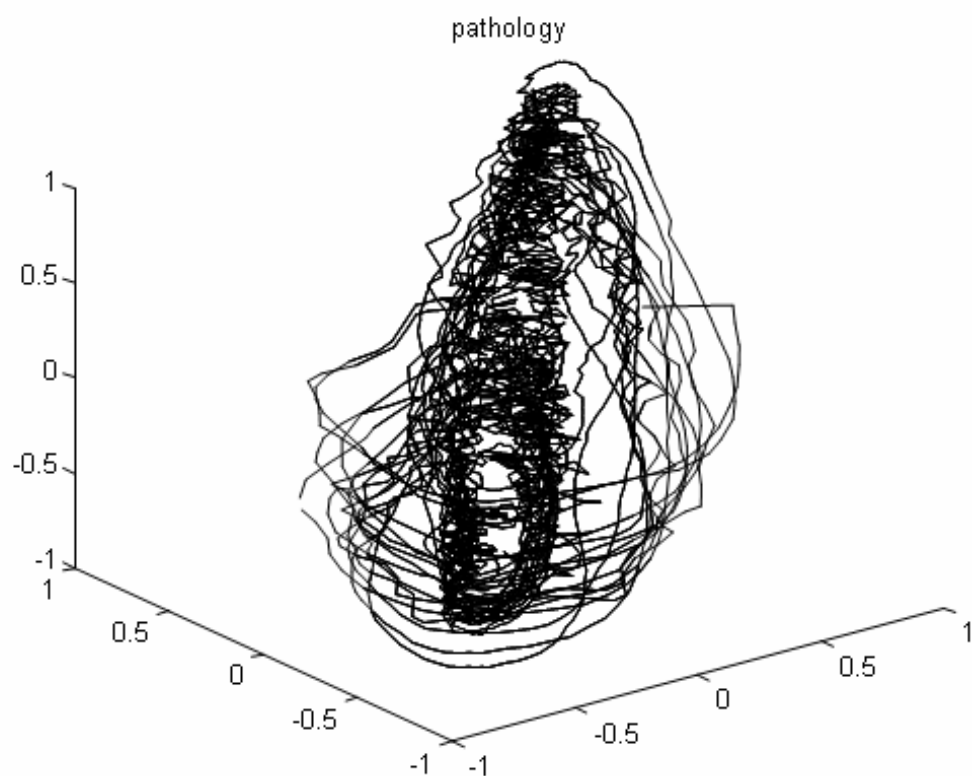


Г.Н. Лукьянов
ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ
ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ



Санкт-Петербург
2020

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Г.Н. Лукьянов
ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ
ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.01 Приборостроение (Магистратура) в качестве
учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных
программ высшего образования (магистратуры)

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург
2020

Лукьянов Г.Н., *Оценивание параметров динамических процессов*>. – СПб:
Университет ИТМО, 2020. – 104 с.

Рецензент: Коняхин И.А., д.т.н., профессор

Рассматриваются методы анализа и обработки результатов наблюдений динамических процессов, со сложным поведением и непредсказуемостью на разных временных масштабах. Рассмотрены разные методы, позволяющие получить информацию об их протекании и внутренней структуре, необходимые для усвоения программы курса «Специальные методы измерения физических величин». В пособии анализируются как модельные процессы, так и данных экспериментальных исследований, Для облегчения понимания в пособии приводится ряд практических примеров.

Пособие предназначено для магистров по направлению подготовки 12.04.01 - Приборостроение и содержит лекционные материалы по дисциплине «Специальные методы измерения физических величин».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020 © Лукьянов Г.Н. 2020

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.1 Геометрия и природа.....	4
1.2 Фракталы и хаос.....	6
1.3 Динамические системы.....	7
1.4 Примеры динамических систем. Фазовая траектория динамической системы. Аттрактор.....	8
1.5 Консервативные и диссипативные системы.....	17
1.6 Хаотические динамические системы.....	19
1.7 Странный аттрактор.....	25
1.8 Фрактал, как продукт эволюции динамической системы.....	27
1.9 Оценивание параметров динамических систем.....	28
1.9.1 Метод задержек.....	29
1.9.2 Размерность, как характеристика динамической системы.....	30
1.9.3 Энтропия Колмогорова.....	32
1.9.4 Показатель Ляпунова.....	33
1.9.5 Вычисление показателя Ляпунова из временных рядов.....	34
1.9.6 Предсказуемость.....	35
1.9.7 Энтропия и информация.....	35
1.9.8 Переход к хаосу.....	40
1.9.9 Сечение Пуанкаре.....	43
1.10 Сравнение различных видов протекания процессов.....	46
2. Оценивание параметров природных и технических объектов	46
2.1 Построение кривых регрессии.....	47
2.2 Спектральный анализ и преобразование Фурье.....	48
2.2.1 Задачи, решаемые спектральным анализом.....	48
2.3 Вейвлет-анализ.....	55
2.4 Выявление периодичностей с помощью сечений Пуанкаре.....	68
2.5 Оценивание корреляционной размерности, энтропии Колмогорова и показателей Ляпунова динамической системы из временных рядов. Практическое применение метода задержек.....	70
2.6 Показатель Херста.....	72
3. Фракталы.....	74
3.1 Фрактальная размерность.....	76
3.2 Связь фрактальной размерности и показателя Херста.....	81
3.3 Моделирование фрактальных временных рядов.....	81
3.4 Оценивание свойств фрактальных объектов на основе вычисления оценок размерности	85
4. Волны во фрактальных структурах.....	89
4.1 Колебания. Фононы.....	89
4.2 Фононные спектры.....	94
4.2.1 Проявление скейлинга и масштабной инвариантности.....	96
4.3 Фрактоны.....	99
Контрольные вопросы.....	100
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	102

1. Введение

1.1. Геометрия и природа

При обучении детей счету обычно используются такие вспомогательные средства, как пальцы и счетные палочки. При этом никому не приходит в голову сразу начинать объяснять детям, что между любыми двумя целыми числами скрывается бесконечное множество чисел, подавляющее большинство которых иррационально.

В школьной геометрии можно вычислить длину любой линии и не знать при этом, что большая часть их из природных образований бесконечны математически. Их длина может быть вычислена только при наложении определенных геометрических ограничений, например, при условии интерполяции конечным числом отрезков прямых или кривых. Однако известен пример из времен второй мировой войны, когда математикам была поставлена задача вычислить длину береговой линии Британии, и



Нильс Фабиан Хельге фон Кох (1870-1924)

von Koch) (1870-1924) сделал попытку описать кривую, для которой,



Бенуа Мандельброт

компьютерной технике, связанных с построением компьютерных изображений.

математики получали различающиеся в разы результаты, поскольку на самом деле вычислялась длина линий, полученных в результате интерполяции¹. Их длина зависит от способа интерполяции. Таким образом, классическая геометрия попадает в затруднительное положение при попытке оценить с ее помощью характеристики природных объектов.

Еще в 1904 году шведский математик Нильс Фабиан Хельге фон Кох (Niels Fabian Helge von Koch) (1870-1924) сделал попытку описать кривую, для которой, несмотря на то, что она почти везде непрерывна, не определена производная, и она не дифференцируема (рисунок 1). Впервые такого рода кривые в 1975 году описал Бенуа Мандельброт (Benoit Mandelbrot) (род. 1924). Он стал родоначальником новой области в математике, которая получила название "фрактальная геометрия". С ее помощью стало возможно не только решить целый ряд задач, связанных с описанием подобного рода объектов, но и развить новое направление в компьютерной технике, связанное с построением компьютерных изображений.

¹ Н.-О. Peitgen, Н. Jurgens, D. Saupe. Chaos and Fractals (New Frontiers of Science) Springer-Verlag New York 2004

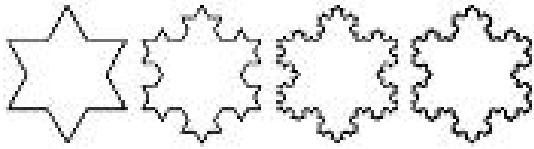


Рисунок 1 а - Построение снежинки Коха

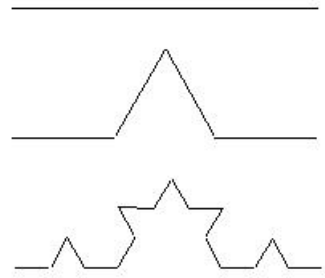


Рисунок 1б - Построение кривой Коха (первые три итерации)

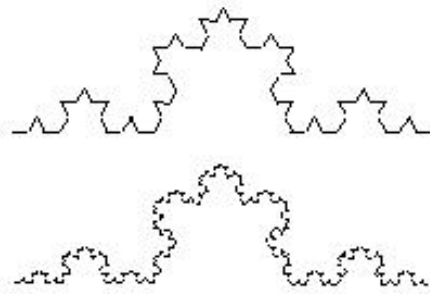


Рисунок 1в - Четвертая и пятая итерации при построении кривой Коха.

На основе фрактальной геометрии можно описать многие объекты, от ландшафтов до живых организмов, так как все они обладают свойствами фракталов. Примером такого изображения является так называемый папоротник Барнсли (Рисунок 2).



Рисунок 2 - Фрактальное построение природного объекта (Папоротник Барнсли (Barnsley))

Важнейшими свойствами фракталов оказались их самоподобие, что означает подобие каждой части фрактала всему фракталу, и дробная размерность. Так, для кривой Коха размерность приблизительно равна 1,26.

Сегодня без применения фракталов тяжело представить себе компьютерную графику, которая нашла применение не только собственно в программном обеспечении компьютеров, но и при производстве кинофильмов, при обработке изображений. Антенны с фрактальной структурой применяются в радиосвязи. Геометрическими свойствами фракталов обладают атмосферные потоки, речные и океанские течения, звездные и галактические скопления, отдельные галактики и наша Вселенная.

Фрактальными свойствами обладают многие кривые, описывающие изменение каких-либо параметров природных систем, например, изменение уровня водоемов.

1.2. Фракталы и хаос

Людей всегда интересовали причины непредсказуемости и способы повышения предсказуемости. Словом «хаос» древние греки обозначали «морской залив с широким входом» [1]. На таком широком пространстве может легко затеряться все что угодно, особенно в утренние часы, с клубящимся туманом. В [1] Азимов пишет, что так можно представить себе первобытный хаос, в котором пока нет звезд и планет с определенными очертаниями, а есть нечто, подобное клубящемуся пару. В обыденном понимании слово «хаос» обозначает полный беспорядок.

Ученые также до начала 60-х годов XX века понимали под этим словом полный беспорядок, которым характеризуется поведение абсолютно непредсказуемого объекта. Хорошим примером такой полной непредсказуемости служит идеальный газ, молекулы которого сталкиваются абсолютно упруго, без потери импульса, поэтому их траектории предсказать невозможно. В реальных же газах молекулы ведут себя по-другому, их столкновения неупруги, возникает трение, диссипация. Это является одной из причин возникновения течений. Вследствие этого становится возможным описать поведение больших объемов газа уравнениями, т.е. их поведение уже детерминировано. Однако, несмотря на такую детерминированность, предсказывать поведение течений газов и жидкостей, вследствие той же диссипации, разрушающей эту упорядоченность, можно только на ограниченное время.



Эдвард Лоренц

В 1963 году американский математик из массачусетского технологического института Эдвард Лоренц, занимающийся проблемой предсказания погоды, опубликовал работу [2], в которой впервые было проанализировано поведение детерминированной системы, имеющей хаотическое решение. После этой работы стала развиваться наука о так называемом детерминированном хаосе: о поведении систем, которые являются детерминированными, могут быть описаны, например, системой



Жюль Анри
Пуанкаре
(1854-1912)

дифференциальных уравнений, но имеющих хаотическое решение, развитие которого можно предсказать лишь на ограниченное время. Господствующим стало мнение о типичности такого поведения. Оно обнаруживается в природных системах, в воздушных и океанских течениях, усложняя тем самым задачу предсказания погоды. Поэтому, несмотря на большое количество искусственных спутников и метеорологической аппаратуры, проблема точного прогноза погоды пока еще не решена.

«Детерминированный хаос» означает, что хаотическое поведение демонстрирует детерминированная система. Оказалось, что решение такой системы обладает свойствами фрактала: его кривая самоподобна и имеет дробную размерность. Кроме этого, несмотря на детерминированный источник, такие системы обладают *чувствительной зависимостью к начальным условиям и являются ограниченно предсказуемыми*. Существование таких систем еще в 1903 году предсказал французский математик Жюль Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré 1854-1912).

Сейчас учение о детерминированном хаосе разделилось на большое число узких специализаций: в математике; в теории управления; при изучении поведения потоков жидкостей и газов; при изучении физиологии человека; при изучении и моделировании процессов в компьютерных сетях; поведение планетных и звездных систем; в нелинейной оптике; при изучении плазмы.

1.3. Динамические системы

Динамической называют систему, которая эволюционирует во времени. Ее принято описывать следующей системой уравнений, связывающими будущее состояние системы с текущим:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ - переменные, число которых определяет порядок или размерность системы; t - время; $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ - нелинейные функции. Функции \mathbf{F} являются по смыслу скоростями.

Эволюция динамической системы однозначно определяется ее начальным состоянием. Состояние системы в какой-то момент времени t_j определяется набором точек $\mathbf{x}(t_j)$. Пространство, образованное переменными $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ называют фазовым пространством и обозначают \mathcal{R}^n .

Если из любого состояния системы однозначно определяется ее любое прошлое или будущее состояние, то такая система называется детерминированной. Для такой системы характерным является стремление

попасть в какую-то ограниченную область состояний. Например, колебания температуры воздуха происходят во вполне определенных пределах, никому не придет в голову подумать о возможности ее снижения, например в жилом помещении до -273°C .

Можно найти частное решение системы (1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ для какого-то набора начальных условий \mathbf{x}_0 . Тогда все возможные частные решения образуют в фазовом пространстве к моменту времени t набор новых состояний $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Этот новый набор называют фазовым потоком или потоком фазы в фазовом пространстве \mathcal{X}^n . Тогда можно сказать, что вектор \mathbf{F} есть вектор скорости потока.

1.4. Примеры динамических систем. Фазовая траектория динамической системы. Аттрактор

Самым простым примером динамической системы можно считать так называемый гармонический осциллятор, которым является например, математический маятник - точечный груз, который подвешен на бесконечно тонком шнуре без трения в точке подвеса при отсутствии атмосферы (рисунок 3). Такой маятник, получив начальный толчок, будет качаться до скончания веков, так как потери энергии для него отсутствуют. Движение маятника может быть описано исходя из второго закона Ньютона:

$$F = m \cdot a . \quad (2)$$

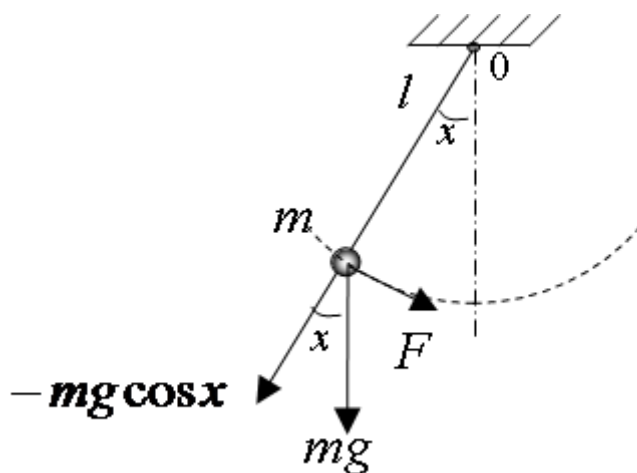


Рисунок 3 – Математический маятник

Ускорение a может быть определено из длины маятника l и угла отклонения от вертикали x , тогда сила F , действующая на маятник, может

быть записана как
$$F = m \cdot l \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin x .$$

Преобразовав последнее уравнение, можно получить:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0 .$$

Если угол отклонения маятника от вертикали x имеет малую величину, то можно принять $\sin x \approx x$, и тогда уравнение для математического маятника окончательно примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x. \quad (3)$$

Уравнение (3) известно как *уравнение идеального гармонического осциллятора*. Это уравнение линейно и часто приводится в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x, \quad (4)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - круговая частота колебаний осциллятора.

Можно также определить период его колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Тогда круговая частота и период связываются соотношением: $\frac{2\pi}{T} = \omega$

Решением уравнения (3,4) гармонического осциллятора является гармоническая кривая (рисунок 4): $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, где x_m - амплитуда колебаний, φ - фаза.

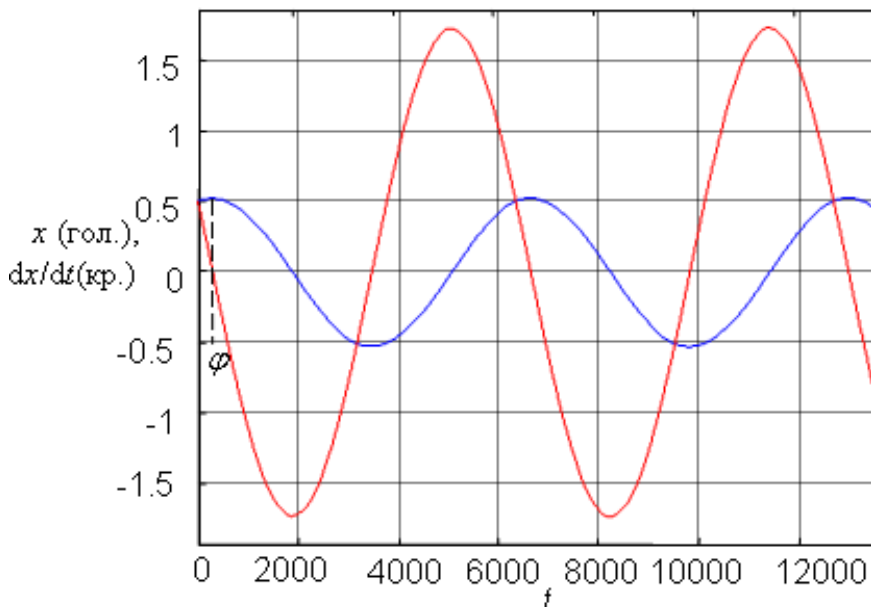


Рисунок 4 - Колебания гармонического осциллятора при НУ $x(0)=0,5$; $dx(0)/dt=0,5$. Голубая кривая-положение маятника, красная – скорость

Амплитуда колебаний идеального гармонического осциллятора является функцией начальных условий (НУ). Большему начальному отклонению соответствует большая амплитуда колебаний. Это обстоятельство демонстрируется следующим рисунком (рисунок 5).

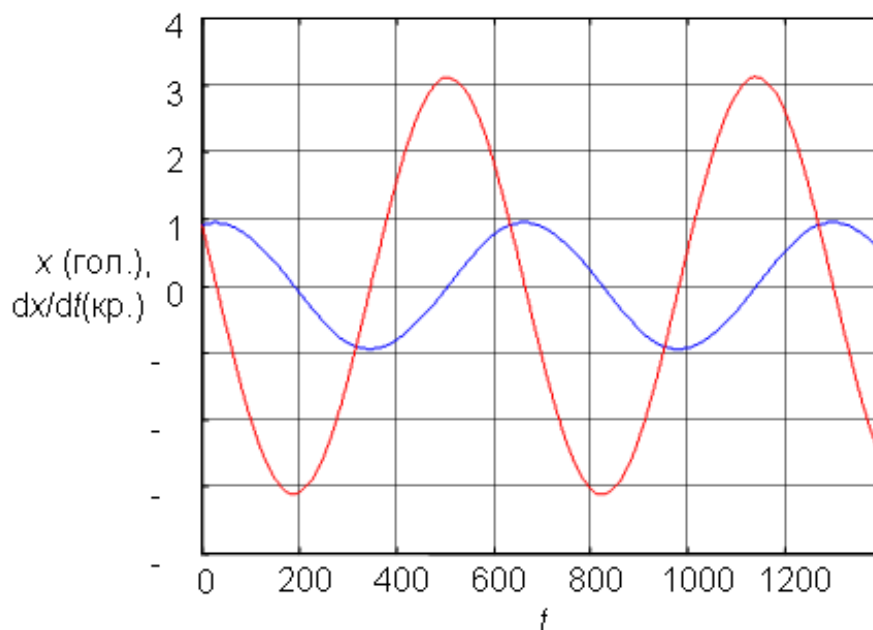


Рисунок 5 - Колебания гармонического осциллятора при НУ $x(0)=0,9$; $dx(0)/dt=0,9$. Голубая кривая – положение, красная - скорость

Можно представить решение уравнения (4) также в другом пространстве, для которого координатами являются x и dx/dt . Такое пространство называют *фазовым*. Для гармонического осциллятора решение в фазовом пространстве есть *эллипс*, поскольку положение x есть косинус и скорость dx/dt есть синус (рисунок 6).

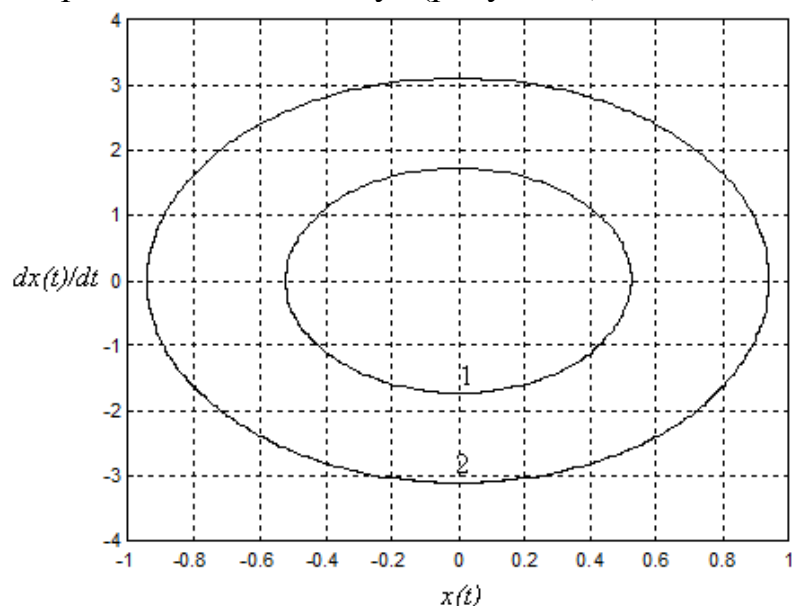


Рисунок 6 - Фазовые траектории для решений уравнения (3) при различных начальных условиях. Кривая 1 - для $x(0)=0,5$; $dx(0)/dt=0,5$, 2 - для $x(0)=0,9$; $dx(0)/dt=0,9$

Тогда длины осей эллипса и его площадь будут зависеть от значений начальных условий. Это одно из важнейших фундаментальных свойств осциллятора без трения.

Пусть теперь у маятника появилось трение в точке подвеса. Тогда уравнение (4) надо переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (5)$$

От уравнения маятника без трения оно отличается членом $2\delta \frac{dx}{dt}$, содержащим первую производную от координаты (скорость). Его решение имеет вид $x = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ (рисунок 7). (6)

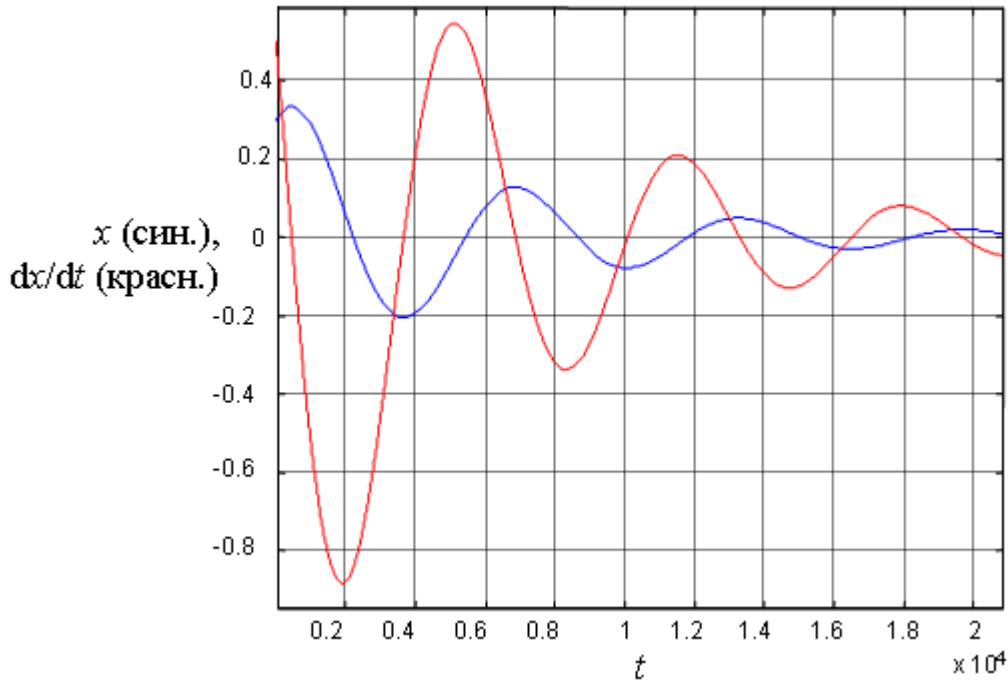


Рис. 7. Колебания маятника с трением в точке подвеса. Начальные условия: $x=0,3$; $dx/dt=0,5$.

Из-за трения положение маятника стало гармонической функцией, затухающей по экспоненте. δ – коэффициент затухания.

Фазовая траектория для такого осциллятора есть спираль (рисунок 8). Из любого пункта фазового пространства спираль придет в начало координат, в положение равновесия, в нуль. Эта точка «притягивает» фазовую траекторию, которая закончится в ней, откуда бы она ни исходила. Поэтому эта точка для траектории является *аттрактором* (attraction (англ.) - притягивать).

Теперь можно компенсировать потери на трение (как это происходит в механических часах, основой устройства которых также является маятник. В часах компенсацию осуществляет гиря или пружина).

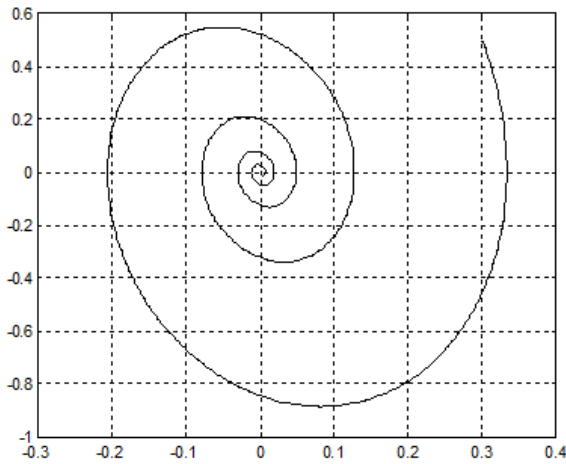


Рисунок 8 - Фазовая траектория маятника с затуханием

Чтобы скомпенсировать потери на трение, в осциллятор нужно периодически вносить энергию или, как говорят физики, его возбуждать. Уравнение маятника с трением и периодическим возбуждением имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos \omega t, \quad (7)$$

где F_m - возбуждающая сила. ω_0 - частота собственных колебаний осциллятора, ω - частота вынуждаемых силой колебаний. Такой осциллятор имеет принципиальное отличие от идеального маятника: при наличии возбуждения и начальных условиях, лежащих в определенной области, колебания стремятся выйти на вполне определенный уровень (рисунок 9).

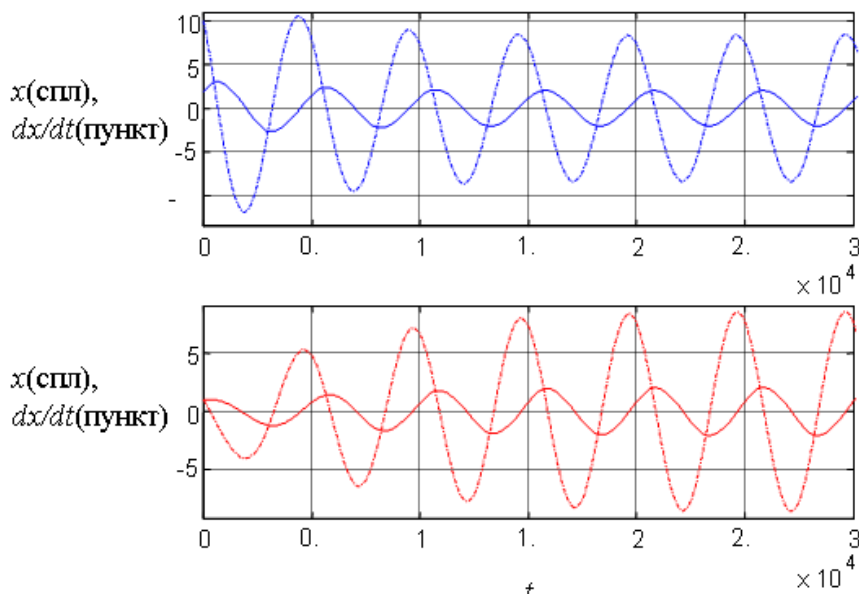


Рисунок 9 - Колебания маятника с трением в точке подвеса и с периодическим возбуждением. Верхний график: начальные условия: $x=2$; $dx/dt=10$. Нижний: $x=1$; $dx/dt=1$. Для обоих случаев колебания с течением времени выходят на один и тот же режим.

Потери энергии на преодоление трения компенсируются внешней возбуждающей силой. Трение существует во всех природных и технических системах. Процесс потерь или рассеивания энергии часто обозначают термином *диссипация*.

Особенно наглядно это свойство реального осциллятора демонстрирует следующий рисунок (рисунок 10), на котором приведены фазовые траектории реального маятника. Из разных начальных условий траектории приходят на один эллипс. Этот эллипс является аттрактором.

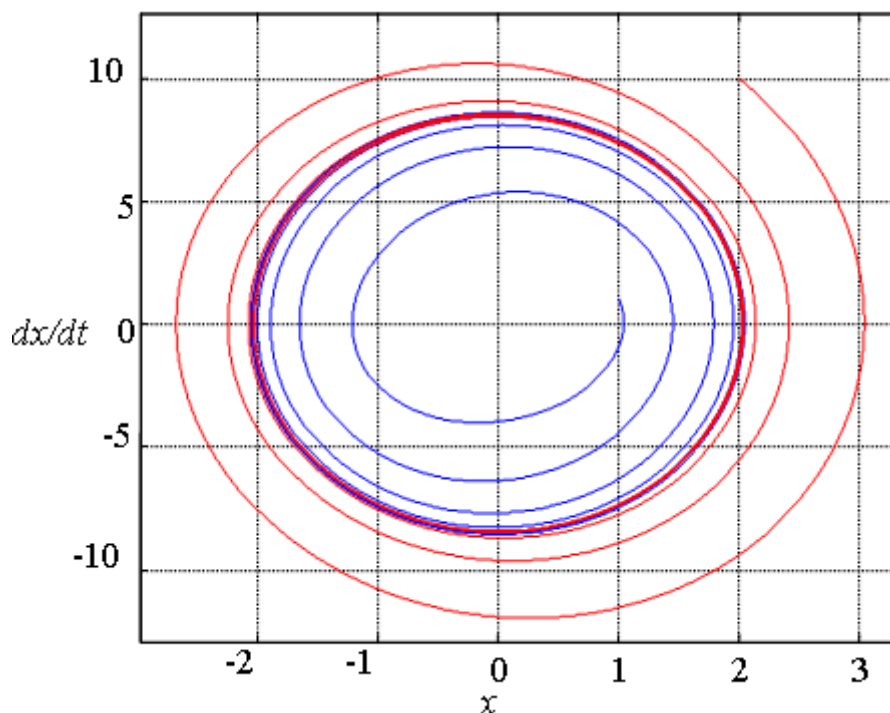


Рисунок 10 - Фазовые траектории маятника с трением в точке подвеса и с периодическим возбуждением

Системы, которые существуют за счет рассеивания или диссипации энергии, как в рассмотренном примере, носят название *диссипативных систем*. Диссипативная система в процессе своей эволюции всегда стремится попасть на аттрактор. Для системы может существовать несколько аттракторов. Например, для рассмотренного примера аттрактором является также точка с координатами (0,0).

Следующие рисунки показывают, что происходит с осциллятором, когда он еще сильнее приближен к реальности, когда он становится нелинейным. Для этого достаточно чтобы в последнем члене левой части уравнения (7) коэффициент ω_0^2 умножался не на переменную x , а на $\sin(x)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin(x) = \frac{Fm}{m} \cos \omega t. \quad (8)$$

Поведение маятника меняется в корне (рисунок 11 – зависимость положения и скорости от времени, рисунок 12 – фазовая траектория).

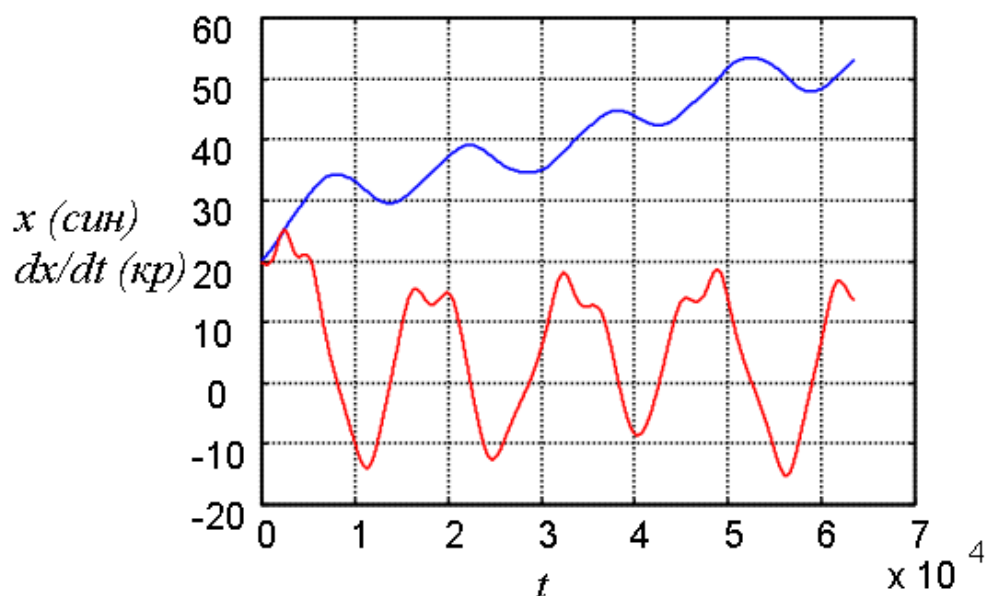


Рисунок 11 - Зависимость положения и скорости от времени

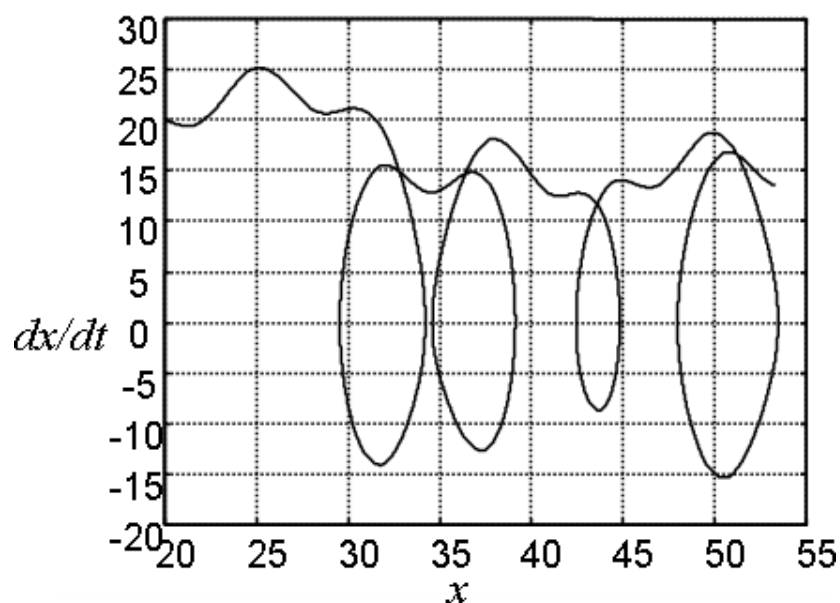


Рис. 12. Фазовая траектория «нелинейного» маятника

Следующим примером нелинейного осциллятора является генератор (осциллятор) Ван-дер-Поля², который представляет собой математическую модель электронного генератора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \frac{dx}{dt} - \omega^2 x, \quad (9)$$

где x - координата, t - время, γ_0 - коэффициент затухания, x_0 - начальная амплитуда.

² Van der Pol, B., "On relaxation-oscillations", The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci., 2(7), 978-992 (1927).

Параметр затухания $\gamma = -\gamma_0(1 - \frac{x^2}{x_0^2})$ отрицателен при малых

амплитудах x , положителен при больших. Тогда при $\gamma < 0$ ограничивается рост энергии колебаний и при $\gamma > 0$ компенсируются потери на трение (затухание). У такого осциллятора колебания с малой амплитудой усиливаются, а с большой – затухают (рисунок 13 – в фазовом пространстве, рисунок 14 – развитие процессов во времени).

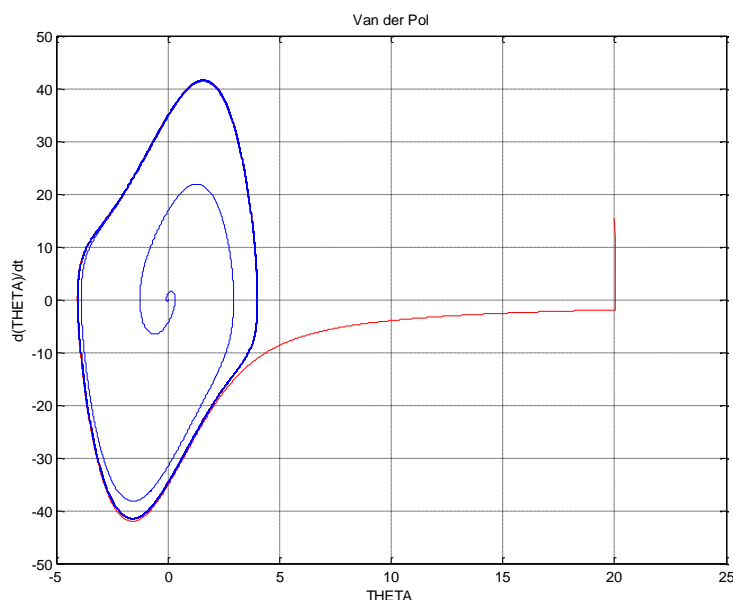


Рисунок 13 - Колебания с малой амплитудой (синяя кривая) усиливаются, а с большой (красная) – затухают. Выход из разных начальных условий происходит на аттрактор

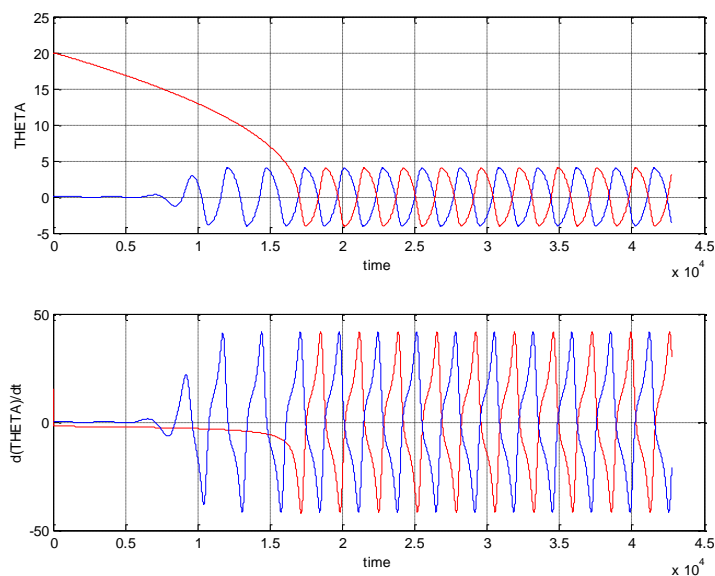


Рисунок 14 - Колебания с малой амплитудой усиливаются, а с большой – затухают. Вверху - амплитуда, внизу - скорость

Ниже приводятся решения в фазовом пространстве, полученные для разных значений ω и γ_0 . (рисунок 15).

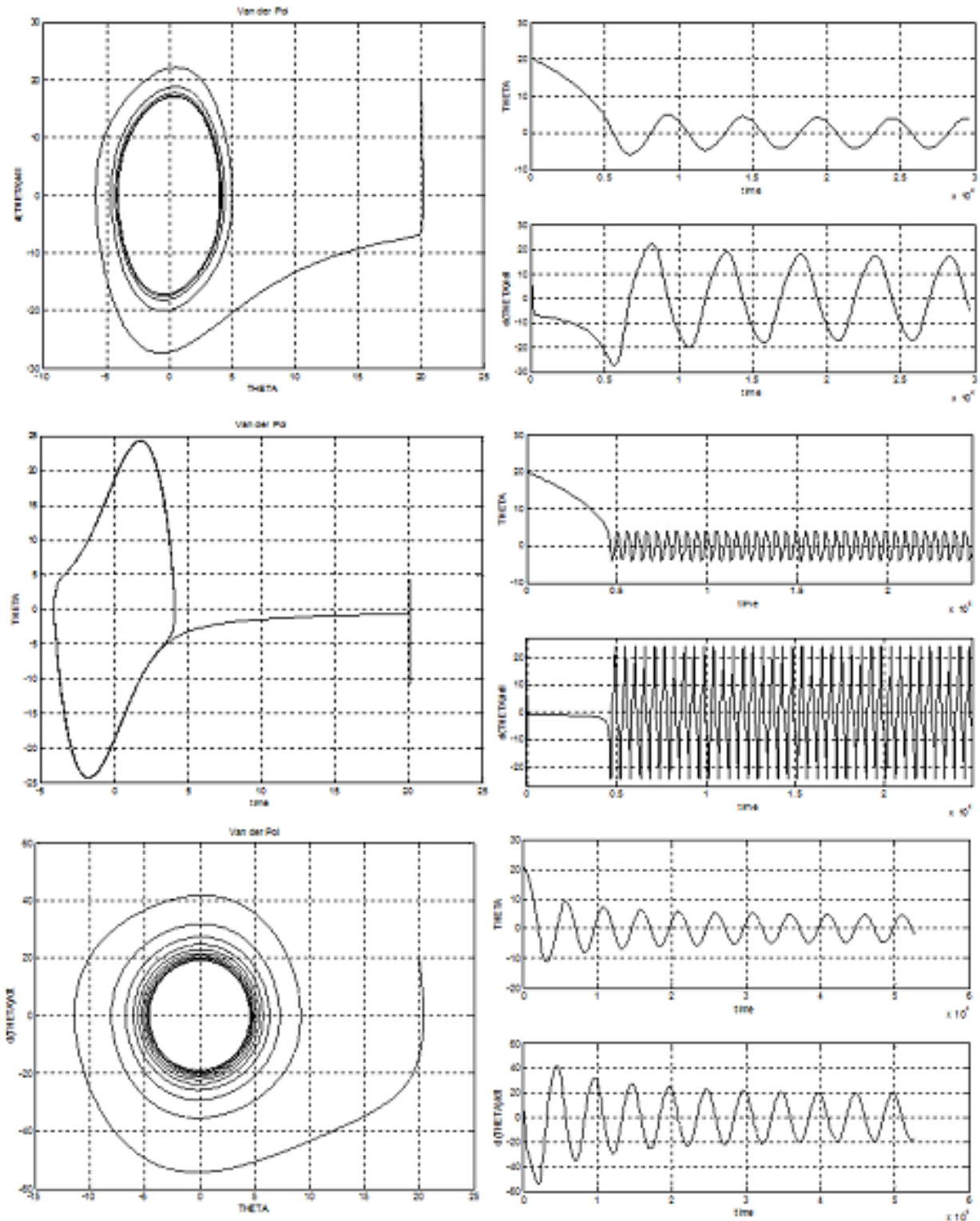


Рисунок 15 - Решения для осциллятора Ван-дер-Поля в фазовом пространстве, полученные для разных значений ω и γ_0 . Верхний ряд $\gamma_0=0,5$, $\omega=4.176$; средний $\gamma_0=5$, $\omega=4.176$; нижний $\gamma_0=0,1$, $\omega=4.176$. Слева – фазовая плоскость, справа - зависимости положения и скорости от времени

1.5. Консервативные и диссипативные системы

В разделе 1.1 показано, что идеальный и реальный осцилляторы ведут себя по-разному. Основным отличием является то, что идеальная система колеблется без остановки и амплитуда колебаний задается начальными условиями (рисунки 5,6), в то время как реальный осциллятор стремится к положению равновесия (рисунки 7,8). Это положение может быть статическим (маятник остановлен) или динамическим, когда маятник колеблется по затухающей (без внешнего возбуждения) или незатухающей траектории (с внешним возбуждением). Рассматривая фазовые траектории для этих двух случаев, можно увидеть основное различие между идеальным и реальным маятниками (рисунок 16).

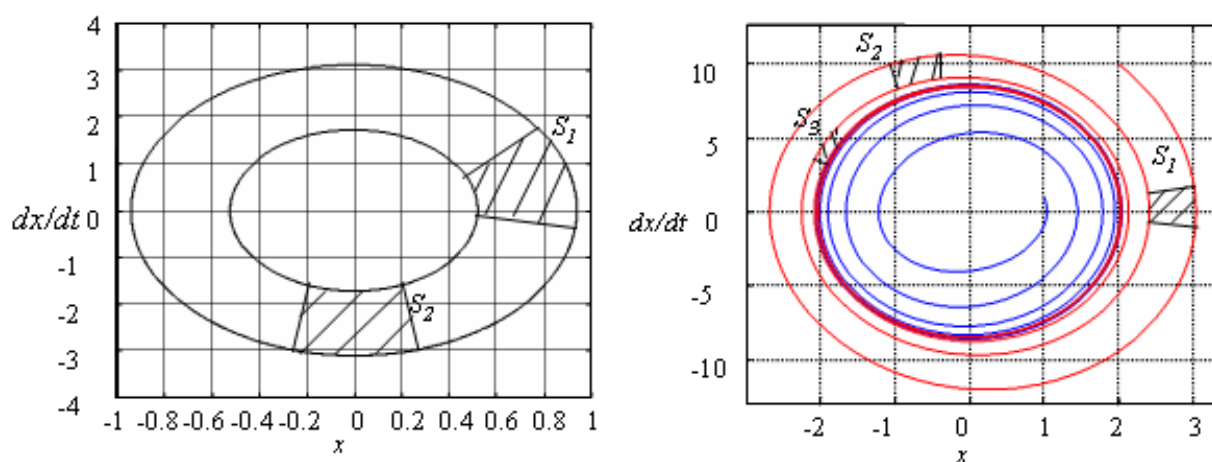


Рисунок 16 - Площади в фазовом пространстве для идеального (слева) и реального маятника (справа)

Для идеального маятника площади в фазовом пространстве остаются постоянными: ($S_1=S_2$), рисунок 16, слева. Для реального площади уменьшаются ($S_1>S_2>S_3$), рисунок 16, справа.

Этот пример иллюстрирует одно из важнейших различий между так называемыми консервативными и диссипативными системами. Для консервативных систем объемы в фазовом пространстве сохраняют постоянство, для диссипативных характерно сжатие объемов в фазовом пространстве.

Воспользовавшись гамильтоновым представлением, вышесказанное можно представить в виде:

$E = H(\vec{q}, \vec{p})$, $\vec{q} = q_1 \dots q_s$, $\vec{p} = p_1 \dots p_s$ где E – полная энергия системы, H – гамильтониан, p и q – обобщенные импульсы и обобщенные координаты.

Таким образом, гамильтониан выражает энергию системы в зависимости от так называемых канонических переменных p и q .

Уравнения движения в этих переменных имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}\quad (10)$$

$i = 1, \dots, n.$

Гамильтониан H не зависит явно от времени, $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$, поэтому

$H(q, p) = const$. Тогда, если система описывается не зависящим от времени гамильтонианом, то она консервативна. Если теперь ввести так называемое фазовое пространство с координатами, имеющее в общем случае для системы, описываемой гамильтонианом $H(\vec{q}, \vec{p})$, $3n$ - координат и $3n$ - импульсов, то для консервативной системы любая область в этом пространстве сохраняет свой объем, а для диссипативной системы объемы в фазовом пространстве сжимаются.

Диссипативные системы «живут» за счет взаимодействия диссипации и порядка, что приводит их к такого рода самоорганизации, что они начинают выглядеть извне как нечто «разумное», обладающее интеллектом. Эта «разумность» проявляется, в том числе, в том, что скорость изменения какого-то объема $V(t)$ фазового потока в фазовом пространстве \mathfrak{R}^n , характеризуемая выражением для диссипативной системы, есть величина отрицательная, т.е. :

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} \equiv \text{div}\mathbf{F} < 0. \quad (11)$$

Для консервативной системы:

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} \equiv \text{div}\mathbf{F} = 0. \quad (12)$$

Для практических применений выражения (11), (12) записывают в виде так называемой производной Ли [3]:

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}, \quad (13)$$

где x_i - i -я компонента вектора \mathbf{x} , ($\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$). Тогда для диссипативных систем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} < 0 \text{ и для консервативных } \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0.$$

1.6. Хаотические динамические системы

Хаотическое поведение демонстрируют даже очень простые системы - например, система, известная под такими названиями, как «логистическое отображение», «одномерное отображение» (см. ниже). Хаотическое поведение свойственно даже планетам: казалось бы, более гармоничное движение трудно представить, однако, например, спутник Сатурна, Гиперион, хаотически изменяет направление оси собственного вращения (рисунок 17).

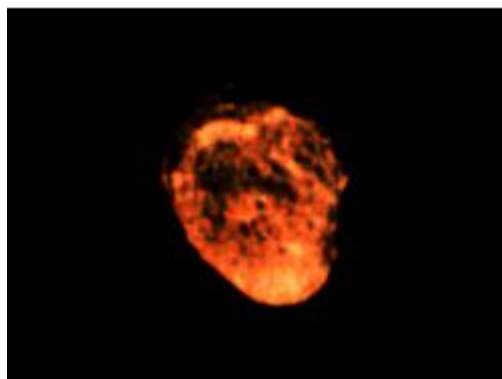


Рисунок 17 - Гиперион

Плохо предсказуемыми являются кроме природных явлений, таких как погода, также поведение систем, созданных людьми, например, колебания курсов акций и валют. Характерной особенностью хаотической системы является ее нелинейность независимо от физической природы, как, например рассмотренные выше осцилляторы.

Динамическая система может быть представлена не только в виде дифференциальных уравнений, но и для дискретного случая в виде уравнений вида:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) \quad (14)$$

Рассмотрим теперь простую систему вида (14). Исследуем поведение динамической системы, которая представляет собой так называемое одномерное или логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad (15)$$

где x_n – дискретная переменная, которая может принимать значения в промежутке $0 \leq x_n \leq 1$; λ - постоянный коэффициент, значение которого может находиться в пределах $1 \leq \lambda \leq 4$. Система (15) также является нелинейной, так как в ней присутствует квадрат переменной x_n .

Решения уравнения (15) для разных значений λ приведены на рисунке 18.

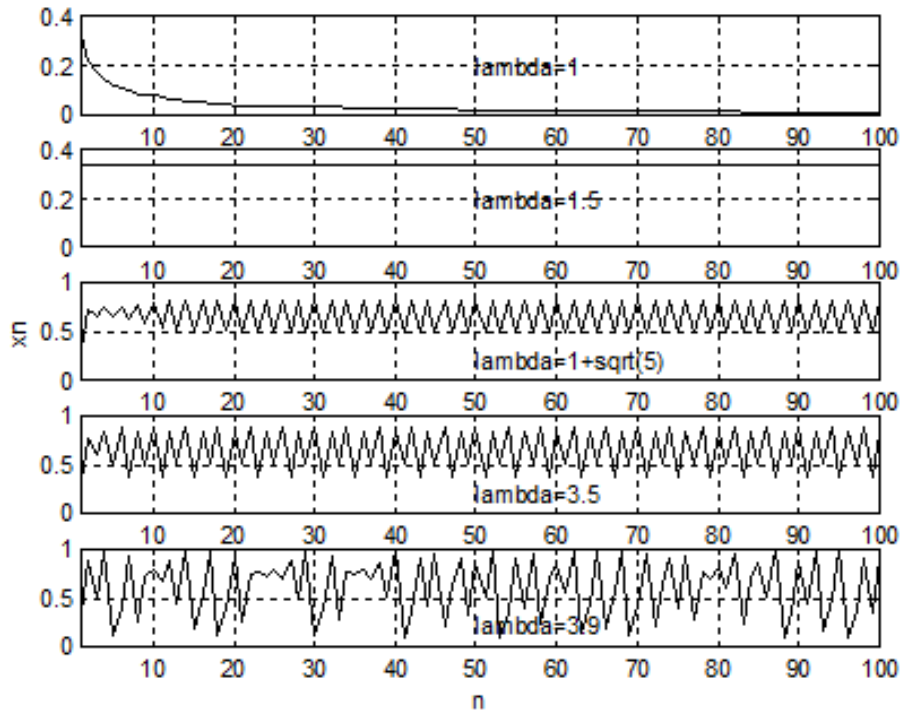


Рисунок 18 - Одномерное отображение

Решения системы (15) зависят от значения λ . Поэтому этот коэффициент носит название *управляющий параметр*. В зависимости от значения управляющего параметра, решение системы (15) может быть как детерминированным, так и хаотичным (рисунок 18).

На верхних трех графиках рисунка 18 при значениях $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$, $\lambda = 1 + \sqrt{5}$ система (15) имеет детерминированные решения. В первом случае при $\lambda = 1$ это экспонента, во втором при $\lambda = 1,5$ это константа, далее, при $\lambda = 1 + \sqrt{5}$, периодическая функция, затем, при $\lambda = 3,5$, периодическая функция с колебаниями на двух частотах. На четвертом графике, при $\lambda = 3,9$, решение носит хаотический характер и не может быть описано аналитически.

Решение системы (15) может быть представлено в зависимости от параметра λ . Тогда получается график, представленный на рисунке 19. Этот график называется *бифуркационной диаграммой* и является характерным для всех хаотических систем. На графике хорошо видны точки, в которых происходит качественное изменение решения – *бифуркация*. Между координатами этих точек по оси λ существует вполне определенное соотношение:

соотношение:
$$\delta = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} \approx 4,6692$$
. δ - *постоянная Фейгенбаума*, которая

является фундаментальной константой, проявляющейся в процессах самой различной природы.

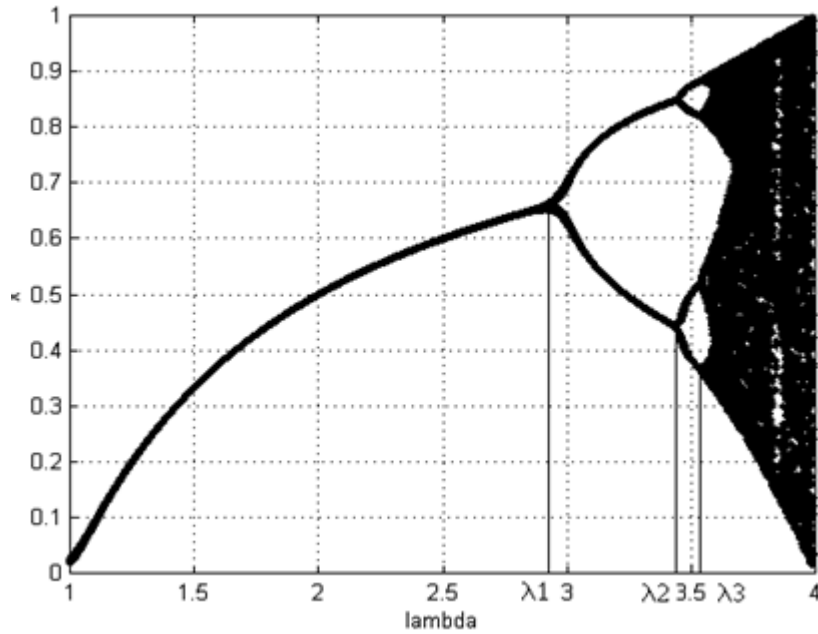


Рисунок 19 – Бифуркационная диаграмма

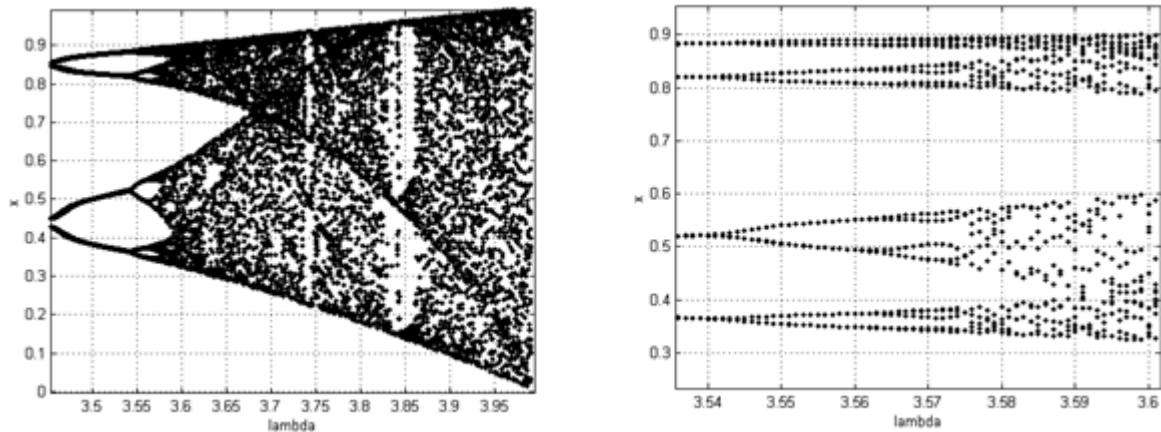


Рисунок 20 - Отдельные участки бифуркационной диаграммы

По бифуркационной диаграмме можно изучать поведение какой-либо системы в зависимости от значения *управляющего параметра*. Для рассматриваемого примера, при изменении значения λ до величины $\lambda \approx 3,57$ поведение системы (15) является детерминированным, при значениях $\lambda > 3,57$ система генерирует хаотические решения.

Если, как это делалось выше, поведение системы (15) представить в фазовом пространстве, то получится траектория в виде параболы. Ниже приводятся графики (рисунок 21) для фазовых траекторий системы (15) при тех же значениях управляющего параметра, что и на рисунке 18. Эти траектории являются аттракторами системы (15) при соответствующих значениях управляющего параметра λ .

Следующая хорошо известная и изученная хаотическая система была получена американским математиком Э.Лоренцем при исследованиях явлений в атмосфере в 1963 году [2].

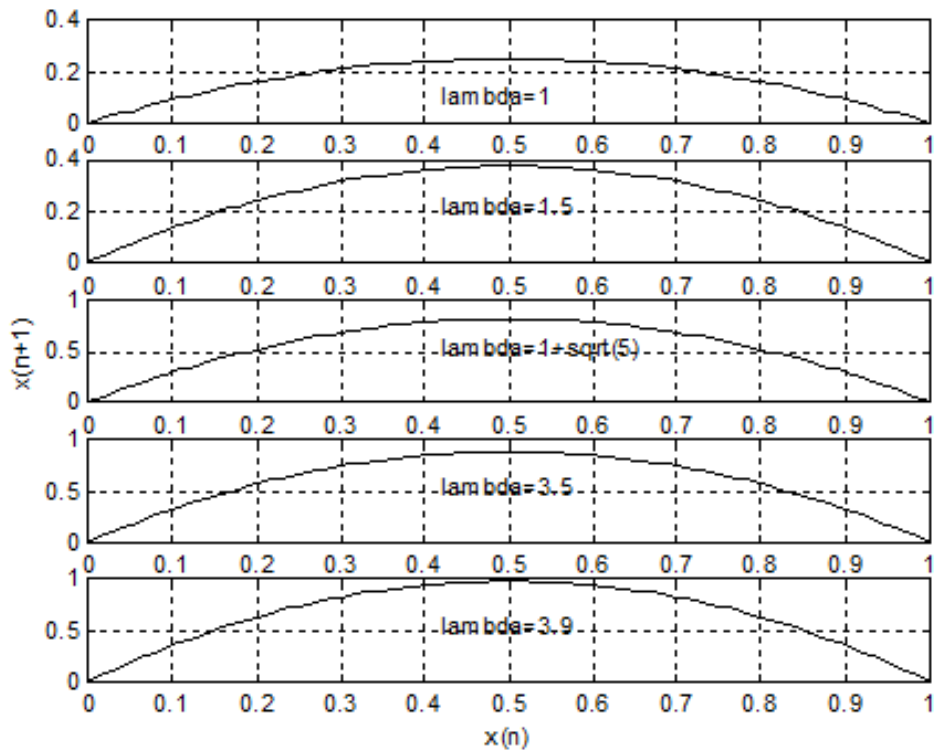


Рисунок 21 - Фазовые траектории системы (15) при различных значениях управляющего параметра λ

Конвекция в атмосфере - явление очень сложное и даже сегодня не вполне изученное, поэтому он взял за основу для своей модели многократно исследованную и описанную в литературе простую модель конвекции жидкости или газа в прослойке между двумя бесконечными плоскими параллельными пластинами - конвекцию Релея-Бенара (рисунок 22). Для определенной жидкости или определенного газа и также при определенном перепаде температур Δt между пластинами возникает упорядоченное конвективное движение в виде так называемых валов Бенара.

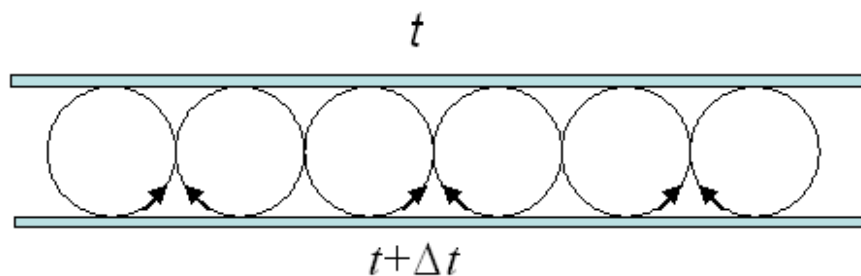


Рисунок 22 - Конвекция Релея-Бенара

Лоренц описал это движение следующей моделью:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \text{Pr}(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1x_3 + rx_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}\tag{16}$$

где Pr - критерий Прандтля; r , b - параметры системы, r - модифицированный критерий Релея. Аттрактор Лоренца и переменные динамической системы Лоренца для $\text{Pr}=10$; $r=28$; $b=8/3$ представлены на рисунке 23.

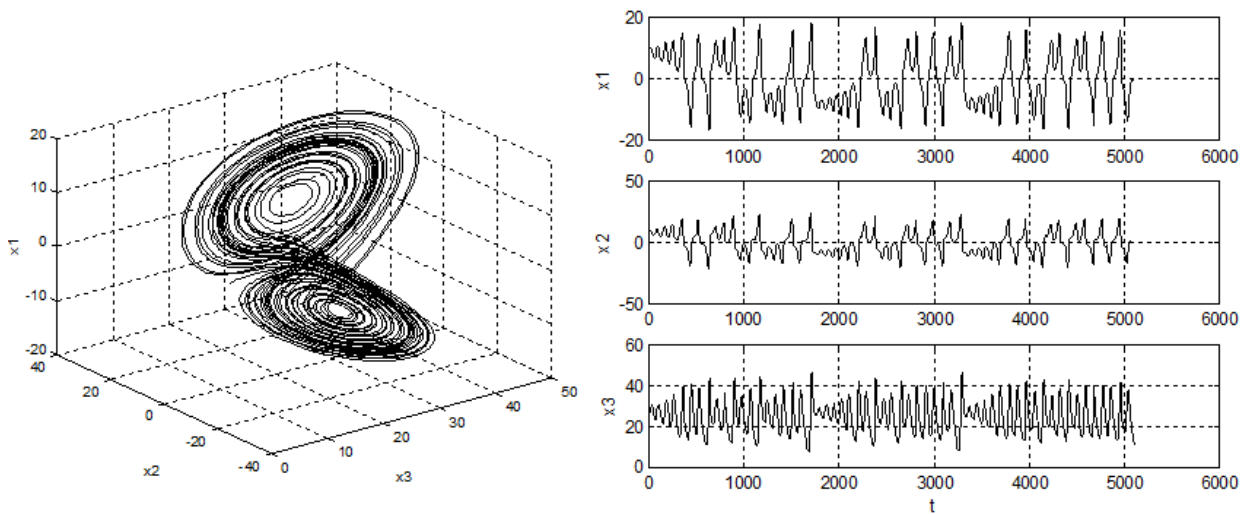


Рисунок 23 - Аттрактор Лоренца (слева) и переменные динамической системы Лоренца (справа) для $\text{Pr}=10$; $r=28$; $b=8/3$

Ниже, на рисунке 24, показано, что происходит с поведением системы (16), если считать параметр r управляющим и изменять его.

Система из трех простых уравнений с тремя неизвестными демонстрирует сложное и мало предсказуемое поведение. На следующем графике (рисунок 25) показано к чему приводит различие в начальных условиях (НУ) в 1%. До 800-го шага по времени разница в развитии процессов отсутствует. После 800-го шага развитие идет разными путями (голубые и красные кривые).

Это свойство характерно для всех хаотических систем и носит название «чувствительная зависимость от начальных условий» (ЧЗНУ). Как говорилось выше, существование таких систем в 1903 году предсказал французский математик Пуанкаре. Именно это свойство хаотических систем приводит к тому, что любое малое возмущение может за конечное время привести, например, к развитию вихря в атмосфере. Именно из-за этого сложно сделать точное предсказание погоды, так как самая малая погрешность измерения ведет к большим отклонениям от прогноза.

Аттрактор хаотической системы обладает сложной внутренней структурой и является фракталом. За это и ряд других свойств его также называют *странным аттрактором*. Фигуры на рисунках 23, 24 являются странными аттракторами. Часто вместо сочетания «хаотическая система» применяют сочетание «диссипативная система», подчеркивая тем самым факт, что система существует за счет диссипации, рассеивания энергии

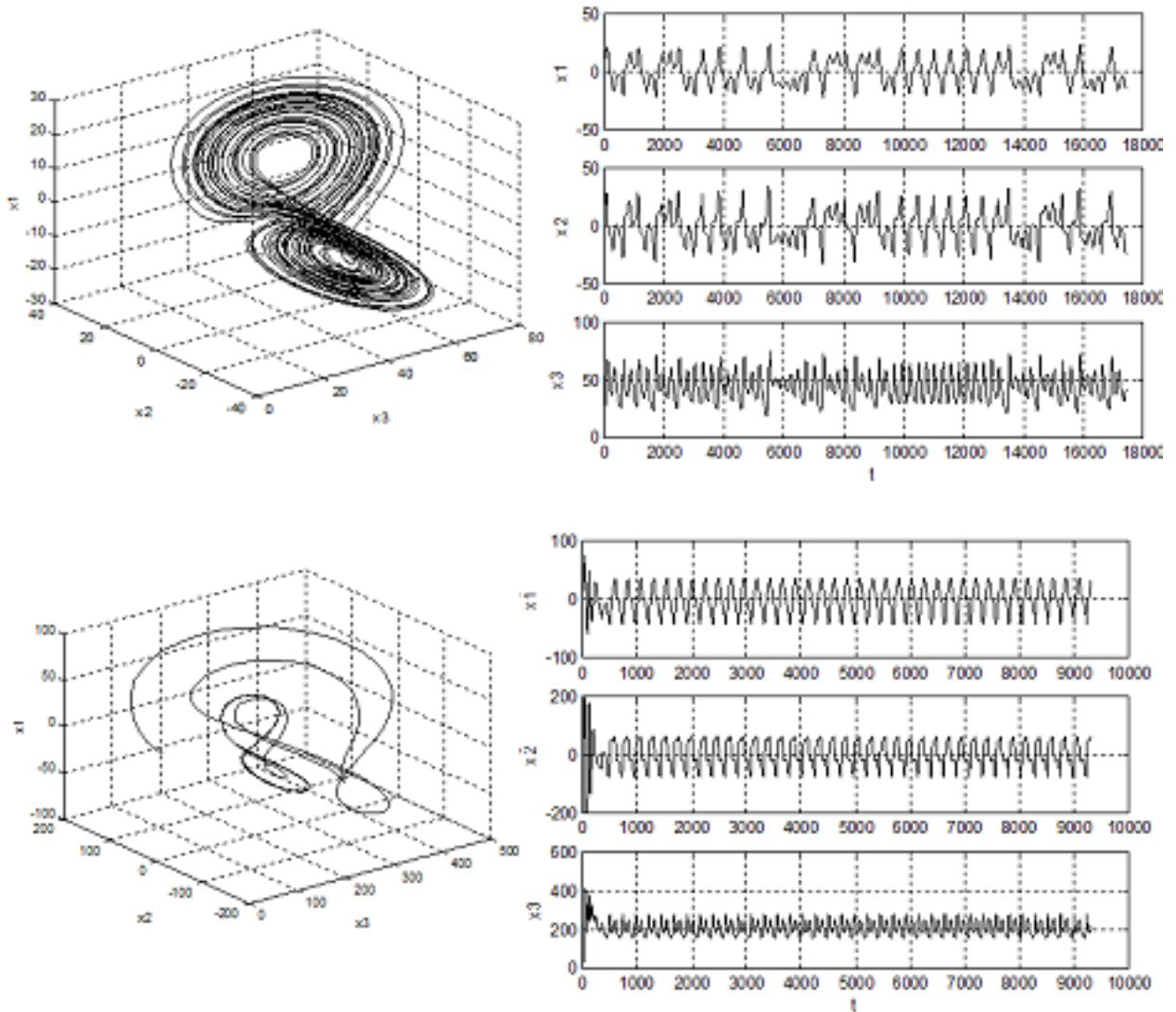


Рисунок 24 - Аттрактор Лоренца и переменные динамической системы. Верхние графики: $Pr=10$; $r=48.03$; $b=8/3$. Нижние: $Pr=10$; $r=210$; $b=8/3$

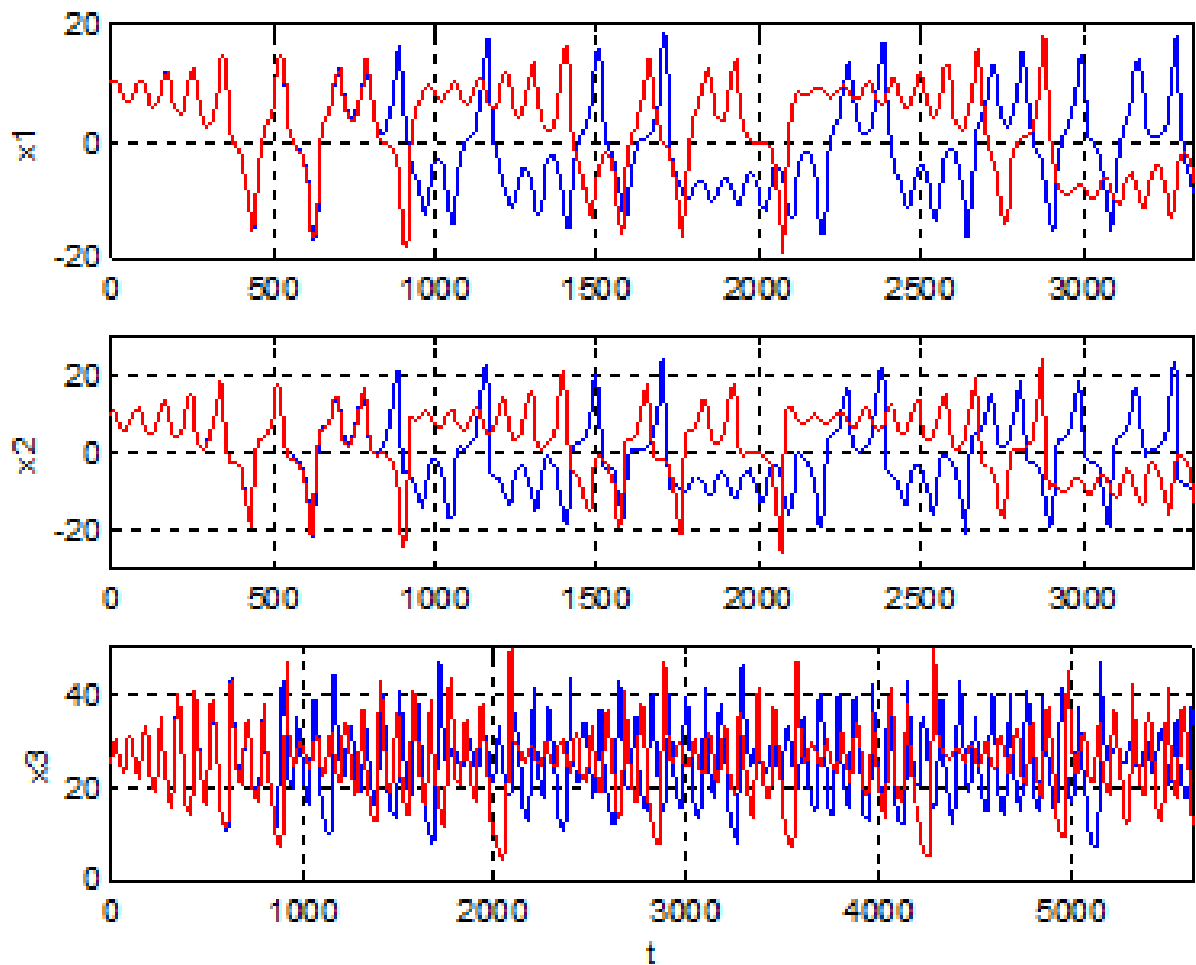


Рисунок 25 - Влияние НУ на поведение системы Лоренца. Для синих кривых НУ $x_1(0)=10,01$; $x_2(0)=10,01$; $x_3(0)=25,01$. Для красных $x_1(0)=10$; $x_2(0)=10$; $x_3(0)=25$. После 800-го шага развитие процессов идет разными путями

1.7. Странный аттрактор

Чтобы лучше представить себе, что такое аттрактор, можно привести такую аналогию. По реке с водоворотами плывет нефтяное пятно. Если течение равномерное, на площади, занимаемой пятном, скорости отдельных элементарных водных токов строго равны и их направления строго параллельны, то при таких условиях пятно будет плыть сколь угодно долго без изменений формы. Пусть теперь пятно подплывает к водовороту (рисунок 26). По мере приближения к водовороту, под действием токов жидкости, поле скоростей которой теперь перестало быть равномерным, пятно начинает деформироваться, терять прежние очертания. Говоря другими словами, вязкие силы жидкости уничтожают информацию о прежнем взаимном расположении частиц в пятне.

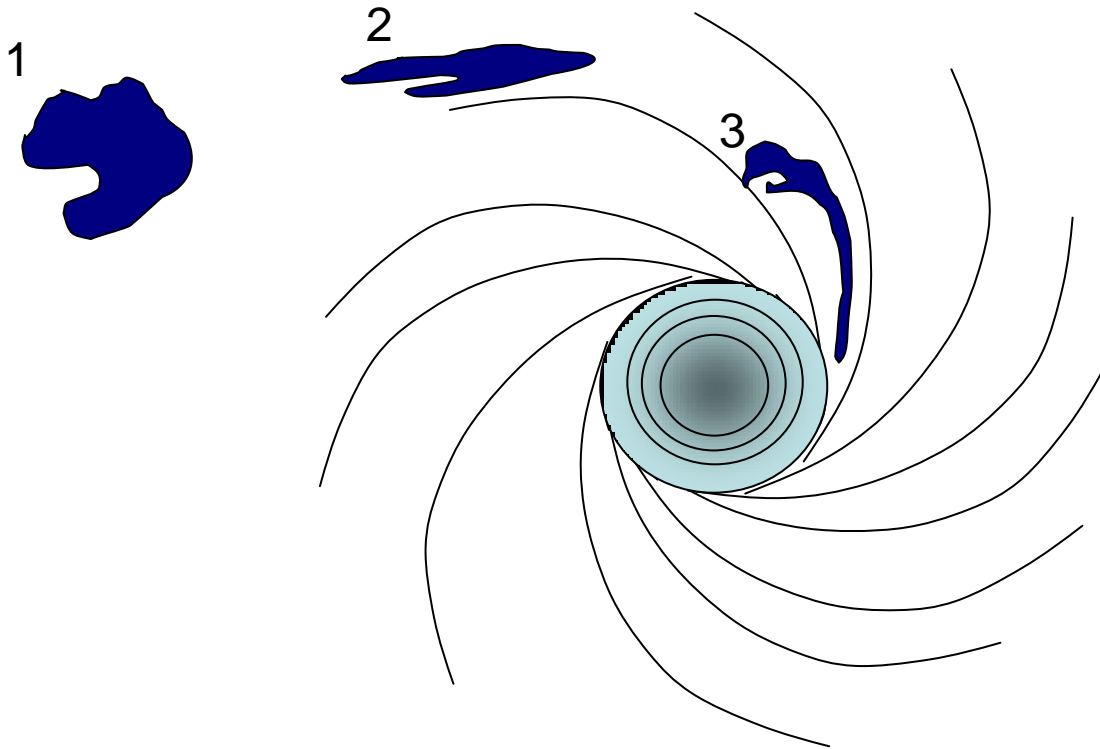


Рисунок 26 - Изменение формы пятна под действием водоворота

В конце концов, водоворот растащит пятно на отдельные углеводородные молекулы, которые вытянутся по его внутренней поверхности в спиральную цепь. Информация о их взаимном расположении в пятне утеряна окончательно.

То же самое происходит при движении по аттрактору. На рисунке 27 красным цветом показана группа точек, находящихся в какой-то области аттрактора Лоренца, общее число точек (или шагов во времени) в котором, равно 6504.

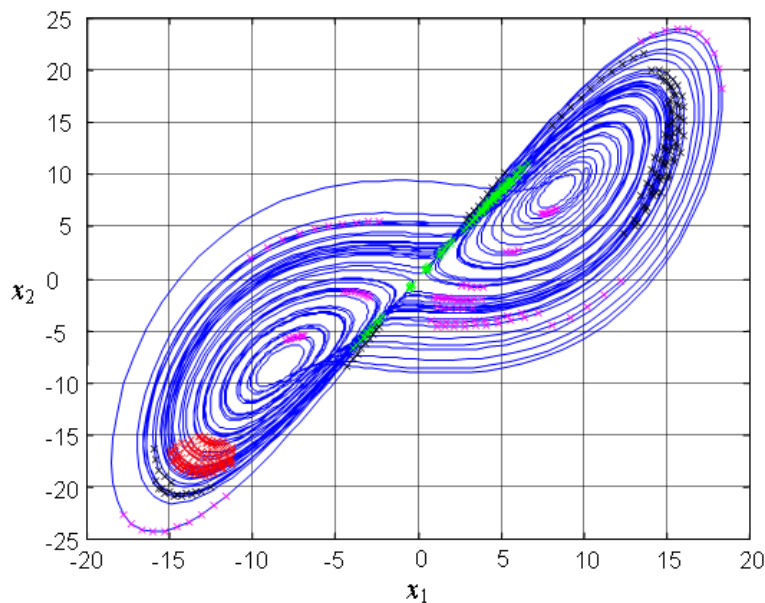


Рисунок 27 - Разбегание точек по аттрактору

Далее, зеленым показано взаимное расположение точек через 70 шагов во времени, черным - через 100 шагов и фиолетовым - через 300. Зеленые точки вытянулись в узкую полосу, черные уже разбежались по пяти вытянутым островкам в разных частях аттрактора, фиолетовые расплзлись по всей его поверхности - это всего лишь при попытке предсказания на 300 шагов из общей длины 6500 шагов, т.е. на 4% от общего интервала времени. Информация о первоначальном компактном «острове» из красных точек за этот временной промежуток стерта аттрактором и не может быть восстановлена.

Этот пример представляет собой отличную иллюстрацию возможностей предсказания поведения диссипативных систем, уничтожения ими, несмотря на их детерминистичность, информации о каком-то первоначальном распорядке в данной системе. Потому и нельзя точно предсказать погоду на достаточно длинный промежуток времени. Допустим, что красное пятно на рисунке 27 есть первоначальная информация о погоде, и дальше делается попытка предсказать ее. По-видимому, на 70 шагов какое-то предсказание возможно, на 100 - уже сомнительно, так как точки оказываются разбитыми на группы, далее можно только сказать, что результат предсказания будет где-то на аттракторе. Для погоды это означает, что, если, например, температура в Петербурге летом (если предсказание делается летом) может находиться в пределах от -2°C до $+37^{\circ}\text{C}$, то прогноз лежит где-то в этих границах.

Как говорилось в предыдущем разделе, аттрактор диссипативной системы называют странным, так как в его компактном, не бесконечном объеме точки стремятся как можно дальше убежать друг от друга, вследствие чего, он обладает очень сложной слоистой внутренней структурой.

1.8. Фрактал, как продукт эволюции динамической системы

Динамическая система может быть представлена схемой рисунка 28. На этом рисунке x_n - значение переменной на временном шаге n . Выход и вход системы связаны соотношением $x_{n+1}=f(x_n)$

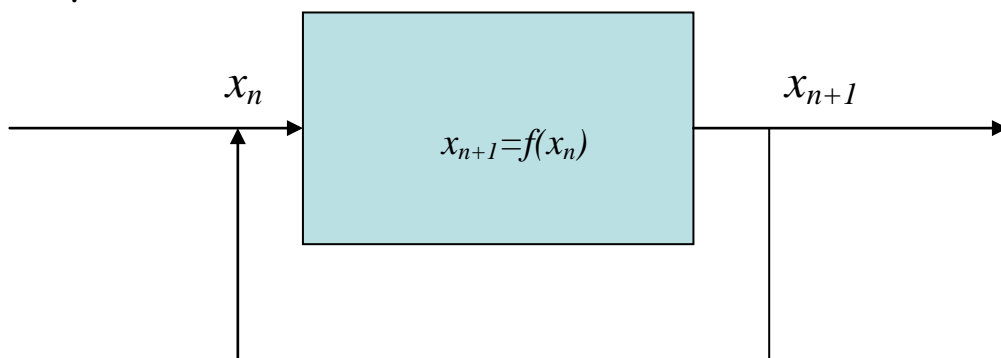


Рисунок 28 - Схематическое представление динамической системы

Основой функционирования динамической системы является обратная связь и итерации. Обратная связь означает, что для каждого последующего шага, значение переменной x_n , полученное на предыдущем шаге, служит начальным условием, т.е. идет с выхода системы снова на ее вход. Итерации означают, что этот процесс повторяется многократно. Любой фрактал является результатом функционирования динамической системы. При этом надо также задать правила, необходимые для получения фрактала. Например, если проводить многократное копирование какого-то изображения, расположив его в вершинах равностороннего треугольника и накладывая на лист бумаги одновременно три копии, каждая из которых масштабировалась с коэффициентом $\frac{1}{2}$, то можно получить фрактальную фигуру - ковер Серпинского (рисунок 29). После нескольких итераций информация о том, что основой для построения служила человеческая фигура, будет стерта.

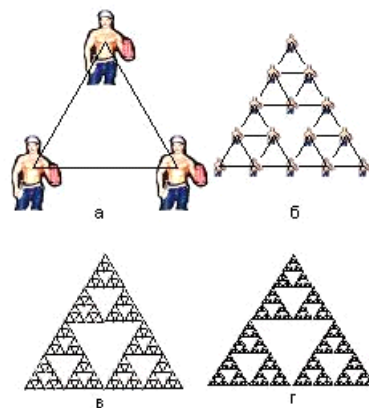


Рисунок 29 - Свойство динамической системы «забывать» свое первоначальное состояние

В рассмотренном примере проявилось одно из фундаментальных свойств фракталов: любой фрактал может быть представлен как продукт работы динамической системы и получается в результате многократных итераций. Этот пример также иллюстрирует и свойство динамической системы забывать свое первоначальное состояние.

1.9. Оценивание параметров динамических систем

При изучении поведения каких-то динамических систем чаще всего можно лишь наблюдать какие-то их отдельные переменные x_i системы. Например, при метеорологических наблюдениях можно лишь проводить измерения, например температуры, давления и скорости воздуха, в отдельных точках какого-то пространства. Это ограничивает возможности построения точных математических моделей и приводит к необходимости оценить их параметры по наблюдениям, проводимым в ограниченном пространстве, в дискретных точках и на ограниченном отрезке времени.

1.9.1. Метод задержек

Традиционно принято рассматривать детерминированные динамические системы, имеющие решения, которые можно описать детерминированными функциями. Однако многие реальные процессы, являющиеся решениями системы вида (1), из-за своей сложности могут быть описаны лишь на основе статистических представлений. Например, к ним можно отнести и результаты измерения электрических потенциалов на поверхности головы человека, которые измеряются при энцефалографическом обследовании. Типичный вид изменения сигнала в какой-то точке на поверхности головы в зависимости от времени приведен на рисунке 30.

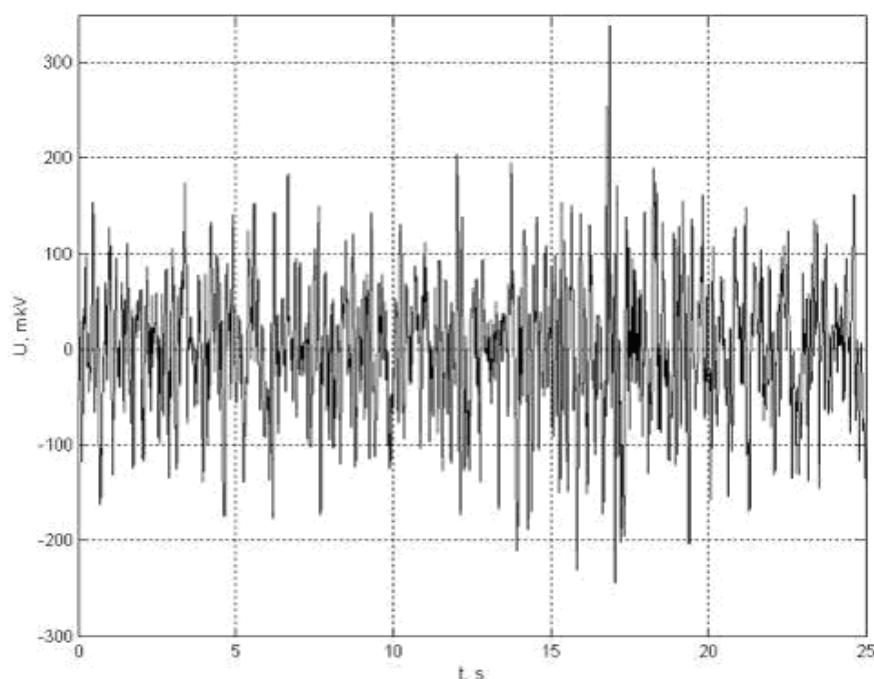


Рисунок 30 - Типичный вид изменения потенциала в какой-то точке на поверхности головы человека.

Можно рассмотреть два подхода к изучению таких процессов. Первый базируется на изучении поведения модели динамической системы, которая представляется в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1) и может быть получена на основе представлений о физической природе процесса. Однако хаотические процессы зачастую так сложны, что не всегда представляется возможным найти адекватное описание с помощью системы дифференциальных уравнений.

Второй подход основан на наблюдении хаотических процессов и на построении аттрактора в так называемом реконструированном фазовом пространстве, которое восстанавливается из наблюдаемого временного ряда, представляющего собой последовательность дискретных значений какой-

либо переменной, генерируемой системой. Типичный вид такого аттрактора, восстановленного из сигнала на поверхности головы человека (рисунок 30), представлен на рисунке 31.

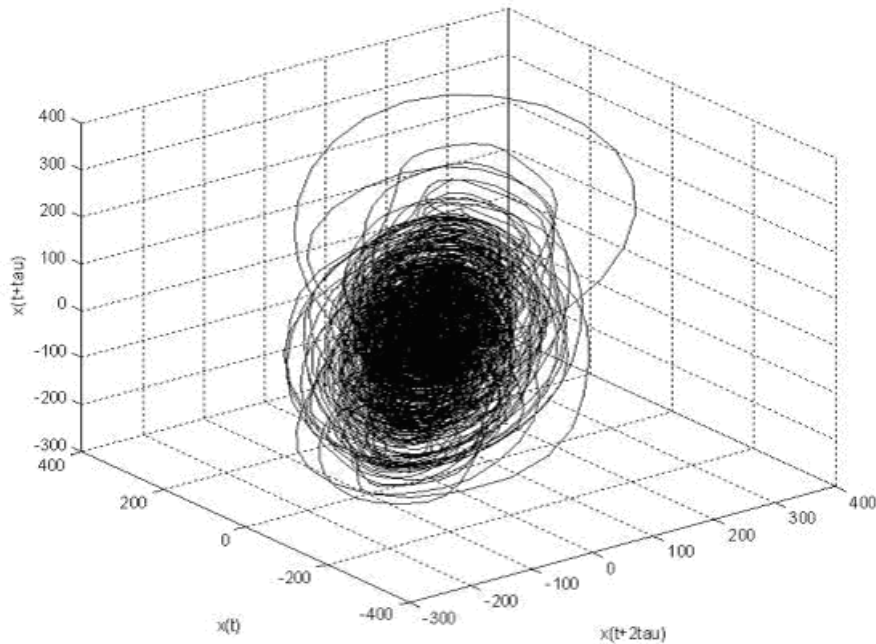


Рисунок 31 - Типичный вид странного аттрактора, восстановленного из сигнала на поверхности головы человека.

Грассбергер и Прокаччия [4] предложили алгоритм восстановления траектории движения объекта в фазовом пространстве (в хаотическом режиме траектория является странным аттрактором [3]), известный под названием *метод задержек*. Результаты наблюдений, как правило, представляют собой дискретные значения. Поэтому для их описания часто применяют написание системы (1) в дискретной форме:

$$\mathbf{x}(t + l) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (17)$$

Для этого применяют такой прием: определяют время τ , в течение которого автокорреляционная функция измеренного сигнала $x(t)$ (например, с рисунка 29) полностью затухает, делают копию этого сигнала и сдвигают ее относительно исходного сигнала на время τ . Полученные таким образом функции $x(t)$ и $x(t+\tau)$ являются независимыми, и тогда для построения аттрактора по экспериментальным значениям используют пространство $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$... Пример такого аттрактора приведен выше, на рисунке 31.

1.9.2. Размерность как характеристика динамической системы

Для динамической системы очень важным является исследование структуры аттракторов. Странные аттракторы нелинейных динамических систем имеют самоподобную структуру, поэтому для них удобно применять качественное оценивание, идентификацию масштабных свойств, которые могут быть измерены с помощью так называемых фрактальных

размерностей. Это позволяет оценить геометрическую структуру аттракторов и ввести меру для числа степеней свободы динамической системы.

Рассмотренные ниже размерности являются частными случаями так называемой *генеральной размерности*, для определения которой пространство вложения, имеющее размерность ED (Embedding Dimension), разбивается на ячейки V_i размером ε , $i=1, \dots, m$. Пусть вероятность того, что какая-то точка аттрактора находится в ячейке V_i есть p_i . Тогда генеральная размерность определяется следующим образом:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \left(\sum_{i=1}^m p_i^q \right)}{\log(\varepsilon)}. \quad (18)$$

Для $q=0$

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(m)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (19)$$

Для $q \rightarrow 1$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (20)$$

D_1 - информационная размерность, где $I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^m p_i \log(p_i)$ - информация.

Для $q=2$ получается выражение для так называемой *корреляционной размерности*, используемой для определения размерности объектов, трудно поддающихся или не поддающихся аналитическому описанию (например, аттракторы, построенные методом задержек по опытным данным, как на рисунке 30):

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (21)$$

где $C(\varepsilon)$ - так называемый *корреляционный интеграл*:

$$C(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m H(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (22)$$

где ε - радиус сферы, для которого определяется число точек $M(\varepsilon)$, оказавшихся внутри сферы, H - функция Хевисайда,

$$H = \begin{cases} 1, & \left(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \right) \geq 0 \\ 0, & \left(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \right) < 0 \end{cases},$$

$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ - векторы из начала координат к точкам траектории с номерами i, j . m - число точек на траектории.

При условии достаточно большого времени наблюдения T :

$$C(\varepsilon) \approx \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H\left(\varepsilon - \left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \right\| \right) \quad (23)$$

$$D_2 \approx \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (24)$$

Формулу (24) иллюстрирует рисунок 32.



Рисунок 32 – К вычислению корреляционного интеграла

Определяется число точек $M(\varepsilon)$ фазовой траектории, реконструированной из временного ряда, оказавшихся внутри сферы радиусом ε .

1.9.3. Энтропия Колмогорова

Измеряет информацию за единицу времени для серии следующих друг за другом измерений и в отличие от введенной выше информационной размерности рассматривает динамику процесса. Если динамика основана на детерминированных законах, то для определенного отрезка времени корреляции между отдельными значениями зависят от предыдущих значений рассматриваемой величины. Для диссипативной системы характерно сжатие объемов в фазовом пространстве, что приводит к потере информации. Скорость потери информации определяется с помощью энтропии Колмогорова.

Если $p(i_1, \dots, i_m)$ совместная вероятность того, что определенная последовательность элементов разбиения фазового пространства V_{i_1}, \dots, V_{i_m} (m -число ячеек, на которые разбито пространство вложения, ε - размер одной ячейки) следует друг за другом, то энтропия Колмогорова порядка q определяется следующим образом:

$$K_q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau m} \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i_1 \dots i_m} p^q(i_1, \dots, i_m) \right), \quad (25)$$

τ - время задержки при восстановлении аттрактора. При $q=2$ K_q превращается в так называемую корреляционную энтропию K_2 :

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau N} \log \left(\sum_{i_1 \dots i_N} p^2(i_1, \dots, i_N) \right), \quad (26)$$

которая просто выражается через корреляционный интеграл:

$$K_2 = \limlim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{ED \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \left(\sum_{i_1 \dots i_N} \frac{C_{ED}(\varepsilon)}{C_{ED+1}(\varepsilon)} \right), \quad (27)$$

где корреляционный интеграл $C_{ED}(\varepsilon)$ для определенной размерности вложения ED определяется из (23).

1.9.4 Показатель Ляпунова

Сказанное выше (см., например, 1.6), можно интерпретировать так, что при эволюции диссипативной системы фазовый поток $\mathbf{f}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ динамической системы (1) сжимается до совокупности малой размерности. Это означает, что происходит самоорганизация системы, выведенной из состояния равновесия. Для проверки стабильности траектории выбирается какое-то начальное условие $\mathbf{x}(0)$. Тогда можно для этих начальных условий записать решение $\mathbf{x} = \mathbf{f}^t \mathbf{x}(0)$. Чтобы проверить стабильность траектории выбирается второе начальное условие $\mathbf{x}'(0)$, близкое к $\mathbf{x}(0)$. Можно описать изменение разности (возмущения) для двух решений, полученных для этих начальных условий.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = \left\| \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}^t(\mathbf{x}'_0) \right\| \quad (28)$$

Если вокруг \mathbf{x}_0 имеется какая-то область \mathbf{U} , такая, что для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}$ возмущение $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ в пределе стремится к нулю, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = 0$, то траектория асимптотически устойчива.

Для исследования устойчивости рассматривают средний показатель возмущения $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)}{\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)} \right]^{1/t} \quad (29)$$

Если эта величина существует и если она меньше 1, то расстояние между точками $\mathbf{f}^t \mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{f}^t \mathbf{x}'(0)$ уменьшается, тогда для достаточно больших t :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \approx \boldsymbol{\varepsilon}_0 \bar{\gamma}^t.$$

Если $\bar{\gamma} > 1$, то расстояние между двумя траекториями за один шаг во времени увеличивается в среднем на одну и ту же величину. Это значит, что траектории разбегаются друг от друга - система неустойчива.

Можно ввести $\lambda = \ln \bar{\gamma}$, предположив, что $\bar{\gamma} > 0$, тогда можно записать:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_0 e^{\lambda t}, \quad (30)$$

λ - показатель Ляпунова.

Для $\lambda < 0$ движение устойчиво и для $\lambda > 0$ экспоненциально неустойчиво.

Выше рассматривалось свойство диссипативных систем «чувствительная зависимость от начальных условий» (ЧЗНУ). Именно это свойство хаотических систем объясняет, почему самая малая погрешность измерения ведет к большим отклонениям от прогноза, т.е. развивается и усиливается экспоненциально и именно это свойство объясняется с помощью показателей Ляпунова. Показатель Ляпунова характеризует неустойчивость диссипативной системы. Только для таких систем показатели Ляпунова положительны. Нулевой показатель Ляпунова соответствует консервативной системе.

Для динамической системы в n -мерном фазовом пространстве \mathcal{R}^n имеется n показателей Ляпунова, составляющих так называемый спектр показателей Ляпунова: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, при этом $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Для хаотических траекторий, по меньшей мере, $\lambda_1 > 0$.

1.9.5 Вычисление показателя Ляпунова из временных рядов

На аттракторе, восстановленном из временного ряда по методу задержек, выбирается произвольная начальная точка $y(t_0)$, и берется ближайшая точка на соседней траектории $z_0(t_0)$ (рисунок 33).

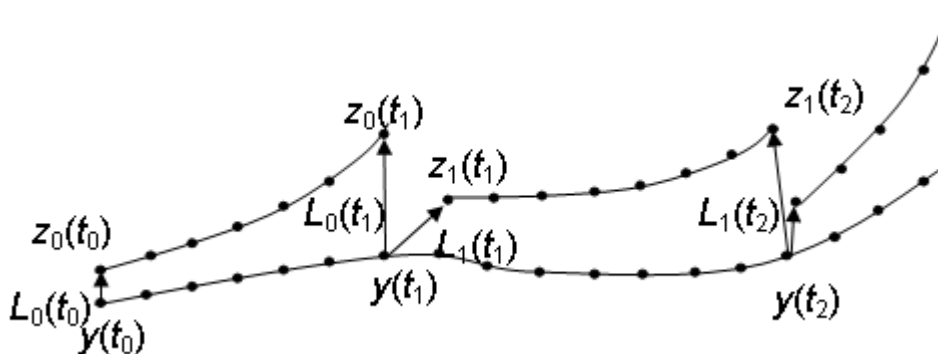


Рисунок 33 - Вычисление показателей Ляпунова

Расстояние между этими точками $L_0(t_0)$. Необходимо установить пороговое значение $L_0(t)$ для расстояния между двумя соседними траекториями и для точки $y(t_1)$, в которой оно будет превзойдено (т.е. $L_0(t_1) > L_0(t)$), необходимо найти новую точку $z_1(t_1)$ уже на другой соседней траектории и определить расстояние $L_1(t_1)$ и т.д. Тогда первый показатель Ляпунова λ_1 определяется из выражения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{j=0}^{M-1} \log \left(\frac{L_j(t_{j+1})}{L_j(t_j)} \right), \quad (31)$$

где $(M-1)$ - число смен соседних траекторий.

Обычно выбирают основание для логарифма в (31), равное двум, и первый показатель Ляпунова λ_1 измеряется в единицах *бит/шаг во времени*. Шаг во времени определяется из шага при смене соседних траекторий.

1.9.6 Предсказуемость

Можно показать, например на модели Лоренца, что для диссипативной системы, находящейся в хаотическом режиме, имеется какой-то временной порог, который определяет ту границу, за которую предсказание делать нельзя (рисунок 25, раздел 1.6).

Разница в начальных условиях (НУ) для представленных на графиках кривых составляет величину около 0,1%, что не мешает им после 800 шага по оси времени разойтись окончательно. Эта величина представляет собой то время t^* , за которое предсказание делать нельзя. Чем точнее известны НУ, тем больше t^* .

Содержание информации в НУ может быть определено с помощью информационной размерности и скорость исчезновения этой информации - с помощью энтропии Колмогорова.

Если из (20) вычислить количество информации $\bar{I}(\varepsilon) \approx D_i \log_2(1/\varepsilon)$ и принять во внимание, что система производит информацию $K_2 > 0$ (27), то на каждом временном шаге переписывается часть информации $\bar{I}(\varepsilon)$. Тогда K_2 задает среднее количество производства информации в битах за единицу времени (например, в бит/сек.) и можно оценить какое количество информации из НУ исчезло. Тогда $\bar{I}(\varepsilon) - t^* \cdot K_2 = 0$ или:

$$t^* = \frac{D_i \log_2(1/\varepsilon)}{K_2}. \quad (32)$$

1.9.7 Энтропия и информация

В статистической термодинамике энтропию определяют через число состояний g :

$$\sigma(N, U) = k \ln g(N, U), \quad (33)$$

k - постоянная Больцмана, N - число частиц в системе, U - энергия системы.

Выражение (33) получено в предположении, что система имеет фиксированную энергию и все состояния имеют одинаковую вероятность. Если величина энергии колеблется, то выражение (33) приобретает вид:

$$\sigma = -\sum p_i \ln p_i \quad (34)$$

Если все состояния равновероятны, то содержание информации в системе :

$$I = \log_2 g \quad (35)$$

I - полное содержание информации в системе по Шеннону.

Рисунки 34 и 35 иллюстрируют понятие «состояние».

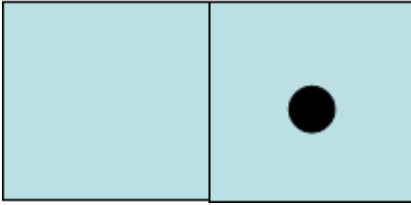


Рисунок 34 - Система с двумя состояниями

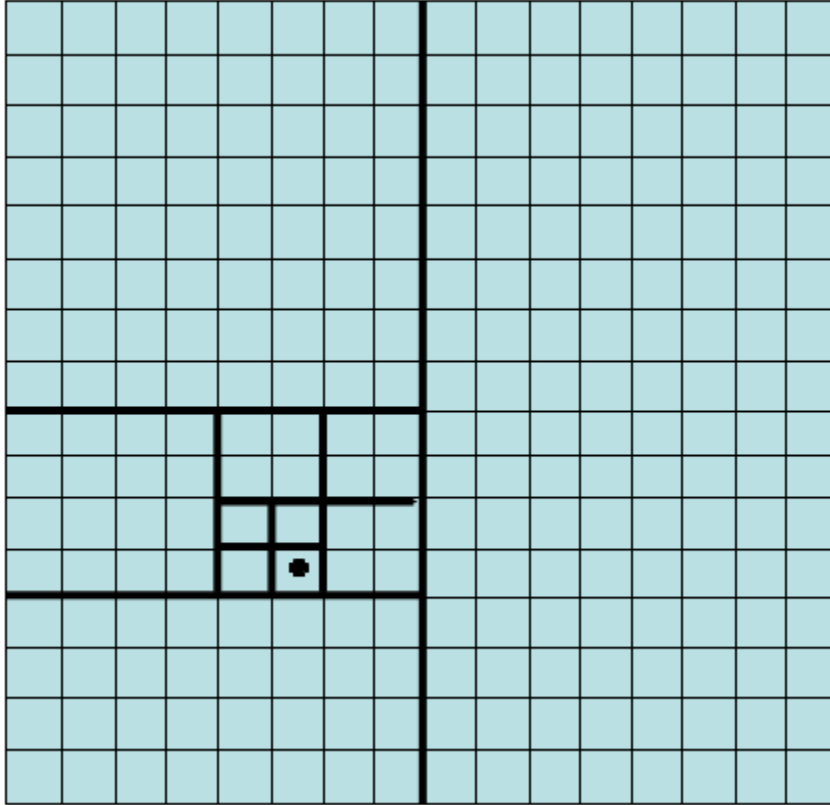


Рисунок 35 - Система с 256 возможными состояниями

В системе с $2^8=256$ возможными состояниями начальная неопределенность определяется количеством информации $I=8$ бит. На рисунке 35 показан процесс поиска ячейки содержащей точку серией последовательных делений плоскости пополам.

Теперь рассмотрим систему с различными вероятностями отдельных состояний. Тогда, чем меньше мы знаем о системе, тем больше информации получаем при измерениях. По аналогии с выражением (34) можно получить:

$$I = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad (36)$$

I - информация, полученная при измерениях.

Пусть в системе делается $N \rightarrow \infty$ измерений. С вероятностью p_1 в состоянии 1 находится N_1 результатов. С вероятностью p_2 в состоянии 2 находится N_2 результатов.

Тогда:

$$\begin{aligned} N_1 &= N \cdot p_1 \\ N_2 &= N \cdot p_2 \end{aligned} \quad (37)$$

Воспользовавшись выражением (35) можно вычислить содержание информации в результатах измерений. Для этого определим число состояний g , как:

$$g = \frac{N!}{N_1!N_2!} \quad (38)$$

Прологарифмируем (38):

$$I = \log_2 N! - \log_2 N_1! - \log_2 N_2! \quad (39)$$

По формуле Стирлинга:

$$\begin{aligned} I &\approx N(\log_2 N - 1) - N_1(\log_2 N_1 - 1) - N_2(\log_2 N_2 - 1) = \\ &= -N \left(\frac{N_1}{N} \log_2 \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} \log_2 \frac{N_2}{N} \right) = -N(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда прирост информации в результате единичного измерения:

$$\bar{I} = \frac{I}{N} = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) \quad (41)$$

Информация в динамических процессах может быть пояснена с помощью рисунков 36 и 37.

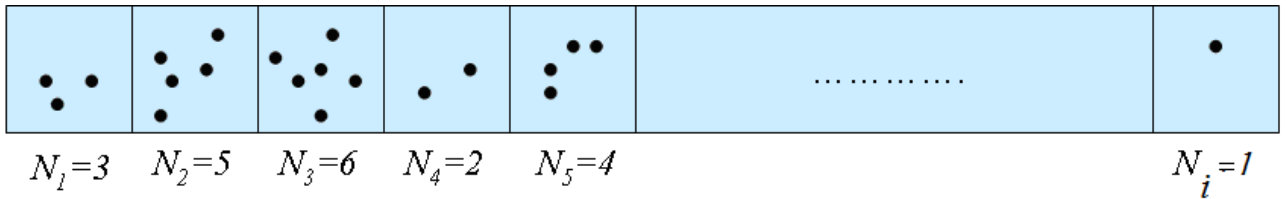


Рисунок 36 – Изменение количества результатов измерений N_i на каждом шаге i в процессе эволюции системы

Если p_i - вероятность нахождения результата в i -м прямоугольнике, то

$$p_i = \frac{N_i}{N} \quad (42)$$

Среднее значение полученной информации:

$$\bar{I}(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{W(\varepsilon)} p_i \log_2 p_i \quad (43)$$

Информационная размерность:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)} \quad (44)$$

Зная значение энтропии Колмогорова (Колмогорова- Синяя или KS-энтропия) можно получить ответы на вопросы:

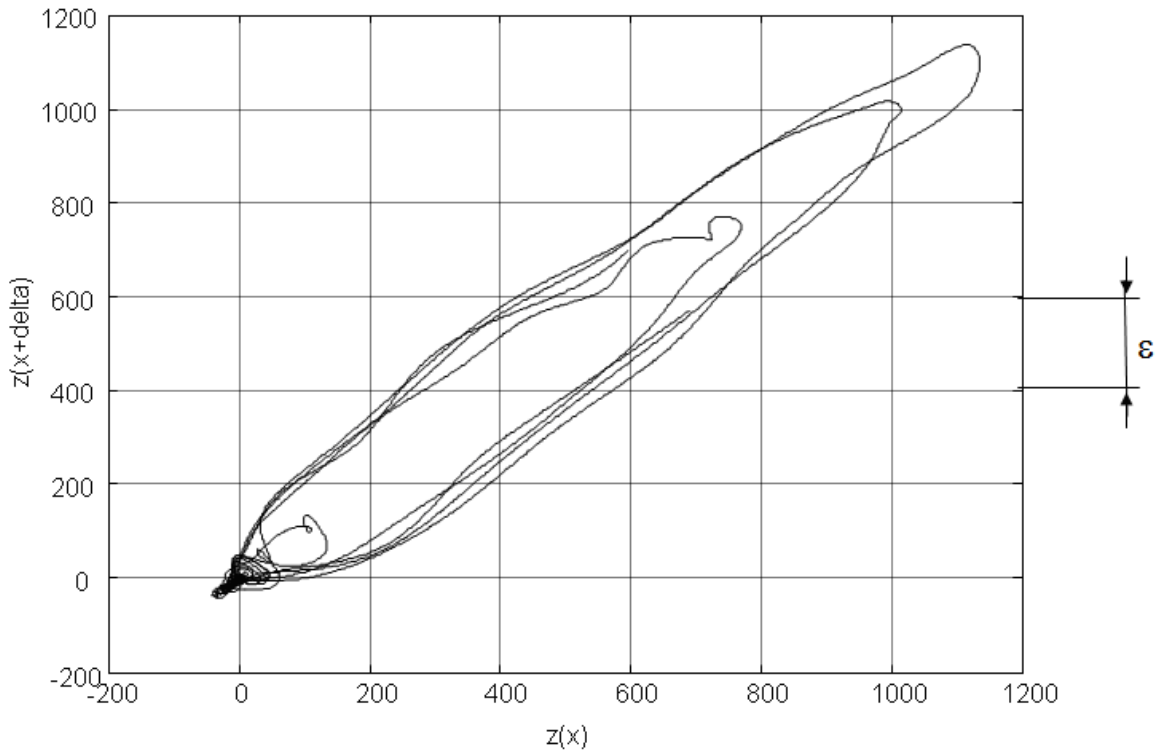


Рисунок 37 – Разбиение аттрактора динамической системы. ε - размер разбиения

1. Какое количество информации можно получить в результате выполнения серии последовательных n измерений?
2. Какова неопределенность будущего состояния при определенном текущем состоянии?

Энтропия Колмогорова определяет приращение информации за единицу времени для серии следующих друг за другом измерений.

Можно привести пример. Пусть кто-то хочет измерить напряжение. Не зная, чему оно равно, он берет прибор с возможно более широкой шкалой (рисунок 38).

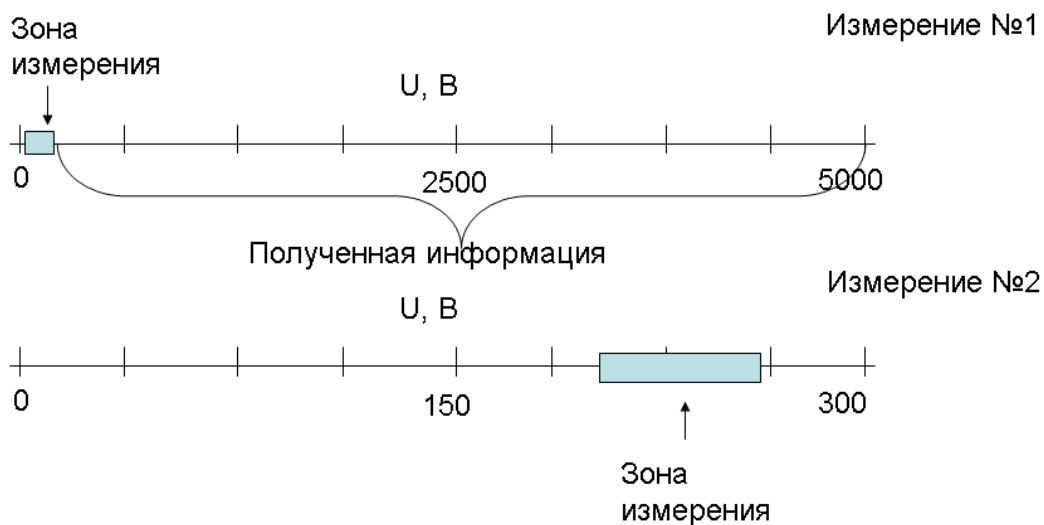


Рисунок 38 – Пояснение понятия информация

Проведя измерение, он видит, что стрелка едва отклоняется и нужен другой прибор, с более узкой шкалой. Измерение с помощью другого прибора дает ему нужный результат.

Полученная в результате первого измерения информация, соответствует разнице между конечной точкой шкалы (5000 В, рис., сверху) и значением, до которого отклонилась стрелка.

Полученная в результате второго измерения информация, также соответствует разнице между конечной точкой шкалы (300 В, рис., снизу) и значением, до которого отклонилась стрелка. Это количество информации существенно меньше, чем в первом случае.

Ниже приведен пример с аттрактором, с потерей информации в фазовом пространстве (рисунок 39) .

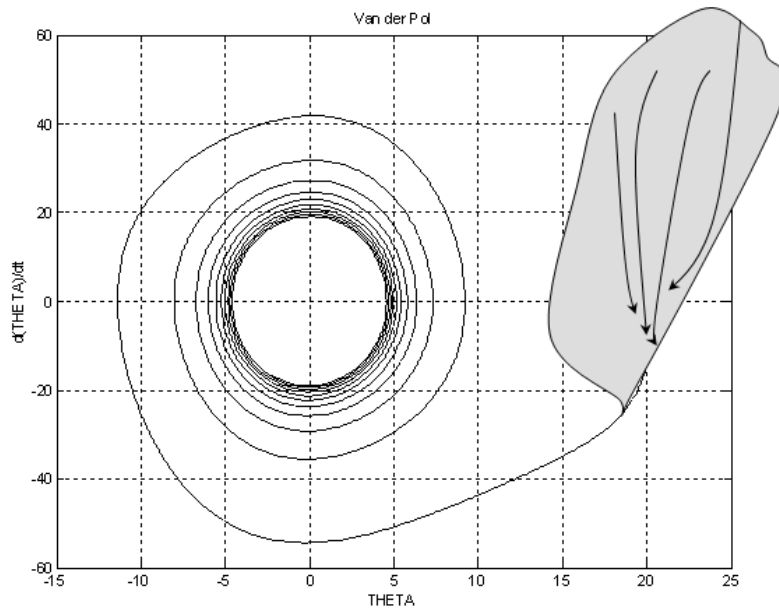


Рисунок 39 – Потери информации в фазовом пространстве

Траектории на аттракторе перераспределяются на новые ячейки (рисунок 40) в фазовом пространстве. Скорость перераспределения K является скоростью потери информации, энтропией Колмогорова и

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}(x^{(n)})}{n\Delta t}, \quad \bar{I}(x^{(n)}) = - \sum_{t_0 \dots t_{n-1}} p(x_{t_0 \dots t_{n-1}}^{(n)}) \log_2 p(x_{t_0 \dots t_{n-1}}^{(n)}) \quad (45)$$

определяется показателями Ляпунова λ [5]. Энтропия Колмогорова и показатели Ляпунова связаны между собой следующим соотношением:

$$K \approx \sum_i \lambda_i,$$

где λ_i - положительные показатели Ляпунова.

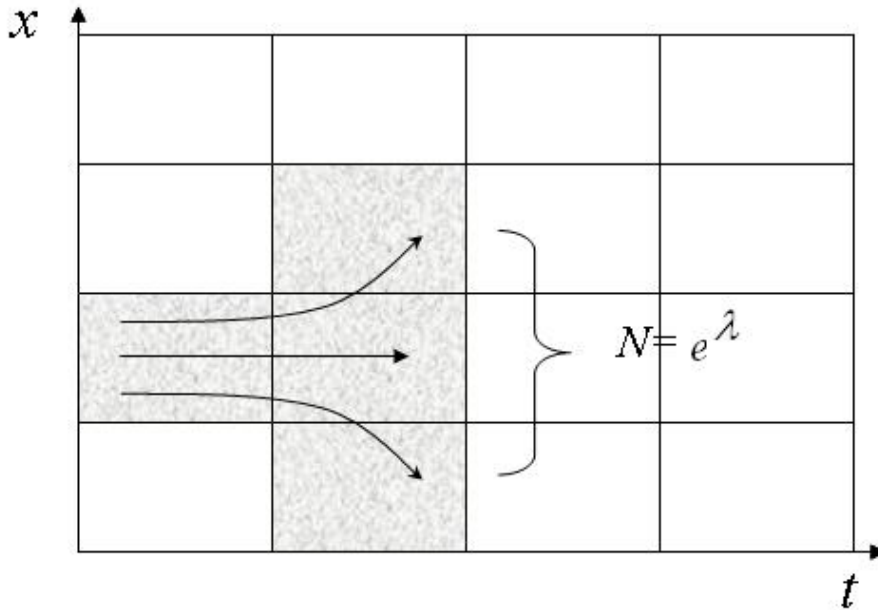


Рисунок 40 - Перераспределение траекторий на аттракторе на новые ячейки

1.9.8 Переход к хаосу

Существуют так называемые сценарии перехода к хаотическому, турбулентному движению, так, например, по сценарию Ландау в результате первой бифуркации возникает предельный цикл с частотой ω_1 , в результате второй возникает тор - результат взаимодействия двух частот ω_1 и ω_2 . Если $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ - иррационально, то траектория равномерно заполняет всю поверхность тора. Следующая бифуркация приводит к появлению тора более высокой размерности. Появляется новая траектория с частотой ω_3 , которая может выглядеть как спираль, которая наматывается на спираль, возникшую после предыдущей бифуркации, и т.д. Реальные системы ведут себя по другому: хаос, например, наступает после трех бифуркаций и, переход к хаосу при моделировании демонстрирует система всего из трех независимых переменных. Рюэль и Такенс [6] показали, что система из трех независимых переменных может быть как полностью детерминированной, так и хаотической. Следствием детерминистического подхода (хаос «генерирует» детерминированная система) является то, что траектории динамической системы не могут пересекаться в фазовом пространстве.

Детерминированность, однако, запрещает разбегание траекторий, что наблюдается в реальных экспериментах и моделях. В [3] это иллюстрируется следующим примером для двоякопериодического режима, для которого аттрактор имеет вид тора T_2 (рисунок 41).



Рисунок 41 - Тор T_2 , образованный двумя частотами ω_1 и ω_2

Этот тор разворачивается на плоскость, для чего он разрезается по малой окружности между областями c и c' , выпрямляется в трубку (рисунок 42),

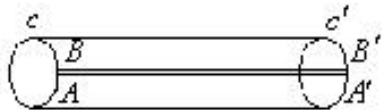


Рисунок 42 - Второй этап разворачивания поверхности тора.

после чего трубка разворачивается в прямоугольник $AA'BB'$ (рисунок 43)

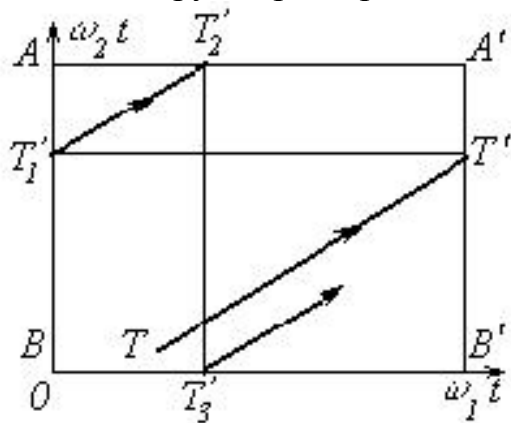


Рисунок 43 - Разворачивание трубки в прямоугольник.

Любой фазовой траектории на торе соответствует прямолинейный отрезок на прямоугольнике $AA'BB'$ (отрезки TT' , $T_1 T_2'$, рис.1.26) и точки T_1' и T' на торе есть одна точка.

Прямые, соответствующие фазовым траекториям, должны быть на развертке параллельны друг другу, непараллельность, разбегание траекторий на двухчастотном торе противоречит детерминированности. Если возникнет пересечение, то их число со временем должно возрастать (рисунок 44).

Таким образом, для того, чтобы тороидальная траектория не противоречила принципу детерминированности, существует только две возможности:

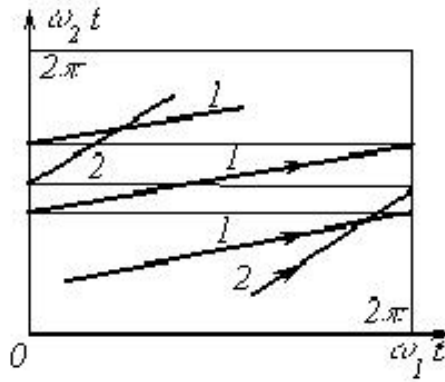


Рисунок 44 - Пересечение траекторий на торе невозможно

при иррациональном $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ прямолинейные отрезки всюду плотно покрывают развертку тора, и это соответствует так называемому двойкопериодическому или квазипериодическому режиму;

при рациональном $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ траектория состоит из конечного числа параллельных прямолинейных отрезков, и это соответствует периодическому режиму.

Однако [3,5] двойкопериодический режим неустойчив и подвержен явлению “затягивания” частоты или синхронизации, в результате чего отношение частот из иррационального становится рациональным. Поэтому тор T2 не может быть аттрактором аperiodического, хаотического режима.

В хаотическом режиме спектральная плотность мощности какой - то переменной x динамической системы имеет непрерывную часть, что свидетельствует о хаотическом поведении этой переменной, например, на рисунке 45 приведена спектральная плотность мощности для переменной x_1 системы Лоренца.

Для такого режима автокорреляционная функция сигнала быстро стремится к нулю при возрастании времени сдвига τ и почти не различающиеся начальные состояния на аттракторе эволюционируют к сильно различающимся конечным состояниям.

Поэтому предсказывать поведение системы, находящейся в хаотическом режиме, затруднительно. Таким образом, аттрактор хаотического режима внутренне противоречив: с одной стороны он притягивает траектории к себе, с другой стороны он обладает чувствительной зависимостью к начальным условиям (ЧЗНУ), что приводит к разбеганию траекторий на аттракторе. При рассмотрении структуры аттрактора можно понять, как это происходит.

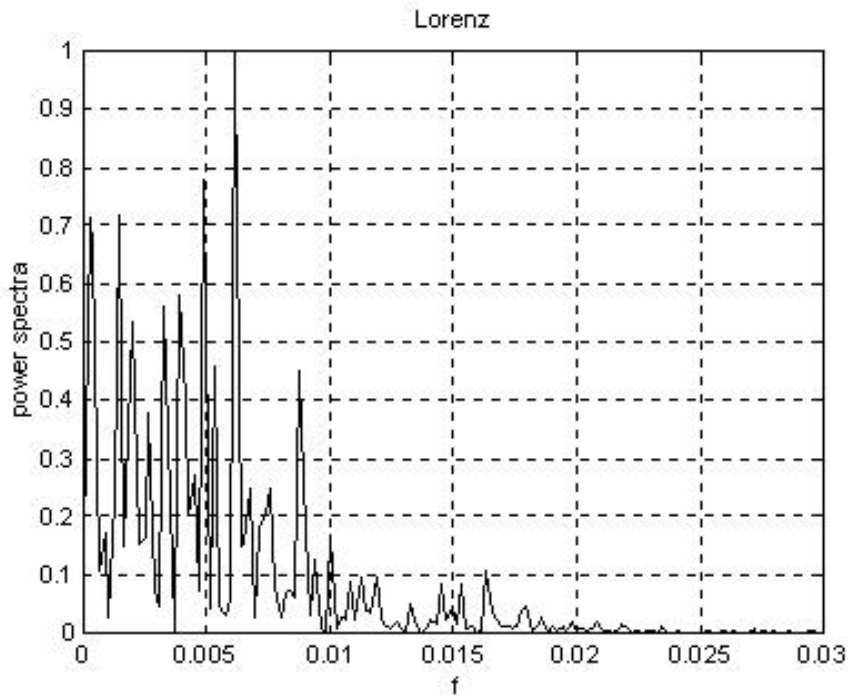


Рисунок 45 - Спектральная плотность мощности для переменной x_1 системы Лоренца.

1.9.9 Сечение Пуанкаре

Часто для наглядного представления траектории применяют *сечение Пуанкаре*. Для этого аттрактор трансверсально рассекается плоскостью. Для выполнения условия трансверсальности необходимо, чтобы для вектора скорости потока \mathbf{F} (см. (1)), в точках \mathbf{x} , в которых траектория пронзает плоскость, скалярное произведение $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ – нормаль к поверхности H в точке \mathbf{x} . Затем на плоскости остаются точки, в которых она пересекается только с одного направления (рисунок 46).

Сечения Пуанкаре хаотических аттракторов (например, для механических колебаний в псевдооживленном слое, рисунок 47) показывают, что они имеют характерную серповидную слоисто-складчатую структуру (рисунок 48), т.е. расхождение происходит в одном направлении, а притяжение в другом. Это явление можно проиллюстрировать с помощью рисунка 49. Проекция рисунка 49а на плоскость перпендикулярную направлению потока выглядит, как показано на рисунке 50.

Приведенные рассуждения показывают, что странный или хаотический аттрактор должен иметь размерность $D > 2$, вследствие ЧЗНУ, однако сокращение объемов в фазовом пространстве в пределе дает объем аттрактора - равный нулю, что требует размерности в трехмерном пространстве $D < 3$. Поэтому размерность аттрактора в трехмерном пространстве $2 < D < 3$: аттрактор является фрактальным объектом.

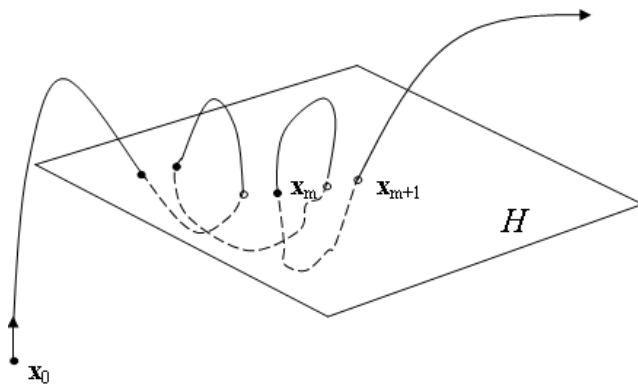


Рисунок 46 - Сечение Пуанкаре

11.04.1996.KI.v=360m³/h,H=.18m.S1,tau=0.52s

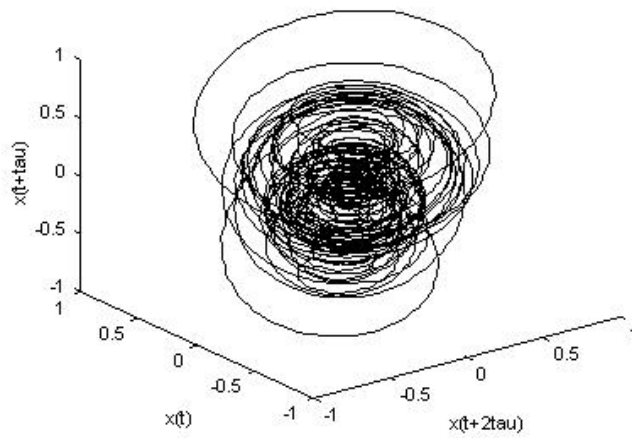


Рисунок 47 - Характерный вид реконструированного аттрактора для механических колебаний в псевдооживленном слое

11.04.1996.KI.v=360m³/h,H=.18m.Poincare-Abb.x(t+2tau)=0.S1,tau=0.52s

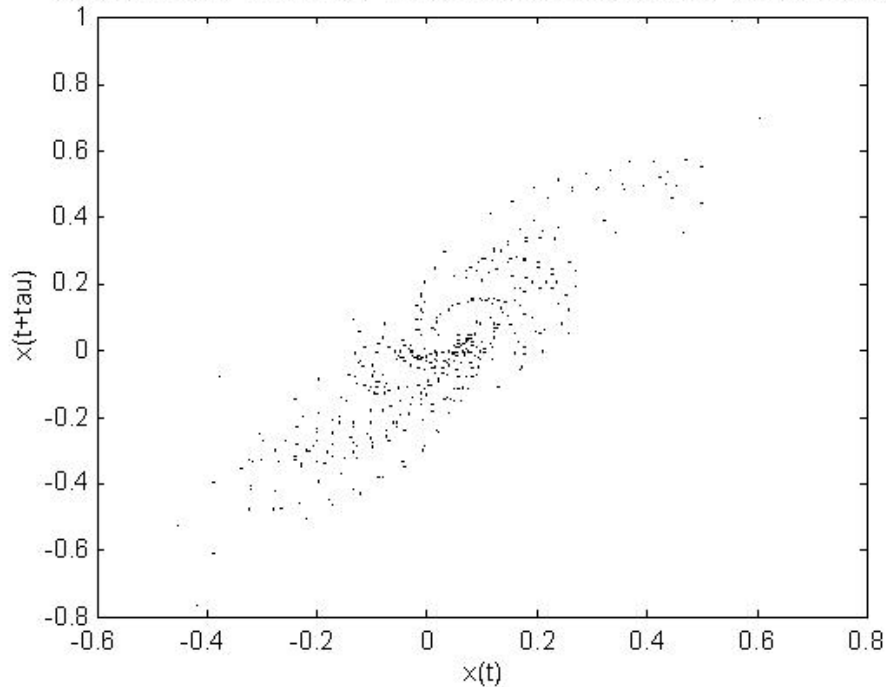


Рисунок 48 - Сечение Пуанкаре аттрактора с рисунка 48

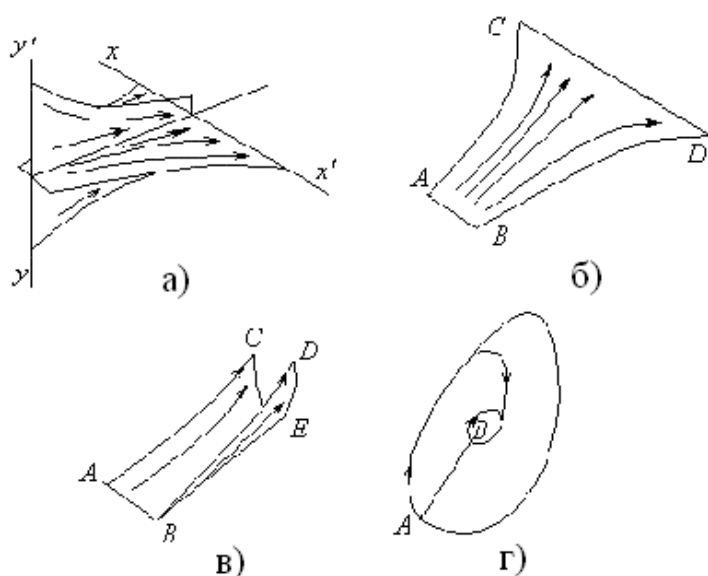


Рисунок 49 – Иллюстрация расхождения и притяжения траекторий
 а) Сокращение (притяжение) по y' и растяжение (сокращение) по x' ;
 б). Высокая чувствительность к начальным условиям ($AB < CD$);
 в) Первое складывание “листа”;
 г) Второе складывание- “выход” совмещается с “входом”.

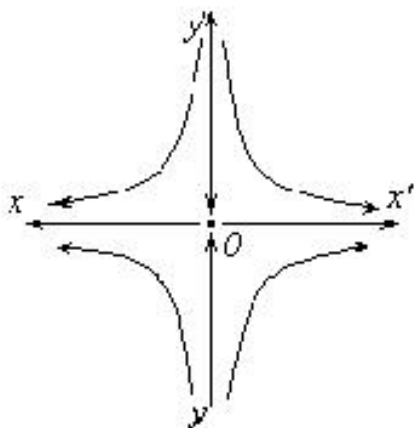


Рисунок 50 - Проекция потока на плоскость

Резюмируя, можно показать, что странный, или хаотический, аттрактор обладает следующими отличительными свойствами [3,5]:

- 1) фазовые траектории “притягиваются” к аттрактору;
- 2) вследствие ЧЗНУ сколь угодно близкие траектории расходятся на аттракторе;
- 3) аттрактор имеет фрактальную размерность D_f .

1.10 Сравнение различных видов протекания процессов

С использованием введенных понятий - размерностей, экспонент Ляпунова, энтропии Колмогорова, можно провести сравнение поведения процессов при некоторых типичных случаях: полном отсутствии колебаний; гармонических колебаниях на одной частоте; гармонических колебаниях на двух частотах; хаотических колебаниях. Результаты такого сравнения приведены на рисунке 51.

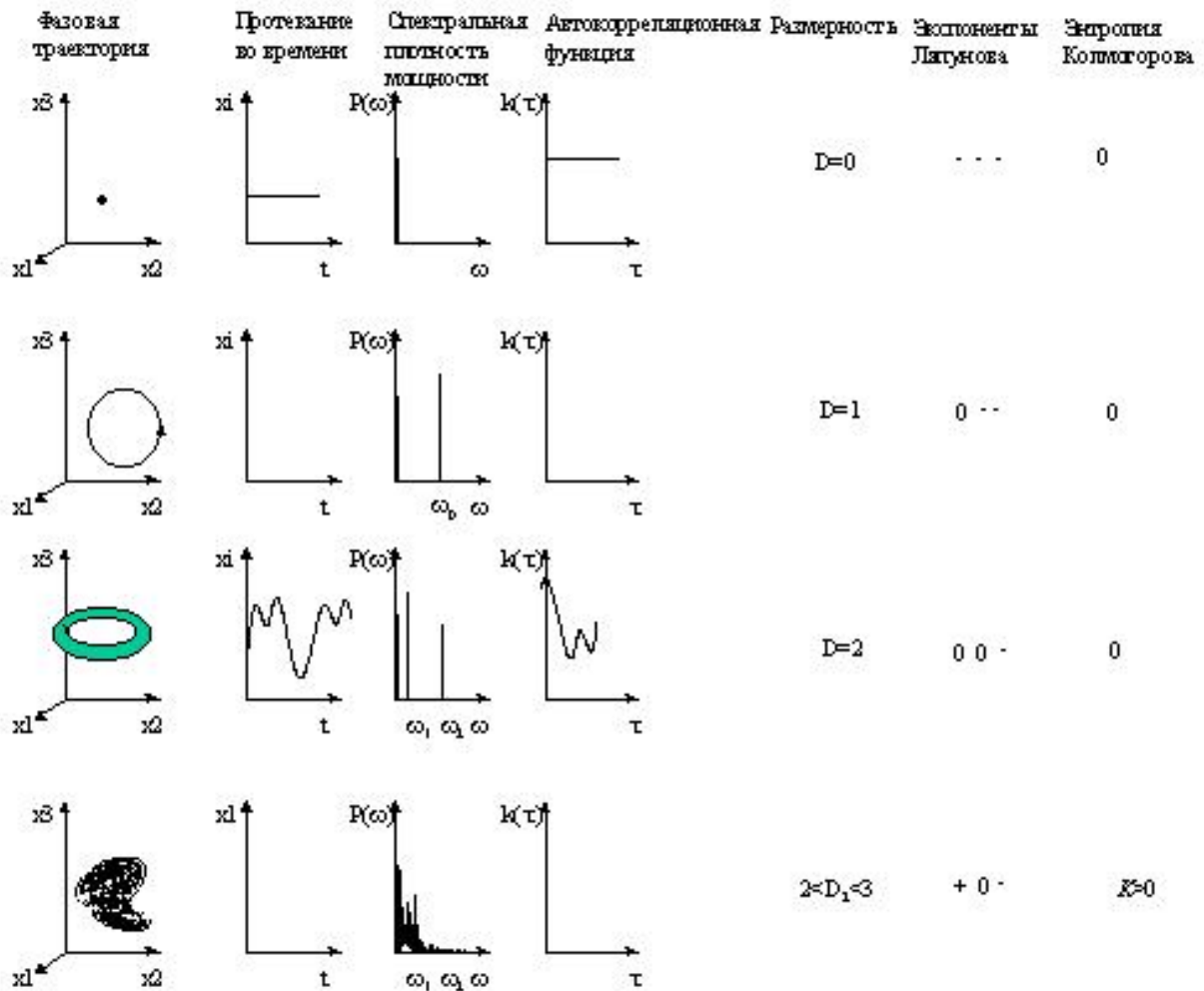


Рисунок 51 - Сравнение различных видов протекания процессов

2. Оценивание параметров природных и технических объектов

По разным причинам, в числе которых дискретность материи и ограниченные возможности органов чувств человека и созданных им измерительных приборов, результаты измерений принципиально не могут обладать абсолютной точностью. Поэтому часто употребляют термин «оценивание». По результатам измерений проводится оценивание каких-то параметров наблюдаемой величины, которые характеризуют интересующие исследователя явления.

Имеются разные методы оценивания параметров, к числу основных можно отнести:

- построение кривых регрессии, например с помощью метода наименьших квадратов (МНК-оценки);
- вычисление корреляционных функций и оценивание спектральных характеристик, например, так называемых спектральных плотностей мощности (СПМ) для процессов, имеющих периодичность;
- выявление периодичностей с помощью сечений Пуанкаре;
- оценивание энтропии Колмогорова, показателей Ляпунова и корреляционной размерности динамической системы.

2.1 Построение кривых регрессии

Иллюстрируется рисунком 52.

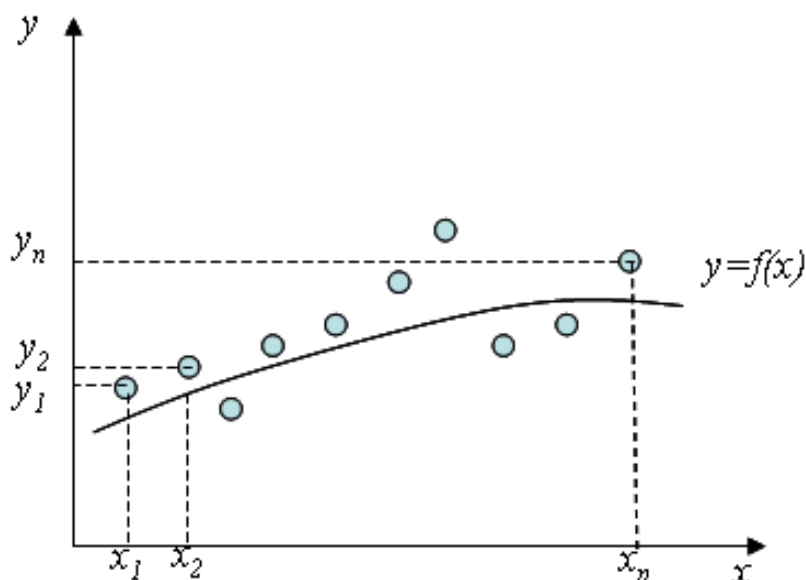


Рисунок 52 - Иллюстрация метода наименьших квадратов

Имеется ряд значений y_1, y_2, \dots, y_n , величины y , полученных путем проведения измерений при известных значениях x_1, x_2, \dots, x_n , независимой переменной x . Необходимо установить функциональную связь $y=f(x)$.

При решении этой задачи обычно считают, что разброс значений величины y обусловлен погрешностями, и искомую функциональную зависимость строят так, чтобы полученная кривая сглаживала колебания величины y . Чаще всего при этом применяется метод наименьших квадратов (МНК), по которому сумма квадратов отклонений измеренных значений от регрессионной кривой должна иметь минимально возможное значение. Однако может оказаться, что колебания обусловлены не погрешностью измерений, а объективными закономерностями. Тогда нужно каким-то образом выявить и описать их характер. Для этого применяют спектральный анализ.

2.2 Спектральный анализ и преобразование Фурье

2.2.1 Задачи, решаемые спектральным анализом

Спектральный анализ применяют в случаях, когда в исследуемом процессе присутствуют колебания. Даже если эти колебания очень слабы, спектральный анализ позволяет их выявить.

Произвольный процесс y может быть описан либо в виде зависимости от времени $x = f(t)$, либо в зависимости от частоты $X = F(\omega)$, где $\omega = 2\pi f$, f - частота, Гц. Эти два представления сигнала связаны друг с другом преобразованием Фурье, которое в общем случае может быть определено, как:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (46)$$

Ниже показан гармонический колебательный процесс, как функция времени (рисунок 53) и частоты (рисунок 54).

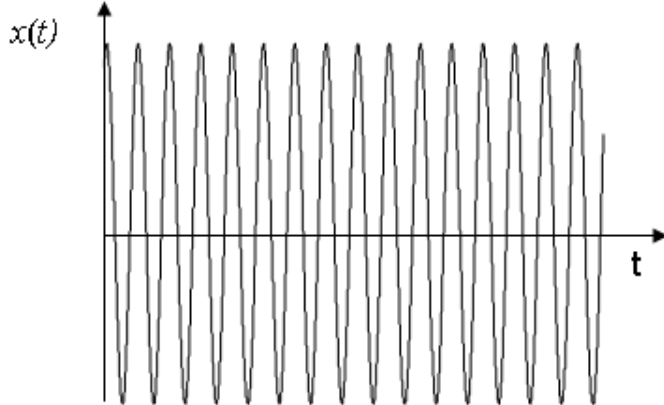


Рисунок 53 - Представление гармонической функции, как функции времени

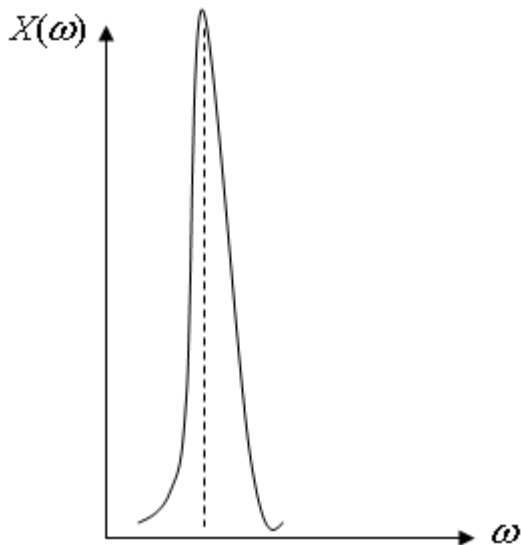


Рисунок 54 - Представление гармонической функции, как функции частоты

В общем случае функция $X(\omega)$ - комплексная, и ее действительная и мнимая часть определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \\ -\operatorname{Im}[X(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда амплитудный и фазовый спектры определяются, как:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[X(\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[X(\omega)]\}^2} \quad (47)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[X(\omega)]}{\operatorname{Re}[X(\omega)]} \quad (48)$$

Следующий рисунок (рисунок 55) демонстрирует гармоническую функцию $x(t)=\sin(t)$ (слева) и ее Фурье-преобразование $X(f)$ (справа).

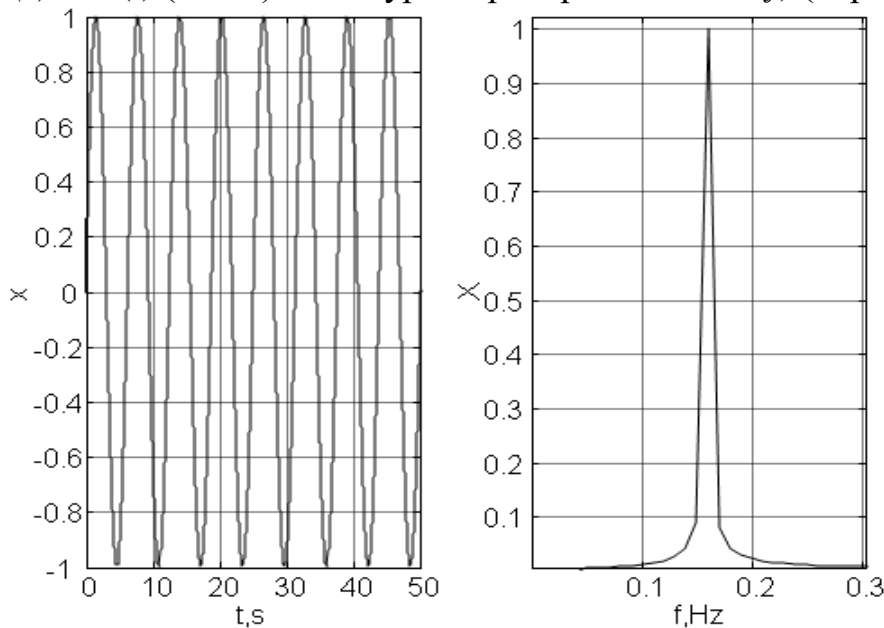


Рисунок 55 - Гармоническая функция $x(t)=\sin(t)$ (слева) и ее Фурье-преобразование $X(f)$ (справа)

Фурье-преобразование позволяет хорошо различить гармонический процесс, даже если он смешан с шумами, амплитуда которых соизмерима с амплитудой этого процесса (рисунок 56).

На рисунке 57 показаны два гармонических сигнала изменяющиеся во времени со сдвигом по фазе на 90° или на $\pi/2$.

Следующий рисунок (рисунок 58) демонстрирует результат их совместной обработки при вычислении амплитудного и фазового спектров.

Можно ввести понятие мощности сигнала, характеризующего процесс.

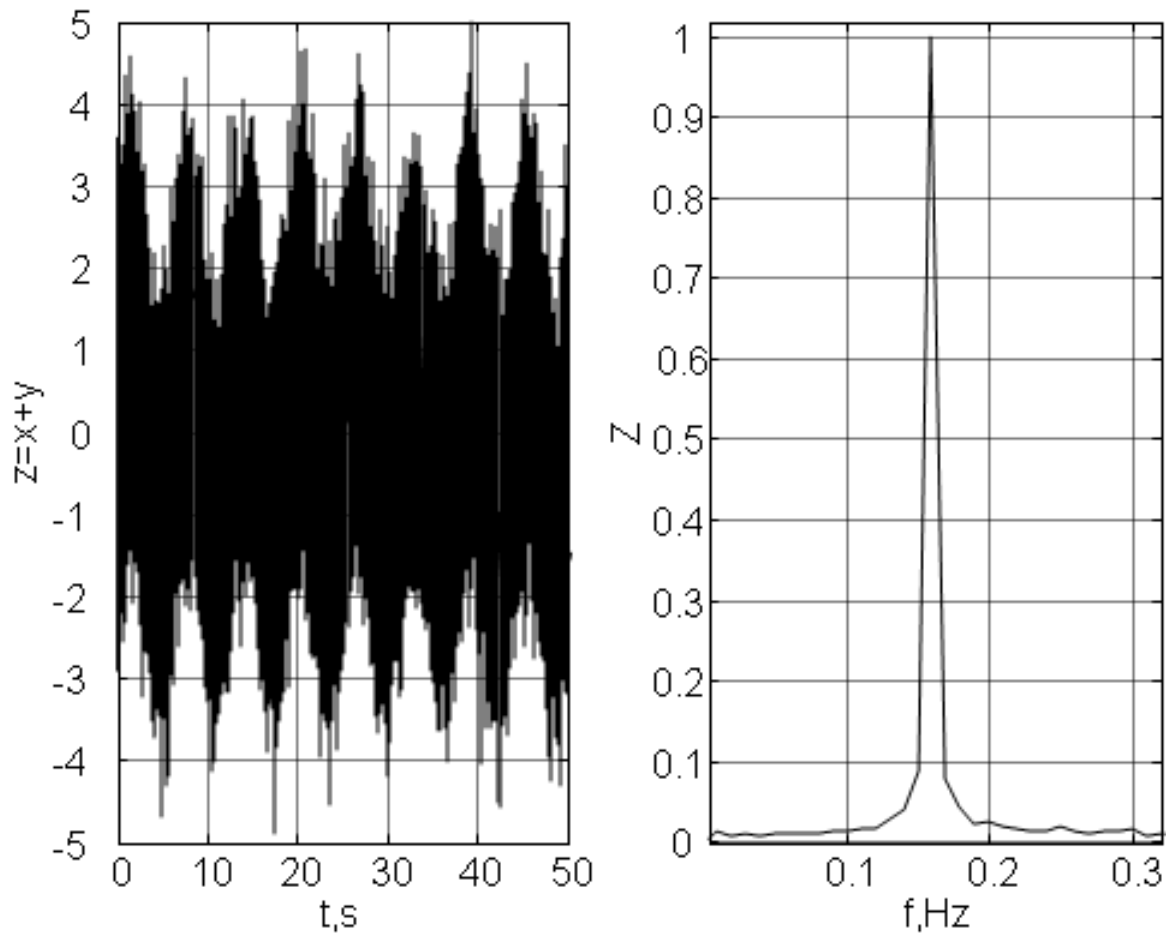


Рисунок 56 - Гармонический сигнал $x(t)=\sin(t)$, смешанный с шумами (слева), и Фурье-преобразование от него (справа).

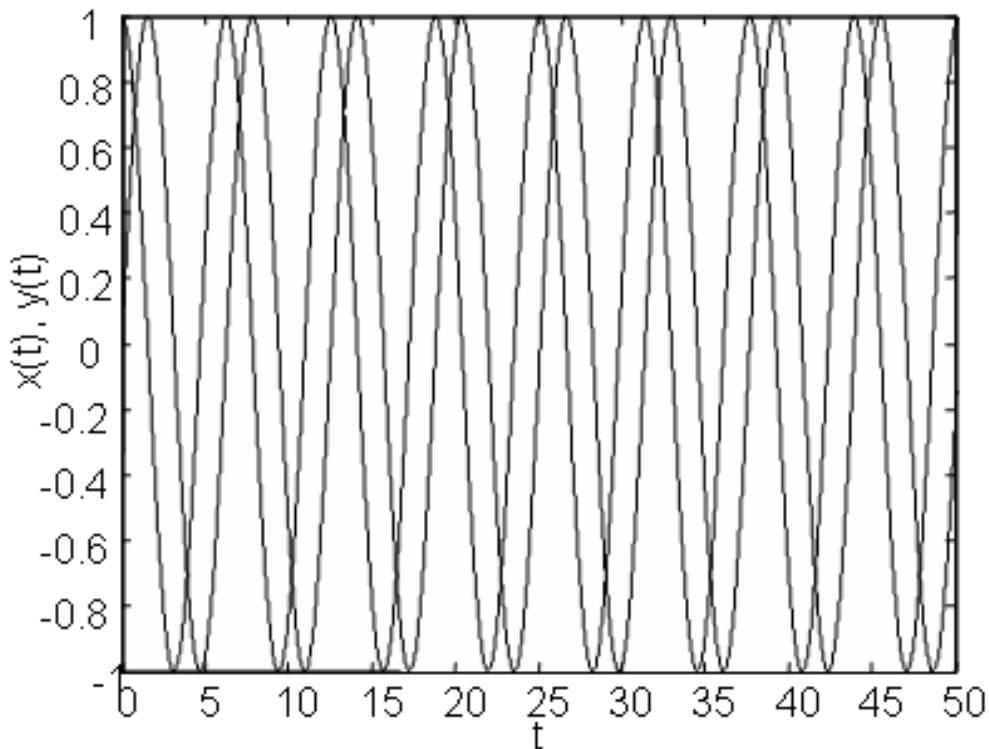


Рисунок 57 - Гармонические функции со сдвигом по фазе на 90° или на $\pi/2$

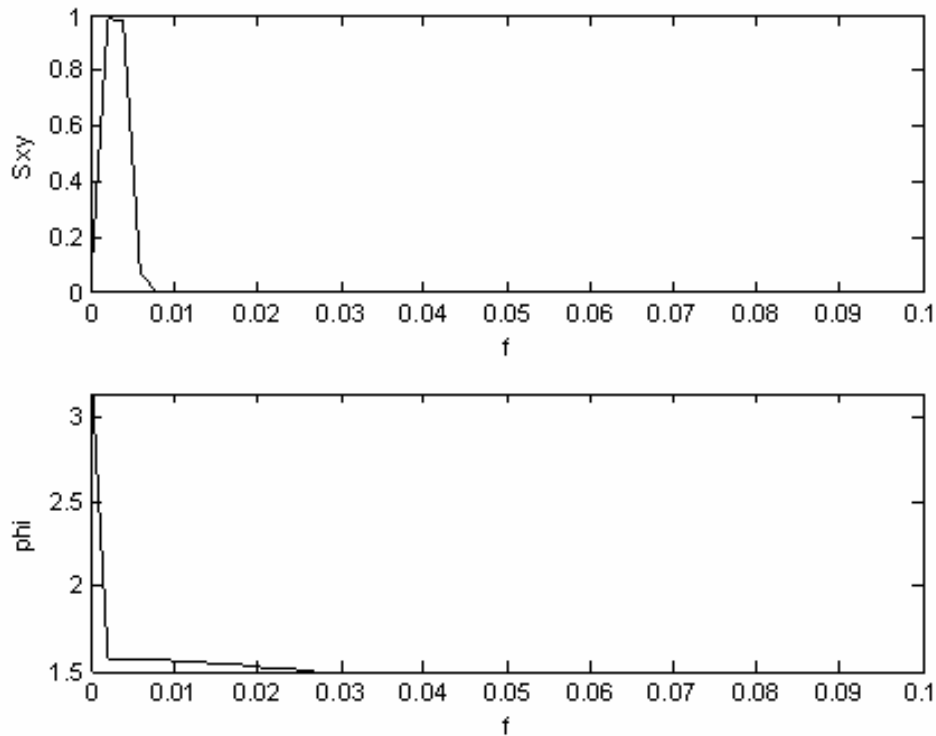


Рисунок 58 - Амплитудный (верхний график) и фазовый (нижний график) спектры

В общем виде, для комплексного сигнала, его мгновенная мощность выражается как

$$p(t) = x(t) \cdot x^*(t). \quad (49)$$

Средняя мощность на промежутке времени T :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) dt, \quad (50)$$

и для вещественной функции

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt. \quad (51)$$

Если $X(\omega)$ - Фурье-образ функции $x(t)$, то можно определить **спектральную плотность мощности**, как

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (52)$$

Согласно теореме Винера - Хинчина спектральная плотность мощности может быть определена как фурье - образ **корреляционной функции**:

$$S_{xx}(\omega) = \text{TF}[C_{xx}(\tau)], \quad (53)$$

где

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)x^*(t-\tau)dt - \text{автокорреляционная функция.} \quad (54)$$

Для дискретных величин автокорреляционная функция называется автокорреляционной последовательностью, которая записывается как $c_{xx}[n_1, n_2] = \mathbf{E}\{x[n_1]x^*[n_2]\}$, n_1, n_2 - моменты времени, для которых определяется автокорреляция, \mathbf{E} - символ математического ожидания. Введем понятие *стационарный случайный процесс*. Случайный процесс $x(t)$ называется стационарным, если все его конечномерные распределения вероятностей инвариантны относительно сдвига по параметру t :

$$\Phi_{(n)}(X_1, t_1 + t_0; X_2, t_2 + t_0; \dots; X_n, t_n + t_0) \equiv \Phi_{(n)}(X_1, t_1; X_2, t_2; \dots; X_n, t_n),$$

$$(-\infty < t_0 < \infty; n=1, 2, \dots).$$

Если распределения вероятностей n -го порядка зависят только от $n-1$ разностей $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_1, \dots, \tau_{n-1} = t_n - t_1$ *стационарного в широком смысле случайного процесса*, то есть процесса, математическое ожидание которого не зависит от времени, а автокорреляционная функция зависит только от τ , то для такого процесса автокорреляционная последовательность может быть записана в виде:

$$r_{xx}[m] = \mathbf{E}\{x[n+m]x^*[n]\}. \quad (55)$$

Два процесса называются совместно - стационарными в широком смысле, если их взаимная корреляция зависит только от временных индексов (рисунок 59). Совместно-стационарные процессы должны быть стационарны по отдельности также.

Чтобы охарактеризовать связь между двумя процессами $x[n]$ и $y[n]$ вводится взаимная корреляционная последовательность:

$$r_{xy}[m] = \mathbf{E}\{x[n+m]y^*[n]\}. \quad (56)$$

Спектральная плотность мощности (СПМ) определится тогда как дискретно - временное преобразование Фурье (ДВПФ) автокорреляционной последовательности

$$S_{xx}(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j\omega mT) \quad (57)$$

СПМ является периодической функцией с периодом $\frac{1}{T}$ Гц. Ее значения ограничены полосой $\pm \frac{1}{2T}$ Гц.

Взаимная СПМ для двух совместно - стационарных процессов $x[n], y[n]$ определяются через (ДВПФ) взаимной корреляционной последовательности (рисунок 60)

$$S_{xy}(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}[m] \exp(-j\omega mT). \quad (58)$$

Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если для любой функции $f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$ с вероятностью 1 среднее по времени совпадает со средним по множеству наблюдений.

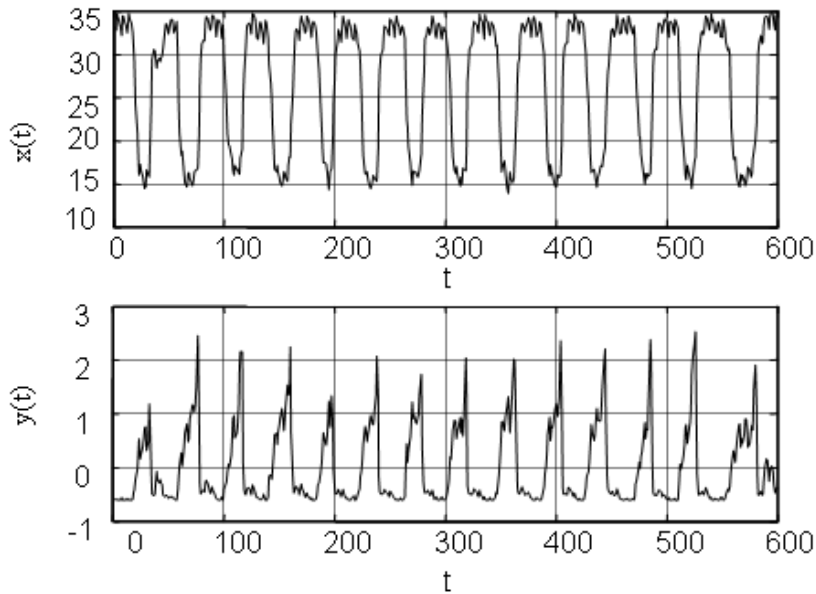


Рисунок 59 - Совместно-стационарные процессы на примере результатов измерений температуры воздуха (верхний рисунок) и его скорости (нижний рисунок) в человеческом носу.

Среднее по времени:

$$\langle f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[(t_1 + \tau), \dots, (t_n + \tau)] d\tau$$

Среднее по множеству наблюдений:

$$\mathbf{M}f[x(t_1), \dots, x(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) d\Phi_{(n)}(X_1, t_1; \dots; X_n, t_n)$$

$\langle f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \rangle = \mathbf{M}f[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ - для эргодического процесса.

$\Phi_{(n)}(X_1, t_1; \dots; X_n, t_n)$ - функция распределения порядка n .

Для оценки степени связи во времени между процессами используется корреляционная функция. Различают автокорреляционную функцию и взаимную корреляционную функцию. С помощью автокорреляционной функции можно установить, как связаны значения процесса, отстоящие друг от друга во времени, между собой. Взаимная корреляционная функция дает такую связь между значениями двух разных процессов.

Если имеется N - отсчетов данных $x[n], n = 0, \dots, N-1$ то для оценки автокорреляционной функции применяют следующее выражение:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n-m]x^*[n]. \quad (59)$$

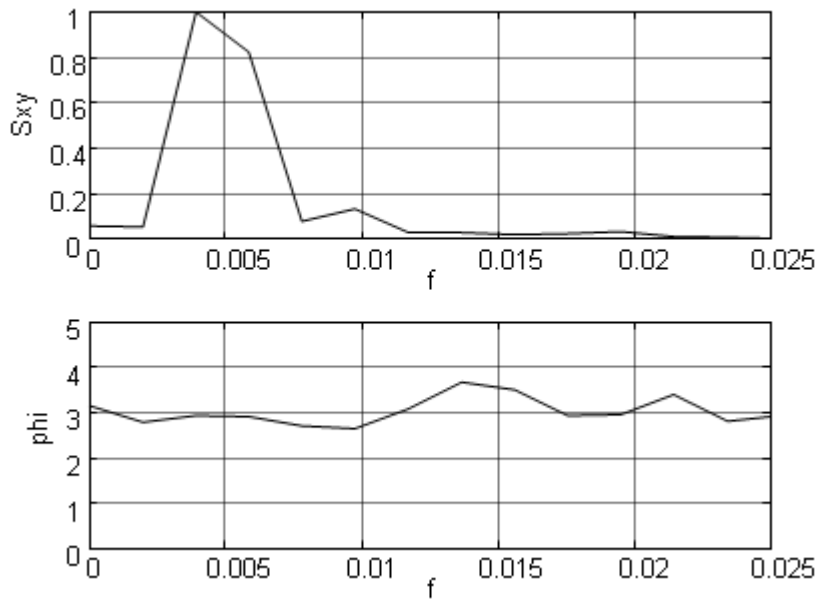


Рисунок 60 - Результаты вычисления амплитуды и фазы взаимной спектральной плотности мощности для совместно-стационарных процессов (рисунок 59)

Для оценки взаимной корреляционной функции

$$\hat{r}_{xy}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n-m]y^*[n]. \quad (60)$$

На рисунке 61 представлен результат расчета взаимной корреляционной функции для процессов рисунка 59.

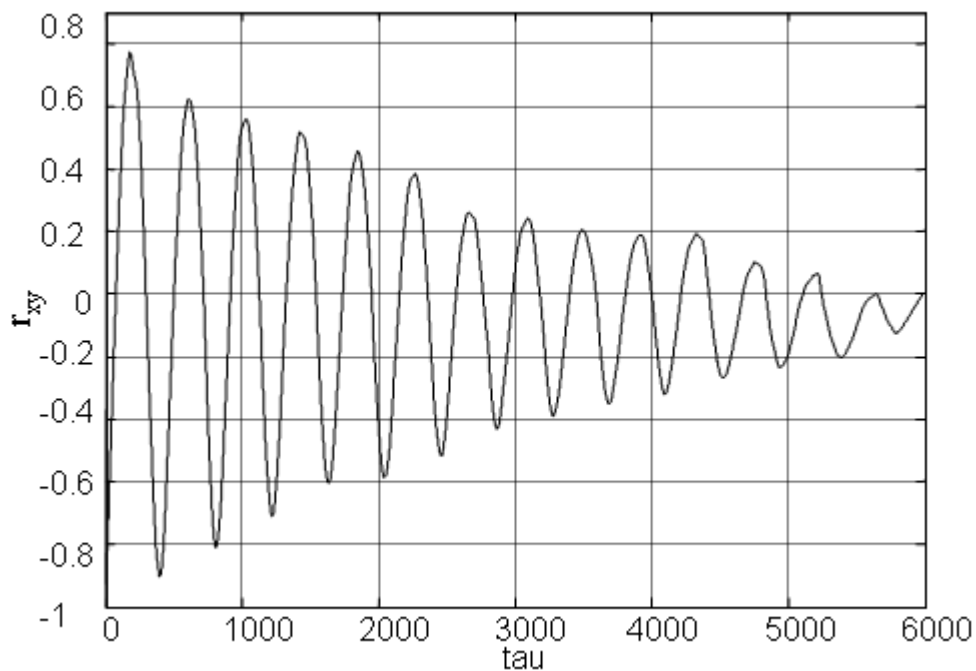


Рисунок 61 - Результат расчета оценки взаимной корреляционной функции для процессов рисунка 59

Тогда оценки СПМ, согласно (61), (62):

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j\omega mT); \quad (61)$$

$$\hat{S}_{xy}(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{r}_{xy}[m] \exp(-j\omega mT). \quad (62)$$

Для эргодического процесса можно ввести так называемую периодограммную оценку:

$$\tilde{S}_{xx}(\omega) = \frac{T}{N} \left| \sum_0^{N-1} x[n] \exp(-j\omega nT) \right|^2 \quad (63)$$

2.3 Вейвлет-анализ

Преобразование Фурье является классическим методом частотного анализа и хорошо зарекомендовало себя при анализе стационарных сигналов (см. выше п. 2.2.1). В общем, его применяют не только для анализа функций, зависящих от времени, но и для функций, зависящих от пространственной координаты. Основная идея преобразования Фурье заключается в том, что любая периодическая функция $f(t) = f(t + T)$ может быть представлена как сумма гармонических функций:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right) \quad (64)$$

Для функции $f(t)$ должно выполняться условие:

$$\|f(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (65)$$

Фурье-преобразование в общем случае определяется, как:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (66)$$

Задача, которую решает преобразование Фурье - это выявление периодичности процесса, даже для тех случаев, когда она не видна из-за каких-то мешающих факторов, как, например, шумов (см. рисунок 56).

Этот результат достигается за счет усреднения большого количества повторяющихся из-за периодичности особенностей процесса. При совпадении этих периодов с периодом комплексной экспоненты $e^{-j\omega t}$ в формуле (66), получается пик на функции $F(\omega)$.

Однако, существует большое количество нестационарных процессов, для которых Фурье-преобразование дает существенную погрешность. К таким относятся, например, процессы, у которых на каких-то промежутках времени происходит резкое изменение частоты и амплитуды колебаний. Если бы Фурье-преобразование могло подстраиваться под эти изменения, меняя период, за который оно анализирует сигнал, то должна была бы появиться зависимость от времени, за которое анализируется частотный спектр, то есть $F(\omega, t)$.

Простейшим способом для этого является введение в Фурье-преобразование функций, которые ограничивают ширину анализируемых участков, так называемых окон. Фурье-преобразование с функцией окна может выглядеть, например, так:

$$F(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - t_0)e^{-j\omega t} dt. \quad (67)$$

$g(t - t_0)$ – функция окна, которая строится относительно момента t_0 . Можно применить более сложное окно, например:

$$F(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{(t-b)^2}{a^2}} e^{-j\omega t} dt. \quad (68)$$

Это окно представляет собой колоколообразную гауссову кривую, которая выделяет на временной оси область около значения b , ширина этой области задается коэффициентом a . Пример такой функции приведен на рисунке 62.

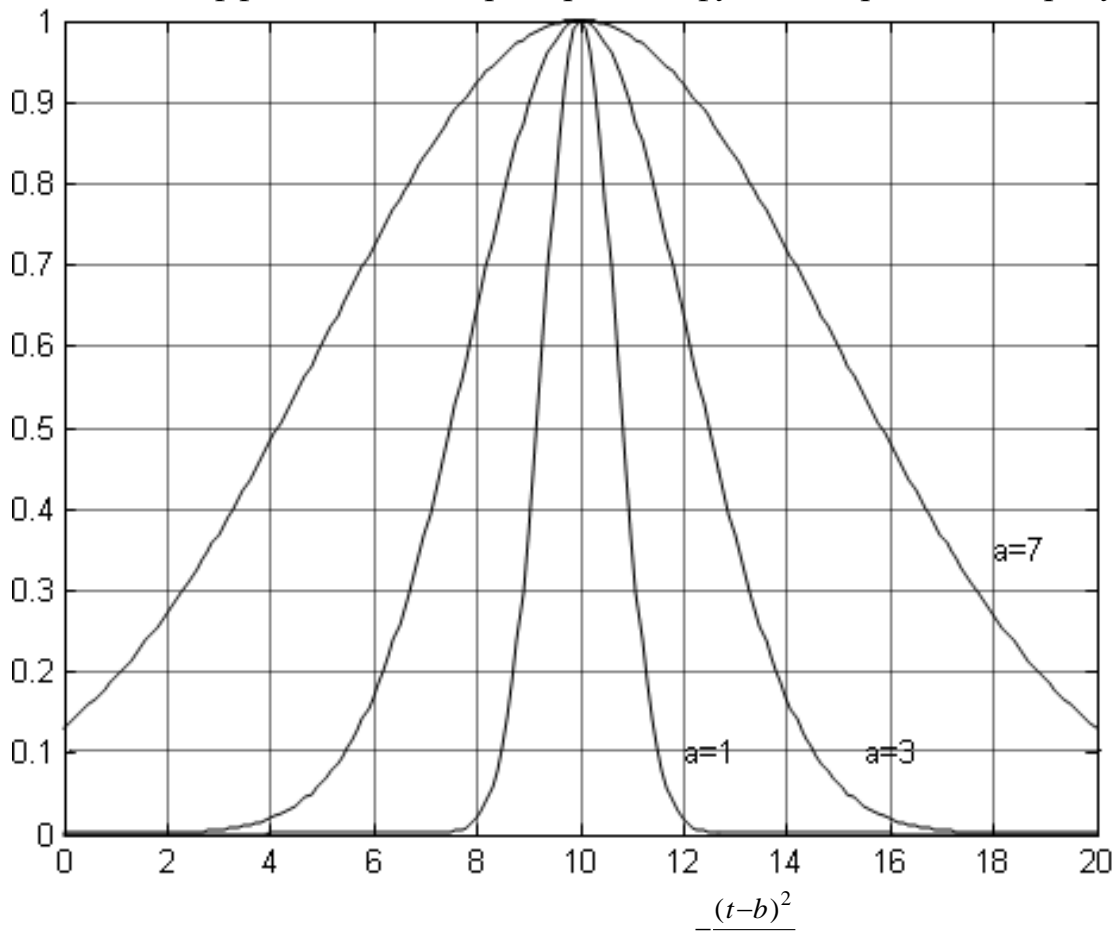


Рисунок 62 - Пример окна для функции $e^{-\frac{(t-b)^2}{a^2}}$. $b=10, a=1;3;7$

Рассмотренные выше окна имеют постоянную ширину. Если периодичность сигнала меняется со временем, то они ее изменение не выявят. Ширина окна должна быть функцией периодичности: для быстрых сигналов оно должно быть узким, а для медленных – широким.

Для анализа процессов, частотный спектр которых меняется во времени, применяют так называемый вейвлет-анализ (wavelet). В отличие от

Фурье-преобразования, вейвлет - анализ дает изменение частотного спектра во времени и в нем применяются окна, характеристики которых зависят от характеристик сигнала, от частоты. При этом преобразовании функция $f(x)$ раскладывается в специальные локальные функции, так называемые *вейвлеты*, образующие семейство функций вида

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (69)$$

Все элементы этого семейства функций задаются базисным вейвлетом $\Psi_{a,b}(t)$ (рисунок 63) и образуются путем изменения масштабного параметра a и параметра сдвига b (рисунок 64).

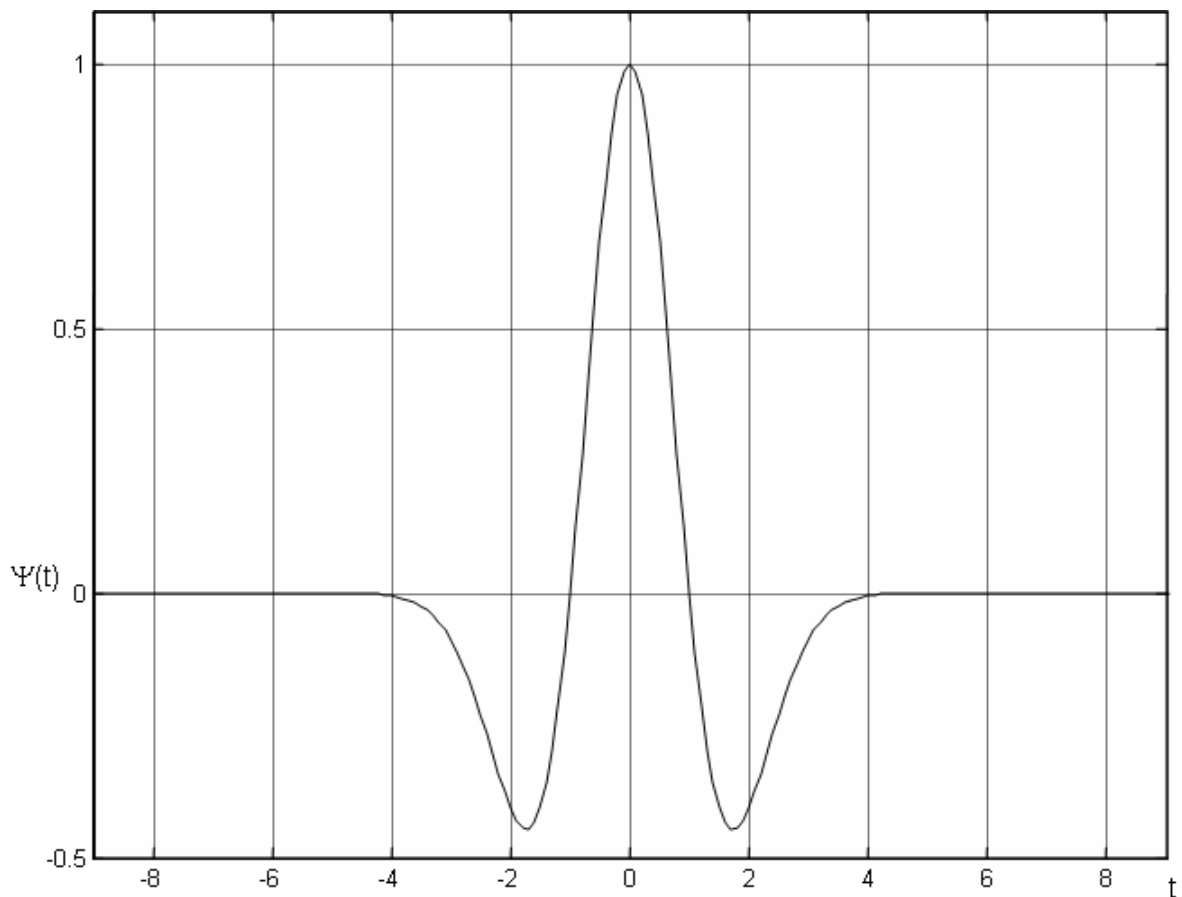


Рисунок - 63. Базисный вейвлет $\Psi(t)$. $\Psi(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ (*Mexican Hat*, МНАТ)

Этот вейвлет из-за его формы называют *мексиканской шляпой* (*Mexican Hat*, сокращенно МНАТ). На рисунке 65 представлены МНАТ-вейвлеты как семейство функций, зависящих от параметров a и b .

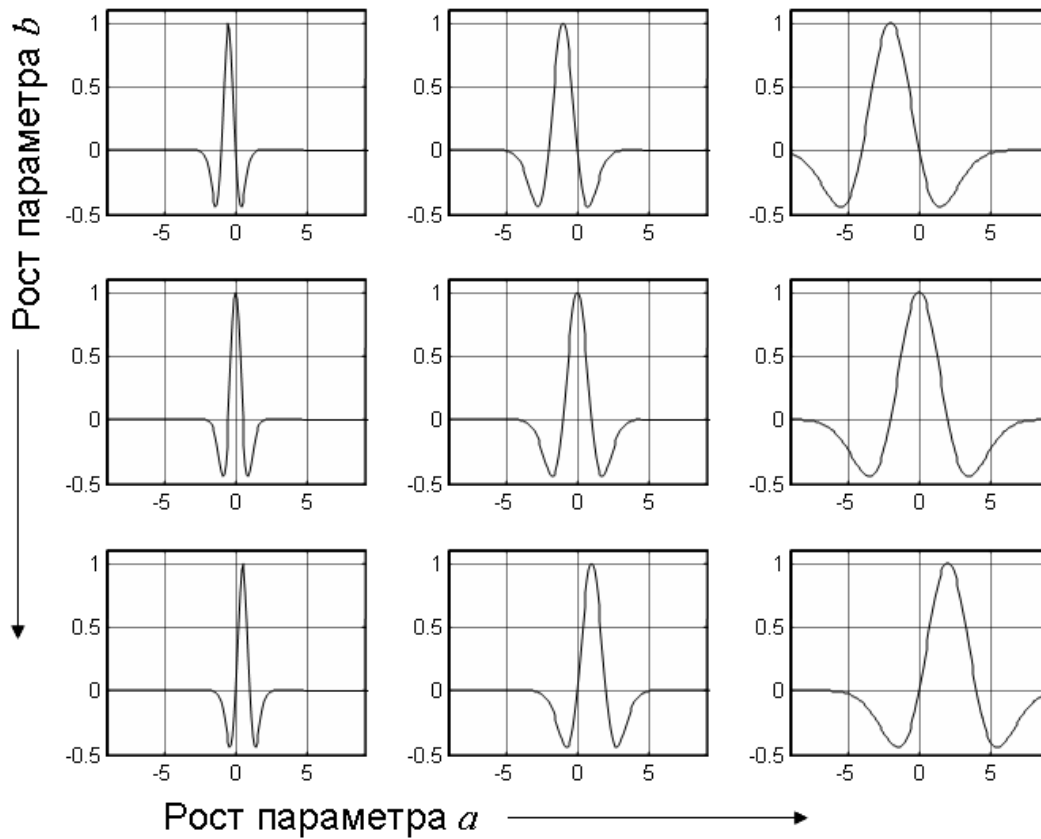


Рисунок 64 - Семейство МНАТ-вейвлетов при разных значениях масштабного параметра a и сдвига b .

Воздействие параметров a и b на вейвлет показано в таблице:

$ a > 1$	Растяжение в направлении t при одновременном сжатии в направлении Ψ
$ a < 1$	Сжатие в направлении t , растяжение в направлении Ψ
$a < 0$	Отражение относительно $t=0$
$b > 0$	Сдвиг вправо
$b < 0$	Сдвиг влево

С помощью функции $\Psi_{a,b}(t)$ определяется непрерывное вейвлет-преобразование:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad (70)$$

или

$$W(a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (71)$$

Обратное преобразование

$$f(t) = C_{\Psi}^{-1} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} W(a,b) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{dad b}{a^2} \quad (72)$$

Нормирующий коэффициент C_{Ψ} в результате преобразования должен принять конечное значение, поэтому он должен удовлетворять условиям:

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (73)$$

Следующим распространенным вейвлетом является вейвлет Морле (Morlet):

$$\Psi(t) = e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \left(e^{ik_0 t} - e^{-\frac{k_0^2 \alpha^2}{4}} \right) \quad (74)$$

Это функция комплексного переменного, которая раскладывается по гармоническим функциям:

$$g(t) = e^{ik_0 t}. \quad (75)$$

Действительная часть: $g_r(t) = \cos(k_0 t)$, мнимая $g_i(t) = i \sin(k_0 t)$.

Параметр k_0 задает периодичность вейвлета, a – ширину гауссовой кривой $e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$. На рисунке 65 представлен вейвлет Морле.

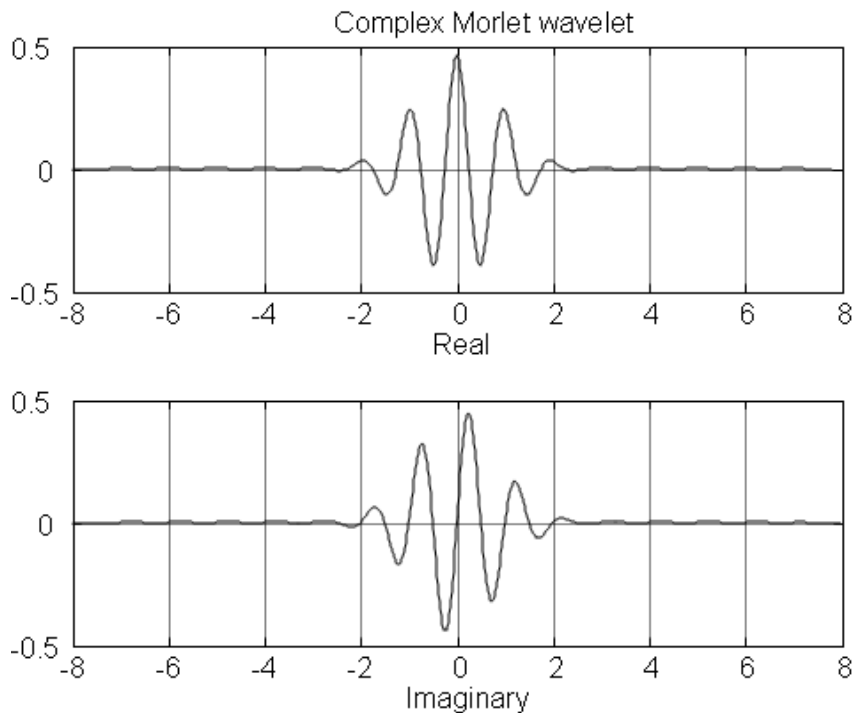


Рисунок 65 - Действительная (верхний график) и мнимая (нижний график) части комплексного вейвлета Морле.

Ниже приводятся примеры вейвлет-преобразований для различных функций:

1. $x = \sin(t)$ (рисунок 66), на рисунке 67 представлен результат вейвлет-преобразования функции $x = \sin(t)$ с использованием вейвлета МНАТ.

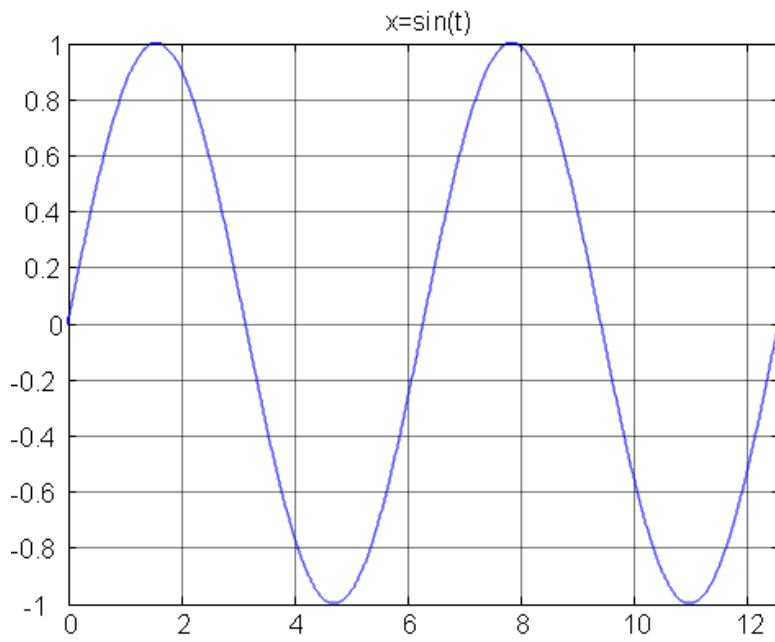


Рисунок 66 - Гармоническая функция $x = \sin(t)$

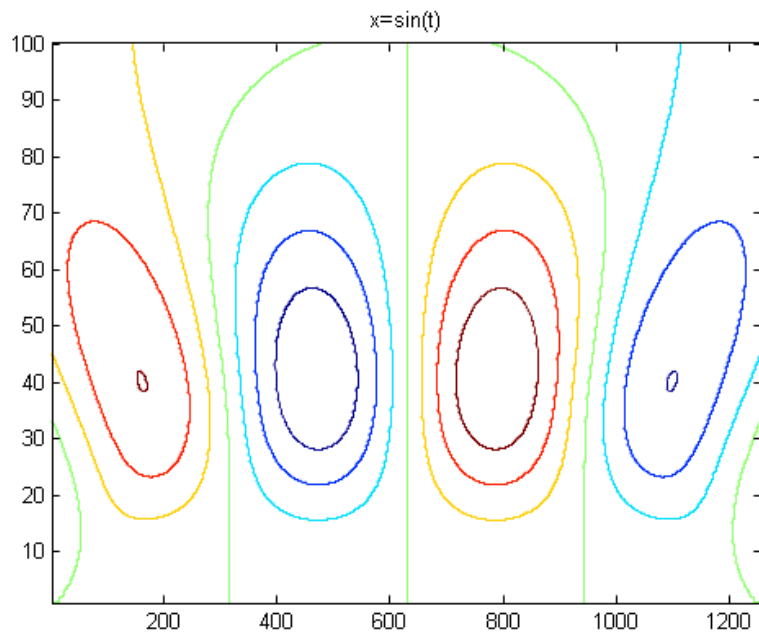


Рисунок 67 - Результат вейвлет- преобразования функции $x = \sin(t)$ с использованием вейвлета МНАТ. График построен линиями равного уровня.

Результат вейвлет-преобразования функции $x = \sin(t)$ в трехмерном пространстве представлен на рисунке 68.:

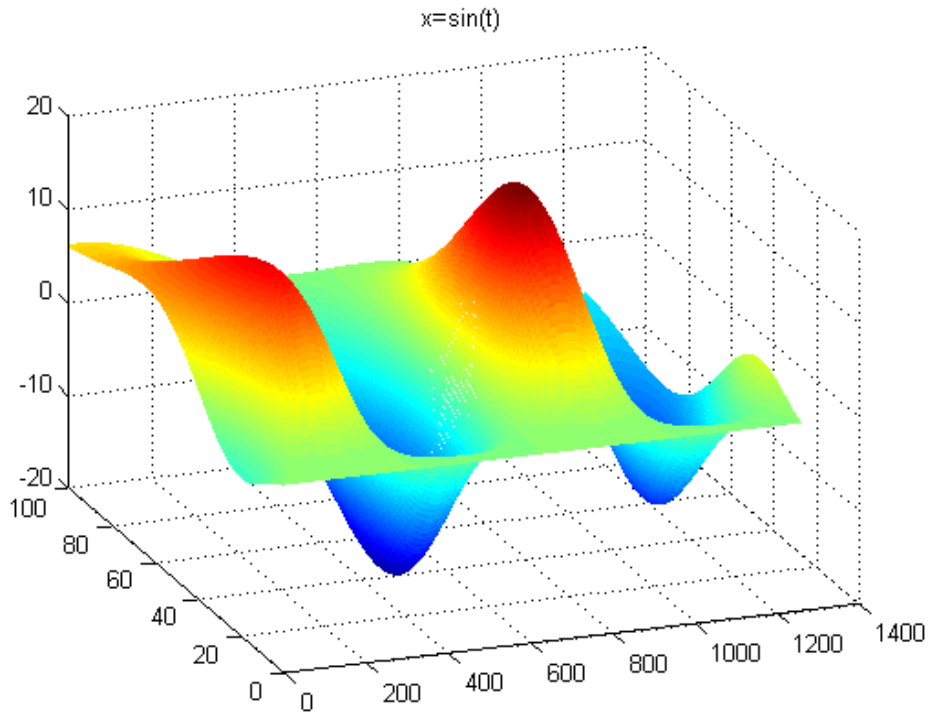


Рисунок 68 - График вейвлет- преобразования функции $x=\sin(t)$ в трехмерном пространстве

2. Гармоническая функция с частотой, меняющейся во времени, $t_1=\exp(t)$; $t=0,2 \cdot t$; $y=\sin(t_1/t)$ (рисунок 69) и вейвлет-преобразования для такого процесса (рисунки 70, 71).

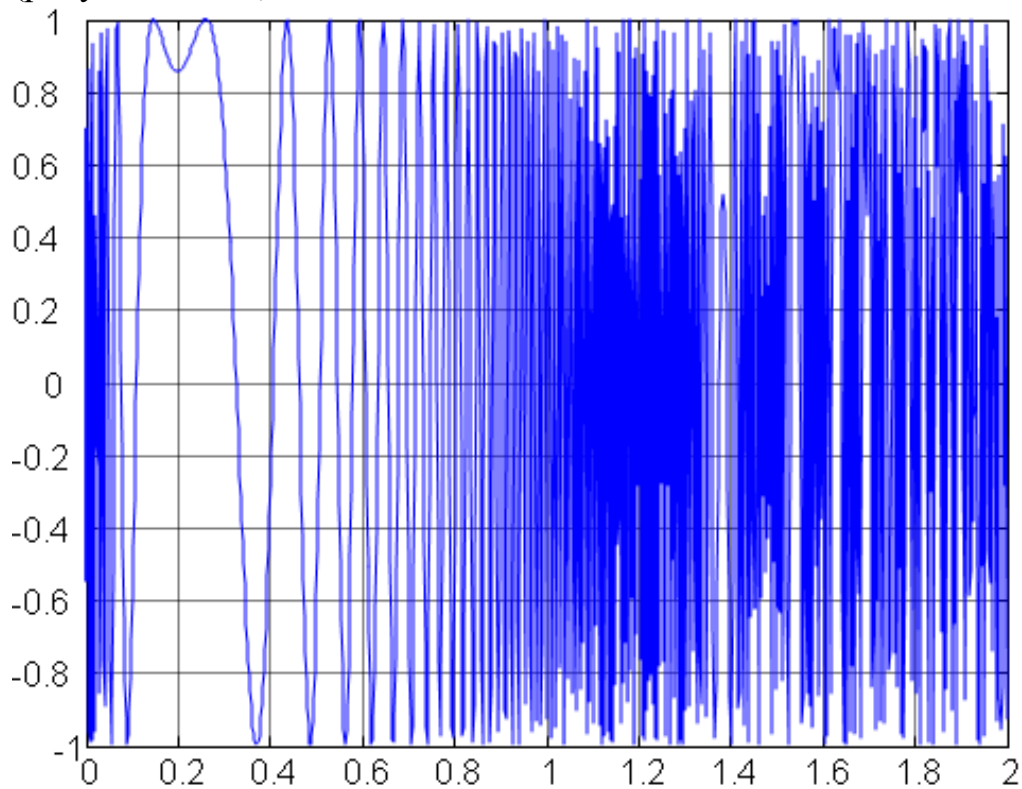


Рисунок 69 - Частота меняется со временем

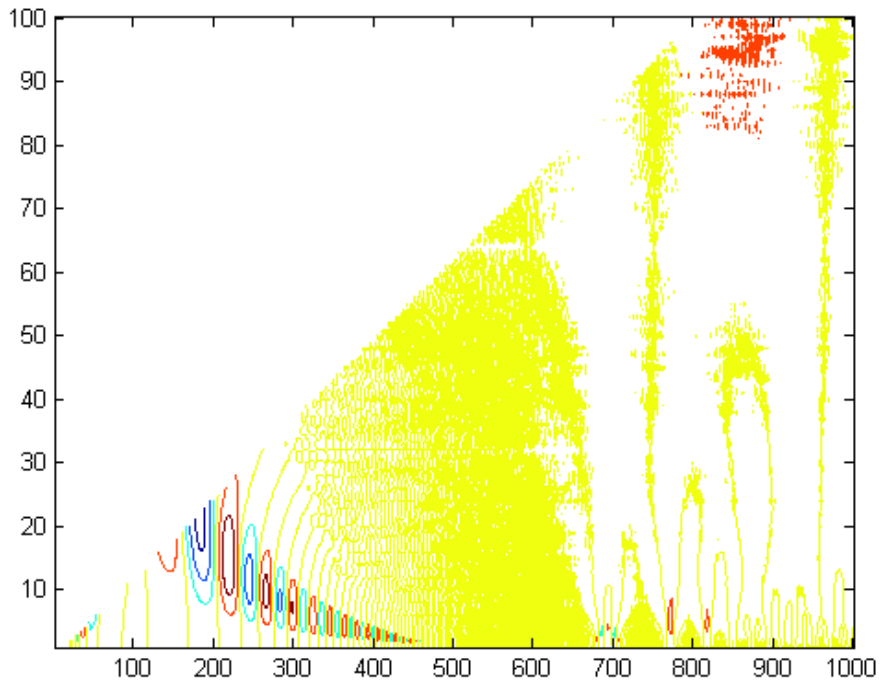


Рисунок 70 - Вейвлет-преобразование для процесса, где частота меняется со временем с использованием вейвлета МНАТ. График построен линиями равного уровня.

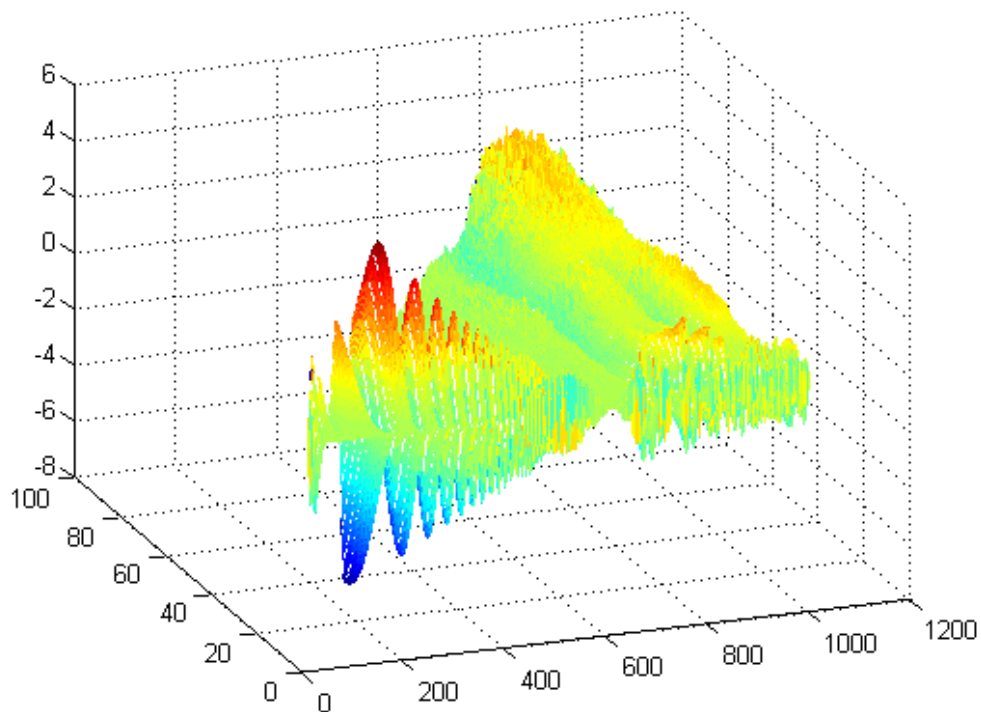


Рисунок 71 - Вейвлет-преобразование для процесса, где частота меняется со временем, с использованием вейвлета МНАТ. График построен в трехмерном пространстве

Пример вейвлет-анализа изменения температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос (рисунок 72), приведены на рисунках 73-76.

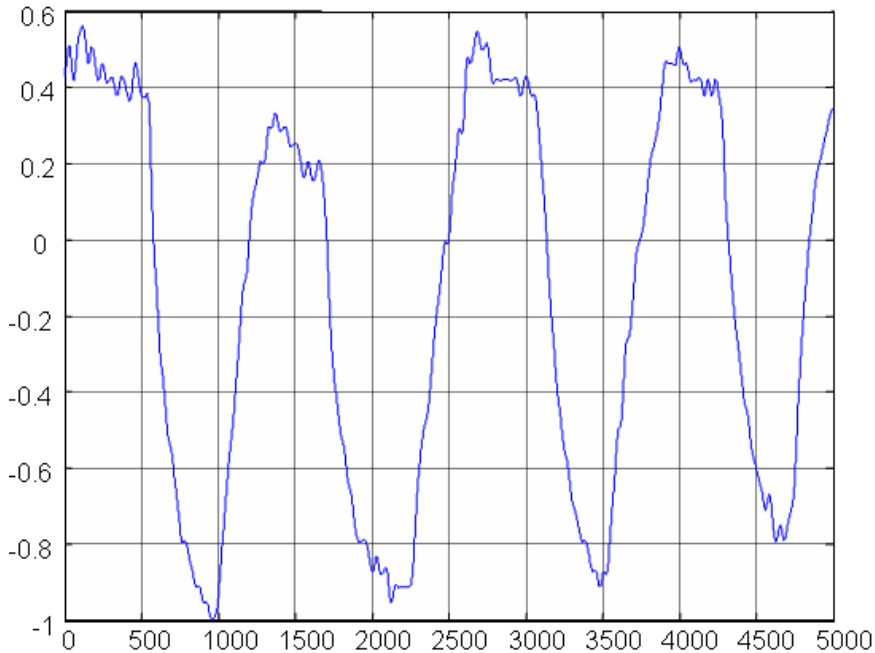


Рисунок 72 - Изменения температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос

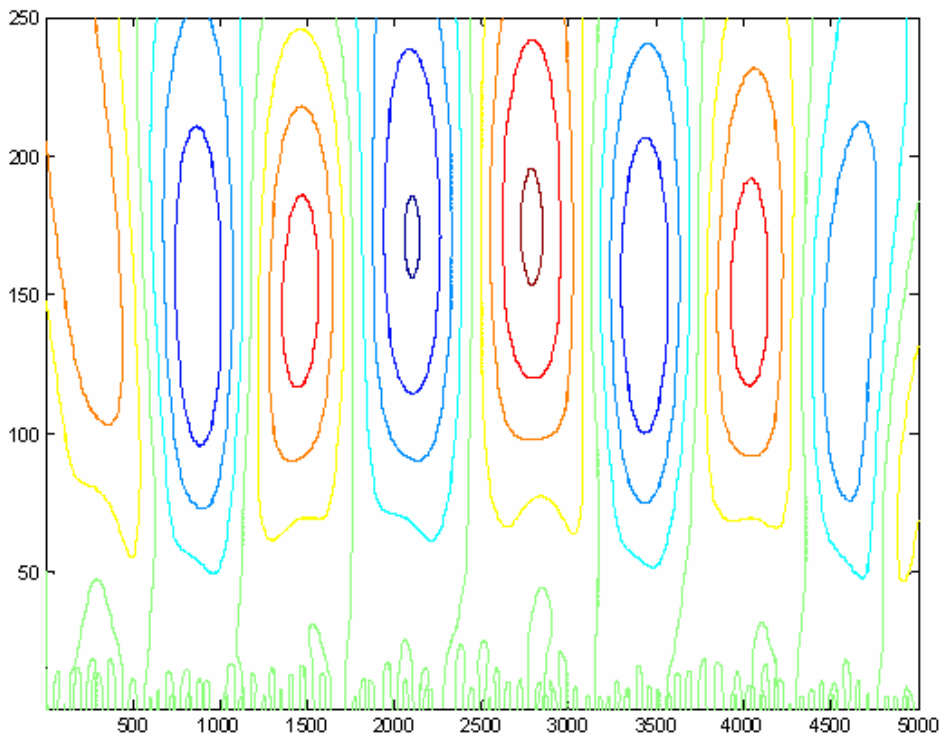


Рисунок 73 - Вейвлет-анализ изменений температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос с использованием вейвлета МНАТ

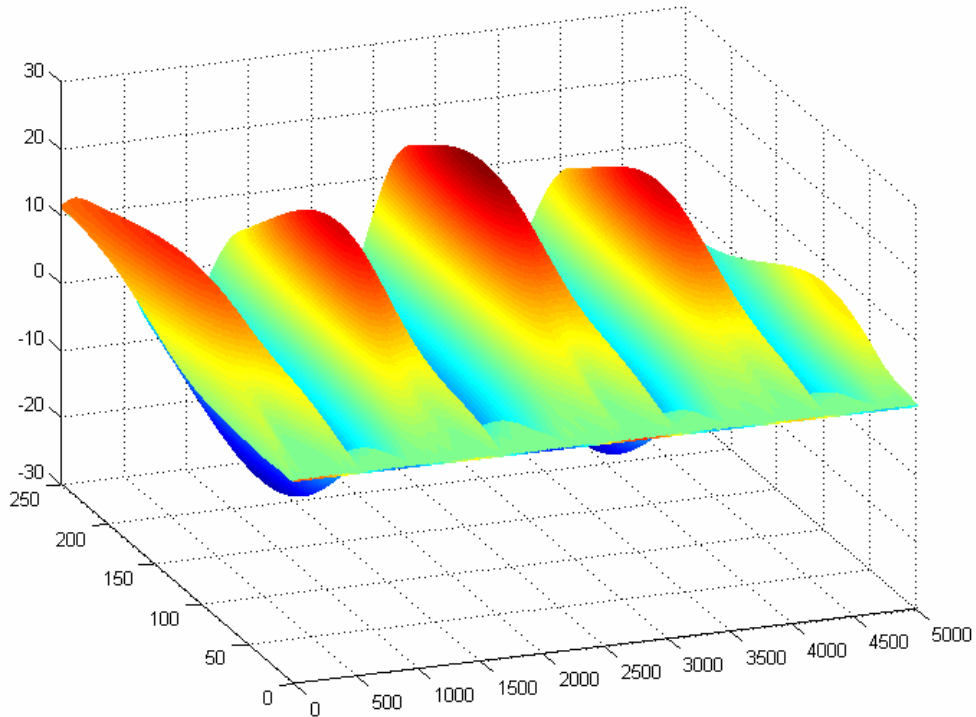


Рисунок 74 – Вейвлет-анализ изменений температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос с использованием вейвлета МНАТ. График построен в трехмерном пространстве

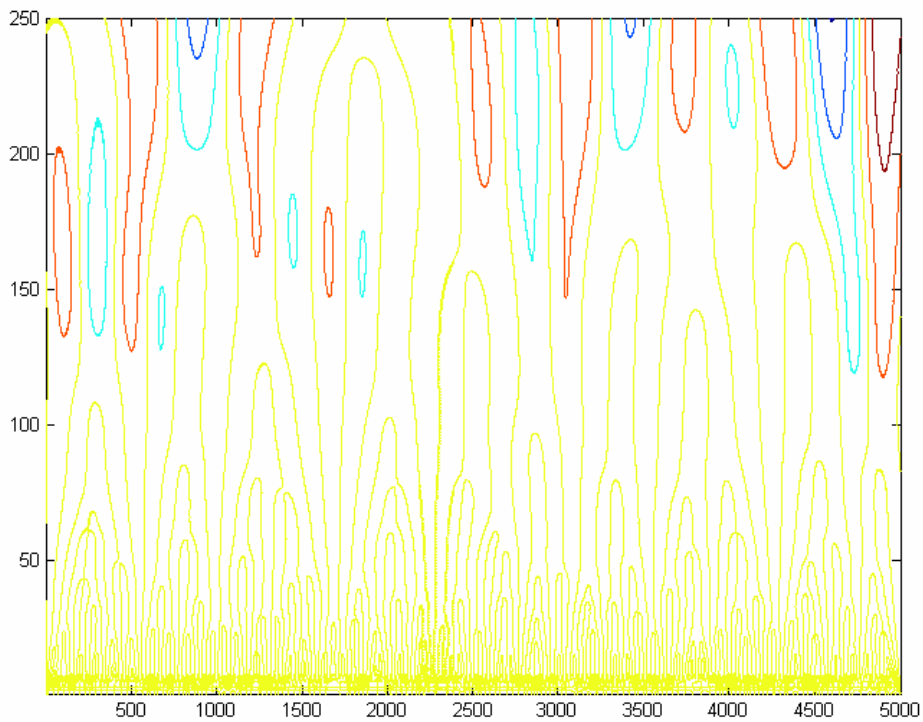


Рисунок 75 - Вейвлет-анализ изменений температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос с использованием вейвлета Морле

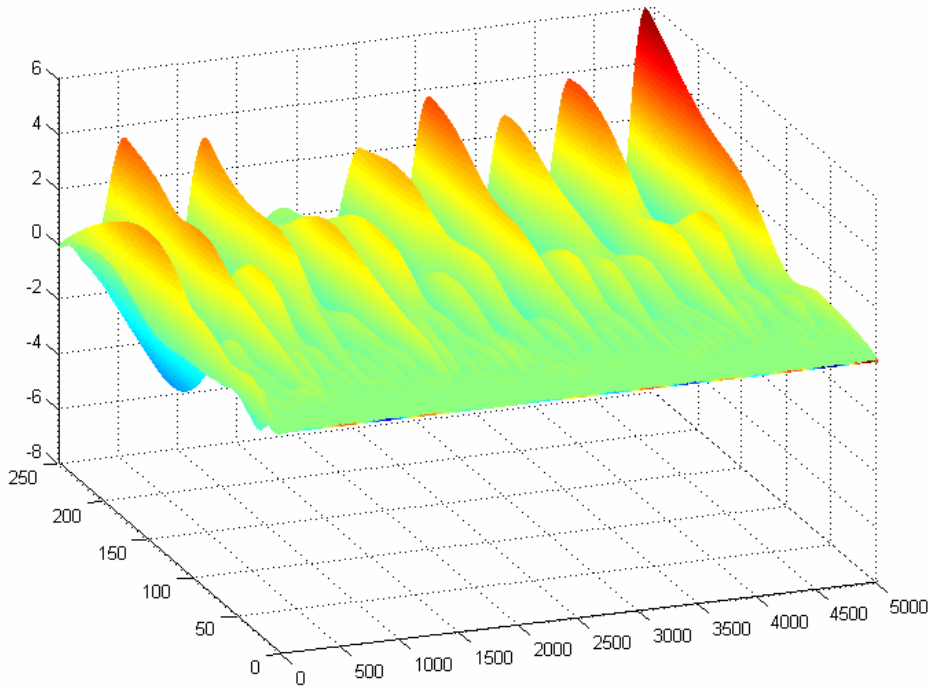


Рисунок 76 - Вейвлет-анализ изменений температуры вдыхаемого-выдыхаемого воздуха на входе в человеческий нос с использованием вейвлета Морле. График построен в трехмерном пространстве

Примеры вейвлет-анализа колебаний температуры (рисунок 77) в трубе с текущей жидкостью (рисунки 78-81)

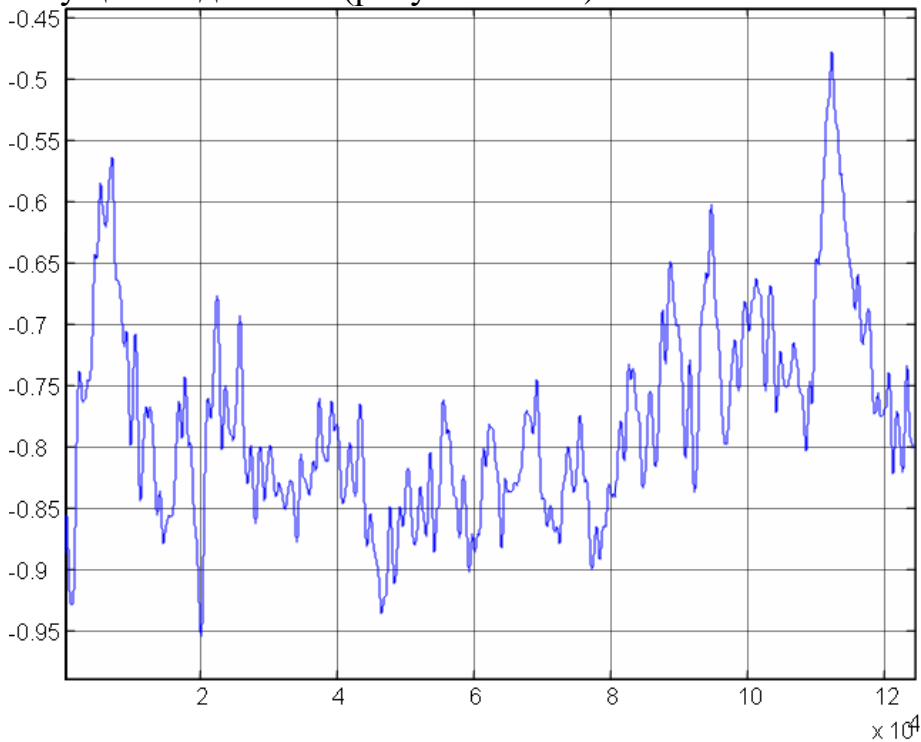


Рисунок 77 - Колебания температуры в трубе с текущей жидкостью

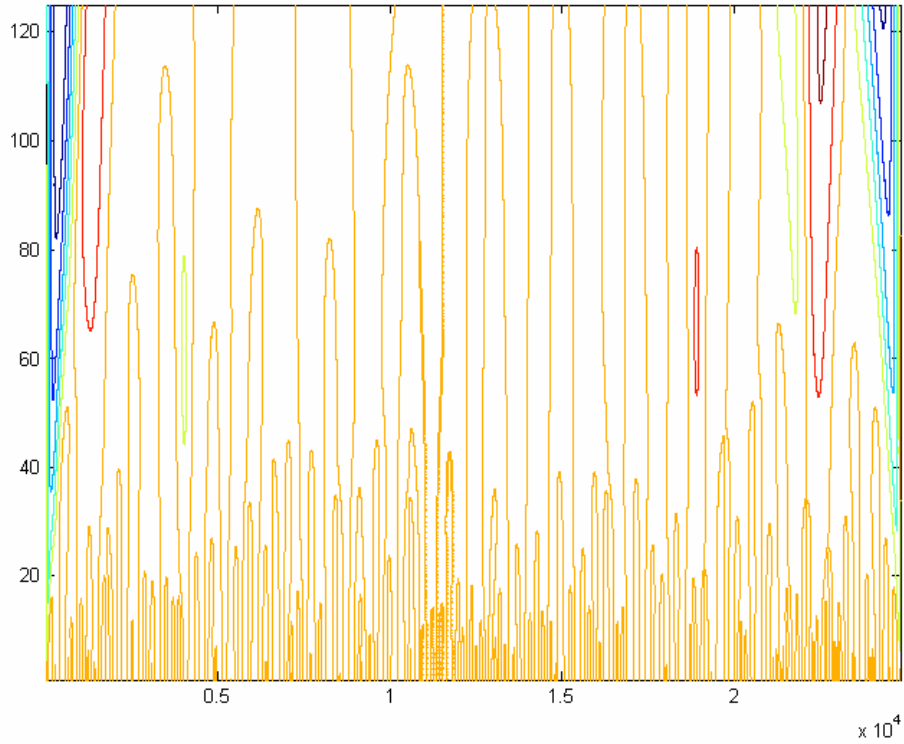


Рисунок 78 – Вейвлет-анализ колебаний температуры в трубе с текущей жидкостью с использованием вейвлета МНАТ.

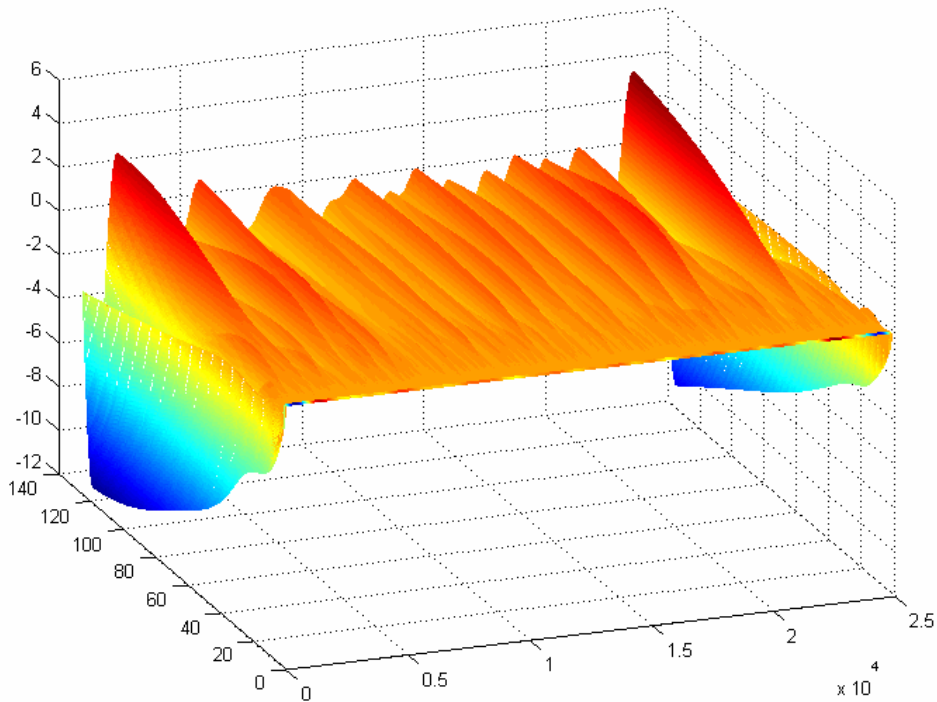


Рисунок 79 - Вейвлет-анализ колебаний температуры в трубе с текущей жидкостью с использованием вейвлета МНАТ. График построен в трехмерном пространстве

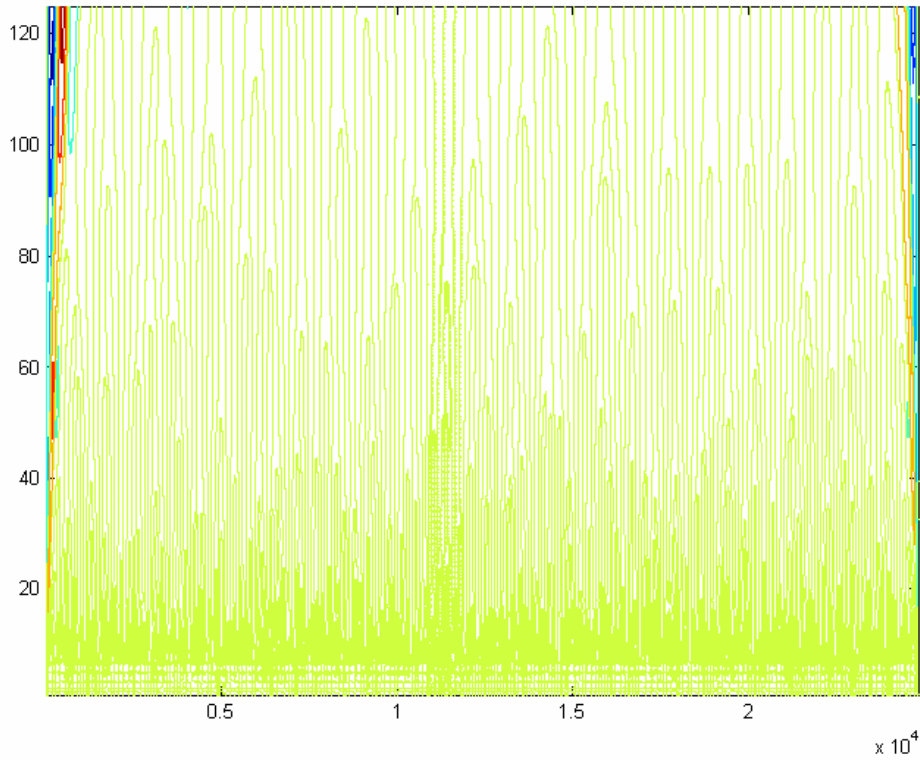


Рисунок 80 - Вейвлет-анализ колебаний температуры в трубе с текущей жидкостью с использованием вейвлета Морле.

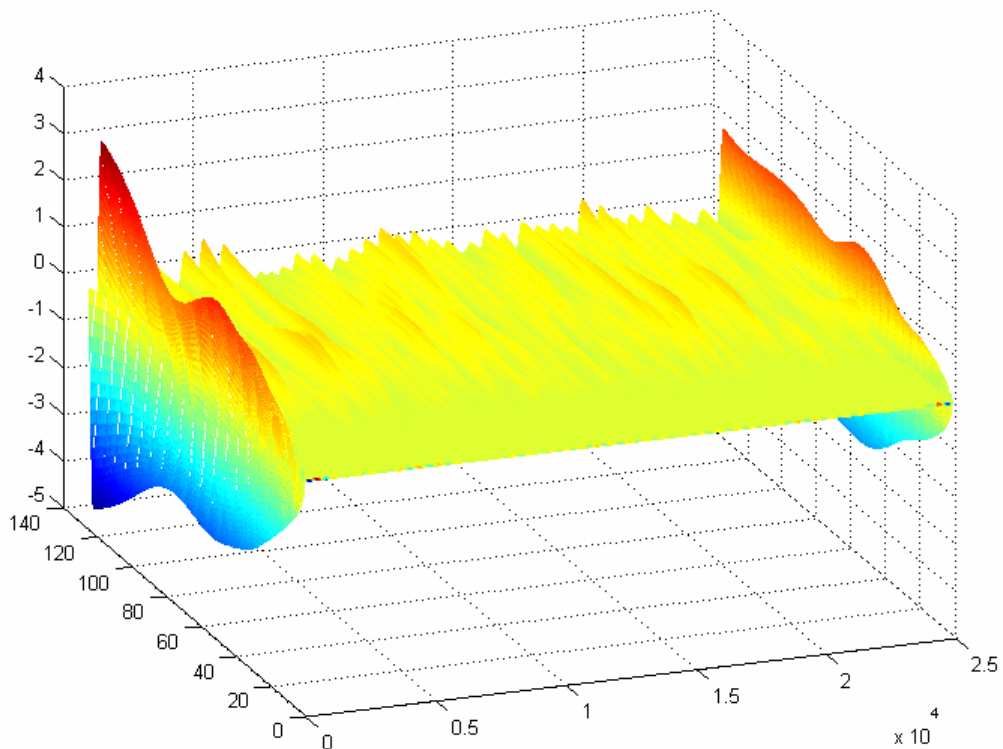


Рисунок 81 – Вейвлет-анализ колебаний температуры в трубе с текущей жидкостью с использованием вейвлета Морле. График построен в трехмерном пространстве

2.4 Выявление периодичностей с помощью сечений Пуанкаре

В главе 1 было рассмотрено сечение Пуанкаре, которое можно применять для наглядного представления траектории и изучения особенностей эволюции системы. Для этого аттрактор трансверсально пересекается плоскостью.

Следующий рисунок (рисунок 82) демонстрирует сечение Пуанкаре, полученное для аттрактора (рисунок 83), восстановленного из временного ряда (рисунок 84), представляющего собой сигнал от акселерометра, реагирующего на вибрации в псевдооживленном слое [7]. На рисунке 82 хорошо видны серповидные траектории, говорящие о том, что в процессе присутствует периодическое движение. Эта же периодичность хорошо просматривается и на аттракторе, изображенном в трехмерном пространстве на рисунке 83.

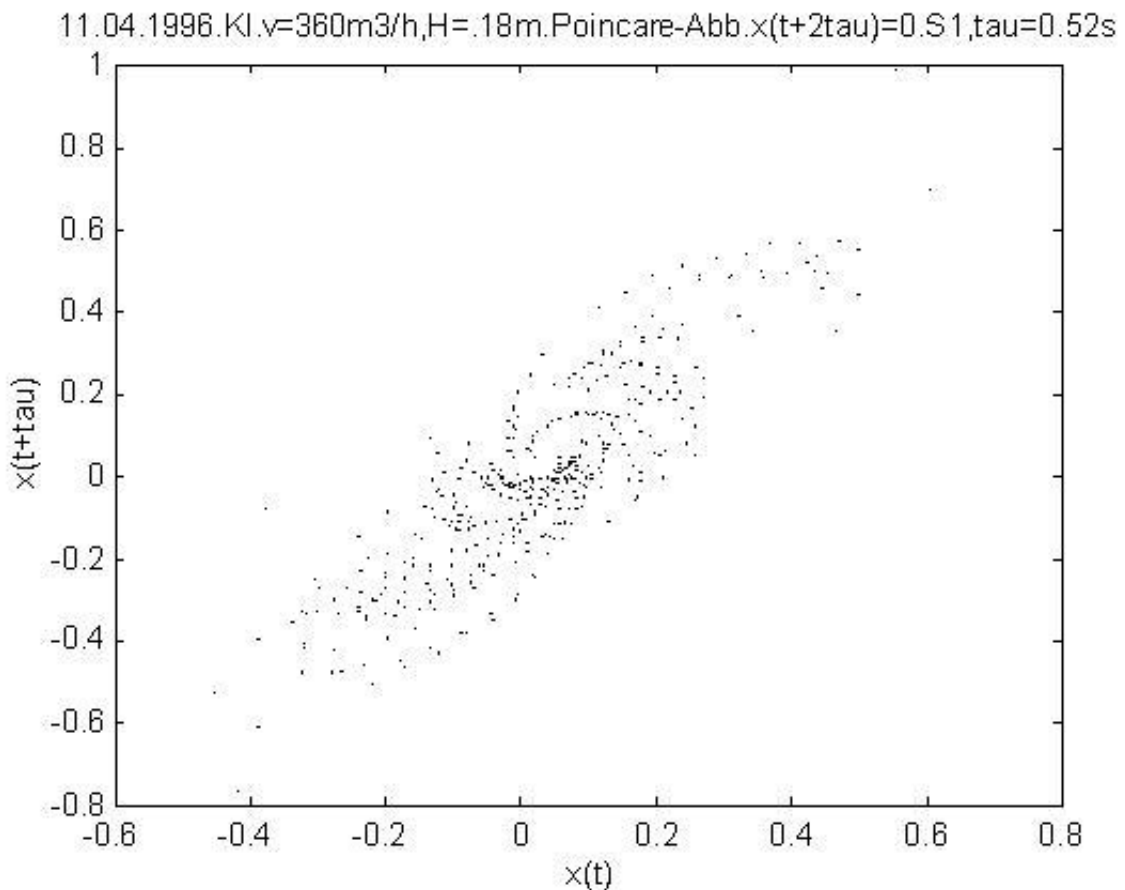


Рисунок 82 - Сечение Пуанкаре, полученное для аттрактора (рисунок 84), восстановленного из временного ряда, представляющего собой сигнал от акселерометра, реагирующего на вибрации в псевдооживленном слое (рисунок 85).

11.04.1996.KI.v=360m 3/h,H=.18m.S1,tau=0.52s

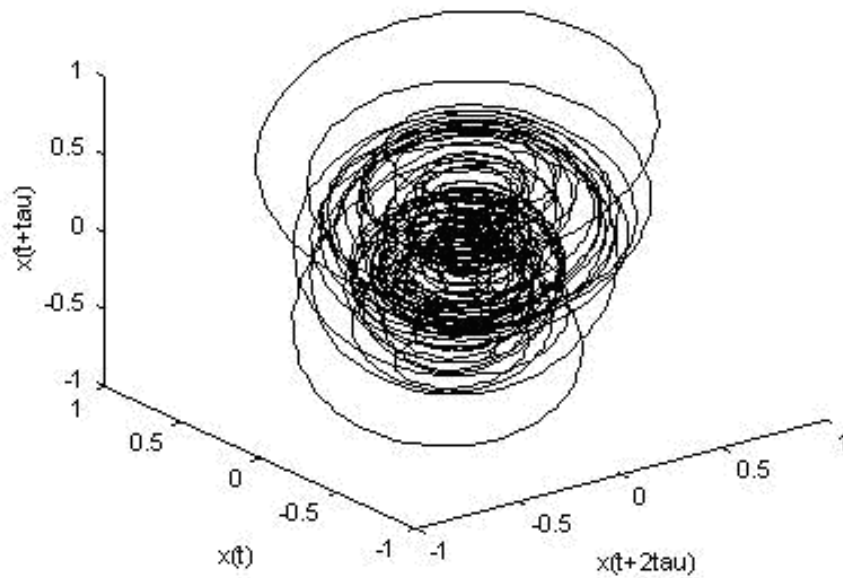


Рисунок 83 - Аттрактор, восстановленный из временного ряда, представляющего собой сигнал от акселерометра, реагирующего на вибрации в псевдооживленном слое

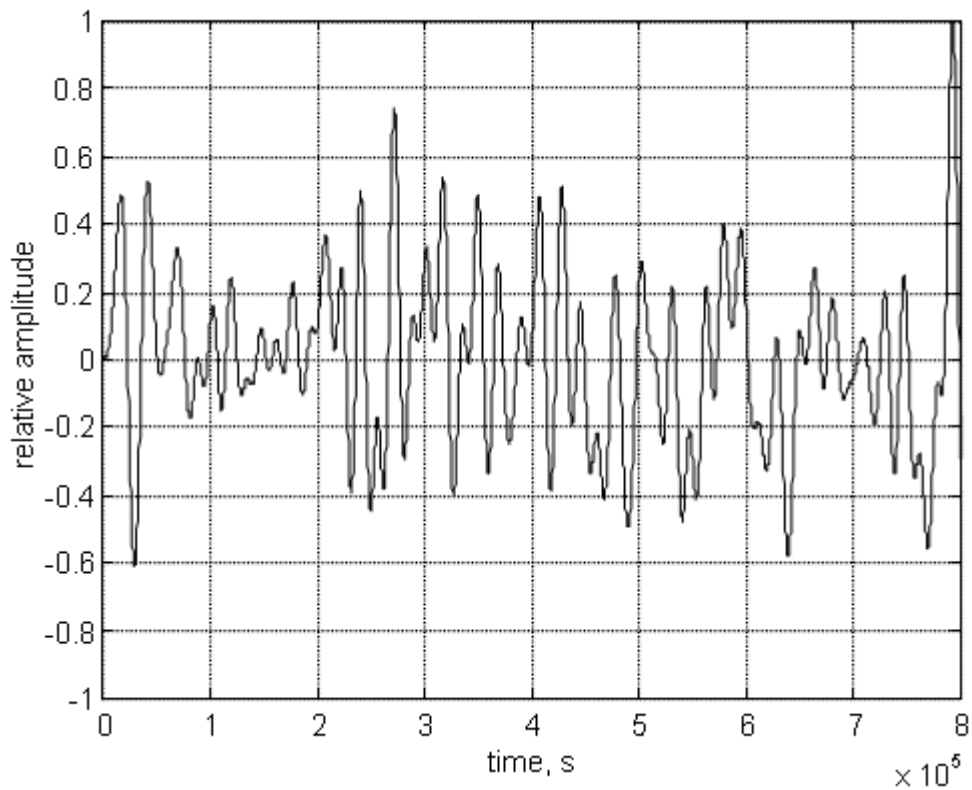


Рисунок 84 - Временной ряда, представляющий собой сигнал от акселерометра, реагирующего на вибрации в псевдооживленном слое

2.5 Оценивание корреляционной размерности, энтропии Колмогорова и показателей Ляпунова динамической системы из временных рядов. Практическое применение метода задержек

Как было показано выше, применение метода задержек позволяет получить фазовую траекторию диссипативной системы в так называемом реконструируемом фазовом пространстве по методу Грассбергера и Прокаччиа (см. п. 1.8.1). Особую проблему при практическом применении этого метода представляет определение времени задержки для восстановления аттрактора.

Одним из оснований метода является задание времени задержки исходя из того, что необходимо получить по каждой из осей в фазовом пространстве независимые переменные. Если эти переменные получены как копии одной величины $x(t)$, одного результата измерения (рисунок 85), то сдвиг между ними должен быть таким, чтобы исчезла корреляция между этими копиями исходной, измеряемой величины. Тогда это будут статистически независимые переменные.

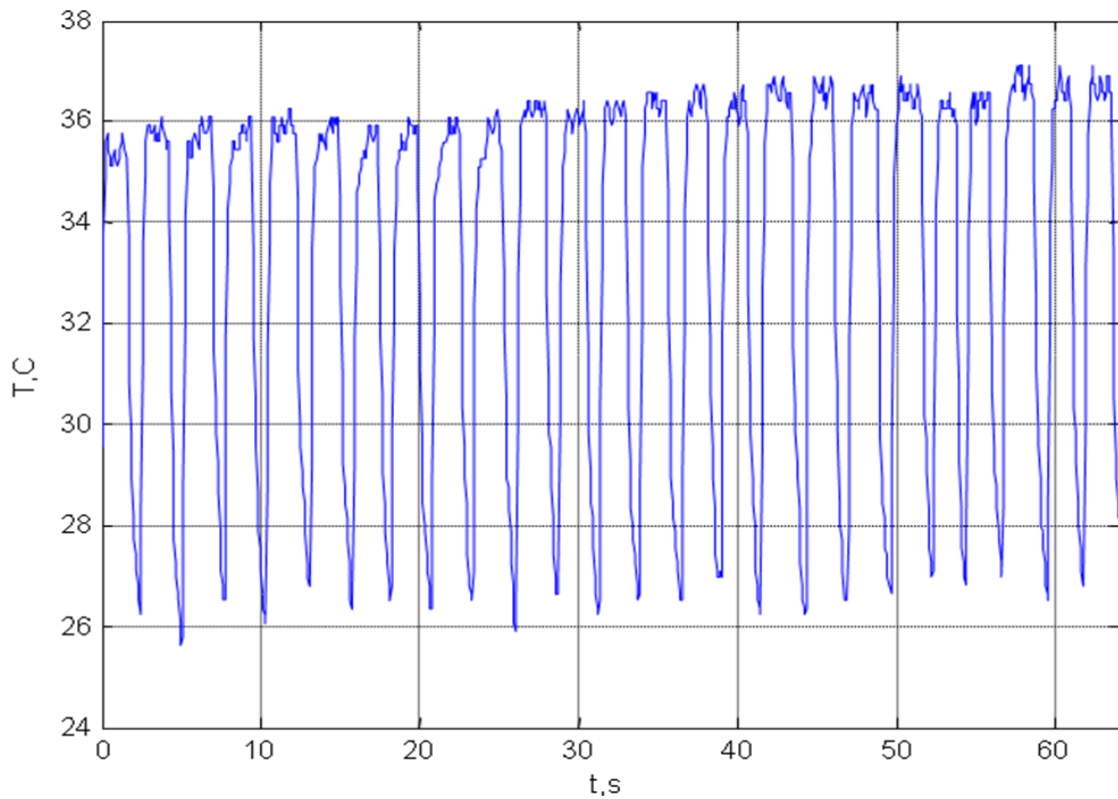


Рисунок 85 - Измеренная величина (колебания температуры во времени на входе в нос у человека)

Если построить новую фигуру в пространстве, где по осям отложены $x(t)$, $x(t+\tau)$ и $x(t+2\tau)$, то новая фигура будет представлять собой так называемый реконструированный аттрактор (рисунки 86-87), который согласно теоремам Такенса [6] обладает всеми свойствами исходного, истинного, аттрактора системы, который мы наблюдать не в состоянии.

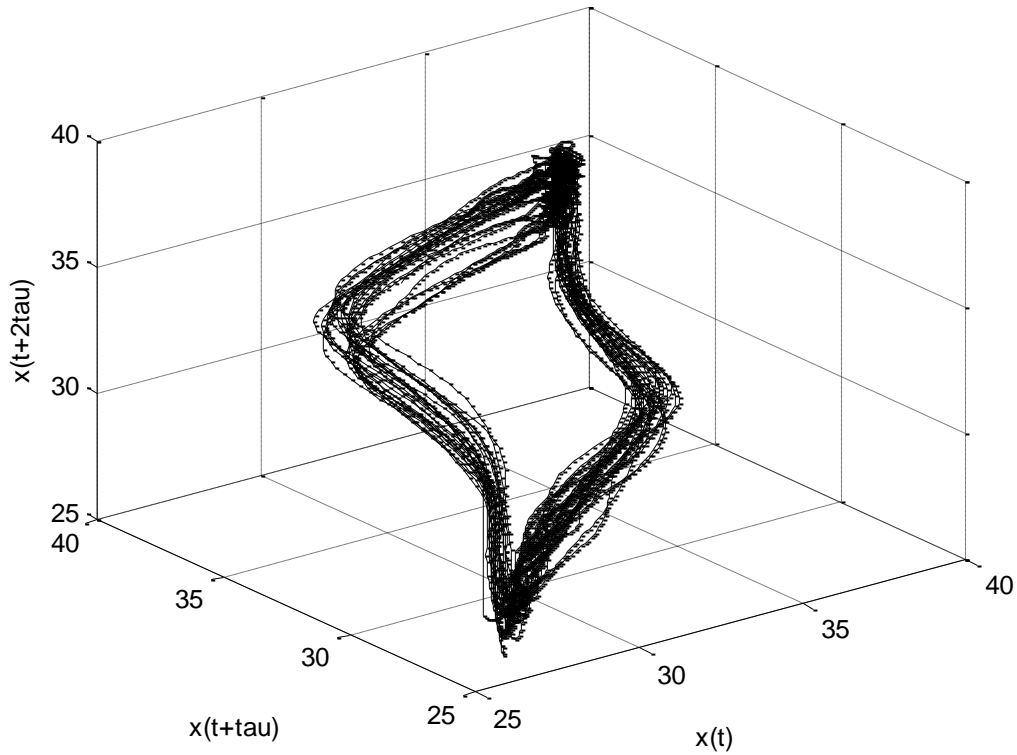


Рисунок 86 - Аттрактор, восстановленный из переменной $x(t)$ (рисунок 85) в трехмерном фазовом пространстве.....

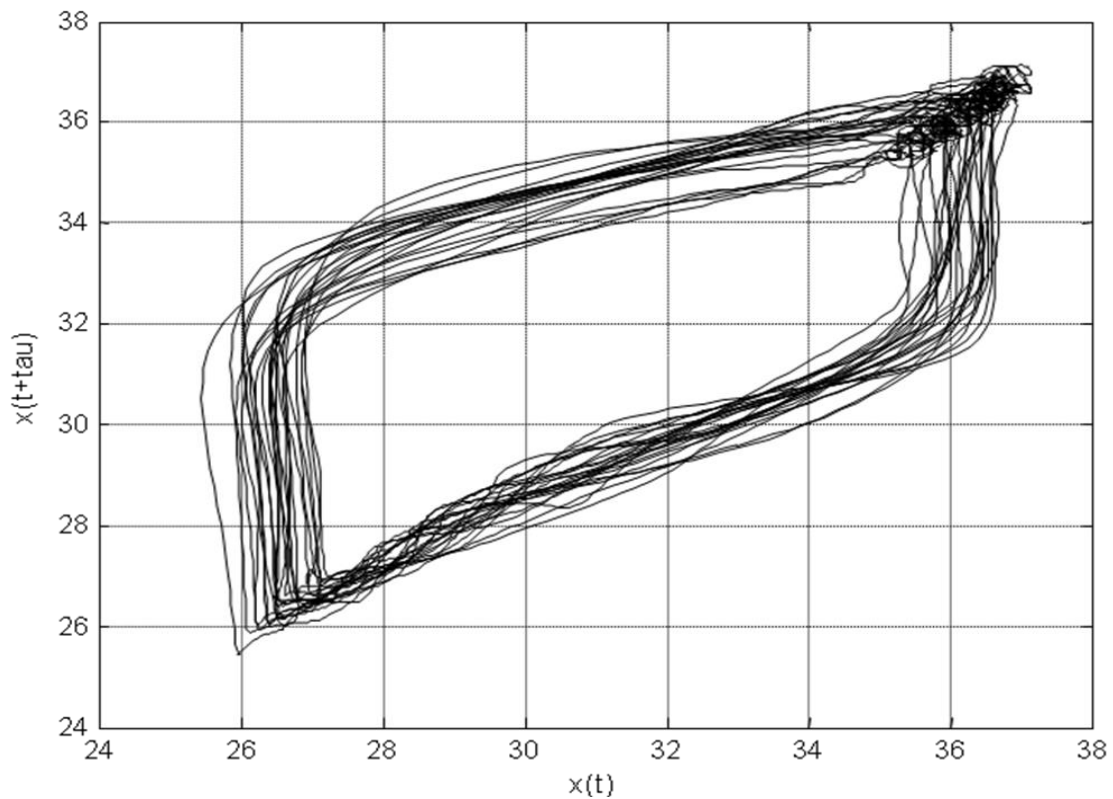


Рисунок 87 - . . .и его проекция на плоскость

Для его построения можно использовать простой прием, который проиллюстрирован графически (рисунок 88).

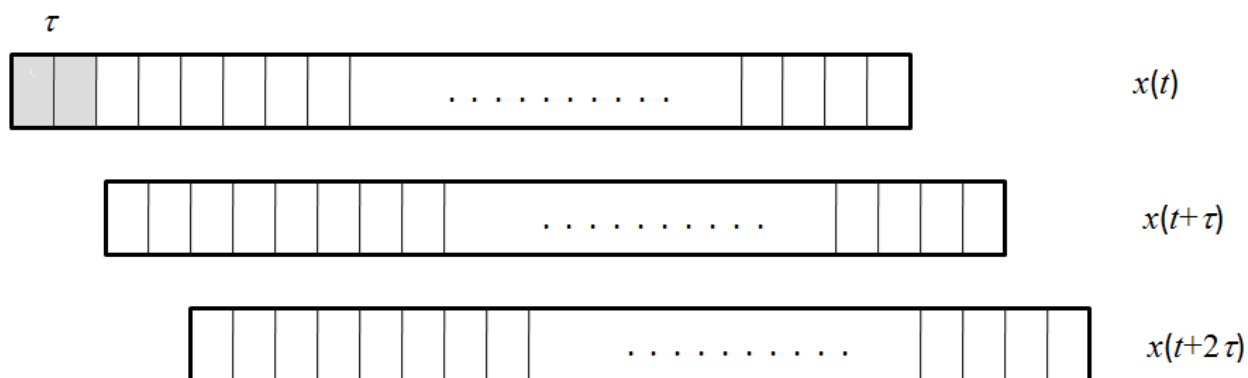


Рисунок 88 - Графическая иллюстрация метода задержек.

На рисунке 88 схематически показаны исходная переменная $x(t)$ и ее две копии с временным сдвигом на время τ и 2τ : $x(t+\tau)$ и $x(t+2\tau)$. Сдвиг τ показан темной заливкой на переменной $x(t)$.

Теперь надо получить переменные, сдвинутые друг относительно друга на указанные задержки во времени τ и 2τ . Для этого у первой из трех переменных удаляется часть данных в начале соответствующая временному интервалу 2τ , у второй в начале и в конце части длиной τ , у третьей - в конце часть длиной 2τ (рисунок 89)

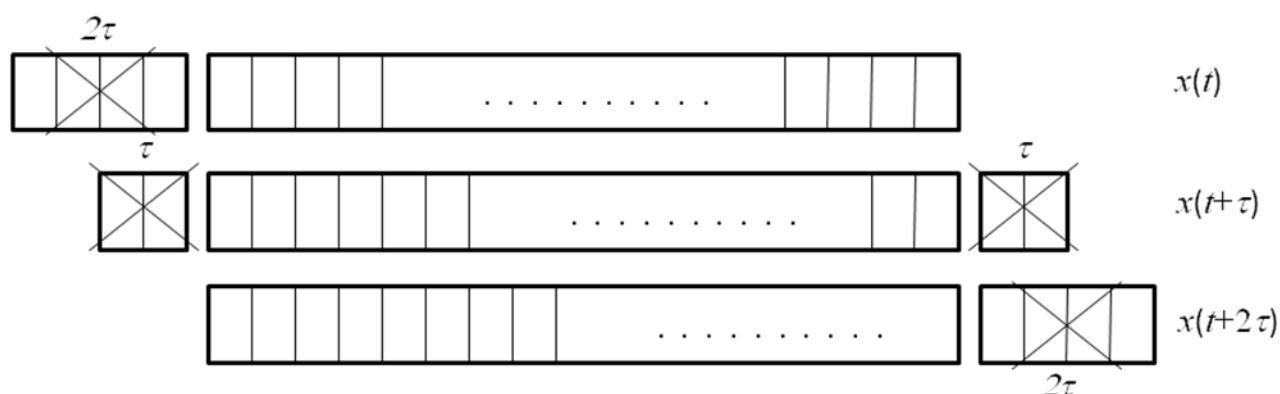


Рисунок 89 - Получение переменных одной длины, сдвинутых друг относительно друга на величину τ .

На рисунке 90 представлено, как выглядят переменная $x(t)$ и ее две копии с временным сдвигом на время τ и 2τ : $x(t+\tau)$ и $x(t+2\tau)$, помещенные на один график.

2.6 Показатель Херста [8]

Херст (Hurst) при изучении разливов Нила по статистике за 800 лет, обнаружил тенденцию следования за годом большого разлива и высокого уровня воды еще одного такого же года, а за годом низкого уровня - еще одного года с низким уровнем.

Оказалось, что эти закономерности можно распространить также и на другие процессы. Для их описания ввели степенную зависимость с

показателем степени, который получил название *показатель Херста*. Его получение можно проиллюстрировать следующим образом.

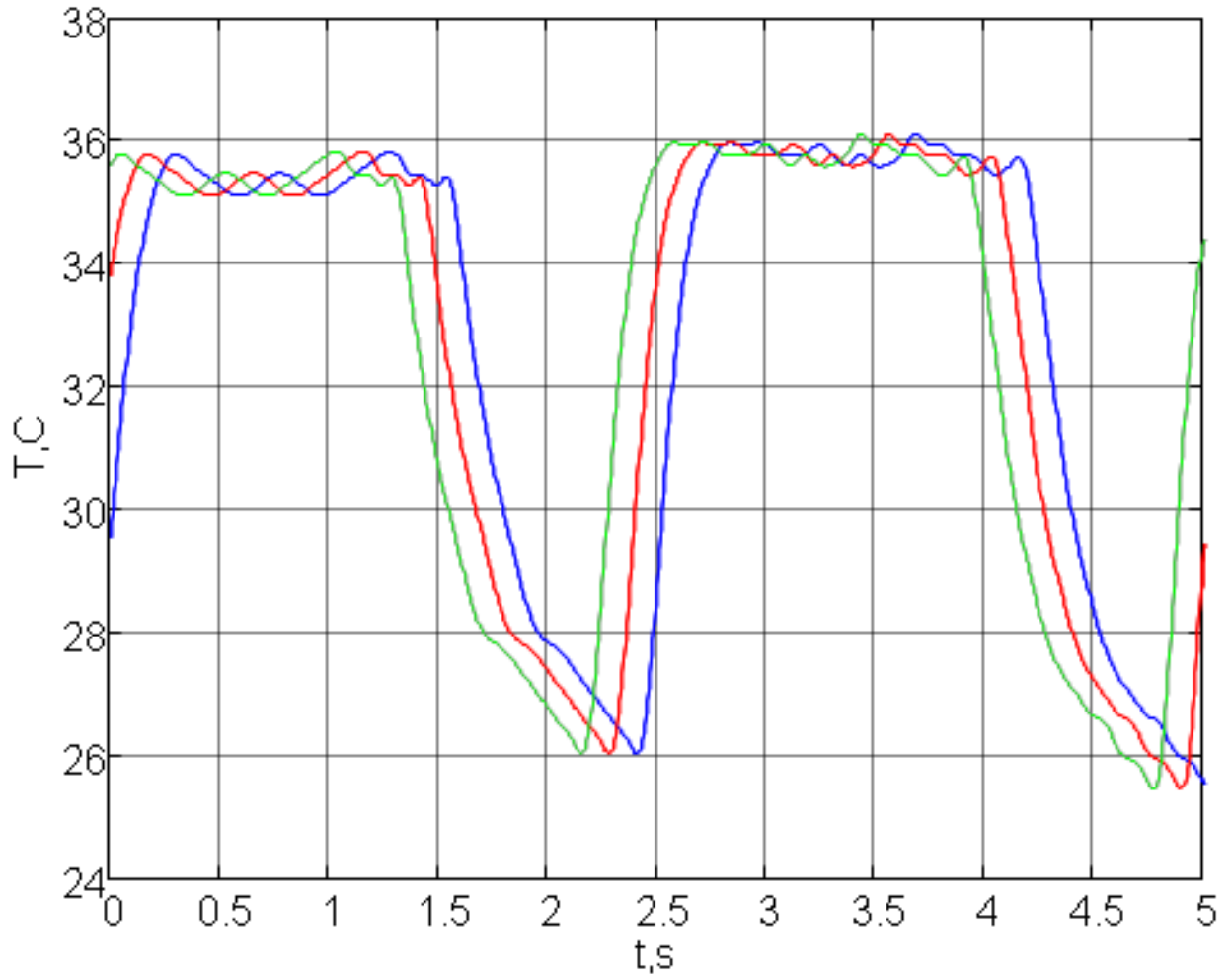


Рисунок 90 - Исходный временной ряд (синяя кривая) и его копии, сдвинутые на время τ ($x(t+\tau)$ - красная) и 2τ ($x(t+2\tau)$ - зеленая кривая)

Пусть имеется n наблюдений какого-либо процесса: $\mathbf{h} = h_1, h_2, \dots, h_n$. Пусть также оценка среднего значения для этих наблюдений есть m и среднеквадратичное отклонение СКО есть S .

Теперь центрируем результаты наблюдений, или избавимся от тренда для \mathbf{h} . Для этого надо вычесть из каждого отдельного наблюдения h_i величину m :

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1 - m, \\ x_2 &= h_2 - m, \\ &\dots \\ x_n &= h_n - m. \end{aligned} \quad (76)$$

Получился новый временной ряд с нулевым средним

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (77)$$

После этого нужно вычислить кумулятивные или частичные суммы этих новых переменных, каждая частичная сумма y_i является суммой всех лет до года i :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1, \\
y_2 &= x_1 + x_2, \\
&\dots \\
y_i &= x_1 + x_2 + \dots + x_i, \\
&\dots \\
y_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n
\end{aligned}
\tag{78}$$

Образован новый ряд

$$\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n, \tag{79}$$

для которого определяется величина

$$R = y_{\max} - y_{\min}, \tag{80}$$

где y_{\max} , y_{\min} - максимальное и минимальное значения из ряда (79). Величина R называется *диапазоном*. Тогда отношение R/S есть *нормированный* или *масштабированный диапазон*.

Можно показать, что:

$$R/S = k n^H, \tag{81}$$

где k – константа, H - показатель Херста. Масштабированный диапазон R/S увеличивается с ростом числа n переменных x и определяется по степенному закону с показателем Херста $0 \leq H \leq 1$. Для изменения уровня Нила $H \cong 0,7$.

Если бы переменные x были статистически независимы, то показатель Херста был бы равен $H=1/2$. Так как в действительности мы имеем дело с динамической системой, где последующие значения определяются предыдущими, то нельзя говорить о статистической независимости и поэтому H оказался выше $1/2$.

Можно рассмотреть следующие случаи:

1. $H = 1/2$: отклонения уровня h от среднего статистически независимы. Это случай так называемого случайного блуждания, броуновское движение;
2. $1/2 < H \leq 1$, если представить временной ряд x графически, то кривая будет почти гладкой, т.е. если в водоеме был высокий уровень, то это может повториться с высокой вероятностью и наоборот;
3. $0 < H \leq 1/2$, если представить временной ряд x графически, то кривая будет очень изрезанной, для водоема это означает, что высокие уровни с большой вероятностью чередуются с низкими уровнями.

Ниже приводятся примеры вычисления показателя Херста для временных рядов, полученных при исследованиях разных процессов. На рисунке 91 приводятся колебания температуры жидкости в водопроводной трубе, диаметром 5 см, при течении с расходом 200 л/мин, на рисунке 92 - колебания температуры вдыхаемого и выдыхаемого воздуха на входе в нос человека (относительные значения).

3. Фракталы

Термин *фрактал* впервые ввел Бенуа Мандельброт [9,10]. Он описал этот класс объектов, обладающих дробной, нецелой, размерностью. Фракталы представляют собой объекты, обладающие некоторыми замечательными геометрическими свойствами:

- 1 Самоподобие
- 2 Масштабная инвариантность

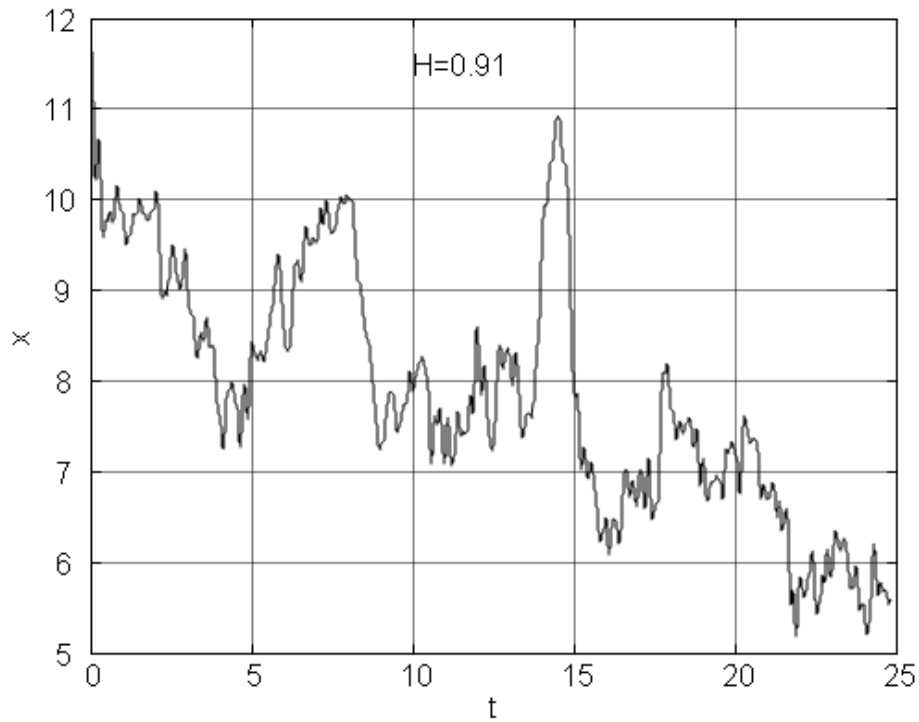


Рисунок 91 - Колебания температуры жидкости в трубе, диаметром 5 см, при течении с расходом 200 л/мин. Показатель Херста $H=0,91$

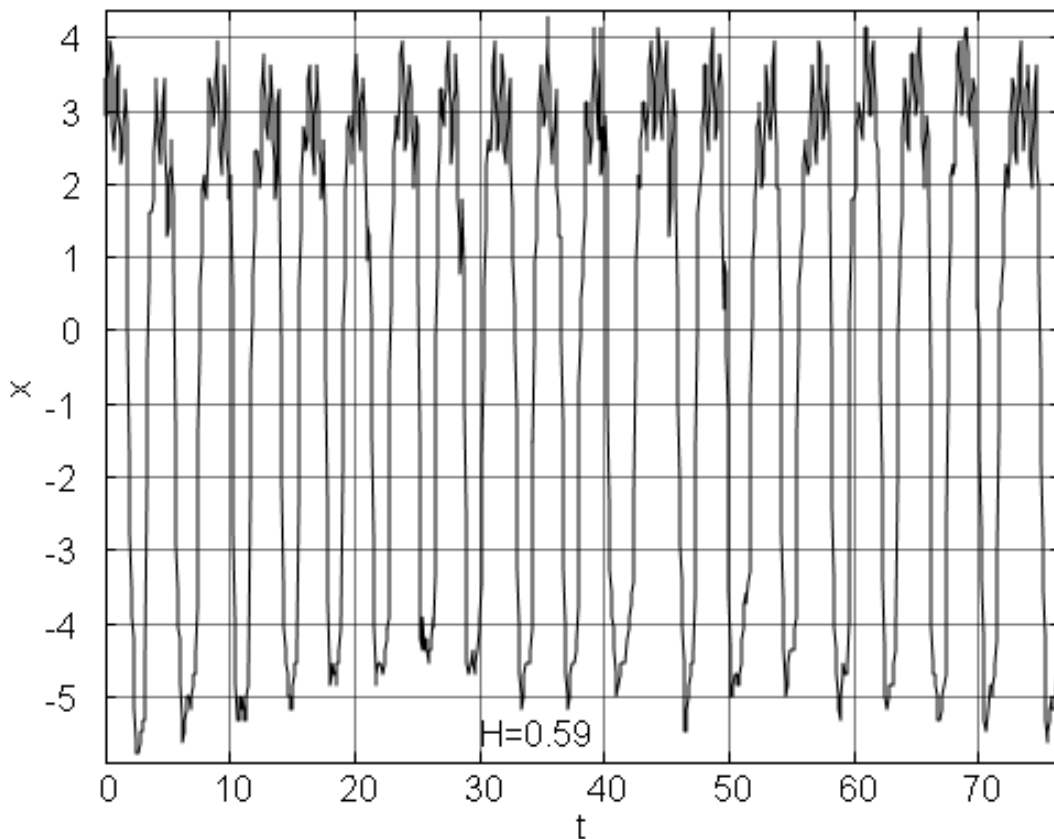


Рисунок 92 - Колебания температуры воздуха на входе в нос человека. Показатель Херста $H=0,59$.

3. Фракталы - геометрические объекты, обладающие нецелочисленной, дробной или **фрактальной размерностью**

3.1 Фрактальная размерность

Чтобы перейти к фрактальной размерности, вспомним, что такое размерность метрического пространства.

Размерность характеризует геометрический объект числом переменных, которые необходимо задать, чтобы указать местоположение одной из точек объекта. Точка на линии задается одним числом, на поверхности - двумя числами, в объеме - тремя.

Приведем размерности некоторых математических объектов.

Размерность D_T математической точки $D_T = 0$, но, чтобы описать положение точки в пространстве, необходимо большее число координат. В трехмерном пространстве необходимо задать три координаты. Для точки a такими координатами являются x, y и z . Можно записать: $a(x, y, z)$ (рисунок 93).

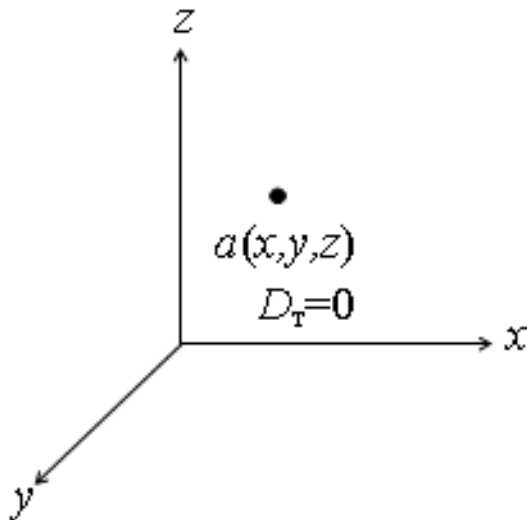


Рисунок 93 - Математическая точка в пространстве.

Размерность D_L линии равна $D_L = 1$, но, чтобы описать ее положение в пространстве, также как и для точки, необходимо иметь три координаты (рисунок 94).

Размерность D_P поверхности в трехмерном пространстве равна $D_P = 2$, но, чтобы описать ее положение, необходимо иметь три координаты (рисунок 95).

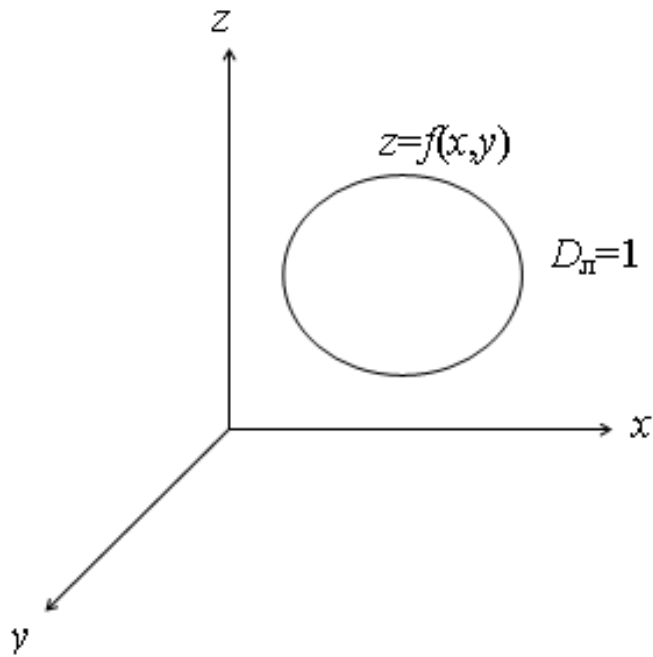


Рисунок 94 - Линия в пространстве

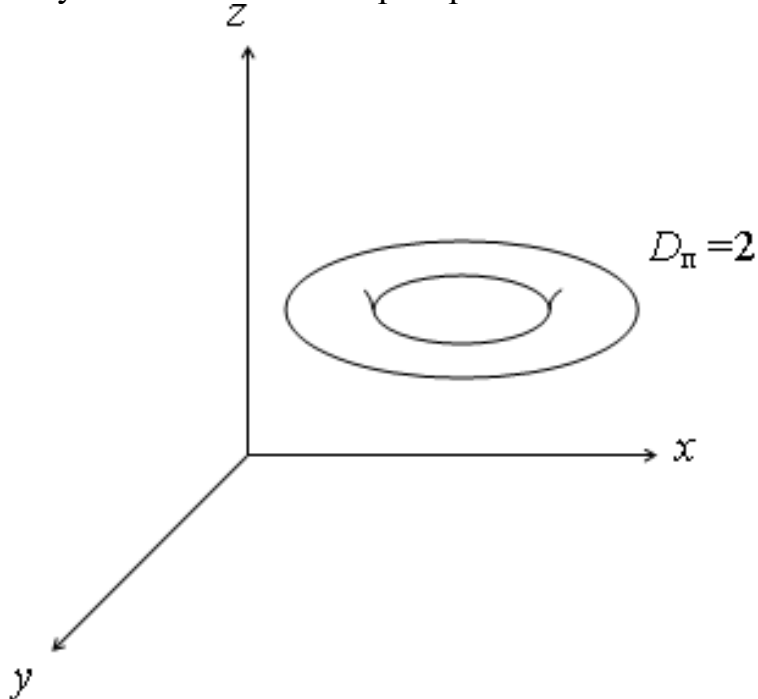


Рисунок 95 - Двумерная поверхность в трехмерном пространстве

Размерность правильных геометрических объектов никаких вопросов не вызывает. Сложнее дело обстоит с объектами, которые нельзя описать, как правильные геометрические фигуры. Для них можно применить, например, так называемую **емкостную размерность**, которую определяют через покрытие объекта какими-либо «емкостями»:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (82)$$

На рисунке 96 представлены примеры таких покрытий. Для покрытия отрезка прямой длиной 1 м необходимо 10 (10^1) отрезков длиной 10 см. Для покрытия квадрата со стороной 1 м необходимо 100 (10^2) квадратов со стороной 10 см. И для покрытия куба со стороной 1 м необходимо 1000 (10^3) кубиков со стороной 10 см.

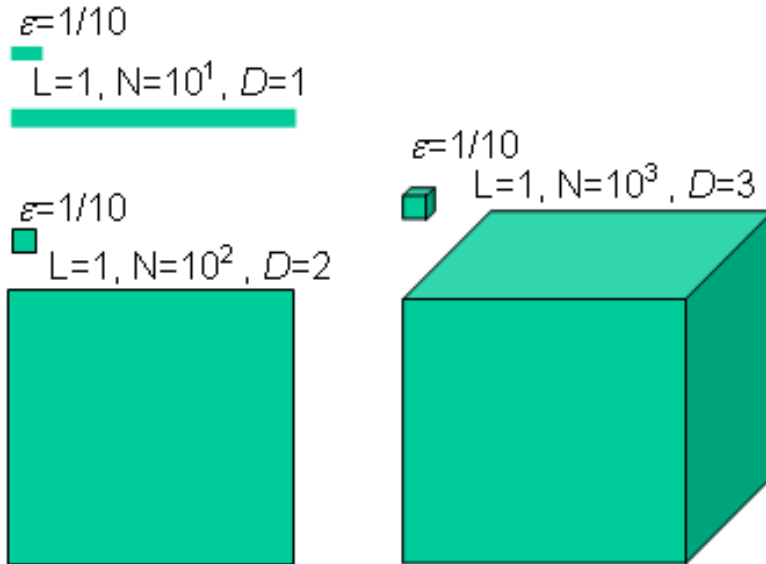


Рисунок 96 - Примеры покрытий и размерностей покрытых объектов

Здесь размерность проявляется в показателях степеней и совпадает с обычной размерностью метрического пространства для этих объектов (прямая, квадрат, куб). Особенностью этого задания размерности является то, что она характеризуется через минимальное количество “клеток”, необходимых для покрытия объекта. Размерность D проявляется как показатель степени в соотношении, связывающем число клеток N и их размер ε :

$$N = \frac{1}{\varepsilon^D} \quad (83)$$

Если прологарифмировать это выражение, выразить из него размерность D , при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получится формула (82) для емкостной размерности. При применении этой формулы к обычным геометрическим фигурам с рис. 42 получатся величины $D=1$, $D=2$, или $D=3$. Если же представить себе, что был куб, изготовленный из сплошного куска сыра (без пор!!!), и поры (ходы) прогрызли в нем мыши (рисунок 97), то для покрытия такого куба потребуется число маленьких кубиков $N < 10^3$.

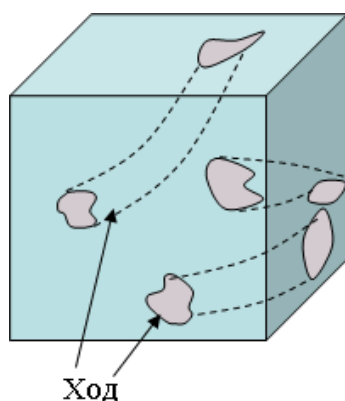


Рисунок 97 - Куб с «ходами»

Тогда его размерность D , сосчитанная по формуле (82) окажется $D < 3$. Она стала дробной.

Проиллюстрируем свойства фракталов на так называемом канторовском множестве (рисунок 98):

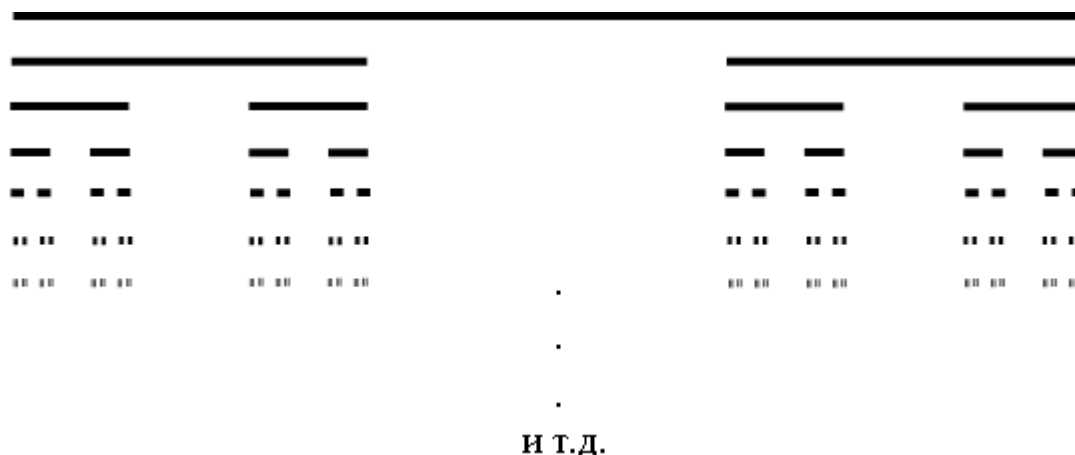


Рисунок 98 - Канторовское множество

Размерность канторовского множества по формуле (82) определяется как

$$D \approx \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63092975.....$$

То есть она также оказалась дробной, нецелой. С точки зрения размерности это уже не точка и еще не линия. Это иллюстрация третьего свойства фракталов

При первом шаге построения канторовского множества из исходного отрезка удаляется средняя треть. Затем из полученных двух отрезков удаляются средние трети и т.д. Этот процесс можно представить как удаление из отрезка открытых интервалов: $(1/3, 2/3)$, $(i/3^2, (i+1)/3^2)$, для $i = 1, 2$, $(i/3^3, (i+1)/3^3)$

Наконец, остаются только такие числа x , которые удовлетворяют выражению $x = \sum_i \frac{a_i}{3^i}$ с $a_i = 0$ или $a_i = 2$ для всех i . Эти числа образуют

канторовское множество C . Это множество можно покрыть числом $N(\varepsilon_i, C) = 2^i$ интервалов длиной $\varepsilon_i = \frac{1}{3^i}$, где $i=1,2,3,\dots$

Во введении были приведены примеры фракталов. Приведем еще некоторые:

- Снежинка Коха, рисунок 99.



Рисунок 99 - Построение снежинки Коха

Ее размерность составляет величину $D \approx \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$

- Треугольник или ковер Серпинского (рисунок 100):

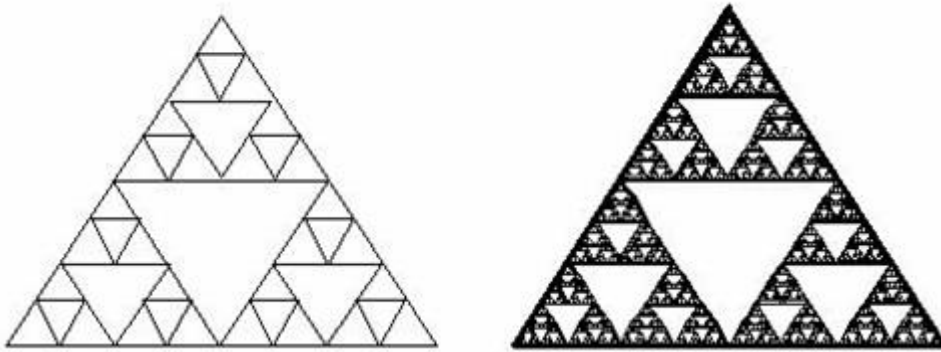


Рисунок 100 - Треугольник или ковер Серпинского

Его размерность составляет величину $D \approx \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585\dots$

- Салфетка Серпинского

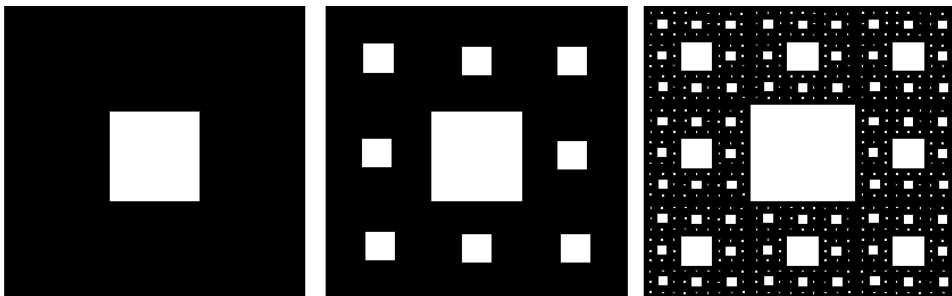


Рисунок 101 - Салфетка Серпинского

Ее размерность составляет величину $D \approx \frac{\log 8}{\log 2} = 1,8928\dots$



Рисунок 102 - Вацлав Серпинский (1882-1969)

3.2 Связь фрактальной размерности и показателя Херста

Показатель Херста H связан с фрактальной размерностью, как

$$D=2-H, \quad (84)$$

на плоскости и

$$D=3-H, \quad (85)$$

в трехмерном пространстве [8,9].

Таким образом, кривые, построенные по временным рядам колебаний уровня водоемов, обладают свойствами фракталов (см. Гл. 2, п. 2.3).

3.3 Моделирование фрактальных временных рядов [8]

Построим модель колебаний частицы, испытывающей случайные блуждания под ударами молекул (броуновское движение). Для простоты будем считать, что ее движение одномерное и под ударами молекул частица может двигаться только вдоль оси x с равной вероятностью в положительном и в отрицательном направлениях (рисунок 103).

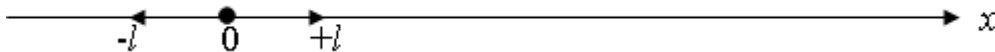


Рисунок 103 - Одномерное броуновское движение

Расстояние, проходимое частицей в промежутке между двумя столкновениями, в среднем равно величине l . Если определить среднее значение величины перемещения за какое-то большое количество шагов, то получится значение близкое нулю. Поэтому есть смысл определять квадрат величины перемещения. Если квадрат перемещения за 1 шаг равен $s_1=l^2$, то за n шагов он равен значению $s_n=nl^2$.

Так как путь, пройденный частицей при броуновском движении измерять затруднительно, то Эйнштейн предложил определять его через время движения t . Экспериментальное подтверждение закономерности такого подхода в 1908 году получил французский физик Перрен.

За n ударов при средней скорости \bar{v} путь nl может быть определен, как $\bar{v}t$, t - время. Тогда

$$nl = \bar{v}t,$$

$$s_n = nl^2 = \bar{v}lt.$$

Тогда одно перемещение может быть определено, как:

$$l = \sqrt{\frac{s_n}{n}}. \quad (86)$$

При изменении времени наблюдения t в 2 раза, путь l изменяется в $\sqrt{2}$ раз.

Разобьем время наблюдения t на элементарные промежутки Δt . Пусть положение частицы $x(t)$ в начальный момент времени $t=0$ равно $x(0)=0$

Положение после 1-го шага во времени Δt : $x(\Delta t)=D_1$

После 2-го шага во времени $2\Delta t$: $x(2\Delta t)=x(\Delta t)+D_2=D_1+D_2$

После k -го шага во времени $k\Delta t$: $x(k\Delta t)=D_1+D_2+\dots+D_k$

Если взять двойной сдвиг во времени $2\Delta t$, то:

$$x(2k\Delta t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^n D_k$$

Теперь перейдем к практическому применению рассмотренных положений для моделирования временных рядов. Для этого можно применить методику *случайного смещения среднего*, которая строится на основе генератора случайных чисел (пример на рисунке 104).

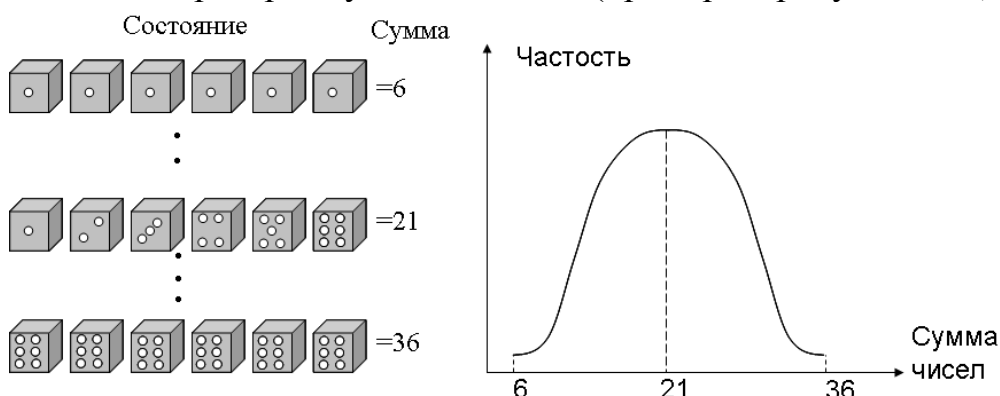


Рисунок 104 - Генератор случайных чисел от 6 до 36

Будем считать, что $0 \leq x(t) \leq 1$ и $x(0)=0$. $x(1)$ вычисляется как случайное число из последовательности с нормальным распределением $x(1)=\xi(1)$ (рисунок 105).

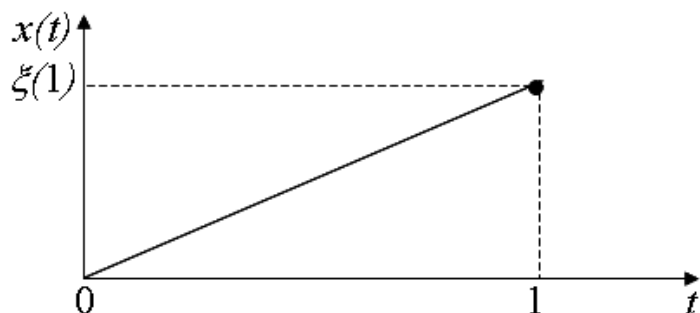


Рисунок 105 – Первый шаг при моделировании

Следующее число, $x(1/2)$ образуется как

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}(x(0) + x(1))\right] + D_1,$$

где $D_1 = \frac{1}{2}\xi_2$ - смещение. ξ_2 - число из псевдослучайной последовательности с нормальным распределением, $0 < \xi < 1$ (рисунок 106).

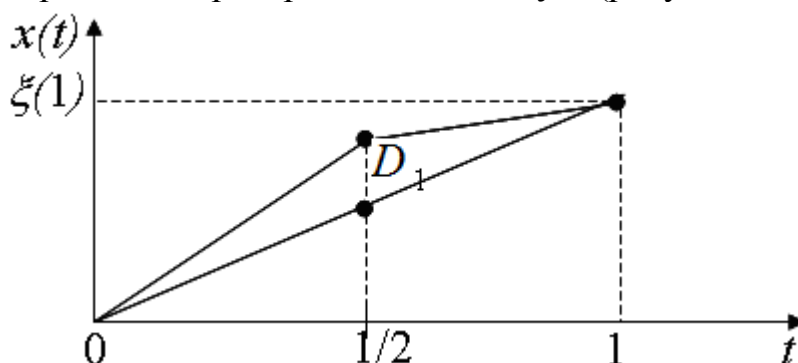


Рисунок 106 – Следующий шаг

Далее, временные интервалы $[0 \ 1/2]$ и $[1/2 \ 1]$ делятся пополам и для них определяются значения $x(1/4)$ и $x(3/4)$:

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = \left[\frac{1}{2}(x(0) + x\left(\frac{1}{2}\right))\right] + D_2, \quad D_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}\xi_3. \quad x\left(\frac{3}{4}\right) = \left[\frac{1}{2}(x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1))\right] + D_3,$$

$$D_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}\xi_4, \text{ рисунок 107.}$$

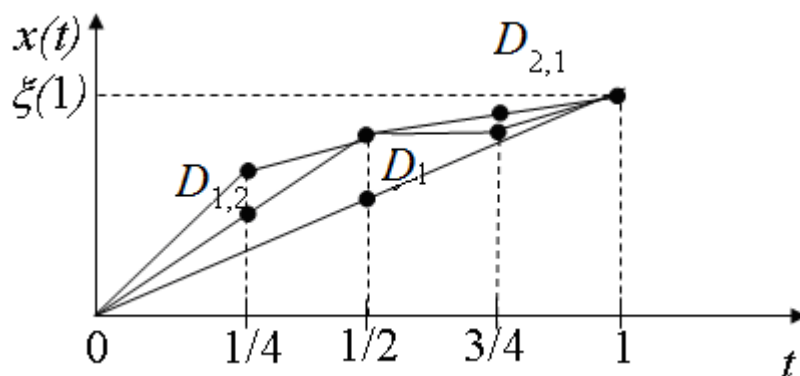


Рисунок 107 – Следующее деление временных интервалов

Далее, временные интервалы $[0 \ 1/4]$, $[1/4 \ 1/2]$, $[1/2 \ 3/4]$ и $[3/4 \ 1]$ делятся пополам и для них определяются значения $x(1/8)$, $x(3/8)$, $x(5/8)$, $x(7/8)$:

$$x\left(\frac{1}{8}\right) = \left[\frac{1}{2}(x(0) + x\left(\frac{1}{4}\right))\right] + D_4, \quad D_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}\xi_5 = \frac{1}{\sqrt{16}}\xi_5.$$

$$x\left(\frac{3}{8}\right) = \left[\frac{1}{4}(x\left(\frac{1}{4}\right) + x\left(\frac{1}{2}\right))\right] + D_5$$

$$x\left(\frac{5}{8}\right) = \left[\frac{1}{2} \left(x(0) + x\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right] + D_6, \quad x\left(\frac{7}{8}\right) = \left[\frac{1}{2} \left(x\left(\frac{3}{4}\right) + x(1)\right)\right] + D_7.$$

Смещения D_5 , D_6 , D_7 определяются так же, как D_4 . Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое разбиение.

Ниже приводятся результаты такого моделирования с различной степенью разбиения временного интервала $[0,1]$ (рисунок 108).

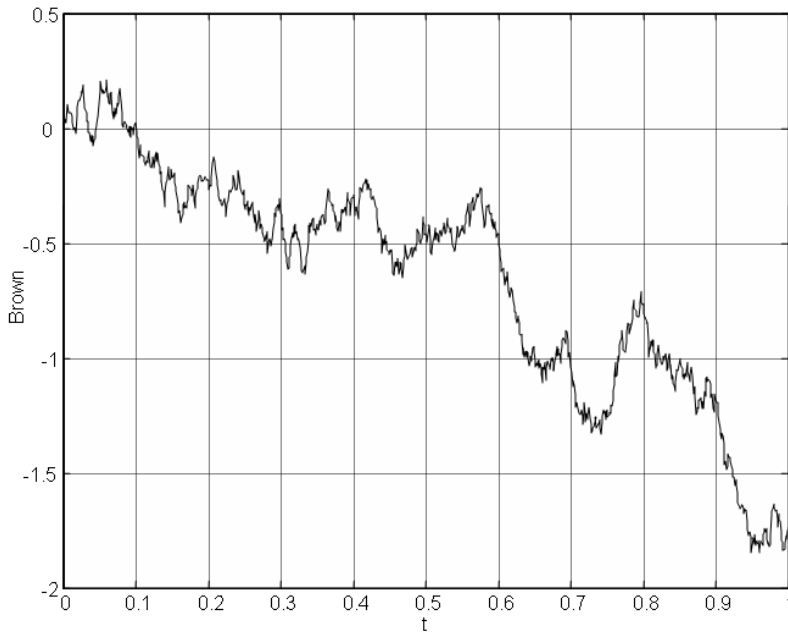


Рисунок 108 - ...для 1000 значений

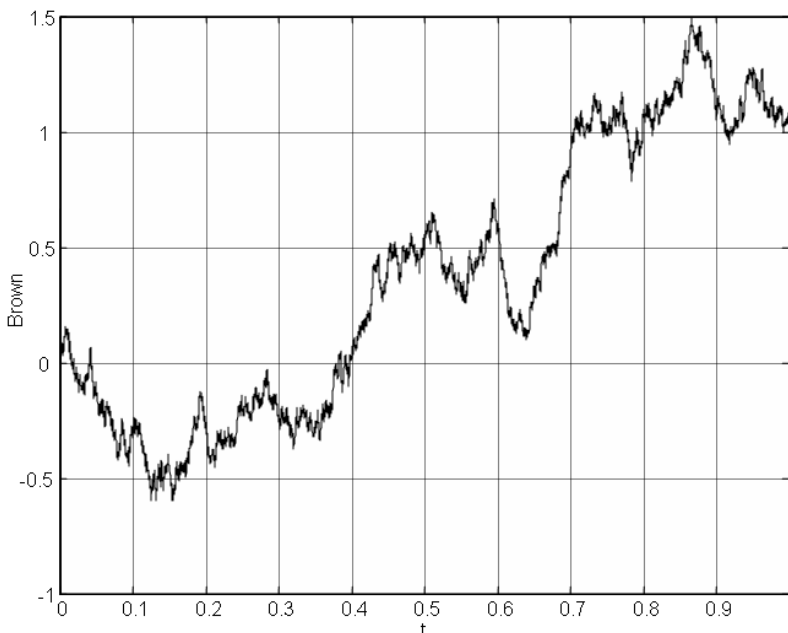


Рисунок 109 - ...для 10000 значений

Можно применить рассмотренную методику для моделирования случайного блуждания частицы (броуновского движения) на плоскости. Результат такого моделирования показан на рисунке 110.

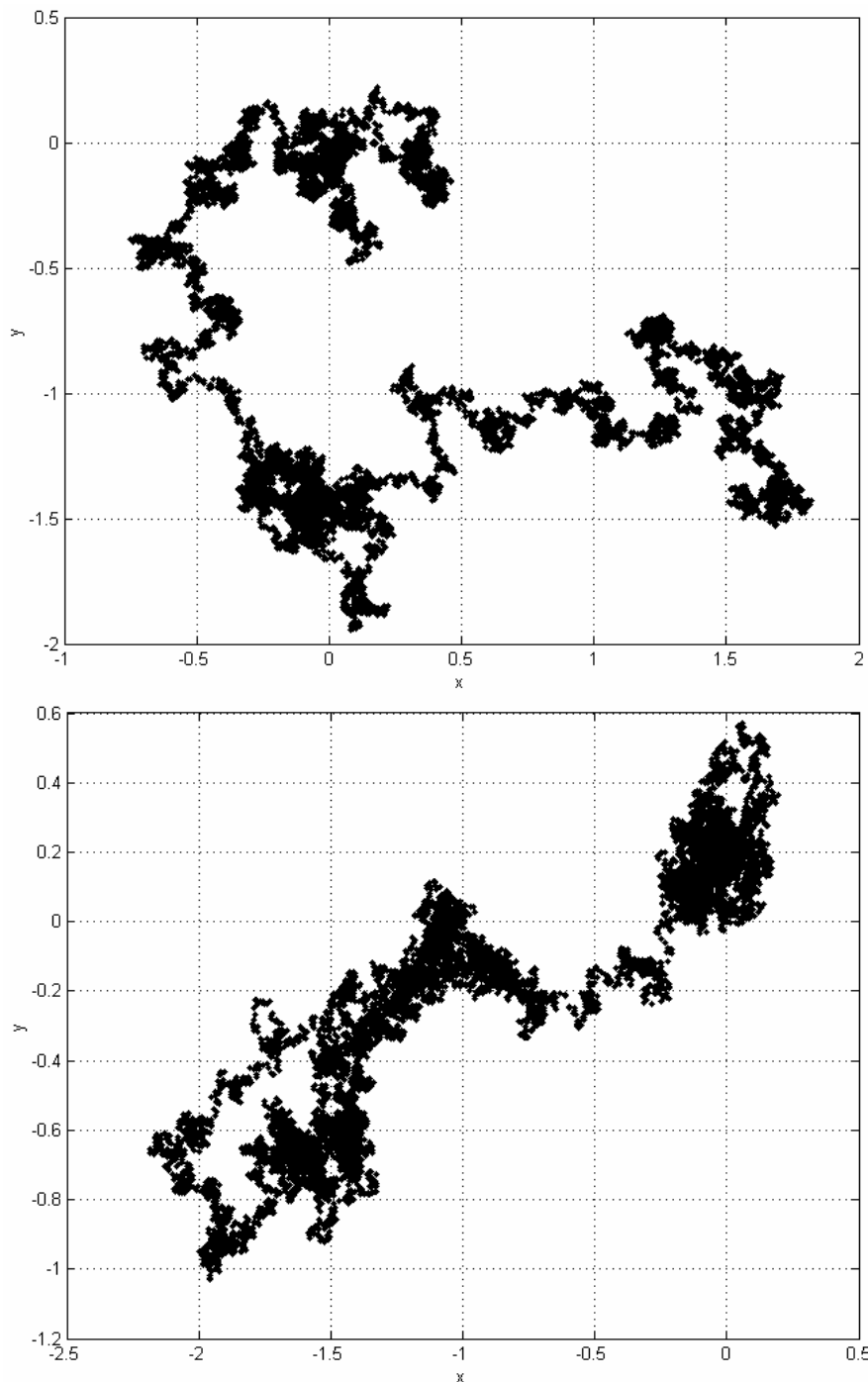


Рисунок 110 - Результаты моделирования случайного блуждания частицы (броуновского движения) на плоскости

3.4 Оценивание свойств фрактальных объектов на основе вычисления оценок размерности

Одним из способов оценивания свойств фрактальных объектов является определение размерности. Для этого можно использовать их изображения. При вычислениях используются уровни градаций цветов изображения. Для оценки можно использовать либо нахождение вероятности «посещения» точками изображения каких-то областей объекта, либо определять показатель Херста.

В первом случае фактически вычисляется информационная размерность (глава 1, формула (20)). Во втором - используется связь показателя Херста с фрактальной размерностью (3.2, формула (84)).

Ниже приводится пример вычисления размерности из³ и [11]. Результаты вычисления использовались для количественного описания изменения состояния полимерного материала при насыщении его водой (рисунок 101). На рисунке показаны отдельные итерации процесса расчета, в ходе которого вычисляется информационная размерность

$D_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$ (формула (20), (44)). Выполняется разбиение рисунка на

равные части. Сначала каждая его сторона делится пополам и вычисляется вероятность нахождения отдельных точек рисунка в каждом из четырех получившихся прямоугольников. Затем пополам делятся стороны этих четырех прямоугольников и определяется вероятность нахождения точек рисунка в шестнадцати новых и т.д. (рисунок 111). При этом размер разбиения $\varepsilon = 1/2^i$, где $i=0,1,2,\dots, n$.

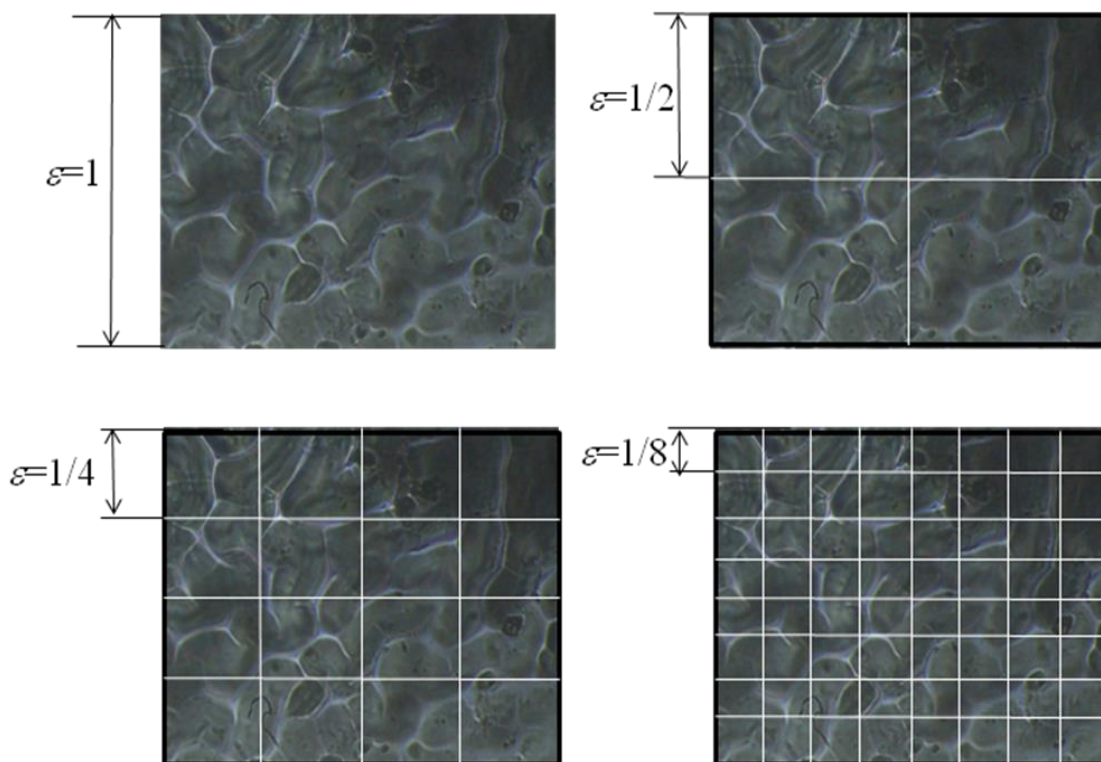


Рисунок 111 - Пример расчета размерности поверхности, обладающей фрактальными свойствами

³ Лукьянов Г.Н., Соловьев В.С., Успенская М.В. Количественное описание процесса набухания акрилатных пленок. XX Всероссийское совещание по температуроустойчивым функциональным покрытиям, 27 – 28 ноября 2007, СПб, с. 96 – 97; Г.Н. Лукьянов. Характеризация материалов через оценивание их физических и геометрических свойств. XXI Всероссийское совещание по температуроустойчивым функциональным покрытиям. 26-28 апреля, 2010 г. ИХС РАН им. И.В. Гребенщикова. С. Петербург, с. 43-44

Результаты расчета откладываются на графике (рисунок 112), где по оси абсцисс откладывается логарифм по основанию 2 от $1/\varepsilon$, а по оси ординат информация по Шеннону:

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) , \quad (87)$$

где p_i - вероятность нахождения точек рисунка в i -м прямоугольнике. Размерность D_I вычисляется как тангенс угла наклона для полученной прямой.

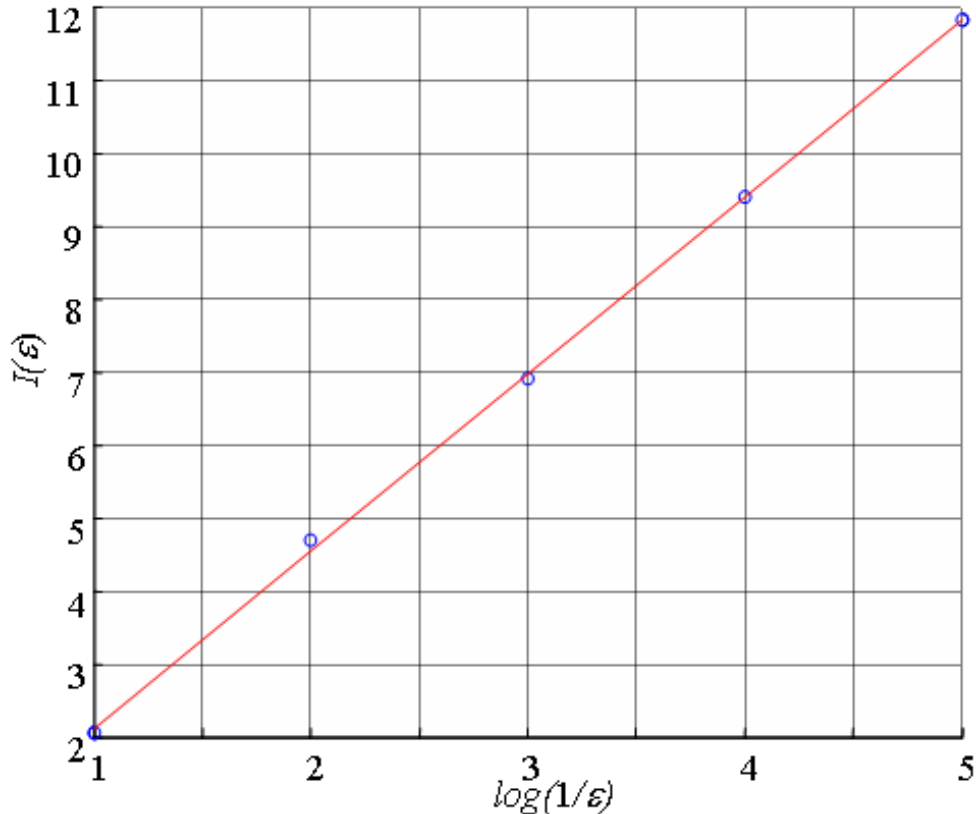


Рисунок 112 – Пример результата расчета размерности для изображений с рисунка 101

Ниже приводится изменение показателя Херста по мере насыщения акриловой пленки водой⁴. На снимках приводится вид поверхности пленки, цифры - показатель Херста.

Те же данные приведены в виде графика изменения показателя Херста в зависимости от времени при насыщении акриловой пленки водой (рисунок 113, нижний).

⁴ G. Lukyanov, M. Uspenskaya, V. Solovyev, A. Gorlyak Quantitative description of nonlinear dynamics of swelling in the porous acrylic thin films. ENOC-2008, St. Petersburg, Russia, June, 30- July, 4 2008

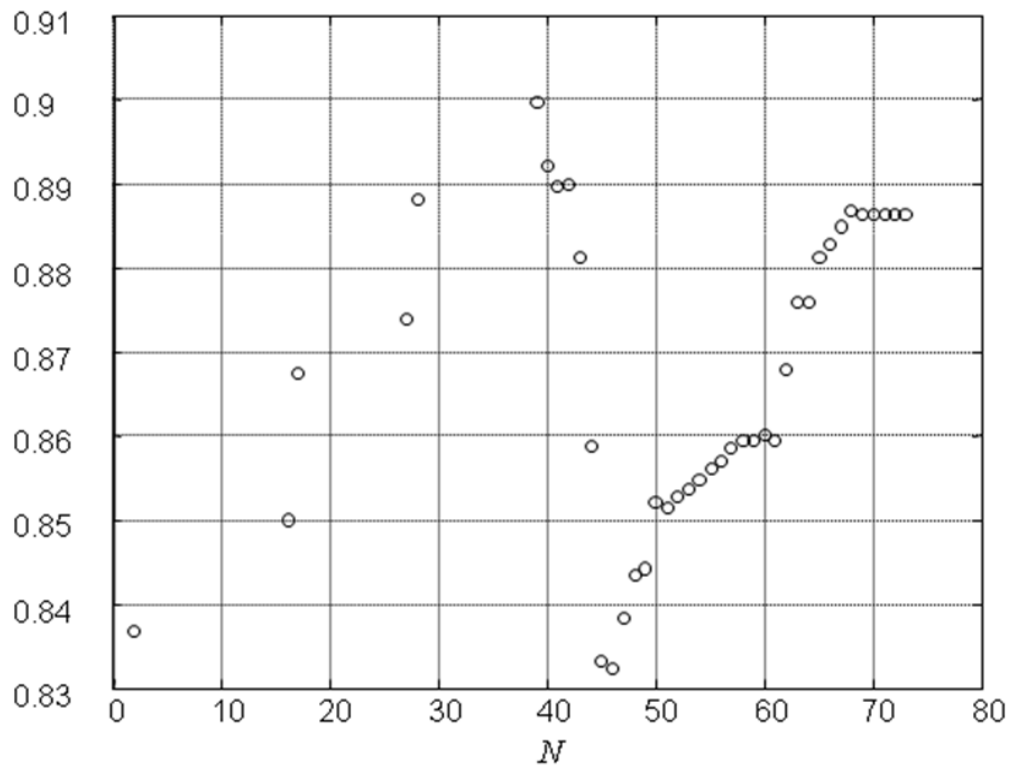
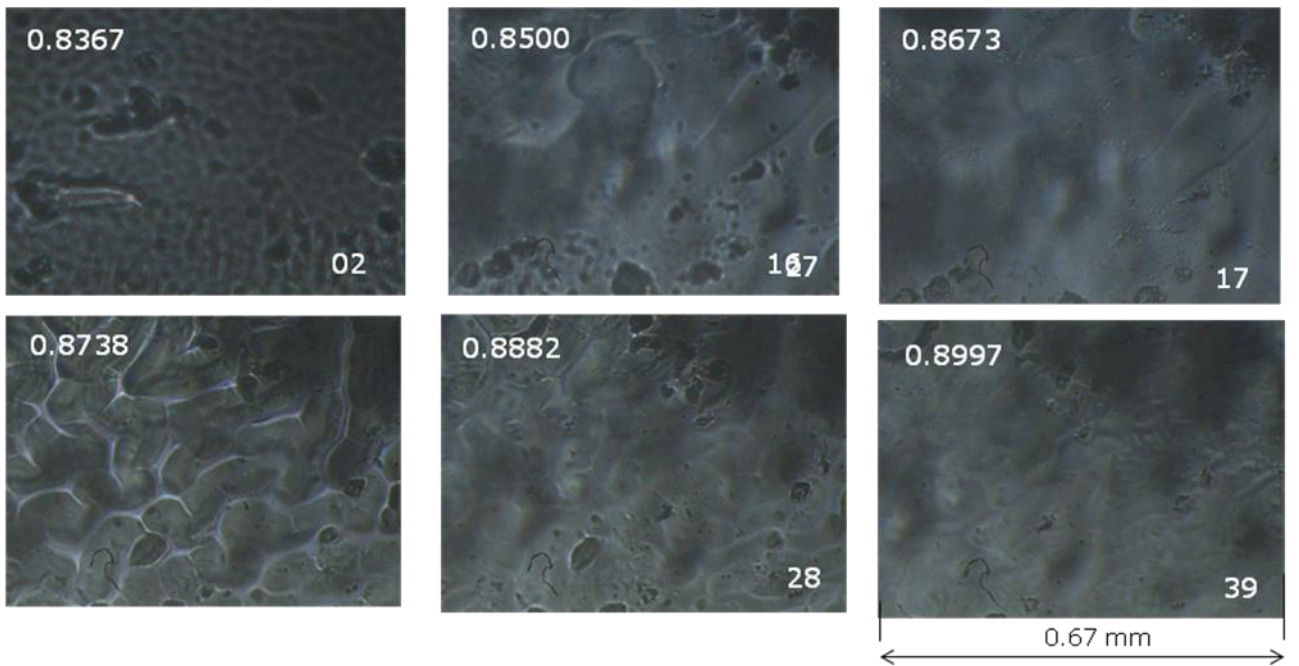


Рисунок 113 - График изменения показателя Херста в зависимости от времени при насыщении акриловой пленки водой. N - номер измерения, период времени между отдельными измерениями 3 с.

Еще один пример представляет собой наноразмерную (толщина $d < 100$ нм) медную пленку с фрактальной структурой (рисунок 114) из [12,13].

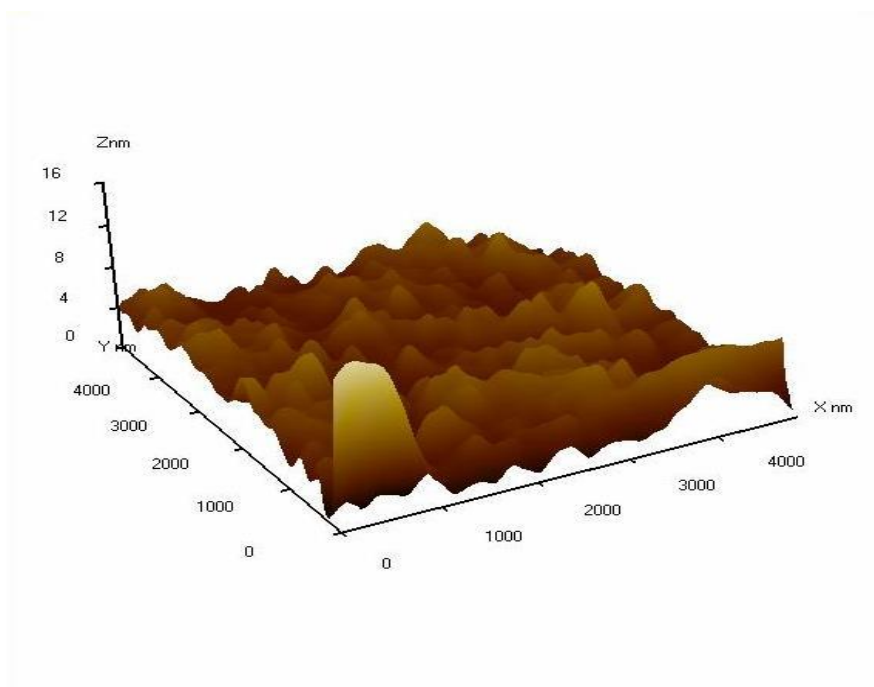
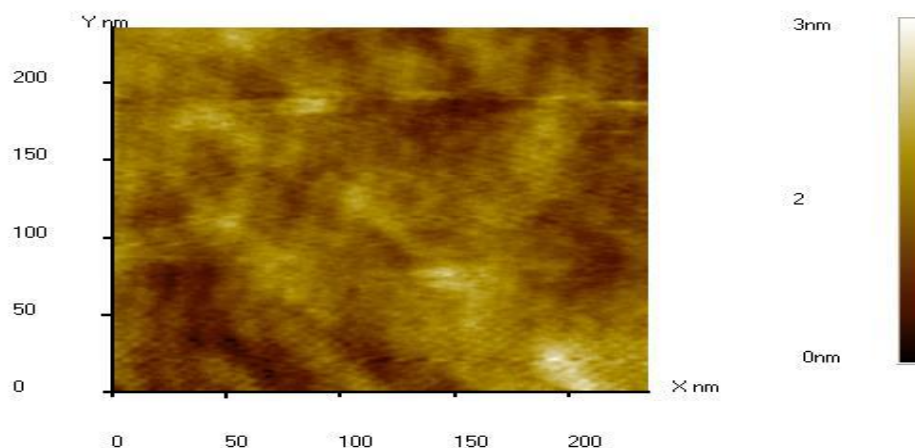


Рисунок 114 - Наноразмерная (толщина $d < 20$ нм) медная пленка с фрактальной структурой. Показатель Херста $H \approx 0,87$.

4. Волны во фрактальных структурах

4.1 Колебания. Фононы

Атомы в кристаллической решетке всегда находятся в состоянии колебаний около какого-то равновесного положения. Их амплитуда растет с ростом температуры. Равновесное положение атомов кристаллической решетки определяется силами, которые действуют между ними. Огромное

число взаимодействующих атомов делает точное аналитическое описание колебательного движения невозможным. Поэтому для описания колебательного движения прибегают к упрощенным, модельным, представлениям.

Можно рассмотреть, например, одномерный кристалл, состоящий из цепочки атомов, вытянутой вдоль оси x (рисунок 115).

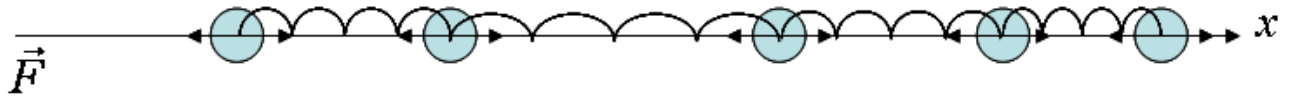


Рисунок 115 - Модель одномерного кристалла, на который действует возбуждающая сила F

Каждый атом имеет массу m . Связи между атомами упругие, жесткость каждой связи k . Слева на эту цепочку действует сила F . В такой системе возникают волны (рисунок 116)

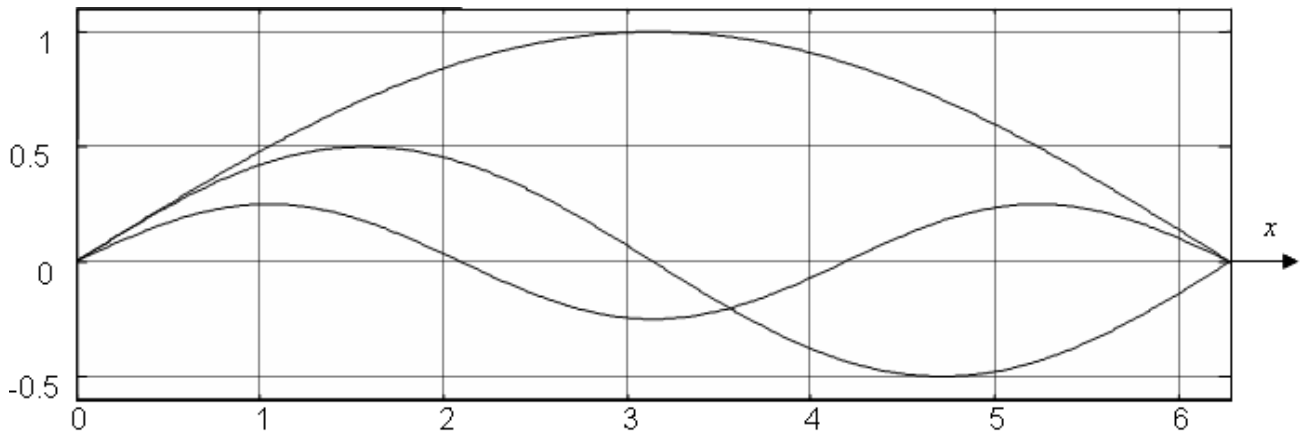


Рисунок 116 Волны в одномерном кристалле

Для описания колебаний можно воспользоваться законом Гука, по которому сила F может быть определена как

$$F = -kx, \quad (88)$$

где k - жесткость, x - смещение от положения равновесия.

Тогда для узла решетки (атома) с номером n можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} F_{n,n+1} &= -k(x_n - x_{n+1}) \\ F_{n,n-1} &= -k(x_n - x_{n-1}) \\ F_n &= -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (89)$$

Уравнение колебаний для одного атома:

$$F_n = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}, \quad (90)$$

m_n - масса n - го атома.

Для цепочки атомов:

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + \kappa(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0. \quad (91)$$

(90) и (91) - уравнения гармонических колебаний. Решение уравнения (91):

$$x_n = a_i \sin(\omega_i t - k_i x_n^*), \quad (92)$$

a_i - амплитуда i -ой волны, ω_i - круговая частота, k_i - волновое число, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

λ - длина волны, $x_n^* = d \cdot n$ - координата n -го атома цепочки, d - параметр кристаллической решетки (расстояние между атомами, соответствующее минимальной энергии); n - порядковый номер узла.

Кроме этого, можно вспомнить о понятиях фазовой $u_p = \frac{\omega}{k}$ и групповой скорости $u_G = \frac{d\omega}{dk}$.

Решение (92) получено для следующего соотношения между частотой ω и волновым числом k :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m_a}} \sin \frac{kx}{2} \text{ - дисперсионный закон или дисперсионное соотношение.}$$

$$\text{Тогда } u_p = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\kappa}{m_a}} \sin \frac{kx}{2} \text{ и } u_G = x \sqrt{\frac{\kappa}{m_a}} \cos \frac{kx}{2}.$$

Для малых k , т.е. для **длинных волн**, когда $\lambda \gg d$, и $\sin \frac{kx}{2} \approx \frac{kx}{2}$

$$u_p = u_G = x \sqrt{\frac{\kappa}{m_a}} \approx d \sqrt{\frac{\kappa}{m_a}}, \quad (93)$$

u_p - скорость распространения звука в кристалле.

То есть для длинных волн кристалл можно рассматривать, как непрерывную среду.

Для коротких волн ($\lambda \ll d$) нельзя пренебречь сосредоточением массы в отдельных точках. Кристалл ведет себя как среда с нормальной дисперсией и дискретность массы влияет на процесс колебаний. С уменьшением λ (или с увеличением k) снижается фазовая скорость u_p .

Теперь усложним задачу. Пусть в одномерной решетке колеблются атомы двух типов (рисунок 117), с массами m_{a1} и m_{a2} .

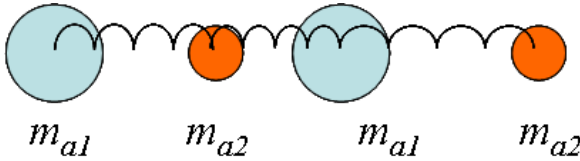


Рисунок 117 - Одномерная решетка с атомами двух типов

Цепочка из чередующихся атомов с массами m_{a1} и m_{a2} также совершает гармонические колебания, дисперсионная зависимость для нее:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m_{a1}m_{a2}}{(m_{a1} + m_{a2})^2} \sin^2 \frac{kx}{2}} \right], \quad (94)$$

где: $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{(m_{a1} + m_{a2})k}{2m_{a1}m_{a2}}}$, $\frac{2m_{a1}m_{a2}}{(m_{a1} + m_{a2})^2}$ - приведенная масса атомов 1 и 2.

Выражение (94) показывает, что в цепочке, состоящей из атомов двух видов, дисперсионная кривая имеет две ветви: нижнюю ветвь, охватывающую в начальной части область звуковых колебаний ($k \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$), называют *акустической*, а верхнюю ветвь, у которой при $k \rightarrow 0$ частоты ω соответствуют колебаниям инфракрасной части спектра – *оптической* (рисунок 118).

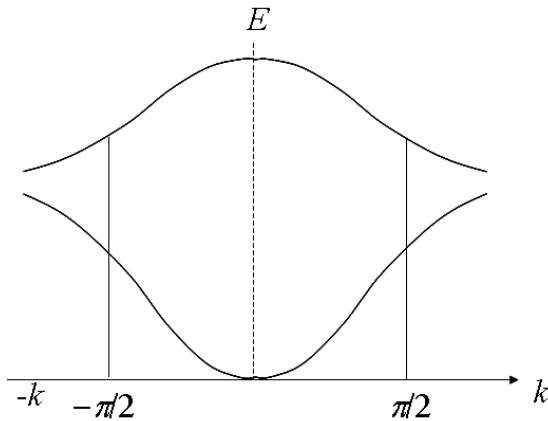


Рисунок 118 - Дисперсионная кривая: нижняя ветвь ($k \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$) - акустическая, верхняя – оптическая

В акустической ветви колеблющиеся атомы движутся синфазно, частота колебаний обратнопропорциональна λ и равна величине:

$$\omega = \frac{2\pi\nu}{\lambda}, \quad (95)$$

ν – скорость звука.

Для описания колебаний атомов твердого тела применяют корпускулярное описание. Для этого вводят понятие **фонон**.

Фонон это квазичастица, которую описывают следующими выражениями:

1. Энергия фонона: $E_\phi = \hbar\omega$
2. Импульс фонона: $\vec{p}_\phi = \hbar\vec{k}$

Минимальная длина волны колебаний кристаллической решетки определяется расстоянием между атомами d и $\lambda_{min}=2d$. Максимальная длина волны определяется размером кристалла l и $\lambda_{max}=2l$. Соответствующие частоты колебаний:

$$\omega_{min} = \frac{\pi v}{l} \text{ и } \omega_{max} = \frac{\pi v}{d}.$$

Можно также определить температуру, при которой могут возбуждаться электромагнитные колебания. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие равенства энергий: $kT = \hbar\omega_0$, k - постоянная Больцмана.

Эта температура называется температурой Дебая Θ_D и определяет максимальную частоту тепловых колебаний, которые могут возбуждаться в данном кристалле: $k\Theta_D = \hbar\omega_{max}$.

Отсюда:

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_{max}}{k}. \quad (96)$$

Температура Дебая для большей части кристаллов лежит в пределах от 150 К до 600 К.

Фононы, как и обычные частицы, могут иметь собственный механический момент – спин, r . На фононах могут рассеиваться носители заряда:

1. На акустических фононах

Невырожденный газ (в вырожденном газе все нижние уровни энергии заполнены электронами. Время свободного пробега (или время релаксации - $\tau_{рф}$) $\tau_{рф} = aT^{3/2}$; $\tau_{рф}(E) \sim E^{-1/2}$; $\tau(E) = C_{м.р} \cdot E \cdot r$, где a – константа, E - значение энергии электрона, $r = -1/2$ - акустические фононы, $r = +1/2$ - акустические фононы при т.н. пьезоэлектрическом рассеянии, $C_{м.р}$ - постоянная, зависящая от механизма рассеяния.

Вырожденный газ

$\tau_{рф} \sim T^1$, так как длина свободного пробега $l_{с.н} \sim T^1$, а скорость движения носителей заряда в вырожденном газе не зависит от температуры.

2. На оптических фононах

а. $T \ll \Theta_D$. В области **низких температур** концентрация фононов $n_\phi \sim T^3$ и зависимость времени свободного пробега от температуры – экспоненциальная:

$$\tau_{p\phi} \sim e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1,1 \text{ При } T \rightarrow 0 \quad e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \gg 1 \text{ и } \tau_{p\phi} \sim e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

b. $T \approx \Theta_D$, $\tau_{p\phi} = bT^{1/2}$, или $\tau_{p\phi} \sim E^{1/2}$, где b - константа

При **высоких температурах**:

$\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$, т.к. $\hbar\omega \ll kT$ и $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}$ и число фононов пропорционально kT $\tau(E) = C_{м.р} E^r$. $r = -1/2$ - неполярные оптические фононы, $r = +1/2$ - поляризационные оптические фононы.

4.2 Фононные спектры

В одномерной цепочке из атомов двух разных масс m_{a1} и m_{a2} существует две ветви колебаний, частоты которых равны:

$$f_{\pm} = \left\{ \kappa \left[\left(\frac{m_{a1} + m_{a2}}{m_{a1} m_{a2}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{m_{a1} + m_{a2}}{m_{a1} m_{a2}} \right)^2 - \frac{4 \sin(kd)}{m_{a1} m_{a2}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (97)$$

κ - модуль упругости; d - расстояние между ближайшими атомами в цепочке ($d = \text{const}$ при равновесии; $d = x$ - при колебаниях); k - волновое число.

На рисунках 119 и 120 приводятся временные и частотные (спектры) зависимости колебаний для системы из двух масс.

При $k \rightarrow 0$:

Если частота f приблизительно равна k , то это акустическая часть спектра, поскольку дисперсия ее длинноволнового участка совпадает с законом дисперсии звука, распространяющегося в среде.

Если частота $f_+ \rightarrow \left[2\kappa \left(\frac{m_{a1} + m_{a2}}{m_{a1} m_{a2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$, то это оптическая часть

спектра. Соответствующие частоты обычно находятся в оптической части диапазона колебаний. В акустической части спектра атомы с отличающимися массами движутся в одном направлении.

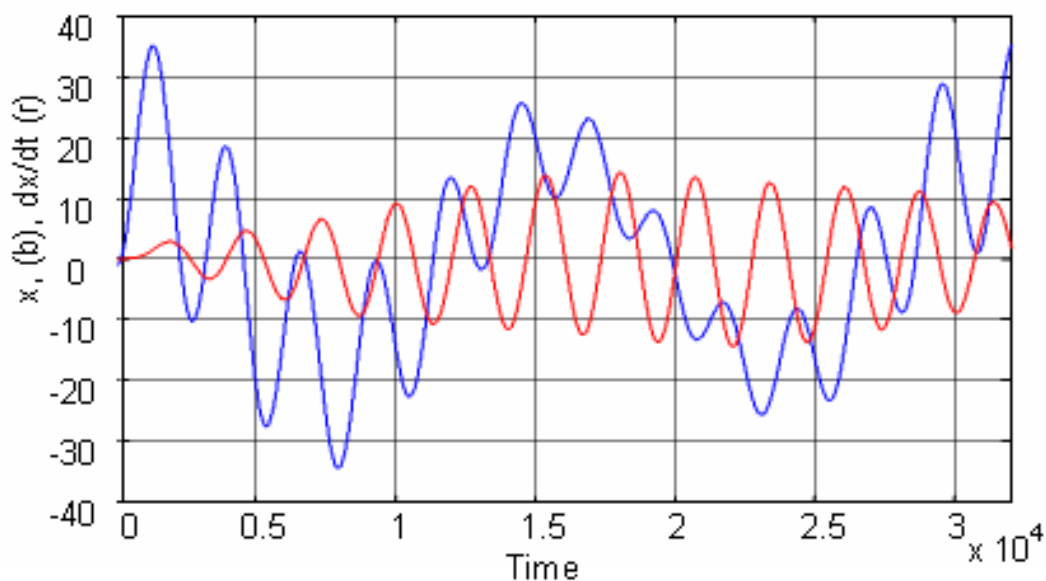


Рисунок 119 - Колебания массы m_{a1} (97): синяя кривая - координата, красная - скорость

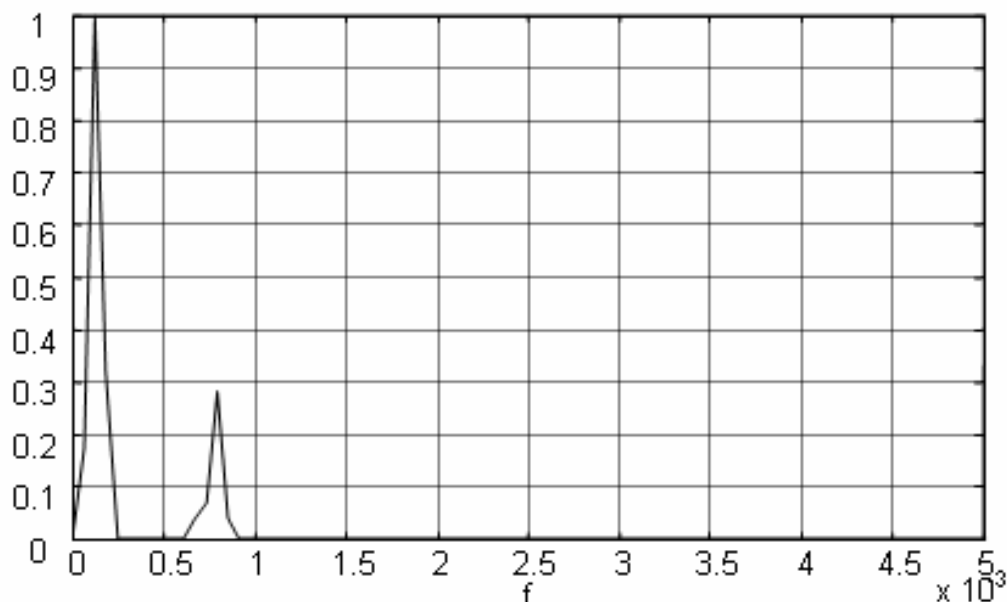


Рисунок 120 - Спектр колебаний массы m_{a1}

В оптической части спектра атомы перемещаются в противоположных направлениях.

Мы рассмотрели модельную, одномерную решетку. В трехмерных решетках эти колебания существенно сложнее, имеются три акустические и три оптические моды. В продольно поляризованных модах атомы смещаются в направлении, параллельном волновому вектору, а в поперечно-поляризованных модах – перпендикулярно. Имеются продольные акустические и продольно-оптические моды и соответственно поперечные акустические и поперечные оптические моды.

4.2.1 Проявление скейлинга и масштабной инвариантности

Следует различать самоподобие и масштабную инвариантность во временной области для сигнала, а также самоподобие на аттракторе. В общем, эти свойства не связаны. В качестве примера можно привести особенности динамики процесса человеческого дыхания⁵.

На рисунке 121 представлено изменение скорости воздуха на входе в человеческую ноздрю и на рисунке 122 показано, как выглядит реконструированный аттрактор для этого процесса. Зоны высокочастотных колебаний (выше значения 0,5 и ниже значения -0,8 образуют на аттракторе две зоны притяжения, на которые траектория попадает после движения по большим «виткам» аттрактора. Во времени (рисунок 121) эти зоны разнесены.

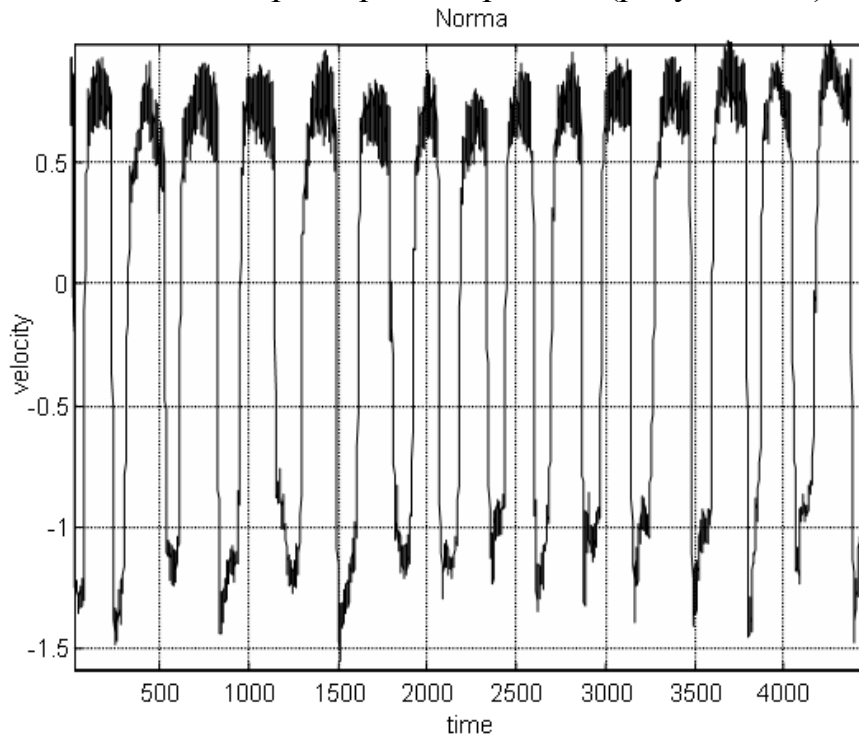


Рисунок 121 Изменение скорости воздуха на входе в ноздрю (здоровый человек)

На рисунке 123 представлено изменение во времени скорости воздуха на входе в ноздрю у больного человека (астма). На нем эти зоны притяжения почти отсутствуют, они выражены существенно слабее, и на аттракторе (рисунок 124) они практически слились в протяженную зону в центре, несмотря на то, что во времени они также разнесены.

⁵ Г. Н. Лукьянов, А. А. Рассадина, О. А. Дранишникова, Е. В. Скирмант, В. И. Усачев. Исследование тепло- и массообменных характеристик человеческого дыхания // Приборостроение № 5, 2005 г., с. 68-73

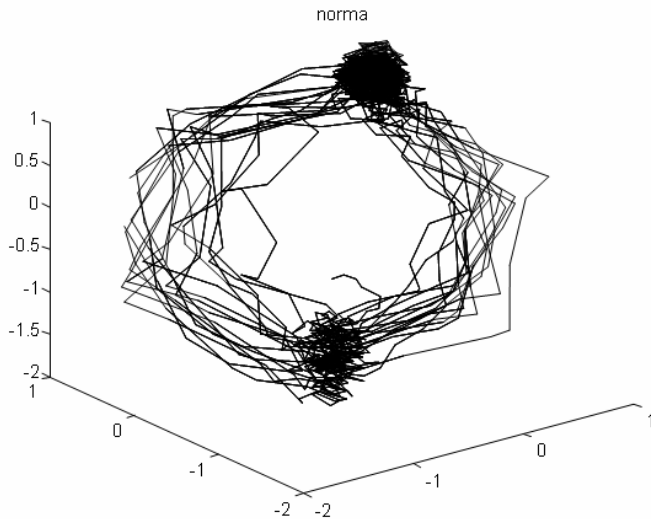


Рисунок 122 - Реконструированный аттрактор для скорости воздуха на входе в ноздрю

Области аттрактора с локальным самоподобием могут включать в себя значения процесса, отстоящие далеко друг от друга по оси времени. Этим процессы детерминированного хаоса отличаются от случайных сигналов. У случайного процесса самоподобие и масштабная инвариантность траектории возможны, когда этими свойствами обладает процесс.

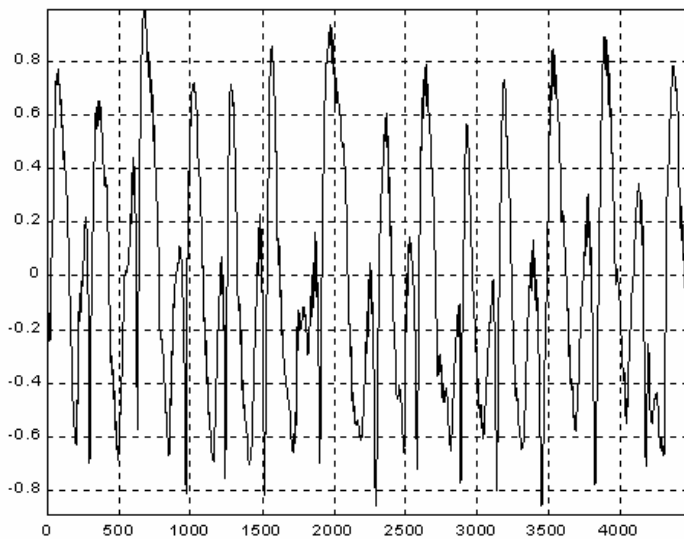


Рисунок 123 - Изменение во времени скорости воздуха на входе в ноздрю у больного человека (астма)

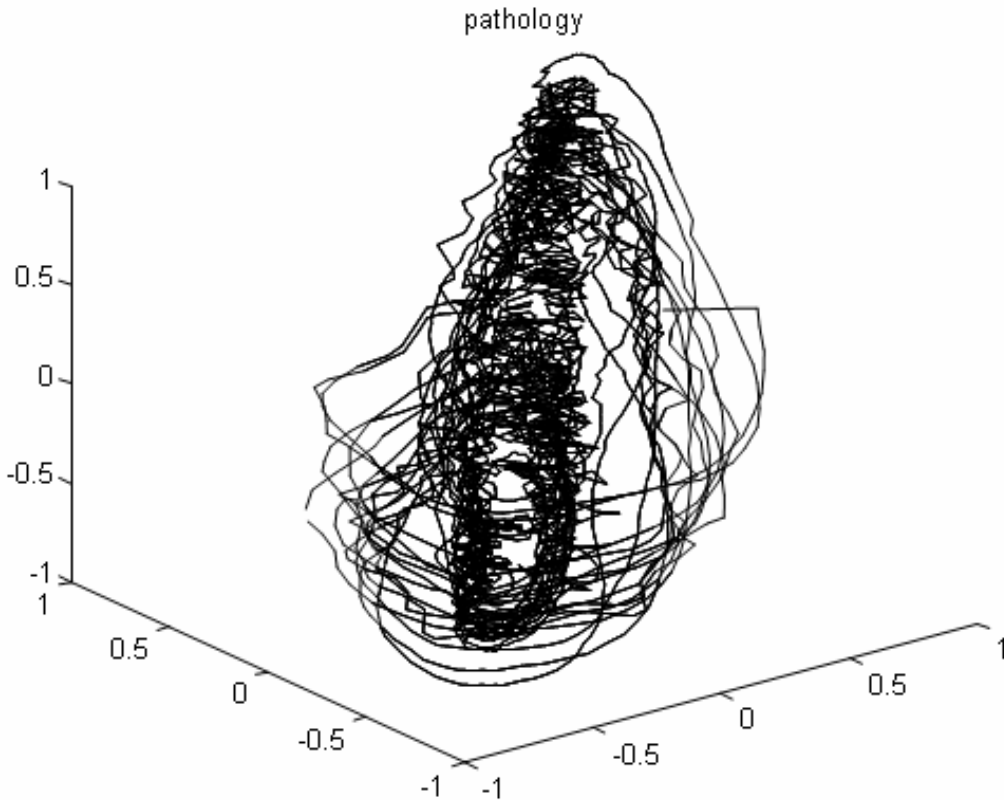


Рисунок 124 - Реконструированный аттрактор для процесса на рисунке 100

Можно выделить область масштабов, где проявляются эти свойства. Пусть это интервал времени $t_0 < t < T$. Тогда дисперсии приращения процесса на каком-то интервале времени τ обладают свойством скейлинга [14,15]:

$$\langle (X(t + \tau) - X(t))^2 \rangle \propto \tau^\beta, \quad (98)$$

где τ - какой-то постоянный интервал времени, β - показатель степени, $\beta > 1$.

Показатель β характеризует данный процесс и является для него константой.

С учетом рассмотренного выше показателя Херста это выражение можно записать, как:

$$\langle (X(0) - X(t))^2 \rangle \propto \tau^{2H} \quad (99)$$

Свойство масштабной инвариантности называют словом *скейлинг* (*scaling*), т.е. независимость каких-то свойств от масштаба, шкалы. В частности, это одно из основных свойств вышеописанных фракталов, к которым можно отнести турбулентное движение жидкости и газа, колебания уровня воды в водоемах, так называемые фрактальные агрегаты в процессе диффузии, специально создаваемые устройства (например, фрактальные антенны), пространственную структуру электромагнитного поля, образующегося после взаимодействия с фрактальной структурой вещества. При рассеивании электромагнитной волны на структуре, обладающей масштабной инвариантностью, волна также обладает таким свойством.

4.3 Фрактоны

Элементарные колебательные состояния или кванты колебаний узлов решетки твердого тела называют фононами. Когда решетка имеет фрактальную структуру, то ее квантованные колебательные состояния на фрактальной решетке называют фрактонами [14].

Можно ввести понятие массы фрактального агрегата M , для этого используется выражение, аналогичное выражению для емкостной размерности (101):

$$\frac{M}{m_0} = \left(\frac{R}{a_0} \right)^D, \quad (100)$$

где m_0 и a_0 - масса и размер его частиц, D - фрактальная размерность, которую иногда называют массовой, так как она определена через массу.

Можно определить и плотность фрактального агрегата ρ :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{a_0} \right)^{D-d}, \quad (101)$$

где ρ_0 - плотность его частиц, d - размерность пространства.

При плотной упаковке $D=d$.

Материалы с фрактальной структурой обладают так называемым фрактонным спектром колебаний, при котором спектральная плотность мощности имеет степенной вид.

Такие колебания принято называть **фрактонными** [14,15], и для них можно применить уравнение колебаний:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x_n}{dt^2} = K_{nm} (x_n - x_m), \quad (102)$$

где $K_{nm}=1$, если межузловые связи в решетке остаются неповрежденными

(иначе $K_{nm}=0$) и $\alpha = \frac{l_0 m}{T}$ - размерная постоянная со смыслом обратного квадрата резонансной частоты единичной связи. (рисунок 125) T - натяжение, [Па], $\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}$ [13].

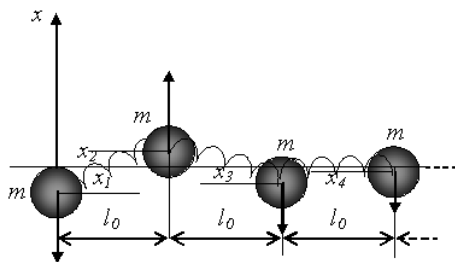


Рисунок 125 - Продольные и поперечные колебания узлов решетки

Здесь рассматриваются фрактонные колебания на узлах фрактальной решетки и x_i - координата смещения массы при поперечных колебаниях. Это получается, если все связи не повреждены, но это не так для фрактальных кластеров. Тем не менее, модель (102) широко используется для изучения структуры состояния фрактальных колебаний и позволяет установить подходящие качественно результаты.

Переход от фононных к фрактонным колебаниям происходит при частотах, превышающих некоторую частоту перехода (кроссовера) [14]. «В случае реальных фрактальных материалов имеется максимальный масштаб ξ , ограничивающий область фрактального поведения. На масштабах, превышающих ξ , и, следовательно, на низких частотах, не превышающих некоторую частоту кроссовера $\omega_c(\xi)$, имеет место обычный фононный спектр. На более высоких частотах происходит переход (кроссовер) к фрактонному спектру» [14].

Фрактонная размерность показывает роль фрактальной структуры решетки и связанных с ней фрактонных колебаний. Она определяется [14,15], как:

$$d_f = 2D / (2 + \delta), \quad (102)$$

$\delta > 0$ так называемый показатель аномальной диффузии, зависящий от коэффициента диффузии. Для регулярной решетки $\delta = 0$ и $d_f = 2$, т.е. вырождается в размерность обычной двумерной решетки [14,15].

Контрольные вопросы

Глава 1.

1. Что такое «динамическая система» и как можно описать ее эволюцию?
2. Что такое «детерминированная система»? Ее основные свойства.
3. Фазовая траектория каких систем является аттрактором?
4. Различие между консервативной и диссипативной системами.
5. Какими основными особенностями обладают хаотические системы?
6. Свойства странного аттрактора.
7. Роль обратной связи и итераций.
8. Характеристики динамической системы: размерность, энтропия Колмогорова, показатель Ляпунова, предсказуемость.
9. Что такое сечение Пуанкаре?

Глава 2.

1. Для чего применяют преобразование Фурье при анализе поведения динамических систем?
2. Что такое «стационарный и эргодический процесс»?
3. Когда необходимо применять вейвлет-анализ?
4. Основные окна, применяемые в вейвлет-анализе.
5. Как выявляются периодичности с помощью сечений Пуанкаре?
6. Как вычисляются корреляционная размерность, энтропия Колмогорова и показатели Ляпунова динамической системы из временных рядов?

7. Что такое показатель Херста?

Глава 3.

1. Основные особенности фрактальных объектов.
2. Как связана величина фрактальной размерности с величиной показателя Херста?
3. Как можно оценить некоторые свойства фрактальных объектов на основе вычисления размерности?

Глава 4. Что такое фононы и фрактоны?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азимов А.. Начало. Наука и жизнь, №3, 2004,
2. Lorenz, Edward Norton (1963). "Deterministic nonperiodic flow". *Journal of the Atmospheric Sciences*. 20 (2): 130–141.
3. Берже П., Помо И., Видаль К.. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности/ М.: Мир, 1991.
4. Grassberger P., Procaccia I.. Characterization of Strange Attractors. *Phys. Rev. Lett.* 50, 346
5. Шустер Г. Детерминированный Хаос: Введение. Пер. с нем. М.: Мир, 1988. 253 с.
6. Ruelle, D.; Takens, F.. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.* 20 (1971), no. 3, 167—192
7. Лукьянов Г.Н. Методы исследований систем с детерминированным хаосом [Тип: Учебник, учебное пособие, Год: 1997
8. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science Second Edition/ Springer-Verlag, 2004*
9. Мандельброт Б.. Фрактальная геометрия природы. 656 стр. Москва - Ижевск, 2002.
10. Введение в нанотехнологию / Марголин В. И., Жабрев В. А., Лукьянов Г. Н. [и др.]. — СПб. : Лань, 2012
11. Лукьянов Г.Н. , Успенская М.В. Количественное описание нелинейной динамики пористой акриловой тонкой пленки. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. Вып. 2(78), 2012, с. 84-88
12. Лукьянов Г.Н., Серов И.Н.. Обработка трехмерного изображения поверхности. *Поверхность*, 2004, N7, С.35-37
13. Лукьянов Г.Н., Серов И.Н., Марголин В.И., Потсар Н.А., Солтовская И.А., Фантиков В.С., Тупик В.А. Получение и исследование наноразмерных пленок меди с фрактальной структурой. *Микросистемная техника*, 2004, № 1, С. 31 – 37
14. Зосимов В.В., Лямшев Л.М.. Фракталы в волновых процессах. *УФН*, т. 165, № 4, 1995
15. . Alexander S., Orbach R. Density of states on fractals : « fractons ». *J. Physique - LETTRES* 43 (1982) L-625 - L-631

Лукьянов Геннадий Николаевич

Оценивание параметров динамических процессов

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49