

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Ю.А. Балашин, П.А. Белов, А.Е. Краснок

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА



**Санкт-Петербург
2019**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Ю.А. Балашин, П.А. Белов, А.Е. Краснож
КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 16.04.01 Техническая физика
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2019

Балошин Ю.А., Белов П.А., Краснок А.Е., Классическая электродинамика—
СПб: Университет ИТМО, 2019. – 163 с.

Рецензент(ы):

Лимонов Михаил Феликсович, доктор физико-математических наук, ,
профессор (квалификационная категория "профессор практики")
физико-технического факультета Университета ИТМО.

Учебное пособие содержит изложение курса электродинамики, который
читается студентам физико-технического факультета университета ИТМО.
Уровень изложения рассчитан на студентов, изучивших механику и теорию
относительности, освоивших начала математического анализа, линейной
алгебры и дифференциальной геометрии.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и
фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009
году статус национального исследовательского университета. С 2013 года
Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности
российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных
центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО –
становление исследовательского университета мирового уровня,
предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию
всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© Балошин Ю.А., Белов П.А., Краснок А.Е., 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	8
1.1 Уравнения Максвелла в вакууме и в материальных средах (интегральная форма).....	8
1.2 Дифференциальная форма уравнений Максвелла	11
1.3. Решение уравнений Максвелла. Волновые уравнения	15
1.3.1 Волновые уравнения для векторов поля.....	15
1.3.2 Волновые уравнения для электродинамических потенциалов.....	16
1.3.3 Волновые уравнения для векторов Герца.....	18
1.3.4. Векторы Римана -Зильберштейна (RS-вектора)	19
1.4 Комплексная форма уравнений электродинамики.....	20
1.4.1 Комплексная диэлектрическая проницаемость.	21
1.4.2 Комплексная форма волновых уравнений.....	25
1.5 Основные методы решения задач электродинамики.	25
1.5.1 Строгие методы решения.....	26
1.5.2. Приближённые методы решения.....	28
1.6. Плоские электромагнитные волны.....	30
1.6.1. Основные свойства и характеристики плоских электромагнитных волн	30
1.6.2. Параксиальное приближение	34
1.6.3. Когерентность и поляризация электромагнитных волн.....	35
1.7. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Теорема Пойнтинга.....	38
1.8. Распространение электромагнитных волн в различных средах	39
1.8.1. Теория Лоренца-Друдэ – Зоммерфельда (ТЛДЗ)	43
1.8.2. Замечание о плазмонах	44
1.8.3. Анизотропные среды.	47
2. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	51
2.1 Постановка задачи.....	51
2.3 Формулы френеля	54
2.4 Многослойные покрытия.....	57

2.5 Полное внутреннее отражение(ПВО). Эванесцентные поля.....	63
2.6 Нарушенное полное внутреннее отражение(НПВО)	65
3.Канализация электромагнитного поля.....	68
3.1 Двухплоскостной и прямоугольный волноводы	68
3.2. Цилиндрический металлический волновод.....	73
3.3. Диэлектрическая пластина как волновод медленных волн	75
4. РЕЗОНАТОРЫ	77
4.1. Объёмный резонатор на базе прямоугольного волновода.....	79
4.2. Объёмный диэлектрический резонатор	80
4.3. Открытый (оптический) резонатор (ОР).....	82
4.3.1. Собственные частоты.....	87
4.3.2. Добротность.....	87
4.3.3. Моды открытого резонатора	88
4.3.4. Устойчивость открытых резонаторов.	90
5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ	91
5.1. Элементарный электрический вибратор (вибратор Герца)	91
5.2 Элементарный магнитный вибратор.....	98
5.3. Источник Гюйгенса.....	102
ЛИТЕРАТУРА.....	108

Введение

Современная наука находится в таком состоянии, когда её разделы, ранее казавшиеся очень далёкими друг от друга, испытывают взаимопроникающие и взаимодополняющие влияния. Современную биологию, занимающуюся описанием, в частности, движения и взаимодействия крупных биологических молекул (белки, нуклеиновые кислоты и так далее) невозможно представить без использования классической и квантовой механики, а также без электродинамики резонансного взаимодействия. Современную химию нельзя представить без так называемой физики открытых систем. Даже в отдельно взятой области физики, такой как электродинамика, специалисту в области микроволнового спектра частот, занимающемуся, например, различными вопросами метаматериалов или антенн, приходится обращаться к тем или иным понятиям, методам и подходам, развитым применительно к оптике. В качестве примера можно привести понятие фактора Парселла, которое изначально введено для изучения влияния неоднородного окружения на мощность излучения молекулы или какой-либо другой квантовой системы.

Однако в приближении так называемой слабой связи такой молекулы с её окружением выражение для фактора Парселла не содержит постоянной Планка вовсе. Подход, основанный на классической осцилляторной модели, и квантовая теория дают в этом приближении совершенно одинаковый результат. Поэтому понятие фактора Парселла можно также с успехом применить и в теории классических, другими словами, радиочастотных и микроволновых, антенн. С другой стороны, в оптической области частот стали появляться структуры, получившие название "оптическая антенна". Эта антенна имеет схожие задачи с её классическим вариантом. Кроме того, для описания и изучения оптических антенн остаются вполне применимыми такие параметры, как коэффициент направленности или коэффициент эффективности, успешно используемые в теории классических антенн.

Кроме того, для описания оптических антенн, оптических и микроволновых метаматериалов и т.д. с успехом применяется концепция элементов с сосредоточенными параметрами (сопротивление, индуктивность и ёмкость), а также концепция длинных линий. Хотя эти концепции активно развивались в начале прошлого века телеграфистами и радиоинженерами, они составляют мощный исследовательский аппарат современного специалиста в области электродинамики.

Однако в современной научной литературе сложно найти книгу, которая вводила бы её читателя не только в основы, например, процессов излучения микроволновых волн, но и в область процессов оптического излучения. В данном пособии под названием **«Классическая электродинамика»** весь материал излагается так, чтобы в нём гармонично переплетались понятия и методы из

различных областей электродинамики, а у человека, читающего его, создавалась целостная картина всех электродинамических явлений без привязки к конкретному частотному диапазону.

Электродинамикой принято называть раздел физики, в котором изучаются свойства электромагнитного поля и особенности его взаимодействия с веществом. В настоящее время различают классическую и квантовую электродинамику. В классической электродинамике изучается обширный класс электромагнитных явлений, в которых электромагнитное поле не обнаруживает дискретных свойств и выступает как самостоятельный вид материи, не сводимый к её другому виду – веществу. Однако это поле существует в тесной связи с веществом, являясь главным посредником взаимодействия между любыми электрически заряженными частицами. Электромагнитное взаимодействие проявляется во всём, что окружает нас. Оно участвует в формировании атомов и молекул, образует из них сложные микро- и макроструктуры, определяет разнообразные физические свойства газов, жидкостей и твёрдых тел. Классическая электродинамика является важнейшим разделом современного курса физики и служит теоретической базой для различных задач радиофизики и оптики. Несмотря на очевидное различие в способах генерирования и регистрации электромагнитных полей в этих задачах, законы их распространения задаются одними и теми же уравнениями. Речь идёт об уравнениях Максвелла, в которых свойства среды учитываются введением соответствующих физических констант, а переход электромагнитных полей из одной среды в другую определяется с помощью граничных условий для векторов напряжённости электрического и магнитного полей.

1 УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1.1 Уравнения Максвелла в вакууме и в материальных средах (интегральная форма)

Завершённая классическая теория электромагнитных явлений была создана выдающимся физиком-теоретиком Д.К. Максвеллом в 1860-1865 гг. Он обобщил все известные к тому времени экспериментальные законы электромагнетизма (законы Кулона, Био-Савара-Лапласа, Ампера, Фарадея) и на их основе сформулировал четыре закона, которым должно подчиняться электромагнитное поле, обеспечивающее взаимодействие зарядов и токов, и, опираясь на них, сформулировал систему четырёх связанных уравнений, полностью определяющих состояние электромагнитного поля через его составляющие – электрическое поле E и магнитное поле B . Исходной средой в теории Максвелла является вакуум, вещественная среда предполагается сплошной (сплошной мы будем считать среду если характерные масштабы L рассматриваемых процессов (для электродинамики – это длина волны электромагнитного поля) велики по сравнению с характерным расстоянием между молекулами вещества (длина свободного пробега молекул в газе $\sim 10^{-8}$ м, или период кристаллической решетки $\sim 10^{-7} - 10^{-8}$ м)). Уравнения Максвелла принято записывать в двух формах: интегральной и дифференциальной (локальной).

Система интегральных макроскопических уравнений Максвелла, в которых одновременно используются характеристики поля E , H , D и B в системе СИ имеют следующий вид:

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{s}; \quad (1.1.1)$$

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_{np} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} d\vec{S}; \quad (1.1.2)$$

$$\iint_S \vec{D} d\vec{s} = \iiint_V \rho dV; \quad (1.1.3)$$

$$\iint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (1.1.4)$$

Для решения всех возможных задач электродинамики система уравнений (1.1.1)-(1.1.4) дополняется ещё четырьмя уравнениями, три из которых являются материальными. В этих уравнениях макроскопические поля связаны между собой через электрическую \vec{P} и магнитную \vec{M} поляризуемости, которые учитывают индивидуальные электрические и магнитные свойства вещественной среды. Их связь задаётся как

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\vec{E} + \vec{P}), \quad \vec{P} = \chi \vec{E}; \quad (1.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad \vec{M} = \eta \vec{H}. \quad (1.1.6)$$

С физической точки зрения \vec{P} и \vec{M} - это электрические и магнитные дипольные моменты единицы объёма, а поляризационные (внутренние) токи и заряды (в отсутствии магнитной поляризации) могут быть определены как

$$\rho = -\text{div} \vec{P}; \quad (1.1.7, \text{ а})$$

$$j_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (1.1.7, \text{ б})$$

В случае линейных и изотропных сред материальные уравнения могут быть в общем виде представлены как

$$\vec{D}(r, t) = \int dr^1 dt^1 \varepsilon(r - r^1, t - t^1) \vec{E}(r^1, t^1); \quad (1.1.8)$$

$$\vec{B}(r, t) = \int dr^1 dt^1 \mu(r - r^1, t - t^1) \vec{H}(r^1, t^1). \quad (1.1.9)$$

Зависимости $\varepsilon(r, t)$ и $\mu(r, t)$ (далее $r \rightarrow \vec{k}$ и $t \rightarrow \omega \rightarrow \varepsilon(\vec{k}, \omega)$ и $\mu(\vec{k}, \omega)$) от пространственных и временных координат называют **пространственной** (\vec{k}) и **временной** (ω) дисперсиями. Выражениям (1.1.8) и (1.1.9), представленным в интегральной форме, можно сопоставить их дифференциальную форму, а именно:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (1.1.10)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}. \quad (1.1.11)$$

(Далее в тексте $\varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon_a$ и $\mu_0 \mu = \mu_a$ - абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости. $\varepsilon = 1 + \chi$ - относительная диэлектрическая проницаемость (χ - электрическая восприимчивость, выражение (1.1.5)), $\mu = 1 + \eta$ - относительная магнитная проницаемость (η - магнитная восприимчивость (1.1.6))

В качестве третьего дополнительного уравнения выступает ещё одно материальное уравнение, известное как закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}, \quad (1.1.12)$$

где σ - удельная проводимость вещественной среды. Четвёртым дополнительным уравнением является уравнение движения заряженных частиц под действием силы Лоренца F .

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_i = q \vec{E} + q \left[\vec{V} \times \vec{B} \right] \quad (1.1.13)$$

Уравнение (1.1.13) не имеет прямого отношения к полевым уравнениям Максвелла. Необходимость введения его в общую систему возникает, когда рассматриваются задачи движения заряженных частиц (тел) в электромагнитных полях.

Что касается сред, привлекающих в настоящее время повышенное внимание исследователей, то здесь можно отдельно добавить следующее:

а) Киральные среды [12].

В общем случае в задачах взаимодействия электромагнитного поля и вещества кроме параметров ε, μ, σ рассматривают ещё один материальный параметр χ , называемый параметром **киральности**.

В настоящее время большой интерес вызывает его применение в радиофизике, акустике и ряде других областей метаматериалов, с помощью которых возможно создание систем и устройств с уникальными свойствами. В частности, значительный интерес представляет создание систем, использующих свойства бианизотропных и киральных (гиротропных) сред. Для таких сред к системе уравнений Максвелла необходимо добавить материальные уравнения – линейные соотношения, связывающие векторы электромагнитного поля. В общем виде эти соотношения, в отличие от соотношений (1.1.10) и (1.1.11), имеют вид:

$$\vec{D} = \alpha_{11} \vec{E} + \alpha_{12} \vec{H}; \quad (1.1.14)$$

$$\vec{B} = \alpha_{21} \vec{E} + \alpha_{22} \vec{H}, \quad (1.1.15)$$

где материальные параметры α_{ij} , $i, j=1, 2$ – некоторые величины (в общем случае диадные функции частоты). Такие линейные среды общего вида называются бианизотропными. В биизотропных средах материальные уравнения являются скалярами или псевдоскалярами. Взаимная биизотропная среда характеризуется тремя комплексными материальными параметрами – диэлектрической проницаемостью ε , магнитной проницаемостью μ и параметром киральности χ . Параметр киральности отличен от нуля только в средах, называемых киральными, которые содержат элементы, обладающие зеркальной симметрией. При стремлении параметра киральности к нулю среда вырождается в диэлектрик или магнетик. Итак, изотропная киральная среда является частным случаем бианизотропной среды.

При рассмотрении электромагнитной модели обычной (некиральной) среды полагают, что она описывает свойства сплошной среды. Киральные же свойства связаны с проявлением **дискретной** структуры среды. Киральный параметр χ пропорционален отношению a/λ , где a – линейный размер частицы – элемента среды, λ – длина волны. Если a/λ стремится к нулю, киральные свойства среды исчезают. Учет киральных свойств означает учет влияния «крупинки» среды или пространственной дисперсии (уравнение пространственной дисперсии смотри ниже). В оптике естественных сред значение отношения a/λ оказывается порядка $10^{-3} - 10^{-4}$, вследствие чего оптическая активность в естественных средах не нашла своего применения из-за малости эффекта. Исключением можно считать только жидкие кристаллы. С развитием новых технологий в производстве искусственных электромагнитных сред величину $\chi = C a/\lambda$ удалось значительно увеличить. В этом случае киральность уже не является малой поправкой, и свойства киральной среды могут кардинально отличаться от свойств диэлектрика.

Материальные уравнения для киральных сред (1. 14)-(1.15) бывают в следующем виде:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - i\chi \vec{H}; \quad (1.1.16)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + i\chi \vec{E}. \quad (1.1.17)$$

Естественные киральные среды были известны с начала XIX века. Термин «киральный» введен Уильямом Томсоном и означает свойство объекта не совмещаться со своим зеркальным изображением в плоском зеркале ни при каких перемещениях и вращениях. Естественными киральными объектами являются молекулы сахаров, аминокислот, ДНК и оптических полимеров. Киральные среды хорошо известны в оптике, где они называются активными или гиротропными. Обычно гиротропная среда анизотропна, хотя существуют важные исключения: гиротропной может быть изотропная среда, состоящая из киральных частиц, например, водный раствор сахара, в котором количество правых и левых частиц различно. **Весьма загадочным представляется тот факт, что наиболее важные ткани живых организмов гиротропны: образованы киральными молекулами, находящимися преимущественно в одной из двух зеркальных форм.** В неживой природе количество правых и левых молекул в среднем обычно одинаково. К числу искусственных киральных объектов можно отнести спираль, лист Мёбиуса, неправильный тетраэдр и т.д. Нарушение киральной симметрии может быть вызвано внешним воздействием: механическим сжатием (механическая гиротропия), наложением магнитного и электрического полей (магнитоактивные среды и электрогиротропия), вращательным движением среды (динамооптические эффекты).

б) Метаматериалы.

В настоящее время бурно развиваются нанотехнологии приготовления искусственных, наноструктурируемых материалов, которые получили название *метаматериалов*. В этих материалах *материальные* уравнения могут иметь более сложный вид, а именно (с учётом пространственно-временной дисперсии):

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) + [\xi(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)]; \quad (1.1.18)$$

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega) + [\zeta(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)], \quad (1.1.19)$$

где $\xi(\vec{k}, \omega)$ и $\zeta(\vec{k}, \omega)$ - некоторые вектора, характеризующие метаматериалы (смотри соотношения в киральных средах). В таких средах возникает более богатая палитра эффектов взаимодействия электромагнитного поля с веществом (смотри курс «Электродинамика метаматериалов»). Читателю в дополнение рекомендуется обзор [18].

1.2 Дифференциальная форма уравнений Максвелла

Систему интегральных уравнений Максвелла можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений. Для этого каждое уравнение системы

(1.1.1)-(1.1.4) следует привести к такому виду, чтобы в его левой и правой частях содержались однородные интегралы с общей областью интегрирования. В уравнениях (1.1.1)-(1.1.2) этот результат обеспечивает теорема Стокса: $\int_S \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{a} d\vec{s}$, а в уравнениях (1.1.3)-(1.1.4) теорема Остроградского-Гаусса: $(\iint_S \vec{a}(\vec{r}) d\vec{s} = \iiint_V \text{div} \vec{a}(\vec{r}) dV)$.

В итоге определяется система макроскопических дифференциальных уравнений:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1.2.1)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1.2.2)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (1.2.3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \quad (1.2.4)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \quad (1.2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (1.2.6)$$

Здесь интересно отметить, что уравнения (1.2.1)-(1.2.6) в данной форме записи фактически являются уравнениями Хевисайда [6], который свёл в систему (1.2.1)-(1.2.6) выведенную Максвеллом трудно обзримую систему из 20 уравнений для 20 неизвестных. Кроме того, все функции и параметры этих уравнений в общей постановке должны рассматриваться с позиций пространственно-временной дисперсии как функции (\vec{k}, ω) .

Для полной характеристики электромагнитного поля при использовании уравнений Максвелла в дифференциальной форме необходимо ввести ещё одно уравнение – уравнение непрерывности, базирующееся на принципе сохранения заряда. Это уравнение имеет вид (смотри практику):

$$\text{div} \vec{j}_{np} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2.7)$$

где \vec{j}_{np} - есть плотность тока свободных зарядов, а ρ - плотность заряженных частиц.

К системе уравнений (1.2.1) - (1.2.7) при решении задач движения в электромагнитном поле заряженных частиц необходимо будет добавить ещё уравнение (1.1.13).

Заканчивая представление интегральной и дифференциальной форм уравнений Максвелла, необходимо остановиться на сути уравнений (1.1.5), (1.1.6) или (1.2.5), (1.2.6). Эти уравнения описывают поведение вещества в присутствии электромагнитного поля, которое рассматривается как внешнее по отношению к веществу. Собственные электромагнитные свойства вещества рассматриваются в

терминах макроскопической поляризации \vec{P} и намагниченности \vec{M} в соответствии с соотношениями:

$$\vec{P}(r, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(r, t) + \vec{P}(r, t) \rightarrow (\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}); \quad (1.2.8)$$

$$\vec{B}(r, t) = \mu_0 \vec{H}(r, t) + \vec{M}(r, t) \rightarrow (\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}), \quad (1.2.9)$$

где символами χ_e и χ_m обозначены электрическая и магнитная восприимчивости, через которые определяются относительная диэлектрическая проницаемость как $\varepsilon = 1 + \chi_e$ и, соответственно, относительная магнитная проницаемость как $\mu = 1 + \chi_m$.

Если определять поляризацию \vec{P} как способность к изменению в пространстве расположения собственных зарядов вещества (связанных или свободных) под действием внешнего электромагнитного поля, то в классической электродинамике рассматриваются следующие **виды поляризации**:

1. Электронная поляризация – это смещение электронных орбит относительно заряженного ядра. Оно происходит в атомах любого вещества (прежде всего, в диэлектриках). Время установления этой поляризации - $10^{-15} - 10^{-14}$ с.

2. Ионная поляризация – смещение относительно друг друга равноименно заряженных ионов в веществах с ионными связями. Время её установления - $10^{-13} - 10^{-12}$ с.

3. Электронную и ионную поляризации относят к числу мгновенных или деформационных видов поляризации.

4. Дипольная или ориентационная поляризация обусловлена ориентацией диполей в направлении электрического поля. Этот вид поляризации характерен для так называемых полярных диэлектриков, т.е. диэлектриков, у которых дипольные моменты атомов (молекул) отличны от нуля в отсутствие внешнего электрического поля. Типичным представителем такого рода диэлектриков является вода. Время установления этого вида поляризации - $10^{-10} - 10^{-6}$ с. Этот вид поляризации относится к числу медленных или релаксационных видов поляризации.

5. Ионно-релаксационная поляризация обусловлена избыточным перебросом слабо связанных ионов под действием электрического поля на расстояния, превышающие постоянную решётки. Она характерна для кристаллических веществ при наличии в них примесей в виде ионов или неплотной упаковки кристаллической решётки. Время её установления - $10^{-8} - 10^{-4}$ с.

6. Спонтанная поляризация – самопроизвольная поляризация, возникающая в некоторых веществах (например, в сегнетовой соли) в отдельной области температур.

7. Остаточная поляризация – поляризация, которая остаётся в некоторых веществах (электретах) в течение продолжительного времени после снятия электрического поля.

8. Резонансная поляризация. Если частота электрического поля близка к собственной частоте колебаний диполей, колебания молекул могут возрасти, что

приводит к появлению резонансной поляризации в дипольном диэлектрике. Этот вид поляризации наблюдается при частотах, лежащих в инфракрасной области спектра.

Реальные вещества могут одновременно обладать несколькими видами поляризации. Возникновение того или иного вида поляризации определяется физико-химическими свойствами вещества и диапазоном используемых частот.

Весь вышеприведённый материал справедлив для всей шкалы электромагнитных волн. Однако для оптического спектра (длины волн 2 мм – 1000 мм) все среды с магнитной точки зрения (если отвлечься от метаматериалов) одинаковы. Их магнитную проницаемость принято считать равной единице (все среды - парамагнетики).

Области применения интегральных и дифференциальных уравнений остаются практически одинаковыми, за исключением границ сингулярности (разрывы поля на границах расходимости в зонах локализации точечных зарядов), где дифференциальные уравнения перестают работать. Однако во всех остальных случаях дифференциальные уравнения обычно предпочтительней интегральных уравнений, т.к. математические приёмы их решения несколько проще. Поэтому в дальнейшем изложении материала будет использоваться дифференциальная форма уравнений (1.2.1)-(1.2.7). Эти уравнения не считаются полными, т.к. в них не введены сторонние источники электромагнитного поля. В качестве таковых рассматриваются: вектор плотности стороннего электрического тока \vec{j}_s^{cm} и объёмная плотность заряда ρ_s^{cm} . Эти источники являются заданными и определяются не теми векторами поля, которые должны быть найдены, а связаны с известными полями (например, электромагнитное поле внешнего генератора). Эти источники могут иметь любую физическую природу. С учётом этих источников уравнения (1.2.2) и (1.2.3) будут иметь вид:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_s^{cm}; \quad (1.2.10)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho + \rho_s^{cm}. \quad (1.2.11)$$

Для целого ряда практических приложений уравнений Максвелла удобно ввести, по аналогии с электрическими, фиктивные, сторонние магнитные заряды с объёмной плотностью ρ_m^{cm} и сторонние магнитные токи с плотностью j_m^{cm} . Пока не известны отдельно существующие положительные или отрицательные магнитные полюса, которые можно было бы рассматривать в качестве положительных или отрицательных магнитных зарядов. Поэтому иногда при расчётах искусственно вводят сторонние магнитные заряды Q_m . По аналогии с электрическими токами и зарядами для магнитных токов и зарядов можно записать уравнение непрерывности, аналогично формуле (1.2.7):

$$\text{div } \vec{j}_m^{cm} = -\frac{\partial \rho_m^{cm}}{\partial t}. \quad (1.2.12)$$

Введение сторонних магнитных токов и зарядов позволяет записать уравнения (1.2.1) и (1.2.4) в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}_m^{cm} - \sigma_m \vec{H}; \quad (1.2.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \rho_m^{cm}. \quad (1.2.14)$$

Концепция магнитного заряда и связанного с ним стороннего магнитного тока приводит к так называемому принципу **перестановочной двойственности электромагнитных уравнений**, позволяющему существенно облегчить решение ряда задач. Суть принципа состоит в следующей замене: $\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \epsilon_a \rightarrow -\mu_a, \vec{j}_e \rightarrow \vec{j}_m, \sigma_e \rightarrow -\sigma_m, \rho_e \rightarrow \rho_m$.

Эти замены позволяют для отдельных задач при необходимости переписать систему уравнений (1.2.1)-(1.2.7) на языке магнитных зарядов и токов, и наоборот, переходить от магнитных зарядов и токов к электрическим величинам. При таком подходе система уравнений Максвелла с учётом сторонних сил электрического и магнитного типов носит название полной **симметричной системы уравнений электродинамики**. С помощью этой системы можно установить единицы измерения магнитных величин, а именно:

$$Q_m (\text{заряд}) \rightarrow \text{Вб}, \rho_m \rightarrow \frac{\text{Вб}}{\text{м}^3}, \vec{j}_m \rightarrow \frac{\text{В}}{\text{м}^2} (\text{В} - \text{Вольт}), \sigma_m \rightarrow \frac{\text{Ом}}{\text{м}}.$$

1.3. Решение уравнений Максвелла. Волновые уравнения

Решение задач электродинамики с помощью уравнений Максвелла сводится, как правило, к решению так называемых **волновых уравнений**, которые являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. На практике применяются три вида волновых уравнений: уравнения для векторов поля \vec{E} и \vec{H} , уравнения для электродинамических потенциалов \vec{A} и φ и уравнение для вектора Герца \vec{T} . В задачах, связанных с анализом резонаторов (закрытых и открытых), используется представление векторных потенциалов Герца через скалярные потенциалы *Дебая*. Кроме того, существует способ, который позволяет довольно просто получать решение электродинамических задач с использованием вектора Римана-Зильберштейна (т.н. RS-вектора [37]). Этот подход имеет достаточно глубокий физический смысл, особенно с точки зрения квантовой механики, где RS-вектор можно связать с оператором вторичного квантования поля резонатора.

1.3.1 Волновые уравнения для векторов поля

В случае линейной, однородной, проводящей (полупроводящей) среды при наличии сторонних источников только электрического типа (\vec{j}_e^{cm} и ρ_e^{cm}) волновые

уравнения для \vec{E} и \vec{H} могут быть получены с помощью известных соотношений векторной алгебры (смотри практику) в следующем виде:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_a \frac{\partial \vec{j}_s^{cm}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_a} \text{grad } \rho_s^{cm}; \quad (1.3.1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{j}_s^{cm}. \quad (1.3.2)$$

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют сторонние источники ($\vec{j}_s^{cm}, \rho_s^{cm} = 0$) и проводимость ($\sigma = 0$) - диэлектрическая среда, уравнения (1.3.1), (1.3.2) становятся однородными и принимают вид:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (1.3.3)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3.4)$$

Решение электродинамической задачи (определение векторов электромагнитного поля в каждой точке пространства в момент времени t) с помощью системы (1.3.1), (1.3.2) или (1.3.3), (1.3.4) требует решения шести волновых уравнений для проекций этих векторов на координатные оси (решения шести краевых задач), что, как правило, представляет значительные трудности. Кроме того, наличие в правой части уравнений (1.3.1), (1.3.2) дифференциальных операторов, под знаком которых находятся функции, описывающие распределение источников, делает вообще невозможным решение задачи в тех случаях, когда эти функции являются разрывными (на границах раздела сред с различными электрическими параметрами). Всё вышеназванное можно рассматривать как недостатки рассмотренной формы уравнений, что привело в электродинамике к появлению другой формы волновых уравнений – волновых уравнений для электродинамических потенциалов.

1.3.2 Волновые уравнения для электродинамических потенциалов

Уравнения Максвелла (будем рассматривать их дифференциальную форму выражения (1.2.1)-(1.2.4)) в общем случае не симметричны. Это связано с отсутствием (по крайней мере, в рамках классической физики) магнитных зарядов в уравнении (1.2.4), постулирующем равенство дивергенции магнитного поля нулю. Если использовать известные в векторной алгебре двойные векторные операции:

$$\begin{aligned} \text{divgrad}U &\equiv \nabla \cdot (\nabla U) \equiv \nabla^2 U; \\ \text{graddiv}U &\equiv \nabla(\nabla \cdot U) \equiv \nabla^2 U + \nabla \times (\nabla \times U); \\ \text{rotrot}U &\equiv \nabla \times (\nabla \times U) \equiv \nabla \cdot (\nabla \cdot U) - \nabla^2 U; \\ \text{rotgradu} &\equiv \nabla \times (\nabla \cdot u) = 0; \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} U \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times U) = 0,$$

то можно показать (смотри практику), что электромагнитное поле как силовое поле (смотри выражение (1.1.8) для силы Лоренца через вектора \vec{E} и \vec{H}) можно выразить через некоторый вспомогательный вектор, вводимый следующим соотношением:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.3.6)$$

Тогда электрическое поле определится выражением:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.3.7)$$

В выражениях (1.3.6) и (1.3.7) \vec{A} и ϕ представляют соответственно векторный и скалярный электромагнитные потенциалы. Эти выводы, полученные с помощью векторной алгебры, можно дополнить физическим содержанием: для электромагнитного поля существуют энергетические (потенциальные) характеристики, которые качественно определяют новые физические свойства поля (энергия материальных частиц в классической и квантовой физике выражается через потенциалы).

Замечание об особенностях электромагнитных потенциалов.

Выражение (1.3.6) не определяет вектор \vec{A} (магнитный векторный потенциал) однозначным образом, т.к. поскольку ротор градиента равен нулю, добавление к \vec{A} градиента произвольной скалярной функции $f(\vec{r}, t)$ и вычитание из скалярного потенциала $\phi(\vec{r}, t)$ производной по времени от этой же функции $f(\vec{r}, t)$ не изменят описания электромагнитного поля (1.3.6), (1.3.7). Благодаря этому свойству потенциалы удаётся выбирать так, чтобы уравнения электромагнитного поля, выраженные через них, оставались достаточно простыми. Физически оправданная структура потенциалов была определена Х.Л. Лоренцем и получила название калибровки **Лоренца**. В соответствии с ней электродинамические потенциалы в изотропной среде связаны как

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (1.3.8)$$

Такая калибровка сводит в общем случае уравнения Максвелла (1.2.1)-(1.2.4) к форме:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu \mu_0 \vec{j}_s^{cm}; \quad (1.3.9)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s^{cm}}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (1.3.10)$$

В случае, если $\sigma = 0, \vec{j}_s^{cm} = \rho_s^{cm} = 0$ (диэлектрик и отсутствие сторонних источников), уравнения (1.3.9) и (1.3.10) превращаются в однородные волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0; \quad (1.3.11)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3.12)$$

Уравнения (1.3.8), (1.3.9) или (1.3.10), (1.3.11) дают четыре скалярных решения A_x, A_y, A_z, φ , через которые с помощью соотношений (1.3.5), (1.3.6) определяется окончательное решение электродинамической задачи (вектора \vec{E} и \vec{H}).

1.3.3 Волновые уравнения для векторов Герца

Учитывая то обстоятельство, что векторный и скалярный потенциалы связаны между собой калибровочным соотношением (1.3.8), мы можем свести электродинамическую задачу к решению одного векторного волнового уравнения (трёх скалярных) для векторов (электрического и магнитного) Герца. Электрический вектор Герца $\vec{\Gamma}$ вводится так, что его связь с векторным и скалярным потенциалами имеет следующий вид:

$$\phi = -\text{div} \vec{\Gamma}^{\circ}; \quad (1.3.13)$$

$$\vec{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Gamma}^{\circ}}{\partial t}. \quad (1.3.14)$$

Искомое электромагнитное поле через электрический вектор $\vec{\Gamma}$ определяется через решение следующих уравнений:

$$\vec{B}^e = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{\Gamma}^e}{\partial t}; \quad (1.3.15)$$

$$\vec{E}^e = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{\Gamma}^e - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}^e}{\partial t^2}. \quad (1.3.16)$$

Парный вектору $\vec{\Gamma}^e$ магнитный вектор $\vec{\Pi}^m$, который тоже традиционно называют именем Герца, ввёл итальянский физик Аугусто Риги в 1901 году. Связь его и характеристик электромагнитного поля задаётся следующей парой уравнений:

$$\vec{D}^m = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t}; \quad (1.3.17)$$

$$\vec{H}^m = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}^m. \quad (1.3.18)$$

Легко показать (смотри практику), что оба вектора Герца удовлетворяют векторному (волновому) уравнению:

$$\nabla^2 (\vec{\Gamma}^e, \vec{\Pi}^m) - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 (\vec{\Gamma}^e, \vec{\Pi}^m)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3.19)$$

Если выразить векторы электрической (\vec{D}) и магнитной индукции (\vec{B}) через векторы поляризуемости \vec{P} и намагничённости \vec{M} , то можно получить следующие уравнения, задающие векторы Герца:

$$\nabla^2 \vec{\Gamma}^e - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}^e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{P}; \quad (1.3.20)$$

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^m - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} \vec{M}. \quad (1.3.21)$$

Таким образом, выделяется два класса электромагнитных полей, выражающихся через электрический и магнитный векторы Герца (два вида поляризации), а произвольное поле можно представить в виде суммы таких полей (смотри раздел «Поляризация электромагнитных волн»). Поля, выражающиеся через электрический вектор Герца, носят названия полей электрического типа или поперечно-магнитных (ТМ) полей (поперечность – transversality), поскольку индукция магнитного поля для них ортогональна направлению вектора Герца. Соответственно, поля, выражающиеся через магнитный вектор Герца, носят названия полей магнитного типа или поперечно-электрических (ТЕ) полей. В задачах радиофизики эти поля рассматриваются как ТЕ- и ТМ-волны. В традиционной волновой оптике рассматриваются электромагнитные поля соответственно S и P поляризации. Согласно (1.3.20) и (1.3.21) поля ТМ можно представить как порождаемые распределёнными в пространстве электрическими диполями, а поля (ТЕ), соответственно, магнитными диполями. Векторные потенциалы Герца, в свою очередь, могут быть во многих случаях выражены через скалярные потенциалы. Именно возможность перехода от векторных потенциалов к скалярным функциям и определяет полезность векторов Герца и других эквивалентных потенциалов (например, потенциалы Дебая) для решения широкого круга задач электродинамики.

1.3.4. Векторы Римана -Зильберштейна (RS-вектора)

Если ввести комплексный вектор Римана-Зильберштейна \vec{F} и комплексно сопряжённый ему вектор \vec{F}^* в виде:

СИСТЕМА ГАУССА

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} [\sqrt{\varepsilon} \vec{E} + i\sqrt{\mu} \vec{H}];$$

СИСТЕМА СИ

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{E} + i\sqrt{\mu \mu_0} \vec{H}], \quad (1.3.22)$$

то уравнения Максвелла сводятся к двум уравнениям:

СИСТЕМА ГАУССА

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \rho;$$

СИСТЕМА СИ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon \varepsilon_0}} \rho; \quad (1.3.23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = i\sqrt{2\pi\mu} \vec{j} + i\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = i\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{2}} \vec{j} + i\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}.$$

При отсутствии сторонних токов и зарядов останется только второе уравнение (первое из-за равенства дивергенции ротора нулю удовлетворяется автоматически с точностью до не зависящей от времени компоненты):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = i\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}. \quad (1.3.24)$$

В отличие от волнового уравнения, которое получается в этом случае для векторов поля, потенциалов или вектора Герца, уравнение (1.3.24) имеет первый, а не второй порядок, и поэтому в ряде случаев оно может быть проще для решения.

Определив вектор \vec{F} из уравнений (1.3.23) или (1.3.24), мы можем выразить через него напряжённости электрического и магнитного полей следующим образом:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\varepsilon_0}} (\vec{F} + \vec{F}^*); \quad (1.3.25)$$

$$\vec{H} = -\frac{i}{\sqrt{2\mu\mu_0}} (\vec{F} - \vec{F}^*). \quad (1.3.26)$$

Для гармонического поля с зависимостью $\vec{F} = \vec{F} \exp \pm i\omega t$ вектор \vec{F} является собственным вектором оператора ротора:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}^\pm = \pm k \vec{F}^\pm. \quad (1.3.27)$$

При выбранной нормировке \vec{F} имеет смысл комплексной амплитуды электромагнитного поля, а его квадрат модуля $\omega = \left| \vec{F} \right|^2 = \vec{F} \vec{F}^* = \omega_E + \omega_H$ имеет смысл плотности энергии поля.

Вектор Умова -Пойнтинга выражается через \vec{F} как

$$\vec{\Pi} = -\frac{ic}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{F}^* \times \vec{F}. \quad (1.3.28)$$

1.4 Комплексная форма уравнений электродинамики

В уравнения электродинамики (уравнения Максвелла или волновые уравнения) входят частные производные по четырём независимым переменным: X, Y, Z и t . Исключение одной из этих переменных упрощает решение этих уравнений. Такая операция возможна, если рассматривать электромагнитный процесс, в котором изменение полей по времени представляется гармонической функцией $\exp i\omega t$ с некоторой частотой ω , например, **монохроматический** (или **квазимонохроматический**) процесс. Помимо того, что этот случай наиболее часто встречается в практических задачах, знание поведения поля на всех частотах позволяет воссоздать любой закон изменения во времени, воспользовавшись методом интеграла Фурье. Если рассмотреть какой-либо вектор поля, например

поля \vec{E} , изменяющийся во времени по гармоническому закону в некоторой точке пространства, то его можно представить в виде:

$$\vec{E}(t) = E_{0x} \exp i(\omega t + \varphi_x) \vec{i} + E_{0y} \exp i(\omega t + \varphi_y) \vec{j} + E_{0z} \exp i(\omega t + \varphi_z) \vec{k}.$$

Комплексный вектор вида: $\vec{E} = E_{0x} \exp i\varphi_x \vec{i} + E_{0y} \exp i\varphi_y \vec{j} + E_{0z} \exp i\varphi_z \vec{k}$ принято называть **комплексной амплитудой поля \vec{E}** . Комплексные амплитуды могут быть легко введены во все вышерассмотренные уравнения электродинамики по правилу: **оператор дифференцирования по времени, действующий на мгновенное значение поля, заменяется на множитель $i\omega$** .

1.4.1 Комплексная диэлектрическая проницаемость

Если воспользоваться материальным уравнением (1.2.5), то уравнение (1.2.2) в комплексной форме может быть записано в виде:

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \varepsilon_a^* \vec{E} + \vec{j}, \quad (1.4.1)$$

где

$$\varepsilon_a^* = \varepsilon_{a1} - i\varepsilon_{a2} = \varepsilon_{a1} - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (1.4.2)$$

Выражение (1.4.3) называют **комплексной диэлектрической проницаемостью** данного вещества.

Введение этой величины позволяет использовать решения уравнений Максвелла, полученные для диэлектрических сред, в средах полупроводящих и проводящих. Вещественная часть ε_a^* характеризует интенсивность процесса поляризации (величину плотности токов смещения), в то время как мнимая часть характеризует плотность токов проводимости. С помощью формулы (1.4.3) можно ввести понятие **угла диэлектрических потерь δ** как

$$\text{tg} \delta = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{a1}}. \quad (1.4.4)$$

Чем больше этот угол, тем относительно большая часть электромагнитной энергии рассеивается в виде тепла при протекании токов проводимости. Введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет провести более строгую классификацию сред по проводимости. Постольку ε_{a1} характеризует величину плотности токов смещения, а ε_{a2} - токов проводимости, то при $\varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$ среда является диэлектриком, при $\varepsilon_{a1} \cong \varepsilon_{a2}$ - полупроводником и при $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_{a2}$ - проводником.

Задание комплексной диэлектрической проницаемости и тангенса угла потерь полностью характеризуют материалы (среды). Для хороших диэлектриков $\text{tg} \delta$ в СВЧ лежит в пределах $10^{-4} - 10^{-3}$; если $\text{tg} \delta > 10^{-3}$, то диэлектрик обычно считается плохим.

Рассмотренные в разделе 1.2 виды поляризации позволяют представить составляющие комплексной диэлектрической проницаемости произвольно

выбранной среды ε_{a1} и ε_{a2} (выражение (1.4.3)) в широком диапазоне частот электромагнитного поля качественными зависимостями, представленными на рис.1.

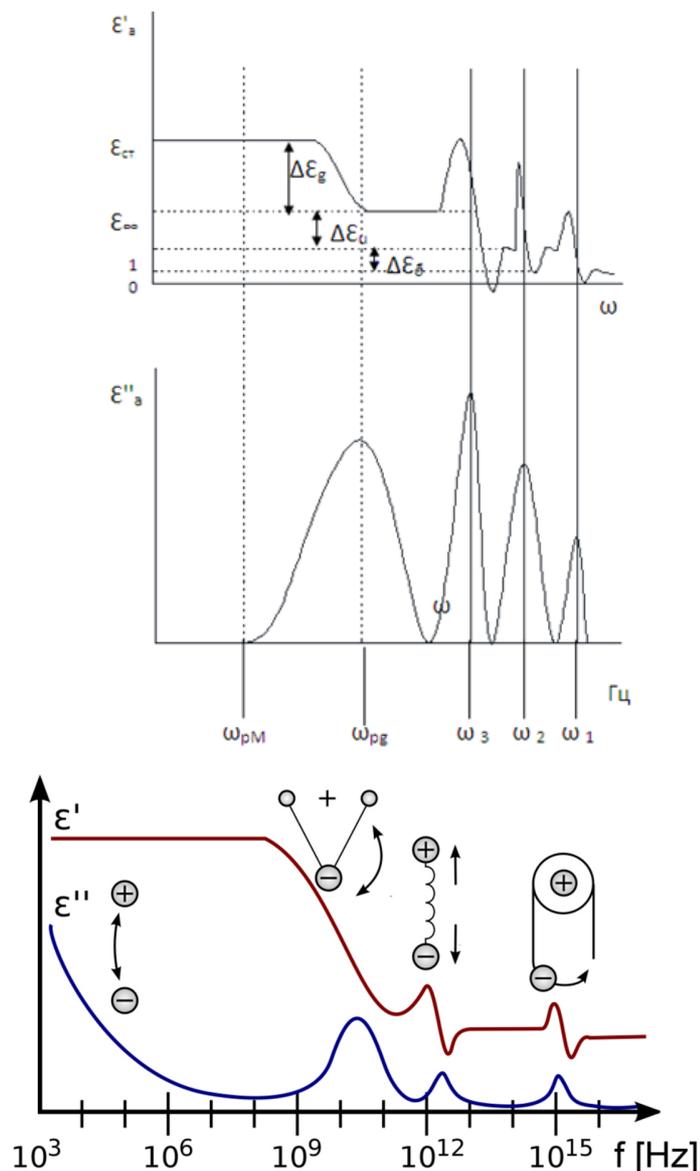


Рис.1 Качественные зависимости составляющих комплексной диэлектрической проницаемости произвольно выбранной среды от частоты электромагнитного излучения

В гамма и рентгеновском диапазоне частот (свыше 10^{17} Гц) ε_{a1} равна единице, а в ε_{a2} появляется электронная поляризация, дающая вклад $\Delta\varepsilon_\delta$ в ε_{a1} на всех более низких частотах в твёрдых и жидких диэлектриках. В области дисперсии электронной поляризации ($10^{14} - 10^{16}$ Гц), когда частота внешнего поля совпадает с одной из частот собственных колебаний электронных оболочек (ω_1),

наблюдаются узкие максимумы потерь, известные как оптические спектры поглощения. В инфракрасном диапазоне ($10^{12} - 10^{14}$ Гц), вслед за изменением поля, начинают смещаться более тяжёлые частицы-ионы. При этом появляется ионная поляризация, которая увеличивает ε_{a1} на более низких частотах на $\Delta\varepsilon_u$. На частотах резонанса ионов (ω_2, ω_3) наблюдаются максимумы резонансного поглощения. В радиочастотном диапазоне ($10^{13} - 10^{11}$ Гц) у полярных диэлектриков появляется дипольная поляризация, приводящая к дальнейшему повышению ε_{a1} на $\Delta\varepsilon_g$. На рис. 1 наибольшее возможное значение ε_{a1} среды, измеренное на инфранизкой частоте, это так называемая статическая диэлектрическая проницаемость. Наименьшее значение ε_{a1} , измеренное на очень высокой частоте (частоте световых колебаний), – это оптическая диэлектрическая проницаемость ε_∞ . Разность этих величин $\varepsilon_{cm} - \varepsilon_\infty$ определяет так называемый **инкремент** диэлектрической проницаемости.

Физически обоснованное описание зависимости $\varepsilon^* = f(\omega)$ (Рис.1) было дано в модели Дебая.

Согласно этой модели:

$$\varepsilon_a^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_{cm} - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau}, \quad (1.4.5)$$

где τ - время релаксации из поляризуемого состояния молекулы (диполя) в исходное (дополяризуемое) состояние.

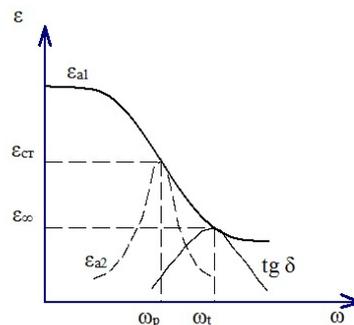


Рис.2 Частотные зависимости для модели Дебая на примере диэлектрика

Из формулы Дебая (1.4.5) можно получить выражение для действительной и мнимой составляющих ε_a^* , а также для $tg\delta$. На примере диэлектрика ($\sigma=0$) имеем:

вещественную составляющую
$$\varepsilon_{a1} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_{cm} - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2}; \quad (1.4.6)$$

мнимую составляющую
$$\varepsilon_{a2} = \frac{(\varepsilon_{cm} - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}; \quad (1.4.7)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{\infty}) \omega \tau}{\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{\infty} \omega^2 \tau^2}. \quad (1.4.8)$$

Частотные зависимости $\varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}$ и $\operatorname{tg} \delta$ для этого случая представлены на рис.2.

Предложенная Дебаем модель оказалась адекватной и удобной при анализе взаимодействия электромагнитного поля с различными средами в задачах радиофизики и оптики. Однако эту модель в большей степени можно рассматривать как эмпирическую, в которой не рассматривается процесс поляризации среды, т.е. её реакции на действие внешнего поля. Эти процессы учитываются в других моделях комплексной диэлектрической проницаемости, развитых в классической электродинамике (теория Лоренца-Друдэ-Зоммерфельда, которая будет рассмотрена ниже) и квантовой электродинамике (соотношения Крамерса-Кроннинга). Выбор модели описания комплексной диэлектрической проницаемости среды определяется постановкой задачи её взаимодействия с внешним полем.

Соотношения Крамерса-Кроннинга.

Дисперсионные соотношения для комплексного показателя преломления $\vec{n}(\omega) = n(\omega) - ix(\omega)$ среды с частотной дисперсией, связывающие её показатель преломления $n(\omega)$ и коэффициент поглощения $x(\omega)$ - частота электромагнитной волны, были установлены Х. А. Крамерсом (H. A. Kramers) и Р. Кронингом (R. Kronig) в 1927 г. Они отражают аналитичность функции $\vec{n}(\omega)$ вверх полуплоскости частоты ω , рассматриваемой как комплексная переменная.

Физически соотношения Крамерса-Кроннинга выражают существование жёсткой связи дисперсии световой волны (зависимости показателя преломления от ω) и её поглощения.

$$\vec{n}(\omega) = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \sum_k \frac{f_{ok}}{\omega_{ok}^2 - \omega^2 - i\gamma}, \quad (1.4.9)$$

где n - концентрация атомов, ω_{ok} и f_{ok} - частота перехода и сила осцилляторов для k -го атомного уровня, e и m - заряд и масса электрона, γ - слабое затухание.

Выражение (1.4.9) показывает, что такая связь существует для любой среды безотносительно к конкретным механизмам дисперсии и поглощения. В частности, у непоглощающей (прозрачной) во всей области частот среды не было бы и дисперсии.

Будучи частным (и исторически первым) примером дисперсионных соотношений, соотношения Крамерса-Кроннинга имеют универсальную форму, не зависящую от структуры и динамики среды. Они выводятся из общего принципа **причинности**, применённого к электродинамическим функциям отклика. Однако поскольку связь комплексного показателя преломления \vec{n} с этими функциями в общем случае сложна, вывод об аналитичности

функции $\vec{n}(\omega)$ можно не всегда сделать соответственно. Соотношения Крамерса-Кроннинга оказываются справедливыми далеко не для всех типов сред. Так, например, в случае однородной изотропной среды с пространственной дисперсией $\vec{n}(\omega)$ определяется неявно.

1.4.2 Комплексная форма волновых уравнений

Электромагнитные задачи, как уже было отмечено в предыдущих разделах, решаются с помощью волновых уравнений для векторов поля \vec{E} и \vec{H} или потенциалов φ и \vec{A} , или вектора Герца \vec{G} . Комплексную форму волновых уравнений будем рассматривать на примере однородных волновых уравнений (1.3.3.) и (1.3.4) для векторов поля \vec{E} и \vec{H} (случай идеальной диэлектрической среды) и волновых уравнений (1.3.1) и (1.3.2) при условии $\vec{j}_s^{cm} u \rho_s^{cm} = 0$ (случай проводящей среды). Произведя операцию замены оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ на множитель $i\omega$, получаем для идеального диэлектрика:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{E} = 0; \quad (1.4.10)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{H} = 0, \quad (1.4.11)$$

$$\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \gamma. \quad (1.4.12)$$

где γ - важнейшая характеристика волнового процесса и носит название **постоянной распространения волны**, либо **волнового числа**, либо **фазовой постоянной**, а \vec{E} и \vec{H} - комплексные амплитуды полей (функции координат).

Для проводящей среды с $\mu=1$ (оптическая задача) аналогичными преобразованиями получаем:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_a^* \mu_0 \vec{E} = 0; \quad (1.4.13)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \varepsilon_a^* \mu_0 \vec{H} = 0, \quad (1.4.14)$$

где $\omega \sqrt{\varepsilon_a^* \mu_0} = \gamma^*$ - комплексное волновое число, в котором ε_a^* определяется выражением (1.4.3).

Это комплексное число может быть записано как

$$\gamma^* = \beta - i\alpha. \quad (1.4.15)$$

Физический смысл коэффициентов β и α будет определён позднее.

Уравнения типа (1.4.10) - (1.4.11) в математической физике носят название **уравнений Гемгольца**.

1.5 Основные методы решения задач электродинамики

Все задачи классической электродинамики, куда входят и задачи оптики, можно разделить на задачи анализа и синтеза.

Задачи анализа предполагают исследование полей в пространстве или каких-либо технических характеристик устройства при известном распределении источников. Задачи анализа можно разделить на внутренние и внешние.

Внутренняя задача формулируется следующим образом: необходимо отыскать решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в области V , ограниченной поверхностью S , удовлетворяющее на этой поверхности граничным условиям. При решении внутренних задач различают два решения: а) отыскание собственных функций, что соответствует решению однородных волновых уравнений; б) отыскание полей заданных источников, соответствующих решению неоднородных волновых уравнений. Примером подобных задач является задача отыскания полей в объёмном резонаторе. Решение однородного волнового уравнения позволяет найти свободные (собственные) колебания резонатора, а решение неоднородного уравнения - вынужденные колебания. При выполнении граничных и начальных условий решение обеих задач существует, и оно единственное.

Среди внешних задач наиболее простой является задача излучения заданной системы источников в однородном безграничном пространстве. Она формулируется следующим образом: в свободном пространстве необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, которое является эквивалентном граничных условий для внутренних задач. Другим, несколько более сложным, примером внешней задачи электродинамики является задача излучения заданной системы источников в безграничное неоднородное пространство. Задача формулируется так же, как и предыдущая, только предполагается дополнительно, что функция, описывающая распределение параметров среды, является непрерывной и имеет непрерывные первые производные.

Задачи синтеза предполагают **создание** определённого распределения источников либо создание технического устройства, обеспечивающего заданное распределение полей в пространстве либо заданные технические характеристики. Задачи синтеза являются существенно более сложными, чем задачи анализа.

1.5.1 Строгие методы решения

Все методы решения задач электродинамики можно разделить на строгие и приближённые. К числу строгих методов (результат решения задачи любым из строгих методов является одинаковым) решения задач электродинамики относят:

- метод разделения переменных (метод Фурье);
- метод запаздывающих потенциалов;
- метод скалярного и векторного интеграла Кирхгофа.

Метод разделения переменных применим в любой ортогональной системе координат, выбранной таким образом, чтобы граничные поверхности тела

(либо области пространства) совпадали или были параллельны координатным поверхностям. (Более подробно данный метод решения будет рассмотрен на примере волны).

Решение волнового уравнения **методом запаздывающих потенциалов** основано на физическом представлении, что электромагнитное возмущение, созданное источниками, сосредоточенными в некоторой области пространства, достигает точки наблюдения не мгновенно, а с некоторым запаздыванием, величина которого определяется скоростью распространения возмущения V и расстоянием до точки наблюдения r . Это означает, что интересующая нас характеристика электромагнитного поля в точке наблюдения в настоящий момент времени t обязана своим существованием вариациям источника поля в предшествующий (более ранний) момент времени $(t - \frac{r}{V})$. Кроме того, амплитуда рассматриваемой характеристики поля, в соответствии с условиями излучения, физический смысл которых состоит в том, что на бесконечном удалении от источника амплитуда поля должна стремиться к нулю, убывает пропорционально первой степени расстояния. Таким образом, решение волнового уравнения методом запаздывающих потенциалов будет иметь вид:

а) для вектора напряжённости магнитного поля, когда источники распределены в объёме V :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot} \vec{j}_s^{cm} (t - \frac{r}{v})}{r} dV; \quad (1.5.1)$$

б) для скалярного потенциала при тех же условиях:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho^{cm} (t - \frac{r}{v})}{r} dV. \quad (1.5.2)$$

Аналогичным образом могут быть записаны решения волновых уравнений и для других характеристик электромагнитного поля, рассмотренных ранее. В тех случаях, когда источники электромагнитного поля распределены не в объёме, а на поверхности или линейно, интегрирование распространяется на соответствующие поверхности или линии при сохранении общего вида решения.

Для гармонических полей эти решения принимают вид (на примере записи решения для векторного потенциала при распределении источников по поверхности):

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}_s^{cm} \exp(-ikr)}{r} dS. \quad (1.5.3)$$

В выражениях (1.5.1-1.5.3) r - расстояние от каждой точки рассматриваемого объёма (поверхности, кривой), где распределены источники, до точки наблюдения; \vec{j}^{cm}, ρ^{cm} - функции координат, описывающие распределение источников (токов, зарядов) внутри рассматриваемого объёма (на поверхности, по линии).

Метод решения волновых уравнений с помощью скалярного либо векторного интегралов Кирхгофа в этом курсе не рассматривается, поскольку применение его в качестве строгого метода весьма ограничено и гораздо чаще он используется как метод приближённый. Особенно это относится к скалярному интегралу Кирхгофа (задачи скалярной теории дифракции в оптике [5]).

1.5.2. Приближённые методы решения

Говоря о приближённых методах решения задач электродинамики, прежде всего, нужно определить области их применения. Принято рассматривать три области в зависимости от соотношения геометрических размеров пространства L , где требуется найти решение, и длины электромагнитной волны λ :

а) квазистационарную $\rightarrow \frac{L}{\lambda} \gg 1$;

б) резонансную $\rightarrow \frac{L}{\lambda} \approx 1$;

в) квазиоптическую $\rightarrow \frac{L}{\lambda} \ll 1$.

В квазистационарной области решение задач базируется на методах электро- и магнитостатики. Резонансной – на строгих методах. В квазиоптической области задачи электродинамики решаются с помощью методов: геометрической оптики, волновой (физической) оптики, краевых волн, геометрической теории дифракции. В перечисленной последовательности приближённые методы позволяют получить более точное решение, стремящееся к строгому решению.

Метод **геометрической оптики** является предельным при решении волновой задачи, когда длина волны λ стремится к нулю. Это означает, что здесь не учитывается волновой характер поля. Этот метод применим при определении электромагнитного поля (чаще всего при решении задач на отражение электромагнитных волн), когда размеры отражающего тела и минимальный радиус кривизны его поверхности велики по сравнению с λ . Кроме того, необходимо, чтобы источник поля находился на достаточно большом расстоянии от поверхности тела.

Метод **волновой оптики** учитывает волновой характер электромагнитного поля и базируется в соответствии с принципом Гюйгенса на представлении поля точечного источника в виде волновой функции $A = \frac{A_0}{r} \exp i(\omega t - \frac{r}{V})$, где A - любая

составляющая вектора поля. Этот метод применим при тех же ограничениях, что и метод геометрической оптики, т.е. для больших гладких тел, когда точка наблюдения находится на достаточном расстоянии от источника. Однако метод волновой оптики позволяет определить электромагнитное поле и в области тени (задачи дифракции).

Метод краевых **волн** является развитием метода волновой оптики применительно к телам, поверхность которых имеет изломы, рёбра и т.д. (смотри подробно [33]). Он используется при тех же ограничениях, что и предыдущий метод, и позволяет несколько ослабить требования по соотношению размеров тела, радиуса кривизны его поверхности и расстояния до точки наблюдения и длины волны λ . Суть метода состоит в том, что в отличие от предыдущих методов, где на теневой части тела либо волнового фронта источника поле принималось равным нулю, поле источника на теневой стороне вблизи краёв тела (рёбер, изломов) отлично от нуля. Это отличие связано с появлением вблизи границ тела дополнительной (возмущённой) составляющей поверхностного тока, вызванной влиянием края тела. Эта составляющая отличается от нуля на расстояниях порядка длины волны от края тела и носит характер краевой волны, определённой как результат строгого решения задачи дифракции электромагнитной волны на клине.

Метод **геометрической теории дифракции** [5] представляет собой развитие метода геометрической оптики применительно к решению задач дифракции электромагнитных волн на больших по отношению к λ телах сложной формы. Он базируется на предположении, что энергия поля распространяется внутри лучевых трубок с теми же особенностями, что и в методе геометрической оптики, однако кроме падающих, отражённых и преломлённых лучей, в данном методе вводятся в рассмотрение дифрагированные лучи. При определении поля дифрагированного луча предполагается, что оно пропорционально в точке дифракции (точке соприкосновения падающего луча с краем тела) полю падающего луча. Предполагается также, что фаза дифрагированного луча меняется линейно вдоль луча, а характер изменения амплитуды устанавливается на основе постоянства потока энергии внутри лучевой трубки. Для определения амплитуды поля в каждой точке пространства необходимо найти все лучи, проходящие через эту точку, вычислить поля, соответствующие каждому лучу, и просуммировать их. Данный метод позволяет получить результаты при решении задач дифракции на телах сложной конфигурации, которые хорошо согласуются с результатами строгого решения и результатами экспериментальных исследований. Однако применение этого метода достаточно затруднительно, когда необходимо определять поле в области каустики (например, фокальная плоскость).

1.6. Плоские электромагнитные волны

1.6.1. Основные свойства и характеристики плоских электромагнитных волн

Если рассматривать безграничное трехмерное пространство с декартовой системой координат x, y, z , то простейшее решение уравнения (1.3.3) $\vec{E}(\vec{r})$ (комплексная амплитуда) можно записать как

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp \pm i(\vec{k}\vec{r}) \equiv \vec{E}_0 \cdot \exp \pm i[(k_x x + k_y y + k_z z)]. \quad (1.6.1)$$

Мгновенное значение поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ запишется как

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \exp i\omega t \equiv \vec{E}_0 \exp i(\omega t \pm \vec{k}\vec{r}). \quad (1.6.2)$$

Выражение (1.6.2) описывает распространение в пространстве плоской монохроматической волны. Наличие двух возможных знаков (в этом выражении \pm) связано с тем, что плоские волны могут распространяться в двух противоположных направлениях.

Модуль $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Сам вектор \vec{k} перпендикулярен поверхности, называемой **фронтом волны**, представляющей собой поверхность, во всех точках которой составляющие векторов поля изменяются синфазно. Фронт волны удовлетворяет уравнению:

$$\omega t \pm \vec{k}\vec{r} = const. \quad (1.6.3)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае волновые фронты представляют собой бесконечные плоскости, которые перемещаются в пространстве со скоростью, по модулю равной:

$$V_\phi = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad (1.6.4)$$

носящей название фазовой **скорости**. Число k служит важнейшей характеристикой волнового процесса в оптическом диапазоне и носит название либо **волнового числа**, либо **постоянной распространения**, либо **фазовой постоянной**. Это число эквивалентно числу $\gamma = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ в уравнениях (1.4.10) и (1.4.11). В оптическом диапазоне электромагнитных волн ($10^{11} - 10^{16}$) Гц фазовую скорость можно определять как $V_\phi = \frac{c}{n}$, где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ - показатель преломления среды, в которой распространяется плоская волна. Волновое число k в этом случае определяется как $k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$. Плоские волны определяются как одномерные волны,

т.е. при произвольном направлении распространения волны, которое можно совместить с одной из координатных осей (x, y, z), уравнение для фронта волны в случае, например, оси z запишется как

$$\omega t - kz = const \quad \text{или} \quad \omega t - \gamma z = const. \quad (1.6.5)$$

Выражение (1.6.5) соответствует поверхности равной фазы или фронту волны, распространяющейся в направлении положительной оси z . Кроме фронта, у волны есть поверхность, во всех точках которой составляющие векторов поля имеют равные амплитуды. Такая поверхность называется поверхностью равных амплитуд. Если поверхности равных амплитуд волны совпадают с поверхностью равной фазы, то такая волна называется однородной. В противном случае имеют дело с неоднородной волной. Для плоских волн справедливо $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ и $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$.

На основании этого легко можно, воспользовавшись уравнениями Максвелла для идеального диэлектрика, доказать поперечность электромагнитной волны и соотношения в плоской волне между \vec{E} и \vec{H} :

$$\sqrt{\varepsilon_a} |\vec{E}| = \sqrt{\mu_a} |\vec{H}|. \quad (1.6.6)$$

Для линейно-поляризованной плоской волны это соотношение можно записать в следующем виде: $E_x = Z_c H_y$, где $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ называется

характеристическим (волновым) сопротивлением данной среды Z_{cp} (другое название Z_{cp} - импеданс среды), которое полностью определяется лишь

параметрами среды. Очень важным параметром для многих расчётов (краевые задачи) является характеристическое сопротивление вакуума, которое равно

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом}$. Плоские монохроматические электромагнитные волны,

обладающие определённой частотой и поляризацией, представляют собой математическую идеализацию. В реальных задачах мы имеем дело с **квазимонохроматическими электромагнитными волнами**. Их можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн с частотами в некотором промежутке $\Delta\omega$. Электромагнитное поле можно считать квазимонохроматическим, если выполнено условие:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1, \quad (1.6.7)$$

где $\Delta\omega$ - ширина спектра соответствующего квазимонохроматического поля (ширина спектральной линии излучения), а ω_0 - частота, соответствующая максимальной амплитуде спектрального контура (примеры конкретных спектральных контуров рассматриваются в разделе 5 данного пособия). Квазимонохроматическая волна в данной точке пространства описывается функцией:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t) \cdot \exp \pm i\omega t, \quad (1.6.8)$$

где $\vec{E}_0(t)$ - медленно меняющаяся функция по сравнению с $\exp i\omega t$.

Характеристикой распространения такого квазимонохроматического поля является групповая *скорость* U . Она определяется как

$$U = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_0}. \quad (1.6.9)$$

Связь групповой скорости U с фазовой скоростью V_ϕ позволяет получить очень важные для электродинамики соотношения. Эта связь записывается как

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial(V_\phi k)}{\partial k} = V_\phi + k \frac{\partial V_\phi}{\partial k}. \quad (1.6.10)$$

Учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$, $n = n(\lambda)$, окончательно получаем выражение, называемое в оптике **формулой Рэлея**:

$$U = V_\phi - \lambda \frac{\partial V_\phi}{\partial \lambda}, \text{ где } \frac{\partial V_\phi}{\partial \lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda}. \quad (1.6.11)$$

Формула (1.6.11) позволяет провести анализ дисперсионных соотношений:

1. Если $\frac{\partial V_\phi}{\partial \lambda} = 0$, $n = const$, то в такой среде дисперсия (наличие зависимости $n(\lambda)$) отсутствует.

2. Если $\frac{\partial V_\phi}{\partial \lambda} > 0$, то $U < V_\phi$ ($\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$), то в такой среде наблюдается **нормальная дисперсия**.

3. Если $\frac{\partial V_\phi}{\partial \lambda} < 0$, то $U > V_\phi$ ($\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$), то в этой области спектра наблюдается **аномальная дисперсия** (наличие такой дисперсии характерно для интенсивного поглощения). Рассмотренные соотношения по существу определяют дисперсию во времени ($(n(\lambda) \rightarrow n(\omega) \rightarrow \omega(T^{-1}))$). Однако в электродинамике и в радиофизическом и оптическом диапазонах частот решение многих проблем связано с необходимостью анализа пространственной дисперсии (различные виды дифракции, пространственная фильтрация, параксиальное приближение и фокусировка электромагнитного поля, эванесцентные моды и качество изображения, метаматериалы). Для плоской волны формулу (1.6.3) можно переписать как

$$\frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{\epsilon \mu} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.6.12)$$

В этом выражении k_x, k_y, k_z - составляющие волнового вектора плоской волны \vec{k} рассматриваются как пространственные частоты. Если теперь обратиться к уравнениям (1.4.10)-(1.4.14) и решать эти уравнения относительно амплитуд векторов $\vec{E}(x, y, z)$, $\vec{H}(x, y, z)$ произвольно заданных в пространстве электромагнитного поля, то эти решения можно представить через набор (суперпозицию) плоских волн, которые являются решениями уравнений (1.4.10-1.4.14) и которые можно рассматривать как спектральное представление электромагнитных полей в пространстве пространственных частот k_x, k_y, k_z . Кроме

плоских волн, в этот набор необходимо включить ещё и эванесцентные волны, которые также являются решениями уравнений (1.4.10 -1.4.14).

Несколько слов об **эванесцентных волнах** (несколько позднее мы вернемся к ним более подробно). Эванесцентные поля играют наиважнейшую роль в современной электродинамике, особенно в нанооптике. Достаточно сказать, что основной идеей электродинамики (оптики) ближнего поля является расширение спектра пространственных частот за счёт удержания информации об эванесцентных компонентах поля источника. Термин «evanescent» означает «исчезающий из вида» или «незначительный». Эти поля могут быть описаны плоской волной вида $\vec{E} \exp i(\vec{k}r - \omega t)$. Они характеризуются тем, что как минимум одна из компонент волнового вектора \vec{k} , указывающая на направление распространения волны, является мнимой величиной. В пространственном направлении, определяемом мнимой компонентой \vec{k} , волна не распространяется свободно, а затухает экспоненциально.

Таким образом, произвольное электромагнитное поле можно рассматривать как суперпозицию плоских и эванесцентных волн, которая представляет собою пространственный угловой (по направлениям волновых векторов) спектр и его очевидное изменение при распространении поля в среде можно рассматривать как пространственную дисперсию.

Предположим, что нам известно электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ в произвольной точке пространства (x,y,z) , например, это поле может быть решением электродинамической (оптической) задачи рассеяния, как показано ниже на рис.3, так, что $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{расс}}$.

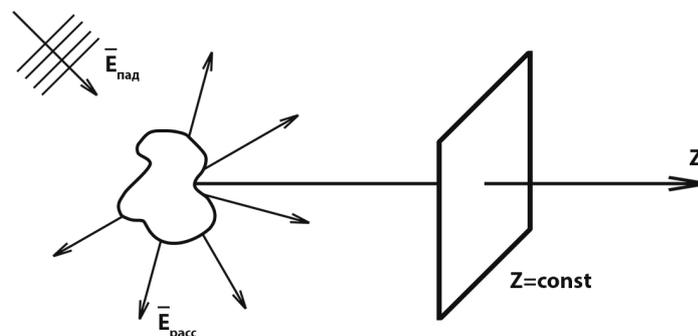


Рис.3 Решение электродинамической (оптической) задачи рассеяния для электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$

Рассмотрим поле $\vec{E}(\vec{r})$ в плоскости $z=const$, перпендикулярной выбранной оси Z . В этой плоскости на языке пространственных частот запишем двумерное преобразование Фурье этого поля:

$$\vec{\vec{E}}(k_x, k_y; z) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x, y, z) \exp -i(k_x x + k_y y) dx dy, \quad (1.6.13)$$

где x, y – декартовы координаты, а k_x, k_y – соответствующие пространственные частоты или координаты в обратном пространстве. Обратное преобразование Фурье даёт:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(k_x, k_y, z) \exp i(k_x x + k_y y) dx dy. \quad (1.6.14)$$

Подставляя это преобразование в уравнение Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)\vec{E}(\vec{r}) = 0$, можно найти закон изменения Фурье-образа вдоль оси распространения Z :

$$\vec{E}(k_x, k_y, z) = \vec{E}(k_x, k_y, 0) \exp \pm i k_z z. \quad (1.6.15)$$

Это соотношение показывает, что Фурье-образ поля в произвольной плоскости пространства $z = \text{const}$ может быть получен умножением пространственного спектра в плоскости $z = 0$ на множитель $\exp \pm i k_z z$, который называется **пропагатором** в обратном пространстве. Этот пропагатор является своего рода фильтром для пространственного спектра поля вдоль оси Z . Окончательно представление электромагнитного поля на языке пространственной дисперсии можно представить следующим образом:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(k_x, k_y, 0) \exp i(k_x x + k_y y + k_z z) dk_x dk_y. \quad (1.6.16)$$

Аналогично представляется пространственный спектр магнитного поля:

$$\vec{H}(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}(k_x, k_y, 0) \exp i(k_x x + k_y y + k_z z) dk_x dk_y. \quad (1.6.17)$$

1.6.2. Параксиальное приближение

Во многих задачах оптики распространение электромагнитного поля происходит вдоль выделенного направления Z , а в поперечном направлении оно распространяется незначительно. В этом случае волновые векторы $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ в представлении углового спектра практически параллельны оси Z , а поперечные компоненты волноводного вектора (k_x, k_y) малы по сравнению с k , что позволяет представить:

$$\vec{k}_z = k \sqrt{1 - \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{k^2}} \approx k - \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k}. \quad (1.6.18)$$

Такое приближение носит название параксиального. Оно существенно упрощает аналитический расчёт интегралов Фурье. Это приближение может быть использовано не только в оптических, но и в радиофизических задачах. Однако необходимо заметить, что в таких задачах спектр пространственных (угловых) частот гораздо шире, чем в оптических задачах в силу специфики генерации, распространения и взаимодействия электромагнитных волн этого диапазона со средой и различными телами. Выделение в таком спектре параксиального приближения (т.е. выделение только определённой части спектра) может привести

к потере части информации (например, качества изображения, разрешающей способности).

1.6.3. Когерентность и поляризация электромагнитных волн

Если обратиться к шкале электромагнитных волн, то актуальность понятия **когерентности** этих волн и её роли в таких явлениях, как интерференция, дифракция, рассеяние, поляризация, наиболее подробно обсуждается в основном для оптического диапазона частотной шкалы, хотя все эти явления имеют место и в радиофизическом диапазоне. Объяснение этому факту можно найти в работе А. Эйнштейна [35], в которой получено следующее соотношение:

$$\frac{w_{вын}}{w_{сп}} = \frac{B_{mn}\rho_v}{A_{mn}} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3}, \quad (1.6.19)$$

где $w_{вын}, w_{сп}$ - соответственно вероятности вынужденного (когерентная составляющая) и спонтанного (некогерентная составляющая) излучений, B_{mn}, A_{mn} - соответственно коэффициенты Эйнштейна для вынужденного, спонтанного переходов, ρ_v - спектральная плотность излучения. Исходя из корпускулярно-волнового дуализма электромагнитного излучения, соотношение (1.6.19) для классической электродинамики даёт следующее: при относительно малых частотах (радиофизический диапазон) электромагнитное поле излучения обладает высокой когерентностью. При увеличении частоты (переход в оптический диапазон) когерентность поля уменьшается. Чем выше частота (например, видимый спектр), тем меньше когерентность поля. Прямым доказательством когерентности волновых процессов являются эксперименты, в которых когерентные поля интерферируют при их сложении (наложении) в пространстве, а некогерентные не интерферируют между собой. Интерференция в электромагнитном излучении играет важную роль, т.к. многие явления в нём имеют интерференционную природу. Она (интерференция) опосредованно определяет прямолинейное распространение световых лучей в однородной среде, объясняет все законы геометрической оптики и явление дифракции, особенности преломления и отражения электромагнитных волн на границе раздела двух сред, эффект уменьшения фазовой скорости распространения волн внутри вещества, двойное лучепреломление и вращение плоскости поляризации в анизотропных средах и многое другое (например, резонансы Фабри-Перо, Ми, Фано, которые встречаются во многих задача электродинамики).

Математически результат интерференции в произвольной точке пространства P для случая двух электромагнитных полей записывается (опыт Юнга) как $I_{\Sigma}(P) = I_1(P) + I_2(P) + I_{12}(P) = \langle E_{10} E_{10}^* \rangle + \langle E_{20} E_{20}^* \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle E_{10}(t + \Delta t) E_{20}^*(t) \rangle$ [7,11].

Последнее слагаемое, учитывающее взаимодействие полей в пространстве и времени, называют интерференционным **членом** или функцией **корреляции**.

Нормировка этой функции на $\sqrt{I_1(P)I_2(P)}$ определяет комплексную степень когерентности:

$$\gamma_{12}(\Delta t) = \frac{2 \operatorname{Re}\langle E_{10}(t + \Delta t)E_{20}^*(t) \rangle}{\sqrt{I_1(P)I_2(P)}} \equiv |\gamma_{12}(\Delta t)| \cos\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|. \quad (1.6.20)$$

Если воспользоваться количественной характеристикой качества интерференционной картины, известной в оптике как функция видности:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad \text{то при } I_1(P) = I_2(P) \text{ получаем: } V \equiv |\gamma_{12}(\Delta t)|. \quad \text{Это соотношение}$$

позволяет сопоставлять экспериментально найденное и рассчитанное значение функции видности интерференционной картины с оценкой степени когерентности волновых полей.

Равенство $V = |\gamma_{12}(\Delta t)| = 1$ указывает на полную когерентность полей, $V = 0$ говорит об отсутствии когерентности.

При $0 < V < 1$ говорят о электромагнитных полях, обладающих частичной когерентностью. Этот случай относится к электромагнитным полям, излучаемым реальными источниками.

Когерентность реальных волн таких источников (определяющая их возможности в явлении интерференции) и для радиофизики, и для оптики характеризуется тремя параметрами: **временем когерентности, длиной когерентности и радиусом когерентности.**

Временем когерентности $\tau_{\text{ког}}$ *двух или нескольких волн называется максимальный промежуток времени, при усреднении в пределах которого еще наблюдается эффект интерференции.* Можно показать [7], что для излучения реальных источников, которые никогда не бывают строго монохроматическими:

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (1.6.21)$$

где $\Delta\omega(\Delta\nu)$ - разность частот интерферирующих волн в образуемом ими волновом пакете. Когерентность, характеризующаяся $\tau_{\text{ког}}$, определяется как **временная когерентность** (читателю рекомендуется ознакомиться с теоремой Виннера-Хинчина, в которой устанавливается связь параметров выражения (1.6.21) с Фурье-преобразованием когерентности степени (1.6.20)).

Две волны когерентны, если промежуток наблюдения Δt интерференционной картины (он обычно определяется инерционными свойствами приёмника) удовлетворяет условию:

$$\Delta t \leq \tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (1.6.22)$$

Например, для глаза ($\Delta t \approx 0,05$ сек) две волны оказываются когерентными, если $\Delta\nu \leq 20$ Гц. Это очень жёсткие условия для наблюдения интерференции в оптике, т.к. частота световых волн $\approx 10^{15}$ Гц.

Длиной когерентности $l_{\text{ког}}$ называется расстояние, при прохождении которого две или несколько интерферирующих волн утрачивают свою когерентность. Отсюда следует, что $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$.

Время и длина когерентности учитывают допустимый разброс интерферирующих волн только по их частотам, а сами волны предполагаются плоскими, т.е. имеют строго фиксированное направление волнового вектора и фиксированную поляризацию. Реальный источник с ограниченной апертурой имеет спектр пространственных частот (спектр волновых векторов) $\overline{\Delta k}$. При малых угловых размерах источника θ имеем:

$$\theta \approx \frac{\overline{\Delta k_{\perp}}}{\overline{k}}, \quad (1.6.23)$$

где $\overline{\Delta k_{\perp}}$ - поперечная составляющая волнового вектора, отсчитываемая от его основного направления.

Наибольшее расстояние между двумя точками (щелями в опыте Юнга, например) на волновой поверхности, вторичные излучения которых способны интерферировать между собой, называется **радиусом (размером) когерентности**. По аналогии с соотношением (1.6.21) справедливо соотношение:

$$r_{\text{ког}} = \frac{2\tau}{\overline{\Delta k_{\perp}}}. \quad (1.6.24)$$

Когерентность, характеризующаяся $r_{\text{ког}}$, определяется как пространственная когерентность. Если радиус когерентности определяется только угловым размером источника θ , то критерий когерентности имеет вид:

$$r \leq \frac{\lambda}{\theta}. \quad (1.6.25)$$

Это выражение по существу является следствием теоремы Ван-Циттерта-Цернике (подробно эту теорему можно посмотреть в [7]).

Представление электромагнитных полей как случайных процессов послужило толчком к развитию статистической природы когерентности. В задачу этого пособия не входит глубокое изучение этой природы. Для этого можно рекомендовать читателю, кроме [7,11], монографию [32], в которой он найдёт ответы на все вопросы, касающиеся такого многогранного понятия волнового процесса как когерентность.

В середине XX века физики получили высококогерентный источник излучения - *лазер* (оптическую антенну). Его высокая степень когерентности с позиций соотношения Эйнштейна объясняется увеличением спектральной плотности ρ_{ν} в процессе формирования поля излучения лазера в многопроходном режиме в открытом резонаторе лазера (резонатора Фабри-Перо).

Далее о **поляризации** электромагнитных волн (Самостоятельная проработка математического описания поляризации, параметров Стокса, сферы

Пуанкаре, соотношения степени поляризации и степени когерентности с использованием [7]).

1.7. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Теорема Пойнтинга

Одной из важнейших характеристик электромагнитного поля как физической субстанции является его энергия. Источники электромагнитного поля, токи и заряды, которые могут быть сторонними или наведёнными в среде, сообщают свою энергию этому полю, при этом она может преобразовываться в другие формы (тепловая, химическая, механическая), переноситься в другие области пространства, запасаться полем. Энергетический баланс такого процесса внутри выделенного объёма V , ограниченного поверхностью S , может быть записан следующим образом:

$$P^{cm} = P_m + P_{изл} + P_{пол}, \quad (1.7.1)$$

где P^{cm} - мощность, выделяемая сторонними источниками, P_m - мощность тепловых потерь, $P_{изл}$ - мощность, переносимая в другие области пространства, $P_{пол}$ - мощность, запасённая электромагнитным полем. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $P^{cm} = 0$ (отсутствие в объёме V сторонних электрического и магнитного токов). Если использовать первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме (выражения (1.2.1), (1.2.2)), то путём ряда математических преобразований энергетический баланс (выражение (1.7.1) можно представить через основные характеристики электромагнитного поля, векторы \vec{E} и \vec{H} . Эти преобразования заключаются:

- а) в скалярном умножении первого уравнения Максвелла на \vec{H} , а второго на $-\vec{E}$;
- б) в сложении первого полученного уравнения и второго и использовании известного соотношения теории поля $\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$;
- в) в перегруппировке полученных слагаемых и последующем интегрировании по объёму пространства V , ограниченного поверхностью S .

В результате получается уравнение, представляющее в классической электродинамике форму теоремы Умова-Пойнтинга, описывающей обмен энергией между выделенным объёмом и окружающими его областями пространства за счёт процесса, присущего электромагнитному полю и носящего название процесса излучения:

$$\pm \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + H^2}{2} = -\sigma \int_V (\vec{E} \vec{E}) dV \pm \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (1.7.2)$$

Интенсивность излучения в выражении (1.7.2) характеризуется определением в каждой точке пространства особой векторной величины $\vec{\Pi}$, называемой вектором Умова-Пойнтинга. Правильные результаты, согласующиеся

как с законом сохранения энергии, так и с уравнениями Максвелла, получаются, если (смотри практику):

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (1.7.3)$$

Единица измерения $\vec{\Pi}$ в системе СИ - $\frac{Bm}{m^2}$.

Знаки \pm перед интегралом в выражении (1.7.2) определяют физический смысл этого вектора. Он состоит в том, что полное изменение энергии электромагнитного поля, заключённой внутри объёма V с поверхностью S , обусловленное излучением, имеет направление потока энергии излучения либо из объёма V (знак минус), либо внутрь его (знак плюс).

Для важного в практическом отношении случая, когда поле изменяется во времени по гармоническому закону, вектор $\vec{\Pi}$ (выражение (1.7.3)) может быть выражен через комплексные амплитуды полей \vec{E} и \vec{H} . Поскольку $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E} \exp j\omega t)$, $\vec{H} = \text{Re}(\vec{H} \exp j\omega t)$, то:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}\vec{H}) + \frac{1}{2} \text{Re}((\vec{E}\vec{H}) \exp i2\omega t). \quad (1.7.4)$$

Таким образом, процесс переноса энергии в электромагнитном поле, изменяющийся во времени по гармоническому закону, характеризуется с одной стороны, вещественным вектором: $\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi} dt = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}\vec{H})$, равным средней за период плотности мощности (или интенсивности) излучения, и вещественным вектором $\vec{\Pi}_{кол} = \frac{1}{2} \text{Re}((\vec{E}\vec{H}) \exp i2\omega t)$, который указывает на существование колеблющейся составляющей вектора $\vec{\Pi}$. Следует иметь в виду, что среднее за период значение вектора $\vec{\Pi}_{кол}$ равно нулю. В случае плоской электромагнитной волны с учётом (1.6.6) плотность мощности $\vec{\Pi}_{cp}$ равна

$$\vec{\Pi}_{cp} = 0,5 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \vec{E}_0^2 \equiv 0,5 \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \vec{H}_0^2, \left(\frac{Bm}{m^2}\right). \quad (1.7.5)$$

Можно показать (смотри практику), что в однородной изотропной среде при распространении в ней электромагнитной волны направление вектора $\vec{\Pi}$ этой волны совпадает с направлением её волнового вектора \vec{k} . Что касается групповой скорости, то её направление также совпадает с направлением вектора Пойнтинга (смотри практику).

1.8. Распространение электромагнитных волн в различных средах

Для начала рассмотрим распространение плоских электромагнитных волн в трёх характерных средах: вакууме, среде с потерями и идеальном металле.

Вакуум. В этой среде $\gamma = |\vec{k}| = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и фазовая скорость $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{сек}$. Эта среда, в которой отсутствуют дисперсия и затухание.

Подобной вакууму средой можно считать воздух, для которого $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ ($\varepsilon_{отн} = \mu_{отн} = 1$) и в широком диапазоне шкалы электромагнитных волн не наблюдается ярко выраженной дисперсии.

Среда с потерями. В качестве такой среды можно рассматривать любые реальные диэлектрики, металлы и полупроводники. Для объяснения этого явления рассмотрим с позиций электродинамики распространение плоской электромагнитной волны в среде, для которой волновое число будет комплексным, а именно:

$$k^* \equiv \gamma^* = \omega\sqrt{\varepsilon_a^*\mu_a} = \beta - i\alpha. \quad (1.8.1)$$

Волна в этом случае будет иметь вид:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \gamma^* r) \equiv \vec{E}_0 \exp i(\omega t - (\beta - i\alpha)r). \quad (1.8.2)$$

После преобразований (смотри практику) окончательно будем иметь:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \exp(-\alpha z) \cdot \exp i(\omega t - \beta r). \quad (1.8.3)$$

Отсюда очевидно, что мнимая часть комплексного волнового числа γ^* (формула (1.4.15)) коэффициента α определяет затухание электромагнитной волны по мере её распространения вдоль направления r , а вещественная часть β определяет изменение фазы по мере распространения волны, т.е. является коэффициентом фазы. Эти коэффициенты определяются как (смотри практику)

$$\alpha^2 = 0,5\omega^2\varepsilon_a\mu_a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right)^2} - 1 \right); \quad (1.8.4)$$

$$\beta^2 = 0,5\omega^2\varepsilon_a\mu_a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right)^2} + 1 \right). \quad (1.8.5)$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в среде с потерями будет определяться как

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \left(\frac{2}{\varepsilon_a\mu_a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right)^2} + 1 \right)} \right)^{0,5}. \quad (1.8.6)$$

Поток энергии волны будет определяться как

$$\left| \overline{\Pi}_{cp} \right| = I \sim E(r,t)E^*(r,t) \sim H(r,t)H^*(r,t) \equiv I_0 \exp(-2\alpha r), \quad (1.8.7)$$

где коэффициент 2α есть коэффициент поглощения энергии электромагнитного поля на единицу длины (размерность $2\alpha - L^{-1}$). Выражение (1.6.30) хорошо известно и в задачах электродинамики как закон Бугера, полученный экспериментально. При анализе этого закона в оптическом диапазоне модуль

волнового вектора рассматривается как комплексное число, определённое через комплексный показатель преломления $n^* = n - in\chi$:

$$k^* = \frac{2\pi}{\lambda_0} n^* \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon^*} \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - in\chi). \quad (1.8.8)$$

В данном случае (оптика) выражение (1.8.3) может быть переписано как

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{2\pi n\chi}{\lambda_0} z\right) \cdot \exp i(\omega t - kz). \quad (1.8.9)$$

Если обратиться к выражению (1.6.6), то через амплитуду электрического поля \vec{E}_0 можно определить амплитуду магнитного поля в среде с комплексным волновым числом, а именно:

а) в радиофизике:
$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_a^*}{\mu_a}} \vec{E}_0 = \frac{n^*}{\mu Z_{\text{вак}}} \vec{E}_0; \quad (1.8.10)$$

б) в оптике:
$$\vec{H}_0 = \frac{\sqrt{n^2 + (n\chi)^2}}{\mu} \vec{E}_0 \exp(-i\gamma), \text{ где } \operatorname{tg} \gamma = \frac{n\chi}{n}. \quad (1.8.11)$$

Окончательное выражение в оптике закона Бугера:

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{4\pi n\chi}{\lambda_0} r\right). \text{ (смотри (1.6.30))} \quad (1.8.12)$$

Из формул (1.8.4) и (1.8.7) следует, что затухание энергии электромагнитного поля определяется для среды с $\mu = l$ комплексной диэлектрической проницаемостью, мнимая часть которой пропорциональна проводимости σ . Этот результат очевиден, так как чем больше проводимость среды, тем больше токи проводимости в ней и тем большая часть энергии поля переходит в тепло. Кроме этого, затухание волны возрастает с увеличением её частоты. Это обстоятельство связано с явлением поляризации среды и сопутствующими ему активными потерями. Из вышесказанного можно утверждать, что если волновое число в среде является комплексным (в общем случае комплексными могут быть диэлектрическая и магнитная проницаемости), то эта среда будет поглощать электромагнитную энергию.

Идеальный металл (хорошо проводящая среда). С электродинамической точки зрения, среда является хорошо проводящей, если в каждой её точке плотность токов проводимости $\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}$ значительно превосходит плотность токов смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \omega \varepsilon_a \vec{E}$. Отсюда можно получить условие, определяющее идеальный металл, а именно:

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon. \quad (1.8.13)$$

Очевидно, что чем ниже ω , тем ближе при прочих равных условиях данная среда приближается к идеальному металлу. На достаточно низких частотах многие среды, известные как диэлектрики, становятся металлоподобными. Это обстоятельство в ряде случаев позволяет значительно упростить решение практических задач. Используя (1.8.13) в формулах (1.8.4) и (1.8.5), можно

пренебречь единицей по сравнению со слагаемым $(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_a})^2$. В результате расчётные формулы для коэффициентов α и β приобретают следующий вид:

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}}; \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}}. \quad (1.8.14)$$

Фазовая скорость плоской волны, распространяющейся в среде, близкой к идеальному металлу, при тех же приближениях будет равна:

$$V_\phi \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu_a}}. \quad (1.8.15)$$

Анализ (1.8.15) показывает, что в идеальных проводниках при одной и той же частоте колебаний фазовая скорость плоской волны оказываются на несколько порядков меньше, чем в идеальном диэлектрике. Соответственно уменьшается и длина волны, которая определяется как

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\sigma}} \rightarrow \frac{\lambda_m}{\lambda_{\text{диэл}}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\epsilon_a\omega}{\sigma}} \ll 1. \quad (1.8.16)$$

Если воспользоваться выражением (1.8.7), то можно оценить глубину проникновения плоской электромагнитной волны d в идеальный металл, а именно:

$$d = \frac{1}{2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\omega\mu_a\sigma}}. \quad (1.8.17)$$

Из (1.8.17) видно, что наиболее резкое уменьшение энергии электромагнитного поля в идеальном металле проявляется на высоких и сверхвысоких частотах. На оптических частотах d будет стремиться к нулю, при этом энергетический коэффициент отражения от такой среды будет стремиться к единице (на практике необходимо коснуться вопроса преобразования поляризации в отраженной от идеального металла электромагнитной волне). Помимо коэффициентов отражения и поглощения, рассмотрим основные характеристики металлов, описывающие их оптические свойства. Обратимся к результатам экспериментальных измерений, приведённых ниже для некоторых металлов, представляющих практический интерес в задачах нанооптики и нанофотоники (метаматериалы), а именно:

	$n_0 / \text{м}^{-3}$	$\sigma(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$	$\omega_{pl}(\text{эВ})$	$\tau(\text{фс})$	$n\gamma$
Au	$5,9 \cdot 10^{28}$	$4,9 \cdot 10^7$	9,1	29	2,82
Ag	$5,76 \cdot 10^{28}$	$6,6 \cdot 10^7$	9,1	40	3,64
Cu	$8,45 \cdot 10^{28}$	$6,5 \cdot 10^{28}$	8,8	40	2,62

Очевидно, что для выбранных металлов показатель преломления n в оптическом диапазоне длин волн меньше единицы (для диэлектриков он больше

единицы). Объяснить этот факт позволила классическая теория Лоренца-Друдэ-Зоммерфельда.

1.8.1. Теория Лоренца-Друдэ-Зоммерфельда (ТЛДЗ)

Эту теорию можно рассматривать как развитие модели Дебая, рассмотренной выше (смотри выражения (1.4.5) - (1.4.8)).

В этой теории электроны проводимости в металле рассматриваются как электронный газ, который в определённом состоянии аналогичен идеальному газу в молекулярной физике. При воздействии на этот газ электромагнитного поля его диэлектрическая проницаемость ε , через которую можно определить показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ ($\mu = 1$), находится по следующему алгоритму:

1. $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \vec{r} = e \vec{E} \exp i\omega t$, уравнение движения одного свободного электрона.

2. Решение этого уравнения ищется в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp i\omega t$. Подстановка этого решения в исходное уравнение определяет выражение \vec{r}_0 , и через него определяется наведённый полем дипольный момент $d = -er(t)$ (смотри практику).

3. Далее, определяется суммарный дипольный момент \vec{P} , а через него восприимчивость $\chi(\omega)$.

4. Затем определяется $\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)\vec{E}$ и окончательно:

$$\varepsilon_{Др}^* = \frac{\vec{D}}{E} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (1.8.18)$$

где $\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}$ - плазменная частота электронного газа, а γ - коэффициент потерь.

Для сравнения по модели Дебая комплексная диэлектрическая проницаемость для металлов, в отличие от выражения (1.4.5), будет иметь вид:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_{cm} - \varepsilon_a}{(1 + i\omega\tau)^{1-\alpha}} - i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}. \quad (1.8.19)$$

5. Выделим в последнем выражении, определившем $\varepsilon_{Др}$ комплексным $\varepsilon_{Др} = \varepsilon_v - i\varepsilon^*$ вещественную и мнимую части. Они соответственно равны:

$$\varepsilon_v = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}; \quad \varepsilon^* = \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (1.8.20)$$

При малых потерях ε_v , определяющее показатель преломления, $n \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

Очевидно, что если $\omega > \omega_p$, то $n < 0$. Для золота, например, $\omega_p = 13,8 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $\gamma = 1,075 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$.

По модели Лоренца-Друдэ-Зоммерфельда свободные электроны под воздействием электромагнитного поля совершают колебания по фазе, отстающие на 180° по отношению к вынуждающему электрическому полю (знак минус в выражении для \vec{r}_0 и соответственно дипольного момента электрона). Как следствие, большинство металлов имеет отрицательную диэлектрическую проницаемость на оптических частотах, что проявляется, например, в их высокой отражательной способности (смотри раздел «Граничные задачи»). Кроме этого, газ свободных электронов в металле, взаимодействуя с электромагнитным полем оптического диапазона, может поддерживать колебания поверхностной и объёмной плотности заряда. Эти колебания заряда, имеющие определённые резонансные частоты, носят название **плазмонные поляритоны** или **плазмоны**. Существование плазмонов - характерная особенность взаимодействия света с металлическими наноструктурами. Исследование оптических явлений, относящихся к электромагнитному отклику металлов, получило название **плазмоники** или **наноплазмоники** [31].

1.8.2. Замечание о плазмонах

Для начала рассмотрим простую задачу взаимодействия электромагнитных волн с веществом (диэлектриком – на языке временной и пространственной дисперсий). Из уравнений Максвелла имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial^2 \vec{D}(\vec{r}, t)}{c^2 \partial t^2}. \quad (1.8.21)$$

Преобразование Фурье по координатам и времени поля \vec{E} :

$$\vec{E}(\omega, \vec{k}) = \iint \vec{E}(\vec{r}, t) \exp i(\omega t + \vec{k} \vec{r}) d\vec{r} dt. \quad (1.8.22)$$

Подстановка (1.8.22) в (1.8.21) даёт следующее уравнение:

$$-\vec{k}(\vec{k} \vec{E}(\omega, \vec{k})) + k^2 \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega, \vec{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\omega, \vec{k}). \quad (1.8.23)$$

Решения этого уравнения разделяются на два класса в зависимости от поляризации электрического поля.

1. Решение для поперечных волн, для которых $\vec{k} \vec{E}(\omega, \vec{k}) = 0$.

Уравнение (1.8.23) принимает вид:

$$k^2 \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega, \vec{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\omega, \vec{k}). \quad (1.8.24)$$

Распространение волн возможно только при выполнении дисперсионного соотношения:

$$k^2 = \varepsilon(\omega, \vec{k}) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.8.25)$$

Для продольных волн \vec{k} параллелен \vec{E} , и уравнение (1.8.23) будет иметь вид:

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\omega, \vec{k}) = 0. \quad (1.8.26)$$

Будем рассматривать бесконечный во всех направлениях идеальный металл. Для поперечных монохроматических электромагнитных волн закон дисперсии (временной) можно записать как

$$\omega^2 \varepsilon(\omega) = c^2 k^2. \quad (1.8.27)$$

С учётом теории Друде-Зоммерфельда:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}. \quad (1.8.28)$$

Решение уравнения (1.8.27) при любом k имеет вид:

$$\omega^2 = \omega_{pl}^2 + c^2 k^2 \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\omega_{pl}^2 + c^2 k^2}. \quad (1.8.29)$$

Очевидно, что при малых k частота объёмных плазменных колебаний не обращается в нуль, как это имеет место для электромагнитных колебаний в свободном пространстве, а стремится к константе, называемой плазменной (плазмонной) частотой. Плазменные колебания с законом дисперсии (1.8.27) носят название поперечных **объёмных плазмонов**.

В металлах могут существовать и продольные плазмоны. Дисперсионное уравнение для этих плазмонов принципиально связано с пространственной дисперсией в металле, т.е. с зависимостью диэлектрической проницаемости от волнового вектора k :

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (1.8.30)$$

Теорию продольных плазмонов можно посмотреть, например, у [13]. Или ещё более раннее [36]. Из этой теории следует, что закон дисперсии для продольных плазмонов имеет вид:

$$\omega^2 = \omega_{pl}^2 + \frac{3V_F^2 k^2}{5}, \quad (1.8.31)$$

где V_F - скорость Ферми (скорость на уровне Ферми, равная $V_F = \frac{P_F}{m} = \frac{\hbar k_F}{m} = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$).

В области малых значений k различие между поперечными и продольными объёмными плазмонами исчезает, и оба типа плазмонов оказываются связанными с однородными (не зависящими от координат) колебаниями электронов проводимости относительно решётки на частоте ω_{pl} . Эти колебания имеют простое физическое объяснение. Действительно, рассмотрим слой металла произвольной толщины L и площади S , в котором все электроны как целое смещены на расстояние r . В этом случае на верхней и нижней поверхностях возникнут поверхностные заряды $\sigma_s = \pm en_0 r$, за счет которых возникнет электрическое (электростатическое) поле: $E = 4\pi en_0 r$.

Если теперь записать уравнение движения (Ньютона) всех электронов, рассматриваемых как одно целое, то оно будет иметь вид:

$$LSn_0m \frac{d^2r}{dt^2} + en_0LSE = LSn_0m \left(\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{m} r \right) = 0. \quad (1.8.32)$$

Из уравнения видно, что электроны за счёт чисто электростатических сил будут совершать колебания с частотой:

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \equiv \omega_{pl}^2. \quad (1.8.33)$$

Таким образом, ω_{pl} является собственной частотой колебаний электронов в слое металла произвольной толщины. В более сложных геометриях (цилиндр, гофрированная поверхность и т.п.) собственные частоты могут быть количественно другими, но качество этих колебаний остаётся тем же.

Более подробно вопросы плазмоники будут отчасти рассмотрены в разделе «Краевые задачи электродинамики» этого курса, а также более подробно в курсе «Электродинамика метаматериалов».

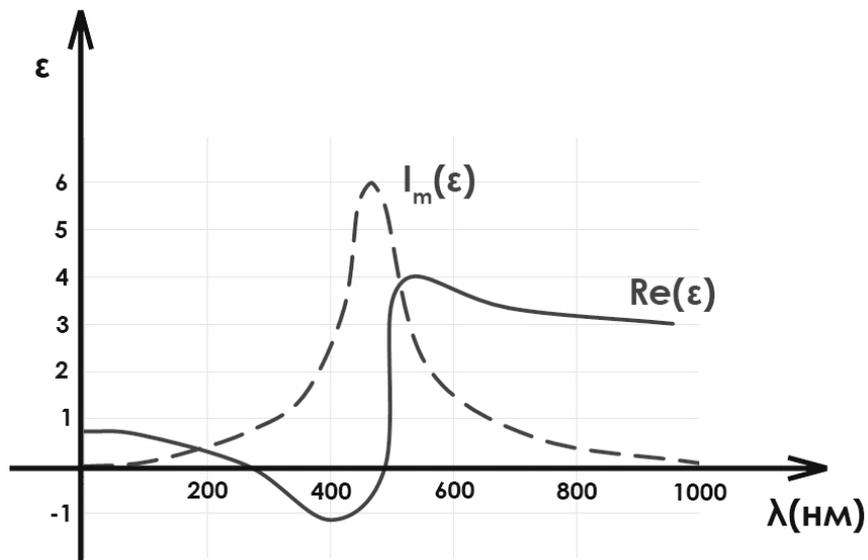


Рис.4 Зависимость действительной ($\text{Re}(\epsilon)$) и мнимой ($\text{Im}(\epsilon)$) частей комплексной диэлектрической проницаемости металла от длины волны излучения

Всё вышеизложенное довольно точно описывает оптические свойства металлов в ИК-диапазоне. В видимой и УФ областях спектра экспериментальные измерения ϵ_v и ϵ^* отличаются от их теоретических значений. Причина в том, что более энергетические фотоны этих областей спектра могут переводить электроны из нижних уровней (валентная зона) в зону проводимости металла. Теория Друде такие переходы описывает возбуждением колебаний связанных электронов:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = e \vec{E}_0 \exp i \omega t \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp i \omega t \rightarrow \vec{r}_0; \quad (1.8.34)$$

$$\varepsilon_{Др} = 1 + \frac{\omega_{p*}^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \rightarrow 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{\gamma\omega_p^2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

На рис. 4 показан вклад связанных электронов в диэлектрическую проницаемость металла.

Эта теория может *быть обобщена на взаимодействие электромагнитного поля* с диэлектриками, для которых становится справедливым выражение (1.8.34). Диэлектрический отклик в широком диапазоне частот может состоять из нескольких полос поглощения, относящихся к различным резонансам и возбуждаемых электромагнитным полем.

Подводя итог всему вышесказанному, ещё раз отметим, что взаимодействие любого электромагнитного поля (радиофизического или оптического) с идеальными металлами в значительной степени определяется свободными электронами проводимости. По модели Лоренца-Друдэ-Зоммерфельда свободные электроны под воздействием электромагнитного поля совершают колебания по фазе, отстающие на 180° по отношению к вынуждающему электрическому полю (знак минус в выражении для \vec{r}_0 и соответственно дипольного момента электрона). Как следствие, большинство металлов имеет отрицательную диэлектрическую проницаемость на оптических частотах, что проявляется, например, в их высокой отражательной способности (смотри раздел «Граничные задачи»). Кроме этого, газ свободных электронов в металле, взаимодействуя с электромагнитным полем оптического диапазона, может поддерживать колебания поверхностной и объёмной плотности заряда. Эти колебания заряда, имеющие определённые резонансные частоты, носят название **плазменные поляритоны** или **плазмоны**. Более подробно эти вопросы представлены в курсе «Электродинамика метаматериалов» (смотри монографию [16]).

1.8.3. Анизотропные среды

В анизотропных средах возникают более сложные связи между векторами \vec{D} и \vec{E} или \vec{B} и \vec{H} , в отличие от соотношений (1.2.5), (1.2.6). Это зависит от того, в каком из параметров среды (ε_a или μ_a) проявляется анизотропия. Рассмотрим простейшее соотношение между \vec{D} и \vec{E} , позволяющее учесть анизотропию параметра ε_a (соотношение, в котором каждая компонента вектора \vec{D} связана линейно с компонентами \vec{E} , т.е.):

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z; \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z; \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \tag{1.8.35}$$

Из (1.8.35) следует, что в данном случае векторы \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны (параллельны).

Девять величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots$ являются постоянными среды и составляют **тензор диэлектрической проницаемости**. В компактной форме (1.8.35) записывается как

$$D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i, \quad (1.8.36)$$

где k – один из трёх индексов x, y или z , а индекс i принимает по очереди значения x, y, z . Анализ электродинамических задач с тензорной магнитной проницаемостью (например, плазма, ферриты) не отличается от анализа явлений с тензорной диэлектрической проницаемостью среды, поэтому далее будут рассматриваться явления в среде с диэлектрической анизотропией.

Существует ряд обстоятельств, позволяющих упростить тензор диэлектрической проницаемости и ввести в описание анизотропии **главные диэлектрические оси** (смотри подробнее в [7], стр.731). Относительно этих осей выражение (1.8.35) записывается как

$$D_x = \varepsilon_x E_x, D_y = \varepsilon_y E_y, D_z = \varepsilon_z E_z. \quad (1.8.37)$$

Такое упрощение позволяет определить в электродинамических задачах три вида анизотропных сред:

- а) если $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$, то такую среду называют аморфной анизотропной средой (примером могут служить кристаллы (структуры), обладающие кубической симметрией кристаллической решётки, например, кристаллы поваренной соли (NaCl));
- б) если $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$, то такую среду называют одноосной анизотропной средой, у которой главная оптическая ось (смотри ниже) ориентирована вдоль координаты Z ;
- в) если $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$, то такая анизотропная среда является двухосной.

Далее будет рассматриваться одноосная анизотропная среда как наиболее распространённая в теоретических и практических задачах электродинамики.

Распространение плоской монохроматической волны в такой анизотропной среде, в отличие от изотропной среды, будет характеризоваться фазовой и лучевой скоростями. Наличие этих скоростей вытекает из уравнений Максвелла (1.2.1) и (1.2.2), которые с помощью символического метода (плоская монохроматическая волна) можно переписать как

$$\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \vec{s} \times \vec{H} = -\vec{D}; \quad (1.8.38)$$

$$\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \vec{k} \times \vec{E} = \mu \vec{H}. \quad (1.8.39)$$

В этих уравнениях для анизотропной среды связь \vec{D} и \vec{E} определяется из (1.8.37). Рис. 5 показывает относительное расположение векторов, записанных в выражениях (1.8.38) и (1.8.39).

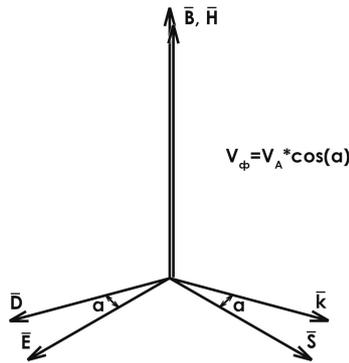


Рис.5 Положение векторов в пространстве

Видно, что тройка векторов \vec{D}, \vec{H} и \vec{k} с одной стороны, и тройка векторов \vec{E}, \vec{H} и $\vec{s} = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|}$ с другой образуют ортогональные тройки векторов с общим вектором \vec{H} , повернутые в силу анизотропии (1.8.35) относительно друг друга на угол α . Таким образом, в анизотропной среде энергия волны распространяется не в направлении волнового вектора \vec{k} (нормали к волновому фронту), а в направлении лучевого вектора \vec{s} . Это обстоятельство и определяет в электродинамике анизотропных сред наличие фазовой и лучевой скоростей. Связь этих скоростей определяется как

$$V_{\phi} = \frac{c}{n} = V_l \cos \alpha. \quad (1.8.40)$$

Отсюда очевидно, что фазовая скорость равна проекции лучевой скорости в направлении волновой нормали. Для одноосной анизотропной среды (в оптике одноосные кристаллы) особенности распространения в ней электромагнитного поля анализируются с помощью уравнений волновых и лучевых нормалей:

$$\frac{k_x^2}{V_{\phi}^2 - V_x^2} + \frac{k_y^2}{V_{\phi}^2 - V_y^2} + \frac{k_z^2}{V_{\phi}^2 - V_z^2} = 0 \text{ — уравнение волновых нормалей; } (1.8.41)$$

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{V_l^2} - \frac{1}{V_x^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{V_l^2} - \frac{1}{V_y^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{V_l^2} - \frac{1}{V_z^2}} = 0 \text{ — уравнение лучевых нормалей. } (1.8.42)$$

Можно показать (практика), что вышеприведённые выражения эквивалентны известным в оптике волновому и лучевому эллипсоидам вращения (ось вращения — главная оптическая ось анизотропной среды). На рис. 6 представлены сечения таких эллипсоидов, представляющих собой годографы скоростей распространения электромагнитных полей в одноосной анизотропной среде с оптической осью $O'O'$.

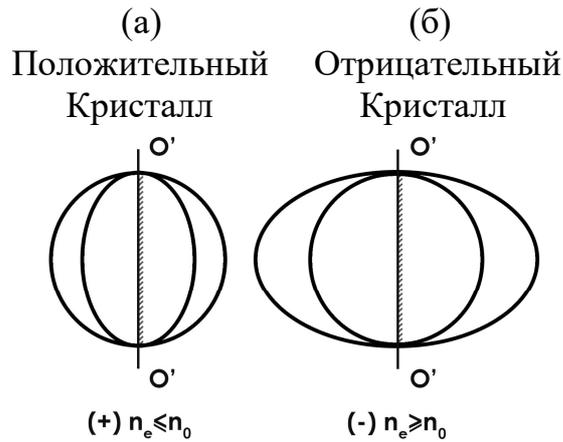


Рис. 6 Сечения эллипсоидов вращения

Это поле представлено двумя волнами: **обыкновенной**, фазовая скорость которой $V_{ф.об.} = \frac{c}{n_0}$ одинакова во всех направлениях относительно главных диэлектрических осей, и **необыкновенной**, фазовая $V_{ф.н.} = \frac{c}{n_e}$ или лучевая $V_{л.н.} = \frac{c}{n_e}$ скорости которой зависят от выбранного в этих осях направления. Анализу явлений в одноосных анизотропных средах посвящено достаточное количество литературы (например, в [7,11] смотреть волновой и лучевой эллипсоиды Френеля, пластины $\frac{\lambda}{4}$ и $\frac{\lambda}{2}$, электродинамику ферритов). Рассмотрим здесь распространение электромагнитного поля в диэлектриках с предельной оптической анизотропией, т.е. средах с проницаемостью $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon, \varepsilon)$. В такой одноосной среде дисперсионное уравнение для необыкновенных волн может быть представлено как

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (1.8.43)$$

где k_x, k_y, k_z - компоненты волнового вектора \vec{k} . Если среда обладает предельной анизотропией, т.е. если $|\varepsilon_{xx}| \gg \varepsilon$ и стремиться к ∞ , то (1.8.43) имеет следующее решение:

$$k_x = \pm \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c}, k_y, k_z - \text{произвольные}. \quad (1.8.44)$$

Это означает, что необыкновенные волны среды с предельной оптической анизотропией не испытывают дифракции: они распространяются в направлении анизотропии с фиксированной фазовой скоростью независимо от их поперечных волновых векторов. Ещё можно отметить, что ε_{xx} может быть комплексным с большим абсолютным значением. При этом мнимая часть ε_{xx} не будет оказывать практически никакого влияния на свойства необыкновенных волн в такой среде.

Тензор диэлектрической проницаемости диэлектрика с предельной оптической анизотропией описывается как $\varepsilon = (\infty, \varepsilon, \varepsilon)$, а соответствующее векторное материальное уравнение $\vec{D} = (\infty, \varepsilon, \varepsilon)\vec{E}$ будет иметь составляющую:

$$E_x = 0, D_y = \varepsilon E_y, D_z = \varepsilon E_z. \quad (1.8.45)$$

Это фактически означает, что данная среда является идеально проводящей вдоль оси X .

Таким образом, в первой главе рассмотрены характерные особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, позволяющие анализировать различные прикладные задачи в оптике и электродинамике анизотропных сред.

2. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

2.1 Постановка задачи

При решении практических задач приходится постоянно сталкиваться с ситуацией, когда параметры среды скачкообразно изменяются от одних значений к другим. Эта ситуация возникает при введении в однородную среду диэлектрических, полупроводящих и металлических поверхностей, при передаче электромагнитных волн с помощью волноводов (металлических и диэлектрических), разработке антенн, решении задач радиолокации и во многих других случаях. Следует ожидать, что скачкообразное изменение параметров среды может повлечь за собой такое же изменение векторов поля, что, в свою очередь, вызовет появление бесконечно больших производных этих векторов по координатам. При этом значения роторов векторов поля, входящих в уравнения Максвелла, станут бесконечно большими, и решение этих уравнений станет очень сложным. Очевидно, необходимо знать законы поведения векторов поля на границе раздела двух сред, так называемые **граничные условия**. Эти условия получают из уравнений Максвелла с помощью следующего приёма, пояснения к которому даны на рис.7 (более подробно вывод граничных условий можно посмотреть в [3,21]).

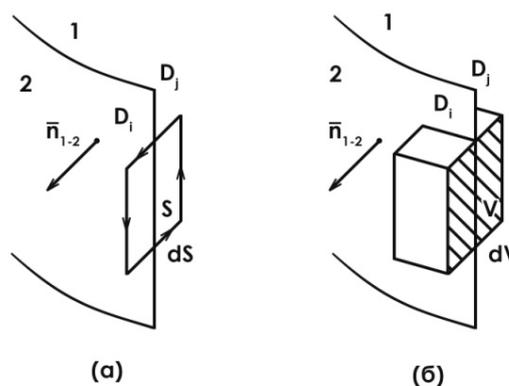


Рис.7. К выводу граничных условий в электродинамике

Принято, что граница раздела двух сред обладает некоторой малой толщиной, в пределах которой происходит не скачкообразный, а непрерывный переход от параметров одной среды к параметрам второй среды. Такое же непрерывное изменение происходит и с векторами поля. При этих допущениях из уравнений (1.1.1) и (1.1.2), записанных в интегральной форме (так проще), выбрав контур интегрирования в виде прямоугольной рамки S бесконечно малой высоты, пересекающей границу раздела двух сред (смотри рис. 7 (а)), можно получить в предельном переходе (толщина границы раздела стремится к нулю) следующую связь между компонентами поля в двух областях, примыкающих к границе:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Система Гаусса} & \text{Система СИ} \\
 (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_{1-2} = 0; & (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_{1-2} = 0; \\
 (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}_{1-2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{cm}. & (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}_{1-2} = \vec{j}_{cm},
 \end{array} \quad (2.1.1)$$

где \vec{n}_{1-2} - единичный вектор нормали к поверхности, направленный из среды 1 в среду 2 и имеющий размерность, обратную длине; \vec{j}_{cm} - плотность поверхностных свободных токов вдоль границы (т.е. не включая связанных токов намагничивания, складывающихся на границе среды из микроскопических молекулярных токов). Полученное первое **граничное условие** можно интерпретировать как непрерывность на границе областей тангенциальных (касательных) компонент напряжённостей электрического поля (из второго выражения следует, что тангенциальные компоненты напряжённости магнитного поля непрерывны только при отсутствии поверхностных токов на поверхности). Аналогичным образом, выбирая область интегрирования в интегральных уравнениях (1.1.3) и (1.1.4) в виде бесконечно малого параллелепипеда объёма V и поверхности dV , пересекающего границу раздела так, что его образующие перпендикулярны границе раздела (смотри рис.6 (б)), можно получить второе **граничное условие**, а именно:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Система Гаусса} & \text{Система СИ} \\
 (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_{1-2} = -4\pi\rho_{cm}; & (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_{1-2} = -\rho_{cm}; \\
 (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_{1-2} = 0; & (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_{1-2} = 0,
 \end{array} \quad (2.1.1)$$

где ρ_{cm} - поверхностная плотность свободных зарядов (т.е. не включающая в себя связанные заряды, возникающие на границе среды в результате диэлектрической поляризации самой среды). Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции (нормальная компонента электрической индукции непрерывна только при отсутствии на границе поверхностных зарядов).

Из уравнения непрерывности (1.2.7) можно получить граничное условие для токов:

$$(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \cdot \vec{n}_{1-2} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{cm}. \quad (2.1.3)$$

2.2. Граничные условия для векторов поля

Используя вышеизложенные общие выражения, рассмотрим граничные условия для тангенциальных и нормальных составляющих векторов электромагнитного поля, для границ раздела двух сред, которые важны в прикладных задачах оптики и радиофизики.

Представив произвольно ориентированные (по отношению к границе раздела) вектора поля в виде тангенциальных и нормальных составляющих, граничные условия на поверхности **раздела идеальных диэлектриков** ($\mu=1$, оптическая задача) с различными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_i (i=1,2)$ будут записываться как

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, D_{n1} - D_{n2} = -4\pi\rho_{cm}, ((D_{n1} - D_{n2}) = -\rho_{cm}). \quad (2.2.4)$$

Важным случаем является граница раздела диэлектрика и идеального проводника. Поскольку идеальный проводник имеет бесконечную проводимость, электрическое поле внутри него равно нулю, иначе бы оно порождало бесконечную плотность тока. Тогда в общем случае переменных полей из уравнений Максвелла следует, что и магнитное поле в проводнике равно нулю. В результате тангенциальная компонента электрического поля и нормальная компонента магнитного поля на границе с идеальным проводником равны нулю. Граничные условия в этом случае в общем виде будут записаны следующим образом:

Система Гаусса	Система СИ
$\vec{H}_1 \times \vec{n}_{1-2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{cm};$	$\vec{H}_1 \times \vec{n}_{1-2} = \vec{J}_{cm};$
$\vec{E}_1 \times \vec{n}_{1-2} = 0;$	$\vec{E}_1 \times \vec{n}_{1-2} = 0;$
$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{1-2} = -4\pi\rho_{cm};$	$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{1-2} = -\rho_{cm};$
$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1-2} = 0.$	$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1-2} = 0.$

(2.2.5)

В выражениях (2.2.5) \vec{J}_{cm} и ρ_{cm} - соответственно свободные токи и заряды на границе раздела (т.е. они наведены какими-то внешними причинами и не связаны со структурой идеального металла).

На границах раздела **двух проводников** или **проводника и диэлектрика** векторы электромагнитного поля должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$B_{1n} = B_{2n}, H_{1\tau} = H_{2\tau}, E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2.2.6)$$

Граничные условия на поверхности анизотропной или гиротропной среды имеют тот же вид, что и на границе раздела изотропных сред.

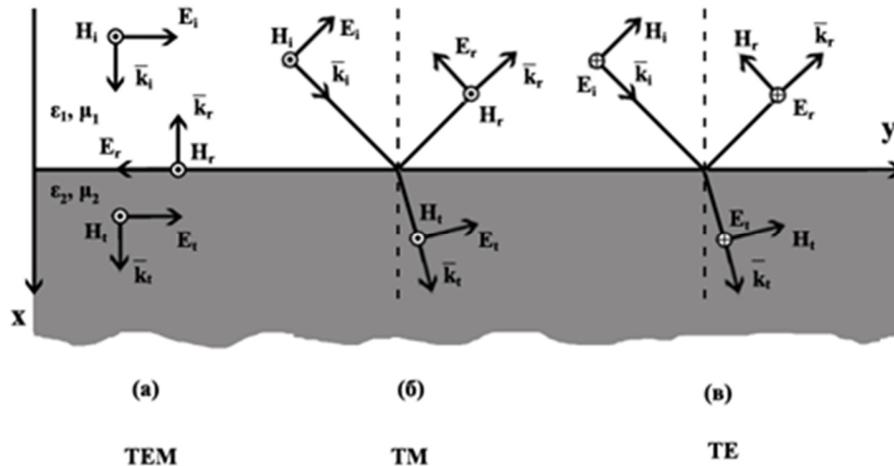


Рис.8. Типы электромагнитных волн на границе раздела двух сред

Во многих задачах современной радиофизики граничные условия записываются через поверхностный импеданс среды. Поверхностный импеданс среды определяется как

$$E_\tau = Z_s [H_\tau n], \quad (2.2.7)$$

где n – нормаль к поверхности раздела двух сред. Если обратиться к рис. 8, то в случае нормального падения электромагнитной волны на границу раздела (случай ТЕМ-волны, смотри рис.8, а) импеданс Z_s называется **полевым** и определяется как

$$Z_s \equiv Z_{TEM} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (2.2.8)$$

Для произвольного падения электромагнитной волны с различной поляризацией векторов поля по отношению к плоскости падения на границу раздела (ТЕМ-, ТЕ- и ТМ- волны, смотри рис. 8, а, б и в) импедансы этих волн, выраженные через $k_x = \sqrt{k^2 - k_y^2}$, равны соответственно:

$$Z_{TE}(k_y) = Z_{TEM} \frac{k_x}{k}; \quad (2.2.9)$$

$$Z_{TM}(k_y) = Z_{TEM} \frac{k}{k_x}. \quad (2.2.10)$$

2.3 Формулы Френеля

Эти формулы определяют амплитудные и энергетические коэффициенты отражения и преломления электромагнитных волн (рис. 8) на границе любых (по электродинамическим параметрам) сред как результат граничной (краевой) задачи. Кроме этого, формулы Френеля позволяют в определённой мере анализировать фазовые соотношения между волнами на границе раздела.

Окончательные выражения этих формул могут быть представлены в оптическом и радиофизическом вариантах, причём во втором случае формулы могут быть записаны через импедансы сред или волновые вектора. Здесь будут представлены формулы Френеля через волновые вектора (смотри рис.8, а и б).

На рис. 9 рассматривается падение электромагнитной волны (для случая ТЕ- и ТМ-волн (представленное на рис. 9 нужно понимать наоборот, а именно: где ТМ нужно понимать ТЕ) из среды 1 (ϵ_1, μ_1) на границу раздела со средой 2 (ϵ_2, μ_2) под произвольным углом θ_1 при условии, что $\epsilon_1, \mu_1 > \epsilon_2, \mu_2$).

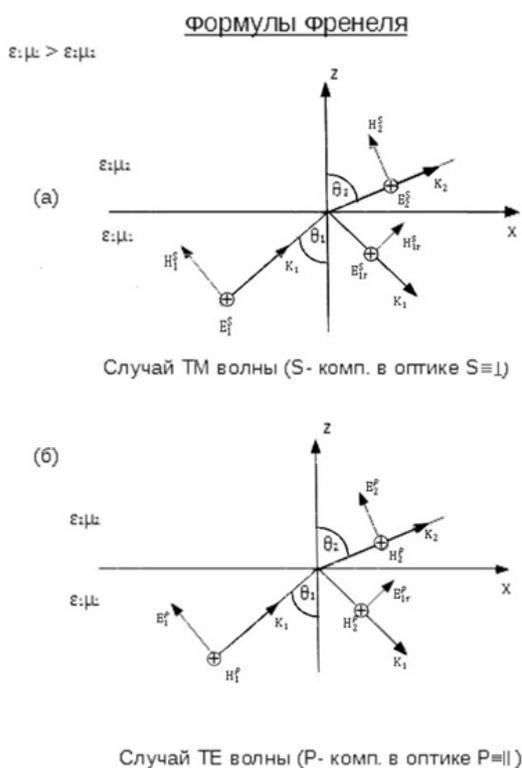


Рис. 9 Проекция волнового вектора и векторов поля на координатные оси

Из закона Снеллиуса следует, что поперечные (x, y) компоненты волновых векторов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 остаются неизменными, а продольные компоненты этих векторов имеют вид:

$$k_{z1} = \sqrt{k_1^2 - (k_x^2 + k_y^2)}, k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - (k_x^2 + k_y^2)}. \quad (2.3.1)$$

Поперечный волновой вектор $k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ можно выразить через угол падения θ_1 :

$$k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_1 \sin \theta_1. \quad (2.3.2)$$

Из граничных условий следует, что амплитуды отражённой и прошедшей волн могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{1r}^{(s)} &= E_1^{(s)} r^s(k_x, k_y), E_{1r}^{(p)} = E_1^{(p)} r^p(k_x, k_y); \\ E_{1r}^{(s)} &= E_1^{(s)} r^s(k_x, k_y), E_{1r}^{(p)} = E_1^{(p)} r^p(k_x, k_y). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

В формулах (2.3.3) (s) и (p) – индексы перпендикулярный (немецкое слово – senkrecht) и параллельный (parallel) соответственно, относятся к плоскости падения. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания $r^s(k_x, k_y), r^p(k_x, k_y), t^s(k_x, k_y), t^p(k_x, k_y)$ через волновые вектора записываются как

$$\begin{aligned} r^s(k_x, k_y) &= \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}; r^p(k_x, k_y) = \frac{\varepsilon_1 k_{z2} - \varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z1}}; \\ t^s(k_x, k_y) &= \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}, t^p(k_x, k_y) = \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Формулы (2.3.4) и представляют собой **формулы Френеля**. Они позволяют получить соответствующие энергетические коэффициенты отражения и пропускания по следующему алгоритму:

$$R^s = r^s r^{s*}, R^p = r^p r^{p*}, T^s = t^s t^{s*}, T^p = t^p t^{p*}, \quad (2.3.5)$$

где символ * означает комплексное сопряжение.

Для оптических сред ($\mu=1$), с учётом формулы (2.3.2) и закона Снеллиуса, формулы (2.3.4) можно преобразовать к виду, хорошо известному в оптике (смотри практику), а именно:

$$r^s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, r^p = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (2.3.6)$$

Формулы Френеля применимы для поглощающих сред, в которых $\sin\theta$ и $\cos\theta$ становятся комплексными.

В качестве важного примера рассмотрим формулы Френеля для случая ТЕМ-волны (Рис. 8 (а)). Выполняя граничные условия, запишем формулы Френеля через поверхностные импедансы (формулы (2.2.7) – (2.2.10)):

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}; t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (2.3.7)$$

Для оптических сред формула (2.3.7) легко преобразуется в известные выражения:

$$r = \frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, t = \frac{E_{20}}{E_{00}} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}, \quad (2.3.8)$$

где E_{00} , E_{10} и E_{20} - соответственно амплитуды векторов падающего на границу, отражённого от неё и проходящего через границу электромагнитных полей.

Через соотношения (2.3.8), согласно выражению (2.3.5), можно определить энергетические коэффициенты R и T :

$$R = \left[\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right]^2, T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}, R + T = 1. \quad (2.3.9)$$

Соотношения (1.7.14), записанные для амплитуд поля, позволяют проанализировать фазы электромагнитных полей на границе раздела.

Если $n_1 < n_2$, то знаки E_{10} и E_{00} будут различными, что означает изменение на π фазы вектора E_{10} по отношению к вектору E_{00} , тогда как вектора H_{10} и H_{00} колеблются на границе раздела синфазно.

Если $n_1 > n_2$, то знаки E_{10} и E_{00} совпадают (вектора колеблются синфазно), а вектора H_{10} и H_{00} отличаются по фазе на π .

В оптике вышеизложенное правило формулируется как потеря полуволны ($\frac{\lambda}{2}$) при отражении электромагнитного поля от оптически более плотной среды.

Что касается поля, проходящего во вторую среду, то оно всегда остаётся синфазным с падающим на границу электромагнитным полем. Это правило остаётся справедливым для любых углов падения электромагнитного поля на границу раздела двух сред.

Для металлов (проводящих сред) коэффициент отражения R при нормальном падении на него электромагнитного поля равен

$$R = \frac{(n-1)^2 + n\chi^2}{(n+1)^2 + n\chi^2}. \quad (2.3.10)$$

2.4 Многослойные покрытия

Формулы Френеля определяют коэффициенты r, t, R и T для заданной границы двух сред. Однако и в оптике, и в радиофизике во многих задачах возникает необходимость управления (уменьшения или увеличения) этими коэффициентами для конкретно выбранного элемента. Рассмотрим, например, задачу уменьшения R . В радиофизике это задача разработки невидимого в электромагнитном поле предмета. В оптике такая задача возникает при «просветлении» оптических элементов. С учётом того, что и в микроволновом, и в оптическом диапазонах переход электромагнитных волн из одной среды в другую определяется одинаковыми граничными условиями для векторов электрического и магнитного поля, рассмотрим увеличение и уменьшение R на примере «просветления» оптического элемента.

Задача 1: две полубесконечные диэлектрические среды, одна из которых – оптический элемент с показателем преломления $n_s = \sqrt{\epsilon_s}$, другая – среда, в которой находится этот элемент, с показателем преломления $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$. Их разделяет диэлектрическая плёнка конечной толщины d с показателем преломления $n_{nl} = \sqrt{\epsilon_{nl}}$, в результате чего образуются две границы раздела τ_1 и τ_2 , как это показано на рис. 10 (а). Магнитные проницаемости всех трёх сред равны единице. Будем считать, что $n_0 < n_{nl} < n_s$.

На эту систему падает ТЕМ электромагнитная волна (как на рис. 8, а). Необходимо определить коэффициенты R и T для этого случая и сравнить их с R и T для границы двух сред. Рассмотрим граничные условия на τ_1 и τ_2 со стороны плёнки. Имеем (подробный вывод приводимых ниже соотношений проделать на практике):

$$\begin{aligned} \tau_1 \rightarrow E_{\tau_1} &= A - B, \quad H_{\tau_1} = n_{nl}(A + B); \\ \tau_2 \rightarrow E_{\tau_2} &= A \exp(-ik_0 n_{nl} d) - B \exp(ik_0 n_{nl} d); \\ H_{\tau_2} &= n_{nl} [A \exp(-ik_0 n_{nl} d) + B \exp(ik_0 n_{nl} d)], \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где A и B - амплитуды электромагнитного поля внутри плёнки, а $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Исключая A и B в (2.4.1), можно записать связь полей на границах плёнки в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} E_{\tau_1} \\ H_{\tau_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos} k_0 n_{nl} d, \frac{i}{n_{nl}} \text{Sin} k_0 n_{nl} d \\ i n_{nl} \text{Sin} k_0 n_{nl} d, \text{Cos} k_0 n_{nl} d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\tau_2} \\ H_{\tau_2} \end{bmatrix} = [M_{nl}] \begin{bmatrix} E_{\tau_2} \\ H_{\tau_2} \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

Матрица M_{nl} является характеристической матрицей плёнки. Это унимодулярная матрица, детерминант которой равен единице (это свойство является результатом сохранения энергии).

Запишем граничные условия на границах плёнки в следующем виде:

$$E_{\tau_1} = E_i + E_r, \quad E_{\tau_2} = E_t, \quad H_{\tau_1} = n_0(E_0 - E_r), \quad H_{\tau_2} = n_s E_t, \quad (2.4.3)$$

где E_i, E_r и E_t - соответственно амплитуды падающего, отражённого и прошедшего электромагнитных полей. Подставив (2.4.3) в (2.4.2), можно получить соотношение для коэффициента T ($T = tt^*$, где $t = \frac{E_t}{E_i}$):

$$T = \frac{4n_s}{(1 + n_s)^2 + (n_{nl} - 1) \left[1 - \left(\frac{n_s}{n_{nl}} \right)^2 \right] \text{Sin}^2 k_0 n_{nl} d}. \quad (2.4.4)$$

При исследовании соотношения (2.4.4) на \max ($R \rightarrow \min$) получаем соотношения, называемые критериями «просветления», а именно:

$$n_{nl} = \sqrt{n_s}, \quad n_{nl} d_{nl} = \frac{\lambda_0}{4}. \quad (2.4.5)$$

Другими словами, оптический элемент с нанесённой на него плёнкой, удовлетворяющей условиям (2.4.5), будет идеально прозрачным ($R=0$).

Однако на практике абсолютного просветления с помощью одной плёнки достичь не удаётся (можно добиться лишь хорошего приближения к нему), хотя бы потому, что критерий (2.4.5), по которому выбираются параметры плёнки, сформулирован для одной длины волны λ_0 , в то время как реальный источник испускает определённый спектр $\Delta\lambda$.

Задача 2: Многослойные покрытия (оптика)

Две полубесконечные среды с показателями преломления n_0 и n_s разделены набором чередующихся плёнок конечной толщины с показателями преломления n_l (низкий) и n_h (высокий) ($n_h > n_l$), как это показано на рис.10.

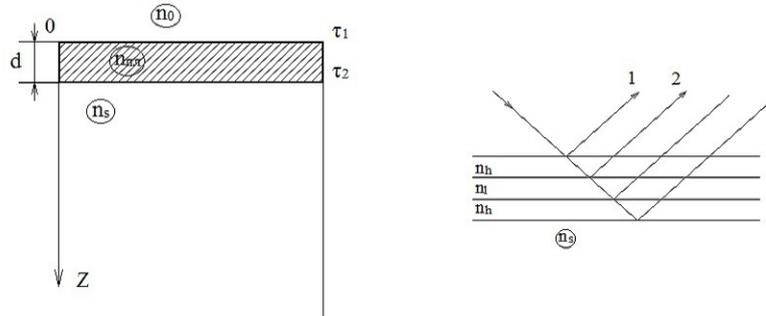


Рис. 10 Схематическое изображение конфигурации многослойного покрытия

Толщины этих плёнок определены из условия:

$$n_h d_h = \frac{\lambda_0}{4} \text{ и } n_l d_l = \frac{\lambda_0}{4}, \quad (2.4.6)$$

где λ_0 - длина волны, соответствующая максимуму в контуре спектральной линии $\Delta\lambda$.

Примечание: Выбор $\frac{\lambda_0}{4}$ как оптимальной толщины для плёнок может быть легко объяснён (смотри рис. 10). Если два последующих отражения являются отражениями разного типа, то два отражённых луча имеют разность хода $2nd + \frac{\lambda_0}{2}$. Чтобы отражённые лучи создавали интерференционную картину, требуется выполнение условия $nd = \frac{\lambda_0}{4}$.

Необходимо определить коэффициенты R и T для случая падения ТЕМ-волны на эту систему.

Пусть количество чередующихся плёнок равно p . Используя понятие характеристической матрицы из (2.4.2), можно записать соотношения между полями со стороны плёнок следующим образом:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = [M_1] \times [M_2] \times \dots \times [M_p] \times \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix} \equiv [M] \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}, \text{ где } [M] = \prod_{i=1}^p [M_i]. \quad (2.4.7)$$

Примечание: матричное произведение (2.4.7) не коммутативно. Произведение следует брать в той последовательности, в которой падающая волна падает на плёнки. Матрица $[M]$ всегда унимодулярная матрица. Выберем следующую последовательность плёнок: слои начинаются с плёнки с показателем преломления n_h (haut-высокое), чередуясь с плёнками с показателем преломления

n_l (low-низкий), и заканчиваются на детали n_s той же плёнкой с n_h (можно рассматривать и обратный случай, практика). Если воспользоваться матрицей плёнки из выражения (2.4.2), то для высокой и низкой плёнок можно записать:

$$M_h = \begin{bmatrix} 0, \frac{i}{n_h} \\ in_h, 0 \end{bmatrix} \text{ и } M_l = \begin{bmatrix} 0, \frac{i}{n_l} \\ in_{l,0} \end{bmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Если ввести понятие периода p в чередовании пленок (высокий – низкий), то для p -периодов (или $2p$ –плёнок) будем иметь:

$$M_{p(2p\text{-плёнок})} = \begin{bmatrix} (-\frac{n_l}{n_h})^p, 0 \\ 0, (\frac{n_h}{n_l})^p \end{bmatrix}. \quad (2.4.9)$$

Для $2p+1$ -плёнок имеем:

$$M_{(2p+1\text{плёнок})} = \begin{bmatrix} 0, (-\frac{n_l}{n_h})^p \cdot \frac{i}{n_h} \\ (-\frac{n_h}{n_l})^p \cdot in_h, 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.10)$$

Далее, рассмотрим коэффициент отражения R ($R = rr^*$, где $r = \frac{E_r}{E_i}$). Продолав соответствующие выкладки, можно получить:

а) случай $2p$ -плёнок (со стороны 1-ой среды с n_0 в многослойной структуре первой рассматривается плёнка с n_h , а на детали с n_s располагается плёнка с n_l):

$$R_{2p} = \left[\frac{1 - (\frac{n_s}{n_0})(\frac{n_h}{n_l})^{2p}}{1 + (\frac{n_s}{n_0})(\frac{n_h}{n_l})^{2p}} \right]^2; \quad (2.4.11)$$

б) случай $2p+1$ -плёнок (со стороны 1-ой среды с n_0 в многослойной структуре первой рассматривается плёнка с n_h , и на детали с n_s также располагается плёнка с n_h):

$$R_{2p+1} = \left[\frac{1 - (\frac{n_h}{n_l})^{2p} (\frac{n_h^2}{n_0 n_s})}{1 + (\frac{n_s}{n_l})^{2p} (\frac{n_h^2}{n_0 n_s})} \right]^2. \quad (2.4.12)$$

Коэффициент пропускания системы определяется как $T=1-R$.

Оценка R и T в видимом диапазоне длин волн, в котором используются плёнки ZnS с $n_h = 2,3$ и MgF_2 с $n_l = 1,39$, для оптического элемента с $n_s = 1,5$ даёт следующее:

-
Число плёнок 1 2 3 11

-
 T 0,693 0,619 0,340 0,0069

R 0,307 0,381 0,660 0,9931

Многослойные покрытия могут, как показывают эти оценки, делать поверхности элементов зеркальными. Именно такие покрытия позволили создать многие оптические элементы лазерной оптики. Для «просветления» детали с n_s (энергетический коэффициент отражения R от неё стремится к 0) рассматривается случай многослойной структуры количеством $2P+1$ -плёнок, в которой первая со стороны 1-ой среды и последняя плёнка на детали с n_s должны иметь n_l (выражение для R (или T), подобное (2.4.12), получить самостоятельно на практике).

Задача 3. Просветление (согласование) в радиофизике

В радиофизическом диапазоне частот «просветление» (согласование) рассматривается, в отличие от оптических задач 1 и 2, с учётом поляризации (ТЕ и ТМ) подающих под произвольным углом электромагнитных волн. Условия «просветления» для выбранной поляризации выражаются через поверхностные импедансы (2.2.7)-(2.2.10) (эти задачи рассматриваются на практических занятиях). Дальнейшее развитие физики и технологии «просветления» (согласования) на сегодняшний день, кроме многослойных покрытий, связано с разработкой и созданием искусственных материальных сред с заданными электромагнитными свойствами (метаматериалы, фотонные кристаллы). Здесь будет рассмотрена задача согласования с помощью среды с предельной анизотропией (смотри раздел 1.8.3 «Анизотропные среды»).

Интересующий нас класс диэлектриков с предельной оптической анизотропией может быть описан тензором диэлектрической проницаемости следующего вида:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2.4.13)$$

Бесконечное значение, появившееся в (2.4.14), не должно трактоваться как что-то исключительное и необычное. Соответствующие материальные уравнения записываются следующим образом: $E_x = 0, D_y = \varepsilon E_y, D_z = \varepsilon E_z$. Это фактически означает, что данная среда является идеально проводящей вдоль оси. Последний факт даёт подсказку о том, как искусственно создать среду с предельной оптической анизотропией. Массив параллельных металлических проводов, известный как среда из проводов [34], обеспечивает предельную оптическую анизотропию на частотах вплоть до инфракрасной области спектра.

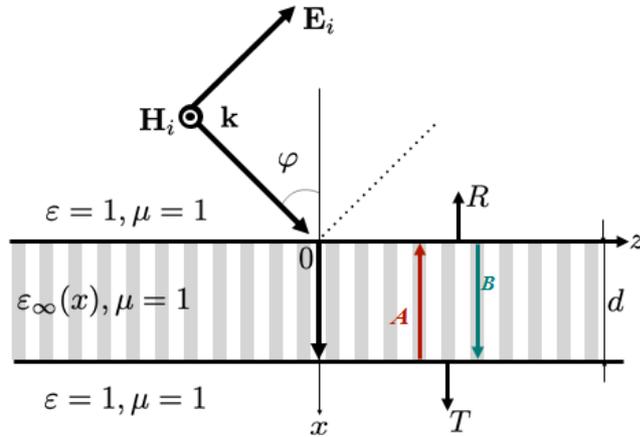


Рис. 11 Слой среды с предельной оптической анизотропией

На рис. 11 представлен слой такой среды толщиной d с предельной оптической анизотропией в направлении, перпендикулярном её поверхности (ось X), который возбуждается p -поляризованной электромагнитной волной с тангенциальной компонентой волнового вектора k_t .

В слое d рассматривается распространение необыкновенной волны. Пусть временная зависимость этой волны имеет вид $\exp(-i\omega t)$, тогда полное магнитное поле может быть записано в виде:

$$H(x) = H_i = \begin{cases} e^{i\sqrt{k^2-k_t^2}x} + \text{Re}e^{-i\sqrt{k^2-k_t^2}x}, & x < 0 \\ Ae^{i\sqrt{\varepsilon k}x} + Be^{-i\sqrt{\varepsilon k}x}, & 0 \leq x \leq d \\ Te^{i\sqrt{k^2-k_t^2}(x-d)}, & x > d \end{cases}, \quad (2.4.14)$$

где x - координата вдоль оси анизотропии, k - волновое число в свободном пространстве, H_i - амплитуда падающей волны, R, T - соответственно коэффициенты отражения и прохождения, A, B - амплитуды волн внутри слоя, распространяющихся в прямом и обратном направлениях соответственно.

Значения этих коэффициентов могут быть получены из граничных условий в следующем виде (смотри практику):

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{1-\frac{k_t^2}{k^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{1-\frac{k_t^2}{k^2}}\right)/D; \\ B &= 2\sqrt{1-\frac{k_t^2}{k^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{1-\frac{k_t^2}{k^2}}\right) \cdot \exp(2i\sqrt{\varepsilon k}d)/D; \\ R &= (\exp 2i\sqrt{\varepsilon k}d - 1)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \left[1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right]\right)/D; \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$T = 4\sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \exp i\sqrt{\varepsilon kd} / D;$$

$$D = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k^2}}\right)^2 \cdot \exp 2i\sqrt{\varepsilon kd}.$$

Если толщина слоя d удовлетворяет условию $\sqrt{\varepsilon kd} = n\pi$ (резонанс Фабри-Перо), то тогда:

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k^2}}) \quad B = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k^2}}) \quad R = 0, T = (-1)^n. \quad (2.4.16)$$

Очевидно, что при этом условии слой работает как идеальное передающее устройство, т.е. без отражений он передает распределение поля с одной поверхности слоя на другую. Это необычное свойство полного согласования объясняется тем, что необыкновенные волны среды с предельной оптической анизотропией не испытывают дифракции: они распространяются в направлении анизотропии с фиксированной фазовой скоростью (смотри раздел 1.8.3 пособия «Анизотропные среды») независимо от тангенциальной составляющей их волновых векторов. Таким образом, результат $R=0$ (выражение (2.4.16)) получается при любом угле падения волны φ . Полученный результат будет наблюдаться при толщине слоя d , равной любому целому числу полудлин волн.

В видимом диапазоне спектра подобная задача может быть решена, если одной из возможных альтернатив такой среды будет рассматриваться слоистая металлодиэлектрическая структура, которая будет иметь эффективную диэлектрическую проницаемость вида (2.4.14), если параметры будут выбраны определенным образом.

(Более подробно о взаимодействии электромагнитных полей с искусственными средами и их перспективами в современных задачах оптики и радиофизики читатель может ознакомиться по материалам монографии [28])

2.5 Полное внутреннее отражение (ПВО). Эванесцентные поля

В разделе 1.4.2 при анализе углового спектрального распределения электромагнитных полей было введено понятие эванесцентного поля, затухающего при распространении в направлении, которое определяется мнимой компонентой волнового вектора.

Эванесцентные поля никогда не возникают в однородной среде, а всегда связаны с взаимодействием электромагнитного поля с неоднородностями. Простейший пример неоднородности – плоская граница раздела двух сред. Обратимся к рис. 12, на котором приведён случай, позволяющий анализировать эванесцентные поля на примере явления полного внутреннего отражения.

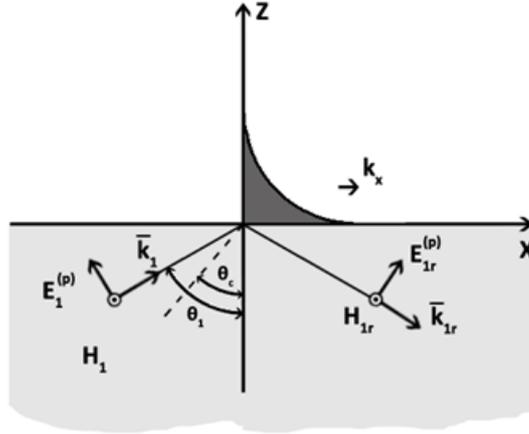


Рис. 12 Возбуждение эванесцентного поля при помощи полного внутреннего отражения

Используя переменные, введённые в разделе 2.3, комплексный вектор прошедшей волны запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 & -E_1^{(p)} t^p(k_x) \frac{k_{z2}}{k_2}; \\
 & E_1^{(s)} t^s(k_x) \times \exp i(k_x x + k_{z2} z); \\
 & E_1^{(p)} t^p(k_x) \frac{k_x}{k_2}.
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Выражения (2.5.1) могут быть записаны исключительно через угол падения θ_1 с использованием соотношения $k_x = k_1 \sin(\theta_1)$. Подставив указанное соотношение в основное уравнение, получим выражения для продольных волновых векторов (смотри (2.3.1)):

$$k_{z1} = k_1 \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)}, \quad k_{z2} = k_2 \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta_1)}. \tag{2.5.2}$$

Здесь введён нормированный показатель преломления:

$$n = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}. \tag{2.5.3}$$

Для $n > 1$ с увеличением θ_1 подкоренное выражение в формуле для k_{z2} становится всё меньше и меньше и в итоге обращается в отрицательную величину. Критический угол θ_c может быть определён при помощи соотношения:

$$[1 - n^2 \sin^2 \theta_1] = 0, \tag{2.5.4}$$

которое описывает отражённую плоскую волну с нулевым волновым вектором в направлении $z (k_{z2} = 0)$. Следовательно, отражённая плоская волна распространяется параллельно поверхности. Рассматривая (2.5.4) как уравнение для θ , получим:

$$\theta_c = \arcsin \frac{1}{n}. \tag{2.5.5.}$$

Для углов $\theta_1 > \theta_c$ величина k_{z2} становится мнимой. Записывая прошедшее поле как функцию угла падения θ_1 (смотри практику), получим:

$$\begin{aligned} & -iE_1^{(p)}t^p(\theta_1)\sqrt{(n^2\text{Sin}^2\theta_1-1)}; \\ E_1^{(s)}t^s(\theta_1) \times \exp(i\text{sin}\theta_1k_1x)\exp-\gamma z; \\ & E_1^{(p)}t^p(\theta_1)n\text{Sin}\theta_1, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где показатель затухания волны γ определяется как

$$\gamma = k_2\sqrt{n^2\text{Sin}^2\theta_1-1}, \quad (2.5.7).$$

Соотношения (2.5.6) и (2.5.7) описывают поле, распространяющееся вдоль поверхности раздела по оси X с фазовой скоростью $V_{\phi x} = V_2/\text{Sin}\varphi_2$ (V_2 - скорость распространения электромагнитного поля во второй среде), но затухающее экспоненциально при распространении вглубь среды (по оси Z), как это показано на рис. 11. Если рассматривать перенос энергии электромагнитного поля через границу двух сред в случае ПВО (Рис. 12), то он будет определяться усреднённой во времени составляющей вектора Умнова-Пойнтинга вдоль оси X - $\langle \vec{S} \rangle_x$. С учётом выражений (2.5.6) и (2.5.7) эта составляющая определяется следующим соотношением:

$$\langle \vec{S} \rangle_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mu_1\mu_2}} \text{Sin}\vartheta \left(|t^s|^2 |\vec{E}_1^s|^2 + |t^p|^2 |\vec{E}_1^p|^2 \right) \cdot \exp(-i\gamma z). \quad (2.5.8)$$

Отметим, что коэффициенты Френеля (оптический вариант), зависящие от θ_1 , при $\theta_1 > \theta_c$ становятся мнимыми величинами, и, следовательно, фазовые компоненты отражённой и прошедшей волн сдвинуты относительно друг друга. Для p -поляризованного излучения этот фазовый сдвиг приводит к возникновению эллиптически поляризованного эванесцентного поля с волновым вектором, вращающимся в плоскости падения (смотри практику).

2.6 Нарушенное полное внутреннее отражение (НПВО)

В разделе, который был посвящен плоским электромагнитным волнам, уже отмечалось, что наиболее полную информацию об источнике поля можно получить только с учётом эванесцентных полей. Но для этого необходимо преобразование затухающего эванесцентного поля в распространяющееся в дальнюю зону излучение. Возможность такого преобразования впервые была рассмотрена Вольфом [27] на примере взаимодействия эванесцентного поля с веществом. Рассмотрим это преобразование на простой модели, носящей название нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО). Геометрия этой модели показана на рис. 12.

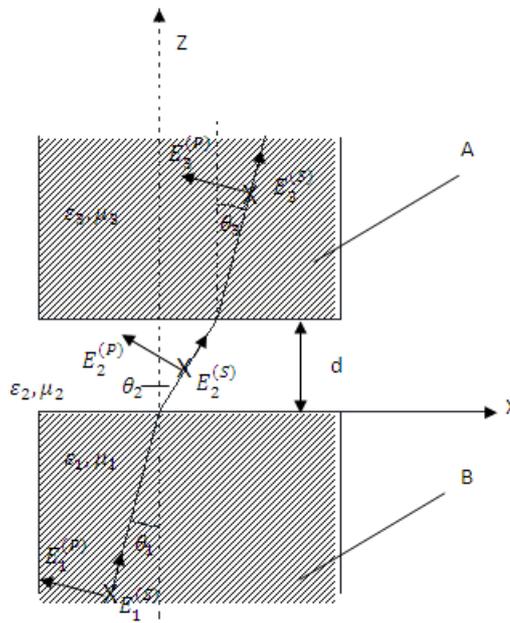


Рис. 13 Модель нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО)

Плоская электромагнитная волна проходит из среды 1 в среду 3 через систему двух параллельных поверхностей В и А. На поверхности В возникают эванесцентные поля благодаря ПВО. Поверхность А расположена на расстоянии d , находящегося в пределах характерной длины затухания эванесцентных полей. Поля, относящиеся к средам 1 и 2, представлены в виде суперпозиции падающей и отражённой волн (эти волны на рис. 13 опущены для ясности самого рисунка). В среде 3 наблюдается только прошедшая волна. Характер распространения всех этих волн в каждой из трёх сред (т.е. являются они эванесцентными или распространяющимися) может быть задан посредством продольного волнового вектора, задаваемого в каждой среде по аналогии с выражением (2.5.2). Продольный волновой вектор в среде с номером j имеет вид:

$$k_{zj} = k_j \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_j}\right)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.6.1)$$

где $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \left(\frac{\omega}{c}\right)$. Рассмотрим частный случай слоистой системы (рис.12) с показателями преломления $n_2 < n_3 < n_1$. Такие условия приводят к возникновению трёх режимов (по углу падения), в которых прошедшее излучение (его интенсивность) в зависимости от величины зазора d демонстрирует различное поведение.

1. Для $\theta_1 < \arcsin(n_2/n_1)$ или $k_1 \sin \theta_1 < n_2 k_0$ поле в любой среде представляет собой распространяющиеся плоские волны. Интенсивность, регистрируемая детектором, расположенным в третьей среде вдали от границы (дальнее поле), в

этом случае существенно не меняется с изменением величины зазора d , а будет слегка промоделирована интерференционными колебаниями (Рис.13 кривая (а)).

2. Для случая $\text{arcSin}(n_2/n_1) < \theta_1 < \text{arcSin}(n_3/n_1)$ или $n_2 k_0 < k_1 \text{Sin} \theta_1 < n_3 k_0$ поле, относящееся к среде 2, будет затухающим, но в среде 3 — распространяющимся. Интенсивность, регистрируемая детектором, резко падает с увеличением зазора d . Этот случай носит название **нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО)** (Рис.14, кривая (б)).

3. Для $\theta_1 > \text{arcSin}(n_3/n_1)$ или $k_1 \text{Sin} \theta_1 > n_3 k_0$ волны в средах 2 и 3 являются эванесцентными, и в этом случае детектор в среде 3 не получит никакого сигнала.

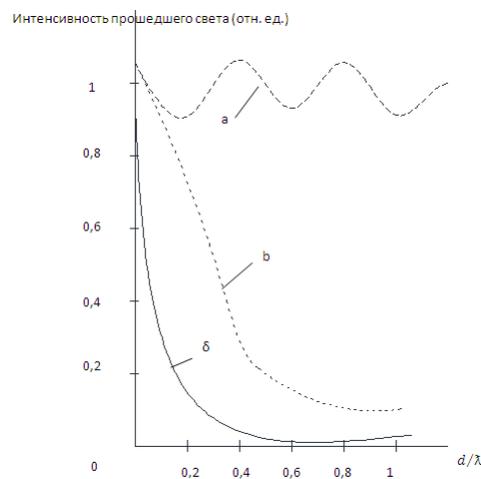


Рис. 14 Прохождение излучения через систему трёх сред, как функция от d между границами. В системе возбуждаются р-поляризованные волны.

$$n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1,51.$$

Если выбирать величину θ_1 из пункта 2, чтобы получить НПВО, то прошедшая волна с интенсивностью, как функцией от d , будет иметь выраженную спадающую зависимость для эванесцентных волн в среде 2. Однако, как показано ниже на рис. 14 (этот рисунок взят в качестве примера НПВО из [15]), эта зависимость отклоняется от чисто экспоненциального режима.

Такие параметры означают, что критические углы θ_c составляют 30° и $49,25^\circ$. Для углов падения между 0° и 30° , кривая (а) — зависимость интенсивности от величины зазора имеет вид, характерный для интерференционной кривой (здесь $\theta_1 = 0^\circ$, кривая штрих-пунктирная); 30° и $49,25^\circ$ (б) — прохождение излучения монотонно спадает с увеличением ширины зазора d (здесь $\theta_1 = 35^\circ$, сплошная кривая); (в) — интенсивность эванесцентного поля в отсутствии третьей среды. В

радиофизике преобразование эванесцентных мод в распространяющиеся поля и передача изображений без потери информации на расстояния больше длины волны (практически на любые расстояния) осуществляется с помощью принципа **канализования** изображений [34].

3.КАНАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1 Двухплоскостной и прямоугольный волноводы

Формулы Френеля, наряду с граничными условиями для различных сред, позволяют рассмотреть задачи по созданию систем, предназначенных для канализации электромагнитного поля. В радиофизическом диапазоне частот в таких системах используют металлические плоскости различных конфигураций. В оптическом диапазоне предпочтение отдаётся диэлектрикам и полупроводникам. Рассмотрим вначале поля, возникающие у металлической плоскости при падении на неё плоской электромагнитной волны. Анализ этого простого случая облегчит понимание более сложных процессов, происходящих в реальных системах, предназначенных для локализации электромагнитного поля и направления его в желаемую сторону. Покажем далее, что между двумя металлическими плоскостями возможно распространение электромагнитной энергии, и определим условия, при которых это происходит. В падающей электромагнитной волне произвольное поле \vec{E} можно представить суперпозицией двух крайних случаев: $\vec{E} = \vec{E}^{(p)} + \vec{E}^{(s)}$ (смотри формулы Френеля). Для этого обратимся к рис. 15 (задача одной металлической плоскости).

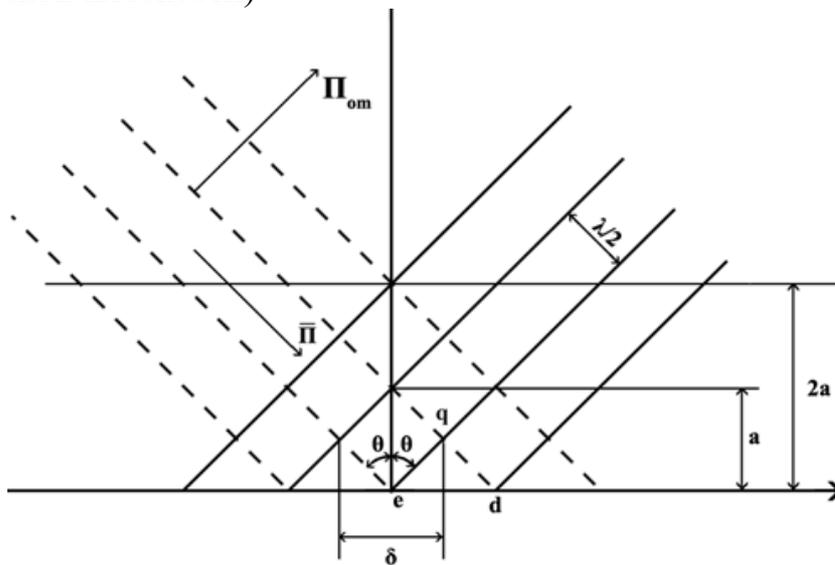


Рис. 15 Распространение электромагнитного поля вдоль идеальной металлической плоскости и двухплоскостного волновода

Рассмотрим случай $\vec{E}^{(p)}$ (вектор лежит в плоскости падения). Зададимся направлением вектора Умова-Пойнтинга \vec{E} падающей волны \vec{P} , тогда фронт падающей волны (сплошные линии на рис. 13) будет нормален к \vec{P} .

Условимся, что каждая сплошная линия сдвинута по отношению к соседней на расстояние, равное половине длины волны. Падающая волна, достигнув металлической плоскости, вызывает отражённую волну, фронт которой распространяется в направлении вектора Пойнтинга отражённой волны \vec{P}_{om} . Направление векторов \vec{E}_{om} и \vec{H}_{om} определяется из граничных условий и направления \vec{P}_{om} . Из рис. 14 следует, что

$$ed = \frac{gd}{\sin\theta} = \frac{cdt}{\sin\theta}, c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}. \quad (3.1.1)$$

Отношение $\frac{ed}{dt} = V_\phi$ - скорость распространения волнового фронта (точек одинаковой фазы) вдоль границы раздела. Из рис. 15 видно, что поле \vec{E} , перемещающееся вдоль границы раздела, обладает только поперечными по отношению к направлению перемещения составляющими магнитного поля \vec{H} . Электрическое поле \vec{E} , помимо поперечной, обладает продольной составляющей, совпадающей по направлению с вектором фазовой скорости. Подобную волну называют волной электрического типа – ТЕ-волной. Аналогично можно рассмотреть другой тип волны – волны магнитного типа – ТМ-волны (на рис. 15 надо рассматривать случай). На основании этого материала рассмотрим задачу двухплоскостного волновода. Для этого поместим над металлической пластиной из идеального металла вторую бесконечную плоскость из идеального металла таким образом, чтобы не нарушить имеющейся на первой пластине картины поля. Для этого вторая плоскость должна размещаться на расстояниях $l=na$, $n=1,2,3,\dots$. При этом условии поле будет подходить к металлическим плоскостям нормально. Граничные условия будут соблюдены, и картина поля между двумя плоскостями будет такой же, как и в случае одной плоскости. С учётом рис. 12 расстояния между плоскостями будет определяться как

$$l = na = n \frac{\lambda}{2 \cos\theta}, n = 1, 2, 3, \dots. \quad (3.1.2)$$

Очевидно, что минимальное расстояние, при котором возможно существование волны с $n=1$, равно $l_1 = 1 \cdot \frac{\lambda}{2}$, с $n=2$ равно $l_2 = \lambda$ (рис. 15). Условие, при котором $\frac{\lambda}{2} < l < \lambda$, является условием единственности волны с $n=1$. Очевидно, что введение второй плоскости позволяет ещё более ограничить электромагнитное поле в пространстве. Однако система из двух бесконечных плоскостей физически нереальна. Реальными системами канализации электромагнитного поля в радиофизическом диапазоне являются металлические прямоугольные или круглые

волноводы. Рассмотрим общий подход к анализу металлических волноводов (пример прямоугольного волновода на рис. 16).

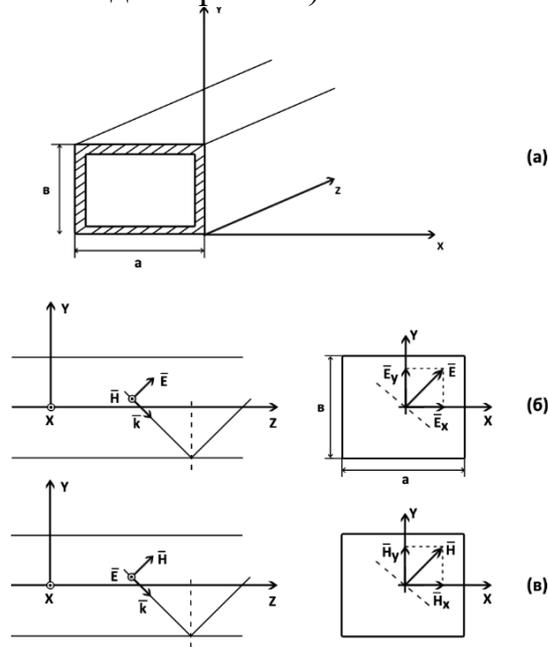


Рис.16. К анализу прямоугольного идеального металлического волновода

- (а) -геометрия волновода;**
- (б) -случай ТМ (Р-поляризация)—волны;**
- (в) -случай ТЕ (S-поляризация)—волны;**

Для этого введём в описание электромагнитного поля этой геометрии волновода обобщённые координаты q_1, q_2, q_3 :

$$\vec{E} = E_{q_1} \vec{e}_{q_1} + E_{q_2} \vec{e}_{q_2} + E_{q_3} \vec{e}_{q_3}; \quad (3.1.3)$$

$$\vec{H} = H_{q_1} \vec{e}_{q_1} + H_{q_2} \vec{e}_{q_2} + H_{q_3} \vec{e}_{q_3}. \quad (3.1.4)$$

Определение составляющих полей (3.1.3) и (3.1.4) в волноводе осуществляется отдельно для случаев ТЕ- и ТМ-волн (Рис.7) по следующему алгоритму: **ТМ-(электрическая) волна (Р – поляризация).**

Записывается уравнение для определения продольной составляющей электрического поля E_{q_3} . В обобщённых координатах оно запишется как

$$\frac{\partial^2 E_{q_3}}{\partial q_3^2} + \frac{1}{H_2 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial E_{q_3}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial E_{q_3}}{\partial q_2} \right) \right\} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a E_{q_3} = 0. \quad (3.1.5)$$

Это уравнение решается методом разделения переменных (методом Фурье), а именно:

$$E_{q_3} = U(q_3) E_{O3}(q_1, q_2). \quad (3.1.6)$$

Подстановка (3.1.5) в (3.1.6) в конечном результате даёт два уравнения:

$$\frac{1}{U(q_3)} \frac{\partial^2 U(q_3)}{\partial q_3^2} + \gamma^2 = 0; \quad (3.1.7)$$

$$\frac{1}{E_{03}} \frac{1}{H_1 H_2} \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial E_{03}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial E_{03}}{\partial q_2} \right) \right] + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \gamma^2 = 0. \right. \quad (3.1.8)$$

В этих уравнениях: γ - коэффициент распространения поля в волноводе или, другими словами, **продольное волновое число**; выражение $\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \gamma^2 = g^2$ называют **поперечным волновым числом**.

Далее определяются остальные составляющие поля ТМ-волны $E_{q1}, E_{q2}, H_{q1}, H_{q2}$, как функции от E_{03} (смотри таблицу 1):

Таблица 1

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad E_{q1} &= -i \frac{\gamma}{H_{q1} g^2} \cdot \frac{\partial E_{03}}{\partial q_1} \cdot \exp - i \gamma q_3; \\ \text{(б)} \quad E_{q2} &= -i \frac{\gamma}{H_{q2} g^2} \cdot \frac{\partial E_{03}}{\partial q_2} \cdot \exp - i \gamma q_3; \\ \text{(в)} \quad E_{q3} &= E_{03} \cdot \exp - i \gamma q_3; \\ \text{(г)} \quad H_{q1} &= \frac{\omega \varepsilon_a}{H_{q2} g^2} \cdot \frac{\partial E_{03}}{\partial q_2} \cdot \exp - i \gamma q_3; \\ \text{(д)} \quad H_{q2} &= i \frac{\omega \varepsilon_a}{H_{q1}} \cdot \frac{\partial E_{03}}{\partial q_1} \cdot \exp - i \gamma q_3; \\ \text{(е)} \quad H_{q3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Фазовая скорость электромагнитного поля в волноводе, определяемого составляющими (3.1.9, а)-(3.1.9, е), будет определяться как

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a}}}. \quad (3.1.10)$$

Для конкретно выбранной геометрии волновода, например прямоугольной (переход от q_1, q_2, q_3 к x, y, z), выражение (3.1.6) будет иметь вид [21]:

$$E_{q3} \equiv E_z = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \exp - i \gamma z. \quad (3.1.11)$$

Составляющие поля ТМ-волны E_x, E_y, H_x, H_y , как функции E_z , приведены в [21].

$$V_{зр.волн.} = c \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2} \rightarrow V_\phi V_{зр.волн.} = c^2. \quad (3.1.12)$$

Критическая частота (частота отсечки) из формулы (3.3.10):

$$\omega_k = c g_{mn} = \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}. \quad (3.1.13)$$

Если $\omega > \omega_k$, волны распространяются в волноводе; если $\omega < \omega_k$, волны не распространяются в волноводе.

Критическая длина волны:

$$\lambda_K = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}. \quad (3.1.14)$$

При исследовании волноводов вводится понятие волн основных типов. Под основным типом волны понимают колебание, у которого критическая длина волны имеет наибольшее значение. Для прямоугольного волновода ТМ-волной является E_{11} .

ТЕ-(магнитная) волна (S-поляризация)

Уравнение для определения продольной составляющей магнитного поля H_{q_3} будет иметь вид, который аналогичен (3.1.5):

$$\frac{\partial^2 H_{q_3}}{\partial q_3^2} + \frac{1}{H_2 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_{q_3}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_{q_3}}{\partial q_2} \right) \right\} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a H_{q_3} = 0. \quad (3.1.15)$$

В уравнении (3.3.8) разделение переменных (метод Фурье) аналогично (3.1.6):

$$H_{q_3} = U(q_3) \cdot H_{03}(q_1, q_2).$$

Решив уравнение (3.1.15) относительно H_{q_3} (это решение будет аналогично (3.1.9, в)) через компоненту $\exp(-i\gamma q_3)$, мы можем определить остальные составляющие поля ТЕ-волны и основные характеристики этой волны в волноводе (смотри таблицу 2 из [3]).

Таблица 2

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad H_{q_3} &= H_{03} \cdot \exp(-i\gamma q_3); \\ \text{(б)} \quad H_{q_2} &= -i \frac{\gamma}{H_2 g^2} \cdot \frac{\partial H_{03}}{\partial q_2} \cdot \exp(-i\gamma q_3); \\ \text{(в)} \quad H_{q_1} &= -i \frac{\gamma}{H_1 g^2} \cdot \frac{\partial H_{03}}{\partial q_1} \cdot \exp(-i\gamma q_3); \\ \text{(г)} \quad E_{q_3} &= 0; \\ \text{(д)} \quad E_{q_2} &= i \frac{\omega \mu_a}{H_1 g^2} \cdot \frac{\partial H_{03}}{\partial q_1} \cdot \exp(-i\gamma q_3); \\ \text{(е)} \quad E_{q_1} &= -i \frac{\omega \mu_a}{H_2 g^2} \cdot \frac{\partial H_{03}}{\partial q_2} \cdot \exp(-i\gamma q_3). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Для прямоугольного волновода решение уравнения (3.1.15) будет иметь вид [21]:

$$H_z = C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \exp(-i\gamma z). \quad (3.1.17)$$

Составляющие поля ТЕ-волны H_x , H_y , E_x , E_y , как функции H_z , определяются самостоятельно с использованием таблицы 2.

Для ТЕ-волн основной волной прямоугольного волновода будет волна H_{10} (смотри [21] и практику) с $\lambda_{кр}(H_{10}) = 2a$.

3.2. Цилиндрический металлический волновод

Анализ основных характеристик цилиндрического металлического волновода проводится по тому же алгоритму, что и для прямоугольного волновода, а именно:

исходное уравнение:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{H}) + k^2 \vec{E}(\vec{H}) = 0, \quad (3.2.1)$$

в котором $q_1, q_2, q_3 \rightarrow r, \phi, z$.

Получаем:

$$\nabla_{\perp}^2(r, \phi) \vec{E}_{0z} + \frac{\partial^2 \vec{E}_{0z}}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{E}_{0z} = h^2 - h^2 = 0. \quad (3.2.2)$$

Далее, метод Фурье:

$$\vec{E}_{0z} = Z(z) \cdot \vec{E}_z(r, \phi). \quad (3.2.3)$$

Получаем следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + h^2 Z = 0 \text{ с решением } Z(z) = \text{Const} \cdot \exp-ihz. \quad (3.2.4)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \phi} \right) \right] + g^2 \vec{E}_z = 0, \quad (3.2.5)$$

где $g^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - h^2$ (случай ТМ-волны).

Аналогичное уравнение можно получить для компоненты поля \vec{H}_z (случай ТЕ-волны).

Далее будем рассматривать случай ТМ-волны (уравнение (3.2.5)). Для него будем использовать метод Фурье:

$$\vec{E}_z = R(r) \cdot \Phi(\phi). \quad (3.2.4)$$

Подставляя (3.2.4) в уравнение (3.2.5), получаем следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + m^2 \Phi = 0 \text{ с решением } \Phi(z) = A_1 \text{Cos}(m\phi) + A_2 \text{Sin}(m\phi); \quad (3.2.6)$$

$$\frac{d^2 R}{d(gr)^2} + \frac{1}{gr} \frac{dR}{d(gr)} + \left(1 - \frac{m^2}{(gr)^2}\right) R = 0. \quad (3.2.7)$$

Уравнение (3.2.7) является уравнением Бесселя [2]. Общее решение этого уравнения:

$$R(r) = B_1 J_m(gr) + B_2 N_m(gr), \quad (3.2.8)$$

где $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$ - функции Бесселя соответственно 1-ого и 2-ого рода.

Исходя из физических соображений, окончательно имеем:

$$E_z = Const \cdot J_m(gr) \cos(m\varphi) \cdot \exp-ihz. \quad (3.2.9)$$

Проведя аналогичные операции для определения H_z (случай ТЕ-волны), эту компоненту можно записать как

$$H_z = Const \cdot J_m(gr) \cos(m\varphi) \cdot \exp-ihz. \quad (3.2.10)$$

ТМ (E_{mn}) – волны.

Далее, используя выражения (3.1.9, а)-(3.1.9, е), можно получить окончательные выражения для составляющих электромагнитного поля ТМ-волны ($E_r, E_\varphi, H_r, H_\varphi, H_z = 0$) в цилиндрическом металлическом волноводе (самостоятельно с использованием таблицы 1). Основным типом колебаний этой волны будет волна E_{01} . Её определение производится с помощью граничных условий для компоненты поля, которая на стенках волновода должна равняться нулю. Это возможно, если $J_m(gr) = 0$. Это условие определяет поперечное волновое число g как $g_{mn} = \frac{\eta_{mn}}{r_0}$ (r_0 - внутренний диаметр цилиндрического волновода, а η_{mn} - корни с номером n функции $J_m(gr)$). Значения этих корней можно найти в [2].

Основная ТМ-волна для цилиндрического волновода — волна E_{01} . Критическая длина волны E_{01} определяется как $\lambda_{kp}(E_{01}) = 2,61r_0$.

ТЕ (H_{mn}) – волны.

Для этого типа волн, используя (3.1.16, а)-(3.1.16, е), можно получить выражения для составляющих электромагнитного поля ТЕ-волны ($H_r, H_\varphi, E_r, E_\varphi, E_z = 0$) в цилиндрическом металлическом волноводе (самостоятельно с использованием таблицы 2). Для этого типа волн граничные условия у поверхности идеального металла имеют вид:

$$E_\varphi = 0 \text{ (при } r = r_0 \text{)} \text{ или } E_\varphi = i \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot Const \cdot gJ_m^1(gr) \cos(m\varphi) \cdot \exp-ihz, \quad (3.2.11)$$

где $J_m^1(gr)$ - производная от функции Бесселя.

$E_\varphi = 0$, если $J_m^1(gr_0) = 0$. Это условие определяет поперечное волновое число для ТЕ-волны как $g_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{r_0}$ (μ_{mn} - корни с номером n функции $J_m^1(gr_0)$). Значения этих корней можно найти в [2]).

Основной ТЕ-волной в цилиндрическом волноводе является волна H_{11} . Критическая длина волны H_{11} определяется как $\lambda_{kp}(H_{11}) = 3,41r_0$. Более полную информацию по анализу волноводов можно получить в [3,21].

3.3. Диэлектрическая пластина как волновод медленных волн

Как уже отмечалось выше, для систем канализации электромагнитного поля в оптическом диапазоне предпочтение отдаётся диэлектрикам и полупроводникам. Рассмотрим плоскую диэлектрическую пластину с параметрами μ_a, ε_a толщиной $2d$ в направлении координаты X , бесконечно протяжённую вдоль оси Y и Z (Рис. 16) и помещённую в воздухе.

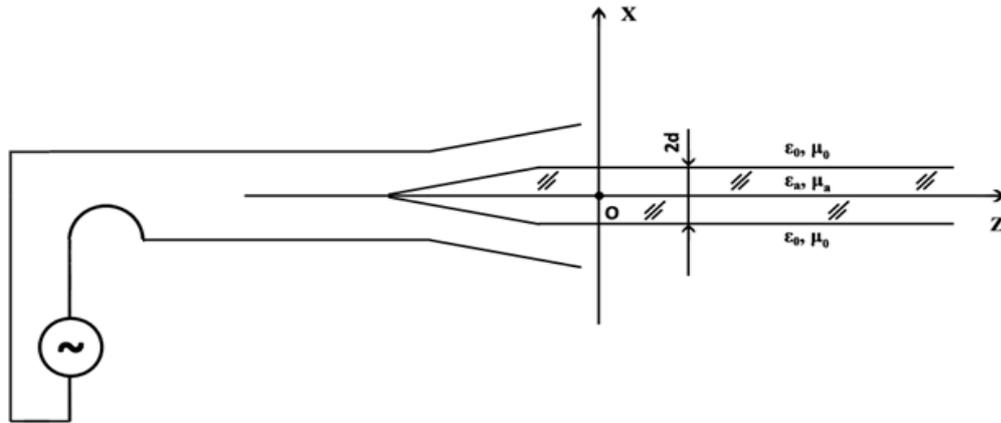


Рис. 17 Схема диэлектрической волноводной системы

Разумеется, такая система представляет собой идеализацию реальных волноводных систем, однако эта задача позволяет наглядно проследить процессы, происходящие в реальных диэлектрических волноводах (в оптике – световодах). Обратимся к рис. 17: при $Z < 0$ пластина обрывается и вводится в антенну, бесконечно протяжённую вдоль Y и создающую электромагнитное поле, излучаемое вдоль оси Z . В результате воздействия этого поля в пластине и вокруг неё создаётся волна, параметры которой необходимо определить. В антенне, где осуществляется возбуждение пластины, вектор Пойнтинга возбуждающего поля может иметь различное направление относительно нормали к пластине, совпадающей с осью X . Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью X , меньше угла полного внутреннего отражения, то волна, попавшая изнутри диэлектрика на границу раздела диэлектрик-воздух, преломится и выйдет в воздух. Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью X , равен или больше угла полного внутреннего отражения, то такая волна отразится от границы раздела с воздухом и, попав под тем же углом на другую границу раздела, вновь отразится от неё. Этот процесс будет продолжаться по мере продвижения волны вдоль оси Z . В результате в диэлектрической пластине возникает волна обычного волноводного типа, распространяющаяся в пластине с фазовой скоростью, превышающей скорость света в диэлектрике. Другими словами, в пластине будет распространяться быстрая волна. В соответствии с явлением полного внутреннего

отражения (смотри раздел 2.4) в воздухе у поверхностей пластины образуется волна, распространяющаяся вдоль Z , с фазовой скоростью, меньшей скорости света в воздухе.

(В разделе 2.5 эта скорость была определена как $V_{\phi x} = V_2 / \sin \varphi_2$. В этом выражении угол φ_2 больше предельного угла ПВО, т.е. $\sin \varphi_2 \geq 1$. Справедливость этого неравенства определяется φ_2 при ПВО как комплексного угла $\varphi_2^* = \frac{\pi}{2} + i\varphi_2$, для которого $\sin \varphi_2^* = ch \varphi_2$. Функция $ch \varphi_2$ (гиперболический косинус) может принимать любые значения от единицы и более)

Эту волну в теории и расчётах волноводных систем называют медленной волной. Обе волны (внутренняя и внешняя) образуют единое электромагнитное поле, распространяющееся вдоль оси Z с одной и той же фазовой скоростью V_ϕ , удовлетворяющей неравенству:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \angle V_\phi \angle c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (3.3.1).$$

Ранее были введены понятия поперечного g и продольного γ волновых чисел. Чтобы фазовая скорость стала меньше скорости света, для медленных волн поперечное волновое число должно быть мнимым. Другими словами, поперечное волновое число g в формуле (3.1.10) переходит в $g \rightarrow ip$ и соответственно $g^2 \rightarrow -p^2$. Фазовая скорость медленной волны будет определяться как

$$V_{\phi, \text{медл}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}}}. \quad (3.3.2)$$

Таким образом, условие существования единого электромагнитного поля, распространяющегося вдоль оси Z , запишется как

$$\sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - g^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + p^2}. \quad (3.3.3)$$

Очевидно, что диэлектрическая пластина способна канализировать электромагнитное поле в виде совокупности быстрых (внутренних) и медленных (внешних) волн. Расчёт характеристик такого волновода при заданных μ_a, ε_a его материала проводится по алгоритму, рассмотренному в разделе 3.1 с учётом наличия полей быстрых и медленных волн, а именно:

1) записываются уравнения для составляющих E_{q_3} и H_{q_3} быстрых и медленных волн ТМ (3.1.8) и ТЕ (3.1.15);

2) далее через полученные решения этих уравнений определяют соответствующие компоненты $(E_{q_3})_b, (H_{q_3})_b, (E_{q_3})_m, (H_{q_3})_m$ (использование таблиц 1 и 2 раздела 3.1);

3) выполнение граничных условий для границы воздух-диэлектрик и для компонент быстрых и медленных волн при условии равенства фазовых скоростей быстрой и медленной волн (отсутствие разрыва полей).

Выполнение этих трёх условий окончательно сводит определение основных характеристик такого волновода (основных типов колебаний) к решению двух трансцендентных уравнений для случая чётных и нечётных волн. Подробно весь этот материал изложен в [21].

В реальных задачах диэлектрический волновод выбирается цилиндрическим. Расчёт характеристик такого волновода проводится по вышеизложенному алгоритму расчёта диэлектрической пластины с учётом перехода от декартовой системы координат к цилиндрической системе (подробно эта задача изложена в [21]).

4. РЕЗОНАТОРЫ

В любом диапазоне шкалы электромагнитных волн важную роль играют резонансные системы, без которых невозможно формирование каналов передачи информации (радиоканалы, телеканалы и т.п.). Классической резонансной системой является хорошо известный колебательный контур. Однако, если при перемещении по шкале частот размеры колебательного контура становятся соизмеримыми с длиной волны порядка одного метра (что соответствует частотам $\approx 3 \cdot 10^8$ Гц), то контур с сосредоточенными параметрами (L, C, R) перестаёт быть колебательным контуром. Для частот радиофизического и оптического диапазонов требуется переход к резонаторным системам с распределёнными параметрами (L, C, R) – **объёмным резонаторам (ОР)**.

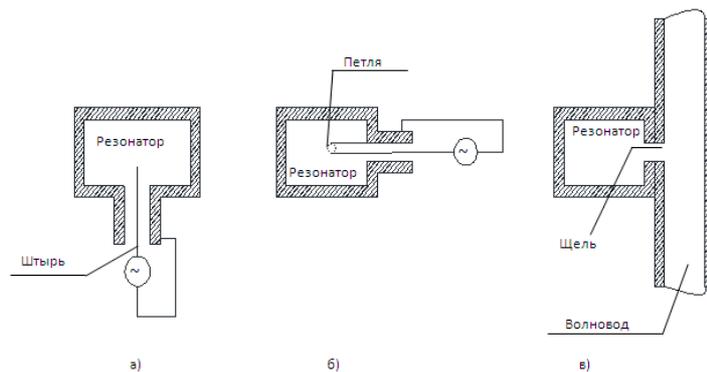


Рис. 18 Схема расположения элементов резонаторов различных конфигураций

Классическим примером такой системы в диапазоне длин волн вплоть до дециметров является замкнутая на конце длинная линия с длиной, равной четверти длины волны подводимого кабеля, которая эквивалентна параллельному

колебательному контуру. Однако понятие «длинная линия» справедливо до тех пор, пока поперечные размеры линии существенно меньше длины волны. Обычно в качестве длинных линий выбирают отрезки коаксиальных волноводов. В короткой части дециметрового диапазона и для сантиметровых длин волн используются резонаторы, созданные на базе волноводов различных сечений (прямоугольных, круглых). Отрезок волновода закрывают с двух сторон металлическими стенками, через отверстия в которых вводят штырь или петлю, как показано на рис. 18, а и б, с помощью которых в резонаторе возбуждается электромагнитное поле.

Возбуждение резонатора можно также осуществлять с помощью щелей, прорезанных на стенках резонатора и возбуждающего волновода (Рис. 18, в).

Электромагнитная волна, распространяющаяся в резонаторе, испытывает многократное отражение от стенок и при определённых фазовых соотношениях между падающими и отражёнными волнами в системе могут установиться незатухающие колебания.

При переходе к диапазонам миллиметровых и субмиллиметровых волн использование волноводов быстрых волн становится затруднительным, так как их поперечные размеры становятся весьма малы. При создании резонаторов в этих диапазонах длин волн применяют резонаторы медленных волн, которые представляют собой ограждённый с двух сторон металлическими пластинами (как показано на рис. 19 для случая круглого диэлектрического волновода) участок волновода медленных волн.

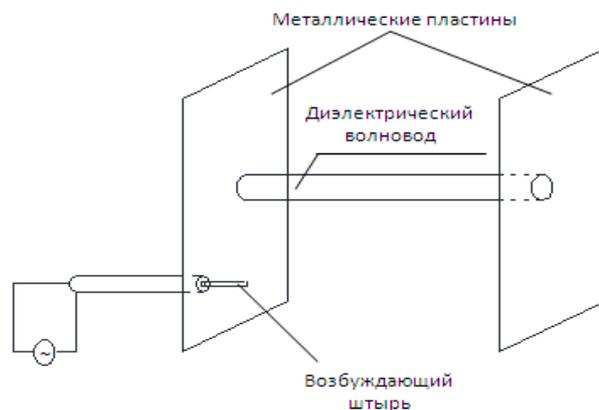


Рис. 19 Эскиз резонатора медленных волн

В диапазоне субмиллиметровых длин волн и в оптическом диапазоне находят применение объёмные резонаторы так называемого открытого типа, построенные по типу оптических интерферометров Фабри–Перро (смотри ниже раздел «Открытые резонаторы» этого пособия).

Далее будут кратко рассмотрены некоторые типы ОР (подробные сведения по теории, расчёту и анализу различных ОР можно найти в материалах [8,9,21]).

4.1. Объёмный резонатор на базе прямоугольного волновода

Рассмотрим отрезок прямоугольного металлического волновода из закрытого с двух сторон металлическими стенками идеального металла длиной l , внутренние размеры которого показаны на рис.1. Будем рассматривать случай ТЕ-волн. Выражения (3.1.6) характеризуют поле, движущееся в волноводе в сторону положительных значений оси Z . В данном объёмном резонаторе в результате отражения волны от стенки, закрывающей волновод, возникает электромагнитное поле, перемещающееся в обратном направлении в сторону отрицательных значений оси Z . Это поле записывается выражением (3.1.11) с заменой знака на обратный перед постоянной распространения. Суммарное поле по оси Z в резонаторе является суперпозицией прямой и отражённой волн. Выполнение граничных условий ($E_\tau=0$ для $Z=0, Z=L$) даёт следующее выражение для суммарного поля по оси Z :

$$E_{zp} = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \quad (4.1.1)$$

Как и в случае волновода, можно получить остальные составляющие поля в резонаторе $E_{xp}, E_{yp}, H_{xp}, H_{yp}$, выраженные через E_{zp} (смотри [21]). В отличие от волновода, поле в объёмном резонаторе представляет собой стоячие волны по всем трём координатным направлениям и определяется тремя индексами m, n и p . Волны резонатора электрического типа обозначаются E_{mnp} . Резонансные частоты для этих типов волн определяются из соотношения (3.1.12), связывающего продольное γ и поперечное g_{mn} . Волновые числа в волноводах определяются с той лишь разницей, что в задачах волноводов под частотой понимают частоту колебаний, подводимых к волноводу от генератора, а в объёмных резонаторах частоту ω заменяют резонансной частотой ω_p собственных колебаний в резонаторе. С учётом этого замечания выражение (3.1.12) будет иметь вид:

$$\gamma = \sqrt{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}. \quad (4.1.2)$$

Откуда нетрудно получить выражения для резонансной частоты ω_p и резонансной длины волны λ_p :

$$\omega_p = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2} \quad \text{и} \quad \lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (4.1.3)$$

Выражение (4.1.3) соответствует среде с параметрами μ_a, ε_a , заполняющей резонатор. Для ТЕ-волн наименьшими значениями индексов m, n и p являются $m=1, n=1, p=0$ и, соответственно, E_{110} является основным типом электрической волны. Для ТМ-волн такой волной будет волна H_{101} .

Такие прямоугольные металлические ОР простейшего типа широко применяются в СВЧ-технике. Здесь нужно отметить, что если у колебательного контура имеется только одна резонансная частота, то у любого объёмного резонатора их много (смотри выражение (4.1.3)). И чем больше размеры резонатора, тем их больше. Подтверждением этому служит известная формула Рэля-Джинса: $dN = \frac{4V}{c\lambda^2} d\omega$, где dN - число резонансных частот в полосе резонанса $d\omega$ резонатора, V - объём резонатора. Реальный резонатор обладает потерями (конечная проводимость металлических стенок, потери в реальных диэлектриках). В колебательных системах потери оценивают добротностью Q . Определение добротностей для волн электрического и магнитного типов волн металлических ОР подробно можно посмотреть в [21] на стр. 363—378. Здесь только можно отметить, что использование сверхпроводящих металлов и криогенной техники позволяет получать добротности таких резонаторов на уровне 10^4 - 10^5 .

Аналогичные рассуждения можно провести и относительно объёмного резонатора, создаваемого на базе цилиндрического металлического волновода (подробно все выкладки по этой задаче можно найти в [21]).

4.2. Объёмный диэлектрический резонатор

Как и в вышеуказанных типах объёмных резонаторов, работа диэлектрического резонатора основана на принципе объёмного резонанса электромагнитной волны внутри используемого образца диэлектрика. Идеальный объёмный диэлектрический резонатор представляет собой пространство, которое ограничено поверхностями, обеспечивающими полное отражение электромагнитных волн.

Для такого резонатора отражающей поверхностью является граница раздела воздуха и диэлектрика (или так называемые «магнитные» стенки»). Известно, что граница раздела диэлектрик-воздух отражает электромагнитные волны в случае, когда угол падения превышает критическое значение

$\varphi_k = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, где ε - относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика резонатора. Если диэлектрическая проницаемость образца велика, то электромагнитные поля резонансных частот (волн) в основном ограничены внутри образца и вне его границ уменьшаются до пренебрежимо малых величин на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны в свободном пространстве. Наличие внешнего поля является одной из особенностей диэлектрического резонатора, однако в первом приближении при больших значениях диэлектрической проницаемости образца можно считать, что граничные условия диэлектрического резонатора $\vec{n} \times \vec{H} = 0, \vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ являются дуальными по

отношению к граничным условиям полого металлического резонатора $\vec{n} \times \vec{E} = 0, \vec{n} \cdot \vec{H} = 0$.

Соотношения для составляющих электромагнитного поля в диэлектрических СВЧ-резонаторах получают также решением уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях (подробно с этими решениями можно ознакомиться, например, в монографиях [29,30]).

Диэлектрический резонатор в установившемся режиме вынужденных колебаний можно рассматривать как колебательную систему, обладающую запасом энергии $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}^2 dV$. Добротность такой системы определяется в виде

$Q = \frac{\omega W}{P_p}$, где P_p — мощность, рассеиваемая в колебательной системе. При большой

диэлектрической проницаемости электромагнитные поля, в основном ограниченные внутри диэлектрического резонатора и вблизи его границ на расстояниях, которые малы по сравнению с длиной волны в свободном пространстве, затухают до пренебрежимо малых величин. Поэтому собственная добротность в основном определяется лишь потерями в диэлектрике. Электрические потери в диэлектрике вычисляются по формуле:

$$P_n = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_V \epsilon^* \vec{E}^2 dV,$$

где ϵ^* — мнимая часть диэлектрической проницаемости образца. При пренебрежении потерями, обусловленными внешними СВЧ-цепями (система возбуждения), собственная добротность диэлектрического резонатора в первом приближении может быть выражена как $Q = \frac{\epsilon}{\epsilon^*} = \frac{1}{\text{tg}\Delta}$ ($\text{tg}\Delta$ -тангенс угла потерь).

Поскольку типичное значение $\text{tg}\Delta$ для применяемых в настоящее время материалов составляет $10^{-3} - 10^{-4}$, то собственная добротность диэлектрического резонатора при комнатных температурах достигает значений 10^4 . В отдельных случаях при температуре жидкого гелия удается получить собственную добротность порядка $10^5 - 10^6$.

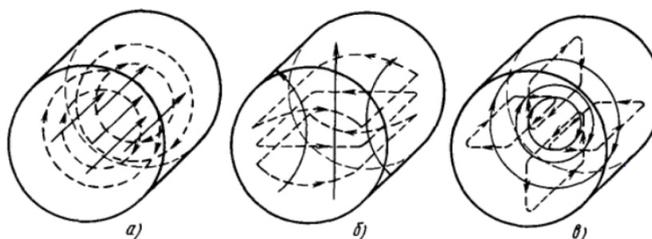


Рис. 19 Распределение электромагнитного поля свободных колебаний в ЦДР:
а)- E_{010} , **б)-** H_{111} , **в)-** H_{011} ; пунктирные линии-линии вектора H
 непрерывные линии-линии вектора E

В данном пособии не приводится подробный вывод выражений для составляющих поля электрического и магнитного типов диэлектрического цилиндрического резонатора. Такая задача может быть предложена студентам в качестве домашней контрольной работы (для этого можно рекомендовать монографию [29]). Что касается конечных выражений для определения резонансных частот цилиндрического диэлектрического объемного резонатора, то они выглядят следующим образом:

а) для волн E -типа:
$$\omega_p = c \sqrt{\left[\frac{p\pi}{l}\right]^2 + \left[\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right]^2};$$

б) для волн H-типа:
$$\omega_p = c \sqrt{\left[\frac{p\pi}{l}\right]^2 + \left[\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right]^2},$$

где l – длина резонатора, r_0 – радиус резонатора, η_{mn}, μ_{mn} – корни соответственно функций Бесселя и её производной (m - порядок функции, n - порядковый номер корня).

На рис. 19 приведены распределения электрических и магнитных полей основных колебаний цилиндрического диэлектрического резонатора (ЦДР).

4.3. Открытый (оптический) резонатор (ОР)

Как уже отмечалось, объёмные резонаторы становятся малопригодными в миллиметровом и более коротких оптических диапазонах, поскольку эти устройства становятся слишком миниатюрными и имеют очень большие потери для основных типов колебаний. Наиболее эффективными в этом диапазоне длин волн оказались открытые «квазиодномерные» резонаторы, размеры которых достаточно велики в одном избранном направлении (условно ось Z) и малыми по двум другим (оси X и Y). Они создаются на базе типичных оптических элементов, таких как зеркала (плоские, сферические, асферические), линзы, плоскопараллельные пластины (прозрачные, полупрозрачные, отражающие). Как показали Фокс и Ли [25], в таких резонаторах только моды, распространяющиеся в направлении оси Z , обладают большой добротностью, а остальные быстро затухают благодаря сильному росту дифракционных потерь на зеркалах конечной апертуры (плоскость X, Y). Однако одного такого подхода оказывается недостаточно, т.к., как показывает анализ (смотри [5,8]), последняя мода играет более существенную роль, чем в задачах обычной волновой оптики.

Кроме этого, в открытых резонаторах формирование основных мод связано не только с дифракционными потерями, но и потерями на излучение в открытое боковое пространство. Минимизация этих потерь может быть достигнута с использованием следующих физических явлений:

- а) удерживающего влияния краёв элементов, образующих систему открытого резонатора, или аналогичных неоднородностей;
- б) образования каустик (каустических поверхностей);
- в) сильного отражения от границы двух сред или от более сложных слоистых структур (например, от многослойных отражающих покрытий).

Первое явление имеет место в открытых резонаторах Фабри-Перо (открытые резонаторы с плоскими зеркалами). Что касается второго явления, то оно наблюдается в открытых резонаторах, образованных сферическими или асферическими зеркалами. При определённом соотношении радиусов кривизны зеркал резонатора R и расстояния между ними L (база резонатора) некоторые лучи становятся самосопряжёнными, многократно повторяя один и тот же путь в резонаторе. Эти лучи и образуют каустик, в объёме которой формируются основные типы колебаний. Поверхность каустики является своеобразной стенкой, через которую поле резонатора не просачивается наружу, вследствие чего радиационные потери основных типов колебаний открытого резонатора весьма малы, а потери на джоулево тепло в таких «стенках» отсутствуют. Можно отметить, что в открытых резонаторах с выраженной каустикой формируются Гауссовы пучки (подробный материал обо всём этом можно найти в монографии [1]).

Третье явление присутствует в первых двух. Оно характерно и для волноводов, и для резонаторов. В этих структурах могут возникать полное (пример ПВО) и неполное отражения. Надо иметь в виду, что при анализе задач волноводов и резонаторов приходится иметь дело сразу с двумя или тремя из перечисленных явлений, из которых одно является главным. Выделение этого главного позволяет составить физическую картину процессов в выбранной системе и даёт основу для количественных расчётов. Рассмотрим всё вышесказанное на примере открытого резонатора, образованного двумя плоскими безразмерными диэлектрическими пластинами, имеющими коэффициенты отражения ρ и пропускания τ (по амплитуде) соответственно. Такой резонатор в оптике носит название классического интерферометра Фабри-Перо. Возбуждение этого резонатора будем осуществлять падающей на одну из его пластин под углом φ_1 плоской электромагнитной волной. Необходимо определить, прежде всего, резонансные частоты такого резонатора (резонансы Фабри-Перо). При небольших углах падения φ_1 (в пределах 10^0 - 10^5) поляризация возбуждающей волны (ТЕ или ТМ) не играет роли в количественной оценке коэффициентов ρ и τ (смотри формулы Френеля). В этом приближении анализ открытого резонатора сводится к задаче, известной в оптике как задача многолучевой интерференции (многолучевой интерферометр, смотри [11]), схема которой представлена на рис. 20.

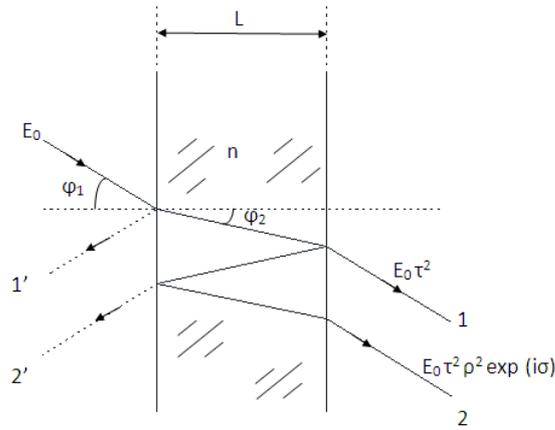


Рис. 20 Принцип работы открытого резонатора для задачи многолучевой интерференции

Проходящие лучи 1; 2... и отражённые лучи 1'; 2'..., образованные при многократных отражениях от поверхностей диэлектрических пластин, складываются между собой, образуя многолучевую интерференционную картину отражённого и проходящего электромагнитного поля. Рассмотрим результат этого сложения в проходящем поле. Разность фаз между двумя соседними интерферирующими лучами в этом случае составляет:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2nl \cos \varphi_2 \equiv \frac{4\pi}{\lambda} l \cos \varphi_2, \quad (4.3.1)$$

где λ - длина волны в среде интерферометра Фабри-Перо. Если учесть эту разность введением соответствующего множителя $\exp i\delta$ в выражения для амплитуд напряженности электрического поля, то амплитуда прошедшего поля E_{20} , как сумма ряда N интерферирующих лучей, будет определена как

$$E_{20} = E_{00} \tau^2 \frac{1 - \rho^{2N} \exp(iN\delta)}{1 - \rho^2 \exp(i\delta)}, \quad (4.3.2)$$

где E_{00} - амплитуда электромагнитного поля, возбуждающего интерферометр. В пределе $N \rightarrow \infty$ и $\rho < 1$ для этого случая выражение (4.3.2) может быть представлено как

$$\frac{E_{20}}{E_{00}} = \frac{T}{1 - R \exp(i\delta)}, \quad (4.3.3)$$

где $R = \tau^2$, $T = \tau^2$ - соответственно энергетические коэффициенты отражения и пропускания. Выражение (4.3.3), умноженное на сопряжённую величину $(\frac{E_{20}}{E_{00}})^*$, позволяет определить интенсивность прошедшего через пластину электромагнитного поля:

$$\frac{I_{np}}{I_{пад}} = \left(\frac{E_{20}}{E_{00}}\right)\left(\frac{E_{20}}{E_{00}}\right)^* = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\text{Sin}^2(\delta/2)}. \quad (4.3.4)$$

Это соотношение в оптике называют **формулой (функцией) Эйри**. График зависимости изменения $\frac{I_{np}}{I_{пад}}$ от δ (Рис. 21) имеет вид системы максимумов, форма которых существенно зависит от коэффициента отражения R (R в интерферометре Фабри-Перо определяет количество N интерферирующих пучков). Чем больше R , тем острее максимумы, разделённые широкими минимумами.

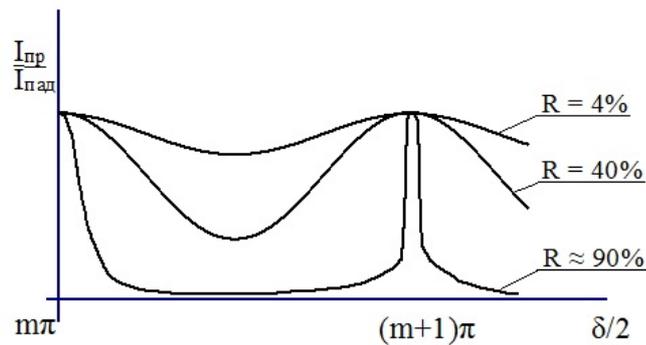


Рис. 21 Функция Эйри для материалов с различным коэффициентом отражения

Эти максимумы, которые называются резонансами Фабри-Перо, определяют резонансы в рассматриваемом открытом резонаторе из условия усиления интерферирующих лучей:

$$2l\text{Cos}\varphi_2 = m\lambda, \quad (4.3.5)$$

где l – база открытого резонатора. При возбуждении монохроматическим электромагнитным полем с длиной волны λ в открытом резонаторе будут наблюдаться резонансы Фабри-Перо, кратные $\lambda/2$ ($\lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$). Аналогично можно получить формулу Эйри для отражённого поля (сделать на практике). Она имеет вид:

$$\frac{I_{отп}}{I_{пад}} = \frac{4R\text{Sin}^2(\frac{\delta}{2})}{(1-R)^2 + 4R\text{Sin}^2(\frac{\delta}{2})}. \quad (4.3.6)$$

Если рассматривать возбуждение резонатора в широком диапазоне длин волн, то его база l в этом диапазоне будет определять ту область длин волн (частот), где в данном резонаторе будут наблюдаться резонансы Фабри-Перо. Эта

область носит название **области свободной дисперсии** и определяется следующим соотношением:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2l} \text{ или } \left(\frac{\lambda}{m}\right), \quad (4.3.7)$$

где m – порядок интерференции (смотри (4.3.5)).

Всё вышеизложенное рассматривается как оптическая задача (анализ отражения, преломления и интерференция). В современных научных публикациях для описания резонатора Фабри-Перо и в оптике, и радиофизике используют формализм матрицы рассеяния S .



Рис. 22 Схема оптического элемента, описываемого матрицей рассеяния

Если на анализируемую систему падают волны с амплитудами α_i , то в линейной системе они будут связаны с выходящими из системы после преломления и отражения волнами b_i соотношением:

$$b = S\alpha, \quad (4.3.8)$$

где S - матрица рассеяния, записанная как

$$S = \begin{bmatrix} |S_{11}| \exp(i\varphi_r) & \sqrt{1-|S_{11}|^2} \exp(i\varphi_t) \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2} \exp(i\varphi_r) & |S_{11}| \exp i(2\varphi_t - \pi - \varphi_r) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\rho & it \\ it & -\rho \end{bmatrix}. \quad (4.3.9)$$

В выражении (4.3.9) φ_r и φ_t - соответственно фазы отражённой и прошедшей волн, а ρ и t - соответственно амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Для описания преломления и отражения достаточно взять матрицу 2×2 :

$$b_1 = S_{11}\alpha_1 + S_{12}\alpha_2; \quad b_2 = S_{21}\alpha_1 + S_{22}\alpha_2. \quad (4.3.10)$$

В отсутствие потерь коэффициенты матрицы рассеяния связаны с энергетическими коэффициентами отражения $R = \rho\rho^*$ и пропускания $T = tt^*$ соотношениями:

$$R = |S_{11}|^2 = |S_{22}|^2; \quad T = |S_{12}|^2, R + T = 1. \quad (4.3.11)$$

В качестве примера можно обратиться к хорошо известной методике измерений материальных параметров вещества в микроволновом диапазоне – методике Никольсона-Росса-Вейра [24]. В основе этой методики лежит задача анализа характеристик интерферометра (резонатора) Фабри-Перо, заполненного веществом, диэлектрическую и магнитную проницаемости которого необходимо измерить в микроволновом диапазоне длин волн. Основными параметрами этого анализа являются импеданс Z на границах воздух-интерферометр с веществом и величины фаз δ отражённого и прошедшего электромагнитных полей (смотри рис. 20 и 22). Выражения параметров анализа приведены ниже:

$$Z = \sqrt{\frac{(1 + S_{11})^2 - S_{21}^2}{(1 - S_{11})^2 - S_{21}^2}}; \quad (4.3.12)$$

$$\exp \delta = \frac{1 - S_{11}^2 + S_{21}^2}{2S_{21}} + \frac{2S_{11}}{(Z - 1/Z)S_{21}}. \quad (4.3.13)$$

Выражение (4.3.13) носит название фазового фактора. S_{11} и S_{12} в этих формулах представляют собой амплитуды прошедшего и отражённого полей. Для случая прошедшего поля, если нормировать амплитуду возбуждающего резонатор поля E_{00} к единице, параметр $S_{21} \equiv E_{20}$. Аналогично можно получить, используя [11], $S_{11} = E_{10}$ (отражённое поле). Таким образом, измерив S_{21} и S_{11} , можно определить импеданс Z и фазу δ . В совокупности эти величины позволяют определить (экстрагировать) в рассматриваемой методике вещественную и мнимую части диэлектрической и магнитной проницаемостей исследуемого вещества (подробно смотреть в статье [24]).

Далее рассмотрим основные характеристики «квазиодномерных» открытых резонаторов на основе формул Эйри.

4.3.1. Собственные частоты

Из выражения (4.3.5) можно получить ($\cos \varphi_2 \approx 1$) **собственную частоту**, соответствующую значению фазы $\frac{\delta}{2} = m\pi$ (Рис.20):

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl}. \quad (4.3.14)$$

Интервал $\Delta\nu$ между следующей собственной частотой ν_{m+1} будет равен:

$$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nl}. \quad (4.3.15)$$

Таким образом, спектр собственных частот открытого резонатора является эквидистантным с интервалом между частотами, определяемыми только базой резонатора.

4.3.2. Добротность

Добротность открытого резонатора можно оценить, используя её определение $Q = \frac{\nu}{\Delta\nu}$ и формулу Эйри (выражение (4.3.4) и рис. 20).

На рис. 21 (случай $R \geq 90\%$) в фазовом пространстве представлены частотные контуры собственных частот открытого резонатора ν_m . Рассматривая этот контур на уровне 0,5 от максимума $\frac{I_{np}}{I_{nad}}$ и используя (4.3.3), можно получить выражение для $\Delta\nu$ в виде (подробно получить на практике):

$$\Delta v = \frac{1-R}{\sqrt{R}}. \quad (4.3.16)$$

Таким образом, с учётом выражений (4.3.14) и (4.3.16) получаем выражение для добротности открытого резонатора:

$$Q = \frac{\sqrt{R}}{1-R} kl. \quad (4.3.17)$$

Для $R \approx 96\%$ базы резонатора, $l \approx 1$ м и длине волны $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см $Q \approx 10^8$.

4.3.3. Моды открытого резонатора

В этом разделе кратко приводится решение задачи определения электромагнитных полей собственных мод открытого резонатора (Подробно эта задача разбирается, например, в материалах монографии [1]). Будем рассматривать открытый резонатор, образованный двумя сферическими зеркалами. В таком резонаторе, в отличие от классического резонатора Фабри-Перо, при определённых условиях (смотри ниже условие устойчивости) образуется устойчивая каустика. Поле резонатора будем определять через скалярный и векторный потенциалы (смотри раздел пособия 1.3.2). По отношению к оси Z выберем скалярный потенциал в виде:

$$\varphi = u(x, y, z) \cdot \exp ikz. \quad (4.3.18)$$

Этот потенциал должен удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (4.3.19)$$

Будем искать решение этого уравнения в параксиальном приближении, рассматривая $u(x, y, z)$ с медленно (в масштабе длины волны) изменяющейся функцией. Подставляя (4.3.18) в (4.3.19) и пренебрегая членом $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (метод медленных амплитуд), получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i2k \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.3.20)$$

Решением этого уравнения является сферическая волна $\frac{\exp(ikr)}{r}$.

В параксиальном приближении r можно разложить в ряд Тейлора и после некоторых преобразований получить функцию $u(x, y, z)$ в виде:

$$u_{00} = \frac{\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\pi}} e^{-i\phi} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R_\phi}}. \quad (4.3.21)$$

В этом выражении:

$$\omega^2(z) = \frac{2b}{k} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right), \quad R_\phi(z) = \frac{z^2 + b^2}{z}, \quad \text{tg} \phi = \frac{z}{b}. \quad (4.3.22)$$

Величина $R_\phi(z)$ описывает радиус кривизны фронта пучка, а ϕ - фаза этого фронта.

Функция (4.3.21) описывает распространение осесимметричного Гауссова пучка, приведённого на рис. 22.

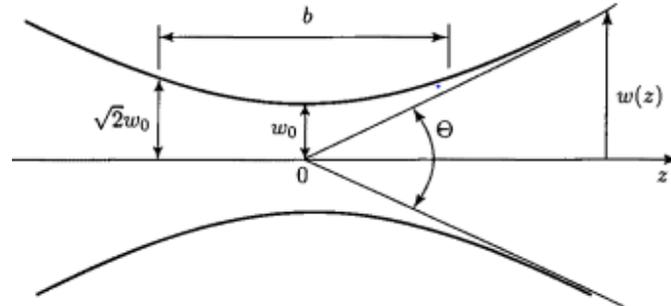


Рис. 23 Параметры Гауссова пучка

Гауссов пучок основной моды с радиусом перетяжки ω_0 асимптотически расширяется в виде конуса с углом раскрытия (Рис. 23):

$$\theta \approx \frac{\omega}{z} \approx \frac{\lambda}{\pi\omega_0}. \quad (4.3.23)$$

Для определения векторов электромагнитного поля и основной моды выбирается векторный потенциал в виде:

$$\vec{A} = \varphi(x, y, z) \cdot \vec{f} \equiv u_{00}(x, y, z) \cdot \exp(ikz) \cdot \vec{f}, \quad (4.3.24)$$

где функция u_{00} задаётся выражением (4.3.21) (параксиальное приближение).

Такое представление \vec{A} возможно только в ограниченном числе ортогональных координатных систем.

Для декартовой системы в качестве функции \vec{f} можно выбирать любой координатный орт $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$, для цилиндрической системы – $\vec{f} \equiv \vec{i}_z$ и для сферической симметрии – $\vec{f} \equiv \vec{r}$.

Зная φ и \vec{A} , можно получить выражения для векторов поля основной моды открытого резонатора в следующем виде (случай декартовой системы):

$$\mu_0 \vec{H} = \vec{\nabla} \times (\vec{i}_x \cdot \varphi) \equiv ik(u_{00} \vec{i}_y + \frac{i}{k} \frac{\partial u_{00}}{\partial y} \vec{i}_z); \quad (4.3.25)$$

$$\vec{E} = i\omega(u_{00} \vec{i}_x + \frac{i}{k} \frac{\partial u_{00}}{\partial y} \vec{i}_z). \quad (4.3.26)$$

Зная \vec{E} и \vec{H} , можно определить вектор Умова-Пойнтинга, определяющий плотность энергии электромагнитного поля в основной моде. Для резонатора лазера (активного резонатора Фабри-Перо) плотность энергии основной моды $\sim |\vec{E}_{00} \vec{E}_{00}^*|$ по отношению к плотности энергии возбуждения $\sim |\vec{E}_1 \vec{E}_1^*|$ можно определить как

$$\left| \bar{E}_{00} \bar{E}_{00}^* \right| = \frac{1}{1-R} \left| \bar{E}_1 \bar{E}_1^* \right|, \quad (4.3.27)$$

где R – коэффициент отражения зеркала. Для $R \geq 90\%$ это соотношение увеличивается больше, чем на порядок.

Кроме основной моды, параксиальное уравнение (4.3.24) может иметь решения, в которых нарушена осевая симметрия. Эти решения, в отличие от u_{00} , в декартовой системе описываются гаусс-эрмитовыми функциями:

$$u_{mn}(x, y, z) \sim H_m\left(\frac{x}{\omega_1}\right) \cdot H_n\left(\frac{y}{\omega_2}\right), \quad (4.3.28)$$

где H_m и H_n – полиномы Эрмита.

В цилиндрической симметрии:

$$u_{mn}(\rho, \varphi, z) \sim L_n^m\left(\frac{kbr^2}{b^2 + z^2}\right). \quad (4.3.29)$$

(Подробное описание этих мод можно найти в монографии [1]).

4.3.4. Устойчивость открытых резонаторов

Основная мода РФП представляет собой трёхмерную область самосопряжённых лучей. Именно наличие самосопряжённости определяет устойчивость каустики и достигается только при условии, когда радиусы кривизны фазовых фронтов $R\phi_1$ и $R\phi_2$ на поверхностях зеркал совпадают с радиусами кривизны самих зеркал. Если обратиться к рис.22 и ввести обозначения $g_1 = 1 - \frac{l}{R_{31}}$ и $g_2 = 1 - \frac{l}{R_{32}}$, то после цепочки преобразований (смотри практику) можно получить **условие устойчивости** (условие формирования устойчивых каустик в выбранной геометрии резонатора), а именно:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \quad (4.3.30)$$

Это условие в литературе представляется в виде графической диаграммы устойчивости Когельника [23], приведённой ниже на рис. 24 (На этом рисунке заштрихованные области – области устойчивых резонаторов).

Для основной моды РФП важными параметрами являются размеры сечений (пятен 0 каустики на поверхностях зеркал, образующих РФП. Они определены следующим образом:

$$\omega_{31} = \sqrt{\frac{\lambda l}{\pi}} \left(\frac{g_1}{g_2} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right)^{1/4}; \quad (4.3.31)$$

$$\omega_{32} = \sqrt{\frac{\lambda l}{\pi}} \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right)^{1/4}. \quad (4.3.32)$$

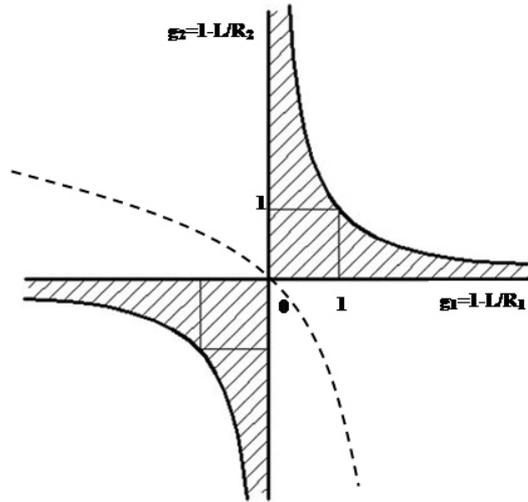


Рис. 24 Диаграмма устойчивости открытых резонаторов Когельника

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. Элементарный электрический вибратор (вибратор Герца)

В вышеизложенных разделах на базе уравнений Максвелла были рассмотрены свойства электромагнитных волн и их распространение в ограниченном и неограниченном пространствах. Однако в этих материалах нет ответа на вопрос, как генерируется это электромагнитное поле. В этом разделе мы начнём с анализа излучения электромагнитных волн элементарным электрическим вибратором или диполем (вибратором) Герца. Аналоги такого вибратора представлены на рис. 25. В задачах радиофизики это может быть прямолинейный отрезок провода, по которому протекает переменный электрический ток (Рис. 25, с) или устройство, приведённое на рис. 25 (а).

Это устройство состоит из двух коротких проводов, на концах которых расположены металлические шары, представляющие собой сосредоточенные ёмкости (Рис. 25, а).

В оптике диполь Герца эквивалентен дипольному моменту атома или молекулы (Рис. 25, б).

В основу определения электромагнитного поля вибратора Герца положим решение неоднородных уравнений Гельмгольца для электрического потенциала $\vec{A}_s(r)$ и скалярного потенциала $\varphi(r)$, через которые определяются вектора \vec{E} и \vec{H} , записанные в сферической системе координат (смотри рис. 25, в):

$$\nabla^2 \vec{A}(r) + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{A}(r) = \mu_a \vec{j}(r); \quad (5.1.1)$$

$$\nabla^2 \phi(r) + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_a}. \quad (5.1.2)$$

Частные решения этих неоднородных уравнений (при необходимости можно написать аналогичное уравнение для магнитного потенциала, используя метод перестановочной двойственности) ищутся с помощью формализма функций Грина (метод функций Грина [2,9,19,20]) для скалярного и векторного неоднородных уравнений Гельмгольца.

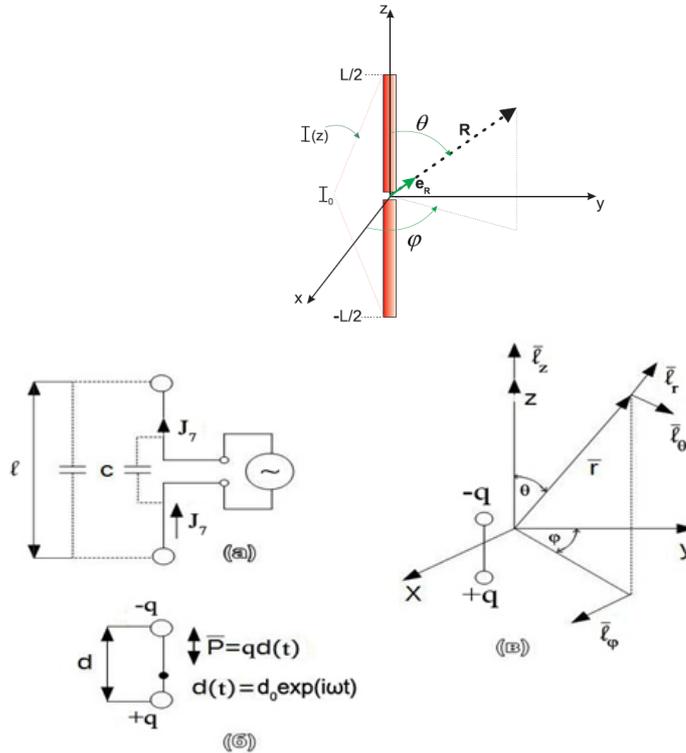


Рис. 25 Конфигурация и принцип работы диполя Герца и его аналогов

Функция Грина и её математический формализм (более подробно смотреть материалы практических занятий).

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение типа (5.1.1) или (5.1.2), записанное в операторном виде:

$$\hat{\mathcal{L}}A(r) = B(r). \quad (5.1.3)$$

Здесь $A(r)$ - функция, которую нужно найти; $B(r)$ - известная функция, которая называется **источником**; $\hat{\mathcal{L}}$ - линейный дифференциальный оператор.

Решением уравнения (5.1.3) является сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений. Обычно решение однородного уравнения известно, назовем его A_0 . Нужно найти частное решение неоднородного уравнения. Делается это следующим образом:

1. Вначале ищут решение более простого уравнения с правой частью в виде дельта функции:

$$\mathcal{E} \cdot G(r, r') = \delta(r - r'). \quad (5.1.4)$$

Это означает, что все источники (неоднородности) заменяются одной точкой, точечной неоднородностью, находящейся в точке r' . Решение этого специального неоднородного уравнения $G(r, r')$ и называется **функцией Грина**. Выражение этой функции зависит не только от радиус-вектора точки рассмотрения r , но и от положения неоднородности r' .

2. Зная функцию Грина, частное решение неоднородного уравнения можно получить в виде:

$$A(r) = \int G(r, r') B(r') dr'. \quad (5.1.5)$$

Таким образом, зная функцию Грина некоторого неоднородного уравнения, решение этого уравнения определяется в виде свёртки этой функции Грина с функцией источников в каждой точке пространства.

Функция Грина для скалярного неоднородного уравнения Гельмгольца (даётся без вывода, который можно посмотреть в [9]).

В свободном пространстве, когда нет других токов и зарядов, кроме $\vec{j}(r)$ и $\rho(r)$, правильное решение этих уравнений даёт функция Грина:

$$G_0(r, r') = \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}. \quad (5.1.6)$$

В соответствии с формализмом функции Грина (выражение (5.1.5)) частные решения уравнений (5.1.1) и (5.1.2) будут записаны как

$$\vec{A}(r) = \mu_0 \int_V \vec{j}(r') \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dr'; \quad (5.1.7)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_V \rho(r') \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dr'. \quad (5.1.8)$$

Функция Грина для векторного неоднородного уравнения Гельмгольца (без вывода).

Эта функция представляет собой **диадную** (определение **диады** или **тензора второго ранга** смотри в [2,9]) векторную функцию, которую можно представить следующим образом:

$$\mathcal{G}(r, r') = \left[\mathcal{E} + \frac{1}{k^2} \nabla \otimes \nabla \right] G_0(r, r'), \quad (5.1.9)$$

где $\nabla \otimes \nabla$ - диадное произведение векторного оператора Гельмгольца на самого себя (проделать самостоятельно), \mathcal{E} - единичная диада, $G_0(r, r')$ - функция Грина скалярного неоднородного уравнения Гельмгольца.

Через диадную функцию Грина можно получить частные решения уравнений (5.1.1) и (5.1.2) по (5.1.5), а потом можно получить выражения электромагнитного поля электрического вибратора Герца на расстоянии r от вибратора (Рис. 25, в):

$$\vec{E}(r) = i\omega\mu_0 \int_V \mathcal{G}(r, r') \vec{j}(r') dV ; \quad (5.1.10)$$

$$\vec{H}(r) = \int_V [\nabla \times \mathcal{G}(r, r')] \vec{j}(r') dV . \quad (5.1.11)$$

Полученные выражения играют важную роль в теории излучения электромагнитных волн. Для вибратора Герца выражения (5.1.10) и (5.1.11) можно представить однозначно для любого аналога (Рис. 25 а, б, с) через дипольный момент $\vec{p} = qd$ (Рис. 25, в).

Рассмотрим аналоги на рис. 21 (а) и (с). Провод с током J разбивают на элементы малой длины (Рис. 26).

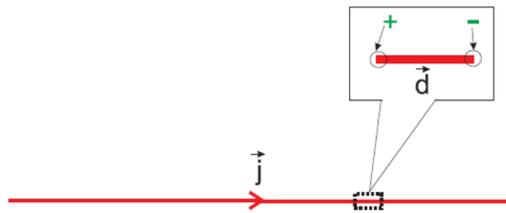


Рис.26 Разбиение тонкого линейного тока на элементы тока очень малой длины.

С левой стороны в этот элемент в какой-то момент времени втекает ток, а с правой стороны вытекает. В другой момент времени – наоборот. Точку, куда ток втекает, можно рассматривать как точечный положительный заряд $+q$, а точку, откуда он вытекает, соответственно как отрицательный $-q$. В целом, такую систему из двух зарядов, равных по величине, но разных по знаку, разнесенных на расстояние l , можно рассматривать как некоторый диполь с дипольным моментом $\vec{p} = qd$, где q - это заряд на концах этого малого участка провода. Заряды на концах этого элемента провода будут действительно одинаковыми, если этот элемент достаточно маленький. Ток этого точечного элемента тогда можно записать через дельта функцию и дипольный момент в виде:

$$\vec{j}(r, t) = \frac{d}{dt} \vec{p}(t) \delta|r - r_0|. \quad (5.1.12)$$

Для случая, когда $\vec{j}(t)$ меняется по гармоническому закону ($\exp i\omega t$), имеем:

$$\vec{j}(t) = i\omega \vec{p}(t) \delta|r - r_0|. \quad (5.1.13)$$

Теперь, так как у нас ток задан через дельта функцию, интегрирование в (5.1.10) и (5.1.11) выполняется легко, и получаются выражения электрического и магнитного полей точечного источника (вибратора Герца) в следующем виде:

$$\vec{E}(r) = \omega^2 \mu_0 \mathcal{G}(r, r_0) \vec{p}; \quad (5.1.14)$$

$$\vec{H}(r) = -i\omega [\nabla \times \mathcal{G}(r, r_0)] \vec{p}. \quad (5.1.15)$$

Если подставить диадную функцию Грина $\mathcal{G}(r, r')$ (выражение (5.1.9)) и ротор от этой функции в выражение (5.1.15) в сферической системе координат (Рис. 25, в) (подробно это представление сделать самостоятельно на практике) и рассматривать направление дипольного момента вдоль оси Z (Рис. 25, в), т.е. $\vec{p} = |\vec{p}| \vec{n}_z$, то в этой системе координат составляющие полей E_φ, H_r, H_θ равны нулю, а ненулевые компоненты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{p \cos \theta \exp(ikr)}{4\pi \varepsilon_a r} k^2 \left(\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right); \\ E_\theta &= \frac{p \sin \theta \exp(ikr)}{4\pi \varepsilon_a r} k^2 \left(\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right); \\ H_\varphi &= \frac{p \sin \theta \exp(ikr)}{4\pi \varepsilon_a r} k^2 \left(-\frac{i}{kr} - 1 \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_0}}. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Эти выражения позволяют определить такие важные понятия в теории излучения, как **ближняя, промежуточная и дальняя зоны излучения** электрического вибратора.

В среде, лишённой потерь, $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ (длина волны в среде). Из выражений (5.1.16) следует, что при

$$kr \leq 1 \quad \text{или} \quad r \leq \frac{\lambda}{2\pi} \quad (5.1.17)$$

выражения (5.1.16) для H_φ, E_r, E_θ упрощаются за счёт сомножителей в скобках и представляют поле статического диполя (Кулоновское поле).

Зону расстояний r , в пределах которой справедливо неравенство (5.1.17), называют **ближней зоной поля**.

Промежуточная или индукционная зона поля определяется из условия:

$$kr \approx 1 \quad \text{или} \quad r \approx \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (5.1.18)$$

Это приближение не позволяет провести какие-либо упрощения в формулах (5.1.16).

Наконец, расстояния r , для которых справедливы неравенства

$$k^2 r^2 \geq 1 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{2\pi} \geq 1, \quad (5.1.19)$$

определяют **дальнюю (волновую) зону** поля, в которой существуют только составляющие E_θ и H_φ (составляющей поля E_r можно пренебречь):

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta \exp(ikr)}{4\pi\epsilon_a r} k^2; \quad H_\varphi = \frac{p \sin \theta \exp(ikr)}{4\pi\epsilon_a r} k^2 \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_0}}. \quad (5.1.20)$$

Поле (5.1.20) называют **полем излучения** в окружающее пространство. Рассмотрим теперь такие важные характеристики точечного диполя, как диаграмма направленности, мощность его излучения и сопротивление излучения.

Диаграмма направленности.

Диаграмма направленности – это вещественная положительная функция, которая в выбранной системе координат совпадает с распределением вектора Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ в дальней зоне. Из (5.1.20) очевидно, что амплитуды E_θ и H_φ , определяющие модуль \vec{P} , существенно зависят от угла ψ , который является дополнительным к углу θ (смотри рис. 27).

Максимальное излучение вибратора наблюдается в направлении, перпендикулярном к дипольному моменту ($\psi=0$). При $\psi = \frac{\pi}{2}$ амплитуда волны обращается в нуль. Таким образом, осциллирующий диполь не излучает в направлении своей оси. Пространственное распределение излучения осциллятора представлено в виде диаграммы, приведённой на рис. 27.

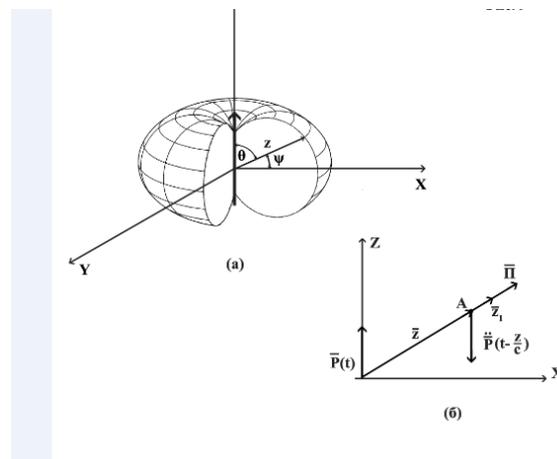


Рис. 27 Пространственное распределение излучения осциллятора

Мощность излучения.

Мощность излучения точечного диполя (Рис. 25, в) определяется с помощью вектора Пойнтинга $\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$, усреднённый во времени и пространстве. С учётом формул (5.1.20), сферической симметрии задачи в пространстве и квазимонохроматического приближения усреднение вектора Умова-Пойнтинга даёт окончательно следующее (подробно смотри практику):

$$N = \frac{\mu_0 \varepsilon \omega^4 p^2}{12\pi c^3} \text{ или через длину волны } \lambda: N = \frac{4}{3} \pi^3 c^3 \mu_0 \varepsilon \frac{p^2}{\lambda^4}. \quad (5.1.21)$$

Полученный результат очень важен и играет существенную роль в разнообразных приложениях. В качестве примера можно привести теорию рассеяния электромагнитных волн (короткие волны рассеиваются сильнее, чем длинные) или оценку времени жизни атома в рамках модели Томсона. Рассмотрим эту задачу, которая позволит сделать ряд важных для электродинамики выводов. Баланс энергии электрона, связанного в диполе (атоме) на рис. 25 (б) квазиупругими силами, и энергии, необходимой для излучения электромагнитного поля (5.1.21), позволяют сделать вывод о затухании колебаний диполя вследствие излучения. Амплитуда таких колебаний записывается как

$$E(t) = E_0 \exp - \alpha t. \quad (5.1.22)$$

Если теперь рассмотреть это выражение с учётом амплитуды поля в дальней зоне (5.1.20) и провести Фурье-преобразование от полученного соотношения $E(t) \rightarrow E(\omega)$, а потом домножить его на комплексное сопряжение, то получим функцию $J(\omega) = E(\omega)E^*(\omega)$, описывающую спектральный контур излучающего точечного диполя – одиночного атома, из которой можно получить ширину этого контура (практика):

$$\Delta\omega_{ест} = \frac{2e^2 \omega^2}{3m_e c^3}. \quad (5.1.23)$$

Для оптического диапазона частот, в котором излучателем электромагнитного поля является модель вибратора (рис. 25, б), $\Delta\omega_{ест}$ может меняться от единиц до десятков мегагерц.

Если перейти от $\Delta\omega$ к $\Delta\lambda$, то получается своего рода константа, называемая в оптике **естественной шириной линии излучения атома**:

$$\Delta\lambda_{ест} = \frac{4\pi e^2}{3m_e c^2} = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}. \quad (5.1.24)$$

Реальный источник электромагнитных волн в оптическом диапазоне (тепловой или лазерный) состоит из большого количества атомов, взаимодействие между которыми приводит к уширению спектра излучения такого источника по отношению к одиночному атому. Выделяют два основных контура: столкновительный (контур однородного уширения) и доплеровский контур (контур неоднородного уширения). Подробный анализ каждого из них можно посмотреть в учебнике [17]. Здесь приводятся окончательные выражения для этих контуров:

а) столкновительный контур: $\Delta\omega_{ст} = \sqrt{\frac{\pi \rho P}{MkT}} \approx 10^3 \Delta\omega_{ест}; \quad (5.1.25)$

б) доплеровский контур: $\Delta\omega_{Доп} = 2\omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{mc^2}} \ln 2 \approx (10^3 - 10^4) \Delta\omega_{ест}. \quad (5.1.26)$

Для лазерного источника в одномодовом режиме генерации $\Delta\omega_{лаз} \approx \Delta\omega_{ест}.$

На основании приведённой оценки этих контуров в оптическом диапазоне электромагнитных волн (10^{12} - 10^{17} Гц) и условия, заданного выражением, можно утверждать, что квазигармоническое приближение поля в этом диапазоне будет выполняться с высокой точностью.

Спектр излучения радиофизического элементарного вибратора (Рис. 25, а, с), который рассматривается как дипольный источник конечных размеров можно оценить с помощью резонансной кривой колебательного контура, эквивалентного этому вибратору, через его добротность (все подробности этого анализа можно найти в [3,11,21]). Её можно определить как

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}. \quad (5.1.27)$$

Для классических источников радиофизического диапазона (магнетроны, клистроны, высокочастотные диоды) добротность контуров не превышает 10^4 (для одиночного атома добротность составляет 10^7), т.е. для радиофизического диапазона, с учётом определения (1.6.7), квазигармоническое приближение электромагнитного поля излучения справедливо. Если рассматривать добротность с энергетической точки зрения, то она будет определяться как

$$Q = \frac{\langle W_{зан} \rangle}{N_n T}, \quad (5.1.28)$$

где $\langle W_{зан} \rangle$ - средняя энергия, запасённая в системе, а $N_n T$ - энергия, теряемая системой за один период. Таким образом, N_n представляет активную мощность, отдаваемую излучателем в пространство.

Эту мощность для схемы рис. 21 (а) и (с) можно записать в виде:

$$N_{изл} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\pi}{3} I_0^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \quad \text{или} \quad N_{изл} = \frac{|j_\vartheta|^2 R_{из}}{2}, \quad (5.1.29)$$

где $R_{из}$ называют **радиационным сопротивлением** излучения. Для произвольной среды (смотри практику) $R_{из}$ определяется как

$$R_{из} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \epsilon \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2. \quad (5.1.30)$$

Для вакуума (воздуха): $R_{из} = 789,59 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$.

5.2 Элементарный магнитный вибратор

Выше были определены электрическое и магнитное поля (выражения (5.1.16)) элементарного электрического вибратора (электрического диполя). Они могут характеризовать отклик, например, маленького участка провода по которому течёт ток; маленькой плазменной или диэлектрической частицы, расположенной в однородном (на размере частицы) поле; молекулы; квантовой точки; дефекта в фотонном кристалле и т.д. Далее условно будем называть все эти

случаи просто **частицей**. Вся разница между этими случаями заключается в модели для поляризуемости. Важно только, чтобы электрическое поле на размере частицы было однородным, тогда ток поляризации $\vec{j} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$, который соответствует изменению во времени дипольного момента \vec{p} , будет течь вдоль некоторой прямой. Однако может случиться так, что некоторая часть общего тока в частице течёт по окружности. При этом этот круговой ток не вносит дополнительного вклада в электрический дипольный момент нашей частицы. Для учёта этого тока вводят понятие магнитного дипольного момента. Для расчёта величины этого момента в случае частицы произвольной формы и размеров выбирают систему координат где-то в этой частице и для каждого элементарного объема dV этой частицы исследуют величину векторного произведения плотности тока в этом объеме на радиус вектор этого объема, то есть величину $r \times j$. Этим самым учитывается только частота общего тока j , который течёт перпендикулярно к радиус-вектору. Остальная часть тока, параллельная радиус-вектору, отвечает электрическому дипольному моменту. В результате полный магнитный момент \vec{M} всей частицы будет равен интегралу по объему частицы от этого произведения $\vec{M} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \times \vec{j}) dV$, где r — радиус-вектор; i — вектор плотности тока.

В случае диэлектрической частицы в выражении для \vec{M} ток \vec{j} представляет собой ток, смещение которого определяется как $\vec{j} = \frac{dD}{dt}$. При гармоническом изменении во времени вектора электрической индукции D это выражение записывается как: $\vec{j} = i\omega\epsilon_0\epsilon\vec{E}$, где \vec{E} — напряженность электрического поля.

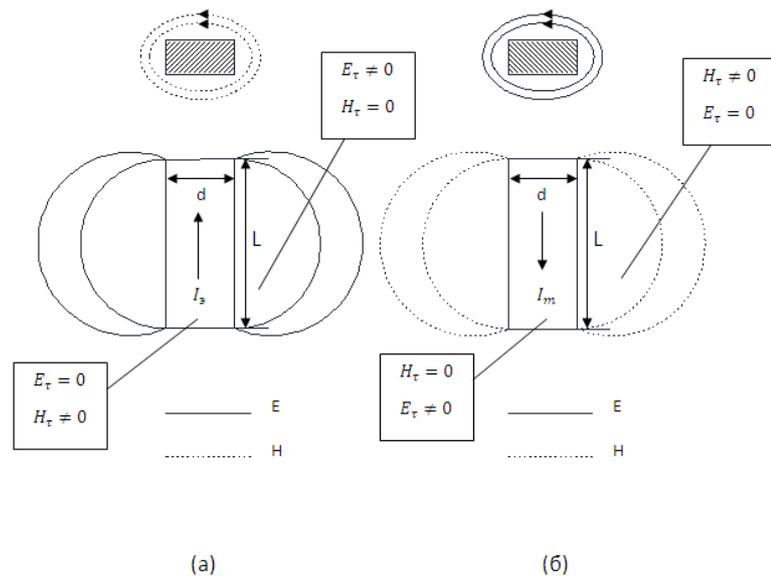


Рис. 28 Граничные условия для электродинамической задачи диполя

Выражение для магнитного дипольного момента для диэлектрической частицы принимает вид:

$$\vec{M} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon(\vec{r} \times \vec{E}) dV. \quad (5.2.1)$$

В качестве примера можно обратиться к тонкому кольцу радиуса R , по которому течёт однородный по длине кольца ток плотностью j . В этом случае величина $\vec{r} \times \vec{j} = Rjn$, где n - единичный вектор в направлении, перпендикулярном к плоскости кольца, выносится за знак интеграла. Интеграл по объёму даёт объем тока. В результате магнитный момент тонкого кольца с однородным током есть $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где I - полный ток, то есть произведение плотности тока на площадь, через которую он протекает; S - площадь кольца.

Элементарный магнитный вибратор можно представить в виде схемы электрического вибратора (Рис. 25, а), заменив формально электрический ток j , на магнитный ток j_m . При этом электромагнитное поле, создаваемое магнитным вибратором, можно определить, применяя принцип перестановочной двойственности (смотри соотношения (1.2.13)) к конечным выражениям для составляющих поля электрического вибратора (5.1.16). Ниже приведены выражения для поля излучения элементарного магнитного вибратора в дальней зоне (анализ ближней и промежуточной зон магнитного вибратора проделать самостоятельно), которое, как и электрический вибратор, имеет две составляющие:

$$E_\varphi = \frac{p_m \sin \theta \exp(ikr)}{4\pi\varepsilon_a r} k^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_0}}; \quad H_\theta = \frac{p_m \sin \theta \cdot \exp(ikr)}{4\pi\mu_a r} k^2. \quad (5.2.2)$$

Эти формальные преобразования не дают ответа на вопрос, какой физической системе соответствует поле, определяемое выражениями (5.2.2). Для ответа на этот вопрос рассмотрим физический смысл принципа перестановочной двойственности, а также граничные условия электродинамической задачи, соответствующей определению поля электрического вибратора (выражения (5.1.6)-(5.1.8)). Электрический вибратор будем рассматривать в виде тонкой пластины шириной d и длиной l из идеального металла с бесконечно большой проводимостью. Допустим, что вдоль этой пластины, по обе её стороны, протекает электрический ток J_s . Подставляя это значение тока в (5.1.6)-(5.1.8), можно определить составляющие электромагнитного поля излучения этой пластины (диполя). Рассмотрим, какие граничные условия соответствуют этой задаче (Рис. 28, а).

В пределах пластины из идеального металла справедливы граничные условия. За пределами пластины, в плоскости рис. 28, существует тангенциальное к этой плоскости поле E . Поле H подходит к плоскости рисунка нормально, и за пределами пластины $H_\tau = 0$. Если теперь заменить электрический ток J_s на магнитный J_m и воспользоваться принципом перестановочной двойственности в

выражениях для поля электрического вибратора, то получим составляющие поля для вибратора, представленного на рис. 28 (б). Согласно перестановкам, для этого поля граничные условия в пределах пластины теперь запишутся как $E_{\tau} \neq 0, H_{\tau} = 0$, а за пределами пластины, в плоскости рисунка, $H_{\tau} \neq 0, E_{\tau} = 0$. В соответствии с этими граничными условиями у поверхности идеального металла $E_{l\tau}$ пропорционально J_m . При этом комплексная амплитуда магнитного поверхностного тока J_m ориентирована вдоль пластины, а составляющая $E_{l\tau}$ - поперёк пластины (правило левостороннего винта). Эти условия будут выполнены, если в листе идеального металла сделать щель, совпадающую по форме с пластиной (Рис. 28), и к краям щели подвести напряжение от генератора (Рис. 29). При этом произведение $E_{l\tau}d = U_{щ}$, где $U_{щ}$ – разность потенциалов между краями щели.

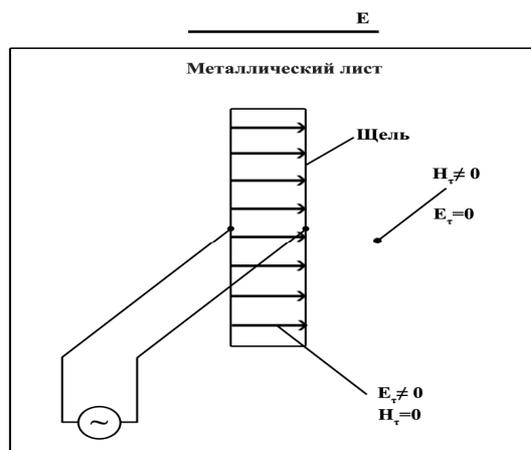


Рис. 29 Элементарный щелевой вибратор

Если обратиться к выражениям составляющих поля в дальней зоне для магнитного вибратора (5.2.1) и (5.2.2), то совершенно очевидно соотношение $J_m = -2U_{щ}$. Таким образом, физическим аналогом магнитного тока в случае щелевого вибратора является двойная разность потенциалов между краями щели. Концепция магнитного тока и его физический аналог в прикладных задачах электродинамики оказываются удобными при анализе различных антенн и, прежде всего, щелевых.

Всё вышесказанное позволяет определить диаграмму направленности магнитного вибратора. Для этого, если сравнить формулы (5.2.1), (5.2.2) с формулами для составляющих поля вибратора, то можно отметить их аналогичную зависимость от угловых координат. Таким образом, диаграмма направленности в плоскости, перпендикулярной поляризованной оси, будет аналогична диаграмме, показанной на рис. 29. Что касается мощности излучения, то она с учётом формул (5.2.1)-(5.2.2) будет выражаться как

$$N_{из.м} = \frac{|U_{из}|^2 l^2 (\sqrt{\mu_a \varepsilon_a})^3}{3\pi\omega\mu_a}. \quad (5.2.3)$$

Для определения сопротивления излучения в рассматриваемом случае можно использовать следующие выражение активной мощности:

$$N_{из} = \frac{|U_{из}|^2}{2R_{изл.}}. \quad (5.2.4)$$

Из выражений (5.2.3) и (5.2.4) получаем окончательно:

$$R_{изл.} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (5.2.5)$$

Рассмотренные элементарные электрический и магнитный вибраторы позволяют в радиофизическом и оптическом диапазонах электромагнитных волн использовать принцип суперпозиции при решении задач анализа и синтеза реальных антенн (смотри раздел «Источник Гюйгенса») и других приёмо-передающих устройств, представляя их набором элементарных вибраторов.

В оптическом диапазоне в аналогичных задачах принято использовать такое понятие, как точечный источник. Под этим источником в оптике понимают источник, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, которую он излучает или соизмеримы с ней.

5.3. Источник Гюйгенса

Важным понятием в теории излучения является источник (элемент) Гюйгенса). В отличие от электрического и магнитного вибраторов, физическими аналогами которых в электродинамике и оптике можно рассматривать одиночные атомы и молекулы, в качестве источника Гюйгенса принято рассматривать физическое тело определенной формы и размеров (большое количество атомов). Рассмотрим задачу возбуждения такого тела внешней плоской электромагнитной волной. Необходимо найти отклик этого тела на это возбуждение, которое является полем дифракции (полем переизлучения). Это поле можно определить, решая соответствующее волновое уравнение вне и внутри этого тела, а затем полученные решения «сшивать» через граничные условия на его поверхности. Однако такой метод даёт решение в незначительном количестве частных случаев. В большинстве подобных задач используют другие методы, одним из которых является метод дискретных диполей [15]. Этот метод заключается в разбиении физического тела на большое количество N элементов, но уже малого размера и «правильной» формы. Под «правильной» формой понимается такая форма элемента, для которой известен аналитический вид его поляризуемости. Такой формой в методе дискретных диполей выбирается сфера, которая из-за малости её размера может рассматриваться по отношению к полю переизлучения в

дипольном приближении. На рис. 30 представлено физическое тело в виде системы N взаимодействующих между собой таких сфер.

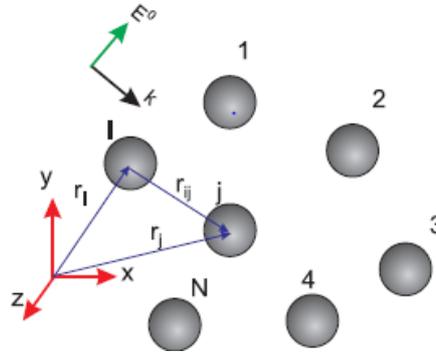


Рис.30 Модель физического тела-система N взаимодействующих сфер-диполей

Электрическое \vec{E}_i и магнитное \vec{H}_i поля, в которых находится один такой элемент с номером i , представляется в виде суммы (принцип суперпозиции) поля внешней \vec{E}^0 и \vec{H}^0 и полей всех остальных элементов:

$$\vec{E}_i = \vec{E}^0 + \sum_j^N \vec{E}_j, \quad \vec{H}_i = \vec{H}^0 + \sum_j^N \vec{H}_j. \quad (5.3.1)$$

В дипольном приближении каждый элемент может обладать электрическим (отклик на электрическое поле) и магнитным (отклик на магнитное поле) дипольными моментами. Электрический диполь создаёт вокруг себя (кроме ближней зоны, где поле квазиэлектростатично), кроме электрического, также и магнитное поле. Это магнитное поле может действовать на магнитные моменты остальных частиц. Аналогично магнитный момент создаёт, помимо магнитного поля, и электрическое. Умножая первое выражение в (5.3.1) на электрическую поляризуемость, а второе на $-$ магнитную, можно получить выражения для электрической и магнитной поляризации произвольной частицы с номером i (Рис. 26):

$$\vec{p}_i^e = \chi_i^e \left[\vec{E}^0 + \sum_j^N \vec{E}_j \right], \quad \vec{p}_i^m = \chi_i^m \left[\vec{H}^0 + \sum_j^N \vec{H}_j \right]. \quad (5.3.2)$$

Если рассматривать выражения (5.1.14) и (5.1.15) для электрических и магнитных полей дипольных вибраторов через диадную функцию Грина, то выражения (5.3.2) будут иметь следующий вид:

$$\vec{p}_i^e = \chi_i^e \left(\sum_{j=1}^N \left[\hat{G}_{ij}^e \vec{p}_j^e - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{G}_{ij}^m \vec{p}_j^m \right] + \vec{E}^0 \right); \quad (5.3.3)$$

$$\vec{P}_i^M = \chi_i^m \left(\sum_{j=1}^N G_{ij} \vec{p}_j^m + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} G_{ij}^{\wedge} \vec{p}_j^e \right) + \vec{H}^0. \quad (5.3.4)$$

Выражения (5.3.3) и (5.3.4) определяют для каждого элемента (Рис. 30) его диэлектрический и магнитный моменты, которые очевидно будут зависеть от моментов всех остальных элементов системы. Электрический \vec{P}^e и магнитный \vec{P}^m дипольные моменты всего физического тела с учётом выражений (5.3.3) и (5.3.4) определяются сложением электрического и магнитного моментов каждой частицы ($\vec{P}^e = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^e$ и $\vec{P}^m = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^m$). Эти моменты являются комплексными величинами, которые характеризуются модулем и аргументом (фазой).

Исходя из вышеизложенного, рассмотрим источник в виде большой сферы, состоящей из большого количества малых сфер (атомов-диполей). Такая сфера становится источником Гюйгенса, если её \vec{P}^e и \vec{P}^m (они взаимно ортогональны) колеблются в фазе. Характерная диаграмма направленности такого источника имеет вид, представленный ниже на рис. 31. Как видно из этого рисунка, существенной особенностью этого источника является полное отсутствие излучения в одном из направлений, которое называется обратным, и максимум излучения в прямом направлении. Математическое описание такой диаграммы направленности задаётся кардиоидой вращения.

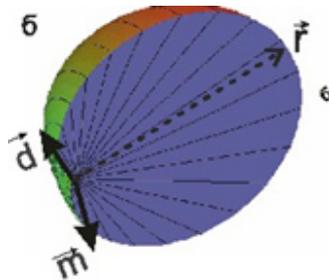


Рис.31 Диаграмма направленности излучения источника Гюйгенса

Если говорить о физическом описании этой диаграммы, то оно может быть пояснено на примере анализа задачи дифракции (рассеяния) плоской электромагнитной волны на частице сферической формы (теория рассеяния Ми – [26]). Эта частица произвольного радиуса может быть как проводящей (задан её комплексный показатель преломления), так и диэлектрической (вещественный показатель преломления). Теория Ми рассматривает падающую на заданную сферу плоскую электромагнитную волну как суперпозицию сферических волн, выходящих из центра сферы. Каждая из этих волн поляризует сферу и возбуждает в ней (сфере) вторичную волну, которая излучается сферой. Эти вторичные волны,

которые носят название **парциальных волн**, и описываются сферическими функциями Бесселя и Ханкеля, складываются (интерферируют), образуя структуру рассеянного (переизлучённого) сферой (антенной) электромагнитного поля и его диаграммы направленности. Амплитуда, фаза и поляризация этого поля является сложной функцией двух параметров $\rho = ak$ (a - радиус сферы, k - волновое число) и комплексного показателя преломления $n^* = n^1 - i\chi$ (n^1 - вещественная часть показателя, χ - показатель поглощения). Компоненты векторов поля и полная интенсивность рассеянного (переизлучённого) электромагнитного поля определяются как сумма (интерференция) $\sum_{i=1}^{\infty}$ парциальных волн (выражения для этих сумм можно найти на стр.705 книги [7]). Анализ этих сумм даёт следующее:

1. При $ka \leq 1$ и $|n^*|ka \leq 1$ - компоненты векторов рассеянного поля определяются только первым членом ряда $\sum_{i=1}^{\infty}$, которые эквивалентны полю электрического диполя. Таким образом, теория Ми в этом приближении даёт формулу рассеяния Рэлея.

2. Если $ka \leq 1$, но $|n^*|ka$ не мало, то при $|n^*|ka = m\pi$ наблюдаются (возникают) резонансы Ми (электрический и магнитный). Сечение рассеяния в этом случае достигают величины порядка $6\pi a^2$.

3. Для больших частиц ($ka \geq 1$) число учитываемых парциальных волн определено величиной ka .

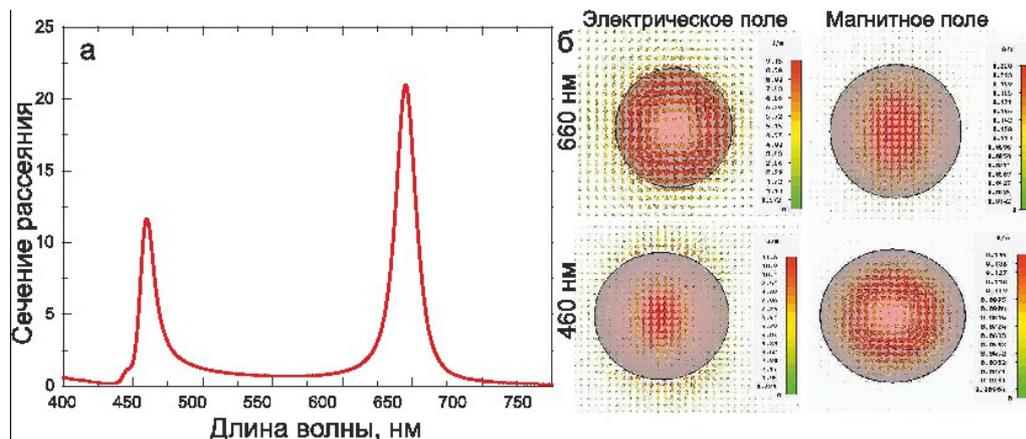


Рис. 32 Зависимость сечения рассеяния диэлектрической сферической частицы радиуса $R=50$ нм

В современных задачах радиофизики и оптики теория Ми получила своё развитие на модели сферического тела (частицы) в виде открытого резонатора, в котором при воздействии на него внешним полем возбуждаются резонансные моды электрического и магнитного типов различных порядков. Эти моды, с помощью которых могут быть объяснены электрические и магнитные резонансы Ми,

сопоставимы с членами парциальных волн в рядах, определяющих электрические и магнитные компоненты векторов рассеянного поля. В качестве примера на рис. 32 (а) приведена зависимость сечения рассеяния диэлектрической сферической частицы радиусом $R=50$ нм, полученная математическим моделированием с использованием программного продукта CST Microwave Studio для материала с $\epsilon=40$, от длины плоской волны, падающей на эту частицу (из материалов диссертации [14]). Эта зависимость имеет два резких пика с максимумами на 460 нм и 660 нм, которые представляют электрический и магнитный резонансы соответственно. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к картинкам электрического и магнитного полей внутри частицы на этих резонансах (Рис. 32, б). Видно, что на длине волны 660 нм электрическое поле внутри частицы закручивается в кольцо. Согласно этим картинкам, круговую структуру имеет также и возбуждаемый ток поляризации в материале частицы, максимум которого приходится на длину волны 660 нм. Магнитное поле внутри частицы при этом также усиливается. И хотя магнитное поле замыкается снаружи частицы, внутри оно имеет структуру поля магнитного вибратора. На длине волны 460 нм наблюдается закручивание в кольцо уже магнитного поля, в то время как электрическое поле соответствует полю электрического диполя. На рис. 33 приведены результаты, подтверждающие возможность создания источника Гюйгенса в оптическом диапазоне на реальной кремневой ($\epsilon=18$) наносфере радиусом = 65 нм.

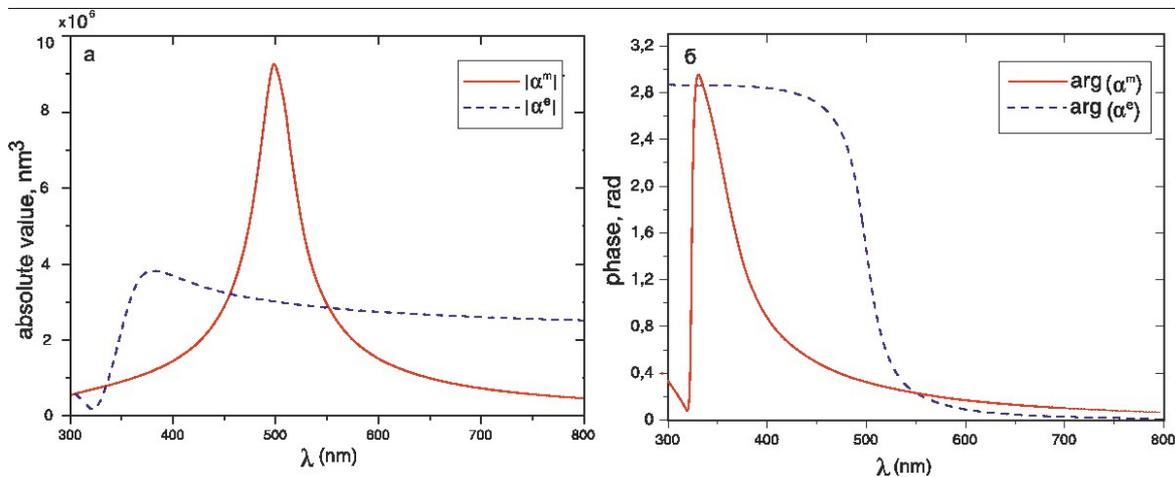


Рис. 33 Зависимости абсолютных значений и фаз для электрической и магнитной поляризуемости от длины волны

Как видно из рис. 33 (а), во всём оптическом диапазоне абсолютные значения электрической и магнитной поляризаций отличны от нуля. На рис. 33 (б) приведены зависимости фаз (\arg) электрической и магнитной поляризуемостей от длины волны. Наблюдается широкий, порядка 200 нм, участок спектра, в котором векторы электрического и магнитного дипольных моментов колеблются с

большой разностью фаз. Однако на длине волны 550 нм абсолютные значения электрической и магнитной поляризаций и их фазы оказываются равными. На этой длине волны кремневая наносфера становится источником (или элементом) Гюйгенса с диаграммой направленности, представленной на рис. 34 (б).

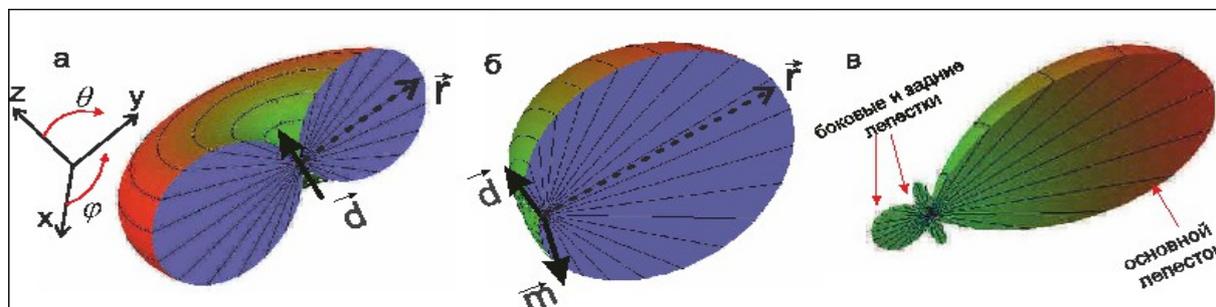


Рис. 34 Диаграммы направленности

Здесь же для сравнения приведена диаграмма направленности диполя (электрического или магнитного, рис. 34, а) и диаграмма направленности радиочастотной антенны Яги—Уда (Рис. 34, в), имеющей аналоги в оптическом диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Ананьева «Оптические резонаторы и лазерные пучки», М.: Наука, ФизМатЛит, 1990 г., 263 стр.
2. А. Анго «Математика для электро-и радиоинженеров», Наука, Главная редакция Физ.-Мат. Литературы, 1965 г.
3. С.И. Баскаков «Основы электродинамики», М.: Советское радио, 1973 г., 246 стр.
4. В.В. Батыгин, И.Н.Топтыгин «Сборник задач по электродинамике», М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002 г.
5. В.Н. Бибииков, Б.Е.Кибнер «Геометрическая теория дифракции», М.: Связь, 1978 г., 248 стр.
6. Б.М. Болотовский «Оливер Хевисайд (1850-1925)», М.: Наука, 1985 г., 260 стр.
7. М. Борн, Э. Вольф «Основы оптики», М.: Наука, 1970 г.
8. Л.А. Вайнштейн «Электромагнитные волны». М.: Радио и связь, 1966 г. (1988 г.).
9. Дж. Джексон «Классическая электродинамика», М.: Мир, 1965 г. (*Jackson J. Classical Electrodynamics. — New York: Wiley, 1998*)
10. В.А. Зверев «Радио оптика», М.: Советское радио, 1975 г.
11. Н.И. Калитиевский «Волновая оптика». М.: Высшая школа, 1995 г., 463 стр.
12. Б.З. Каценелебаума и др. «Киральные электродинамические объекты», УФН, 1997 г., т.167, №11, стр.1201—1212.
13. Ч. Киттель «Введение в физику твердого тела». Учебное пособие по физике, М.: Наука, 1978. - 791 с.
14. А.Е. Краснок «Оптические антенны на основе оптических наночастиц», СПб: ИТМО, 2013 г.
15. Л. Новотный, Б.Хехт «Основы нанооптики», М.: Физматлит, 2011 г., 483 стр. (*Novotny L., Hecht B. Principles of Nano-Optics. — Cambridge University Press, 2006*).
16. А.К. Сарычева и В.М.Шалаева «Электродинамика метаматериалов», Научный Мир, 2011 г., 221 стр.
17. Д.В. Сивухина «Оптика», том 1V, Общего курса физики, М.: Физматлит, 2002 г., 793 стр.
18. К.Р. Симовского «О материальных параметрах метаматериалов», «Оптика и Спектроскопия», 2009, том 107, №5, с.766-793.
19. В.И. Смирнов «Курс Высшей Математики», т.2, М.: Наука, Физматлит, 1974 г.
20. А.Н. Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики», М.: Физматлит, 1953 г., 680 стр.

21. Н.Н. Фёдоров «Основы электродинамики». М.: Высшая школа, 1980 г.
22. P.A. Belov P.A., Simovski C.R. and Ikonen P. Phys.Rev. B 2005. vol.71, P.193-195
23. Н. Kogelnik, Т. Li. «Laser beams and resonators» Appl.Opt., v.5, 1966, p.1550—1567
24. А.М. Nicolson, G. F. Ross. «Measurement of the Intrinsic Properties of Materials by Time-Domain Techiques»// Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on—1970—vol. 19, №4, pp. 377-382
25. А. Fox, Т. Li «Resonant modes in a maser interferometer» Bell.Syst.Tech.J., v.40,1961, p.453—488
26. J. Stratton. Electromagnetic Theory. - McGraw, New.York, 1941
27. E. Wolf. Opt.Soc.Am ., A.1985, v.2, p.886-889

В тексте пособия по отдельным вопросам приводится дополнительная литература (ссылки на статьи, диссертации, монографии):

28. П.А. Белов, А.А.Орлов, С.Ю.Косульников «Передача изображений со сверхразрешением»//LAMBERT, Academic Publishing, 2012, 165 стр.
29. А.Д. Григорьев «Электродинамика и техника СВЧ», М.: Высшая школа, 1990 г.
30. М.Е. Ильченко «Диэлектрические резонаторы», М.: Радио и связь, 1989 г.
31. В.В. Климов «Наноплазмоника», М.: Физматлит, 2009 г., 480 стр.
32. Я. Перины «Когерентность света», М.: Мир. 1974 г.
33. П.Я. Уфимцев «Метод краевых волн в физической теории дифракции». М.: Сов.Радио, 1968 г.
34. P.A. Belov «Strong spatial dispersion in wire media in the very wavelength limit» // Phys.Rev. B, 2003, Vol.67, p. 113
35. А. Einstein Annalen Der Physik, 1905, Vol. 17.
36. J. Lindhard «On the properties of a gas of charged particles», 57p., 1954
37. L. Silberstein. Ann.Phyd., v.22, p.579, 1907.



Миссия университета – открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

Балошин Юрий Александрович
Белов Павел Александрович
Краснок Александр Евгеньевич

Классическая электродинамика

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49