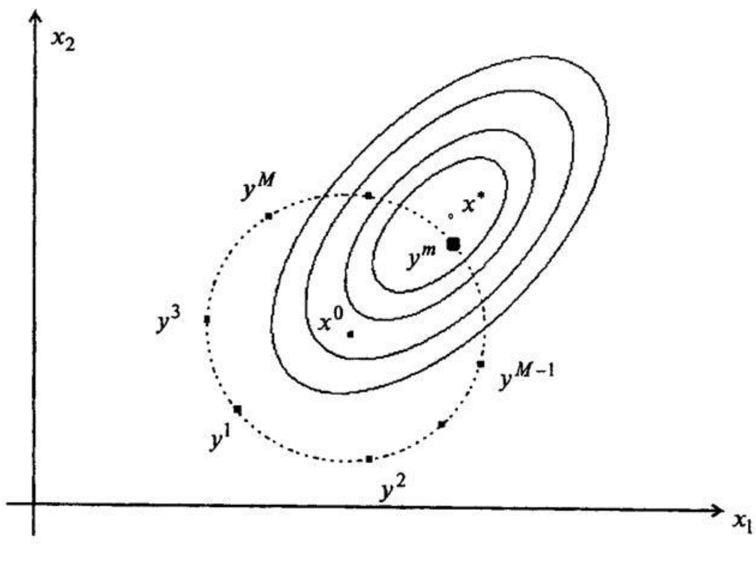
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков,
В.А. Рыков, К.А. Старков**

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Часть VII (МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД НАИЛУЧШЕЙ ПРОБЫ)



**Санкт-Петербург
2020**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков,
В.А. Рыков, К.А. Старков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Часть VII (МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД НАИЛУЧШЕЙ ПРОБЫ)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 16.04.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования магистратуры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2020

Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В., Рыков В.А., Старков К.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MATHCAD 15. Часть VII (Многомерная оптимизация. Численный метод нулевого порядка. Метод наилучшей пробы) – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 85 с.

Рецензент(ы):

Пронин Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") факультета низкотемпературной энергетики, Университета ИТМО.

Пособие содержит сведения о численном методе многомерной безусловной оптимизации нулевого порядка – методе наилучшей пробы. Снабжено большим количеством примеров реализации оптимизационных задач, рассмотренных как численно при пошаговой реализации и с помощью функции написанной пользователем, так и с использованием функций пакета MathCAD 15. В пособии приведены задачи для самостоятельного решения и тестовые вопросы с подробными пояснениями по изучаемому методу. Предназначено для самостоятельной работы студентов и аспирантов вузов очной и заочной форм обучения.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020
© Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В., Рыков В.А., Старков К.А., 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При математическом и компьютерном моделировании каких-либо процессов или объектов необходимо решать задачи, связанные с нахождения лучших (по соображениям, вытекающим из поставленной конкретной задачи) структур и значений параметров этих процессов или объектов. Такие задачи принято называть оптимизационными.

Задачи оптимизации можно разбить на два класса. К первому классу относятся случаи, когда надо определить на некотором множестве структур в рамках решаемой задачи оптимальную структуру объекта. Такие задачи оптимизации относятся к классу структурной оптимизации.

При математическом моделировании термодинамической поверхности широко используются методы структурной оптимизации [1, 2]. В настоящее время значительное число работ (см., например, [3–5]) посвящено решению проблемы построения единого фундаментального уравнения состояния жидкости и газа (ЕФУС), которое с одинаковой неопределенностью, не превосходящей неопределенность экспериментальных данных о равновесных свойствах исследуемого вещества, передает термодинамическую поверхность в широкой области параметров состояния. При этом, в отличие от известных фундаментальных уравнений состояния, рабочая область ЕФУС, помимо области малых плотностей и давлений, низких и высоких температур, плотной жидкости (вплоть до границы жидкость-твердое тело), включает и область сильно развитых флуктуаций плотности (окрестность критической точки жидкости). Использование методов структурной оптимизации позволяет на основе анализа степенных функционалов найти оптимальную структуру ЕФУС, в которую входят как линейные, так и нелинейные параметры и коэффициенты [6–8].

Если структура ЕФУС определена, то необходимо найти оптимальные значения параметров и коэффициентов, входящих в данное уравнение. Задачи нахождения параметров объекта, оптимальная структура которого уже определена, относятся ко второму классу задач оптимизации. Для решения таких задач используются методы параметрической оптимизации.

Студенты, обучающиеся на мегафакультете «Биотехнологий и низкотемпературных систем» университета ИТМО по магистерским программам «Компьютерное моделирование в термодинамике» и «Техника и технологии сжиженного природного газа», решают задачи, связанные с разработкой методов описания и расчета теплофизических свойств рабочих тел. Для успешного решения этих задач студентам необходимо уметь применять методы параметрической оптимизации, к которым относится метод наилучшей пробы, подробно рассмотренный в данном пособие.

1 МЕТОД НАИЛУЧШЕЙ ПРОБЫ

1.1 Теория метода

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ многих переменных, то есть найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$.

1.1.1 Вербальная модель метода

Задается начальная точка x_0. Каждая последующая точка находится по формуле:

$$x_{k+1} = x_k + t_k \xi_k ,$$

где $t_k > 0$ – величина шага; ξ_k – случайный вектор единичной длины, определяющий направление поиска; k – номер итерации. На текущей итерации при помощи генерирования случайных векторов ξ_k получаются M точек $y_1, y_2, ..., y_M$, лежащие на гиперсфере радиуса t_k с центром в точке x_k (см. Рис. 1.1).

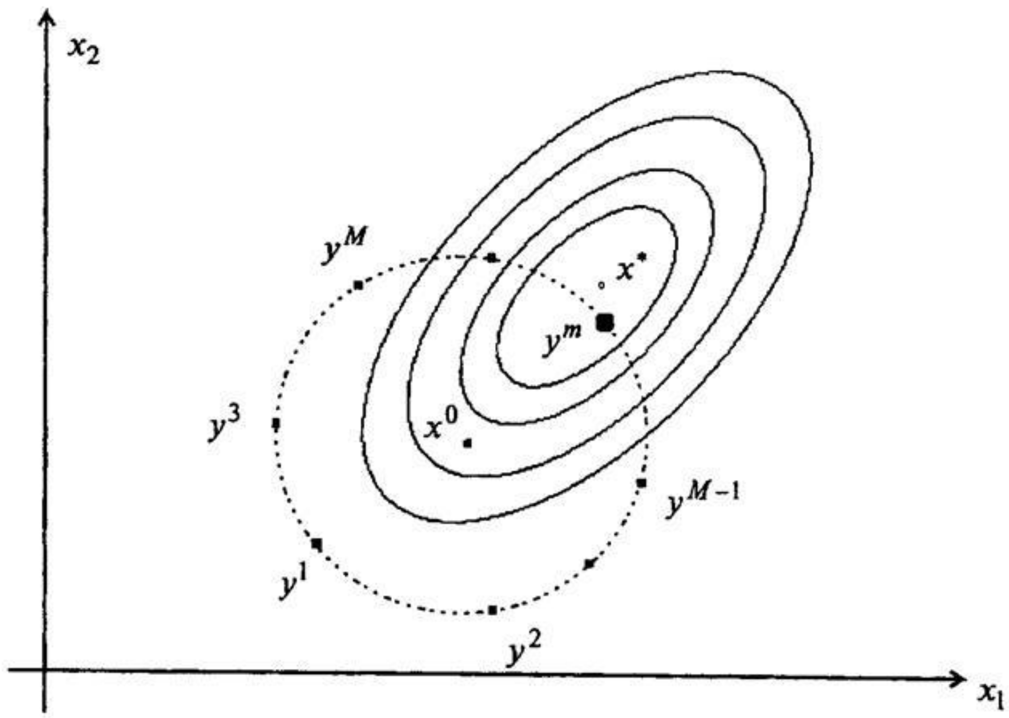


Рис. 1.1. Графическая модель метода наилучшей пробы

Среди полученного массива случайных точек выбирается точка y_m, в которой значение функции наименьшее. Если в выбранной точке значение функции меньше, чем в центре, то шаг считается удачным, центр поиска переносится в эту точку, и дальнейший поиск происходит из этой точки.

В противном случае поиск продолжается из старого центра, но с меньшим шагом до тех пор, пока шаг не станет меньше заранее заданной величины R. После этого поиск точки минимума завершается. Поиск заканчивается также в случае, если количество удачных шагов становится равно заранее заданной величине N.

1.1.2 Алгоритм поиска

Шаг 1. Задать исходную точку x_0, коэффициент сжатия $0<\beta<1$, M – максимальное число испытаний на текущей итерации, $t_0=1$ – начальную величину шага, R – минимальную величину шага, N – максимальное число итераций. Положить $k=0$, $j=1$.

Шаг 2. Получить M реализаций случайного вектора $\varsigma_j=(\varsigma_{j_1},\ldots,\varsigma_{j_n})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1,1]$, n — количество элементов в векторе.

Шаг 3. Вычислить $y_j=x_k+t_k\xi_k$, где $\xi_j=\dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$ – случайный вектор единичной длины, $\|\xi\|=1$, определяющий направление поиска, $\left\|\varsigma_j\right\|$ – модуль случайного вектора.

Шаг 4. Найти случайную координату y_m, значение функции в которой минимально для данного массива случайных точек, то есть $f(y_m)=\min\limits_{1\le j\le M} f(y_i)$.

Проверить выполнение условий:

а) при выполнения неравенства $f(y_m)<f(x_k)$ шаг удачный. Положить $x_{k+1}=y_m$, $t_{k+l}=t_k$, $k=k+1$ и проверить условие окончания. При $k<N$ положить $j=1$ и перейти к шагу 2. При выполнения равенства $k=N$ поиск завершить: $x^* \cong x_k$, $f(y_j)\cong f(x^\kappa)$;

а) при выполнении неравенства $f(y^i)>f(x^\kappa)$ шаг неудачный, и перейти к шагу 5.

Шаг 5. Оценить число неудачных шагов из текущей точки:
В случае $j < M$ следует положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 2.

б) при равенстве $j = M$ проверить условие окончания:

- если $t_k \le R_9$ процесс закончить: $x^* \cong x_k$, $f(y_j) \cong f(x^\kappa)$;

- если $t_k > R$, положить $t_k = \beta t_k$, $j = 1$ и перейти к шагу 2.

Примечание.

1. Существуют варианты данного метода, в которых на шаге 4 полагают $x_{k+1} = y_m$. В этом случае становятся возможными шаги в направлении возрастания функции. Они могут позволить преодолеть локальные минимумы при поиске глобального экстремума.

2. Недостатком метода является учет только наилучшей пробной точки. В отбрасываемых точках содержится полезная информация о поведении целевой функции.

3. Одним из методов учета информации, содержащейся во всех сгенерированных точках, является алгоритм статистического градиента. Для каждой из M реализаций $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}, \ldots, \varsigma_{j_n})^T$ случайного вектора ς, полученных в точке x_k, вычисляются разности

$$\vartriangle f_j = f\left(x_k + t_{np}\varsigma_k\right) - f\left(x_k\right),$$

где t_{np} – пробное значение шага. В качестве направления поиска используется вектор статистического антиградиента $d_k = -\frac{1}{t_{np}}\sum_{j=1}^{M}\varsigma_j \vartriangle f_j$ или единичный вектор $\frac{d_k}{\|d_k\|}$. Далее алгоритм решения совпадает с описанным выше.

1.2 Практические примеры реализации алгоритма метода наилучшей пробы

Пример 1.1. Найти минимум функции $f(x) = 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ методом наилучшей пробы

1. Исходные данные и обозначения переменных: x_0 – начальная точка, β – коэффициент сжатия ($0 < \beta < 1$), M – максимальное число испытаний, $t0$ – начальная величина шага, R – минимальная величину шага, N – максимальное число итераций при удачном шаге, j – индекс случайной расчетной точки y_j, k

– индекс итерации точек x_k при удачном шаге, y – вектор координат генерируемых случайных точек расчета.

Положить: $x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta = 0.5$, $M\varsigma = 6$, $R = 0.5$, $N = 10$, $t_0 = 1$, $k = 0$, $j = 1$.

2^0. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$, $n = 2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} -0.997 \\ -0.613 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ -0.299 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.652 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.421 \\ -0.392 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.817 \\ -0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.977 \\ -0.762 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} -0.852 \\ -0.524 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.494 \\ -0.869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.704 \\ -0.71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.732 \\ -0.681 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.757 \\ -0.653 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.789 \\ -0.615 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j = 1...M$, $\left\|\xi_j\right\| = 1$.

3^0. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.494 \\ 8.131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.704 \\ 8.29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.732 \\ 8.319 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.243 \\ 8.347 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.789 \\ 8.385 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^0. Найти y_m из условия $f(y_m) = \min\limits_{1 \le j \le M} f(y_i)$, $y_m = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix} \right) = 24.59 < f\left(x_k = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 45$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 1$, $k = k + 1 = 1$.

Проверить условие окончания по параметру N.

Так как $k = 0 < N = 10$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 2.

2^1. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$, $n = 2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} 0.364 \\ 0.444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.754 \\ 0.669 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.034 \\ -0.148 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.899 \\ 0.099 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.057 \\ 0.694 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.088 \\ 0.966 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0.634 \\ 0.773 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.748 \\ 0.664 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.224 \\ -0.975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.994 \\ 0.109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.082 \\ 0.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.996 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j = 1...M$, $\left\|\xi_j\right\| = 1$.

3^1. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 7.782 \\ 9.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.372 \\ 7.502 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.142 \\ 8.586 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.066 \\ 9.473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.057 \\ 9.472 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^1. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right) = \min\limits_{1 \le j \le M} f\left(y_i\right)$, $y_m = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix} \right) = 17.701 < f\left(x_k = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix} \right) = 24.59$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 1$, $k = k + 1 = 1$.

Проверить условие окончания по параметру N .

Так как $k = 1 < N = 10$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 2.

2^2. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$, $n = 2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} 0.169 \\ -0.011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.481 \\ 0.241 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.609 \\ 0.152 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.823 \\ 0.455 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.336 \\ -0.37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.388 \\ -0.783 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0.998 \\ -0.065 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.894 \\ 0.448 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.242 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.484 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.672 \\ -0.74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.444 \\ -0.896 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j = 1...M$, $\left\|\xi_j\right\| = 1$.

3^2. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 7.398 \\ 9.075 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.294 \\ 9.588 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.37 \\ 9.382 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.275 \\ 9.624 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.072 \\ 8.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.956 \\ 8.244 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^2. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right)=\min\limits_{1\le j\le M} f\left(y_i\right)$, $y_m=\begin{pmatrix}5.956\\8.244\end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m=\begin{pmatrix}5.956\\8.244\end{pmatrix}\right)=8.692< f\left(x_k=\begin{pmatrix}6.4\\9.14\end{pmatrix}\right)=17.701$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1}=y_m=\begin{pmatrix}5.956\\8.244\end{pmatrix}$, $t_{k+1}=t_k=1$, $k=k+1=1$.

Проверить условие окончания по параметру N.

Так как $k=2<N=10$, положить $j=1$ и перейти к шагу 2.

2^3. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j=(\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1,1]$, $n=2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma=\left(\begin{pmatrix}0.488\\-0.278\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.543\\-0.541\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.085\\-0.892\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.049\\-0.811\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.783\\-0.707\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.863\\-0.906\end{pmatrix}\right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0.869\\-0.495\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.708\\-0.706\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.095\\-0.995\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.06\\-0.998\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.742\\-0.67\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.69\\-0.724\end{pmatrix}\right)^T,$$

где $\xi_j=\dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j=1...M$, $\left\|\xi_j\right\|=1$.

3^3. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y=\left(\begin{pmatrix}6.825\\7.749\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.248\\7.538\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6.051\\7.248\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6.016\\7.246\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6.698\\7.574\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6.646\\7.52\end{pmatrix}\right)^T,$$

где $y_j=x_k+t_k\xi_j$, $j=1...M$.

4^3. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right)=\min\limits_{1\le j\le M} f\left(y_i\right)$, $y_m=\begin{pmatrix}5.248\\7.538\end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m=\begin{pmatrix}5.248\\7.538\end{pmatrix}\right)=2.611< f\left(x_k=\begin{pmatrix}5.956\\8.244\end{pmatrix}\right)=8.692$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1}=y_m=\begin{pmatrix}5.248\\7.538\end{pmatrix}$, $t_{k+1}=t_k=1$, $k=k+1=1$.

Проверить условие окончания по параметру N. =

Так как $k=3<N=10$, положить $j=1$ и перейти к шагу 2.

2^4. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$, $n = 2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} -0.923 \\ -0.621 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.693 \\ 0.771 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.609 \\ 0.291 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.818 \\ 0.843 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.698 \\ 0.139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.886 \\ 0.157 \end{pmatrix} \right)^T .$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} -0.83 \\ -0.558 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.668 \\ 0.744 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.902 \\ 0.431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.696 \\ 0.718 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.981 \\ 0.195 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.985 \\ 0.174 \end{pmatrix} \right)^T ,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\|\varsigma_j\|}$, $j = 1...M$, $\|\xi_j\| = 1$.

3^4. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.579 \\ 8.282 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.345 \\ 7.969 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.944 \\ 8.256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.267 \\ 7.733 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.232 \\ 7.713 \end{pmatrix} \right)^T ,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^4. Найти y_m из условия $f(y_m) = \min\limits_{1 \le j \le M} f(y_i)$, $y_m = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix} \right) = 2.315 < f\left(x_k = \begin{pmatrix} 5.248 \\ 7.538 \end{pmatrix} \right) = 2.611$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 1$, $k = k + 1 = 1$.

Проверить условие окончания по параметру N.

Так как $k = 4 < N = 10$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 2.

2^5. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$ где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$, $n = 2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} -0.715 \\ -0.864 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.388 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.31 \\ -0.803 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.901 \\ -0.072 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.456 \\ 0.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.256 \\ -0.9 \end{pmatrix} \right)^T .$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} -0.638 \\ -0.77 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.757 \\ 0.653 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.933 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.997 \\ -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.785 \\ 0.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.274 \\ -0.962 \end{pmatrix} \right)^T ,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j = 1...M$, $\left\|\xi_j\right\| = 1$.

3^5. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 3.78 \\ 6.209 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.175 \\ 7.633 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.421 \\ 6.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.203 \\ 7.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.144 \\ 6.018 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^5. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right) = \min\limits_{1 \le j \le M} f\left(y_i\right)$, $y_m = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix} \right) = 0.199 < f\left(x_k = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix} \right) = 2.315$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 1$, $k = k + 1 = 1$.

Проверить условие окончания по параметру N .

Так как $k = 5 < N = 10$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 2.

2^6. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $\left[-1, 1\right]$, $n = 2$ - количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} 0.234 \\ -0.499 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.576 \\ 0.428 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.837 \\ 0.711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.385 \\ -0.054 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.616 \\ 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.295 \\ -0.652 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0.425 \\ -0.905 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.803 \\ 0.596 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.762 \\ 0.647 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.99 \\ -0.139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.528 \\ 0.849 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.412 \\ -0.911 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j = 1...M$, $\left\|\xi_j\right\| = 1$.

3^6. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 5.203 \\ 5.142 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.581 \\ 6.643 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.016 \\ 6.694 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.788 \\ 5.908 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.25 \\ 6.896 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.19 \\ 5.136 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^6. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right) = \min\limits_{1 \le j \le M} f\left(y_i\right)$, $y_m = \begin{pmatrix} 5.19 \\ 5.136 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m=\begin{pmatrix}5.19\\5.136\end{pmatrix}\right)=0.892> f\left(x_k=\begin{pmatrix}4.778\\6.047\end{pmatrix}\right)=0.199$, шаг не удачен.

Проверить окончание расчета по минимальной величине шага R.

Так как $t_k=1>R=0.5$, положить $t_k=\beta t_k=0.5$, $j=1$ и перейти к шагу 2.

2^7. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j=(\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1,1]$, $n=2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma=\left(\begin{pmatrix}0.969\\-0.698\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.423\\0.551\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.242\\0.376\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.134\\0.096\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.507\\-0.015\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.34\\0.247\end{pmatrix}\right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0.811\\-0.584\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.609\\0.793\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.541\\0.841\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.813\\0.582\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.999\\-0.029\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.809\\0.588\end{pmatrix}\right)^T,$$

где $\xi_j=\dfrac{\varsigma_j}{\left\|\varsigma_j\right\|}$, $j=1...M$, $\left\|\xi_j\right\|=1$.

3^7. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y=\left(\begin{pmatrix}5.184\\5.755\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.083\\6.444\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.049\\6.467\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.185\\6.338\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4.278\\6.032\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.183\\6.341\end{pmatrix}\right)^T,$$

где $y_j=x_k+t_k\xi_j$, $j=1...M$.

4^7. Найти y_m из условия $f(y_m)=\min\limits_{1\le j\le M} f(y_i)$, $y_m=\begin{pmatrix}5.184\\5.755\end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m=\begin{pmatrix}5.184\\5.755\end{pmatrix}\right)=0.195< f\left(x_k=\begin{pmatrix}4.778\\6.047\end{pmatrix}\right)=0.199$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1}=y_m=\begin{pmatrix}5.184\\5.755\end{pmatrix}$, $t_{k+1}=t_k=0.5$, $k=k+1=1$.

Проверить условие окончания по параметру N.

Так как $k=7<N=10$, положить $j=1$ и перейти к шагу 2.

2^8. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j=(\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-1,1]$, $n=2$ – количество элементов в векторе:

$$\varsigma=\left(\begin{pmatrix}-0.69\\0.341\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.308\\0.596\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.963\\-0.409\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.749\\-0.798\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.714\\-0.383\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.628\\0.628\end{pmatrix}\right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} -0.896 \\ 0.443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.459 \\ 0.888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.684 \\ -0.729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.881 \\ -0.473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\| \varsigma_j \right\|}$, $j = 1...M$, $\left\| \xi_j \right\| = 1$.

3^8. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 4.736 \\ 5.976 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.644 \\ 5.559 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.526 \\ 5.39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.743 \\ 5.518 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.537 \\ 6.108 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^8. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right) = \min\limits_{1 \le j \le M} f\left(y_i\right)$, $y_m = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix} \right) = 0.048 > f\left(x_k = \begin{pmatrix} 5.19 \\ 5.136 \end{pmatrix} \right) = 0.892$, шаг удачен.

Положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 0.5$, $k = k + 1 = 1$.

Проверить условие окончания по параметру N .

Так как $k = 7 < N = 10$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 2.

2^9. Сгенерировать M случайных векторов $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}\ \varsigma_{j_2})^T$, где ς_{j_i} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $\left[-1, 1\right]$, $n = 2$ количество элементов в векторе:

$$\varsigma = \left(\begin{pmatrix} -0.054 \\ -0.947 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.09 \\ -0.728 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.574 \\ 0.594 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.317 \\ 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.684 \\ -2.501 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.849 \\ -0.288 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Вычислить M случайных векторов единичной длины:

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} -0.057 \\ -0.998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.123 \\ -0.992 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.695 \\ 0.719 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.491 \\ 0.871 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.999 \\ -0.003656 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.947 \\ -0.321 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $\xi_j = \dfrac{\varsigma_j}{\left\| \varsigma_j \right\|}$, $j = 1...M$, $\left\| \xi_j \right\| = 1$.

3^9. Вычислить M координат случайных векторов:

$$y = \left(\begin{pmatrix} 4.926 \\ 5.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.893 \\ 5.703 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.607 \\ 6.558 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.2 \\ 6.635 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.454 \\ 6.197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.481 \\ 6.038 \end{pmatrix} \right)^T,$$

где $y_j = x_k + t_k \xi_j$, $j = 1...M$.

4^9. Найти y_m из условия $f\left(y_m\right)=\min\limits_{1\le j\le M} f\left(y_i\right)$, $y_m=\begin{pmatrix}4.926\\5.7\end{pmatrix}$.

Так как $f\left(y_m=\begin{pmatrix}4.926\\5.7\end{pmatrix}\right)=0.112> f\left(x_k=\begin{pmatrix}4.954\\6.199\end{pmatrix}\right)=0.048$, шаг удачен.

Проверить окончание расчета по минимальной величине шага R.

Так как $t_k=0.5=R=0.5$, расчет завершен. $x^*=x_k=\begin{pmatrix}4.954\\6.199\end{pmatrix}$, $f\left(x^*=\begin{pmatrix}4.954\\6.199\end{pmatrix}\right)=0.048$.

Листинги с программой расчета, выполненные в пакете MathCAD 15, приведены на Рис. 2.1–Рис. 2.28 на стр. 30–57.

Листинг с описанием одной функции, реализующих метод наилучшей пробы в пакете MathCAD 15, приведен на Рис. 2.29–Рис. 2.31 на стр. 58–60.

Комментарий к листингам программы:

1. При теоретическом описании алгоритма расчета в параграфе 1.2 (Пример 1.1 на стр. 7) индекс первого элемента используемых векторов равен 1, а при реализации в пакете MathCAD 15 индекс первого элемента векторов равен 0. Это необходимо принимать во внимание при изучении материала.

2. При построчной реализации метода в пакете MathCAD 15 набирать текст программы нужно полностью только для первой итерации. В дальнейшем ранее набранные фрагменты текста программы копируются и при необходимости корректируются.

3. При построчной реализации алгоритма значения случайного вектора, рассчитанные с помощью функции $\mathrm{runif}(2,-1,1)$, на каждом шаге копируются в переменную ς и становятся постоянными для данного примера, так как при каждом запуске программного кода возможны ветвления алгоритма в разных точках, и программный код будет давать ошибки при реализации, и не удается добиться стабильно работающего алгоритма построчной реализации для методов случайного поиска.

4. При написании единой функции пользователем, реализующей алгоритм метода наилучшей пробы, этого допущения нет. Поэтому результаты построчной реализации алгоритма и с помощью одной функции не совпадают.

5. Для скрытия части программного кода построчной реализации, расположенного между исходными данными и графиками, можно воспользоваться последовательностью операций, изложенной в [24]

6. Для получения навыков работы с алгоритмами метода наилучшей пробы необходимо несколько раз перезапустить расчет (комбинация клавиш «Ctrl+F9») и посмотреть, как изменится результаты расчета на графике.

7. Произвести расчет с использованием единой пользовательской функции для следующих вариантов начальных условий:

x_0	β	$M\varsigma$	t_0	R
$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$	0.75	10	0.75	0.25
$\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$	0.25	10	0.5	0.15

Надо помнить, что алгоритм построчной реализации для разных вариантов исходных данных не изменится по причинам, приведенным выше.

Перед выполнением программирования студент должен предварительно изучить разделы MathCAD 15:

- Ввод сопроводительного текста, переменных и функций.
- Приемы перемещения переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр и редактирование результатов расчета.
- Технологии написания и использования однострочных и многострочных функций.
- Векторизация.
- Работа с массивами, в том числе блочного массива.
- Дискретный аргумент.
- Визуализация результатов расчета в виде трехмерных графиков.
- Вставка файлов в текст программы.
- Численное решение систем нелинейных уравнений (блок **Given–MinErr**).
- Функции **min()**, **lookup()**.
- Матричные операции и функции.
- Оператор **if(условие, значение, значение)**.
- Включение и выключение вычисления функций и операторов.

Пример 1.2. Найти минимум функции Хаммельблау $f(x) = \left[x_0^2 + x_1 + 11\right]^2 + \left[x_0 + x_1^2 - 7\right]^2$ методом наилучшей пробы

1. Исходные данные и обозначения переменных: x_0 – начальная точка, β – коэффициент сжатия $(0 < \beta < 1)$, M – максимальное число испытаний, $t0$ – начальная величина шага, R – минимальная величину шага, N – максимальное число итераций при удачном шаге, j – индекс случайной расчетной точки y_j, k

– индекс итерации точек x_k при удачном шаге, y – вектор координат генерируемых случайных точек расчета.

Положить: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta = 0.5$, $M\varsigma = 10$, $R = 0.05$, $N = 10$, $t_0 = 1$, $k = 0$, $j = 1$.

Комментарий к листингам программы:

1. **Самостоятельно** произвести построчную реализацию алгоритма метода наилучшей пробы (см. пример 1.1).

2. Листинги с программой расчета приведен на Рис. 2.29–Рис. 2.43 на стр. 58–72.

3. Листинг с описанием единой функции, реализующий метод наилучшей пробы, приведен на Рис. 2.29–Рис. 2.31 на стр. 58–60.

4. Для получения навыков работы с алгоритмами метода наилучшей пробы необходимо несколько раз перезапустить расчет (комбинация клавиш «Ctrl+F9») и посмотреть, как изменится результаты расчета на графике.

5. Произвести расчет с использованием единой пользовательской функции для следующих вариантов начальных условий:

x_0	β	$M\varsigma$	t_0	R
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	0.5	10	1	0.25
$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	0.5	10	0.75	0.15
$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	0.5	10	0.1	0.01

Пример 1.3. Найти минимум функции Розенброка $f(x) = 100\left[x_1 - x_0^2\right]^2 + \left(1 - x_0\right)^2$ методом наилучшей пробы

1. Исходные данные и обозначения переменных: x_0 – начальная точка, β – коэффициент сжатия ($0 < \beta < 1$), M – максимальное число испытаний, $t0$ – начальная величина шага, R – минимальная величину шага, N – максимальное число итераций при удачном шаге, j – индекс случайной расчетной точки y_j, k – индекс итерации точек x_k при удачном шаге, y – вектор координат генерируемых случайных точек расчета.

Положить: $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta = 0.5$, $M\varsigma = 10$, $R = 0.05$, $N = 10$, $t_0 = 1$, $k = 0$, $j = 1$.

1. **<u>Самостоятельно</u>** произвести построчную реализацию алгоритма метода наилучшей пробы (см. пример 1.1).

2. Листинг с программой расчета и графиками выполнен в MathCAD 15 и приведен на Рис. 2.44–Рис. 2.53 на стр. 73–82.

3. Листинг с описанием собственных функций, реализующих метод наилучшей пробы в MathCAD 15, приведен на Рис. 2.29–Рис. 2.31 на стр. 58–60.

4. Для получения навыков работы с алгоритмами метода наилучшей пробы необходимо несколько раз перезапустить расчет (комбинация клавиш «Ctrl+F9») и посмотреть, как изменится результаты расчета на графике.

5. Произвести расчет с использованием единой пользовательской функции для следующих вариантов начальных условий:

x_0	β	$M\varsigma$	t_0	R
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	0.5	10	1	0.25
$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	0.5	10	0.75	0.15
$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	0.5	10	0.1	0.01

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Требования к выполнению самостоятельной работы:

1. Аналитический метод: найти стационарные точки, произвести их анализ и классификацию (минимум, максимум или седловая точка).

2. Численный метод:

- при построчном выполнении алгоритма метода наилучшей пробы рассчитать последовательность точек в виде блочного вектора (см. Пример 1.1 на стр. 7);

- провести научные исследования по определению чувствительности метода при изменении начальных параметров. Варьировать начальными параметрами таким образом, чтобы погрешность расчета составила 10%, 25% по сравнению с аналитическим решением.

3. Вариацию параметров производить при расчете с помощью единой пользовательской функции. Для одного из подобранных вариантов начальных условий произвести построчную реализацию метода наилучшей пробы.

4. Построить трехмерные графики поверхности и линий уровня, нанести точки теоретически полученных экстремумов и последовательность расчетных точек (см. Пример 1.1 на стр. 7).

Пример 1.4

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=x_1^3+x_2^3-3\cdot x_1\cdot x_2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: $x=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ точка минимума.

Пример 1.5

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=x_1^2+x_2^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: $x=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ точка минимума.

Пример 1.6

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=x_1^2-x_2^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}^T$

Ответ: $x=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ не является точкой минимума или максимума, а является седловой точкой.

Пример 1.7

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=x_1^2+x_2^4$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: $x=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ является точкой глобального минимума.

Пример 1.8

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1)^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Координата начальной точки: $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ является точкой глобального минимума.

Пример 1.9

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$ **аналитическим методом и методом наилучшей пробы.**

Координата начальной точки: $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}^T$ является точкой локального максимума.

Пример 1.10

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Координата начальной точки: $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ответ: в точке $x_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}^T$ – локальный минимум, в точке $x_1^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}^T$ – нет экстремума, так как не выполняются необходимые условия экстремума второго порядка.

Пример 1.11

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Координата начальной точки: $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ответ: в точке $x_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ - является точкой глобального минимума.

Пример 1.12

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=2x_1^3+4x_1x_2^2-10x_1x_2+x_2^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: в точке $x_1^*=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ – локальный минимум, в точке $x_2^*=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ – нет экстремума, так как не выполняются необходимые условия экстремума второго порядка.

Пример 1.13

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=\left(x_2-x_1^2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: в точке $x_1^*=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ – локальный минимум.

Пример 1.14

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x)=3x_1x_2-x_1x_2^2-x_1^2x_2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: в точке $x_1^*=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ – локальный минимум, в точке $x_2^*=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ – нет экстремума.

Пример 1.15

Найти безусловный максимум целевой функции Хаммельблау $f(x)=\left[x_0^2+x_1+11\right]^2+\left[x_0+x_1^2-7\right]^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки: $x0=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}^T$

Ответ: в точках $x_1^*=\begin{pmatrix}-0.271 & -0.923\end{pmatrix}^T$ –локальный максимум.

Пример 1.16

Проверить, является ли точки $x_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$**,** $x_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$**,** $x_3^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T$ **точками безусловного минимума целевой функции** $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - \left(x_1 + x_2\right)^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки - $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T$**. Подобрать координаты начальной точки, чтобы при реализации метода наилучшей пробы была найдена точка** $x_3^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T$

Ответ: точка $x_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ не является точкой безусловного локального минимума, точки $x_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ и $x_3^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T$ является точкой безусловного локального минимума.

Пример 1.17

Найти безусловный экстремум целевой функции Хаммельблау $f(x) = \left[x_0^2 + x_1 + 11\right]^2 + \left[x_0 + x_1^2 - 7\right]^2$ **аналитическим методом, методом наилучшей пробы, построить график функции и нанести расчетные точки.**
Координата начальной точки - $x0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T$**.Подобрать координаты начальных точек, чтобы при реализации метода наилучшей пробы были найдены другие (три) точки минимума**

Ответ: в точках $x_1^* = \begin{pmatrix} -3.779 & -3.283 \end{pmatrix}^T$, $x_2^* = \begin{pmatrix} -2.805 & 3.131 \end{pmatrix}^T$, $x_3^* = \begin{pmatrix} 3.584 & -1.848 \end{pmatrix}^T$, $x_1^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$ – локальный минимум.

1.4 Контрольные вопросы с ответами

1. Метод наилучшей пробы относится к оптимизационным методам ………… (вставить слово) порядка.
   Ответ: нулевого.

2. В методе наилучшей пробы используются системы направлений $d_1, d_2, ..., d_n$?

1. Да	2. Нет	3. В некоторых случаях	4. Вопрос не корректный

Ответ: 2. Нет.

3. Производные какого порядка используются в методе наилучшей пробы? (выбрать вариант)

1. Первого
2. Второго
3. Третьего
4. Четвертого
5. Не используются

Ответ: 5. Не используются.

4. При реализации метода наилучшей пробы вычисляется случайный вектор $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}, \ldots, \varsigma_{j_n})^T$. Значения элементов вектора ς_{j_i} случайно и равномерно распределены на некотором интервале. Выбрать интервал.

1. (0 –1)	2. (–1 –0)	3. (–1 –1)	4. (–2 –2)	5. Интервал не указан

Ответ: 3. (–1 –1).

5. При реализации метода наилучшей пробы вычисляется случайный вектор $\varsigma_j = (\varsigma_{j_1}, \ldots, \varsigma_{j_n})^T$. Какое количество элементов содержится в векторе, если исследуется уравнение с n неизвестными? Выбрать из таблицы

1. $n-10$	2. $n+1$	3. $n/2$	4. n	5. Нет такого значения

Ответ: 4. n.

6. При реализации метода наилучшей пробы вычислен случайный вектор $\varsigma = \begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.652 \end{pmatrix}$. Рассчитать значение единичного случайного вектора.

Ответ: $\xi = \begin{pmatrix} 0.704 \\ -0.71 \end{pmatrix}$ (пояснения: $\varsigma = \begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.652 \end{pmatrix}$, единичный случайный вектор

рассчитывается как $\xi = \dfrac{\varsigma}{\|\varsigma\|} = \dfrac{\varsigma}{\sqrt{\varsigma_0^2 + \varsigma_1^2}}$,

$$\xi = \frac{\begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.652 \end{pmatrix}}{\sqrt{(0.646)^2 + (-0.652)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.652 \end{pmatrix}}{0.918} = \begin{pmatrix} 0.704 \\ -0.71 \end{pmatrix}).$$

7. При реализации метода наилучшей пробы вычисляются координаты случайной точки y_j. Какое выражение используется для расчета?

1. $y_j = -x_k + t_k \xi_k$	2. $y_j = x_k - t_k \xi_k$	3. $y_j = x_k + t_k \xi_k$	4. Нет такого выражения

Ответ: 3. $y_j = x_k + t_k \xi_k$.

8. Чтобы шаг по i-ому направлению был удачен при использовании метода наилучшей пробы, необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство ………… (выбрать вариант),

1. $f(y_m) > f(x_k)$	2. $f(y_j) < f(x_k)$	3. $f(y_m) < f(x_k)$	4. Нет неравенства

Ответ: $f(y_m) < f(x_k)$.

9. Чтобы шаг по i-ому направлению был неудачен при использовании метода наилучшей пробы, необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство ……………. (выбрать вариант).

1. $f(y_m) \geq f(x_k)$	2. $f(y_j) > f(x_k)$	3. $f(y_m) < f(x_k)$	4. Нет неравенства

Ответ: 1. $f(y_m) \geq f(x_k)$.

10. При поиске минимума функции $f(x) = 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ методом наилучшей пробы рассчитать координаты случайной точки (y_j) для

$$x_k = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix},\ t_k = 1,\ \xi_j = \frac{\varsigma_j}{|\varsigma_j|} = \begin{pmatrix} -0.638 \\ -0.77 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y_j = \begin{pmatrix} 3.78 \\ 6.209 \end{pmatrix}$ (комментарий $y_j = x_k + t_k\xi_j = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -0.638 \\ -0.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.78 \\ 6.209 \end{pmatrix}$).

11. Сколько случайных точек анализируются одновременно при каждой итерации при поиске минимума функции с использованием метода наилучшей пробы ……… (выбрать вариант).

1. Больше одной	2. Две	3. Одна	4. Нет значения	5. Равное количеству переменных в уравнении	5. Вопрос не корректен

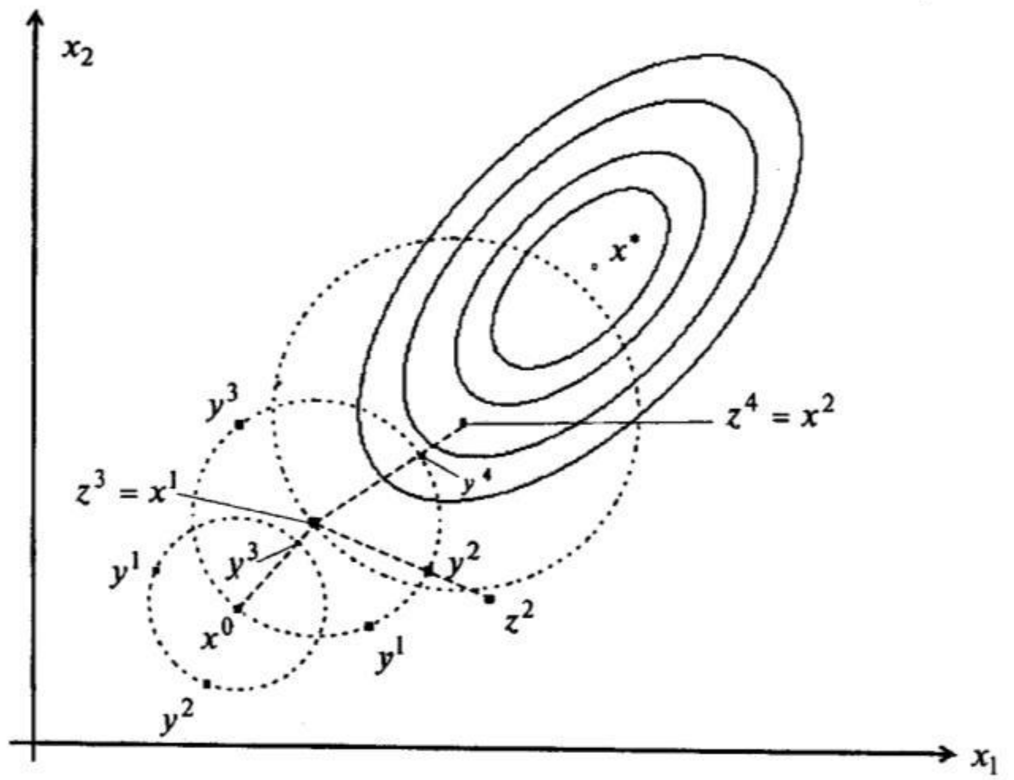
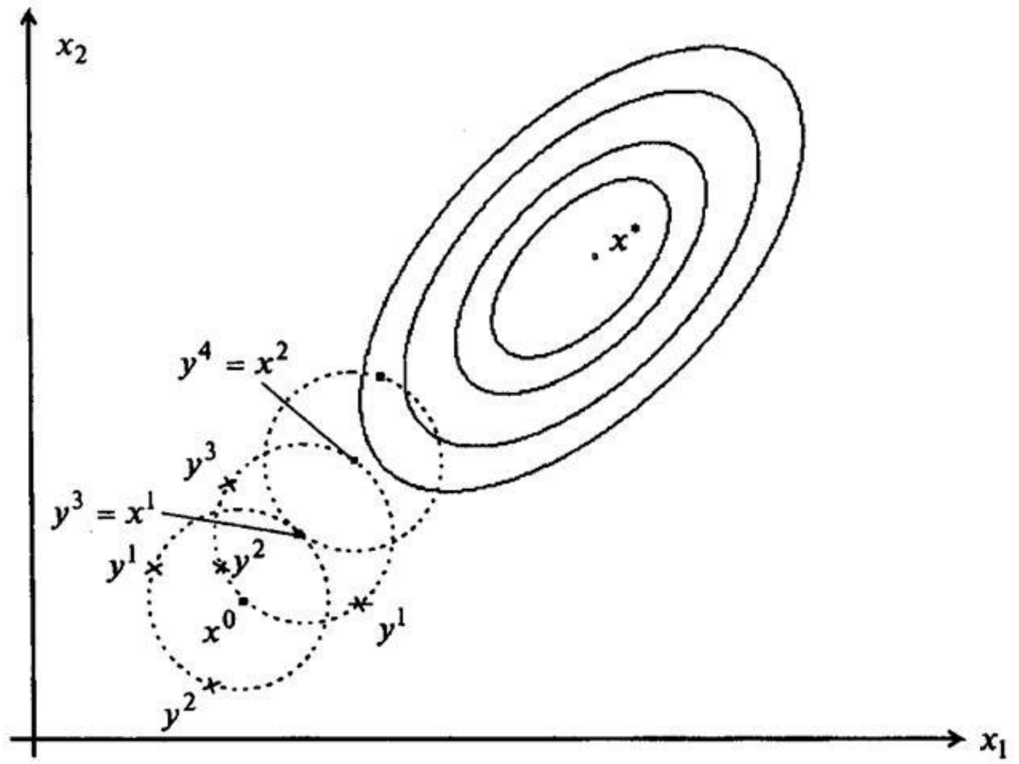
Ответ:1. Больше одной.

12. В методе наилучшей пробы параметр y_m определяется из соотношения ……… (выбрать вариант).

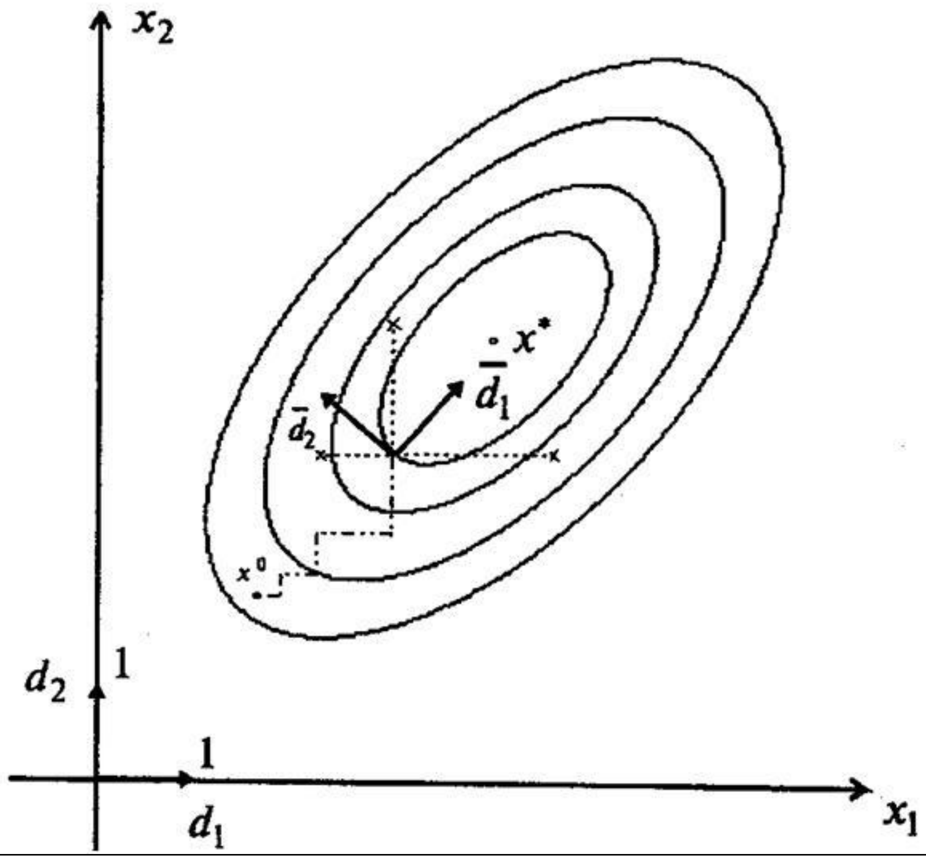
1. $y_m = \min\limits_{1 \leq j \leq M} y_i$	2. $f(y_m) = \min\limits_{1 \leq j \leq M} f(y_i)$	3. $y_m = \dfrac{\sum_{j=1}^{M} y_i}{M}$	4. Нет выражения	5. Вопрос не корректен

Ответ: 2. $f(y_m) = \min\limits_{1 \leq j \leq M} f(y_i)$.

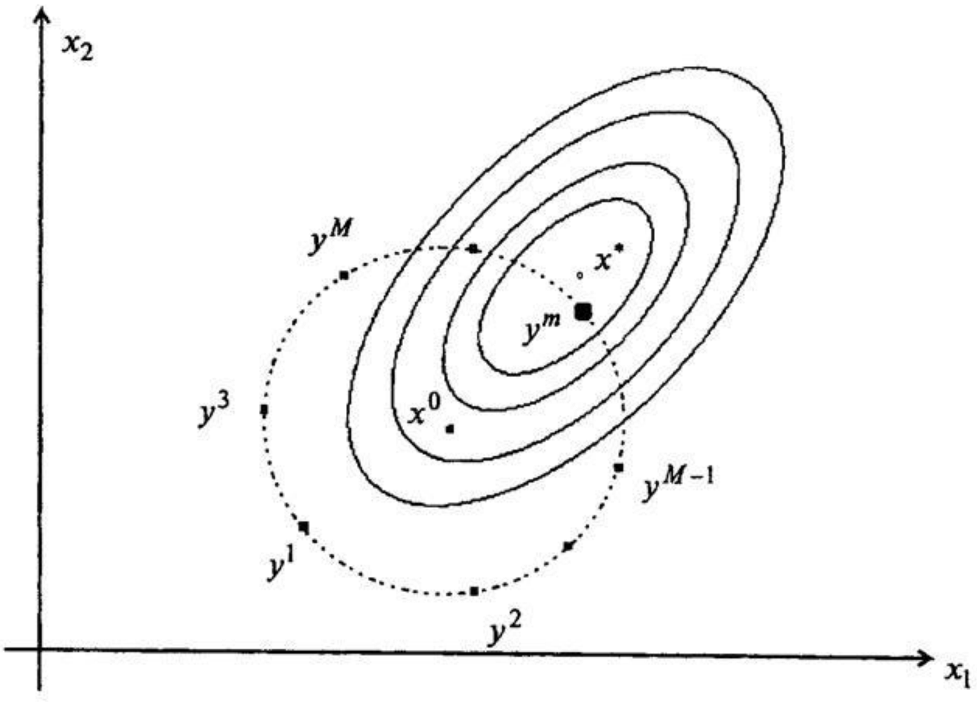
13.Выбрать рисунок, который иллюстрирует работу метода наилучшей пробы (выбрать вариант).

1. 
2. 

3.



4.



5. Нет такого рисунка

Ответ: 4.

14. Если шаг по j-ому направлению был удачен при использовании метода наилучшей пробы и выполняется условие $k = N$ (N – максимальное количество итераций с положительным шагом), то на следующей итерации модуль коэффициента β в выражении $t_k = \beta t_k$ для расчета длины шага должен быть ……… (выбрать вариант).

1. Больше 1	2. Меньше 1	3. Равен 1	4. Нет значения	5. Вопрос не корректен

Ответ:5. Вопрос не корректен (комментарий: при таких условиях расчет завершен и следующей итерации нет).

15. Если шаг по j-ому направлению был неудачен при использовании метода наилучшей пробы и выполняется условие $j < M$ (M – максимальное количество неудач), то на следующей итерации модуль коэффициента β в выражении $t_k = \beta t_k$ для расчета длины шага должен быть ……… (выбрать вариант).

1. Больше 1	2. Меньше 1	3. Равен 1	4. Нет значения	5. Вопрос не корректен

Ответ: 5. Вопрос не корректен (комментарий: в данном методе условие $j < M$ не используется).

16. Если шаг был неудачен при использовании метода наилучшей пробы и выполняется условие $f(y_m) > f(x_k)$, $t_k > R$ (t_k – шаг, R – минимальная величина шага), то на следующей итерации модуль коэффициента β в выражении $t_k = \beta t_k$ для расчета длины шага должен быть ……… (выбрать вариант).

1. Больше 1	2. Меньше 1	3. Равен 1	4. Нет значения	5. Вопрос не корректен

Ответ: 2. Меньше 1.

17. Если шаг был неудачен при использовании метода наилучшей пробы и выполняется условие $f(y_m) > f(x_k)$ и $t_k \le R$ (t_k – шаг, R – минимальная величина шага), то на следующей итерации модуль коэффициента β в выражении $t_k = \beta t_k$ для расчета длины шага должен быть ……… (выбрать вариант).

1. Больше 1	2. Меньше 1	3. Равен 1	4. Нет значения	5. Вопрос не корректен

Ответ: 5. Вопрос не корректен (комментарий: при таких условиях расчет завершен и следующей итерации нет).

18. При поиске минимума функции $f(x) = 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ методом наилучшей пробы рассчитать параметры для следующей итерации, если $y_m = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix}$, $x_k = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$, $t_k = 0.5$, коэффициент сжатия $\beta = 0.5$, $k = 6$.

Ответ: $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix} t_{k+1} = t_k = 1$, $k = 7$ (комментарий: так как $f\left(y_m = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix} \right) = 0.195 < f\left(x_k = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix} \right) = 0.199$ шаг удачен, положить $x_{k+1} = y_m = \begin{pmatrix} 4.833 \\ 5.906 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} = t_k = 0.5$, $k = k + 1 = 7$).

19. Если после расчетов при реализации метода наилучшей пробы выполняется неравенство $f(y_m) < f(x_k)$, какой шаг алгоритма следует далее (выбрать вариант)?

1. Завершить расчет.
2. Следующая итерация с существующими текущими параметрами $x_{k+1} = y_m$, $t_{k+1} = t_k$, $k = k$.
3. Следующая итерация с параметрами $x_{k+1} = y_m$, $t_{k+1} = t_k$, $k = k + 1$.
4. Проверить условие окончания расчета по параметру R.
5. Проверяется число неудачных итераций.
6. Оценить число неудачных шагов из текущей центральной точки.

Ответ: 3. Следующая итерация с параметрами $x_{k+1} = y_m$, $t_{k+1} = t_k$, $k = k + 1$.

20. Если после расчетов при реализации метода наилучшей пробы выполняется неравенство $f(y_m) \geq f(x_k)$, какой шаг алгоритма следует далее (выбрать вариант)?

1. Завершить расчет.
2. Следующая итерация с существующими текущими параметрами $x_{k+1} = y_m$, $t_{k+1} = t_k$, $k = k$.
3. Следующая итерация с параметрами $x_{k+1} = y_m$, $t_{k+1} = t_k$, $k = k + 1$.
4. Проверить условие окончания расчета по параметру R.
5. Проверяется число неудачных итераций.
6. Оценить число неудачных шагов из текущей центральной точки.
7. Проверить условие окончания расчета по параметру N.

Ответ: 6. Оценить число неудачных шагов из текущей центральной точки.

21. Если шаг был удачен при использовании метода наилучшей пробы, то на следующей итерации модуль коэффициента β в выражении $t_k = \beta t_k$ для расчета длины шага для следующей итерации должен быть ……… (выбрать вариант).

1. Больше 1	2. Меньше 1	3. Равен 1	4. Нет значения

Ответ: 3. Равен 1.

2 ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

2.1 Листинги программы поиска минимума функции $f(x) = 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ методом наилучшей пробы (Пример 1.1)

Пример №1.1: Найти локальный минимум функции

$f(x) := 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ методом наилучшей пробы.

Последовательность вычислений

Численный метод: реализовать алгоритм :

1. Построчно. Построить последовательность расчетных точек и рассчитать значение функции в этих точках, проверить выполнение условий, т.о. определить точку минимума.
2. С использованием одной пользовательской функции.
3. Сравнить результаты расчета

График. построить трехмерный график, нанести последовательность расчетных точек и точку локального минимума

Построить два типа графиков: 1. в виде поверхности. 2. в виде линий уровня

Вспомогательные функции и переменные, используемые при построчной реализации алгоритма

1. Функция для пересчета из блочного вектора в массив из двух колонок. На входе: xr- блочный вектор точек расчета.

На выходе: массив из двух колонок (x и y) - координат расчетных точек. Используется для подготовки данных расчета при построении графиков

$$v\_k(xr) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow {xr_0}^T \\ \text{for } i \in 1..\text{last}(xr) \\ \quad vx \leftarrow \text{stack}\left(vx, {xr_i}^T\right) \\ vx \end{array} \right.$$

2. Функция для расчета случайных векторов

На входе: Mζz - количество расчетных случайных точек, x0z - начальная (центральная) точка.

Рис. 2.1. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 1)

На выходе: случайные вектра в виде блочного вектора размером $M\zeta z$x1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, x0z) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 0..M\zeta z - 1 \\ \quad v_i \leftarrow runif(last(x0z)+1, -1, 1) \\ v \end{array}$$

3. Функция для расчета координат случайных точек
На входе: xz - начальная (центральная) точка, tz - шаг, ξz -вектор случайных единичных векторов размером $M\zeta z$x1.
На выходе: координаты случайных точек, в виде блочного вектора размером $M\zeta z$x1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$f\_y(xz, tz, \xi z) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 0..last(\xi z) \\ \quad vy_i \leftarrow xz + tz \cdot \xi z_i \\ vy \end{array}$$

4. Переменные (шу и шн), используются для оценки успешности шага по случайному направлению с помощью оператора -
$проверка\_шага := if\left(f\left(y_m\right) < f\left(x_k\right), шу, шн\right)$

шу := "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

шн := "Шаг не удачен. Оценить число неудач - M (Шаг 5)."
5. Переменные (оконч_k_меньше_N и оконч_k_равно_N), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру N с помощью оператора -
$условие\_оконч\_по\_N := if(k < N, k\_меньше\_N, k\_равно\_N)$

k_меньше_N := "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

k_равно_N := "k=N. Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

Рис. 2.2. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 2)

6. Переменные (tk_меньше_R и tk_больше_R), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру R с помощью оператора -
условие_оконч_по_R := if$(t_k \le R$,tk_меньше_R ,tk_больше_R)

tk_меньше_R := "Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

tk_больше_R := "Положить tk =β*tk, j=0, перейти к шагу 2"

Построчная реализация алгоритма метода случайного поиска с возвратом при неудачном шаге

1^0. Исходные данные и описание переменных, использованных при построчной реализации алгоритма

$f(x) := 4(x_0 - 5)^2 + (x_1 - 6)^2$ - исследуемая функция

$x0 := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ - начальная точка

$\beta := 0.5$ - коэффициент сжатия $0<\beta<1$

$M\zeta := 6$ - количество расчетных случайных точек

$N := 10$ - предельный индекс числа итераций при удачном шаге (всего 11 удачных шагов, так как для первого элемента $k := 0$)

$t0 := 1$ - начальная величина шага

$R := 0.5$ - минимальная величина шага

$k := 0$ - индекс итерации переменной (точки) x_k при удачном шаге

x - вектор с координатами точек при удачном шаге

ξ - случайный вектор единичной длины, определяющий направление шага при расчете координат случайных точек

Рис. 2.3. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 3)

$j := 0$ - индекс итерации случайной переменной (точки) - y_j

y - вектор с координатами случайных точек при случайном выборе направления шага

Внимание: В учебных целях значения для случайного вектора рассчитывается с помощью функции $f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, x0z)$, а затем копируется в переменную ζ и значение для ξ становится постоянным для данного примера. В противном случае не удается добиться стабильно работающего алгоритма для этого метода. При написании пользовательской функции, реализующий алгоритм, этого допущения нет.

Итерация $k = 0$ точек x_k

2^0 Расчет случайного единичный вектор ξ

$\zeta 0 := f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix}-0.997\\-0.613\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.17\\-0.299\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.646\\-0.652\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.421\\-0.392\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-0.817\\-0.705\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.977\\-0.762\end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix}-0.997\\-0.613\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.17\\-0.299\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.646\\-0.652\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.421\\-0.392\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-0.817\\-0.705\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.977\\-0.762\end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix}-0.852\\-0.524\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.494\\-0.869\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.704\\-0.71\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.732\\-0.681\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-0.757\\-0.653\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0.789\\-0.615\end{pmatrix}\right]$$

- случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

Рис. 2.4. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 4)

3^0 Расчет координат случайных точек.

Положить $t_k := t0,\ x_k := x0$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.494 \\ 8.131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.704 \\ 8.29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.732 \\ 8.319 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.243 \\ 8.347 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.789 \\ 8.385 \end{pmatrix}\right]$$ -

координаты случайных точек

4^0 Найти случайную точку с минимальным значением функции.
Проверить выполнение условия удачного шага

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 24.59$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$ - координаты

случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 45 \qquad f(y_m) = 24.59$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), шу, шн\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 1$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 1 \qquad N = 10$ контролируемые параметры

$условие\_оконч\_по\_N := \mathrm{if}(k < N, k\_меньше\_N, k\_равно\_N)$

Рис. 2.5. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 5)

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 1$ точек x_k

2^1 Расчет случайного единичный вектор ξ

ζ0 := f_вектор_ζ(Mζ,x0) - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.982 \\ 0.063 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.204 \\ -0.668 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.098 \\ -0.886 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.567 \\ 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.752 \\ 0.912 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.079 \\ -0.076 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} 0.364 \\ 0.444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.754 \\ 0.669 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.034 \\ -0.148 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.899 \\ 0.099 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.057 \\ 0.694 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.088 \\ 0.966 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.634 \\ 0.773 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.748 \\ 0.664 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.224 \\ -0.975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.994 \\ 0.109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.082 \\ 0.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.996 \end{pmatrix}\right] -$$

случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)$

3^1 Расчет координат случайных точек.

Положить $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 7.148 \\ 8.476 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 7.782 \\ 9.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.372 \\ 7.502 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.142 \\ 8.586 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.066 \\ 9.473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.057 \\ 9.472 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

Рис. 2.6. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 6)

4[1] Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 17.701$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 24.59 \quad f(y_m) = 17.701$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), шу, шн\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 2$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 2 \qquad N = 10$ контролируемые параметры

$условие\_оконч\_по\_N := \mathrm{if}(k < N, k\_меньше\_N, k\_равно\_N)$

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Рис. 2.7. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 7)

Итерация $k = 2$ точек x_k

2^2 Расчет случайного единичный вектор ξ

$\zeta 0 :=$ f_вектор_ζ(Mζ, x0) - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распепеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.724 \\ 0.559 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.994 \\ 0.223 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.468 \\ 0.68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.248 \\ 0.354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.982 \\ -0.448 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.176 \\ 0.675 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} 0.169 \\ -0.011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.481 \\ 0.241 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.609 \\ 0.152 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.823 \\ 0.455 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.336 \\ -0.37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.388 \\ -0.783 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.998 \\ -0.065 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.894 \\ 0.448 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.242 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.484 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.672 \\ -0.74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.444 \\ -0.896 \end{pmatrix}\right] -$$

случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3^2 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 9.14 \end{pmatrix}$ и $y :=$ f_y$(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 7.398 \\ 9.075 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.294 \\ 9.588 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.37 \\ 9.382 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.275 \\ 9.624 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.072 \\ 8.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.956 \\ 8.244 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

4^2 Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Рис. 2.8. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 8)

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 8.692$ - минимальное значение функции

$y_m := \text{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 5.956 \\ 8.244 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 17.701 \; f(y_m) = 8.692$ сравниваемые величины

$\text{проверка\_шага} := \text{if}\left(f(y_m) < f(x_k), \text{шу}, \text{шн}\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 5.956 \\ 8.244 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 3$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 3$ $N = 10$ контролируемые параметры

$\text{условие\_оконч\_по\_N} := \text{if}(k < N, \text{k\_меньше\_N}, \text{k\_равно\_N})$

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция $f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Рис. 2.9. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 9)

Итерация $k = 3$ точек x_k

2^3 Расчет случайного единичный вектор ξ

$\zeta 0 := f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.487 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.084 \\ 0.489 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.198 \\ 0.47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.145 \\ -0.697 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.15 \\ 0.034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.503 \\ -0.662 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} 0.488 \\ -0.278 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.543 \\ -0.541 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.085 \\ -0.892 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.049 \\ -0.811 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.783 \\ -0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.863 \\ -0.906 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.869 \\ -0.495 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.708 \\ -0.706 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.095 \\ -0.995 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.06 \\ -0.998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.742 \\ -0.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.69 \\ -0.724 \end{pmatrix}\right]$$

- случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3^3 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 5.956 \\ 8.244 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 6.825 \\ 7.749 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.248 \\ 7.538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.051 \\ 7.248 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.016 \\ 7.246 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.698 \\ 7.574 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.646 \\ 7.52 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

4^3 Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Рис. 2.10. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 10)

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 2.611$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 5.248 \\ 7.538 \end{pmatrix}$ - координаты

случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 8.692 \quad f(y_m) = 2.611$ сравниваемые величины

$\text{проверка\_шага} := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), \text{шу}, \text{шн}\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 5.248 \\ 7.538 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 4$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 4 \qquad N = 10$ контролируемые параметры

$\text{условие\_оконч\_по\_N} := \mathrm{if}(k < N, \text{k\_меньше\_N}, \text{k\_равно\_N})$

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 4$ точек x_k

Рис. 2.11. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 11)

2^4 Расчет случайного единичный вектор ξ

$\zeta 0 := f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.016 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.705 \\ -0.717 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.386 \\ -0.147 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.933 \\ -0.693 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.643 \\ -0.617 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.634 \\ -0.689 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} -0.923 \\ -0.621 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.693 \\ 0.771 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.609 \\ 0.291 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.818 \\ 0.843 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.698 \\ 0.139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.886 \\ 0.157 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.83 \\ -0.558 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.668 \\ 0.744 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.902 \\ 0.431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.696 \\ 0.718 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.981 \\ 0.195 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.985 \\ 0.174 \end{pmatrix}\right] -$$

случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3^4 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 5.248 \\ 7.538 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.579 \\ 8.282 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.345 \\ 7.969 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.944 \\ 8.256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.267 \\ 7.733 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.232 \\ 7.713 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

4^4 Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 2.315$ - минимальное значение функции

Рис. 2.12. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 12)

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 2.611$ $f(y_m) = 2.315$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := if\left(f(y_m) < f(x_k), шу, шн\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix}$,$t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 5$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 5$ $N = 10$ контролируемые параметры

$условие\_оконч\_по\_N := if(k < N, k\_меньше\_N, k\_равно\_N)$

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 5$ точек x_k

2^5 Расчет случайного единичный вектор ξ

Рис. 2.13. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 13)

$\zeta 0 := f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.464 \\ -0.441 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.364 \\ 0.444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.754 \\ 0.669 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.034 \\ -0.148 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.899 \\ 0.099 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.057 \\ 0.694 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} -0.715 \\ -0.864 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.388 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.31 \\ -0.803 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.901 \\ -0.072 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.456 \\ 0.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.256 \\ -0.9 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.638 \\ -0.77 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.757 \\ 0.653 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.933 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.997 \\ -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.785 \\ 0.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.274 \\ -0.962 \end{pmatrix}\right] -$$

случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3[5] Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 4.418 \\ 6.98 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 3.78 \\ 6.209 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.175 \\ 7.633 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.421 \\ 6.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.203 \\ 7.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.144 \\ 6.018 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

4[5] Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 0.199$ - минимальное значение функции

Рис. 2.14. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 14)

$y_m := \text{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 2.315$ $f(y_m) = 0.199$ сравниваемые величины

$\text{проверка\_шага} := \text{if}\left(f(y_m) < f(x_k), \text{шу}, \text{шн}\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 6$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 6$ $N = 10$ контролируемые параметры

$\text{условие\_оконч\_по\_N} := \text{if}\left(k < N, \text{k\_меньше\_N}, \text{k\_равно\_N}\right)$

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 6$ точек x_k

2[6] Расчет случайного единичный вектор ξ ^^^^^^^^^^^^^^

Рис. 2.15. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 15)

$\zeta 0 := f\_вектор\_\zeta(M\zeta, x0)$ - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распепеделенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.088 \\ 0.966 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.478 \\ -0.608 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 1.824 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.945 \\ 0.145 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.686 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.315 \\ 0.684 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} 0.234 \\ -0.499 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.576 \\ 0.428 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.837 \\ 0.711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.385 \\ -0.054 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.616 \\ 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.295 \\ -0.652 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.425 \\ -0.905 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.803 \\ 0.596 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.762 \\ 0.647 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.99 \\ -0.139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.528 \\ 0.849 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.412 \\ -0.911 \end{pmatrix}\right]$$

- случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3[б] Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 1$, $x_k = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 5.203 \\ 5.142 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.581 \\ 6.643 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.016 \\ 6.694 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.788 \\ 5.908 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.25 \\ 6.896 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.19 \\ 5.136 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

4[б] Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

<u>Найти случайную точку с минимальным значением функции.</u>

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 0.892$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 5.19 \\ 5.136 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Рис. 2.16. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 16)

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 0.199 \ \ f(y_m) = 0.892$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := if(f(y_m) < f(x_k), шу, шн)$

проверка_шага = "Шаг не удачен. Оценить число неудач - М (Шаг 5)."

Проверить окончание расчета по минимальной величине шага

$условие\_оконч\_по\_R := if(t_k \le R, tk\_меньше\_R, tk\_больше\_R)$

условие_оконч_по_R = "Положить tk =β*tk, j=0, перейти к шагу 2"

$t_k := \beta \cdot t_k \quad t_k = 0.5 \qquad j := 0$

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

2[7] Расчет случайного единичный вектор ξ

ζ0 := f_вектор_ζ(Mζ,x0) - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta0^T = \left[\begin{pmatrix}-0.78\\-0.372\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.428\\-0.719\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.669\\0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.495\\-0.997\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.612\\-0.579\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.106\\-0.772\end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix}0.969\\-0.698\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.423\\0.551\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.242\\0.376\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.134\\0.096\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.507\\-0.015\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.34\\0.247\end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

Рис. 2.17. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 17)

$\xi 0 := \frac{\overrightarrow{\zeta}}{|\zeta|}$, $\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.811 \\ -0.584 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.609 \\ 0.793 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.541 \\ 0.841 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.813 \\ 0.582 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.809 \\ 0.588 \end{pmatrix}\right]$ -

случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3^7 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 0.5$, $x_k = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 6.047 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$y^T = \left[\begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.083 \\ 6.444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.049 \\ 6.467 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.185 \\ 6.338 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.278 \\ 6.032 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.183 \\ 6.341 \end{pmatrix}\right]$ -
координаты случайных точек

4^7 Найти случайную точку с минимальным значением функции.
Проверить выполнение условия удачного шага

<u>Найти случайную точку с минимальным значением функции.</u>

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 0.195$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix}$ - координаты
случайной точки с минимальным значением функции.

<u>Проверка уловия удачного шага</u>

$f(x_k) = 0.199$ $f(y_m) = 0.195$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), шу, шн\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 7$

Рис. 2.18. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 18)

<u>Выполнение условия окончания расчета по N</u>

$k = 7$ $N = 10$ контролируемые параметры

условие_оконч_по_N := if(k < N ,k_меньше_N ,k_равно_N)

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 7$ точек x_k

2^8 Расчет случайного единичный вектор ξ

ζ0 := f_вектор_ζ(Mζ ,x0) - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} 0.504 \\ 0.087 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.127 \\ 0.392 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.127 \\ 0.156 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.257 \\ 8.299 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.392 \\ -0.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.643 \\ -0.085 \end{pmatrix} \right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} -0.69 \\ 0.341 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.308 \\ 0.596 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.963 \\ -0.409 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.749 \\ -0.798 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.714 \\ -0.383 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.628 \\ 0.628 \end{pmatrix} \right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.896 \\ 0.443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.459 \\ 0.888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.684 \\ -0.729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.881 \\ -0.473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \right]$$

- случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)$

Рис. 2.19. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 19)

3^8 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 0.5$, $x_k = \begin{pmatrix} 5.184 \\ 5.755 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$y^T = \left[\begin{pmatrix} 4.736 \\ 5.976 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.644 \\ 5.559 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.526 \\ 5.39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.743 \\ 5.518 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.537 \\ 6.108 \end{pmatrix} \right]$ - координаты случайных точек

4^8 Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

Найти случайную точку с минимальным значением функции.

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 0.048$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

Проверка уловия удачного шага

$f(x_k) = 0.195$ $f(y_m) = 0.048$ сравниваемые величины

$\text{проверка\_шага} := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), \text{шу}, \text{шн}\right)$

проверка_шага = "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

Положить $x_{k+1} := y_m$, $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$, $t_{k+1} := t_k$,

$k := k + 1 = 8$

Выполнение условия окончания расчета по N

$k = 8$ $N = 10$ контролируемые параметры

$\text{условие\_оконч\_по\_N} := \mathrm{if}(k < N, \text{k\_меньше\_N}, \text{k\_равно\_N})$

Рис. 2.20. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 20)

условие_оконч_по_N = "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

По алгоритму метода наилушей пробы необходимо положить $j := 0$. Однако при практической реализации метода фукция f_вектор_ζ(Mζ,x0) расчитывает все необходимые случайные вектора сразу. Поэтому данный идентификатор не используется, но приводится, при реализации метода.

Итерация $k = 8$ точек x_k

2^9 Расчет случайного единичный вектор ξ

ζ0 := f_вектор_ζ(Mζ,x0) - расчет заданного количества случайных векторов. В каждом элементе вектора значения равномерно распеределенный в итервале [-1 1]

$$\zeta 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.805 \\ -0.811 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.863 \\ 0.789 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.545 \\ -0.179 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.256 \\ -0.097 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.196 \\ 0.71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.131 \end{pmatrix}\right],$$

$$\zeta := \left[\begin{pmatrix} -0.054 \\ -0.947 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.09 \\ -0.728 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.574 \\ 0.594 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.317 \\ 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.684 \\ -2.501 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.849 \\ -0.288 \end{pmatrix}\right]^T -$$

случайные вектора

$$\xi 0 := \overrightarrow{\frac{\zeta}{|\zeta|}},$$

$$\xi 0^T = \left[\begin{pmatrix} -0.057 \\ -0.998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.123 \\ -0.992 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.695 \\ 0.719 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.491 \\ 0.871 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3.656 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.947 \\ -0.321 \end{pmatrix}\right]$$

- случайные вектора единичной длины $\left(\overrightarrow{|\xi 0|}\right)^T = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

3^9 Расчет координат случайных точек.

Положим $t_k = 0.5$, $x_k = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$ и $y := f\_y(x_k, t_k, \xi 0)$,

$$y^T = \left[\begin{pmatrix} 4.926 \\ 5.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.893 \\ 5.703 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.607 \\ 6.558 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.2 \\ 6.635 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.454 \\ 6.197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.481 \\ 6.038 \end{pmatrix}\right] -$$

координаты случайных точек

Рис. 2.21. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 21)

4^8 Найти случайную точку с минимальным значением функции. Проверить выполнение условия удачного шага

<u>Найти случайную точку с минимальным значением функции.</u>

$f\_y_m := \min\left(\overrightarrow{f(y)}\right) = 0.112$ - минимальное значение функции

$y_m := \mathrm{lookup}\left(f\_y_m, \overrightarrow{f(y)}, y\right)_0 = \begin{pmatrix} 4.926 \\ 5.7 \end{pmatrix}$ - координаты случайной точки с минимальным значением функции.

<u>Проверка уловия удачного шага</u>

$f(x_k) = 0.048 \quad f(y_m) = 0.112$ сравниваемые величины

$проверка\_шага := \mathrm{if}\left(f(y_m) < f(x_k), шу, шн\right)$

проверка_шага = "Шаг не удачен. Оценить число неудач - М (Шаг 5)."

<u>Проверить окончание расчета по минимальной величине шага</u>

$условие\_оконч\_по\_R := \mathrm{if}\left(t_k \le R, tk\_меньше\_R, tk\_больше\_R\right)$

условие_оконч_по_R = "Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

<u>Результаты расчета</u>

$XR_{min} := x_{last(x)} \quad XR_{min} = \begin{pmatrix} 4.954 \\ 6.199 \end{pmatrix}$ координата точки минимума

$fXR_{min} := f\left(XR_{min}\right) = 0.048$ значение функции в точке минимума

$Xx := x$ вектор расчетных значений точек при положительном шаге

Рис. 2.22. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 22)

$$Xx^T = \left[\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}7.148\\8.476\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6.4\\9.14\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.956\\8.244\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.248\\7.538\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4.418\\6.98\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4.778\\6.047\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5.184\\5.755\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4.954\\6.199\end{pmatrix}\right]$$

****

РАСЧЕТ ЗАВЕРШЕН

****

===

Реализация алгоритма метода наилучшей пробы с помощью пользовательской функции

Подключить файл "Функция МНП.xmcd" с описаниями собственных функций

Ссылка:F:\SAR\многомерная численная 0 порядка\Метод наилучшей пробы\Функция МНП.xmcd(R)

Исходные параметры

$x0 = \begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$ $M\zeta = 6$ $N = 10$ $t0 = 1$ $R = 0.5$ $\beta = 0.5$

$МНП := F\_МНП(f, x0, M\zeta, N, t0, R, \beta, вх)$

$МНП^T = (\{2,1\}\ \ \{10,1\}\ \ 60)$ результаты расчета (функция возвращает вектор из трех парамертов: 1 элемент - коррдинаты точки минимума функции, 2 элемент - вектор расчетных значений точек при положительном шаге, 3 элемент - общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

Результаты расчета

$XR1_{min} := МНП_0 = \begin{pmatrix}5.077\\6.037\end{pmatrix}$ точка минимума

$fXR1_{min} := f(XR1_{min}) = 0.025$ значение функции в точке минимума

Рис. 2.23. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 23)

кол_точек := $МНП_2 = 60$ — общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

X1z := $МНП_1$ — Вектор расчетных значений точек

X1z := $МНП_1$ — Вектор расчетных значений точек

$X1z^T =$

	0	1
0	[2, 1]	...

::

элементы вектора X1z с 0 по 6

X1z0_9 := submatrix(X1z ,0 ,6 ,0 ,0)

$$X1z0\_9^T = \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.015 \\ 9.172 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.571 \\ 8.276 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.776 \\ 8.884 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.998 \\ 8.255 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.414 \\ 7.345 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.772 \\ 6.579 \end{pmatrix} \right]$$

элементы вектора X1z с 7 по конца

X1z7_end := submatrix(X1z ,7 ,last(X1z) ,0 ,0)

$$X1z7\_end^T = \left[\begin{pmatrix} 4.866 \\ 5.583 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.077 \\ 6.037 \end{pmatrix} \text{"Выход по R. Есть минимум."} \right]$$

::

****

Аналитический расчет точки минимума функции

$f1(x,y) := 4(x-5)^2 + (y-6)^2$ — исследуемая функция (формальные параметры записаны в виде двух переменных)

Рис. 2.24. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 24)

$xx := 8 \qquad yy := 9$ начальное приближение координаты минимума

Given

$$\frac{d}{dxx} f1(xx, yy) = 0 \qquad \frac{d}{dyy} f1(xx, yy) = 0$$

$XT_{min} := Minerr(xx, yy) \qquad XT_{min} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ координата точки минимума

$fXT_{min} := f1\left(XT_{min_0}, XT_{min_1}\right) = 0$ значение функции в точке минимума

Погрешность численного расчета

$$\Delta X\% := \frac{\left|XR_{min} - XT_{min}\right|}{\left|XR_{min}\right|} \cdot 100 = 2.572$$

погрешность определения координат точки минимума

$$\Delta f\% := \frac{fXR1_{min} - fXT_{min}}{fXR1_{min}} \cdot 100 = 100$$

погрешность определения значения функции в точке минимума

Вывод: Погрешность определения координаты точки минимума $\Delta X\% = 2.572$ процента, погрешность определения значения функции в точке минимума $\Delta f\% = 100$ процентов. Алгоритм метода хорошо работает с данного типа функциями

Графическое отображение результатов расчета

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -3<x<8, -3<y<9, с шагом 0.1, нанести расчетные точки.

Расчет матрицы для постоения поверхности функции, используя дискретный аргумент.

$x_{min} := 0 \quad x_{max} := 10 \quad y_{min} := -3 \quad y_{max} := 14 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

Рис. 2.25. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 25)

кол. точек расчета

$$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Ni = 100 \qquad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y} \qquad Nj = 170$$

$$i := 0..Ni \qquad j := 0..Nj$$

$$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad FM := \overrightarrow{f1(x1, y1)}$$

Теоретические координаты точки минимума (красная точка)

$X12_0 := XT_{min_0} = 5$ значение x-составляющей

$Y12_0 := XT_{min_1} = 6$ значение y-составляющей

$Z12_0 := fXT_{min} = 0$ значение z-составляющей

Расчетные координаты точки минимума (черный крест)

$XT12_0 := XR1_{min_0} = 5.077$ значение x-составляющей

$YT12_0 := XR1_{min_1} = 6.037$ значение y-составляющей

$ZT12_0 := fXR1_{min} = 0.025$ значение z-составляющей

Координаты всех расчетных точек (черная кривая)

Преобразование расчетных точек в двухстолбцовый массив и расчет значений функции в этих точках. (Преобразование необходимы для построения точек на графике)

$X2z := submatrix(X1z, 0, last(X1z) - 1, 0, 0)$ удаление из вектора последнего элемента

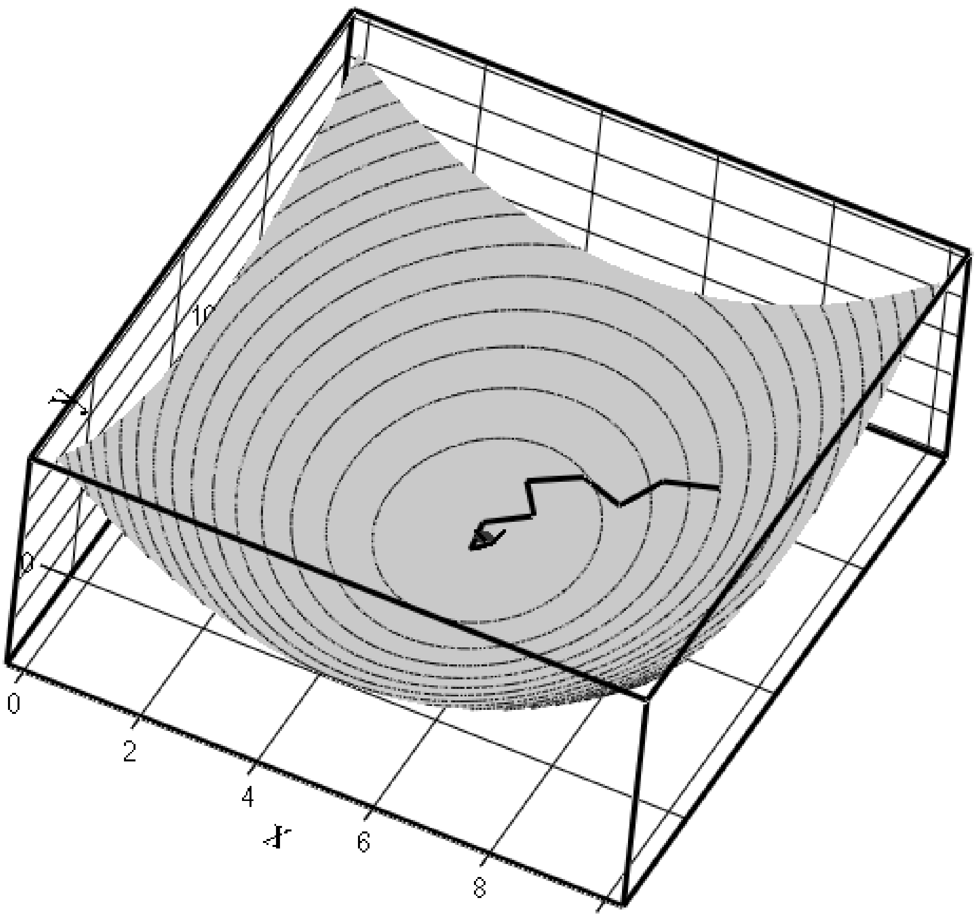
Рис. 2.26. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 26)

$X2G := v\_k(X2z)$ преобразование блочного вектора, каждый элемент которого - вектор из двух элементов, в матрицу из двух столбцов

$fX2G := \overrightarrow{f1\left(X2G^{\langle 0\rangle}, X2G^{\langle 1\rangle}\right)}$ значения функции в расчетных точках.

$fX2G^{T} = (45\ \ 26.301\ \ 15.047\ \ 10.724\ \ 5.085\ \ 2.495\ \ 0.544\ \ 0.245\ \ 0.025)$

График поверхности исследуемой функции и полученных расчетных точек



$(x1, y1, FM), (X12, Y12, Z12), (XT12, YT12, ZT12), \left(X2G^{\langle 0\rangle}, X2G^{\langle 1\rangle}, fX2G\right)$

Рис. 2.27. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 27)

Рис. 2.28. Листинг программы расчета минимума функции методом наилучшей пробы (Пример 1.1, часть 28)

2.2 Листинги программы с описанием собственных функций для поиска минимума функции методом наилучшей пробыв пакете MathCAD 15

Функция, реализующая метод наилучшей пробы (МНП)
(Описание функции)

Функция для расчета случайных векторов
На входе: Mζz - количество расчетных случайных точек, x0z - начальная (центральная) точка.
На выходе: случайные вектра в виде блочного вектора размером Mζzx1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, x0z) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..M\zeta z - 1 \\ \quad v_i \leftarrow runif(last(x0z)+1, -1, 1) \\ v \end{array} \right.$$

Функция для расчета координат случайных точек
На входе: xz - начальная (центральная) точка, tz - шаг, Mζz - количество случайных векторов.
На выходе: координаты случайных точек, в виде блочного вектора размером Mζzx1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$f1\_y(xz, tz, M\zeta z) := \left| \begin{array}{l} v\zeta \leftarrow f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, xz) \\ v\xi \leftarrow \overrightarrow{\dfrac{v\zeta}{|v\zeta|}} \\ \text{for } i \in 0..last(v\xi) \\ \quad vy_i \leftarrow xz + tz \cdot v\xi_i \\ vy \end{array} \right.$$

Рис. 2.29. Листинг с описанием собственной функции, реализующей поиск минимума функции методом наилучшей пробы (часть 1)

Функция для расчета минимума методом наилучшей пробы.
На входе: fz - имя исследуемой функции, x0z - вектор координат исходной точки, Mζz - количество расчетных случайных точек, Nz - предельный индекс числа итераций при удачном шаге, t0z - начальный шаг, Rz - минимальный шаг, βz - кооэфициент сжатия, вх - вектор размером 2x1 - информационные сообщения о причинах завершения расчетов.
На выходе: блочный вектор размером 3x1: 1 элемент - vx_{min}- расчетная точка минимума, 2 элемент - vx - координаты всех удачных расчетных точек в виде блочного вектора, 3 элемент - jj - общее количество рачетов (удачных и не удачных).

$$вх := \begin{pmatrix} \text{"Выход по N. Есть минимум."} \\ \text{"Выход по R. Есть минимум."} \end{pmatrix}$$

```
F_МНП(fz, x0z, Mζz, Nz, t0z, Rz, βz, вх) := | jj ← 0
                                             | k ← 0
                                             | j ← 0
                                             | vx_k ← x0z
                                             | vt_k ← t0z
                                             | while  k < Nz
                                             |    | vy ← f1_y(vx_k, vt_k, Mζz)
                                             |    | vf_y_m ← min(→fz(vy))
                                             |    | vy_m ← lookup(vf_y_m, →fz(vy), vy)_0
                                             |    | jjy ← Mζz
                                             |    | jj ← jj + jjy
                                             |    | if  fz(vy_m) < fz(vx_k)
```

Рис. 2.30. Листинг с описанием собственной функции, реализующей поиск минимума функции методом наилучшей пробы (часть 2)

```
        vx[k+1] ← vy[m]
        vt[k+1] ← vt[k]
        k ← k + 1
        j ← 0  if  k < Nz
        otherwise
          vx[min] ← vx[k]
          vx[k+1] ← вх[0]
    otherwise
        if  vt[k] ≤ Rz
          vx[min] ← vx[k]
          vx[k+1] ← вх[1]
          return (vx[min], vx, jj)
        otherwise
          vt[k] ← βz·vt[k]
          j ← 0
(vx[min], vx, jj)
```

Рис. 2.31. Листинг с описанием собственной функции, реализующей поиск минимума функции методом наилучшей пробы (часть 3)

2.3 Листинги программы поиска минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробыв пакете MathCAD 15 (Пример 1.2)

Пример №1.2: Найти локальный минимум функции Хаммельблау методом наилучшей пробы
Последовательность вычислений
Численный метод: реализовать алгоритм :
1. Построчно. Построить последовательность расчетных точек и рассчитать значение функции в этих точках, проверить выполнение условий, т.о. определить точку минимума.
2. С использованием одной пользовательской функции.
3.Сравнить результаты расчета
График. построить трехмерный график, нанести последовательность расчетных точек и точку локального минимума
Построить два типа графиков: 1. в виде поверхности. 2. в виде линий уровня

Вид функции Хаммельблау напоминает глубокую яму с четырьмя углублениями и одной выпуклостью на дне, что сильно осложняет реализацию многих алгоритмов оптимизации

Вспомогательные функции и переменные, используемые при построчной реализации алгоритма
1. Функция для пересчета из блочного вектора в массив из двух колонок. На входе: xr- блочный вектор точек расчета.
На выходе: массив из двух колонок (x и y) - координат расчетных точек. Используется для подготовки данных расчета при построении графиков

$$v\_k(xr) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow {xr_0}^T \\ \text{for } i \in 1..last(xr) \\ \quad vx \leftarrow stack\left(vx, {xr_i}^T\right) \\ vx \end{array} \right.$$

Рис. 2.32. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 1)

2. Функция для расчета случайных векторов

На входе: $M\zeta z$ - количество расчетных случайных точек, $x0z$ - начальная (центральная) точка.

На выходе: случайные вектра в виде блочного вектора размером $M\zeta z$x1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$
f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, x0z) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..M\zeta z - 1 \\
\quad v_i \leftarrow \text{runif}(\text{last}(x0z) + 1, -1, 1) \\
v
\end{array}
\right.
$$

3. Функция для расчета координат случайных точек

На входе: xz - начальная (центральная) точка, tz - шаг, ξz -вектор случайных единичных векторов размером $M\zeta z$x1.

На выходе: координаты случайных точек, в виде блочного вектора размером $M\zeta z$x1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$
f\_y(xz, tz, \xi z) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..\text{last}(\xi z) \\
\quad vy_i \leftarrow xz + tz \cdot \xi z_i \\
vy
\end{array}
\right.
$$

Рис. 2.33. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 2)

4. Переменные (шу и шн), используются для оценки успешности шага по случайному направлению с помощью оператора -

проверка_шага := if$\left(f\left(y_m\right) < f\left(x_k\right), \text{шу}, \text{шн}\right)$

шу := "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

шн := "Шаг не удачен. Оценить число неудач - M (Шаг 5)."

5. Переменные (оконч_k_меньше_N и оконч_k_равно_N), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру N с помощью оператора -

условие_оконч_по_N := if(k < N, k_меньше_N, k_равно_N)

k_меньше_N := "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

k_равно_N := "k=N. Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

6. Переменные (tk_меньше_R и tk_больше_R), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру R с помощью оператора -

условие_оконч_по_R := if$\left(t_k \le R, \text{tk_меньше_R}, \text{tk_больше_R}\right)$

tk_меньше_R := "Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

tk_больше_R := "Положить tk =β*tk, j=0, перейти к шагу 2"

Построчная реализация алгоритма метода случайного поиска с возвратом при неудачном шаге

1⁰. Исходные данные и описание переменных, использованных при построчной реализации алгоритма

$f(x) := \left[\left(x_0\right)^2 + x_1 - 11\right]^2 + \left[x_0 + \left(x_1\right)^2 - 7\right]^2$ исследуемая функция Хаммельблау

Рис. 2.34. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 3)

$x0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ - начальная точка

$\beta := 0.5$ - коэффициент сжатия $0<\beta<1$

$M\zeta := 10$ - количество расчетных случайных точек

$N := 10$ - предельный индекс числа итераций при удачном шаге (всего 11 удачных шагов, так как для первого элемента $k := 0$)

$t0 := 1$ - начальная величина шага

$R := 0.05$ - минимальная величина шага

$k := 0$ - индекс итерации переменной (точки) x_k при удачном шаге

x - вектор с координатами точек при удачном шаге

ξ - случайный вектор единичной длины, определяющий направление шага

$j := 0$ - индекс итерации случайной переменной (точки) - y_j

y - вектор с координатами случайных точек при случайном выборе направления шага

Внимание: В учебных целях значения для случайного вектора рассчитывается с помощью функции f_вектор_ζ(Mζz ,x0z) , а затем копируется в переменную ζ и значение для ξ становится постоянным для данного примера. В противном случае не удается добиться стабильно работающего алгоритма для этого метода. При написании пользовательской функции, реализующий алгоритм, этого допущения нет.

Далее построчную реализацию алгоритма проделать самостоятельно

****

РАСЧЕТ ЗАВЕРШЕН

****

Рис. 2.35. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 4)

==

Реализация алгоритма метода случайного поиска с возвратом при неудачном шаге с помощью пользовательской функции

Подключить файл "Функция СМ ВНШ.xmcd" с описаниями собственных функций

Ссылка:D:'Студенты\Optimiz'многомерная численная 0 порядка'Метод наилучшей пробы'МНП ХАММЕЛЬБЛАУ'Функция МНП.xmcd(R)

Исходные параметры

$x0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $M\zeta = 10$ $N = 10$ $t0 = 1$ $R = 0.05$ $\beta = 0.5$

$МНП := F\_МНП(f, x0, M\zeta, N, t0, R, \beta, вх)$

$МНП^T = (\{2,1\} \ \{9,1\} \ 130)$ результаты расчета (функция возвращает вектор из трех параметров: 1 элемент - координаты точки минимума функции, 2 элемент - вектор расчетных значений точек при положительном шаге, 3 элемент - общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

Результаты расчета

$XR1_{min} := МНП_0 = \begin{pmatrix} 3.575 \\ -1.86 \end{pmatrix}$ точка минимума

$fXR1_{min} := f(XR1_{min}) = 7.694 \times 10^{-3}$ значение функции в точке минимума

$кол\_точек := МНП_2 = 130$ общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

$X1z := МНП_1$ Вектор расчетных значений точек

$X1z^T = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.998 \\ -0.93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.973 \\ -0.711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.908 \\ -1.067 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.526 \\ -1.853 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.6 \\ -1.752 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.56 \\ -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.575 \\ -1.86 \end{pmatrix} \text{"Выход по R. Есть минимум."} \right]$

Рис. 2.36. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 5)

::

элементы вектора X1z с 0 по 6

X1z0_6 := submatrix(X1z, 0, 6, 0, 0)

$$X1z0\_6^T = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.998 \\ -0.93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.973 \\ -0.711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.908 \\ -1.067 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.526 \\ -1.853 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.6 \\ -1.752 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.56 \\ -1.8 \end{pmatrix} \right]$$

элементы вектора X1z с 7 по конца

X1z7_end := submatrix(X1z, 7, last(X1z), 0, 0)

$$X1z7\_end^T = \left[\begin{pmatrix} 3.575 \\ -1.86 \end{pmatrix} \ \text{"Выход по R. Есть минимум."} \right]$$

::

****

Вывод: Точка минимума равна $XR1_{min} = \begin{pmatrix} 3.575 \\ -1.86 \end{pmatrix}$, значение функции в точке минимума равно $f(XR1_{min}) = 7.694 \times 10^{-3}$

****

Аналитический расчет точки минимума функции

$f\_X(x, y) := \left(x^2 + y - 11\right)^2 + \left(x + y^2 - 7\right)^2$ исследуемая функция (формальные параметры записаны в виде двух переменных)

1. Получить аналитические выражения производных фукции по переменным x, y, используя символьный метод

$$\frac{d}{dx} f\_X(x, y) \rightarrow 2 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \left(x^2 + y - 11\right) + 2 \cdot y^2 - 14$$

$$\frac{d}{dy} f\_X(x, y) \rightarrow 2 \cdot y + 4 \cdot y \cdot \left(y^2 + x - 7\right) + 2 \cdot x^2 - 22$$

Рис. 2.37. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 6)

2. Найти минимумы функций, используя блок расчета Given-MinErr. В качестве уравнений использовать выражения для первых производных (скопировав их).
При решении использовать метод LevenbergMarquardt.

$$xx := \begin{pmatrix} -0.5 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad yy := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ начальные приближение

Given

$$4\cdot\left(xx^2 + yy - 11\right)\cdot xx + 2\cdot xx + 2\cdot yy^2 - 14 = 0$$

$$2\cdot xx^2 + 2\cdot yy - 22 + 4\cdot\left(xx + yy^2 - 7\right)\cdot yy = 0$$

$$XT_{min} := \overrightarrow{Minerr(xx, yy)}$$

$$XT_{min}^{T} = \left[\begin{pmatrix} -3.779 \\ -2.805 \\ 3.584 \\ 3 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} -3.283 \\ 3.131 \\ -1.848 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$ координата точки минимума

$$fXT_{min} := f\_X\left(XT_{min_0}, XT_{min_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ значение функции в точке минимума

3. Определить максимум функции на "дне ямы" используя блок given-Maximize

$xx0 := 0$ $yy0 := 0$ начальное приближение координат точки максимума

Given

$xx0 \ge -3.5$ $yy0 \ge -3.5$ Ограничения в виде неравеств.
$xx0 \le 3.5$ $yy0 \le 3.5$ Ограничивается зона дна ямы. В противном случае максимум всегда будет на стенке ямы.

Рис. 2.38. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 7)

$X_{max} := \text{Maximize}(f\_X, xx0, yy0) \quad X_{max} = \begin{pmatrix} -0.271 \\ -0.923 \end{pmatrix}$ Координаты точки максимума на дне ямы

$fX_{max} := f\_X\left(X_{max_0}, X_{max_1}\right) = 181.617$ Значение функции в точке максимума

Погрешность численного расчета

$XT1_{min} := \begin{bmatrix} \left(XT_{min_0}\right)_3 \\ \left(XT_{min_1}\right)_3 \end{bmatrix}$ формирование координат теоретической точки минимума

Графическое отображение результатов расчета

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -6<x<6, -6<y<6, с шагом 0.1, нанести расчетные точки.

Расчет матрицы для постоения поверхности функции, используя дискретный аргумент.

$x_{min} := -6 \quad x_{max} := 6 \quad y_{min} := -6 \quad y_{max} := 6 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$

$Ni = 120 \qquad Nj = 120$ кол. точек расчета

$i := 0..Ni \qquad j := 0..Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad FM := \overrightarrow{f\_X(x1, y1)}$

Теоретические координаты точек минимума (красная точка)

$X12 := XT_{min_0} \quad X12^T = (-3.779 \quad -2.805 \quad 3.584 \quad 3)$ значение x-составляющей

Рис. 2.39. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 8)

$Y12 := XT_{min_1}$ $\quad Y12^T = (-3.283 \;\; 3.131 \;\; -1.848 \;\; 2)$ значение y-составляющей

$Z12 := fXT_{min}$ $\quad Z12^T = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$ значение z-составляющей

<u>Рассчитанные по алгоритму координаты точки минимума (черный крест)</u>

$XT12_0 := XR1_{min_0} = 3.575$ значение x-составляющей

$YT12_0 := XR1_{min_1} = -1.86$ значение y-составляющей

$ZT12_0 := fXR1_{min} = 7.694 \times 10^{-3}$ значение z-составляющей

<u>Координаты всех расчетных по алгоритму (черная кривая)</u>

Преобразование расчетных точек в двухстолбцовый массив и расчет значений функции в этих точках. (Преобразование необходимы для построения точек на графике)

$X2z := \mathrm{submatrix}(X1z, 0, \mathrm{last}(X1z) - 1, 0, 0)$ удаление из вектора последнего элемента

элементы вектора X2z с 0 по 5

$X2z0\_5 := \mathrm{submatrix}(X2z, 0, 5, 0, 0)$

$$X2z0\_5^T = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.998 \\ -0.93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.973 \\ -0.711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.908 \\ -1.067 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.526 \\ -1.853 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.6 \\ -1.752 \end{pmatrix}\right]$$

элементы вектора X2z с 6 по 7

$X2z6\_7 := \mathrm{submatrix}(X2z, 6, \mathrm{last}(X2z), 0, 0)$

$$X2z6\_7^T = \left[\begin{pmatrix} 3.56 \\ -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.575 \\ -1.86 \end{pmatrix}\right]$$

Рис. 2.40. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 9)

::

X2G := v_k(X2z)   преобразование блочного вектора в матрицу из двух столбцов

n := last(X2z) = 7   индекс последнего элемента в массиве

::

элементы вектора X2G с 0 по n = 7

X2G0_7 := submatrix(X2G, 0, n, 0, 1)

$$X2G0\_7^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0.998 & 1.973 & 2.908 & 3.526 & 3.6 & 3.56 & 3.575 \\ -1 & -0.93 & -0.711 & -1.067 & -1.853 & -1.752 & -1.8 & -1.86 \end{pmatrix}$$

::

$fX2G := \overrightarrow{f\_X\left(X2G^{\langle 0\rangle}, X2G^{\langle 1\rangle}\right)}$ значения функции в расчетных точках.

::

элементы вектора fX2G с 0 по n = 7

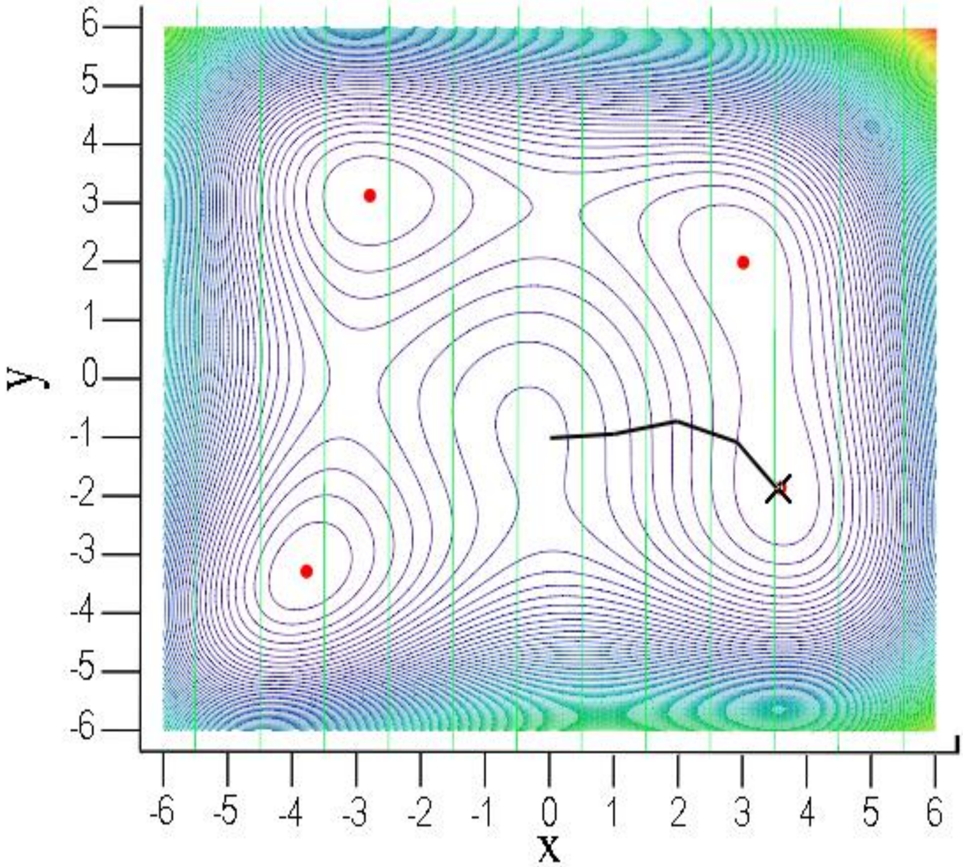
fX2G0_7 := submatrix(fX2G, 0, n, 0, 0)

$$fX2G0\_7^{T} = \begin{pmatrix} 180 & 145.966 & 81.55 & 21.769 & 0.177 & 0.152 & 0.057 & 7.694 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

::

Рис. 2.41. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 10)

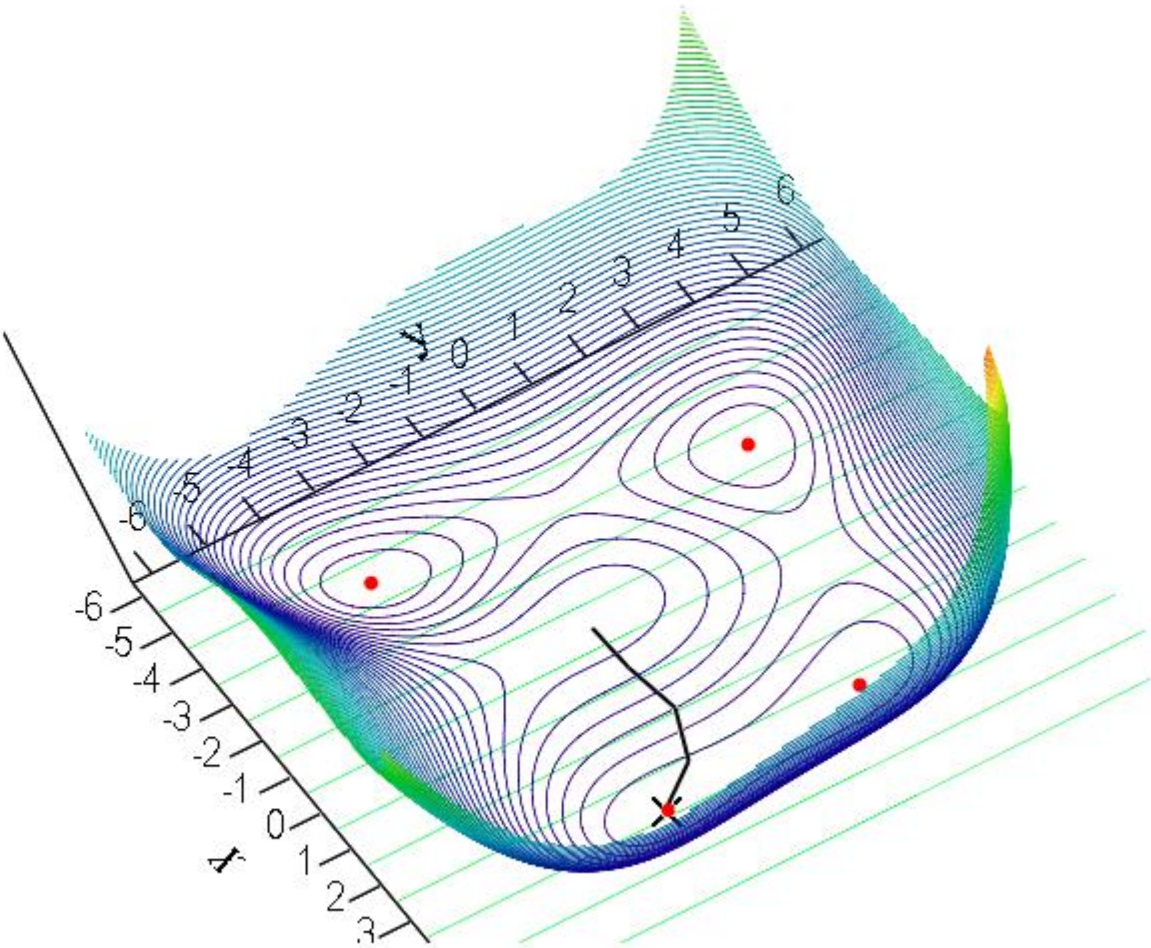
График в виде линий уровня исследуемой функции, теоретические и расчетные точки



$(x1, y1, FM), (X12, Y12, Z12), \left(X2G^{\langle 0 \rangle}, X2G^{\langle 1 \rangle}, fX2G\right), (XT12, YT12, ZT12)$

Рис. 2.42. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 11)

График в виде поверхности исследуемой функции, теретические и расчетные точки



$(x1, y1, FM), (X12, Y12, Z12), \left(X2G^{\langle 0 \rangle}, X2G^{\langle 1 \rangle}, fX2G\right), (XT12, YT12, ZT12)$

Рис. 2.43. Листинг программы расчета минимума функции Хаммельблау методом наилучшей пробы (Пример 1.2, часть 12)

2.4 Листинги программы поиска минимума функции Розенброка методом наилучшей пробыв пакете MathCAD 15 (Пример 1.3)

Пример №1.3: Найти локальный минимум функции Розенброк методом случайного поиска наилучшей пробы
Последовательность вычислений
Численный метод: реализовать алгоритм :
1. Построчно. Построить последовательность расчетных точек и рассчитать значение функции в этих точках, проверить выполнение условий, т.о. определить точку минимума.
2. С использованием одной пользовательской функции.
3.Сравнить результаты расчета
График. построить трехмерный график, нанести последовательность расчетных точек и точку локального минимума
Построить два типа графиков: 1. в виде поверхности. 2. в виде линий уровня

Вид функции Розенброка напоминает глубокий овраг с ямкой на дне, что сильно осложняет реализацию многих алгоритмов оптимизации.

Вспомогательные функции и переменные, используемые при построчной реализации алгоритма
1. Функция для пересчета из блочного вектора в массив из двух колонок. На входе: xr- блочный вектор точек расчета.
На выходе: массив из двух колонок (x и y) - координат расчетных точек. Используется для подготовки данных расчета при построении графиков

```
v_k(xr) := | vx ← xr0^T
           | for  i ∈ 1..last(xr)
           |    vx ← stack(vx, xri^T)
           | vx
```

2. Функция для расчета случайных векторов
На входе: Mζz - количество расчетных случайных точек, x0z - начальная (центральная) точка.
На выходе: случайные вектра в виде блочного вектора размером Mζzx1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

Рис. 2.44. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 1)

$$f\_вектор\_\zeta(M\zeta z, x0z) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..M\zeta z - 1 \\ \quad v_i \leftarrow runif(last(x0z) + 1, -1, 1) \\ v \end{array} \right.$$

3. Функция для расчета координат случайных точек
На входе: xz - начальная (центральная) точка, tz - шаг, ξz -вектор случайных единичных векторов размером $M\zeta z$x1.
На выходе: координаты случайных точек, в виде блочного вектора размером $M\zeta z$x1, каждый элемент вектор размером nx1, n - количество неизвестных в уравнении.

$$f\_y(xz, tz, \xi z) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..last(\xi z) \\ \quad vy_i \leftarrow xz + tz \cdot \xi z_i \\ vy \end{array} \right.$$

4. Переменные (шу и шн), используются для оценки успешности шага по случайному направлению с помощью оператора -
$проверка\_шага := if(f(y_m) < f(x_k), шу, шн)$

шу := "Шаг удачен. x_k+1=ym, t_k+1=t_k, k=k+1. Усл. окончания по N"

шн := "Шаг не удачен. Оценить число неудач - M (Шаг 5)."

5. Переменные (оконч_k_меньше_N и оконч_k_равно_N), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру N с помощью оператора -
$условие\_оконч\_по\_N := if(k < N, k\_меньше\_N, k\_равно\_N)$

k_меньше_N := "Положить j=0. Перейти к шагу 2."

k_равно_N := "k=N. Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

6. Переменные (tk_меньше_R и tk_больше_R), используются для оценки успешности
окончания расчета по параметру R с помощью оператора -
$условие\_оконч\_по\_R := if(t_k \le R, tk\_меньше\_R, tk\_больше\_R)$

Рис. 2.45. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 2)

tk_меньше_R := "Расчет завершен. Точка минимума x*=xk"

tk_больше_R := "Положить tk =β*tk, j=0, перейти к шагу 2"

Построчная реализация алгоритма метода случайного поиска с возвратом при неудачном шаге

1^0. Исходные данные и описание переменных, использованных при построчной реализации алгоритма

$f(x) := 100 \cdot \left[x_1 - (x_0)^2\right]^2 + (1 - x_0)^2$ исследуемая функция Розенброка

$x0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - начальная точка

$\beta := 0.5$ - коэффициент сжатия $0<\beta<1$

$M\zeta := 10$ - количество расчетных случайных точек

$N := 10$ - предельный индекс числа итераций при удачном шаге (всего 11 удачных шагов, так как для первого элемента $k := 0$)

1

$t0 := 1$ - начальная величина шага

$R := 0.05$ - минимальная величина шага

$k := 0$ - индекс итерации переменной (точки) x_k при удачном шаге

x - вектор с координатами точек при удачном шаге

ξ - случайный вектор единичной длины, определяющий направление шага

Рис. 2.46. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 3)

$j := 0$ - индекс итерации случайной переменной (точки) - y_j

y - вектор с координатами случайных точек при случайном выборе направления шага

Внимание: В учебных целях значение для случайного вектора рассчитывается с помощью функции $\mathrm{runif}(2,-1,1)$ на каждом шаге, а затем копируется в переменную ζ и значение для ξ становится постоянным для данного примера. В противном случае не удается добиться стабильно работающего алгоритма для этого метода. При написании пользовательской функции, реализующий алгоритм, этого допущения нет.

Далее построчную реализацию алгоритма проделать самостоятельно

****

РАСЧЕТ ЗАВЕРШЕН

****

==

Реализация алгоритма метода случайного поиска с возвратом при неудачном шаге с помощью пользовательской функции

Подключить файл "Функция МНП.xmcd" с описаниями собственных функций

Ссылка:D:\Студенты\Optimiz\многомерная численная 0 порядка\Метод наилучшей пробы\МНП РОЗЕНБРОК\Функция МНП.xmcd(R)

Исходные параметры

$x0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $M\zeta = 10$ $N = 10$ $t0 = 1$ $R = 0.05$ $\beta = 0.5$

$МНП := F\_МНП(f, x0, M\zeta, N, t0, R, \beta, вх)$

Рис. 2.47. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 4)

$MHП^T = (\{2,1\}\ \{10,1\}\ 140)$

результаты расчета (функция возвращает вектор из трех парамертов: 1 элемент - коррдинаты точки минимума функции, 2 элемент - вектор расчетных значений точек при положительном шаге, 3 злемент - общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

Результаты расчета

$XR1_{min} := MHП_0 = \begin{pmatrix} 0.933 \\ 0.867 \end{pmatrix}$ точка минимума

$fXR1_{min} := f(XR1_{min}) = 6.792 \times 10^{-3}$ значение функции в точке минимума

$кол\_точек := MHП_2 = 140$ общее количество точек расчитанных при реализации метода (удачных и не удачных)

$X1z := MHП_1$ Вектор расчетных значений точек

$X1z^T = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.423 \\ 1.184 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.515 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.844 \\ 0.703 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.872 \\ 0.759 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.785 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.904 \\ 0.812 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.915 \\ 0.841 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.933 \\ 0.867 \end{pmatrix} \text{"Выход по R. Есть минимум."} \right]$

$n := last(X1z)$ количество расчетных точек

::

элементы вектора X1z с 0 по 6

$X1z0\_6 := submatrix(X1z, 0, 4, 0, 0)$

$X1z0\_6^T = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.423 \\ 1.184 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.515 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.844 \\ 0.703 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.872 \\ 0.759 \end{pmatrix} \right]$

элементы вектора X1z с 7 по конца

$X1z7\_end := submatrix(X1z, 7, last(X1z), 0, 0)$

$X1z7\_end^T = \left[\begin{pmatrix} 0.915 \\ 0.841 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.933 \\ 0.867 \end{pmatrix} \text{"Выход по R. Есть минимум."} \right]$

Рис. 2.48. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 5)

::

****

<u>Вывод</u>: Точка минимума равна $XR1_{min} = \begin{pmatrix} 0.933 \\ 0.867 \end{pmatrix}$, значение функции в точке минимума равно $f\left(XR1_{min}\right) = 6.792 \times 10^{-3}$.

****

Аналитический расчет точки минимума функции

$f\_R(x,y) := 100\cdot\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2$ исследуемая функция (формальные параметры записаны в виде двух переменных)

1. Получить аналитические выражения производных фукции по переменным x ,y, используя символьный метод

$\frac{d}{dx}f\_R(x,y) \to 2\cdot x - 400\cdot x\cdot\left(y - x^2\right) - 2$ $\frac{d}{dy}f\_R(x,y) \to 200\cdot y - 200\cdot x^2$

2. Найти минимумы функций, используя блок расчета Given-MinErr. В качестве уравнений использовать выражения для первых производных (скопировав их).
При решении использовать метод LevenbergMarquardt.

$xx := 2$ $yy := 2$ начальные приближение

Given

$2\cdot xx - 400\cdot xx\cdot\left(yy - xx^2\right) - 2 = 0$ $200\cdot yy - 200\cdot xx^2 = 0$

$xx \ge 0$ $yy \ge 0$ $yy \le 9 - xx$ Ограничения на переменные

$XT_{min} := \overrightarrow{Minerr(xx,yy)}$ $XT_{min}^{T} = (1\ \ 1)$ координата точки минимума

$fXT_{min} := f\_R\left(XT_{min_0}, XT_{min_1}\right) = 0$ значение функции в точке минимума

Рис. 2.49. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 6)

Вывод:
Для данной функции эффективность метода сильно зависит от выбора начальной точки и величины шагов по направлениям (проверить самостоятельно). Алгоритм метода плохо работает с данного типа функциями

Графическое отображение результатов расчета

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -6<x<6, -6<y<6, с шагом 0.1, нанести расчетные точки.

Расчет матрицы для постоения поверхности функции, используя дискретный аргумент.

$x_{min} := -0.5 \quad x_{max} := 3 \quad y_{min} := -0.5 \quad y_{max} := 4 \quad \Delta x := 0.02 \quad \Delta y := 0.02$

$$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad\qquad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$$

$Ni = 175 \qquad\qquad Nj = 225$ кол. точек расчета

$i := 0..Ni \qquad j := 0..Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad FM := \overrightarrow{f\_R(x1, y1)}$

Теоретические координаты точки минимума (красная точка)

$X12_0 := XT_{min_0} \qquad X12 = (1)$ значение x-составляющей

$Y12_0 := XT_{min_1} \qquad Y12 = (1)$ значение y-составляющей

$Z12_0 := fXT_{min} \qquad Z12 = (0)$ значение z-составляющей

Расчетные координаты точки минимума (черный крест)

$XT12_0 := XR1_{min_0} = 0.933$ значение x-составляющей

$YT12_0 := XR1_{min_1} = 0.867$ значение y-составляющей

$ZT12_0 := fXR1_{min} = 6.792 \times 10^{-3}$ значение z-составляющей

Рис. 2.50. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 7)

Координаты всех расчетных точек (черная кривая)

Преобразование расчетных точек в двухстолбцовый массив и расчет значений функции в этих точках. (Преобразование необходимы для построения точек на графике)

$X2z := \mathrm{submatrix}(X1z, 0, \mathrm{last}(X1z) - 1, 0, 0)$ удаление из вектора последнего элемента

::

элементы вектора X2z с 0 по 6

$X2z0\_6 := \mathrm{submatrix}(X2z, 0, 6, 0, 0)$

$$X1z0\_6^T = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.423 \\ 1.184 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.515 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.844 \\ 0.703 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.872 \\ 0.759 \end{pmatrix}\right]$$

элементы вектора X2z с 10 до конца

$X2z07\_end := \mathrm{submatrix}(X2z, 7, \mathrm{last}(X2z), 0, 0)$

$$X2z07\_end^T = \left[\begin{pmatrix} 0.915 \\ 0.841 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.933 \\ 0.867 \end{pmatrix}\right]$$

::

$X2G := v\_k(X2z)$

$$X2G^T = \begin{pmatrix} 2 & 1.423 & 0.679 & 0.844 & 0.872 & 0.889 & 0.904 & 0.915 & 0.933 \\ 2 & 1.184 & 0.515 & 0.703 & 0.759 & 0.785 & 0.812 & 0.841 & 0.867 \end{pmatrix}$$

$fX2G := \overrightarrow{f\_R\left(X2G^{\langle 0 \rangle}, X2G^{\langle 1 \rangle}\right)}$ значения функции в расчетных точках.

$$fX2G^T = (401 \quad 70.738 \quad 0.385 \quad 0.033 \quad 0.017 \quad 0.016 \quad 0.013 \quad 0.009 \quad 0.007)$$

Рис. 2.51. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 8)

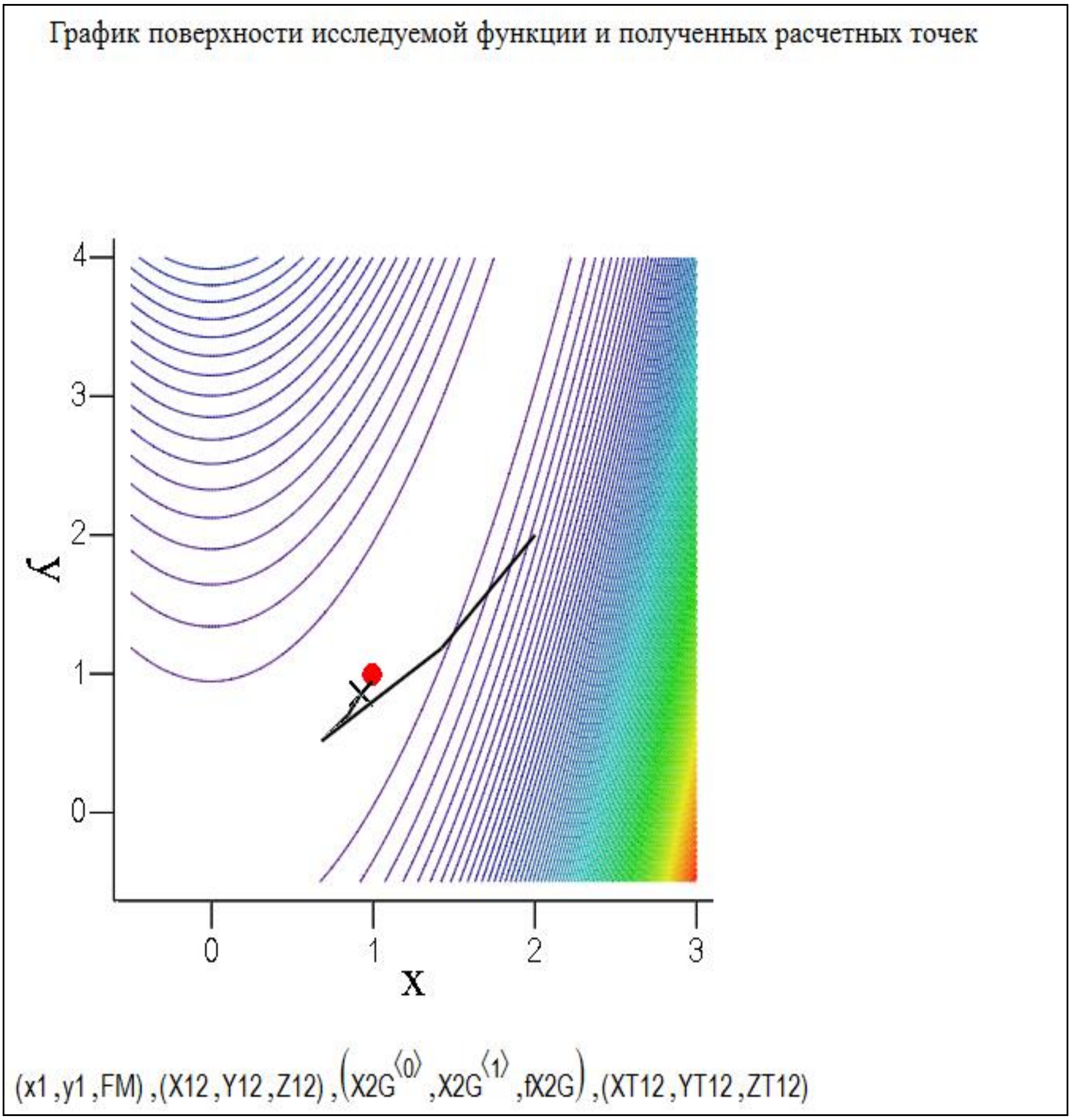
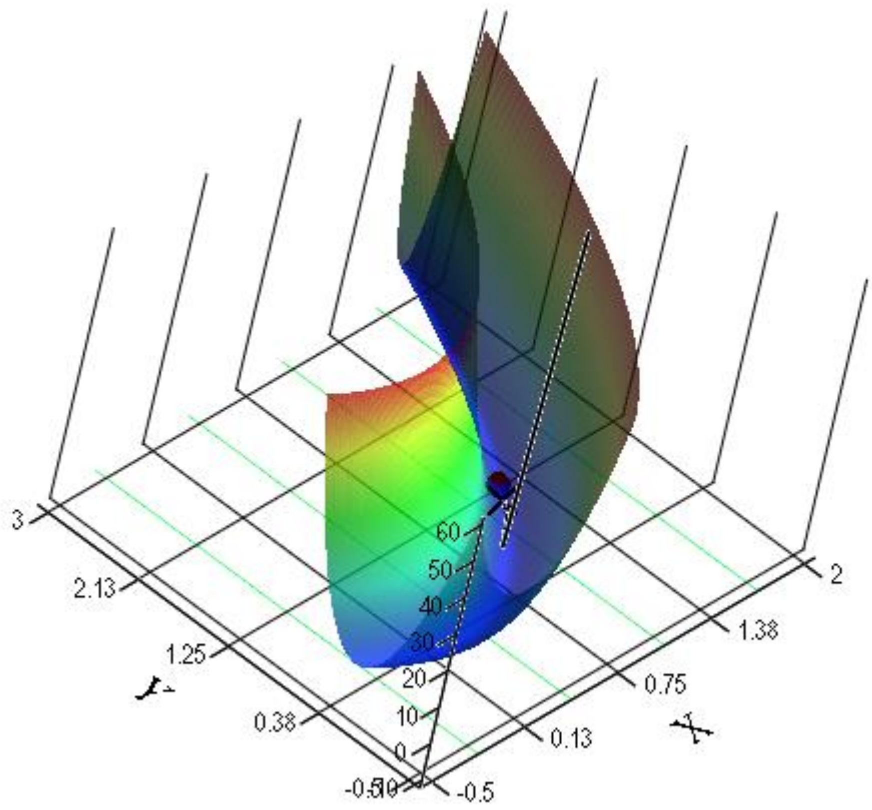


Рис. 2.52. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 9)

Построить трехмерный график в виде поверхности и нанести стационарные точки (минимумы и максимумы).

Для получения вида поверхности приведенной на графике, необходимо установить диапазон значений по осям: x в итервале (-0.5 - 2, y - (-0.5 - 3), z - (-10 - 60).



$(x1, y1, FM), (X12, Y12, Z12), \left(X2G^{\langle 0 \rangle}, X2G^{\langle 1 \rangle}, fX2G\right), (XT12, YT12, ZT12)$

Рис. 2.53. Листинг программы расчета минимума функции Розенброка методом наилучшей пробы (Пример 1.3, часть 10)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.

2. Хаммельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: изд. «МИР», 1975. – 534 с.

3. Kudryavtseva I.V., Rykov V.A., Rykov S.V. The method for constructing the fundamental equation of state for SF_6 // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1385. 012009.

4. Rykov V.A., Rykov S.V., Kudryavtseva I.V., Sverdlov A.V. Method of constructing a fundamental equation of state based on a scaling hypothesis // J. Phys.: Conf. Series. 2017. V. 891. 012334.

5. Kudryavtseva I.V., Rykov S.V. A Nonparametric Scaling Equation of State, Developed on the Basis of the Migdal's Phenomenological Theory and Benedek's Hypothesis // Russ. J. Phys. Chem. A. 2016. V. 90. № 7. P. 1493–1495.

6. Tegeler C., Span R., Wagner W. A New Equation of State for Argon Covering the Fluid Region for Temperatures from the Melting Line to 700 K at Pressures up to 1000 MPa // J. of Phys. Chemical Reference Data. 1999. V. 28. P. 779–849.

7. Rykov S.V., Kudryavtseva I.V., Rykov V.A. Method for constructing fundamental equation of state that satisfies the scaling theory and applicable for substances insufficiently explored in the critical point vicinity // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1385, No. 1, pp. 012014.

8. Rykov V.A., Rykov S.V., Sverdlov A.V. Fundamental equation of state for R1234yf // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1385. P. 012013.

9. Форсайт Дж., Малькольм Н., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир. –1980. –280 с.

10. Дьяконов В.П. MathCAD 11/12/13 в математике: Справ. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.

11. Использование MathCAD в теории матриц: Метод. указания / И.В.Кудрявцева, В.А.Рыков, С.А.Рыков, С.В.Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011. – 50 с.

12. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MathCAD: Учеб. пособие.2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

13. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.

14. Практические занятия в пакете MathCAD по исследованию систем линейных алгебраических уравнений: Пособие / В.А. Рыков, С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. – 107 с.

15. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгстел К. Оптимизация в технике. В 2 кн. Кн. 1. – М.: Мир, 1986. – 349 с.

16. Рыков С.В., Рябова Т.В. Расчет линии фазового равновесия аммиака в пакете MathCAD // Холодильная техника и кондиционирование. 2013. № 2. С. 8.

17. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков, Е.Д. Скобов. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2014. –166 с.

18. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. II: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. –178с.

19. Практикум по работе в математическом пакете MathCAD: Пособие / С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, В.А. Рыков – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. – 84 с.

20. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Киселев С.В. Расчет жидкостной ветви линии насыщения R218 в пакете MathCad // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Холодильная техника и кондиционирование. 2014. № 1. С. 11.

21. Рыков С.В., Камоцкий В.И., Рыков В.А. Расчет паровой ветви линии насыщения перфторпропана в пакете MathCad // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2014 № 1 С. 49.

22. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 3. Многомерная оптимизация. Аналитические методы: Учебное пособие – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018. – 164 с.

23. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 4. Методы оптимизации. Тесты с ответами: Учебное пособие – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018. – 85 с.

24. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть Многомерная оптимизация. Численные методы. Метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге Учебное пособие – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2020. – 105 с.

Рыков Сергей Алексеевич
Кудрявцева Ирина Владимировна
Рыков Сергей Владимирович
Рыков Владимир Алексеевич
Старков Константин Александрович

Методы оптимизации в примерах в пакете MATHCAD 15. Часть VII (Многомерная оптимизация. Численный метод нулевого порядка. Метод наилучшей пробы)

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49