Поскольку мы не можем брать градиент в сферической системе (у нас φ зависит не только от s , но и от a), следует применить несколько громоздкий, но простой метод – переписать φ , введя декартовы координаты точки P:

$$x = s \cos a, \quad y = s \sin a.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{\lambda l x}{2\pi\epsilon_0 s^2} = \frac{\lambda l x}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}.$$

После чего можно найти поле в векторном виде, взяв градиент:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \vec{i} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \vec{j} \right].$$

Если требуется абсолютная величина поля, то

$$E = \frac{l\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{(-x^2 + y^2)^2 + (-2xy)^2}{(x^2 + y^2)^4}} = \frac{l\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)} = \frac{l\lambda}{2\pi\epsilon_0 s^2}.$$

1.8 Вычисление электрической энергии и электрических сил

Полная энергия заряженной системы определяется как

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq.$$

Она состоит из собственных энергий тел системы $W_{own,i}$ и энергий взаимодействия каждого из тел со всеми остальными $W_{int,i,all}$. При необходимости можно разбить $W_{int,i,all}$ на энергии попарного взаимодействия $W_{int,i,j}$. Для вычисления собственной энергии i -го тела при интегрировании учитывается только им создаваемый потенциал, а для нахождения $W_{int,i,all}$ – напротив, потенциал всех тел, кроме i -го.

$$\begin{aligned} W &= \sum_i W_{own,i} + \sum_i W_{int,i,all} = \sum_i W_{own,i} + \sum_{i,j} W_{int,i,j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \int \varphi_i dq_i + \frac{1}{2} \sum_i \int \varphi_{all,except\ i} dq_i = \frac{1}{2} \sum_i \int \varphi_i dq_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int \varphi_j dq_i. \end{aligned}$$

При наличии заряженных точек или нитей в местах их нахождения оказывается $\varphi = \infty$. Собственные энергии таких объектов и полная энергия формально равны ∞ , так что рассмотрению подлежат лишь энергии взаимодействия.

В случае двух тел энергия их взаимодействия – это энергия взаимодействия первого тела со вторым $W_{int,1,2}$ плюс равная ей энергия взаимодействия второго тела с первым $W_{int,2,1}$:

$$W_{int} = 2W_{int,1,2} = \int \varphi_2 dq_1 = \int \varphi_1 dq_2.$$

Сила взаимодействия двух тел может быть найдена как сила, действующая со стороны первого тела на второе или (что с точностью до знака то же самое) как сила, с которой второе тело действует на первое:

$$\vec{F}_{1\ to\ 2} = \int \vec{E}_1 dq_2, \quad \vec{F}_{2\ to\ 1} = \int \vec{E}_2 dq_1.$$

Здесь \vec{E}_1 – поле, создаваемое одним первым, а \vec{E}_2 – одним вторым телом.

Задача 1. Шар R , равномерно заряжен по объему (ρ_0). Найти собственную энергию заряженного шара.

Решение. Мы должны сначала найти потенциал внутри шара, для чего ищем по теореме Гаусса поле:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot q_{inside}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{4\pi p_0 r^3}{3} = \frac{p_0 r}{3\epsilon_0}, r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{4\pi p_0 R^3}{3} = \frac{p_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}, r > R. \end{cases}$$

Это поле мы интегрируем, получая $\varphi(r)$ для $r < R$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{+\infty} E_r(\tilde{r}) d\tilde{r} = \int_r^R \frac{p_0 \tilde{r}}{3\epsilon_0} d\tilde{r} + \int_R^{\infty} \frac{p_0 R^3}{3\epsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= \frac{p_0 (R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} + \frac{p_0 R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{p_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{p_0 R^2}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Имея потенциал и записав dq как

$$dq = p_0 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$

можно найти энергию шара непосредственным интегрированием:

$$\begin{aligned} W_{own} &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(r) p_0 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi \frac{1}{2} \int_0^R \varphi(r) p_0 r^2 dr = \\ &= 2\pi \cdot \left(-\int_0^R \frac{p_0 r^2}{6\epsilon_0} p_0 r^2 dr + \int_0^R \frac{p_0 R^2}{2\epsilon_0} p_0 r^2 dr \right) = \\ &= -\frac{2\pi p_0^2 R^5}{30\epsilon_0} + \frac{2\pi p_0^2 R^5}{6\epsilon_0} = \frac{4\pi p_0^2 R^5}{15\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Эта энергия совпадает с полной энергией, поскольку система состоит только из одного тела.

Задача 2. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости (рисунок 19). Найти энергию и силу взаимодействия заряда со своим изображением.

Ответ: $W_{int} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l}, \vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2} \vec{k}, \vec{k} \perp \text{плоскости.}$

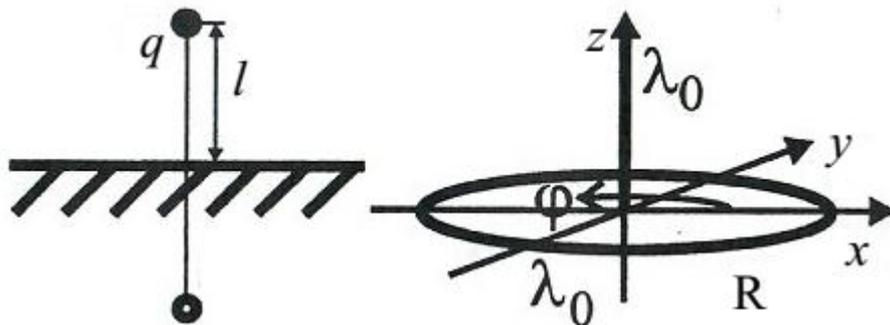


Рисунок 19 – Точечный заряд q на расстоянии l от проводящей плоскости

Задача 3. Длинная нить расположена на оси кольца R и упирается в его плоскость. И нить, и кольцо заряжены равномерно с плотностью λ_0 . Найти силу их взаимодействия.

Решение. Требуемая в задаче сила может быть найдена либо путем интегрирования заряда нити с полем кольца, либо путем интегрирования заряда кольца с полем нити:

$$\vec{F} = \int \vec{E}_{ring} dq_{wire} = \int \vec{E}_{wire} dq_{ring}.$$

Мы осуществим оба эти способа. Введем систему координат с началом в центре кольца так, чтобы кольцо оказалось лежащим в плоскости xy , а нить – вдоль оси z , занимая область координат $z > 0$. Тогда

$$dq_{wire} = \lambda_0 dz, \quad dq_{ring} = \lambda_0 R d\varphi.$$

Поле кольца в точке $(0,0,z)$ находится посредством интегрирования закона Кулона, которое в итоге даёт:

$$\vec{E}_{ring} = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Поле, создаваемое нитью в точке $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$, будет равно:

$$\vec{E}_{wire} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R} ([\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}] - \vec{k}).$$

После этого проводим интегрирование с целью нахождения силы:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ring \text{ to } wire} &= \int \vec{E}_{ring} dq_{wire} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \lambda_0 dz = \frac{\lambda_0^2 \vec{k}}{2\varepsilon_0}, \\ \vec{F}_{wire \text{ to } ring} &= \int \vec{E}_{wire} dq_{ring} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot ([\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}] - \vec{k}) \lambda_0 R d\varphi \\ &= -\frac{\lambda_0^2 \vec{k}}{2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Как и должно быть, сила, действующая со стороны кольца на нить $\vec{F}_{ring \text{ to } wire}$, с точностью до знака равна силе, действующей со стороны нити на кольцо $\vec{F}_{wire \text{ to } ring}$ – в соответствии с третьим законом Ньютона.

2. Поляризуемые среды

2.1 Расчет электрических полей при наличии диэлектриков. Поляризованность. Связанный заряд

Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= p, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned}$$

и уравнение Пуассона

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\frac{p}{\varepsilon_0}$$

применимы при наличии любых диэлектриков. Следует только помнить, что ε может зависеть от координат, и его в общем случае нельзя выносить из-под знака div . Если при решении уравнения Пуассона потенциал φ найден на отдельных участках, то «сшивка» осуществляется согласно условиям

$$\varphi|_{x_0+} = \varphi|_{x_0-}, \quad \varepsilon|_{x_0+} \cdot \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x_0+} = \varepsilon|_{x_0-} \cdot \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x_0-}.$$

Теорема Гаусса как математический закон не теряет своей силы при наличии диэлектриков, но для ее практического использования не только плотность заряда p , но и ε должны иметь высокосимметричное распределение. Например, в случае сферической симметрии ε , как и p , должен зависеть только от r .

Интегрирование закона Кулона в системах с диэлектриками является недопустимым, за исключением одной искусственной ситуации. Если $\varepsilon = \text{const}$ во всем пространстве (кроме проводников), то в задачах для вакуума просто заменяем ε_0 на произведение $\varepsilon_0 \varepsilon$. В частности, для точечного заряда $\vec{E} = 1/4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot q\vec{r}_p/r_p^3$.

Реакция диэлектрика на электрическое поле заключается в поляризации диэлектрика – ориентации дипольных моментов его молекул по полю. Количественно этот эффект тем сильнее, чем выше диэлектрическая проницаемость и чем сильнее поле. Поляризованные молекулы сами являются источниками поля, которое накладывается на внешнее поле, что осложняет ситуацию даже при простой геометрии (рисунок 20).

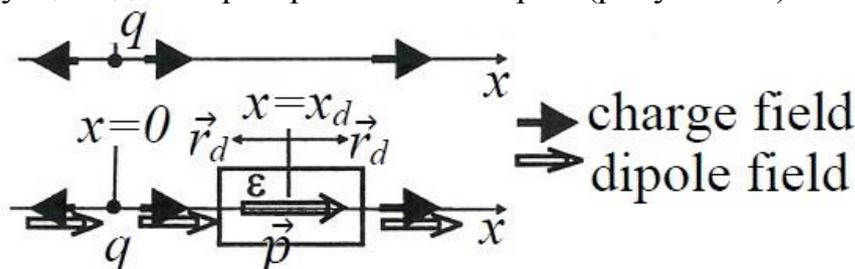


Рисунок 20 – Диэлектрик в электрическом поле

Задача 1. Диэлектрический брусок внесен в поле точечного заряда. В

какую сторону (качественно) изменится поле на прямой заряд–брусок в сравнении с тем, каким оно было бы при отсутствии бруска?

Решение. Диэлектрический брусок поляризуется в поле – возникает диполь \vec{p} , ориентированный от заряда q , если $q > 0$. Поле этого диполя накладывается на поле заряда. Направим ось x от заряда в сторону диполя и введем вектор \vec{r}_d от диполя в точку, где оценивается поле. Тогда $\vec{p} = p\vec{i}$, $\vec{r}_d = r_d\vec{i}$ для $x > x_d$ и $\vec{r}_d = -r_d\vec{i}$ для $x < x_d$ (x_d – координата диполя). По формуле $\vec{E}_d \approx (4\pi\epsilon_0)^{-1}r_d^{-5}(3\vec{r}_d(\vec{p} \cdot \vec{r}_d) - \vec{p}r_d^2)$ получаем, что поле диполя \vec{E}_d в любом месте оси x направлено в сторону ее положительного направления. Это означает, что при $x > 0$ поле точечного заряда q , существовавшее без диэлектрика, возрастет, а при $x < 0$ – уменьшится.

Количественные характеристики поляризации – вектор поляризованности \vec{P} и связанный заряд p' :

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E},$$

$$p' = -\text{div}\vec{P}, \quad \sigma' = -P_x + P_x.$$

Места локализации связанного заряда:

- там, где есть свободный заряд p
- там, где $\epsilon \neq \text{const}$ (диэлектрик неоднороден)
- σ' может быть отлична от 0 (т.е. $p' = \infty$):
- там, где есть σ (например, обкладки конденсатора)
- там, где имеет место разрыв ϵ (стык диэлектриков).

Суммарный связанный заряд, проинтегрированный по всему объему тела, равен 0 – иначе тело оказывается изначально заряженным.

Задача 2. Найти плотность связанного заряда у границы металла с диэлектриком (ϵ). Заряд металла σ (рисунок 21).

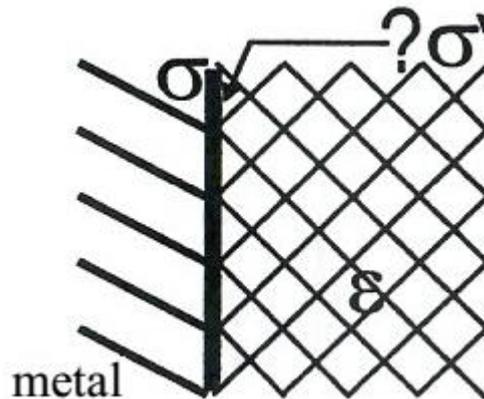


Рисунок 21 – Граница металла с диэлектриком

Ответ: $\sigma' = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\sigma$.

2.2 Расчет поля между эквипотенциальными поверхностями в отсутствие объемного заряда при $\varepsilon \neq \text{const}$

Это типичная ситуация в конденсаторе. Для ее рассмотрения используется уравнение Пуассона с $p = 0$, которое интегрируется с учетом условий $\varphi(x_1) = \varphi_1, \varphi(x_2) = \varphi_2$ (для плоскостного случая) или $\varphi(r_1) = \varphi_1, \varphi(r_2) = \varphi_2$ (сфера, цилиндр). Рассмотрим далее случай плоскости (рисунок 22).

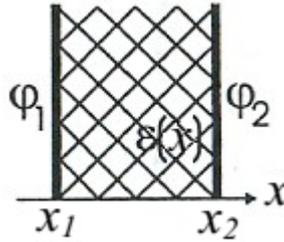


Рисунок 22 – Конденсатор

$$\text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon(x) \text{grad} \varphi) = 0,$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{A}{\varepsilon(x)},$$

$$\varphi(x) = \varphi_1 + A \cdot \int_{x_1}^x \varepsilon^{-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad A = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon^{-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}}.$$

Далее можно дифференцированием по x найти поле E_x и D_x :

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -A\varepsilon^{-1}(x), \quad D_x = \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_x = -\varepsilon_0 A.$$

Следующий шаг – нахождение поляризованности и ее дивергенции, то есть связанного заряда p' :

$$P_x = \varepsilon_0(\varepsilon(x) - 1)E_x = -A\varepsilon_0 \frac{\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon(x)}, \quad p' = -\frac{dP_x}{dx} = \varepsilon_0 \cdot A \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon^2(x)}.$$

В точках разрыва $\varepsilon(x)$ (на стыке двух диэлектриков) производная $\varepsilon'(x)$ обращается в бесконечность, формула для p' становится неприменимой и надо искать поверхностный связанный заряд:

$$\sigma'(x_0) = -P_x|_{x_0+} + P_x|_{x_0-} = A\varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon(x_0+) - 1}{\varepsilon(x_0+)} - \frac{\varepsilon(x_0-) - 1}{\varepsilon(x_0-)} \right].$$

Обязательно проверяются условия на границах (в данном случае x_1, x_2) на наличие поверхностного связанного заряда:

$$\sigma'(x_2) = P_x|_{x_2-} = -A\varepsilon_0 \frac{\varepsilon(x_2-) - 1}{\varepsilon(x_2-)}, \quad \sigma'(x_1) = -P_x|_{x_1+} = A\varepsilon_0 \frac{\varepsilon(x_1+) - 1}{\varepsilon(x_1+)}.$$

В сферическом и цилиндрическом случаях надо правильно писать div в соответствующей системе координат. Выражения для $\varphi(r)$ принимают вид:

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{x_1}^{x_2} \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} \cdot \int_{R_1}^r \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) \tilde{r}^{-1} d\tilde{r} - \text{цилиндрический,}$$

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-2} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} \cdot \int_{R_1}^r \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) \tilde{r}^{-2} d\tilde{r} - \text{сферический случай,}$$

после чего $E_r(r)$ и связанные заряды находятся аналогично тому, как это было сделано выше для плоскостного (декартового) случая.

Задача 1. Получить выражения для $\varphi(r)$, $E_r(r)$, p' , σ' в случае цилиндрической и сферической симметрии, если заданы зависимость $\varepsilon(r)$, а также потенциалы граничных поверхностей $\varphi(R_{1(2)}) = \varphi_{1(2)}$, $p = 0$.

Указание: для промежуточной проверки использовать вышеприведенные выражения для потенциала.

Задача 2. Пространство между обкладками плоского конденсатора шириной d заполнено неоднородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon(x) = 1 + ax$. Найти $\varphi(x)$, $E_x(x)$, p' , σ' на обкладках.

Решение. Будем считать, что конденсатор занимает область координат $x = 0 \dots d$, причем потенциал одной обкладки ($x = 0$) равен $\varphi_1 = 0$, а другой $\varphi_2 = U$. Тогда зависимость потенциала от координаты находится как

$$\varphi(x) = U \cdot \left(\int_0^d \frac{1}{1 + a\tilde{x}} d\tilde{x} \right)^{-1} \cdot \int_0^x \frac{1}{1 + a\tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{U}{\ln(1 + ad)} \cdot \ln(1 + ax),$$

после чего находим поле $E_x(x)$ дифференцированием:

$$E_x(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{U}{\ln(1 + ad)} \cdot \frac{a}{1 + ax}.$$

Далее получаем поляризованность P_x :

$$P_x(x) = \varepsilon_0(ax)E_x = -\frac{\varepsilon_0 a^2 U x}{\ln(1 + ax)(1 + ax)}.$$

Взяв дивергенцию, получаем объемный связанный заряд:

$$p'(x) = -\text{div}\vec{P} = -\frac{d}{dx}P_x = +\frac{\varepsilon_0 a^2 U}{\ln(1 + ad)} \cdot \frac{1}{(1 + ax)^2}.$$

Проверяем условия на обкладках на наличие поверхностного заряда σ' :

$$\begin{aligned} \sigma'|_{x=0} &= -P_x|_{x=0+} = 0, \\ \sigma'|_{x=d} &= P_x|_{x=d-} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U d}{\ln(1 + ad)(1 + ad)}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, $\sigma'|_{x=0} = 0$, поскольку у обкладки $x = 0$ диэлектрическая проницаемость равна единице. Если $U = 0$, то $\sigma'|_{x=d} < 0$, что тоже естественно: у обкладки $x = d$ должен концентрироваться отрицательный связанный заряд. Для проверки найдем суммарный связанный

заряд на единицу площади обкладки конденсатора – этот заряд должен оказаться равным нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{q'}{S} &= \int_0^d p'(x) dx + \sigma'|_{x=0} + \sigma'|_{x=d} = \\ &= \int_0^d \frac{\varepsilon_0 a^2 U}{\ln(1+ad)} \cdot \frac{1}{(1+ax)^2} dx + 0 - \frac{\varepsilon_0 a^2 U d}{\ln(1+ad)(1+ad)} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 a^2 U}{\ln(1+ad)} \cdot \frac{-1}{a(1+ax)} - \frac{\varepsilon_0 a^2 U d}{\ln(1+ad)(1+ad)} = 0. \end{aligned}$$

2.3 Расчет поля симметричного распределения зарядов по теореме Гаусса при $\varepsilon \neq \text{const}$

Рассмотрим пример сферической системы $p = p(r)$, кроме того, возможно, имеются заряженные сферы (R_i, σ_i) и/или точечный заряд q_c в центре. Помимо этого, $\varepsilon = \varepsilon(r)$. Согласно теореме Гаусса,

$$\begin{aligned} q_{inside} &= 4\pi r^2 D_r = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon(r) r^2 E_r, \\ E_r &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon(r) r^2} q_{inside}, \quad P_r = \frac{\varepsilon(r) - 1}{4\pi \varepsilon(r) r^2} q_{inside}, \\ p'(r) &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = -\frac{1}{4\pi r^2} \left[\frac{\varepsilon'(r)}{\varepsilon^2(r)} q_{inside}(r) + \frac{\varepsilon(r) - 1}{\varepsilon(r)} q'_{inside}(r) \right]. \end{aligned}$$

При наличии только объемного стороннего заряда p

$$p'(r) = -\frac{1}{4\pi r^2} \left[\frac{\varepsilon'(r)}{\varepsilon^2(r)} q_{inside}(r) + \frac{\varepsilon(r) - 1}{\varepsilon(r)} 4\pi r^2 p(r) \right].$$

В точках разрыва $\varepsilon(r)$ (на стыке двух диэлектриков) или $q_{inside}(r)$ (в момент «перехода» через заряженную сферу) соответствующая производная $\varepsilon'(r)$ или $q'_{inside}(r)$ имеет разрыв. При этом поверхностный связанный заряд составляет:

$$\sigma'|_{r=r_0} = -P_r|_{r=r_0+} + P_r|_{r=r_0-}.$$

Другие значения r проверять на наличие связанного заряда бессмысленно, так как там заведомо $\sigma' = 0$.

Задача 1. Имеются две концентрические заряженные сферы (σ_1, R_1 и σ_2, R_2). Найти $E_r(r)$, $\varphi(r)$ и σ' , если пространство между сферами заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью ε .

Решение. Такая задача, только без диэлектрика между обкладками, уже была решена нами с использованием теоремы Гаусса. Единственным отличием здесь будет связь $D_r(r)$ и $E_r(r)$ в области $R_1 < r < R_2$: если раньше она была $D_r = \varepsilon_0 E_r$, то теперь $D_r = \varepsilon_0 \varepsilon E_r$. Это повлечет за собой некоторые изменения в формулах.

Как и раньше,

$$q_{inside} = 4\pi r^2 D_r(r),$$

причем

$$q_{inside} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1, \\ 4\pi\sigma_1 R_1^2 & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ 4\pi\sigma_1 R_1^2 + 4\pi\sigma_2 R_2^2 & \text{при } r > R_2. \end{cases}$$

Поле на каждом из участков будет

$$E_r = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1, \\ \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2} & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} & \text{при } r > R_2. \end{cases}$$

При вычислении потенциала мы должны вычислить $\int_r^{+\infty} E_r(\tilde{r}) d\tilde{r}$. При этом необходимо правильно выписывать E_r на каждом участке:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{R_1} 0 d\tilde{r} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \tilde{r}^2} d\tilde{r} + \int_{R_2}^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= 0 + \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad \text{при } r < R_1, \\ \varphi(r) &= \int_r^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \tilde{r}^2} d\tilde{r} + \int_{R_2}^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \\ &= \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \varphi(r) &= \int_r^{+\infty} \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 \tilde{r}^2} d\tilde{r} = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{при } r > R_2. \end{aligned}$$

В некоторых выражениях для $\varphi(r)$ (но не всюду!) появилась дополнительная величина ε .

Для нахождения σ' на сферах $r = R_1$ и $r = R_2$ нам потребуются значения поляризованности с обеих сторон каждой из сфер:

$$\begin{aligned} P_r|_{r=R_1-} &= 0, \quad P_r|_{r=R_1+} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_r|_{r=R_1+} = \frac{\sigma_1(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}, \\ P_r &= \frac{\sigma_1 R_1^2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon R_2^2}, \quad P_r = 0. \end{aligned}$$

Нулевые значения появились из-за отсутствия диэлектрика в областях $r < R_1$ и $r > R_2$. Сразу же находим $\sigma'|_{r=R_1}$ и $\sigma'|_{r=R_2}$ (на других поверхностях никакого связанного заряда нет):

$$\sigma'|_{r=R_1} = -P_r|_{r=R_1+} = -\frac{\sigma_1(\varepsilon - 1)}{\varepsilon},$$

$$\sigma'|_{r=R_2} = P_r|_{r=R_2-} = \frac{\sigma_1 R_1^2 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon R_2^2}.$$

Легко проверить, что суммарный связанный заряд, то есть $4\pi R_1^2 \sigma'|_{r=R_1} + 4\pi R_2^2 \sigma'|_{r=R_2}$, равен нулю, как и должно быть.

Задача 2. Шар радиуса R равномерно заряжен по объему сторонним зарядом p . Проницаемость шара ε . Найти $E_r(r)$, $\varphi(r)$, $p'(r)$, σ' на краю шара.

$$\text{Ответ: } E_r(r) = \frac{p_0 r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}, r < R; E_r(r) = \frac{p_0 R^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon r^2}, r > R;$$

$$\varphi(r) = \frac{p_0 R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{p_0}{6\varepsilon_0 \varepsilon} (R^2 - r^2), r < R; \varphi(r) = \frac{p_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, r > R;$$

$$p' = -\frac{p_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}, r < R; \sigma' = \frac{p_0 R(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon}.$$

2.4 Расчет поляризованности и плотности связанного заряда

Такие задачи могут быть решены как с привлечением теоремы Гаусса, так и посредством интегрирования уравнения Пуассона. Уравнение Пуассона более удобно, если где-либо (т.е. на каких-либо поверхностях) требуется обеспечить наперед заданные величины потенциала. Теорема Гаусса дает преимущество, если в задаче заданы только заряды. Если потенциал уже задан формулой, то $\vec{E} = -\nabla\varphi$, а далее просто используется уравнение Максвелла для нахождения заряда.

Задача 1. $\varphi(r) = ar^3 + b$ внутри шара радиуса R проницаемости ε . Найти p , p' , σ' .

Решение. Поле направлено радиально от центра шара; внутри оно равно

$$E_r(r) = -\frac{d\varphi}{dr} = -3ar^2, r < R,$$

а вне шара не потребуется для решения. (Но, в принципе, его можно найти как $E_r = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ после нахождения p и полного заряда $Q = 4\pi \int_0^R p(\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r}$. Плотность заряда p получаем из уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} p(r) &= \operatorname{div}\vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \varepsilon_0 \varepsilon(r) E_r(r)) = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\varepsilon_0 \varepsilon r^2 (-3ar^2)) = -12a\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r. \end{aligned}$$

Для нахождения p' и σ' потребуется поляризованность внутри шара:

$$P_r = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_r = -3a\varepsilon_0(\varepsilon - 1)r^2.$$

Связанные заряды равны:

$$p'(r) = \operatorname{div}\vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 (-3a\varepsilon_0(\varepsilon - 1)r^2)) = 12a\varepsilon_0(\varepsilon - 1)r.$$

$$\sigma'|_{r=R} = P_r|_{r=R-} = -3a\varepsilon_0(\varepsilon - 1)r^2.$$

Задача 2. Пластина толщины $2a$ проницаемости ε заряжена следующим образом: $p = ax^2$. Положив $\varphi|_{x=0} = 0$, написать $\varphi(x)$, найти p' и σ' .

Решение. Хотя использование уравнения Пуассона при решении данной задачи вполне возможно, более удобным представляется применение теоремы Гаусса к цилиндрической поверхности, занимающей область $(-\infty \dots x)$ вдоль оси x . Таким способом аналогичная задача рассматривалась ранее для случая $\varepsilon = 1$. Изменения требуются в момент перехода от D_x к E_x в области $-a < x < a$:

$$E_x = -\frac{aa^3}{3\varepsilon_0}, x < -a; E_x = \frac{ax^3}{3\varepsilon_0\varepsilon}, -a < x < a; E_x = \frac{aa^3}{3\varepsilon_0}, x > a.$$

Теперь можно найти φ с учетом условия $\varphi|_{x=0} = 0$, применяя формулу

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x(\tilde{x})d\tilde{x},$$

верную для любого x (и больше, и меньше нуля). Соответственно, для каждого из трех участков, на которых найдено E_x , получаем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\int_0^x \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0\varepsilon} d\tilde{x} = -\frac{ax^4}{12\varepsilon_0\varepsilon}, & -a < x < a, \\ -\int_0^a \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0\varepsilon} dx - \int_a^x \frac{aa^3}{3\varepsilon_0} d\tilde{x} = -\frac{aa^3x}{3\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, & x > a, \\ -\int_0^{-a} \frac{a\tilde{x}^3}{3\varepsilon_0\varepsilon} dx - \int_{-a}^x \left(-\frac{aa^3}{3\varepsilon_0}\right) d\tilde{x} = \frac{aa^3x}{3\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{aa^4}{4\varepsilon_0}, & x < -a. \end{cases}$$

Для вычисления плотностей связанного заряда нам не нужен потенциал, но требуется поляризованность внутри пластины (вне она, естественно, равна нулю):

$$P_x = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_x = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) \cdot \frac{ax^3}{3\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot ax^3}{3\varepsilon}.$$

Величины p' и σ' равны:

$$p'(x) = -\frac{dP_x}{dx} = -\frac{(\varepsilon - 1) \cdot ax^3}{\varepsilon},$$

$$\sigma'|_{x=-a} = -P_x|_{x=-a+} = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot aa^3}{3\varepsilon},$$

$$\sigma'|_{x=a} = P_x|_{x=a-} = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot aa^3}{3\varepsilon}.$$

Получилось, что $\sigma'|_{x=-a} = \sigma'|_{x=a}$, что вполне естественно, ввиду симмет-

рии системы относительно плоскости $x = 0$.

Задача 3. В плоский конденсатор при а) поддерживаемом постоянным напряжении б) неизменном заряде обкладок – параллельно обкладкам ввели пластину с проницаемостью ε , которая заняла η -ю часть зазора. Найти σ' на гранях пластины. Изначально поле составляло E_0 .

$$\text{Ответ: а) } |\sigma'| = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_0}{(1-\eta)\varepsilon+\eta},$$

$$\text{б) } |\sigma'| = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_0}{\varepsilon}.$$

Примечание: в процессе решения удобно временно ввести расстояние между обкладками d и разность потенциалов U (для «а») или заряд обкладки σ (для «б»). Естественно, введенные $U(\sigma)$ должны быть согласованы с известным E_0 .

Задача 4. Внутри заземленного цилиндра радиуса R – равномерно заряженный (p_0) диэлектрик $\varepsilon = 1 + ar$. Найти $\varphi(r), p', \sigma'$.

Решение. Применяем уравнение Пуассона, так как у нас есть требование на потенциал: $\varphi|_{r=R} = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\varepsilon(r)r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{p(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{p_0}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{d}{dr} \left(\varepsilon(r)r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{p_0 r}{\varepsilon_0},$$

$$\varepsilon(r)r \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{p_0 r^2}{2\varepsilon_0} + A,$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{p_0 r}{2\varepsilon_0(1+ar)} + \frac{A}{(1+ar)r} = -\frac{p_0 r}{2\varepsilon_0(1+ar)}.$$

Здесь $A = 0$, так как иначе поле, то есть $-d\varphi/dr$, оказывается неограниченным в точке $r = 0$. Потенциал находим интегрированием $d\varphi/dr$ в пределах от R до r :

$$\varphi = \int_R^r \frac{d\varphi}{d\tilde{r}} d\tilde{r} = -\int_r^R \frac{d\varphi}{d\tilde{r}} d\tilde{r} =$$

$$= \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \int_r^R \frac{\tilde{r}}{1+a\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \int_r^R \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a(1+a\tilde{r})} \right) d\tilde{r} =$$

$$= \frac{p_0}{2\varepsilon_0} \left(\frac{R-r}{a} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{1+aR}{1+ar} \right).$$

Найдем еще поляризованность:

$$P_r = -\varepsilon_0(\varepsilon(r) - 1) \frac{d\varphi}{dr} = \frac{p_0 ar^2}{2(1+ar)}.$$

Теперь получаем связанный поверхностный заряд

$$\sigma'|_{r=R} = P_r|_{R-} = \frac{p_0 aR^2}{2(1+aR)}$$

и связанный объемный заряд:

$$p'(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rP_r) = -\frac{p_0}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{ar^3}{1+ar} \right) = -\frac{p_0 a}{2} \cdot \frac{2ar^2 + 3r}{(1+ar)^2}.$$

Задача 5. Внутри заземленного шара радиуса R – равномерно заряженный (p_0) диэлектрик $\varepsilon = 1 + ar$. Найти $\varphi(r), p', \sigma'$.

Ответ: $\varphi(r) = \frac{p_0(R-r)}{3\varepsilon_0 a} - \frac{p_0}{3\varepsilon_0 a^2} \ln \frac{1+aR}{1+ar}$, $p'(r) = -\frac{p_0 a(3ar^2+4r)}{3(1+ar)^2}$, $\sigma'|_{r=R} = \frac{p_0 a R^2}{3(1+aR)}$.

2.5 Граничные условия на стыке двух диэлектриков. Теорема о циркуляции

Любая граница раздела двух сред может считаться плоской на достаточно малом участке. Кроме того, в пределах достаточно малого участка поле векторов $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ можно считать однородным на каждой из сторон. Составляющие указанных векторов D_n, E_n, P_n , перпендикулярные к границе, называются нормальными, а $\vec{D}_r, \vec{E}_r, \vec{P}_r$ параллельные границе, – тангенциальными компонентами.

На незаряженной границе двух диэлектриков нормальные и тангенциальные компоненты преобразуются следующим образом:

$$D_{n1} = D_{n2}, \vec{E}_{r1} = \vec{E}_{r2}.$$

Левое соотношение получается из теоремы Гаусса, примененной к области в форме очень тонкого параллелепипеда, серединной плоскостью которого является граница раздела диэлектриков. Для получения второго соотношения привлекается теорема о циркуляции

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Контуром служит узкая прямоугольная рамка, плоскость которой перпендикулярна к границе раздела, рассекающей рамку пополам. Левая часть равенства есть $(\vec{E}_{r1} = \vec{E}_{r2}) \cdot \vec{l}$, а правая равна нулю из электростатического уравнения Максвелла ($\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$). Заметим, что теорема о циркуляции – это математический закон, применимый к любому векторному полю, как и теорема Гаусса.

Задача 1. Плоскость xu представляет собой границу раздела диэлектрик с проницаемостью ε_1 ($z < 0$) – воздух ($z > 0$) (рисунок 23). Напряженность электрического поля в воздухе составляет E_2 , а вектор \vec{E}_2 составляет угол θ с осью z и не имеет y -компоненты. Найти $\vec{E}_{1,2}, \vec{P}_{1,2}$ в обеих средах и поверхностный связанный заряд. Вычислить также циркуляцию вектора \vec{D} по прямоугольному контуру длины L , лежащему в плоскости xz .

Решение. По условию,

$$\vec{E}_2 = E_2 \cos \theta \vec{k} + E_2 \sin \theta \vec{l} = E_{n2} \vec{k} + \vec{E}_{r2},$$

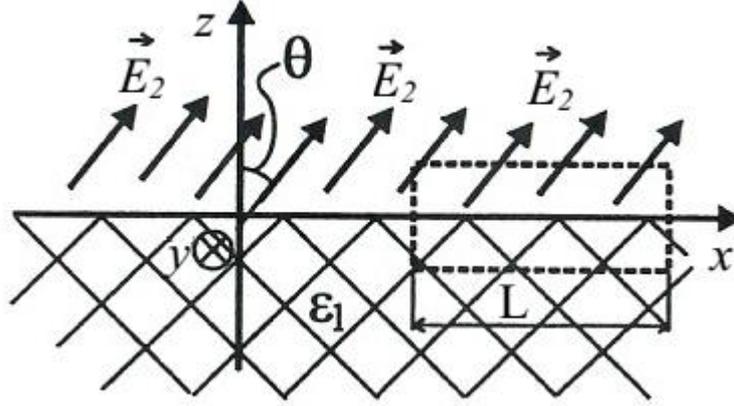


Рисунок 23 – Граница раздела диэлектрик–воздух откуда сразу

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0 E_2 \cos \theta \vec{k} + \varepsilon_0 E_2 \sin \theta \vec{l} = D_{n2} \vec{k} + \vec{D}_{r2}.$$

По правилам преобразования нормальных и тангенциальных компонент,

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2} = \varepsilon_0 E_2 \cos \theta, \\ \vec{E}_{r1} &= \vec{E}_{r2} = E_2 \sin \theta \vec{l}. \end{aligned}$$

С учетом общего соотношения $\vec{D}_{1,2} = \varepsilon \varepsilon_{1,2} \vec{E}_{1,2}$, получаем:

$$\begin{aligned} E_{n1} &= \frac{D_{n1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{E_2 \cos \theta}{\varepsilon_1}, \\ \vec{D}_{r1} &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_{r1} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2 \sin \theta \vec{l}. \end{aligned}$$

Теперь можно полностью выписать \vec{E}_1 в диэлектрике:

$$\vec{E}_1 = E_{n1} \vec{k} + \vec{E}_{r1} = \frac{E_2 \cos \theta}{\varepsilon_1} \vec{k} + E_2 \sin \theta \vec{l}.$$

Поляризованность в воздухе отсутствует, а в диэлектрике:

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) \vec{E}_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_{n1} \vec{k} + \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) \vec{E}_{r1} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_2 \cos \theta}{\varepsilon_1} \vec{k} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2 \sin \theta \vec{l}. \end{aligned}$$

При вычислении поверхностного связанного заряда нужна только нормальная компонента, а именно:

$$\sigma' |_{x=0} = P_x |_{x=0-} = P_{n1} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_2 \cos \theta}{\varepsilon_1}.$$

Вычисление циркуляции вектора \vec{D} даст

$$\int_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = \pm L \cdot (|D_{r2}| - |D_{r1}|).$$

Знак выбирается в зависимости от направления обхода контура. Заметим, что если бы мы считали циркуляцию \vec{E} , то получили бы ноль. Так как мы

знаем \vec{D}_r с обеих сторон плоскости xy , (в области $z < 0$ $\vec{D}_{r2} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_{r2}$) можно записать окончательный ответ для циркуляции:

$$\int_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = \pm L \cdot (\varepsilon_0 E_2 \sin \theta - \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2 \sin \theta) = \pm L \cdot (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_0 E_2 \sin \theta.$$

Проверка выполнения законов преобразования компонент \vec{E} и \vec{D} на границе служит в некоторых случаях дополнительным «тестом» на корректность того или иного решения (рисунок 24).

Задача 2. Часть площади плоского конденсатора заполнена диэлектриком ε_1 , другая часть ε_2 . Найти \vec{E} , \vec{D} в обеих частях конденсатора при приложении напряжения U . Расстояние между обкладками d .

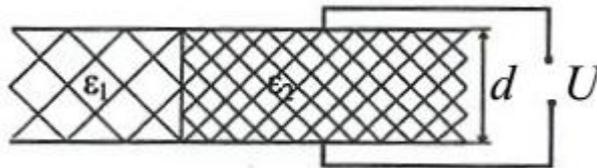


Рисунок 24 – Плоский конденсатор

Ответ: $E = U/d =$ всюду; $D = \varepsilon_0 \varepsilon_1 U/d$ и $= \varepsilon_0 \varepsilon_2 U/d$ в 1-й и 2-й частях, соответственно. Направление полей – всюду перпендикулярно плоскостям обкладок.

Комментарий: граница раздела диэлектриков перпендикулярна обкладкам. По обе стороны этой границы поле параллельно границе и одинаково по величине: нормальная к данной границе составляющая при этом вообще отсутствует. Таким образом, выполнено условие для тангенциальных компонент вектора \vec{E} .

Обобщение данной задачи: пусть в плоском конденсаторе с обкладками x_1 и x_2 , проницаемость изменяется как $\varepsilon(x, y, z) = f_l(x) \cdot f_{\perp}(y, z)$. Тогда эквипотенциалами являются плоскости $x = const$. Плотность заряда обкладки такого конденсатора зависит от координат; суммарный же заряд равен

$$Q = \int \sigma dS = \int D_x dS = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{x_1}^{x_2} f_l^{-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}} \cdot \varepsilon_0 \int \int f_{\perp}(y, z) dy dz.$$

Частный случай – ε меняется только в направлении, перпендикулярном полю (например, кусочно). Аналогичную ситуацию можно рассмотреть в сферическом и цилиндрическом конденсаторах ($\varepsilon = f_l(r) \cdot f_{\perp}(\theta, \varphi)$) или $\varepsilon = f_l(r) \cdot f_{\perp}(z, \varphi)$.

Задача 3. В вакууме на расстоянии l от плоской границы с диэлектриком проницаемости ε расположен небольшой шарик, заряженный зарядом q . Найти поверхностную плотность связанного заряда на границе раздела как функцию расстояния r от проекции центра шарика на плоскость (рисунок 25).

Решение. Вводим систему координат таким образом, что ось z перпендикулярна плоскости раздела сред $xу$. Тогда заряд q имеет координаты $(0,0,z)$.

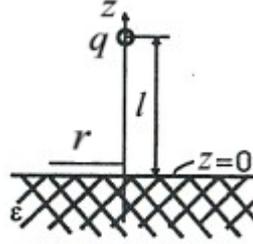


Рисунок 25 – Шарик, заряженный зарядом q , находящийся в вакууме
Будем искать решение в виде

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (z-l)^2}} + \frac{B_1q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (z+l)^2}}, z > 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{A_2q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (z-l)^2}}, z < 0.$$

Значок 1 отвечает полупространству, в котором находится заряд.

Потенциал указанного вида подчиняется уравнению Пуассона. Действительно, для полупространства без заряда $\Delta\varphi_2 = 0$, так как особенность функции $\varphi_2(z, r)$ находится вообще вне этого полупространства. Что касается $\varphi_1(z, r)$, то $\Delta\varphi_2 = -q\delta(\vec{r} - z\vec{k})$, поскольку первый член в точности соответствует потенциалу точечного заряда, а второй дает ноль, так как его особенность не попадает в полупространство, содержащее заряд. Заметим, что, если бы полупространство с зарядом было заполнено диэлектриком (ϵ_1), то ϵ_1 следовало бы поместить в знаменатель первого члена выражения для φ_1 .

Найдем z -компоненту поля, соответствующую введенному потенциалу:

$$E_{z1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{q(z-l)}{4\pi\epsilon_0(r^2 + (z-l)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{B_1q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + (z+l)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_{z2} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{qA_2(z-l)}{4\pi\epsilon_0(r^2 + (z-l)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поскольку z -компонента является нормальной компонентой к границе раздела, для нее должно быть выполнено условие $D_{x1} = D_{x2}$, то есть

$$-\epsilon_0 E_{x1} = -\epsilon_0 \epsilon E_{x2}.$$

Помимо этого требования, необходимо обеспечить непрерывность потенциала, а именно

$$\varphi_1(0, r) = \varphi_2(0, r).$$

Два вышеуказанных условия приводят к соотношениям из которых имеем

$$-l + B_1l = -\epsilon A_2l,$$

$$1 + B_1 = A_2,$$

из которых имеем

$$B_1 = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, A_2 = \frac{2}{1 + \varepsilon}.$$

Поверхностный связанный заряд найдется как

$$\begin{aligned} \sigma'(r) = P_{x-0} &= -\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{x2} = -\frac{A_2 q l \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{4\pi \varepsilon_0 (r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{q l (\varepsilon - 1)}{2\pi (\varepsilon + 1) (r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав σ' по площади, получаем полный связанный заряд

$$q' = 2\pi \int_0^\infty \sigma'(r) dr = -\frac{q l (\varepsilon - 1) 2\pi}{2\pi (\varepsilon + 1)} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1}.$$

2.6 Вычисление емкости

Для расчета емкости можно ввести разность потенциалов между обкладками, решить уравнение Пуассона, найти D на обкладках, а затем плотность поверхностного заряда обкладок $\sigma = \pm D_n$ (D_n – это D_x или D_r у обкладки). При этом принимается, что поле вне конденсатора отсутствует (иначе неверна связь σ и $D_{x(r)}$).

Рассмотрим для примера симметричный ($\varepsilon = \varepsilon(r)$) цилиндрический конденсатор (рисунок 2б). В нем

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi(R_1) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} \cdot \int_{R_1}^r \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}, \\ E_r(r) &= -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} \cdot r^{-1} \varepsilon^{-1}(r), \\ |\sigma(R_{1(2)})| &= |D_r(R_{1(2)})| = \varepsilon_0 \varepsilon(R_{1(2)}) |E_r(R_{1(2)})|. \end{aligned}$$

Заряд обкладки равен

$$|Q| = |\sigma_{1(2)}| \cdot 2\pi R_{1(2)} L = |D_r(R_{1(2)})| \cdot 2\pi R_{1(2)} L,$$

где L – длина конденсатора вдоль оси z . Как видно, R_1 или R_2 сокращается, после чего можно найти емкость как

$$C = \frac{|Q|}{|\varphi_2 - \varphi_1|} = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}}.$$

Аналогичное рассмотрение для декартового и сферического случаев приводит к выражениям:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon^{-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}}, C = \frac{4\pi \varepsilon_0}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-2} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}}$$

Если имеет место зависимость проницаемости от других координат типа $\varepsilon(r, z, \varphi) = f_1(r) \cdot f_2(z, \varphi)$, то приведенные выше формулы верны для малого элемента площади обкладок $dzdR_1d\varphi$, а для нахождения емкости всего конденсатора необходимо произвести интегрирование:

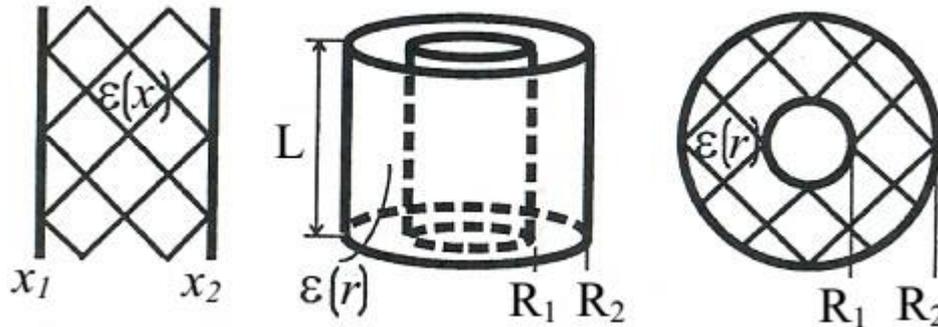


Рисунок 26 – Симметричный цилиндрический конденсатор

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{dC}{dzd\varphi} \cdot dzd\varphi.$$

Краевыми эффектами во всех случаях пренебрегается.

Задача 1. Найти емкость цилиндрического конденсатора, а также абсолютную величину заряда обкладок при подаче напряжения U . Радиусы обкладок R_1 и R_2 , а длина L . Диэлектрик, заполняющий конденсатор, однороден, его проницаемость равна ε .

Решение. По формулам для емкости цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-1} \varepsilon^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-1}(\tilde{r}) d\tilde{r}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\ln(R_2/R_1)} d\tilde{r}$$

получаем заряд:

$$|Q| = CU = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon LU}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Задача 2. Часть сферического конденсатора (область $\theta < \pi/3$) заполнена диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon(r) = \alpha/r^2$, а остальная часть имеет $\varepsilon(r) = \beta/r^2$ (рисунок 27). Найти емкость, если радиусы обкладок R_1 и R_2 .

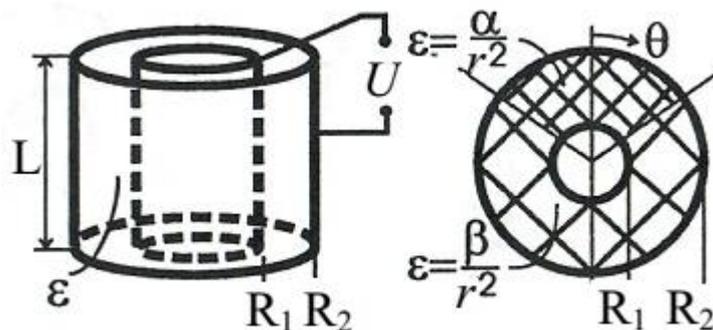


Рисунок 27 – Сферический конденсатор

Решение. Описанное в задаче изменение проницаемости диэлектрика может быть представлено как $\varepsilon = f_l(r) \cdot f_{\perp}(\theta)$ (f_{\perp} является при этом

кусочной функцией, принимающей значения a и β . Поэтому емкость можно вычислить как:

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dC}{d\theta d\varphi} \cdot \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon_0 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-2} (a\tilde{r}^{-2}) d\tilde{r}} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\varepsilon_0 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_{R_1}^{R_2} \tilde{r}^{-2} (\beta\tilde{r}^{-2})^{-1} d\tilde{r}} = \frac{\pi\varepsilon_0 a}{R_2 - R_1} + \frac{3\pi\varepsilon_0\beta}{R_2 - R_1} = \frac{\pi\varepsilon_0(a + 3\beta)}{R_2 - R_1}.$$

Задача 3. В диэлектрике проницаемости ε на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости расположен небольшой металлический шарик радиуса $a \ll l$. Найти емкость системы (рисунок 28).

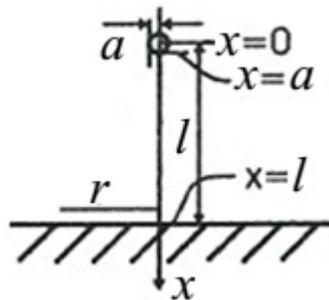


Рисунок 28 – Диэлектрик проницаемости ε

Решение. Для нахождения емкости необходимо, задавшись зарядом шарика q , найти разность потенциалов между шариком и плоскостью.

Так как шарик очень маленький ($a \ll l$), заряд на его поверхности можно считать равномерно распределенным (искажения его поля, вносимые плоскостью, заметны лишь на большом расстоянии от шарика).

Разность потенциалов можно найти как

$$U = \int \vec{E} d\vec{r},$$

где интеграл берется по любой траектории, соединяющей шарик и плоскость. Разумеется, удобнее взять простейшую траекторию: перпендикуляр, опущенный из шарика на плоскость. Введем ось x по этому перпендикуляру так, что центр шарика имеет координату 0, а плоскость $x = l$.

Для нахождения поля системы применяется метод изображений. На оси x получается:

$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2l-x)^2} \right).$$

Теперь записываем разность потенциалов:

$$U = \int_a^l E_x(x) dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2l-x} \right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}.$$

Последнее приближенное равенство получено с учетом условия $a \ll l$.

Теперь емкость

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon a.$$

2.7 Утечка заряда в конденсаторах

Диэлектрик в конденсаторе обладает конечным удельным (Ом·см) сопротивлением ξ , которое может зависеть от координат. Ток через конденсатор при $U_0 = \text{const}$ составляет

$$I = \frac{U_0}{R},$$

где в случае $\xi = \xi(x)$ или $\xi = \xi(r)$

$$R = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\xi(x)}{S(x)} dx \quad \text{или} \quad R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\xi(r)}{S(r)} dr.$$

$S(x)$ (или $S(r)$) обозначает площадь эквипотенциальной поверхности. Если батарею отключить, то напряжение на конденсаторе будет спадать по закону

$$-C \frac{dU}{dt} = I(t) = \frac{U(t)}{R},$$

где C – емкость. Отсюда получаем

$$U(t) = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Задача 1. Найти сопротивление R цилиндрического конденсатора ($R_1, R_2, L, \xi = \text{const}$).

Решение. Эквипотенциальные поверхности – это боковые цилиндрические поверхности, площадь каждой из которых

$$S = 2\pi Lr.$$

Поскольку $\xi = \text{const}$, по формуле для сопротивления получаем:

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\xi}{2\pi Lr} dr = \frac{\xi}{2\pi L} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Задача 2. Напряжение на сферическом конденсаторе емкости C (R_1, R_2) после отсоединения его от батареи спало в η раз за время Δt . Найти удельное сопротивление диэлектрика (диэлектрик считать однородным).

Решение. Омическое сопротивление описанного конденсатора равно

$$R = \xi \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\xi}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

где ξ – искомое удельное сопротивление.

Если $t = 0$ соответствует моменту отсоединения батареи, то, как следует из условия, напряжение на конденсаторе в момент $t = \Delta t$ составляет U_0/η (U_0 – начальное напряжение):

$$U(\Delta t) = \frac{U_0}{\eta} = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right),$$

откуда получается

$$R = \frac{\Delta t}{C \ln \eta}.$$

Приравнивая это R и выражение для того же R через ξ , имеем

$$\xi = \frac{4\pi\Delta t}{C \ln \eta} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}.$$

Задача 3. Напряжение на цилиндрическом конденсаторе с радиусами обкладок R_1 , R_2 и длиной L спало в η раз за время Δt после отсоединения конденсатора от батареи. Найти удельное сопротивление диэлектрика (диэлектрик однороден и имеет проницаемость ε).

Ответ: $\xi = \frac{\Delta t}{\varepsilon\varepsilon_0 \ln \eta}$ (нет зависимости от R_1, R_2, L).

Задача 4. В диэлектрике проницаемости ε на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости расположен небольшой металлический шарик радиуса $a \ll l$ (рисунок 29). Найти ток, если между шариком и плоскостью поддерживается разность потенциалов U , а удельное сопротивление среды ξ .

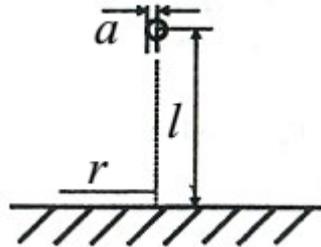


Рисунок 29 – Диэлектрик проницаемости ε

Решение. Ток может быть найден в любом эквипотенциальном сечении. Например, можно вычислить ток непосредственно на плоскости, с использованием составляющей электрического поля, перпендикулярной к плоскости и легко вычисляемой методом изображений:

$$E_{\perp} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{l}{(r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Мы здесь считаем заряд точечным, так как поле ищется далеко от него.

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\xi} \int E_{\perp} dS = \frac{2\pi}{\xi} \cdot \frac{ql}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{rdr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{q}{\xi\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Чтобы связать q с приложенным напряжением, нужно знать емкость C , которая уже найдена в разделе «Вычисление емкости»: $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a$. Получается, что

$$I = \frac{CU}{\xi\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{4\pi aU}{\xi}.$$

Эта задача могла быть решена и проще: сопротивление R между шариком и плоскостью сосредоточено, в основном, вблизи шарика. Тогда при его вычислении можно грубо считать поле вокруг шарика сферически-симметричным, что дает

$$R = \xi \int_a^{\infty} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\xi}{4\pi a},$$

после чего ток найдется как $I = U/R$. Однако, применение такого метода предварительного нахождения R , например, в похожей задаче, в которой вместо заряда задан провод, уже невозможно, в то время как способ интегрирования тока вблизи плоскости остается вполне состоятельным.

2.8 Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики представляют собой специфический класс сред, характеризующийся высоким значением диэлектрической проницаемости (на основной кривой поляризации), нелинейностью зависимости $\vec{D}(\vec{E})$, гистерезисом зависимостей $D(E)$ и $P(E)$, а также сохранением поляризованности \vec{P} после отключения внешнего поля. Именно последнее свойство наиболее важно, и во многих случаях под словом «сегнетоэлектрик» подразумевается «область спонтанной поляризованности $\vec{P}(x, y, z)$ », слабо чувствительная к дополнительному наложению электрического поля.

Расчет поля сегнетоэлектриков производится следующим образом. По формулам

$$p' = -\text{div}\vec{P} \text{ или } \sigma' = -P_n + P_n$$

находится связанный заряд, а затем находится создаваемое им поле \vec{E} с помощью закона Кулона, как если бы этот заряд был свободным:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} p' dV \text{ или } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} \sigma' dS.$$

Если есть выраженная симметрия, то возможно и применение теоремы Гаусса в виде $\int \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = p'$. Мотивацией такого метода является уравнение Максвелла $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = -\text{div}\vec{P} = p'$.

При наличии, помимо сегнетоэлектриков, еще и сторонних зарядов поле последних суммируется с полем сегнетоэлектриков.

Для нахождения смещения \vec{D} привлекается соотношение

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

При этом никаких ϵ для сегнетоэлектрика вводиться не должно.

Задача 1. Имеется бесконечная пластина из однородного сегнетоэлектрика с поляризованностью \vec{P} (рисунок 30). Найти векторы \vec{D} и \vec{E} внутри и вне пластины, если вектор \vec{P} направлен а) перпендикулярно, б)

параллельно поверхности пластины.

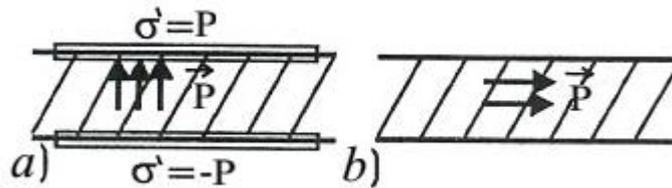


Рисунок 30 – Бесконечная пластина из однородного сегнетоэлектрика

Решение. Разберемся прежде всего в том, какова будет $div\vec{P}$ в обоих случаях, то есть какие связанные заряды присутствуют. Для этого надо проверить, как изменяется \vec{P} в направлении самого себя. Если $div\vec{P} = 0$, в том числе и на границах; на них \vec{P} , конечно, изменяется, но не в направлении \vec{P}/P . А вот в случае а) имеет место скачок \vec{P} от (до) нуля на границах как раз в направлении \vec{P}/P . Соответственно, поверхностная плотность заряда равна:

$$\sigma'^{(a)} = \pm P,$$

причем знак плюс берется для той поверхности, в сторону которой «смотрит» вектор \vec{P} , по определению σ' . Как уже говорилось,

$$\sigma'^{(b)} = 0.$$

Следовательно, в случае а) мы имеем ситуацию, аналогичную конденсатору и получаем

$$\vec{E}^{(a)} = -\varepsilon_0^{-1}\vec{P} \text{ внутри и } \vec{E}^{(a)} = \vec{0} \text{ вне пластины,}$$

в то время как

$$\vec{E}^{(b)} = \vec{0} \text{ всюду.}$$

Заметим, что в случае а) ошибкой было бы записать $D = \sigma'$; теорема Гаусса применяется к вектору $\varepsilon_0\vec{E}$.

Соответственно, по формуле $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ имеем:

$$\vec{D}^{(a)} = \vec{0} \text{ всюду,}$$

$$\vec{D}^{(b)} = \vec{P} \text{ внутри и } \vec{D}^{(b)} = \vec{0} \text{ вне пластины.}$$

Задача 2. Пластина из сегнетоэлектрика с поляризованностью P , перпендикулярной поверхностям, помещена в конденсатор, обкладки которого замкнуты друг на друга (рисунок 31). Пластина занимает η -ю часть зазора и параллельна обкладкам конденсатора. Найти E и D в пластине и в остающемся незаполненном зазоре.

Решение. Если E_{plate} и E_{air} обозначают электрическое поле, соответственно, в пластине и в воздушном зазоре, то, ввиду замкнутости обкладок конденсатора друг на друга,

$$\eta E_{plate} + (1 - \eta)E_{air} = 0.$$

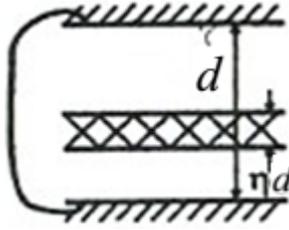


Рисунок 31 – Пластина из сегнетоэлектрика, помещенная в конденсатор

Величина D в зазоре и в пластине одна и та же, так как любой другой вариант противоречил бы условиям для нормальной компоненты D на границе пластина–воздух.

$$D_{plate} = \varepsilon_0 E_{plate} + P + D_{air} = \varepsilon_0 E_{air}.$$

Из последней цепочки равенств имеем

$$E_{air} = E_{plate} + \varepsilon_0^{-1} P.$$

Используя это, получаем

$$\eta E_{plate} + (1 - \eta)(E_{plate} + \varepsilon_0^{-1} P) = 0,$$

откуда

$$E_{plate} = -(1 - \eta)\varepsilon_0^{-1} P, E_{air} = \eta\varepsilon_0^{-1} P.$$

Смещение всюду одно и то же и равно $D_{plate} = D_{air} = \eta P$.

Задача 3. Тонкий диск радиуса R из сегнетоэлектрического материала поляризован однородно и так, что вектор \vec{P} лежит в плоскости диска (рисунок 32). Найти \vec{E} и \vec{D} в центре диска, считая, что толщина диска h намного меньше, чем R .

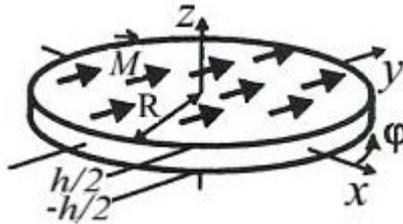


Рисунок 32 – Тонкий диск радиуса R из сегнетоэлектрического материала

Решение. Введем систему координат так, чтобы плоскость xu была плоскостью диска, а $\vec{P} = P\vec{j}$. Найдем связанные заряды. $div\vec{P}$ всюду равна нулю, за исключением обода диска (на круглых поверхностях диска тоже $div\vec{P} = 0$, так как там \vec{P} не меняется в направлении \vec{P}/P). Поверхностный заряд составит

$$\sigma' = -P_r + P_r = P \sin\varphi,$$

где φ угол в полярной системе координат, отсчитываемый от оси x , как обычно. Зная σ' , можно найти поле \vec{E} по закону Кулона ($\vec{r}_p = \vec{0}$):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} \sigma' dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{P \sin\varphi (-R \cos\varphi \vec{i} - R \sin\varphi \vec{j} - z \vec{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R d\varphi dz = \\
&= -\frac{R^2 \pi P \vec{j}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{R^2 \sqrt{R^2 + z^2}} \approx -\frac{Ph \vec{j}}{4\epsilon_0 R} = -\frac{h \vec{P}}{4\epsilon_0 R}.
\end{aligned}$$

При получении последнего равенства использовано условие $R \gg h$. Обратим внимание на то, что при $R \rightarrow \infty$ $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$.

Смещение \vec{D} найдется просто как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{P} \cdot \left(1 - \frac{h}{4R}\right).$$

3. Вакуум

3.1 Нахождение магнитных полей и потенциалов в вакууме путем интегрирования закона Био–Савара

Имеется система токов. Мы ищем индукцию \vec{B} (напряженность \vec{H}) магнитного поля в точке P , задаваемой вектором \vec{r}_p из произвольно выбранного начала координат O , а также вектор–потенциал \vec{A} в этой точке (рисунок 33):

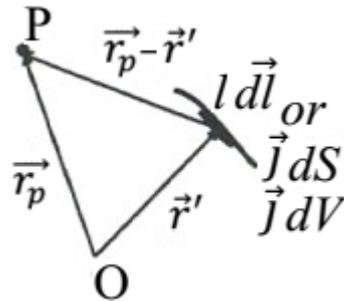


Рисунок 33 – Система токов

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3}, \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}$$

$$d\vec{V}^q = \begin{cases} \vec{j}dV - \text{слой,} \\ \vec{i}dS - \text{лист,} \\ Id\vec{l} - \text{провод,} \\ q\vec{v} - \text{движущийся заряд.} \end{cases}$$

В случае движущегося заряда интегрирование отсутствует. Плотность тока \vec{j} (А/см²) или \vec{i} (А/см) рекомендуется обозначать жирными буквами, во избежание путаницы с ортами \vec{i}, \vec{j} .

Примеры записи $d\vec{l}$:

$$d\vec{l} = \begin{cases} dx\vec{i} - \text{ток вдоль оси } x, \\ \pm(-R\sin\varphi\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j})\varphi - \text{ток по кольцу радиуса } R. \end{cases}$$

Элементы объема dV и площади dS записываются как при интегрировании закона Кулона. В частности,

$$dV = r dr dz d\varphi - \text{элемент объема цилиндра}$$

$$dS =$$

$$= \begin{cases} dx dy - \text{элемент площади на плоскости,} \\ r dr d\varphi - \text{элемент площади круга,} \\ R dz d\varphi - \text{элемент площади боковой поверхности цилиндра.} \end{cases}$$

При равномерном распределении тока $\vec{j} = I/S$, $\vec{i} = I/L$, где S и L – площадь или длина сечения, перпендикулярного направлению тока.

При вычислении векторных произведений $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

После нахождения \vec{H} целесообразно проверить правильность полученной ориентации поля мысленно графическим умножением

$$\frac{\vec{H}}{|H|} \sim \frac{\vec{j}}{|j|} \times \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}.$$

Задача 1. Найти поле \vec{H} , создаваемое бесконечным прямым тонким проводом с током I (рисунок 34). Провод расположен на оси z , поле ищется в точке P с радиус-вектором $\vec{r}_p = r_p \cos \varphi_p \vec{i} + r_p \sin \varphi_p \vec{j} + z_p \vec{k}$.

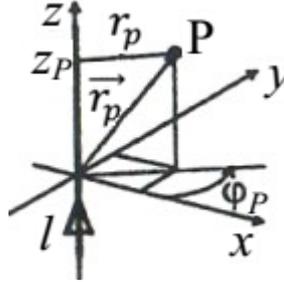


Рисунок 34 – Бесконечный прямой тонкий провод с током I

Решение. Мы имеем дело со случаем линейного тока, поэтому

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3}.$$

Здесь $d\vec{l}$ записывается как $dz\vec{k}$, а вектор \vec{r}' из начала координат в элемент тока, создающий поле, – как $\vec{r}' = z\vec{k}$ (нельзя путать z и z_p). Итак,

$$\vec{r}_p = r_p \cos \varphi_p \vec{i} + r_p \sin \varphi_p \vec{j} + z_p \vec{k},$$

$$\vec{r}' = z\vec{k},$$

$$|\vec{r}_p - \vec{r}'| = (r_p^2 + (z - z_p)^2)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} I d\vec{l} \times (\vec{r}_p - \vec{r}') &= I dz\vec{k} \times (r_p \cos \varphi_p \vec{i} + r_p \sin \varphi_p \vec{j} + (z - z_p)\vec{k}) = \\ &= I (r_p \cos \varphi_p \vec{j} + r_p \sin \varphi_p \vec{i}) dz. \end{aligned}$$

Теперь можно проводить интегрирование закона Био–Савара:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I (r_p \cos \varphi_p \vec{j} + r_p \sin \varphi_p \vec{i})}{(r_p^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \\ &= \frac{I (r_p \cos \varphi_p \vec{j} + r_p \sin \varphi_p \vec{i})}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r_p^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} d(z - z_p) = \\ &= \frac{I (r_p \cos \varphi_p \vec{j} + r_p \sin \varphi_p \vec{i})}{4\pi} \left. \frac{(z - z_p)}{r_p^2 (r_p^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{I}{2\pi r_p} \cdot (\cos \varphi_p \vec{j} - \sin \varphi_p \vec{i}). \end{aligned}$$

Задача 2. Найти поле \vec{H} и вектор-потенциал \vec{A} , создаваемые на оси z ленточным кольцом радиуса R и ширины h , симметрично лежащим на плоскости xy (рисунок 35). По ленте равномерно по ее сечению течет ток \vec{i} .

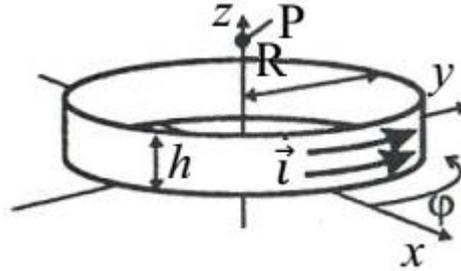


Рисунок 35 – Ленточное кольцо радиуса R и ширины h

Решение. Предварительно запишем необходимые для подстановки в выражение закона Био–Савара величины. Объект, создающий поле, – «ЛИСТ».

$$\begin{aligned}\vec{r}_p &= z_p \vec{k}. \\ \vec{r}' &= R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k}. \\ \vec{r}_p - \vec{r}' &= -R \cos \varphi \vec{i} - R \sin \varphi \vec{j} + (z_p - z) \vec{k}. \\ |\vec{r}_p - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + (z - z_p)^2}. \\ d\vec{V}^q &= \vec{i} dS = \vec{i} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) R d\varphi dz.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}') &= \\ &= \vec{i} R d\varphi dz (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \times (-R \cos \varphi \vec{i} - R \sin \varphi \vec{j} + (z_p - z) \vec{k}) = \\ &= \vec{i} R d\varphi dz (R \sin^2 \varphi \vec{k} + (z_p - z) \sin \varphi \vec{j} + R \cos^2 \varphi \vec{k} + (z_p - z) \cos \varphi \vec{i}) = \\ &= \vec{i} R d\varphi dz (R \vec{k} + (z_p - z) \sin \varphi \vec{j} + (z_p - z) \cos \varphi \vec{i}).\end{aligned}$$

Теперь можно применить закон Био–Савара:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \\ &= \frac{\vec{i} R}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(R \vec{k} + (z_p - z) \sin \varphi \vec{j} + (z_p - z) \cos \varphi \vec{i})}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi dz = \\ &= \frac{\vec{i} R^2 \vec{k} \cdot 2\pi}{4\pi} \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\vec{i} R^2 \vec{k}}{2} \cdot \frac{z - z_p}{R^2 \sqrt{R^2 + (z - z_p)^2}} \Big|_0^h =\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{i}\vec{k}}{2} \cdot \left[\frac{h - z_p}{\sqrt{R^2 + (h - z_p)^2}} + \frac{z_p}{\sqrt{R^2 + z_p^2}} \right].$$

Отметим, что, если бы пределы интегрирования по z были не 0 и h , а $-\infty$ и $+\infty$, то в ответе получилось бы просто $\vec{H} = \mathbf{i}\vec{k}$ – поле бесконечного соленоида.

Вектор–потенциал

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} R d\varphi dz = \vec{0}$$

равен нулю из-за интегрирования по φ в пределах от 0 до π .

Задача 3. Найти вектор–потенциал в точке $(0, 0, 2a)$, создаваемый проводом с током I , текущим из $+$ -бесконечности по оси y до начала координат, далее по оси x до $x = a$, а затем параллельно оси y снова на $+$ -бесконечность (рисунок 36).

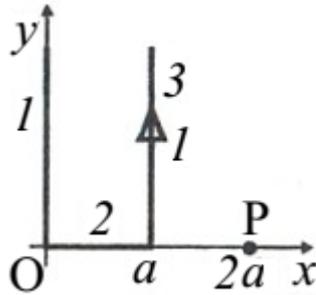


Рисунок 36 – Провод с током I

Решение. Мы имеем дело с проводом. Необходимо рассмотреть вклад в потенциал \vec{A} каждой из трех частей провода. $\vec{r}_p = 2a\vec{i}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} dV_1^q &= -Idy\vec{j}, & \vec{r}'_1 &= y\vec{j}, & \vec{r}_p - \vec{r}'_1 &= 2a\vec{i} - y\vec{j}, \\ dV_2^q &= Idx\vec{i}, & \vec{r}'_2 &= x\vec{i}, & \vec{r}_p - \vec{r}'_2 &= (2a - x)\vec{i}, \\ dV_3^q &= Idy\vec{j}, & \vec{r}'_3 &= a\vec{i} + y\vec{j}, & \vec{r}_p - \vec{r}'_3 &= a\vec{i} - y\vec{j}. \end{aligned}$$

Применяя закон Био–Савара к каждому из участков, мы должны записать:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_0^L \frac{d\vec{V}_1^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_1|} + \int_0^a \frac{d\vec{V}_2^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_2|} + \int_0^L \frac{d\vec{V}_3^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_3|} \right).$$

В первом и третьем интегралах следовало писать $+\infty$ в качестве верхнего предела, но как сейчас увидим, эти интегралы следует объединять, а затем взять предел при $L \rightarrow +\infty$. В противном случае получается неопределенность $\infty - \infty$.

$$\int_0^L \frac{d\vec{V}_1^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_1|} + \int_0^L \frac{d\vec{V}_3^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_3|} = \int_0^L \frac{-Idy\vec{j}}{\sqrt{y^2 + 4a^2}} + \int_0^L \frac{Idy\vec{j}}{\sqrt{y^2 + a^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -I\vec{j} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 4a^2} \right) \Big|_0^L + I\vec{j} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + a^2} \right) \Big|_0^L = \\
&= I\vec{j} \left(-\ln \frac{L + \sqrt{L^2 + 4a^2}}{2a} + \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a} \right) = I\vec{j} \cdot \ln \frac{2(L + \sqrt{L^2 + a^2})}{L + \sqrt{L^2 + 4a^2}}.
\end{aligned}$$

При $L \rightarrow +\infty$ получаем $I\vec{j} \cdot \ln 2$. Второй интеграл (по x) вычисляется элементарно:

$$\int_0^a \frac{d\vec{V}_2^q}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_2|} = \int_0^a \frac{I dx \vec{i}}{2a - x} = I\vec{i} \cdot \ln 2.$$

Окончательный ответ, таким образом,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \ln 2 \cdot (\vec{i} + \vec{j}).$$

Задача 4. Найти магнитное поле, создаваемое бесконечной плоской лентой ширины $2a$ с током \vec{i} в плоскости, перпендикулярной ленте и проходящей через серединную прямую ленты (рисунок 37).

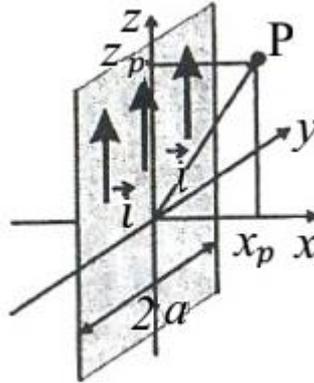


Рисунок 37 – Бесконечная плоская лента ширины $2a$

Решение. Введем систему координат так, чтобы лента оказалась лежащей в плоскости yz ($-a < y < a$) и ток по ней тек в направлении $+z$. Объект, создающий поле, представляет собой лист с током. Поэтому в законе Био–Савара

$$d\vec{V}^q = \vec{i} dS = \vec{i} k dy dz.$$

С учетом введенной координатной системы,

$$\vec{r}_p = x_p \vec{i} + z_p \vec{k},$$

$$\vec{r}' = y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Для подстановки в закон Био–Савара вычислим еще

$$\begin{aligned}
d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}') &= \vec{i} k dy dz \times (x_p \vec{i} - y \vec{j} - (z - z_p) \vec{k}) = \\
&= \vec{i} dy dz (x_p \vec{j} + y \vec{i}),
\end{aligned}$$

$$|\vec{r}_p - \vec{r}'| = (x_p^2 + y^2 + (z - z_p)^2)^{1/2}.$$

Теперь все готово для подстановки в закон Био–Савара. Интегрирование сначала проводим по z , а затем по y :

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}(x_p \vec{j} + y \vec{i}) dz dy}{(x_p^2 + y^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \mathbf{i}(x_p \vec{j} + y \vec{i}) \frac{z}{(x_p^2 + y^2)(x_p^2 + y^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} dy = \\
&= \frac{\mathbf{i}}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{2(x_p \vec{j} + y \vec{i})}{x_p^2 + y^2} dy = \frac{\mathbf{i} x_p \vec{j}}{2\pi x_p} \arctan \frac{y}{x_p} \Big|_{-a}^a = \frac{\mathbf{j}}{\pi} \arctan \frac{a}{x_p}.
\end{aligned}$$

Задача 5. Найти поле на оси бесконечного желоба с током I , равномерно распределенным по площади сечения. Желоб представляет собой слой между двумя цилиндрами радиусов R_1 и R_2 , угол φ изменяется от π до 2π , z – ось цилиндра (рисунок 38).

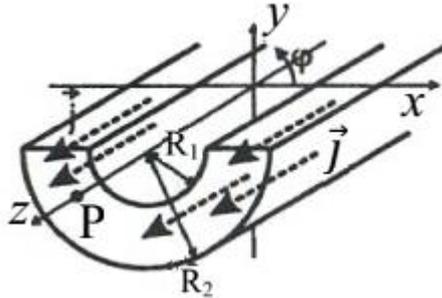


Рисунок 38 – Бесконечный желоб с током I

Решение. Расчет сводится к непосредственному использованию закона Био–Савара для ситуации «слой». Пусть для определенности поле ищется в точке $(0, 0, z_p)$. Тогда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')] }{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3},$$

где

$$\begin{aligned}
d\vec{V}^q &= \frac{I}{S} \vec{k} dV = \frac{I}{0.5\pi(R_2^2 - R_1^2)} \vec{k} r dr d\varphi dz, \\
\vec{r}_p &= z_p \vec{k}, \\
\vec{r}' &= r \cos\varphi \vec{i} + r \sin\varphi \vec{j} + z \vec{k}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\vec{r}_p - \vec{r}' &= -r \cos\varphi \vec{i} - r \sin\varphi \vec{j} + (z_p - z) \vec{k}, \\
|\vec{r}_p - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + (z - z_p)^2}.
\end{aligned}$$

После векторного умножения $d\vec{V}^q$ на $\vec{r}_p - \vec{r}'$ получаем:

$$d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}') = \frac{2I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} (-r \cos\varphi \vec{j} - r \sin\varphi \vec{i}) r dr d\varphi dz.$$

Теперь можно произвести интегрирование в законе Био–Савара:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{2I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{(-r\cos\varphi\vec{j} - r\sin\varphi\vec{i})}{(r^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\varphi dz = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{-r\cos\varphi\vec{j} + r\sin\varphi\vec{i}}{(r^2 + (z - z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\varphi dz = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \cdot (-\cos\varphi|_{\pi}^{2\pi})\vec{i} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{z}{r^2 \left((z - z_p)^2 + r^2 \right)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot r^2 dr = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \cdot (-2\vec{i}) \cdot 2(R_2 - R_1) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi^2(R_2 + R_1)} \vec{i}.
\end{aligned}$$

Задача 6. Найти магнитное поле \vec{B} в центре равномерно заряженной зарядом q тонкой пластины радиуса R , вращающейся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω (рисунок 39).

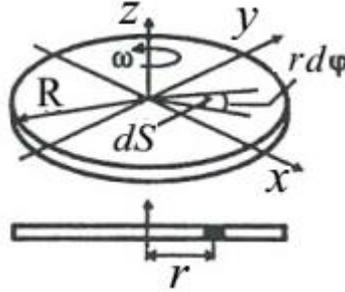


Рисунок 39 – Равномерно заряженная зарядом q тонкая пластина радиуса R

Решение. В данной задаче необходимо прежде всего записать плотность тока, создаваемого вращением заряженного диска, как функцию расстояния r от оси вращения z . По абсолютной величине эта плотность равна:

$$\mathbf{i} = \frac{dq}{dt dr} = \frac{\sigma dS}{dt dr} = \frac{\sigma r d\varphi dr}{dt dr} = \sigma r \omega.$$

Здесь использовано, что $d\varphi/dt = \omega$. С учетом направления вращения,

$$\vec{i} = \mathbf{i} \cdot (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}).$$

Теперь можно применять закон Био–Савара. При этом

$$\vec{r}_p = \vec{0},$$

$$\vec{r}' = r\cos\varphi\vec{i} + r\sin\varphi\vec{j},$$

$$d\vec{V}^q = \vec{i} dS = \sigma r \omega \cdot (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \cdot r d\varphi dr,$$

где r пробегает значения от 0 до R . По закону Био–Савара,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{V}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\sigma r \omega \cdot (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \cdot r d\varphi dr) \times$$

$$\times (-r\cos\varphi\vec{i} - r\sin\varphi\vec{j})r^{-3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \vec{k} \cdot \sigma r \omega d\varphi dr}{r^3}.$$

При записи результата векторного умножения опущены члены, которые дадут 0 при интегрировании по φ от 0 до 2π . Окончательно,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0 R \sigma \omega \vec{k}}{2} = \frac{\mu_0 q \omega \vec{k}}{2\pi R},$$

с учетом того, что $\sigma = q/\pi R^2$.

3.2 Уравнения Максвелла для магнитостатики. Векторные операторы в различных системах координат

Уравнения Максвелла для магнитостатики выглядят:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \end{aligned}$$

где \vec{A} – вектор–потенциал магнитного поля, μ – магнитная проницаемость.

Векторные операторы (grad , div , rot), фигурирующие в уравнениях Максвелла, по-разному записываются в декартовой и цилиндрической системах координат. Сферическая система при решении задач магнитостатики (в отличие от электростатики) почти не применяется.

$$\operatorname{grad} \Phi = \begin{cases} \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} - \text{декартова,} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z - \text{цилиндрическая.} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \text{декартова,} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \text{цилиндрическая.} \end{cases}$$

$$\Delta \Phi = \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \text{декартова,} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \text{цилиндрическая.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \\ &\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Задача 1. Зная распределение магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)$, найти распределение токов, которые это поле создали.

Решение. Независимо от аналитического вида $\vec{H}(x, y, z)$, следует воспользоваться уравнением Максвелла $\vec{j} = \text{rot}\vec{H}$.

Задача 2. Магнитное поле направлено соленоидально (то есть по вектору \vec{e}_φ цилиндрической системы координат) и по модулю равно $H = \beta r^2 \exp(-ar)$, где r – расстояние от оси z . Требуется найти плотность тока $\vec{j}(r)$.

Решение. Применяется уравнение Максвелла для $\text{rot}\vec{H}$ в цилиндрической системе координат. Оговоренная в условии соленоидальность направления поля означает наличие лишь H_φ – компоненты которая, как следует из выражения для нее, зависит только от r . С учетом сказанного, формула для $\text{rot}\vec{H}$ радикально упрощается:

$$\begin{aligned} \vec{j} = \text{rot}\vec{H} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot \beta r^2 \exp(-ar))}{\partial r} \right) \vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \beta r^2 \exp(-ar) (3 - ar) \vec{e}_z = \beta r \exp(-ar) (3 - ar) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Задача 3. Доказать, что для магнитного поля прямого провода радиуса R с током I (которое составляет $\vec{B} = \mu_0 I / 2\pi r \cdot \vec{e}_\varphi$ вовне провода и $\vec{B} = \mu_0 I r / 2\pi R^2 \cdot \vec{e}_\varphi$ внутри) выполнено уравнение Максвелла $\text{div}\vec{B} = 0$.

Решение. То, что $\text{div}\vec{B} = 0$, сразу вытекает из записи \vec{B} , если посмотреть на формулу для div в цилиндрической системе. У нас имеется лишь компонента B_φ , не зависящая от φ , так что все три слагаемых в выражении для div оказываются нулевыми.

Вместо использования выражения для div в цилиндрической системе, можно было переписать \vec{B} в декартовых координатах с учетом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$, после чего взять дивергенцию по формуле декартовой системы координат и убедиться, что получается ноль.

3.3 Уравнение Пуассона. Его применение для расчета полей в вакууме

Уравнение Пуассона для вектор–потенциала записывается:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Оно может быть разбито на три уравнения для каждой из компонент \vec{A} , в частности

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z.$$

Если ток радиально–симметрично течет по проводу, то есть $\vec{j} = \vec{j}_z(r) \vec{k}$, то в цилиндрической системе

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_z(r).$$

Это уравнение может быть дважды проинтегрировано. Интеграл берется как неопределенный, после чего на границах участков (если производилось разбиение) обеспечивается непрерывность A_z и dA_z/dr посредством подбора констант. Магнитное поле вычисляется как

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = -\frac{dA_z}{dr} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

Однако, применение уравнения Пуассона в магнитостатике дает явно меньше преимуществ, чем в электростатике.

Задача 1. Имеется прямой провод радиуса R , по сечению которого равномерно распределен ток I . Требуется вычислить $\vec{A}(r)$, а затем – с использованием найденного потенциала – найти \vec{B} . При расчетах положить $\vec{A} = \vec{0}$ при $r = 0$.

Решение. Ось z – это ось симметрии провода. Уравнение Пуассона для A_z записывается:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_0 \mathbf{j}, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

где $\mathbf{j} = I/2\pi R^2$. После двукратного интегрирования имеем:

$$A_z = \begin{cases} -\mu_0 \mathbf{j} \frac{r^2}{4}, & r < R, \\ C_1 \ln r + C_2, & r > R. \end{cases}$$

При интегрировании во внутренней области ($r < R$) мы использовали условие $A_z|_{r=0} = 0$, вытекающее из $\vec{A}|_{r=0} = \vec{0}$. Кроме того, учтено, что на оси z $dA_z/dr = 0$, поскольку при $r = 0$ заведомо $\vec{B} = \vec{0}$ (из симметрии, поле при $r = 0$ не может быть направлено никуда, кроме как по оси z , но по z поля нет, так как ток как раз параллелен этой оси). Константы C_1 и C_2 находятся из условий «сшивания» A_z и dA_z/dr . Получается:

$$A_z = \begin{cases} -\mu_0 \mathbf{j} \frac{r^2}{4}, & r < R, \\ -\mu_0 \mathbf{j} \frac{R^2}{2} \ln \frac{r}{R} - \mu_0 \mathbf{j} \frac{R^2}{4}, & r > R. \end{cases}$$

Магнитное поле находится как

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = -\frac{dA_z}{dr} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mathbf{j} r}{2} \vec{e}_\varphi, & r < R, \\ \frac{\mu_0 \mathbf{j} R^2}{2r} \vec{e}_\varphi, & r > R. \end{cases}$$

Напомним еще раз, что $\mathbf{j} = I/2\pi R^2$.

3.4 Случай бесконечной плотности тока и тока на бесконечность

Ситуации с $\mathbf{j} = \infty$ физически абсолютно невозможны, но они «появляются» в задачах с бесконечно тонкими проводами или поверхностями с током. При этом возникают некоторые сложности, а именно:

- неограниченность поля вблизи провода;
- $\mathbf{j} = \infty$ как записать уравнение Максвелла $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$?
- для поля провода с током I ($H_\varphi = I/2\pi r$, цилиндрическая система) пытаемся посчитать rot , а получается ноль – где же ток?
- нереальность ситуации нахождения любого магнетика области с бесконечным полем (должен быть пробой).

Для математического рассмотрения описанных ситуаций можно ввести объемные плотности тока через δ -функцию:

$$\vec{j}(x, y, z) = \mathbf{i} \cdot \delta(x) \vec{j} - \text{плоскость } yz \text{ с током по «}y\text{»},$$

$$\vec{j}(x, y, z) = I \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \vec{k} - \text{бесконечный провод с током по «}z\text{»},$$

$$\vec{j}(x, y, z) = q\vec{v} \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z) - \text{движущийся заряд в точке } (0,0,0).$$

Однако, мы не будем при решении задач использовать такой подход и, следовательно, будем всегда различать между объемными, листовыми и линейными токами.

В некоторых искусственных примерах имеется ток на бесконечность (из бесконечности) – например, в простейшем случае прямого провода с током. При попытке вычислить потенциал \vec{A} в таких примерах может получиться ∞ и при этом не выполняются условия $\vec{A} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}$ на бесконечности. Единственный способ обойти проблему состоит в том, чтобы потребовать $\vec{A} = \vec{0}$ где-то не на бесконечности. В реальной задаче токи должны быть, разумеется, замкнуты и сосредоточены в ограниченной области пространства.

3.5 Циркуляция вектора по контуру. Применение теоремы Стокса как метод расчета полей в симметричных случаях

Циркуляцией вектора \vec{F} по контуру L называется величина

$$C = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Теорема Стокса записывается:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Это чисто математическая теорема, справедливая для любого векторного поля \vec{F} . Но если в качестве \vec{F} берется напряженность магнитного поля \vec{H} , то с привлечением уравнения Максвелла получаем

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_\Sigma,$$

где I_Σ – суммарный ток, пронизывающий площадку S .

Основным случаем применения теоремы о циркуляции является задача о нахождении магнитного поля, создаваемого прямым проводом с заданным цилиндрически–симметричным распределением плотности тока по сечению. Контур при этом выбирается в виде окружности с центром на оси цилиндра. Величина магнитного поля зависит только от удаления от оси (r), а направлено оно по касательной к выбранной окружности (рисунок 40).

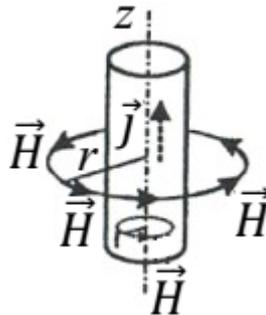


Рисунок 40 – Прямой провод с заданным цилиндрически–симметричным распределением плотности тока по сечению

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H(r).$$

В этом случае удобно разделить токи на объемные $\vec{j}(r)$ и поверхностные (осевые). К последним относится ток по центральной жиле (I_0) и токи по цилиндрическим поверхностям (I_i). Суммарный ток будет

$$I_\Sigma = 2\pi \int_0^r \tilde{r} \vec{j}(\tilde{r}) d\tilde{r} + \sum_{i, R_i < r} I_i.$$

Суммирование ведется по поверхностям радиусов $R_i < r$. Разумеется, в конкретных задачах $\vec{j}(r)$ или I_i могут сосуществовать в самых различных комбинациях. Окончательная формула для поля выглядит:

$$H(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i, R_i < r} I_i + \int_0^r \tilde{r} \vec{j}(\tilde{r}) d\tilde{r} \right].$$

Задача 1. Найти магнитное поле, создаваемое бесконечно тонким прямым проводом с током I .

Решение. Контур естественно выбрать в виде окружности, лежащей в ортогональной к проводу плоскости и центром на оси провода. Во всех точках этой окружности поле \vec{H} по модулю одно и то же и направлено по касательной к ней.

Применение теоремы о циркуляции дает:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = I.$$

Отсюда сразу:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Задача 2. Найти магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым проводом, сечение которого представляет собой кольцо с внутренним радиусом R_1 , а внешним R_2 . Ток I распределен по площади сечения равномерно (рисунок 41).

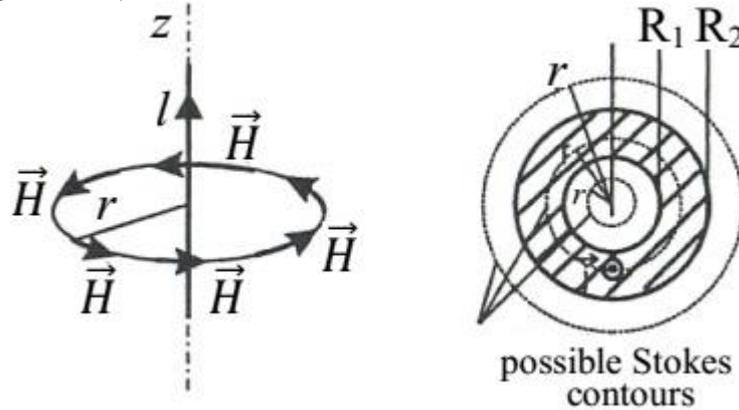


Рисунок 41 – Бесконечный прямой провод

Решение. Выбираем контур в виде окружности радиуса r в плоскости, перпендикулярной к проводу, и центром на его оси. Эта окружность может оказаться лежащей как вовне, так и внутри провода. В любом случае

$$H(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i, R_i < r} I_i + \int_0^r \tilde{r} j(\tilde{r}) d\tilde{r} \right] = \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{r} j(\tilde{r}) d\tilde{r}.$$

Последнее равенство появляется ввиду отсутствия каких-либо токов по цилиндрическим поверхностям – по условию, имеется только объемный ток \mathbf{j} . Этот ток равен

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{I}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)}, R_1 < r < R_2, \\ 0, r < R_1 \text{ или } r > R_2. \end{cases}$$

Поскольку ток течет только в области $R_1 < r < R_2$, следует аккуратно производить интегрирование в формуле для H , а именно:

$$H(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{r} \cdot 0 \cdot d\tilde{r} = 0, r < R_1, \\ \frac{1}{r} \int_{R_1}^r \tilde{r} \cdot \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot d\tilde{r} = \frac{I(r^2 - R_1^2)}{2\pi r(R_2^2 - R_1^2)}, R_1 < r < R_2, \\ \frac{1}{r} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} \cdot \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot d\tilde{r} = \frac{I}{2\pi r}, r > R_2. \end{cases}$$

Это и есть окончательный результат. При расчете поля для $r > R_1$ мы установили нижний предел интегрирования R_1 , а не 0, поскольку в области $0 < r < R_1$ ток отсутствует.

Задача 3. По проводу с радиусом сечения R течет ток с плотностью $\mathbf{j} = \alpha r^3$. Найти поле H как функцию расстояния r от оси провода.

Решение. Просто применяем формулу

$$H(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i, R_i < r} I_i + \int_0^r \tilde{r} \mathbf{j}(\tilde{r}) d\tilde{r} \right] = \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{r} \mathbf{j}(\tilde{r}) d\tilde{r}.$$

В нашем случае $\mathbf{j} = \alpha r^3$ при $r < R$ и $\mathbf{j} = 0$ при $r > R$. Получается

$$H(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{r} \alpha \tilde{r}^3 d\tilde{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\alpha r^5}{5} = \frac{\alpha r^4}{5}, r < R,$$

$$H(r) = \frac{1}{r} \int_0^R \tilde{r} \alpha \tilde{r}^3 d\tilde{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\alpha R^5}{5}, r > R.$$

Задача 4. Найти магнитное поле, создаваемое бесконечной пластиной толщины $2d$, по сечению которой ток распределен с плотностью $\vec{\mathbf{j}} = \alpha |x| \cdot \vec{\mathbf{k}}$ (рисунок 42).

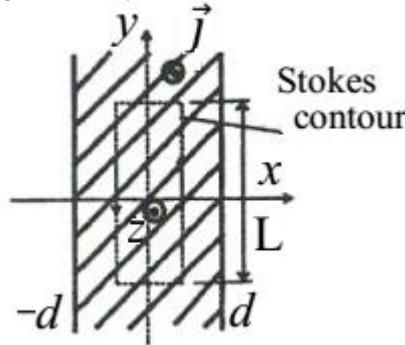


Рисунок 42 – Бесконечная пластина толщины $2d$

Решение. Теорема о циркуляции применяется к прямоугольному контуру, лежащему в плоскости xu и занимающему область $-x \dots x$ по оси x . Длина контура (L) вдоль u произвольна.

Из соображений симметрии, поле \vec{B} в любой точке параллельно вектору $\vec{\mathbf{j}}$ (не путать с $\vec{\mathbf{j}}$) и направлено по $+u$ при $x > 0$ и по $-\vec{\mathbf{j}}$ при $x < 0$.

Для определенности будем искать поле в точке с координатой $x > 0$. По абсолютной величине $H(x) = H(-x)$. Циркуляция составляет

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2H(x)L.$$

Выбранный контур пронизывается током

$$I_{\Sigma}(x) = 2L \int_0^{\min(x,d)} \alpha \tilde{x} d\tilde{x} = \begin{cases} \alpha L x^2, & x < d, \\ \alpha L d^2, & x > d. \end{cases}$$

По теореме о циркуляции, $2H(x)L = I_{\Sigma}(x)$, откуда

$$H(x) = \frac{1}{2} \cdot \min(d, |x|).$$

Задача 5. Найти магнитное поле, создаваемое тонкой цилиндрической поверхностью радиуса R , по которой в направлении вдоль оси цилиндра течет равномерно распределенный ток I .

Решение. Следует четко понимать, что описанная система – это не соленоид. В последнем ток течет вокруг оси цилиндра, а не вдоль нее.

Непосредственное использование общей формулы дает

$$H(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i, R_i < r} I_i + \int_0^r \tilde{r} \mathbf{j}(\tilde{r}) d\tilde{r} \right] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r} \cdot 0 = 0, r < R, \\ \frac{1}{2\pi r} I, r > R. \end{cases}$$

Поле, как и в случае провода, ориентировано соленоидально, то есть имеет лишь H_φ –компоненту.

Задача 6. Найти магнитное поле, создаваемое на своей оси соленоидом круглого сечения с числом витков на единицу длины n , через который течет ток I (рисунок 43).

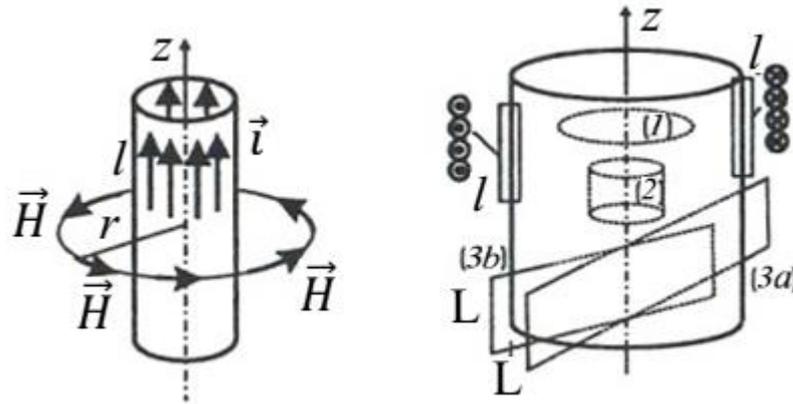


Рисунок 43 – Соленоид

Решение. Вначале убедимся в том, что поле в любой точке внутри соленоида направлено по его оси (z). Совершенно очевидно, что – ввиду симметрии – компоненты магнитного поля H_φ, H_r, H_z могут зависеть разве что от r и никак не от φ или z . Далее, если взять контур (1) в виде окружности в плоскости, перпендикулярной z , с центром на оси z , то циркуляция вектора \vec{H} по такому контуру должна равняться нулю, поскольку его не пронизывает никакой ток. Следовательно, \vec{H} не может иметь компоненты H_φ , касательной к описанному контуру. С учетом сказанного,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = B_z(r) \vec{k} + B_r(r) \vec{e}_r.$$

Чтобы доказать отсутствие радиальной компоненты B_r , следует привлечь теорему Гаусса, которую нужно применять к произвольно выбранному цилиндру (2), имеющую общую с соленоидом ось. Поток \vec{B} через поверхность этого цилиндра обязан быть равен нулю, ввиду отсутствия магнитных зарядов. Поток \vec{B} через «дно» и «крышку»

цилиндра компенсируют друг друга, а вот поток через боковую поверхность будет равен

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot dS\vec{e}_r = S \cdot B_r(r),$$

где S – площадь боковой поверхности. Получается, что $\Phi = 0$ только если $B_r = 0$. Следовательно, \vec{B} и \vec{H} параллельны \vec{k} .

Теперь мы можем провести вычисление поля $\vec{B} = B_z(r)\vec{k}$. Контур Стокса выбираем в виде прямоугольника (3), две стороны которого имеют произвольную длину L и параллельны оси z . Одна из этих сторон должна оказаться вовне соленоида, а другая – либо вовне (3а), либо внутри (3б) так, чтобы ось z лежала в плоскости прямоугольника, пересекая его. Описанный контур пронизывается током InL или (если обе стороны лежат вовне соленоида) нулевым суммарным током. Теорема о циркуляции дает:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = nIL \text{ или } 0.$$

Следовательно, вовне соленоида поле отсутствует, а внутри него имеем однородное магнитное поле

$$\vec{H} = nI\vec{k}, \vec{B} = \mu_0 nI.$$

3.6 Идеальные проводники в магнитном поле. Магнитостатический метод изображений

Большинство реальных проводников являются пара– или ферромагнетиками, и в них проникает наложенное внешнее магнитное поле, в отличие от поля электростатического. Однако, существуют среды (сверхпроводники, а в грубом приближении и ряд хорошо проводящих металлов), которые «пропускают» поле внутрь себя лишь на очень малую глубину. Реакция такой среды на внешнее магнитное поле заключается в возникновении бездиссипативно (без выделения энергии) текущих поверхностных токов проводимости, обеспечивающих отсутствие поля внутри.

Если такую модель можно принять, то для решения задачи о токах вблизи бесконечной плоскости следует симметрично изобразить все объекты, создающие поле (провода, листы, слои, заряды) и изменить направление тока в проводе– (листе– и т.д.) изображения. Магнитное поле за плоскостью равно нулю, а перед ней – сумме полей от истинных объектов и объектов–изображений.

Задача 1. Над бесконечной проводящей плоскостью параллельно ей расположен провод круглого сечения радиуса R с током \mathbf{j} . Найти магнитное поле в полупространстве, в котором находится провод (рисунки 44).

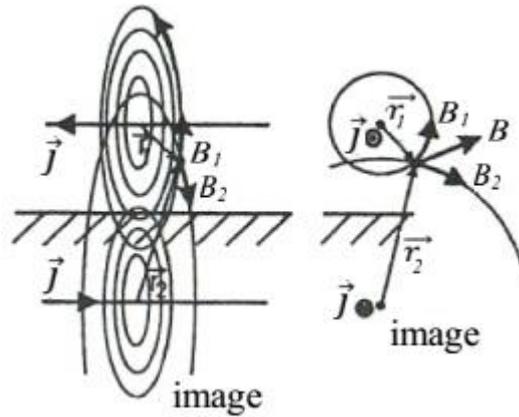


Рисунок 44 – Провод круглого сечения радиуса R с током \mathbf{j}

Решение. Искомое поле представляет собой суперпозицию полей самого провода (\vec{B}_1) и его изображения (\vec{B}_2); ток по проводу–изображению направлен в противоположную сторону:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

При этом

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 R^2}{2r_1^2} \cdot [\mathbf{j} \times \vec{r}_1], & r_1 > R, \\ \frac{\mu_0}{2} \cdot [\mathbf{j} \times \vec{r}_1], & r_1 < R. \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 R^2}{2r_2^2} \cdot [\mathbf{j} \times \vec{r}_2].$$

Здесь \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – векторы, соединяющие кратчайшим образом ось истинного провода и ось провода–изображения с точкой, в которой ищется поле. Эти векторы заведомо лежат в одной плоскости.

Задача 2. Ток I течет из бесконечности по проводу, расположенному по оси z , а затем растекается радиально–симметрично по проводящей плоскости xu . Найти величину магнитного поля во всем пространстве (рисунок 45).

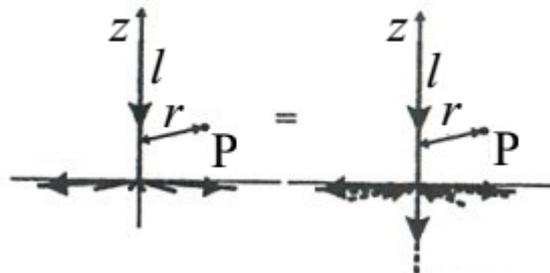


Рисунок 45 – Ток I течет из бесконечности по проводу, расположенному по оси z , а затем растекается радиально–симметрично по проводящей плоскости xu

Решение. Привлекается метод изображений: вместо проводящей плоскости, добавляется провод в отрицательной части оси z , по которому ток I течет от плоскости xu . Перед выходом на провод этот ток–

изображение радиально–симметрично «собирается» с плоскости «ху». Таким образом, токи в плоскости ху уничтожаются, а магнитное поле создается проводами с током I ($+\infty \dots 0$ – истинным и $-\infty \dots 0$ изображением). При вычислении поля эти токи можно объединить. Такая задача сводится к простейшей задаче о поле прямого тока, имеющей ответ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}$$

где r – расстояние от провода. Разумеется, этот результат относится только к тому полупространству, в котором расположен истинный провод. В другой половине поля нет.

3.7 Расчет магнитных дипольных моментов и полей, ими создаваемых

Знание магнитного дипольного момента \vec{m} системы помогает при вычислении полей и потенциалов на большом расстоянии от системы токов (рисунок 46):

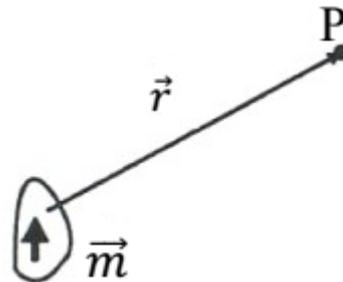


Рисунок 46 – Магнитный дипольный момент \vec{m} системы при вычислении полей и потенциалов на большом расстоянии от системы
ТОКОВ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r}_p(\vec{m} \cdot \vec{r}_p) - \vec{m} \cdot r_p^2}{r_p^5}, \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m} \times \vec{r}_p]}{r_p^3}.$$

Формула для нахождения магнитного дипольного момента имеет вид:

$$\vec{m} = -\frac{1}{2} \int [d\vec{V}^q \times \vec{r}^i],$$

где $d\vec{V}^q$ и \vec{r}^i имеют тот же смысл, что и при записи закона Био–Савара.

Задача 1. Найти магнитный дипольный момент ленточного кольца радиуса R и ширины h , симметрично лежащего на плоскости ху (рисунок 47). По ленте равномерно течет ток \vec{i} . Найти также поле \vec{B} и потенциал \vec{A} , создаваемые этой лентой в точке $P(x_p, 0, 0)$.

Решение. С учетом того, что объект, создающий поле, – «лист», записываем как

$$d\vec{V}^q = \vec{i}dS = \vec{i}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})Rd\varphi dz.$$

При этом

$$\vec{r}^i = R\cos\varphi\vec{i} + R\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}.$$

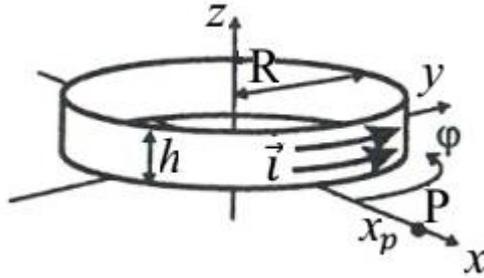


Рисунок 47 – Ленточное кольцо радиуса R и ширины h

Теперь можно вычислить \vec{m} по формуле дипольного момента:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{1}{2} \int [d\vec{V}^q \times \vec{r}^i] = -\frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} [(\mathbf{i}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}))Rd\varphi dz \times \\ &\quad \times (R\cos\varphi\vec{i} + R\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k})] = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{i}Rd\varphi dz (-R\sin^2\varphi\vec{k} + z\sin\varphi\vec{j} - R\cos^2\varphi\vec{k} + z\cos\varphi\vec{i}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{i}Rd\varphi dz (+R\vec{k} - z\sin\varphi\vec{j} - z\cos\varphi\vec{i}) = \frac{R^2\vec{k}\mathbf{i}2\pi h}{2} = \pi R^2 h \mathbf{i}\vec{k}.\end{aligned}$$

На еще нужно найти поле в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}_p = x_p\vec{i}$. Поскольку $\vec{m} \cdot \vec{r}_p = 0$, имеем

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{-\vec{m} \cdot \vec{r}_p^2}{r_p^5} = \frac{-\mu_0}{4\pi r_p^3} \cdot \pi R^2 h \mathbf{i}\vec{k} = -\frac{\mu_0 R^2 h \mathbf{i}}{4x_p^3} \vec{k}, \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\pi R^2 h \mathbf{i}\vec{k} \times x_p\vec{i}]}{x_p^3} = \frac{\mu_0 R^2 h \mathbf{i}}{4x_p^2} \vec{j}.\end{aligned}$$

Задача 2. Равномерно заряженный зарядом p по объему непроводящий шар радиуса R вращается вокруг оси z , проходящей через его центр, с угловой скоростью ω (рисунок 48). Найти магнитный дипольный момент такого шара.

Решение. Сначала запишем плотность тока, создаваемую шаром при его вращении. Для этого вычислим заряд, переносимый через бесконечно малый фрагмент сечения шара размером $dr \cdot rd\theta$ в единицу времени:

$$\mathbf{j} = \frac{dq}{dtdS} = \frac{pdV}{dtrd\theta dr} = \frac{pr^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}{dtrd\theta dr} = p\omega r \sin\theta,$$

где принято во внимание определение угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$. Поскольку вектор плотности тока \vec{j} сонаправлен с линейной скоростью в каждой точке шара,

$$\vec{j} = \pm p\omega r \sin\theta \cdot (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}).$$

Векторы \vec{r}^i и $d\vec{V}^q$ записываются:

$$\vec{r}^i = r \sin\theta \cos\varphi\vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi\vec{j} + r \cos\theta\vec{k},$$

$$d\vec{V}^q = \vec{j}dV = \pm p\omega r \sin\theta \cdot (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \cdot r^2 d\varphi \sin\theta d\theta dr.$$

Теперь можно воспользоваться выражением для магнитного момента:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{1}{2} \int [d\vec{V}^q \times \vec{r}'] = -\frac{1}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(\pm p\omega r \sin\theta \cdot (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \cdot \\ &\cdot r^2 d\varphi \sin\theta d\theta dr) \times (r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k})] = \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin\theta \vec{k}) \cdot p\omega r \sin\theta \cdot r^2 d\varphi \sin\theta d\theta dr.\end{aligned}$$

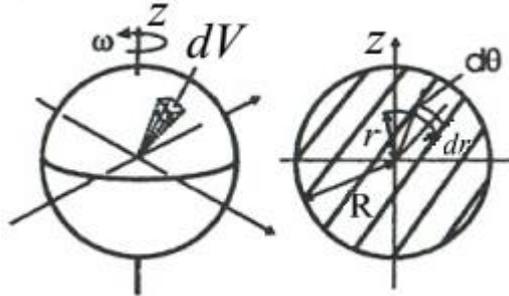


Рисунок 48 – Равномерно заряженный зарядом p по объему непроводящий шар радиуса R

В последнем выражении опущены члены, содержащие $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$ без квадрата, которые при интегрировании по φ от 0 до 2π дадут ноль. Окончательно:

$$\vec{m} = \pm \frac{1}{2} \cdot p\omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \vec{k} = \pm \frac{4\pi p\omega R^5}{15} \vec{k},$$

где выбор знака зависит от направления тока: если против часовой стрелки в плоскости $xу$, то берется плюс.

3.8 Вычисление сил магнитного взаимодействия и энергии

Сила магнитного взаимодействия тела 2(1) с магнитным полем, создаваемым телом 1(2), находится по формуле:

$$\vec{F} = \int [d\vec{V}_{2(1)}^q \times \vec{B}_{1(2)}].$$

Величина $d\vec{V}^q$ записывается как в законе Био–Савара, а именно $\vec{j}dV, \vec{i}dS$ или $I d\vec{l}$. В расчетах удобнее работать с тем полем \vec{B} , которое заранее известно или может быть проще вычислено. Соответственно выбирается значок 1 или 2 в формуле.

Элементарная работа сил Ампера составляет

$$\delta A_{Amper\ forces} = I d\Phi$$

(I – ток в контуре, Φ – захватываемый контуром магнитный поток). При интегрировании элементарной работы от начального положения контура, в котором захватывается поток Φ_1 , до конечного (Φ_2) имеем

$$A_{Amper\ forces} = -A_{against\ Amper\ forces} = I\Phi_2 - I\Phi_1 = W_2 - W_1,$$

где W_2 и W_1 – энергия контура с током I во внешнем магнитном поле, обеспечивающем поток Φ .

Задача 1. В одной плоскости параллельно друг другу расположены провод с током I_1 и лента ширины b с током I_2 , равномерно распределенным по длине ее сечения (рисунок 49). Ближайший к проводу край ленты отстоит от него на расстояние a . Найти силу взаимодействия провода и нити на единицу длины.

Решение. Вводим систему координат так, что ось x лежит в плоскости ленты, перпендикулярна ей и занимает область $a < x < a + b$. Ось z направим по проводу с током I_1 , а ось y в таком случае должна уходить за чертеж, чтобы тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ была правой.

Очевидно, что магнитное поле провода \vec{B}_{wire} вычисляется намного проще, чем поле ленты (\vec{B}_{bond}). По теореме о циркуляции, $|\vec{B}_{wire}|$ составляет $\mu_0 I_1 / 2\pi r$, где r – расстояние от провода. Поэтому сила взаимодействия будет вычисляться как

$$\vec{F} = \int [d\vec{V}_{band}^q \times \vec{B}_{wire}].$$

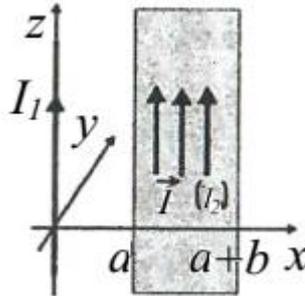


Рисунок 49 – Провод с током I_1 и лента ширины b с током I_2

В векторном виде выражение для поля, создаваемого током I_1 в плоскости xz , выглядит

$$\vec{B}_{wire} = \vec{B}_{wire}(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \cdot \vec{j}.$$

Лента представляет собой (применительно к записи $d\vec{V}_{band}^q$) лист с током $\vec{i} = I_2/b \cdot \vec{k}$. Следовательно,

$$d\vec{V}_{wire}^q = \frac{I_2}{b} \vec{k} dx dz.$$

Отметим, что, ввиду бесконечности длины провода и нити вдоль оси z , сила взаимодействия между ними будет бесконечной. Именно поэтому в условии требуется найти силу на единицу длины:

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \int_a^{a+b} \left[\frac{I_2}{b} \vec{k} dx \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \cdot \vec{j} \right].$$

Вычисление дает (учтем, что $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$):

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \vec{i} \int_a^{a+b} \frac{1}{x} \cdot dx = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \vec{i} \cdot \ln \frac{a+b}{a}.$$

Найденная сила – это сила, с которой поле тока I_1 действует на ленту с током I_2 . Как и должно быть, это сила притяжения (она направлена по $-\vec{i}$), поскольку направления токов провода и ленты одинаковы.

Задача 2. По бесконечному слою в виде части цилиндра ($R_1 < r < R_2, \pi < \varphi < 2\pi$) течет равномерно распределенный ток I_2 . На оси z , отвечающей этому слою, расположен провод с током I_1 . Найти силу взаимодействия слоя и провода $d\vec{F}/dz$ на единицу длины (рисунок 50).

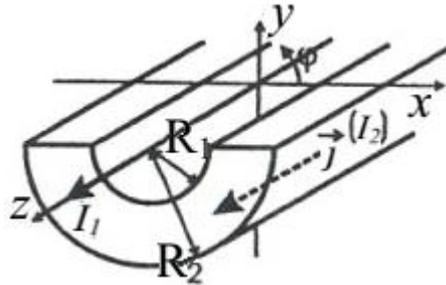


Рисунок 50 – Бесконечный слой в виде части цилиндра с током I_2 и провод с током I_1

Решение. С учетом того, что магнитное поле \vec{B}_{layer} описанного слоя уже нами найдено, вычисление силы взаимодействия одинаково удобно в варианте $\int [d\vec{V}_{layer}^q \times \vec{B}_{wire}]$ и в варианте $\int [d\vec{V}_{wire}^q \times \vec{B}_{layer}]$. Мы доведем оба вычисления до окончательного результата. При этом

$$d\vec{V}_{layer}^q = \vec{j}dV = \frac{I_2}{0.5\pi(R_2^2 - R_1^2)} \vec{k}rdrd\varphi dz,$$

$$d\vec{V}_{wire}^q = Id\vec{l} = I_1 \vec{k}dz.$$

А магнитное поле каждого из объектов:

$$\vec{B}_{wire}(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}),$$

$$\vec{B}_{layer}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[d\vec{V}_{layer}^q \times (\vec{r}_p - \vec{r}')] }{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = -\frac{2\mu_0 I_2}{\pi^2(R_2 + R_1)} \cdot \vec{i}.$$

Сила на единицу длины будет:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dz} &= \frac{d}{dz} \int [d\vec{V}_{layer}^q \times \vec{B}_{wire}] = \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{I_2}{0.5\pi(R_2^2 - R_1^2)} \vec{k}rdrd\varphi \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \right] = \\ &= \frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot 2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-\sin\varphi \vec{j} - \cos\varphi \vec{i}) drd\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} (R_2 - R_1) (\cos\varphi |_{\pi}^{2\pi} \vec{j} - \sin\varphi |_{\pi}^{2\pi} \vec{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi^2(R_2 + R_1)} \cdot 2\vec{j}. \end{aligned}$$

Эта же сила (с точностью до знака):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dz} &= \frac{d}{dz} \int [d\vec{V}_{wire}^q \times \vec{B}_{layer}] = \\ &= I_1 \vec{k} \times \left(-\frac{2\mu_0 I_2}{\pi^2 (R_2 + R_1)} \vec{i} \right) = -\frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi^2 (R_2 + R_1)} \vec{j}. \end{aligned}$$

Задача 3. Сторона рамки с током I равна a . Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу (по которому течет ток I_0) и отстоит от него на расстояние, которое в η раз больше стороны рамки. Найти механическую работу, которую нужно совершить при медленном повороте рамки вокруг ее оси на 180° (рисунок 51).

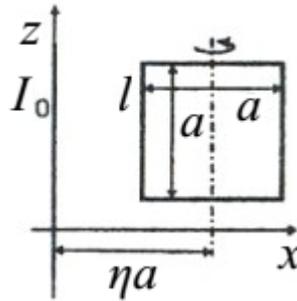


Рисунок 51 – Рамка с током I

Решение. Искомая работа представляет собой разность энергий контура в конечном и начальном положении. Хотя эти положения геометрически одинаковы, энергия в них различна ввиду различия взаимной ориентации магнитного поля и нормали к плоскости рамки. Последняя определяется направлением тока. Энергия в конечном положении равна, с обратным знаком, энергии в исходном:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = 2I\Phi_2.$$

Если ввести ось x в плоскости рамки перпендикулярно к оси провода I_0 , то магнитное поле тока I_0 (по величине) запишется

$$B(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}.$$

А по направлению оно ортогонально плоскости рамки. Поэтому поток составит просто величину

$$\Phi_2 = a \cdot \int_{\eta a - a/2}^{\eta a + a/2} B(x) dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1}.$$

Окончательно получаем работу:

$$A = \frac{\mu_0 I_0 I a}{\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1}.$$

Следует оговориться, что знак работы остается неопределенным, так как не оговорено, в каком положении – начальном или конечном – вектор \vec{B} и нормаль к плоскости рамки (определяемая по направлению вворачивания винта с правой нарезкой при обходе контура по направлению тока I) сонаправлены.

4. Намагничивающиеся среды

4.1 Расчет магнитных полей при наличии магнетиков.

Намагниченность. Молекулярные токи

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

и уравнение Пуассона

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}$$

применимы при наличии любых магнетиков. Следует только помнить, что μ может зависеть от координат, и его в общем случае нельзя выносить из-под знака rot . Если при решении уравнения Пуассона потенциал \vec{A} найден на отдельных кусках, по границе которых не течет ток, то стыковка осуществляется с условиями

$$\vec{A}|_{x_0+} = \vec{A}|_{x_0-}, \mu^{-1}|_{x_0+} \cdot (\operatorname{rot} \vec{A})_{\perp x}|_{x_0+} = \mu^{-1}|_{x_0-} \cdot (\operatorname{rot} \vec{A})_{\perp x}|_{x_0-},$$

где $\perp x$ означает составляющую ротора в плоскости yz , перпендикулярной оси x . Различие между \vec{B} и \vec{H} заключается в том, что \vec{B} – это микроскопическое (зависящее от свойств среды) поле, а \vec{H} – макроскопическая напряженность магнитного поля.

Теорема о циркуляции (Стокса) как математический закон не теряет своей силы при наличии магнетиков, но для ее практического использования не только плотность тока \vec{j} , но и проницаемость μ (восприимчивость χ) должны иметь высокосимметричное распределение. Например, в случае цилиндрической симметрии, μ , как и \vec{j} , должно зависеть лишь от r .

Интегрирование закона Био–Савара в системах с магнетиками является недопустимым, за исключением одной искусственной ситуации. Если $\mu = \text{const}$ во всем пространстве, то в задачах для вакуума просто заменяем μ_0 на произведение $\mu_0 \mu$. В частности, для прямого провода с током $\vec{B} = \mu_0 \mu / 2\pi \cdot I \vec{e}_\varphi / r$.

Реакция магнетика на магнитное поле¹ заключается в намагничивании магнетика 0 ориентации магнитных дипольных моментов его молекул по полю. Количественно этот эффект тем сильнее, чем выше магнитная проницаемость и чем сильнее поле. Намагниченные молекулы сами являются источниками поля, которое накладывается на внешнее поле, что осложняет ситуацию даже при короткой геометрии.

¹ Необходимо отметить, что большинство неферромагнитных материалов обладает магнитной проницаемостью, близкой к единице. Поэтому эффекты намагничивания являются слабыми и менее интересными практически, чем эффекты поляризации диэлектриков, где диэлектрическая проницаемость значительно больше 1. Ввиду указанного обстоятельства, количество рассматриваемых задач, посвященных магнетикам, относительно невелико.

Задача 1. Брусок из парамагнетика поместили на оси кольца с током (рисунок 52). Изменится ли и в какую сторону (качественно) поле на прямой центр кольца – брусок в сравнении с тем, каким оно было при отсутствии бруска?

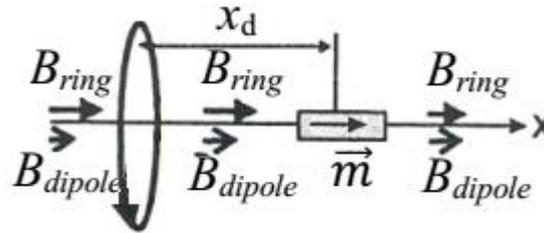


Рисунок 52 – Брусок из парамагнетика, помещенный на оси кольца с током

Решение. Парамагнитный брусок намагничивается в поле – возникает диполь \vec{m} , ориентированный в ту же сторону, что и поле кольца. Поле этого диполя накладывается на поле кольца. Направим ось x от кольца в сторону диполя и введем вектор \vec{r}_d от диполя в точку, где оценивается поле. Тогда $\vec{m} = m\vec{i}$, $\vec{r}_d = r_d\vec{i}$ для $x > x_d$ и $\vec{r}_d = -r_d\vec{i}$ для $x < x_d$ (x_d – координата диполя). По формуле $\vec{B}_d \approx \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot r_d^{-5} (3\vec{r}_d(\vec{m} \cdot \vec{r}_d) - \vec{m}r_d^2) = 2\mu_0\vec{m}/4\pi r_d^3$ получаем, что поле диполя \vec{B}_d в любом месте оси x ориентировано в сторону ее положительного направления. Это означает, что поле кольца, существовавшее без магнетика, возрастет во всех точках на оси кольца.

Количественные характеристики намагничивания – вектор намагниченности \vec{M} и молекулярный ток \vec{j}_{mol} .

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}, \vec{M} = (\mu - 1)\vec{H},$$

$$\vec{j}_{mol} = rot\vec{M}, \vec{i}_{mol}|_{x=x_0} = M_{\perp x}|_{x=x_0+} - M_{\perp x}|_{x=x_0-}.$$

Места протекания молекулярного тока:

- там, где есть истинный ток \vec{j}
- там, где $\mu \neq const$ (магнетик неоднороден)
- \vec{i} может быть отлична от $\vec{0}$ (т.е. $\vec{j} = \infty$):
- там, где есть \vec{i} (листы с током)
- там, где имеет место разрыв μ (стык магнетиков).

Суммарный молекулярный ток, проинтегрированный по всему объему тела, равен 0 – иначе в теле возникали бы внутренние перемещения молекул, что невозможно.

Задача 2. Ток I равномерно распределен по сечению провода радиуса R , изготовленного из магнетика с восприимчивостью χ (рисунок 53). Найти поверхностную плотность молекулярного тока.

Решение. Намагниченность $\vec{M}|_{r=R+}$ вне провода равна нулю, так как там никаких магнетиков нет. Внутри провода около границы намагниченность сонаправлена с полем \vec{H} и по величине равна $M|_{r=R-} =$

$\chi \cdot I/2\pi R$. Следовательно, поверхностный молекулярный ток составит $i = M|_{r=R+} - M|_{r=R-} = -\chi \cdot I/2\pi R$. Знак минус означает, что поверхностный молекулярный ток оказывается противоположно направлен по отношению к току I .

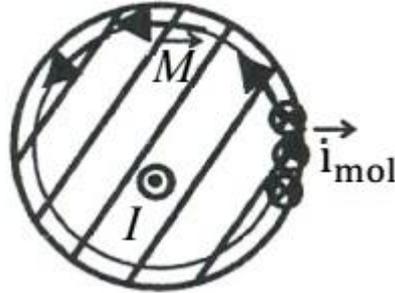


Рисунок 53 – Провод радиуса R

4.2 Расчет поля между эквипотенциальными поверхностями в отсутствие токов

Исходным уравнением является

$$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\vec{A}) = \vec{0},$$

которое для случая цилиндрической симметрии, в котором $\vec{A} = A_z(r)\vec{k}$, преобразуется в

$$\frac{1}{r} \frac{1}{dr} \left(\frac{r}{\mu(r)} \frac{dA_z}{dr} \right) = 0.$$

При получении последнего выражения использована формула для ротора в цилиндрических координатах.

Если известны потенциалы двух поверхностей, между которыми нет тока ($A_{z1} = A_z(R_1)$ и $A_{z2} = A_z(R_2)$), то решение

$$\frac{1}{\mu(r)} \frac{dA_z}{dr} = C \text{ и далее } A_z(r) = A_{z1} + C \int_{R_1}^r \frac{\mu(\tilde{r})}{\tilde{r}} d\tilde{r}.$$

С учетом условия при $r = R_2$ имеем окончательно:

$$A_z(r) = A_{z1} + \frac{A_{z2} - A_{z1}}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu(\tilde{r})}{\tilde{r}} d\tilde{r}} \cdot \int_{R_1}^r \frac{\mu(\tilde{r})}{\tilde{r}} d\tilde{r},$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = -\frac{dA_z}{dr} \vec{e}_\varphi = -\frac{A_{z2} - A_{z1}}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu(\tilde{r})}{\tilde{r}} d\tilde{r}} \cdot \frac{\mu(r)}{r} \vec{e}_\varphi.$$

Совершенно очевидна аналогия с расчетом электрического поля в цилиндрическом конденсаторе. Однако, в задачах магнитостатики потенциалы на поверхностях (A_{z1}, A_{z2}) чаще всего неизвестны заранее и не могут быть непосредственно измерены экспериментально. Поэтому приведенный выше расчет оказывается менее удобным, чем применение теоремы о циркуляции вектора \vec{H} без рассмотрения потенциалов.

4.3 Расчет поля симметричного распределения токов по теореме Стокса

Если как токи, так и магнитная восприимчивость χ имеют высокосимметричное распределение, то применение теоремы Стокса при наличии магнетика приводит к тому же результату для \vec{H} , что и для случая вакуума. Для цилиндрической симметрии ($\vec{j} = j(r)\vec{e}_\varphi, \chi = \chi(r)$)

$$H(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i, R_i < r} I_i + \int_0^r \tilde{r} j(\tilde{r}) d\tilde{r} \right],$$

причем \vec{H} направлен соленоидально ($\vec{H} = H\vec{e}_\varphi$). Имея $H = H(r)$ можно сразу найти B и намагниченность M :

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \vec{M} = \chi\vec{H} \quad (\mu = \chi + 1).$$

Плотность молекулярного тока вычисляется на основе соотношения

$$\vec{j}_{\text{mol}} = \text{rot}\vec{M} = \text{rot}(\chi \cdot \vec{H}) = \chi \cdot \text{rot}\vec{H} + \nabla\chi \times \vec{H} = \chi \cdot \vec{j} + \chi' \cdot \vec{H},$$

$$\vec{j}_{\text{mol}} = \chi \cdot j + \chi' \cdot H \text{ по величине.}$$

Если получается $\vec{j}_{\text{mol}} = \infty$ (что возможно при $\chi' = \infty$ или $j = \infty$), то на соответствующей поверхности имеется поверхностный молекулярный ток. Последний находится с привлечением теоремы Стокса, применяемой к вектору \vec{M} :

$$\int \vec{M} \cdot d\vec{l} = 2\pi r M(r) = I_{\Sigma, \text{mol}}(< r),$$

$$\mathbf{i}_{\text{mol}}(r_0) = \frac{I_{\Sigma, \text{mol}}(< r_0 + 0) - I_{\Sigma, \text{mol}}(< r_0 - 0)}{2\pi r_0} =$$

$$= \chi(r_0 + 0)H(r_0 + 0) - \chi(r_0 - 0)H(r_0 - 0).$$

Молекулярный ток, проинтегрированный по всему сечению провода, должен во всех случаях оказаться нулем.

Задача 1. Вокруг прямого провода с током I расположен цилиндрический слой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 их однородного магнетика с проницаемостью μ (рисунок 54). Найти $\vec{H}, \vec{B}, \vec{M}$ и поверхностные молекулярные токи.

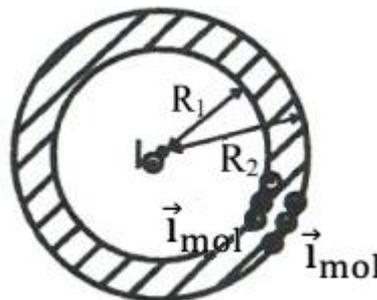


Рисунок 54 – Цилиндрический слой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 вокруг прямого провода с током I

Решение. Напряженность магнитного поля записывается, как если бы магнетика не было:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

Сразу же находятся \vec{B} и \vec{M} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi, \vec{M} = \vec{0}, r < R_1, r > R_2,$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi, \vec{M} = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi, R_1 < r < R_2.$$

Поскольку токов проводимости в слое магнетика нет, а $\mu = const$ в этом слое, имеются лишь поверхностные молекулярные токи, а именно,

$$\mathbf{i}_{\text{mol}}|_{r=R_1} = (\chi H)|_{r=R_1+} - (\chi H)|_{r=R_1-} = (\mu - 1) \cdot \frac{I}{2\pi R_1} - 0 = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi R_1},$$

$$\mathbf{i}_{\text{mol}}|_{r=R_2} = (\chi H)|_{r=R_2+} - (\chi H)|_{r=R_2-} = 0 - (\mu - 1) \cdot \frac{I}{2\pi R_1} = -\frac{(\mu - 1)I}{2\pi R_1}.$$

Очевидно, что суммарный молекулярный ток

$$\mathbf{i}_{\text{mol}}|_{r=R_1} \cdot 2\pi R_1 + \mathbf{i}_{\text{mol}}|_{r=R_2} \cdot 2\pi R_2 = 0$$

равен нулю.

4.4 Расчет намагниченности и плотности молекулярных токов

Такие задачи, как правило, могут быть решены с помощью теоремы о циркуляции, которая позволяет найти поле \vec{H} . Далее вычисляется намагниченность $\vec{M} = \chi \vec{H}$, после чего можно воспользоваться соотношением $\vec{j}_{\text{mol}} = \vec{M}$, либо применить теорему о циркуляции уже к вектору \vec{M} :

$$\int \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma, \text{mol}},$$

где $I_{\Sigma, \text{mol}}$ – суммарный молекулярный ток, пронизывающий площадку, «натянутую» на контур, по которому вычисляется циркуляция \vec{M} .

Задача 1. По проводу круглого сечения радиуса R течет однородный по плотности ток I (рисунок 55). Магнитная восприимчивость изменяется по закону $\chi(r) = \alpha r^2$. Найти намагниченность и плотность молекулярных токов как функции r .

Решение. Будем считать, что ось провода – это ось z . Имеется только объемный ток проводимости. Поэтому внутри провода ($\mathbf{j} = I/\pi R^2$):

$$H(r) = \frac{1}{r} \cdot \int_0^r \tilde{r} \mathbf{j}(\tilde{r}) d\tilde{r} = \frac{Ir}{2\pi R^2}.$$

На поверхности $r = R$ разрыва H не происходит. Вне провода знание поля не потребуется. Намагниченность – с учетом того, что \vec{H} направлен по \vec{e}_φ – находится как

$$\vec{M} = \chi(r)H(r)\vec{e}_\varphi = \alpha r^2 \cdot \frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi = \frac{\alpha I r^3}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi.$$

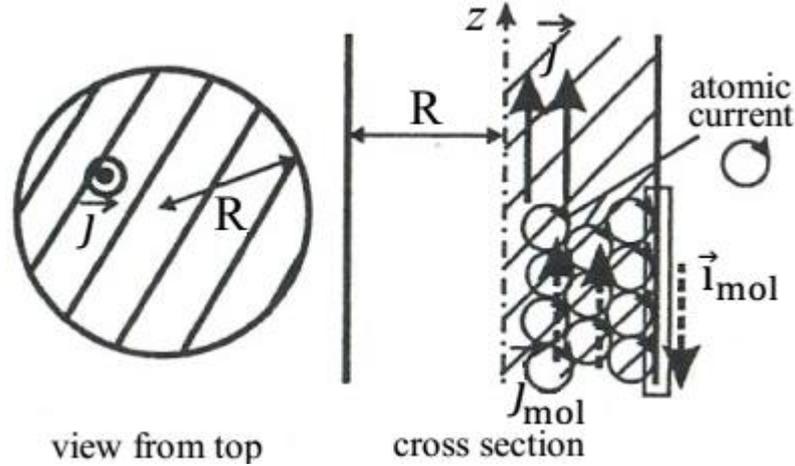


Рисунок 55 – Провод круглого сечения радиуса R

Взяв ротор от этой величины, имеем молекулярный ток:

$$\vec{j}_{\text{mol}} = \text{rot}\vec{M} = \frac{1}{r} \frac{d(rM_\varphi)}{dr} \vec{e}_x = \frac{1}{2\pi R^2 r} \frac{d(\alpha I r^4)}{dr} \vec{e}_x = \frac{2\alpha I r^2}{\pi R^2} \vec{e}_x.$$

Для нахождения \vec{i}_{mol} ($r = R$) воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} \vec{i}_{\text{mol}}|_{r=R} &= \frac{I_{\Sigma, \text{mol}}(< R + 0) - I_{\Sigma, \text{mol}}(< R - 0)}{2\pi R} = \\ &= \frac{\int_{r=R+} \vec{M} \cdot d\vec{l} - \int_{r=R-} \vec{M} \cdot d\vec{l}}{2\pi R} = \frac{0 - M|_{r=R-} \cdot 2\pi R}{2\pi R} = -\frac{\alpha I R}{2\pi}. \end{aligned}$$

Этот поверхностный молекулярный ток направлен по $-\vec{e}_x$ в сторону, противоположную объемному молекулярному току. Полный молекулярный ток равен нулю:

$$\int \vec{j}_{\text{mol}} dS + \vec{i}_{\text{mol}} \cdot 2\pi R = 2\pi \int_0^R \frac{2\alpha I r^2}{\pi R^2} r dr - \frac{\alpha I R}{2\pi} \cdot 2\pi R = 0,$$

как и должно быть.

Микрокартина молекулярных токов выглядит так. Элементарные токи отдельных атомов представляют собой кольца в плоскости, содержащей ось z . Смежные молекулы дают частично компенсирующие токи (от «соприкасающихся» сторон элементарных колец с током), что и означает появление объемного молекулярного тока. А на границе ($r = R$) компенсации не происходит – это обуславливает наличие поверхностного молекулярного тока.

Задача 2. Соленоид имеет n витков на единицу длины, по которым течет ток I (рисунок 56). Магнитная проницаемость внутри зависит от удаления от оси как $\mu(r) = 1 + \alpha r^3$. Требуется найти плотность молекулярных токов в зависимости от r .

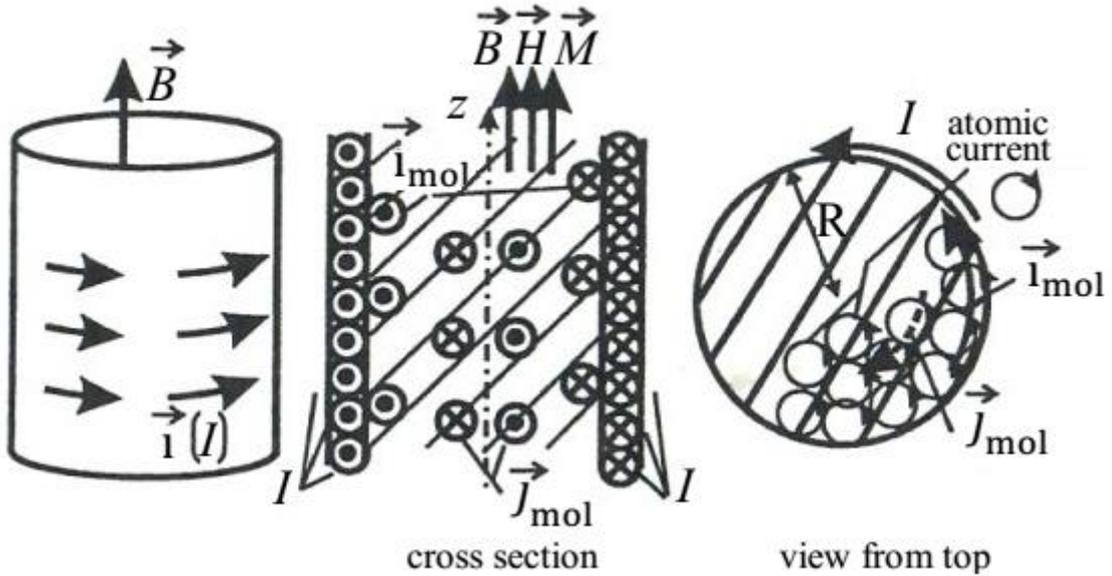


Рисунок 56 – Соленоид

Решение. Наличие магнетика с $\mu = \mu(r)$ не изменит поля \vec{H} внутри соленоида, которое останется однородным, направленным по оси соленоида z и равным

$$\vec{H} = nI\vec{k}.$$

Намагниченность находится как

$$\vec{M} = (\mu(r) - 1)\vec{H} = \alpha nI r^3 \vec{k}.$$

Располагая зависимостью $\vec{M}(r)$, проще всего вычислить плотность молекулярных токов как

$$\vec{j}_{\text{mol}} = \text{rot}\vec{M} = -\frac{dM_x}{dr}e_\varphi = -\frac{d(\alpha nI r^3)}{dr}e_\varphi = -3\alpha nI r^2 e_\varphi.$$

Помимо только что найденного объемного молекулярного тока, имеется поверхностный ток \vec{i}_{mol} при $r = R$, где R – радиус соленоида. Для его нахождения удобно привлечь теорему о циркуляции, применив ее к контуру в виде прямоугольника, лежащего в плоскости, содержащей ось z , две из сторон которого имеют произвольную длину L и параллельны z , а две другие очень коротки и занимают область $R - 0 \dots R + 0$:

$$\int \vec{M} \cdot d\vec{l} = (M|_{r=R-} - 0) \cdot L = \vec{i}_{\text{mol}} L,$$

откуда

$$\vec{i}_{\text{mol}} = \alpha nI R^3.$$

Объемный молекулярный ток направлен в противоположную сторону по отношению к току по обмотке соленоида, а поверхностный молекулярный ток сонаправлен с последним. В сумме молекулярные токи дают ноль:

$$\int \vec{j}_{\text{mol}} d\vec{S} + \vec{i}_{\text{mol}} \cdot 2\pi R = -2\pi \int_0^R 3\alpha nI r^2 r dr + \alpha nI R^3 2\pi R = 0.$$

В геометрии соленоида микрокартина молекулярных токов выглядит следующим образом. Элементарные токи отдельных атомов представляют собой кольца в плоскости, перпендикулярной к оси z . Смежные молекулы дают компенсирующие токи (от «соприкасающихся» сторон элементарных колец с током). Компенсация может быть частичной, как и в нашем случае, что и означает появление объемного молекулярного тока. А на границе ($r = R$) компенсации не происходит – это обуславливает наличие поверхностного молекулярного тока.

4.5 Условия на границе двух магнетиков. Теорема Гаусса

Любая граница раздела двух сред может считаться плоской на достаточно малом участке. Кроме того, в пределах достаточно малого участка поле векторов $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ можно считать однородным на каждой из сторон. Составляющие указанных векторов B_n, H_n, M_n , перпендикулярные к границе, называются нормальными, а $\vec{B}_r, \vec{H}_r, \vec{M}_r$, параллельные границе, – тангенциальными компонентами.

На границе двух магнетиков, по которой не течет ток, нормальные и тангенциальные компоненты преобразуются следующим образом:

$$B_{n1} = B_{n2}, \vec{H}_{r1} = \vec{H}_{r2}.$$

Правое соотношение получается из теоремы о циркуляции, примененной к прямоугольному контуру в виде узкой прямоугольной рамки, плоскость которой перпендикулярна к границе раздела, рассекающей рамку пополам. Для получения левой формулы применяется теорема Гаусса

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{B} \cdot dV$$

к произвольному цилиндру малой высоты, основания которого попадают в разные магнетики, параллельны границе раздела и имеют площадь S . Левая часть равенства есть $(B_{n1} = B_{n2}) \cdot S$, а правая равна нулю из магнитостатического уравнения Максвелла ($\text{div } \vec{B} = 0$). Заметим, что теорема Гаусса – это математический закон, применимый к любому векторному полю, как и теорема о циркуляции.

Проверка выполнения законов преобразования компонент \vec{B} и \vec{H} на границе служит в некоторых случаях дополнительным «тестом» на корректность того или иного решения.

Задача 1. В магнетике (1) у плоской границы раздела двух магнетиков индукция магнитного поля по модулю равна B_1 и направлена под углом Θ_1 к нормали к границе (рисунок 57). Проницаемости магнетиков равны μ_1 и μ_2 . Найти поток вектора \vec{H} через сферу радиуса R , центр которой лежит на границе.

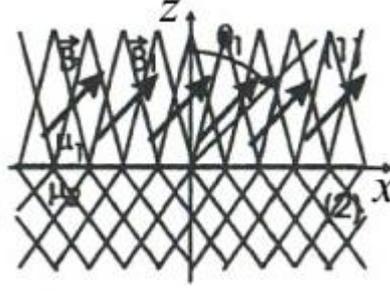


Рисунок 57 – Граница раздела двух магнетиков

Решение. Введем систему координат таким образом, что плоскость раздела – это плоскость xu , а вектор \vec{B}_1 лежит в плоскости xz . Тогда, с использованием условия задачи,

$$\vec{B}_1 = B_1 \cos\theta_1 \vec{k} + B_1 \sin\theta_1 \vec{i} = B_{n1} \vec{k} + \vec{B}_{r1},$$

откуда сразу

$$\vec{H}_1 = \frac{B_1 \cos\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \vec{k} + \frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \vec{i} = H_{n1} \vec{k} + \vec{H}_{r1}.$$

По правилам преобразования нормальных и тангенциальных компонент,

$$\begin{aligned} B_{n2} &= B_{n1} = B_1 \cos\theta_1, \\ \vec{H}_{r2} &= \vec{H}_{r1} = \frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \vec{i}. \end{aligned}$$

С учетом общего соотношения $\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \mu_{1,2} \vec{H}_{1,2}$, получаем:

$$\begin{aligned} H_{n2} &= \frac{B_{n2}}{\mu_0 \mu_2} = \frac{B_1 \cos\theta_1}{\mu_0 \mu_2}, \\ \vec{B}_{r2} &= \mu_0 \mu_2 \vec{H}_{r2} = \frac{\mu_2 B_1 \sin\theta_1}{\mu_1} \vec{i}. \end{aligned}$$

Теперь можно полностью выписать \vec{H}_2 в магнетике (2):

$$\vec{H}_2 = H_{n2} \vec{k} + \vec{H}_{r2} = \frac{B_1 \cos\theta_1}{\mu_0 \mu_2} \vec{k} + \frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \vec{i}.$$

Вычисление потока вектора \vec{H} производится по формуле

$$\Phi = \int \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$\vec{n} = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k},$$

причем далее будет удобно разбить интеграл по θ на два: один для одной полусферы (магнетик (1)), а второй – для другой (2).

Предварительно подготовим $\vec{H}_1 \cdot \vec{n}$ и $\vec{H}_2 \cdot \vec{n}$:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 \cdot \vec{n} &= \frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \sin\theta \cos\varphi + \frac{B_1 \cos\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \cos\theta, \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{n} &= \frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_0 \mu_1} \sin\theta \cos\varphi + \frac{B_1 \cos\theta_1}{\mu_0 \mu_2} \cos\theta. \end{aligned}$$

При вычислении потока члены с $\cos \varphi$ не дадут вклада, поскольку при взятии интеграла по φ от 0 до 2π получается ноль. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{H}_1 \cdot \vec{n} \cdot R^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \vec{H}_2 \cdot \vec{n} \cdot R^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{B_1 \cos\Theta_1}{\mu_0 \mu_1} \cos\Theta \cdot R^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{B_1 \cos\Theta_1}{\mu_0 \mu_2} \cos\Theta \cdot R^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{B_1 \cos\Theta_1}{\mu_0 \mu_1} 2\pi R^2 \frac{\sin^2\Theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{B_1 \cos\Theta_1}{\mu_0 \mu_2} 2\pi R^2 \frac{\sin^2\Theta}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= \frac{\pi \cos\Theta_1 R^2}{\mu_0} \cdot \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \cdot B_1. \end{aligned}$$

4.6 Вычисление индуктивности

Любой контур с током I создает магнитное поле \vec{B} . При этом возникает магнитный поток Φ , пронизывающий произвольную поверхность, натянутую на контур. Реальный контур либо замкнут, либо подразумевается его замкнутость через бесконечность. Коэффициент, связывающий Φ и I , называется коэффициентом самоиндукции, или индуктивностью:

$$\Phi = L \cdot I.$$

Для вычисления L , следовательно, задавшись током I , вычислить поток $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$, причем поверхность можно выбрать исходя из соображений геометрического удобства, так как Φ не зависит от конкретного вида натянутой поверхности. Можно также воспользоваться соотношением для энергии:

$$\frac{LI^2}{2} = \int \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV,$$

где $\vec{B}\vec{H}/2$ – объемная плотность энергии созданного контуром поля; интегрирование ведется по всему пространству.

Если имеется более чем один контур с током, то можно говорить о взаимной индуктивности, а именно о коэффициенте, связывающем магнитный поток через второй (первый) контур Φ_2 (Φ_1), созданный только первым (вторым) током:

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}.$$

При нахождении потока поверхность может быть произвольным образом натянута на каждый из контуров.

Задача 1. Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которого равен b , а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a (рисунок 58). Пространство внутри соленоида заполнено парамагнетиком с магнитной проницаемостью μ .

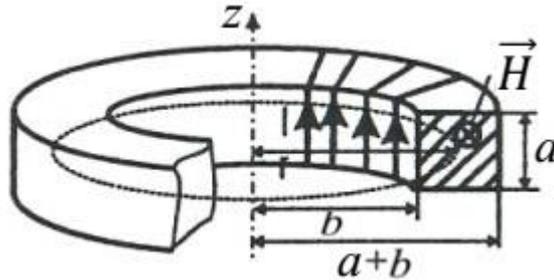


Рисунок 58 – Тороидальный соленоид

Решение. Поле \vec{B} в любой точке описанного соленоида направлено по окружности с центром на оси, от которой отсчитываются радиусы. Вне соленоида поле отсутствует. С учетом сказанного, применяя теорему о циркуляции к контуру в виде окружности (пунктир) с центром на оси соленоида, имеем

$$I \cdot N = H \cdot 2\pi r,$$

где подразумевается, что $b < r < b + a$. Поле \vec{B} составляет

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu I N}{2\pi r}.$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \int \frac{BH}{2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu I^2 N^2}{8\pi^2 r^2} r dr dz d\varphi = \frac{\alpha \mu_0 \mu I^2 N^2}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

С учетом того, что $W = LI^2/2$, находим индуктивность как

$$L = \frac{\alpha \mu_0 \mu N^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

При решении можно было обойтись и без привлечения энергетического соотношения. Контур представляет собой N витков, так что поверхность, натянута на такой контур, могла бы выглядеть как N -кратное повторение квадратного сечения соленоида. Следовательно, поток равен

$$\Phi = N \cdot a \cdot \int_b^{b+a} B \cdot dr = N \cdot a \cdot \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu I N}{2\pi r} dr = \frac{\alpha \mu_0 \mu I N^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

и при применении формулы $L = \Phi/I$ приходим к тому же самому результату для индуктивности.

Задача 2. Вычислить индуктивность единицы длины двухпроводной ленточной линии, если расстояние между лентами h значительно меньше их ширины b (рисунок 59). Всюду $\mu = 1$.

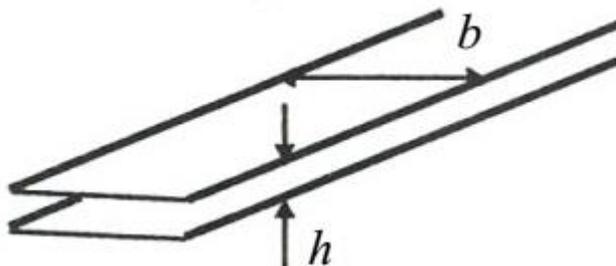


Рисунок 59 – Двухпроводная ленточная линия

Решение. Условие $h \ll b$ позволяет пренебречь эффектами на краях лент, считать поле между пластинами однородным и равным

$$H = 2 \cdot \frac{i}{2} = i,$$

а в остальной части пространства отсутствующим. В приведенном выражении i – листовая плотность тока

$$i = \frac{I}{b}.$$

Такой результат легко получить по теореме о циркуляции, если считать ленты бесконечно широкими.

Совершенно очевидно, что энергия на единицу длины будет составлять

$$\frac{dW}{dz} = \frac{BH}{2} hb = \frac{\mu_0 I^2}{2b^2} \cdot hb.$$

И, следовательно, индуктивность на единицу длины

$$\frac{dL}{dz} = \frac{2}{I^2} \cdot \frac{dW}{dz} = \frac{\mu_0 h}{b}.$$

Задача 3. Найти индуктивность единицы длины двухпроводной линии, если радиус каждого провода в $\eta \gg 1$ раз меньше расстояния между их осями (рисунок 60). Полем внутри проводов пренебречь.

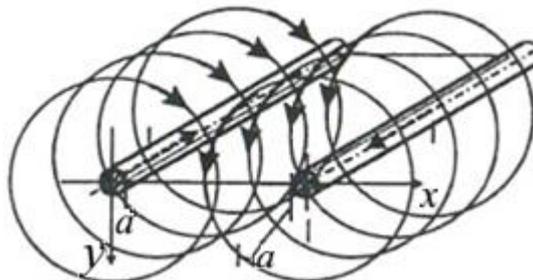


Рисунок 60 – Двухпроводная линия

Решение. В этой задаче применение энергетического соотношения $LI^2 = \int HBdV$ неудобно, поскольку достаточно сложна геометрия поля в пространстве. Значительно естественнее применять основное соотношение для индуктивности

$$\Phi = LI,$$

причем поверхность натянуть в виде плоской ленты, соединяющей провода. Если ввести ось x в плоскости натянутой поверхности и перпендикулярно проводам, обозначить расстояние между осями проводов через l , а радиус проводов через a , то магнитное поле вдоль оси x между проводами будет составлять:

$$B(x) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi(l-x)}.$$

При этом понятно, что токи текут в противоположные стороны (контур обязан замыкаться на бесконечности), и поля, создаваемые ими при $0 < x < l$, суммируются по величине. Поле \vec{B} ориентировано перпендикулярно к контуру.

Поток через контур (на единицу длины) будет

$$\frac{d\Phi}{dz} = \int_a^{l-a} B(x) dx = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{l-a}{a} - \ln \frac{a}{l-a} \right) = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi} \ln \eta.$$

Последнее получено с учетом того, что $\eta = l/a$ и $\eta \gg 1$.

Окончательно записываем индуктивность:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{I} \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln \eta.$$

Обратим внимание на то, что при $a = 0$ ($\eta = \infty$) мы получили бы здесь бесконечную индуктивность, что указывает на физическую некорректность ситуации бесконечно тонких проводов.

Задача 4. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямоугольного провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b (рисунок 61). Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длины b параллельна проводу и отстоит от него на расстояние l .

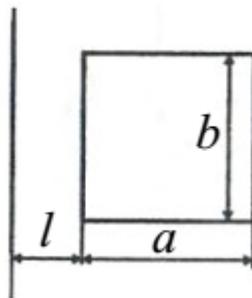


Рисунок 61 – Прямоугольный провод и прямоугольная рамка со сторонами a и b

Решение. Взаимная индуктивность может быть найдена а) как отношение магнитного потока через рамку Φ_{loop} , создаваемого прямым током I_{wire} , к этому току Φ_{loop}/I_{wire} или б) как отношение магнитного потока через контур–провод Φ_{wire} , создаваемого током рамки I_{loop} , к этому току Φ_{wire}/I_{loop} . Для последнего варианта необходимо замкнуть

провод на себя через бесконечность, поэтому и введен термин «контур–провод».

Ясно, что способ а) явно проще, так как поле провода находится более просто, чем поле рамки. Оно равно

$$B = \frac{\mu_0 \mu I_{wire}}{2\pi r},$$

где r обозначает расстояние от оси провода. Поток, пронизывающий рамку и созданный только этим полем провода B , легко находится как

$$\Phi_{loop} = b \cdot \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 \mu I_{wire}}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 \mu I_{wire} b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right).$$

Взаимная индуктивность, следовательно, составляет:

$$L_{wire-loop} = \frac{\Phi_{loop}}{I_{wire}} = \frac{\mu_0 \mu b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right).$$

Задача 5. Определить взаимную индуктивность тороидальной катушки и проходящего по ее оси бесконечно прямого провода. Катушка имеет прямоугольное сечение, ее внутренний радиус a , внешний b . Длина стороны поперечного сечения тора, параллельная проводу, равна h . Число витков катушки N . Система находится в однородном магнетике с проницаемостью μ (рисунок 62).

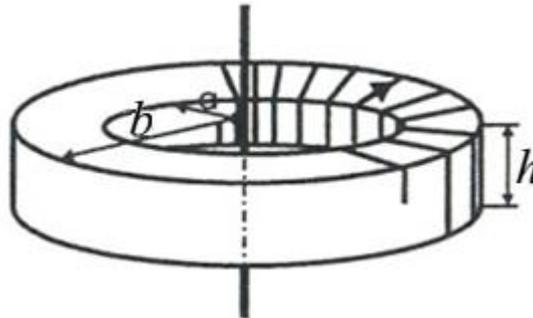


Рисунок 62 – Тороидальная катушка

Решение. Найдем взаимную индуктивность $L_{coil-wire}$ двумя способами: (1) как отношение потока через катушку, создаваемого только током провода, к этому току (Φ_{coil}/I_{wire}) и (2) как отношение магнитного потока через провод, создаваемого только током катушки, к этому току (Φ_{wire}/I_{coil}). Под магнитным потоком через провод следует понимать поток через полуплоскость, границей которого служит провод (провод необходимо замкнуть через бесконечность – тогда описанная полуплоскость есть натянутая на образовавшийся контур поверхность). Магнитный поток через катушку, создаваемый проводом:

$$\Phi_{coil} = h \cdot \int_a^b \frac{\mu_0 \mu I_{wire}}{2\pi r} dr \cdot N = \frac{hN\mu_0 \mu I_{wire}}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

здесь r – расстояние от провода.

А магнитный поток через провод (в смысле – через описанную выше полуплоскость), с учетом того, что вне катушки поля нет и что внутри катушки $B = \mu_0 \mu I_{coil} N / 2\pi r$, составит:

$$\Phi_{wire} = h \cdot \int_a^b \frac{\mu_0 \mu I_{coil}}{2\pi r} dr = \frac{h N \mu_0 \mu I_{coil}}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Теперь получаем взаимную индуктивность обоими способами:

$$L_{coil-wire} = \frac{\Phi_{coil}}{I_{wire}} = \frac{\Phi_{wire}}{I_{coil}} = \frac{N \mu_0 \mu h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

4.7 Перенос заряда в катушках

Идеальная катушка индуктивности представляем собой пассивный элемент электрической цепи, для которого имеет место связь между напряжением U_L и производной тока по времени вида

$$L \cdot \frac{dI_L}{dt} = U_L \text{ или } I_L(t) = I_L|_{t=0} + L^{-1} \int_0^t U_L(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Если такой элемент подключен к источнику постоянного напряжения U и никаких других элементов нет ($U_L = U$), то ток неограниченно нарастает со временем как Ut/L . Мгновенное установление тока невозможно (это свойство индуктивности).

На практике катушки обладают конечным сопротивлением R_L (использован жирный шрифт, во избежание смешения с величинами типа радиусов). Это, во-первых, приводит к конечности тока в установившемся режиме

$$I_{steady} = U_L / R_L,$$

а во-вторых, изменяет течение переходного процесса установления тока. Для анализа последнего используется модель последовательно соединенных идеальной индуктивности L и ее активного сопротивления R_L (рисунок 63).

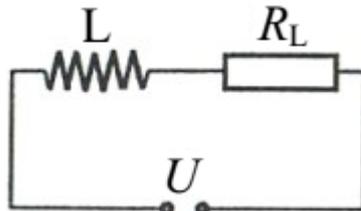


Рисунок 63 – Модель последовательно соединенных идеальной индуктивности и ее активного сопротивления

Задача 1. Катушку индуктивности L и сопротивления R_L подключили к постоянному напряжению. Через сколько времени ток через катушку достигнет величины η от его установившегося значения?

Решение. Реальная катушка как элемент цепи представляется последовательно соединенными индуктивностью L и сопротивлением R_L . Уравнение баланса напряжений выглядит

$$L \frac{dI}{dt} + IR_L = U,$$

решение которого

$$I = \frac{U}{R_L} - \frac{U}{R_L} \exp\left(-\frac{R_L}{L}t\right).$$

В рассматриваемый момент $I = \eta \cdot U/R_L$

$$1 - \exp\left(-\frac{R_L}{L}\tau\right) = \eta,$$

откуда

$$\tau = -\frac{L}{R_L} \ln(1 - \eta).$$

Задача 2. Вычислить постоянную времени $\tau = -L/R_L$ соленоида длины l , имеющего однослойную обмотку из медного провода массы m . Предполагается, что диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины.

Решение. Введем временно радиус соленоида R , число его витков N (на единицу длины приходится $n = N/l$ витков) и площадь сечения S намотанного провода.

Тогда сопротивление соленоида будет

$$R_L = \frac{r \cdot N \cdot 2\pi R}{S},$$

где r – удельное сопротивление материала проводов. Из соотношения

$$m = \rho \cdot 2\pi RS \cdot N$$

(ρ – плотность меди) выражаем S , откуда

$$R_L = \frac{4\pi^2 N^2 R^2 r \rho}{m}.$$

Индуктивность описанного в условии задачи соленоида, с учетом того, что $R \ll l$, находится как

$$L = \frac{\mu_0 \mu \pi N^2 R^2}{l}.$$

Это легко получается из энергетического соотношения $LI^2 = \mu_0 \mu H^2 V$, V – объем внутри соленоида, так как $H = nI$.

Постоянная времени находится непосредственно:

$$\tau = \frac{L}{R_L} = \frac{\mu_0 \mu m}{4\pi l r \rho}.$$

4.8 Ферромагнетики

Ферромагнетики представляют собой класс сред, характеризующийся высоким значением магнитной проницаемости (на

основной кривой намагничения), нелинейностью зависимости $\vec{B}(\vec{H})$, гистерезисом зависимостей $B(H)$ и $M(H)$, а также сохранением намагниченности \vec{M} после отключения внешнего поля. Именно последнее свойство наиболее важно, и во многих случаях под словом «ферромагнетик» подразумевается «область спонтанной намагниченности $\vec{M}(x, yz)$ », нечувствительная к дополнительному наложению магнитного поля, т.е. постоянный магнит.

Расчет поля магнитов производится во многом аналогично расчету электрического поля сегнетоэлектриков. Вводятся фиктивные магнитные заряды ρ_m (или σ_m) по формуле

$$\rho_m = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{M} \text{ или } \sigma_m = \mu_0 M_n|_{x=0} + \mu_0 M_n|_{x=0},$$

а затем находится их поле как по закону Кулона

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \int \frac{\rho_m(\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} dV \text{ или } \vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \int \frac{\sigma_m(\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} dS.$$

Возможно и применение теоремы Гаусса. Мотивацией такого метода является уравнение Максвелла $0 = \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\mu_0 \vec{H}) - \rho_m$, которое аналогично электростатическому уравнению $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

При наличии, помимо магнитов, еще и токов проводимости поле последних суммируется с полем магнитов.

Для нахождения индукции \vec{B} используем соотношение

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

При этом никаких μ или χ быть не должно.

Задача 1. Имеется бесконечная пластина из однородного ферромагнетика с намагниченностью \vec{M} . Найти векторы \vec{B} и \vec{H} внутри и вне пластины, если вектор \vec{M} направлен а) перпендикулярно, б) параллельно поверхности пластины (рисунок 64).

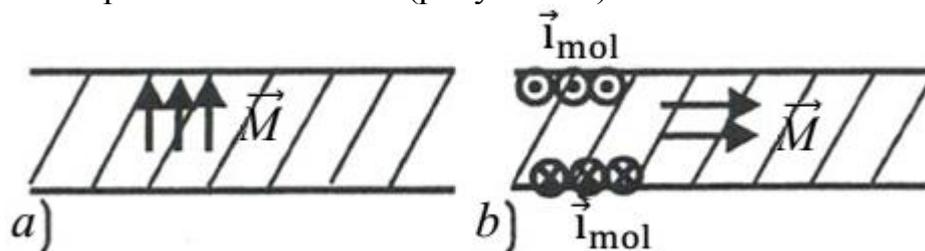


Рисунок 64 – Ферромагнитная пластина, а) \vec{M} направлен перпендикулярно пластине, б) \vec{M} направлен параллельно пластине

Решение. Разберемся прежде всего в том, какова будет $\operatorname{div} \vec{M}$ в обоих случаях, то есть какие «магнитные заряды» могут быть введены. Для этого надо проверить, как изменяется \vec{M} в направлении самого себя. В случае б) $\operatorname{div} \vec{M} = 0$, в том числе и на границах; на них \vec{M} , конечно, изменяется, но не в направлении \vec{M}/M . А вот в случае а) имеет место скачок \vec{M} от (до) нуля

на границах как раз в направлении \vec{M}/M . Соответственно, поверхностные «магнитные заряды» равны

$$\sigma_m^{(b)} = \pm \mu_0 M,$$

причем знак плюс берется для той поверхности, в сторону которой «смотрит» вектор \vec{M} , по определению σ_m . Как уже говорилось,

$$\sigma_m^{(b)} = 0.$$

Следовательно, в случае а) мы имеем ситуацию, аналогичную конденсатору и получаем

$$\vec{H}^{(a)} = -\mu_0 M \text{ внутри и } \vec{H}^{(a)} = \vec{0} \text{ вовне пластины,}$$

в то время как

$$\vec{H}^{(b)} = \vec{0} \text{ всюду.}$$

Соответственно, по формуле $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ имеем:

$$\vec{B}^{(a)} = \vec{0} \text{ всюду,}$$

$$\vec{B}^{(b)} = -\mu_0 \vec{M} \text{ внутри и } \vec{B}^{(b)} = \vec{0} \text{ вовне пластины.}$$

Заметим еще, что в случае б) протекают поверхностные молекулярные токи: «на нас» (на поверхности слева от направления \vec{M}) и «от нас».

Задача 2. Ферромагнитный диск радиуса R намагничен однородно, причем \vec{M} ориентирован перпендикулярно плоскости диска. Указать, где протекают молекулярные токи (рисунок 65).

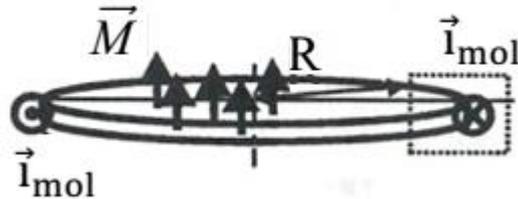


Рисунок 65 – Ферромагнитный диск радиуса R

Решение. Молекулярный ток связан с намагиченностью как

$$\text{rot} \vec{M} = \vec{j}_{\text{mol}}.$$

$\text{rot} \vec{M}$ отличен от нуля там, где имеет место изменение \vec{M} не в направлении \vec{M}/M (в этом отличие rot от рассмотренной в предыдущей задаче div).

Описанное изменение \vec{M} в объеме отсутствует (там все однородно). Нет изменений и на круглых поверхностях, поскольку там \vec{M} претерпевает изменение только в направлении самого себя. Таким образом, молекулярные токи могут протекать лишь по ободу диска, причем они будут поверхностными токами \vec{i}_{mol} . Вычислить последние можно применяя теорему о циркуляции к вектору \vec{M} по небольшому прямоугольному контуру в плоскости оси симметрии диска (пунктир):

$$\vec{i}_{\text{mol}} = M \vec{e}_\varphi$$

Задача 3. Тонкий диск радиуса R из ферромагнитного материала намагничен однородно и так, что вектор \vec{M} лежит в плоскости диска

(рисунок 66). Найти \vec{H} и \vec{B} в центре диска, считая, что толщина диска h намного меньше, чем R .

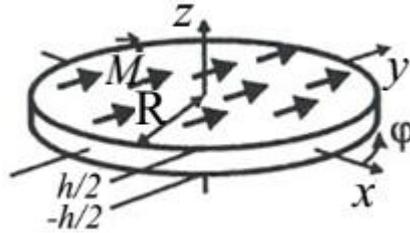


Рисунок 66 – Ферромагнитный диск радиуса R

Решение. Введем систему координат так, чтобы плоскость xy была плоскостью диска, а $\vec{M} = M\vec{j}$. Найдем магнитные заряды. Величина $div\vec{M}$ всюду равна нулю, за исключением обода диска (на круглых поверхностях диска тоже $div\vec{M} = 0$, так как там \vec{M} не меняется в направлении \vec{M}/M). Поверхностный магнитный заряд составит

$$\sigma_m = -\mu_0 M_r|_{R+0} + \mu_0 M_r|_{R-0} = \mu_0 M \sin\varphi,$$

где угол φ в полярной системе координат, отсчитываемый от оси x , как обычно. Располагая выписанным σ_m , можно найти поле \vec{H} по закону Кулона ($\vec{r}_p = \vec{0}$):

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \int \frac{\sigma_m(\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 M \sin\varphi (-R\cos\varphi\vec{i} - R\sin\varphi\vec{j} - z\vec{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R d\varphi dz = \\ &= -\frac{R^2\pi M\vec{j}}{4\pi} \cdot \frac{z}{R^2\sqrt{R^2 + z^2}} \Big|_{h/2}^{h/2} \approx -\frac{Mh\vec{j}}{4R} = -\frac{h\vec{M}}{4R}. \end{aligned}$$

При получении последнего равенства использовано условие $R \gg h$. Обратим внимание на то, что при $R \rightarrow \infty$ $\vec{H} \rightarrow \vec{0}$.

Поле \vec{B} найдется просто как

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu_0\vec{M} \cdot \left(1 - \frac{h}{4R}\right).$$

Список использованной и рекомендованной литературы

- [1] Иродов, И.Е. Задачи по общей физике [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Е. Иродов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 420 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/99230>. — Загл. с экрана.
- [2] Батыгин, В.В. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/544>. — Загл. с экрана.
- [3] Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т.8 Электродинамика сплошных сред [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 656 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2234>. — Загл. с экрана.

Зегря Георгий Георгиевич
Векслер Михаил Исаакович
Смирнова Ирина Геннадьевна
Устинова Ирина Александровна

Расчет стационарных электрических и магнитных полей

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49