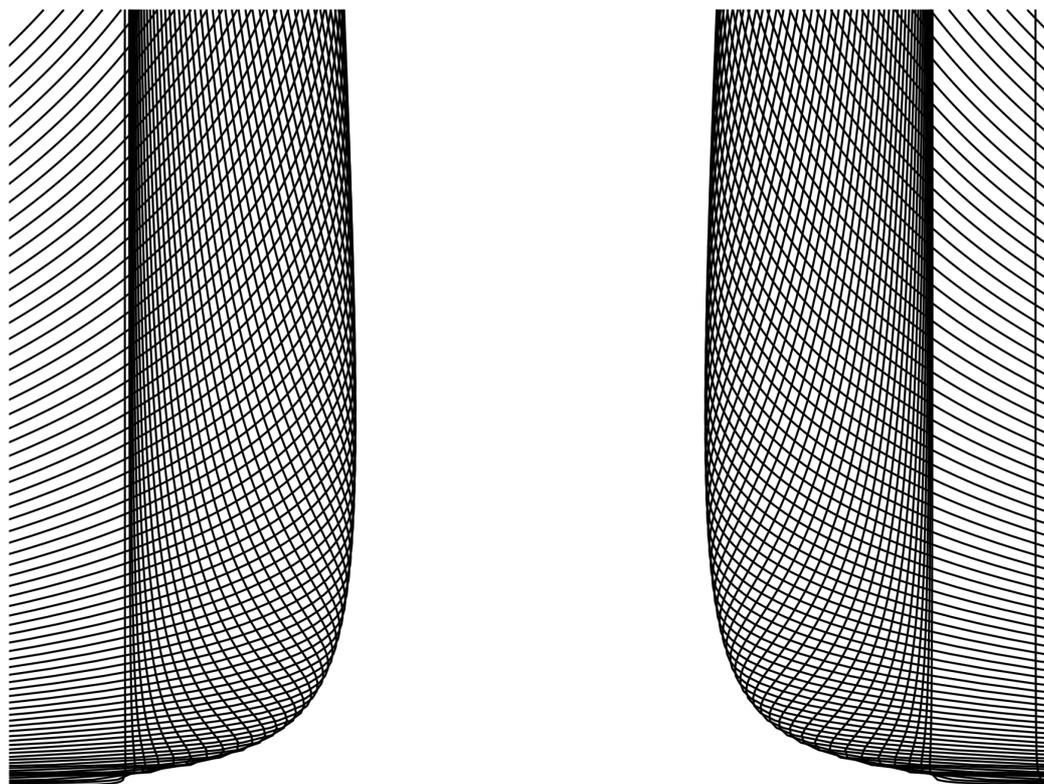


**А.В. Ковалев, Е.А. Викторов**

**ЛАЗЕРНАЯ ДИНАМИКА:  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**



**Санкт-Петербург  
2020**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.В. Ковалев, Е.А. Викторов**  
**ЛАЗЕРНАЯ ДИНАМИКА:**  
**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.04.05 Лазерная техника и лазерные технологии  
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных  
профессиональных образовательных программ высшего образования  
магистратуры,

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург  
2020

Ковалев А.В., Викторов Е.А., Лазерная динамика: Учебно-методическое пособие – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 39 с.

Рецензент(ы):

Алоджанц Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") факультета лазерной фотоники и оптоэлектроники, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие знакомит учащихся с предметом изучения дисциплины «Лазерная динамика», основными понятиями, методами и подходами, применяемыми при исследовании динамики лазерных систем. Пособие предназначено для студентов, проходящих курс «Лазерная динамика» и обучающихся по направлению «Лазерная техника и лазерные технологии» (образовательная программа «Лазерные технологии»), а также студентов, аспирантов и исследователей, область научных интересов которых связана с анализом и управлением динамическими процессами в лазерных системах.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020  
© Ковалев А.В., Викторов Е.А., 2020

## Содержание

Введение.....	4
1. Основные понятия лазерной динамики .....	4
1.1. Понятие динамической системы .....	4
1.2. Уравнения Лоренца-Хакена и динамические классы лазеров .....	6
1.3. Нормированные уравнения для лазера класса В .....	8
1.4. Линейный анализ устойчивости.....	9
1.5. Бифуркации стационарных состояний .....	12
1.6. Понятие предельного цикла и бифуркации предельных циклов.....	13
1.7. Упражнения к разделу 1 .....	15
2. Переходные процессы в лазерах .....	16
2.1. Запаздывание лазерной генерации при включении и релаксационные колебания.....	16
2.2. Спонтанная эмиссия и ее влияние на стационарные состояния лазера.....	18
2.3. Влияние спонтанной эмиссии на переходной процесс включения лазера.....	18
2.4. Упражнения к разделу 2.....	19
3. Фазовая динамика и синхронизация .....	20
3.1. Понятие синхронизации.....	20
3.2. Эффект захвата частоты.....	21
3.3. Фазовая синхронизация.....	21
3.4. Уравнение Адлера.....	22
3.5. Лазер с инжекцией оптического сигнала .....	23
3.5. Упражнения к разделу 3.....	24
4. Лазеры с модуляцией параметров.....	24
4.1. Лазер с насыщающимся поглотителем и пассивная модуляция добротности.....	24
4.2. Лазеры с обратной оптоэлектронной связью.....	26
4.3. Эффект синхронизации мод .....	28
4.4. Синхронизация мод в лазере класса А с насыщающимся поглотителем .....	30
4.5. Упражнения к разделу 4.....	33
Список источников .....	34

## Введение

Лазерная динамика – междисциплинарная наука, находящаяся на стыке лазерной физики, теории динамических систем, нелинейной оптики, а также теории колебаний и волн. Предметом исследования лазерной динамики являются процессы лазерной генерации, ее режимы и их устойчивость, способы управления процессами генерации и получения лазерного излучения с заданными временными и спектральными характеристиками.

В настоящем учебно-методическом пособии рассмотрены основные понятия теории динамических систем, линейного анализа устойчивости, рассмотрены виды лазерных систем и наблюдаемые динамические явления.

Структурно пособие состоит из четырех разделов. В первом разделе даются базовые понятия теории динамических систем, приводятся примеры адиабатического устранения переменных и перенормировки уравнений, линейного анализа стабильности, включая пример программного кода для анализа модели лазера класса В с использованием Wolfram Mathematica. Во втором разделе рассматриваются вопросы переходных процессов в лазерах и влияния спонтанной эмиссии на их динамические свойства. Третий раздел посвящен явлению синхронизации и фазового захвата. Четвертый раздел посвящен лазерам с модуляцией параметров, рассматривается модель лазера с насыщающимся поглотителем.

В конце каждого раздела приведены упражнения, предназначенные для закрепления материала и приобретения практических навыков анализа динамики лазерных систем.

## 1. Основные понятия лазерной динамики

### 1.1. Понятие динамической системы

В общем виде динамическую систему можно определить как совокупность следующих трех компонент [1, 2]:

1) пространство состояний  $S$ , элементы которого  $s \in S$  представляют собой возможные состояния, в которых может находиться система;

2) временное множество  $T$ , элементы которого  $t \in T$  представляют моменты времени, определяющие последовательность состояний;

3) закон эволюции системы  $R$ , позволяющий определить изменение во времени состояния системы  $s \in S$ , определенного в момент времени  $t \in T$  [2]:

$$R : S \times T \rightarrow S, \quad (1.1)$$

где знак  $\times$  соответствует прямому произведению.

Иными словами, динамическая система описывает временную эволюцию состояния. *Орбитой* или *траекторией* состояния  $s$  называется упорядоченная во

времени последовательность состояний, которая следует из состояния  $s$  по закону эволюции  $R$ .

Приведенное выше формальное определение является абстрактным и позволяет провести классификацию динамических систем по следующим признакам:

1) *вид пространства состояний  $S$* . Пространство состояний представляет собой совокупность координат, которые выбираются в соответствии с целями моделирования таким образом, чтобы описывать интересующие характеристики и свойства оригинальной системы. Например, в лазерной динамике пространство состояний может представлять двумерное пространство, каждая точка которого соответствует инверсии населенности активной среды и интенсивности электрического поля внутри резонатора лазера.

*Размерностью* пространства состояний  $S$  называется число координат, однозначно определяющих состояние  $s \in S$ . При этом система может иметь пространство состояний бесконечной размерности, например, в случае моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗА) оно является функциональным пространством.

Пространство состояний может быть *дискретным* или *непрерывным*. При этом дискретное пространство может иметь как конечное число состояний (например, грани шестигранного кубика), так и бесконечное (например, множество целых чисел). В случае непрерывного пространства состояний, если оно является гладким многообразием (то есть для каждой его точки существуют производные произвольного порядка), такое пространство называют *фазовым*.

2) *вид временного множества  $T$* . Время также может быть *дискретным* или *непрерывным*. В отдельных случаях возможно *гибридное* время, например, при моделировании динамики нелинейных резонаторов существуют две временные шкалы: дискретная соответствует номеру обхода резонатора, а непрерывная – времени в течение конкретного обхода [3].

Для дискретного времени орбитой состояния  $s_0$  будет являться дискретная последовательность состояний  $s_0, s_1, s_2, \dots$ , в случае непрерывного пространства состояний и непрерывного времени орбитой состояния  $s_0$  будет являться кривая  $s(t), t \geq 0, s(0) = s_0$ .

3) *вид правила эволюции состояния системы  $R$* . Эволюционное правило позволяет осуществлять предсказание состояний системы, следующих во времени за текущим состоянием. Данное правило может быть *детерминистическим*, если состояние системы зависит только от предшествующего состояния, или *стохастическим*, если это не так. Если

динамическая эволюция системы, задаваемая правилом  $R$ , в явном виде содержит зависимость от времени, такая динамическая система называется *неавтономной*. В противном случае она называется *автономной*. В ряде случаев с целью анализа неавтономная система может быть приведена к автономной. Это достигается посредством увеличения размерности пространства состояний системы за счет включения туда переменных, заменяющих явную зависимость от времени на неявную, и соответствующей модификации правила эволюции системы.

Например, рассмотрим неавтономную динамическую систему, описываемую системой  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (1.2)$$

где  $k = 1 \dots n$ ,  $x_k$  – независимые переменные,  $f_k$  – функции. В этом случае можно ввести еще одну независимую переменную, соответствующую времени  $t$ :

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1, \quad (1.3)$$

тогда исходная система (1.2) становится автономной.

Наиболее распространенными динамическими системами, изучаемыми в лазерной динамике, являются системы с непрерывным пространством состояний и непрерывным временем, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), ДУЧП, ДУЗА и алгебраическими уравнениями, а также их комбинациями. В ряде асимптотических приближений также возможно рассмотрение динамических систем с дискретным временем обхода резонатора, которые, например, описывают эволюцию интенсивности электрического поля на выходном зеркале.

## 1.2. Уравнения Лоренца-Хакена и динамические классы лазеров

В настоящем разделе приводится базовая система уравнений лазерной динамики, называемая также уравнениями Лоренца-Хакена, а также дается классификация лазеров на основе характерных временных масштабов отдельных процессов.

Вывод уравнений Лоренца-Хакена достаточно подробно представлен в [4, 5]. Данная модель представляет собой систему ОДУ, описывающую процессы лазерной генерации в одномодовом лазере с однородно уширенной линией, и записывается следующим образом [4, 6]:

$$\frac{dE}{d\tau} = \kappa [P - (1 + i\Delta)E], \quad (1.4)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \gamma_{\perp} [ED - (1 - i\Delta)P], \quad (1.5)$$

$$\frac{dD}{d\tau} = \gamma_{\parallel} \left[ A - D - (1/2)(E^*P + EP^*) \right], \quad (1.6)$$

где  $E$  – нормированная комплексная амплитуда огибающей электрического поля внутри резонатора;  $P$  – нормированная поляризация активной среды;  $D$  – нормированная инверсия населенности активной среды;  $\kappa$  – параметр, характеризующий время жизни фотона в резонаторе и, соответственно, скорость релаксации поля внутри него;  $\gamma_{\perp}$  – скорость релаксации поляризации среды (также называемая скоростью поперечной релаксации);  $\gamma_{\parallel}$  – скорость релаксации инверсии населенности среды (также называемая скоростью продольной релаксации);  $A$  – параметр накачки;  $\Delta$  – параметр, характеризующий частотную отстройку между частотой лазерного перехода и некоторой модой резонатора; знаком \* обозначено комплексное сопряжение;  $\tau$  – время.

В зависимости от соотношения характерных скоростей релаксации  $\kappa$ ,  $\gamma_{\perp}$  и  $\gamma_{\parallel}$  можно выделить динамические классы лазеров на основе адиабатического исключения переменных (Таблица 1.1) [6].

Таблица 1.1 – Динамические классы лазеров [6]

Класс	Соотношения между скоростями релаксации	Адиабатически исключаемые переменные	Примеры лазеров
A	$\gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel} \gg \kappa$	$P, D$	атомарные газовые лазеры (HeNe), лазеры на основе красителей, лазеры на основе квантовых каскадов
B	$\gamma_{\perp} \gg \kappa \gg \gamma_{\parallel}$	$P$	твердотельные лазеры (Nd:YAG, Yb:Er:glass), полупроводниковые лазеры, газовые лазеры (CO <sub>2</sub> )
C	$\gamma_{\perp} \sim \kappa$	–	атомарные (Xe) и молекулярные (NH <sub>3</sub> , HCOOH, CH <sub>3</sub> F <sub>2</sub> ) газовые лазеры среднего и дальнего ИК-диапазона
D	$\kappa \gg \gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$	$E$	пучковые мазеры на основе аммиака и водорода

В случае лазеров класса *B* из модели (1.4–1.6) возможно исключить переменную для поляризации, но не инверсии населенности. В лазерах данного класса переходные процессы являются преимущественно колебательными.

Для лазеров *класса С* адиабатическое исключение переменных является невозможным. В данном случае фазовое пространство имеет большую размерность, и динамика модели соответствует динамике известной модели Лоренца [7], характерной особенностью которой является существование странных аттракторов, а переходные процессы не обязательно ограничиваются релаксационными колебаниями.

Лазеры *класса D* являются наименее распространенным типом лазеров. Фактически адиабатическое исключение переменной, описывающей внутрирезонаторное поле, возможно для мазеров, то есть когерентных генераторов радиочастотного диапазона и других сред с большой инерцией.

### 1.3. Нормированные уравнения для лазера класса В

Наиболее распространенным и характерным случаем на практике являются лазеры класса В. Остановимся подробнее на адиабатическом исключении переменной для поляризации и дальнейшей нормировке системы уравнений.

Для простоты рассмотрения примем, что  $\Delta = 0$ , то есть частота лазерного перехода совпадает с частотой одной из мод резонатора. Перепишем уравнение (1.5) в следующем виде:

$$\gamma_{\perp}^{-1} \frac{dP}{d\tau} = ED - P, \quad (1.7)$$

Если  $\gamma_{\perp} \gg \kappa \gg \gamma_{\parallel}$ , можно адиабатически исключить производную  $P$ , то есть  $\gamma_{\perp}^{-1} dP/dt \rightarrow 0$ , тогда:

$$P = ED. \quad (1.8)$$

Подставляя данное выражение в исходную систему уравнений, получаем систему уравнений для лазера класса В:

$$\frac{dE}{d\tau} = \kappa E(D - 1), \quad (1.9)$$

$$\frac{dD}{d\tau} = \gamma_{\parallel} [A - D(1 + |E|^2)]. \quad (1.10)$$

Удобно перейти к уравнению для нормализованной интенсивности вместо комплексной амплитуды поля  $I \equiv |E|^2$ , а также перенормировать временную шкалу путем замены  $t \equiv 2\kappa\tau$ . В результате получается следующая система уравнений:

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1), \quad (1.11)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma [A - D(1 + I)]. \quad (1.12)$$

где  $\gamma \equiv \gamma_{\parallel} / (2\kappa)$  – отношение времени релаксации внутрирезонаторного поля и инверсии населенности.

Данная система уравнений идентична системе нормированных уравнений для среды с двумя энергетическими уровнями, участвующими в лазерной генерации [8].

#### 1.4. Линейный анализ устойчивости

Прямое решение дифференциальных уравнений на основе численных методов, реализованных в компьютерных программах, позволяет получить наглядное представление о поведении системы, однако получаемая картина зачастую зависит как от выбранных параметров, так и начальных условий. Поэтому полезным является применение аналитических методов, позволяющих делать выводы о существовании и устойчивости отдельных решений.

Одним из таких методов является линейный анализ устойчивости, позволяющий получать оценку реакции динамической системы на малое возмущение относительно некоторого решения. В настоящем разделе будет рассмотрен линейный анализ устойчивости стационарных решений системы уравнений лазера класса В (1.11)–(1.12), т.е. решений, которые не зависят от времени и для которых значения соответствующих производных равны нулю.

Таких решений два:

$$I_S = 0, D_S = A, \quad (1.13)$$

$$I_S = A - 1 > 0, D_S = 1, \quad (1.14)$$

где индекс  $S$  обозначает стационарное решение соответствующей переменной.

Решение (1.13) соответствует состоянию, когда лазерная генерация отсутствует, оно также называется тривиальным решением, либо состоянием laser off. Решение (1.14) соответствует состоянию лазерной генерации с ненулевой постоянной интенсивностью. Можно заметить, что  $I_S > 0$  выполняется в случае, когда  $A > 1$ , и значение параметра  $A = 1$  соответствует пороговому условию лазерной генерации.

Введем малое возмущение этих решений следующим образом:

$$I = I_S + \delta I, \quad (1.15)$$

$$D = D_S + \delta D, \quad (1.16)$$

где  $\delta I$  и  $\delta D$  – малые величины  $O(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр.

Подставляя (1.15)–(1.16) в исходную систему, получаем:

$$\frac{d(I_S + \delta I)}{dt} = (I_S + \delta I)(D_S + \delta D - 1), \quad (1.17)$$

$$\frac{d(D_s + \delta D)}{dt} = \gamma [A - (D_s + \delta D)(1 + I_s + \delta I)]. \quad (1.18)$$

По определению, производные  $I_s$  и  $D_s$  равны нулю. Тогда, пренебрегая членами степени больше единицы по  $\delta I$  и  $\delta D$ , получаем следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами (эта операция носит название *линеаризации*):

$$\frac{d\delta I}{dt} = \delta I(D_s - 1) + I_s \delta D, \quad (1.19)$$

$$\frac{d\delta D}{dt} = \gamma(-D_s \delta I - (1 + I_s) \delta D). \quad (1.20)$$

Фундаментальным свойством ЛОДУ является то, что решения таких уравнений являются линейной комбинацией экспонент вида  $\exp(\lambda_k t)$ , где  $k = 1 \dots M$ , и  $M$  равно числу уравнений системы (в данном случае  $M = 2$ ) [9].

Скорости роста экспонент  $\lambda_k$  (также называемые *собственными значениями* системы) определяют скорость роста малых возмущений стационарного состояния. Если  $\text{Re}(\lambda_k) < 0$  для всех  $k$ , решение системы является асимптотически или линейно устойчивым. Если хотя бы для одного  $k$  выполняется  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ , решение системы является неустойчивым. В случае если  $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ , система находится на границе устойчивости, и требуется дополнительный анализ с использованием других методов. Совокупность  $\lambda_k$  также называется *спектром* собственных значений системы.

Другим примечательным свойством ЛОДУ является то, что собственные значения являются корнями полиномиального уравнения степени  $M$ , так называемого *характеристического уравнения* системы, общий вид которого записывается как

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{J}$  – якобиан системы, вычисленный для стационарного состояния,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности. Для рассматриваемой системы характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^2 + \lambda(-D_s + \gamma(I_s + 1) + 1) + \gamma(-D_s + I_s + 1) = 0. \quad (1.22)$$

Для тривиального стационарного решения данное уравнение будет иметь следующие корни:

$$\lambda_1 = A - 1, \lambda_2 = -\gamma. \quad (1.23)$$

Нетрудно увидеть, что при значении параметра накачки  $A = 1$ , соответствующего пороговому значению, знак первого корня меняется с отрицательного ( $A < 1$ ) на положительный ( $A > 1$ ), что соответствует потере

устойчивости тривиального стационара при пересечении порога. Состояние лазерной генерации (1.14) всегда устойчиво, для него  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ .

```
(* уравнения, переписанные таким образом, чтобы все члены находились по \
одну сторону тождества *)
fIB = -(DD[t] - 1) II[t] + D[II[t], t];
fDB = -\[Gamma] (A - DD[t] (1 + II[t])) + Derivative[1][DD][t];

(* подстановка малого возмущения *)
sublin = {II[t] -> Is + \[Epsilon]*dI[t],
  DD[t] -> Ds + \[Epsilon]*dD[t],
  D[II[t], t] -> D[Is + \[Epsilon]*dI[t], t],
  D[DD[t], t] -> D[Ds + \[Epsilon]*dD[t], t]};
(* удаление членов степени выше 1 *)
fIBlin = Collect[
  Coefficient[Series[fIB /. sublin, {\[Epsilon], 0, 1}], \[Epsilon],
  1], dI[t]];
fDBlin = Collect[
  Coefficient[Series[fDB /. sublin, {\[Epsilon], 0, 1}], \[Epsilon],
  1], {\[Gamma], dD[t]};

(* вычисление якобиана *)
(* правая часть системы уравнений *)
rhs = {dI'[t] /. Solve[fIBlin == 0, dI'[t]][[1]],
  dD'[t] /. Solve[fDBlin == 0, dD'[t]][[1]]};
(* вектор переменных *)
vars = {dI[t], dD[t]};
jac = D[rhs, {vars}];
(* характеристическое уравнение в общем виде *)
char = Collect[
  Det[jac - IdentityMatrix[2]*\[Lambda]], {\[Lambda], \[Gamma]};

(* нахождение стационарных решений *)
substst = {II'[t] -> 0, DD'[t] -> 0, II[t] -> Is, DD[t] -> Ds};
ststB = FullSimplify[
  Solve[{0 == fIB /. substst, 0 == fDB /. substst}, {Is, Ds}]]

(* характеристическое уравнение для тривиального решения *)
char0 = char /. ststB[[2]];
(* корни *)
Solve[char0 == 0, \[Lambda]]

(* характеристическое уравнение для состояния лазерной генерации *)
char1 = char /. ststB[[1]];
(* корни *)
FullSimplify[Solve[char1 == 0, \[Lambda]], {\[Gamma] > 0, A > 0}]
```

Листинг 1.1 – Код программы для Wolfram Mathematica, выполняющий линейный анализ устойчивости модели лазера класса В

Таким образом, суть метода линейного анализа устойчивости состоит в том, чтобы ввести малое возмущение в стационарные решения динамической

системы, линеаризовать уравнения и найти корни соответствующего характеристического уравнения.

Весьма удобно проводить линейный анализ устойчивости с использованием математических пакетов, работающих с символьными вычислениями, например, Wolfram Mathematica. В листинге 1.1 приведен пример программы для поиска стационарных решений и линейного анализа устойчивости системы (1.11)–(1.12). Подобным образом может проводиться анализ и других динамических систем, описываемых ОДУ.

### 1.5. Бифуркации стационарных состояний

*Бифуркацией* (от латинского *bifurcus* – «раздвоенный») динамической системы называется качественное изменение характера ее динамики при изменении параметров [10, 11].

Значение параметров системы, при котором происходит бифуркация, называется *критическим значением* или *точкой бифуркации*. Качественное изменение характера динамики системы означает невозможность найти такую непрерывную обратимую функцию (называемую *гомеоморфизмом*), при помощи которой можно было бы осуществить преобразование орбиты динамической системы при значении параметров до точки бифуркации в орбиту динамической системы со значениями параметров после данной точки. Иными словами, качественное изменение динамики системы ассоциируется с изменением динамического режима, например, со стационарного на периодический.

Число параметров, изменение которых приводит к бифуркации, называется *корузмерностью* бифуркации. Рассмотрим бифуркации корузмерности 1, которые могут наблюдаться в автономных динамических системах с одним изменяемым скалярным параметром [10, 11].

1. Седлоузловая (saddle-node) бифуркация или бифуркация типа «складка» (fold). Данная бифуркация соответствует ситуации рождения пары стационарных состояний, одно из которых является неустойчивым. В точке седлоузловой бифуркации одно из собственных значений системы равно нулю, и оно принимает отрицательное значение для устойчивого стационарного состояния, рождающегося из седлоузловой точки, и положительное значение для неустойчивого. Примером системы, демонстрирующей седлоузловую бифуркацию при  $b = 0$ , является следующее ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = p + x^2. \quad (1.24)$$

2. Транскритическая (transcritical) бифуркация или бифуркация типа «обмен устойчивости». При данной бифуркации два стационарных состояния

пересекаются, и после точки пересечения меняются свойства их устойчивости. Примером является рассмотренная выше модель лазера класса В: после пересечения порогового значения  $A=1$  нулевое стационарное состояние (1.13) становится неустойчивым, при этом возникает устойчивое решение, соответствующее лазерной генерации с ненулевой интенсивностью (1.14).

3. Бифуркация типа «вилка» (pitchfork). В точке бифуркации устойчивое стационарное состояние теряет устойчивость, а также появляется пара других устойчивых стационарных состояний. Примером системы является ОДУ (точка бифуркации  $b=0$ ):

$$\frac{dx}{dt} = px + x^3, \quad (1.25)$$

4. Бифуркация Андронова-Хопфа (Andronov-Hopf, Hopf, а также Poincare-Andronov-Hopf). При данной бифуркации устойчивое стационарное состояние теряет устойчивость, и возникает предельный цикл (см. раздел 1.6), имеющий в точке рождения нулевую амплитуду. Указанный предельный цикл может быть как устойчивым (тогда бифуркация называется *суперкритической*), так и неустойчивым (*субкритическая* бифуркация).

В точке бифуркации Андронова-Хопфа существует пара комплексно-сопряженных собственных значений  $\lambda = \pm i\omega$ , где  $\omega$  – круговая частота рождающегося предельного цикла.

Примером системы, демонстрирующей суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа, является комплексное ОДУ (точка бифуркации  $b=0$ ):

$$\frac{dz}{dt} = (i + \alpha)z - z|z|^2. \quad (1.26)$$

Если изменить знак перед последним членом в данном уравнении, система будет в той же точке демонстрировать субкритическую бифуркацию.

Нахождение точек и границ бифуркаций в пространстве параметров является одной из наиболее распространенных задач лазерной динамики и имеет прикладное значение с точки зрения анализа возникновения динамических режимов лазерной генерации и изменения их свойств.

### 1.6. Понятие предельного цикла и бифуркации предельных циклов

Предельный цикл является частным случаем *периодической орбиты* автономной динамической системы, то есть решения  $\Gamma(t) = \Gamma(t + P)$ , которое повторяет себя во времени с некоторым периодом  $P$ .

Для определения понятия предельного цикла следует ввести понятия  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельных множеств для некоторой точки  $s_0$  в пространстве состояний динамической системы.

$\omega$ -предельным ( $\alpha$ -предельным) множеством называется такое множество точек  $s$ , к которому бесконечно близко приближается состояние системы при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) в процессе эволюции из начального состояния  $s_0$ .

Тогда предельным циклом называется такая периодическая орбита динамической системы, которая является  $\omega$ - или  $\alpha$ -предельным множеством для некоторой точки  $s_0$ , не лежащей на данной периодической орбите. Иными словами, если в процессе эволюции системы из состояния  $s_0$  при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$  система бесконечно близко приближается к некоторой периодической орбите, данная периодическая орбита будет являться предельным циклом.

Предельный цикл называется асимптотически устойчивым (неустойчивым), если он является  $\omega$ -предельным ( $\alpha$ -предельным) множеством.

Для анализа устойчивости предельных циклов используется теория Флоке, основы которой рассмотрены, например в [11]. Общая идея подхода близка к рассмотренному выше линейному анализу устойчивости стационарных состояний: к найденному предельному циклу добавляется малое возмущение, после чего происходит линеаризация системы. Затем определяются ее собственные значения, также называемые мультипликаторами Флоке, имеющими вид  $\mu_k = \exp(\lambda_k P)$ , где  $k = 1 \dots M$ , и  $M$  равно размерности (числу уравнений) системы, а множители  $\lambda_k$  также называются показателями Флоке.

Для вычисления мультипликаторов широко применяются численные методы, реализованные в программах AUTO [12], MATCONT [13] (для систем ОДУ) и DDE-BIFTOOL [14] (для систем ДУЗА).

На основе значений мультипликаторов делается вывод об устойчивости предельного цикла: если  $|\mu_k| \leq 1$ , то есть  $\mu_k$  находится внутри единичной окружности на комплексной плоскости, предельный цикл является асимптотически устойчивым, в противном случае предельный цикл неустойчив. Также для любого предельного цикла автономной динамической системы всегда существует по крайней мере один мультипликатор, равный единице.

Для предельных циклов также возможны бифуркации, приводящие к качественному изменению динамики системы. Можно выделить следующие бифуркации коразмерности 1, наблюдаемые в системах с одним изменяемым скалярным параметром [10, 11]:

1. Бифуркация типа «складка» (fold). Данная бифуркация схожа с седлоузловой бифуркацией стационарного состояния и соответствует ситуации рождения пары устойчивого и неустойчивого предельных циклов в точке бифуркации. Бифуркация такого типа соответствует ситуации пересечения действительным мультипликатором единичной окружности в точке  $\mu = 1$ .

2. Бифуркация удвоения периода (flip). Предельный цикл теряет устойчивость, и в точке бифуркации рождается новый предельный цикл с периодом, в два раза превышающим период исходного цикла. Бифуркация такого типа соответствует ситуации пересечения действительным мультипликатором единичной окружности в точке  $\mu = -1$ .

3. Бифуркация типа «тор» или Неймарка-Сакера (Neimark-Sacker), также называемая вторичной бифуркацией Хопфа (secondary Hopf). Предельный цикл теряет устойчивость, и в точке бифуркации рождается устойчивый (в случае суперкритической бифуркации) или неустойчивый (в случае субкритической бифуркации) инвариантный тор с изначально нулевой амплитудой.

В задачах лазерной динамики бифуркации такого рода, как правило, проявляются в появлении медленной амплитудной огибающей периодического режима работы лазера. Бифуркация такого типа соответствует ситуации пересечения единичной окружности парой комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\mu = \pm \exp(i\nu P)$ , где  $\nu$  – круговая частота медленной огибающей,  $\nu P \neq \pm 1, \pm 2, \dots$ , т.е. колебания являются квазипериодическими.

### 1.7. Упражнения к разделу 1

1. Используя метод адиабатического исключения переменной, вывести на основе системы уравнений (1.11)–(1.12) модель лазера динамического класса А.

2. Найти стационарные решения модели лазера класса А, найти собственные значения системы для данных решений, определить точки бифуркаций.

3. Перенормировать временную шкалу уравнений (1.4–1.6) таким образом, чтобы исключить из уравнений один из параметров, описывающих скорость релаксации (на выбор).

4. Найти стационарные решения полученной в упражнении 3 модели при  $\Delta = 0$ , найти собственные значения системы для данных решений.

5. Найти собственные значения системы (1.25), показать, что  $b = 0$  является точкой бифуркации.

6. Представить систему (1.26) в виде уравнений для амплитуды и фазы комплексной переменной  $z$ , найти собственные значения системы, показать, что  $b = 0$  является точкой бифуркации.

7. Найти собственные значения состояния лазерной генерации с ненулевой интенсивностью (1.14).

8. Провести анализ устойчивости модели лазера класса В (1.9–1.10), в которой присутствует уравнение для комплексной амплитуды поля, а не для

интенсивности. Как изменится характер бифуркации при пороговом значении параметра накачки?

## 2. Переходные процессы в лазерах

### 2.1. Запаздывание лазерной генерации при включении и релаксационные колебания

Эксперименты по исследованию временной задержки генерации лазера при включении предполагают, что накачка лазера быстро изменяется от значения ниже порога до значения выше порога, и позволяют исследовать динамическую реакцию лазера при различных включениях. В этом разделе мы кратко проанализируем реакцию стандартного полупроводникового лазера класса В на быстрое включение. Лазеры класса В описываются безразмерными скоростными уравнениями (1.11)–(1.12) для нормализованной интенсивности лазерного поля  $I$  и числа носителей  $D$  [8]:

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1), \quad (2.1)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma(A_+ - D(1 + I)), \quad (2.2)$$

$$D(0^+) = A_-, I(0^+) = I_0 \ll 1. \quad (2.3)$$

Дифференцирование осуществляется по отношению к нормализованному времени  $t \equiv t' / \tau_{ph}$  где  $t'$  есть физическое время, и  $\tau_{ph}$  обозначает время жизни фотона в резонаторе.  $\gamma \equiv \tau_{ph} \tau_c^{-1} \ll 1$ , где  $\tau_c$  обозначает время рекомбинации носителей в полупроводнике.  $A(0^-) = A_- < 1$  и  $A(0^+) = A_+ > 1$  – значения параметра накачки ниже и выше порога соответственно. При включении лазера интенсивность некоторое время остается малой, а потом начинает экспоненциально расти. Решая уравнение (2.2) при  $I = 0$ , мы получаем следующее значение инверсии населенности в процессе включения:

$$D = (A_- - A_+) \exp(-\gamma t) + A_+. \quad (2.4)$$

Затем, подставляя это значение в уравнение (2.1), мы получаем выражение для интенсивности:

$$I = I_0 \exp(\gamma^{-1} F(s)), \quad (2.5)$$

где  $s = \gamma t$  и  $F(s)$  представлено как

$$F(s) \equiv (A_+ - 1)s - (A_- - A_+)(\exp(-s) - 1). \quad (2.6)$$

Время включения лазера  $s_{on}$  определяется как момент выполнения условия  $I(s_{on}) = I_{ref}$ , при этом  $I_{ref}$  есть некоторое фиксированное ненулевое значение

интенсивности, т.е.  $F(s_{on}) = 0$ . Предполагая, что  $s \ll 1$  и  $A_+ \gg 1$ , выражение (2.6) упрощается:

$$F(s) = -(1 - A_-)s + \frac{A_+}{2}s^2, \quad (2.7)$$

и позволяет определить  $s_{on} \approx 2(1 - A_-)A_+^{-1}$  ( $t_{on} = s_{on}\gamma^{-1}$ ), что может быть переписано для физического времени как

$$t'_{on} \approx 2(1 - A_-)\tau_c A_+^{-1}. \quad (2.8)$$

Отметим, что  $t'_{on} \rightarrow 0$  при  $A_+ \rightarrow \infty$ , т.е. задержка включения лазера уменьшается при резком повышении накачки до больших значений.

Необходимо подчеркнуть, что выше рассмотрен простейший случай, когда (2.8) асимптотически справедливо при  $\varepsilon A_+ \ll 1$  и фиксированном значении  $\varepsilon \equiv \gamma \ln(I_{ref} / I_0)$ . Случаи  $\varepsilon A_+ = O(1)$  или  $\varepsilon A_+ \gg 1$  необходимо рассматривать отдельно. Главным выводом из приведенного анализа является исчезновение временной задержки включения лазера при резком повышении накачки до больших значений.

Анализ линейной устойчивости лазерных уравнений класса В (2.1–2.3) позволяет описывать медленно затухающие релаксационные колебания интенсивности излучения и определять их частоту  $\omega_{RO}$ , соответствующую мнимой части собственных значений, и скорость затухания  $\gamma_{RO}$ , соответствующую действительной части (см. также упражнение 7 пункта 1.7). В случае малых значений  $\gamma$  частота релаксационных колебаний определяется как

$$\omega_{RO} = \sqrt{\gamma I}, \quad (2.9)$$

а скорость затухания

$$\gamma_{RO} = \gamma(I + 1). \quad (2.10)$$

Как частота, так и скорость затухания определяются временными масштабами лазерных уравнений, а именно временем жизни фотона в резонаторе и временем рекомбинации носителей в полупроводнике (или временем жизни активной среды на верхнем лазерном уровне в лазерах класса В иного типа) а также интенсивностью излучения лазера.

Хотя линейный анализ предполагает малый уровень возмущения стационарного состояния, выражения для частоты колебаний и скорости их затухания справедливы для любого уровня возмущений [8].

## 2.2. Спонтанная эмиссия и ее влияние на стационарные состояния лазера

В модели лазера класса В, рассмотренной ранее, не учитывалась спонтанная эмиссия, которой нельзя пренебрегать при моделировании ряда лазерных систем, например, гелий-неонного лазера. В этом случае в уравнения динамики лазера можно добавить один дополнительный фотон [15]. В результате после нормировки система уравнений будет выглядеть следующим образом [8]:

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1) + bD, \quad (2.11)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma(A - D(1 + I)), \quad (2.12)$$

где  $b$  – малая величина, характеризующая спонтанную эмиссию и определяемая слабосигнальным усилением среды  $G$  и скоростью временем релаксации носителей  $\tau_c$  как  $b = 2G\tau_c$ .

В результате система будет иметь всего одно стационарное состояние, определяемое формулой

$$I = \frac{1}{2} \left[ A - 1 + \sqrt{(A - 1)^2 + 4bA} \right], \quad (2.13)$$

и не будет демонстрировать транскритическую бифуркацию вблизи порогового значения.

Анализируя функцию (2.12) для малых значений  $b$ , можно выделить три участка параметра  $A$  в зависимости от величины интенсивности:

1) интенсивность является величиной  $O(b)$ , если  $A < 1$ :  $I \approx bA / (1 - A)$ ;

2) интенсивность является величиной  $O(\sqrt{b})$  в окрестности  $A = 1$ :

$$I \approx \frac{1}{2} \left[ A - 1 + (A + 1)\sqrt{b} \right];$$

3) интенсивность является величиной  $O(1)$ , если  $A > 1$ :  $I \approx A - 1$ .

## 2.3. Влияние спонтанной эмиссии на переходной процесс включения лазера

Повторяя анализ, приведенный в пункте 2.1, можно получить следующее значение для интенсивности в процессе включения лазера:

$$I = I_0 \exp(\gamma^{-1}F(\gamma t)) + b \exp(\gamma^{-1}F(\gamma t))G(\gamma t), \quad (2.14)$$

где функция  $F(s)$  определяется уравнением (2.5), а функция  $G(s)$  следующим выражением:

$$G(s) \equiv \gamma^{-1} \int_0^s \exp(-\gamma^{-1}F(x))D(x)dx, \quad (2.15)$$

а  $D(x)$  определяется в соответствии с выражением (2.4).

Для малых значений параметра  $\gamma$  можно провести оценку данного интеграла с использованием метода Лапласа [16], идея которого заключается в разложении в ряд Тейлора показателя экспоненты и ее сомножителя в окрестности точки максимума экспоненты. Тогда получается следующая оценка данного интеграла:

$$G \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma^{-1}}{A_+ - 1}} \exp(-\gamma^{-1}F(s_c)), \quad (2.16)$$

где  $s_c \equiv \ln[(A_+ - A_-)/(A_+ - 1)]$  – критическое время, когда  $D(t)$  проходит точку бифуркации. В предположении, что величина  $b$  является малой порядка  $O(\exp(-\gamma^{-1}))$ , экспонента в выражении (2.16) резко возрастает в момент времени  $t_j < t_{on}$ , где  $t_{on}$  – время включения при отсутствии спонтанной эмиссии,  $t_j = s_j\gamma^{-1}$ , а  $s_j$  является корнем уравнения:

$$\ln b + \gamma^{-1}(F(s) - F(s_c)) = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая, что корень  $s = s_j$  близок по значению к  $s_c$ , можно получить следующее приближенное выражение для времени включения:

$$s_j \approx s_c + \sqrt{\frac{-2\gamma \ln b}{A_+ - 1}}. \quad (2.18)$$

Данное выражение показывает, что задержка включения лазера линейно увеличивается, если коэффициент спонтанной эмиссии линейно уменьшается. Такая экспоненциальная чувствительность времени включения к шуму спонтанной эмиссии может быть использована для измерения уровня квантовых флуктуаций в выключенном (laser off) состоянии лазера [17].

## 2.4. Упражнения к разделу 2

1. Провести линейный анализ устойчивости модели лазера класса В, учитывающего спонтанное излучение, определить частоту и демпфирование релаксационных колебаний.

2. Определить асимптотические значения частоты и скорости затухания релаксационных колебаний для трех участков параметра  $A$ , описанных в пункте 2.2.

3. Провести численное интегрирование модели (2.1–2.3) с моделированием процесса включения лазера при изменении параметра накачки от  $A_+ = 0.75$  к  $A_- = 1.25$  при следующих значениях параметра  $\gamma$ : а) 0.25; б) 0.1; в) 0.01. Оценить

время включения и сравнить его с асимптотической оценкой, даваемой выражением (2.8).

4. Провести численное интегрирование модели (2.11–2.12) с моделированием процесса включения лазера при изменении параметра накачки от  $A_+ = 0.75$  к  $A_- = 1.25$  при значении параметра  $\gamma = 0.1$  и следующих значениях параметр  $b$ : а) 0.1; б) 0.01; в) 0.0001. Оценить время включения и сравнить его с асимптотической оценкой, даваемой выражением (2.18).

### **3. Фазовая динамика и синхронизация**

#### **3.1. Понятие синхронизации**

Во многих системах автономные осцилляторы способны синхронизироваться друг с другом при условии существования между ними достаточно сильной связи. Явления синхронизации [18] весьма распространены в природе и встречаются как в простых механических конструкциях, так и в сложных физических, химических и биологических процессах [19]. Явление синхронизации было впервые обнаружено Кристианом Гюйгенсом в 1665 году при рассмотрении двух маятников, висящих на одной стене [20]. Началом систематических исследований явления синхронизации можно, однако, считать публикацию Рэля о синхронизации двух камертонов в зависимости от частоты и силы связи [21]. Появление радиосвязи привело к активному исследованию процессов синхронизации в электрических цепях. Было обнаружено, что осциллятор должен содержать нелинейный элемент для стабилизации амплитуды его колебаний. основополагающими публикациями, заложившими фундамент понимания процессов синхронизации, являются работы Ван дер Поля [22] и Адлера [23]. Явление синхронизации используется как в многочисленных простых электронных схемах с фазовой автоподстройкой, так и в сложных системах с большим количеством осцилляторов, таких как стимуляция клеток сердца, или нейронов в коре головного мозга.

Динамические свойства связанных осцилляторов весьма разнообразны, но их изучение в природных системах ограничено скромными возможностями контроля внешнего воздействия. В отличие от многих других динамических систем, лазеры допускают относительно простое описание со сравнительно небольшим числом экспериментально контролируемых параметров, что позволяет систематическое изучение динамических свойств лазера в процессе синхронизации. Явление синхронизации двух гелий-неоновых лазерных генераторов было продемонстрировано вскоре после изобретения лазера [24].

### 3.2. Эффект захвата частоты

Современная концепция явления синхронизации подразумевает взаимное изменение динамики колеблющихся объектов (осцилляторов) в результате их слабого взаимодействия, которое возмущает состояния осцилляторов. Взаимодействие не обязательно должно быть симметричным, асимметричная связь между осцилляторами не только возможна, но является весьма распространенной. Предельным случаем асимметричного взаимодействия является однонаправленная связь. В этом случае один из осцилляторов (часто называемым *master oscillator*) воздействует на другой осциллятор (*slave oscillator*)), но не наоборот.

Важным примером синхронизации является эффект захвата частоты. Несвязанные осцилляторы могут иметь некоторое различие в собственных частотах, т.е. колебаться с различными собственными круговыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Это различие называется расстройкой частоты колебаний между двумя осцилляторами и представляется как  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . При условии, что расстройка частот осцилляторов достаточно мала, и наличии взаимодействия между ними, оба осциллятора вынужденно колеблются на одной и той же частоте, т.е. происходит захват частоты колебаний одного осциллятора частотой колебаний другого осциллятора. Эффект захвата частоты возможен лишь при конечной величине частотной расстройки.

В случае однонаправленного взаимодействия частота управляемого осциллятора (*slave oscillator*) синхронизируется с частотой *master oscillator*. Размер диапазона расстройки частот, при котором возможен захват частоты, зависит от силы связи  $k$  между осцилляторами. Область  $(k, \Delta\omega)$ , в которой происходит захват частоты, называется областью синхронизации или языком Арнольда [18]. Если частотная расстройка велика, могут возникать области синхронизации более высокого порядка, в которых соотношение между частотами является рациональным числом, т.е.  $\omega_1 / \omega_2 = q / p \in \mathbb{Q}$ . В этом случае говорят о синхронизации порядка  $p:q$ .

### 3.3. Фазовая синхронизация

Фаза сигнала также играет важную роль в качестве источника информации о динамике системы и используется для параметризации предельного цикла (который является аттрактором в фазовом пространстве колебательной системы). Фазовая синхронизация происходит, когда разница фаз двух осцилляторов постоянна. Когда разность фаз между осцилляторами равна нулю, то происходит

синфазная синхронизация. В случае отличия фаз двух осцилляторов синхронизация называется антифазной.

Для случая полупроводниковых лазеров с инъекцией внешнего оптического сигнала частота и фаза управляемого лазера (*slave laser, SL*) могут быть синхронизованы с управляющим лазером (*master laser, ML*) таким образом, что фаза SL постоянна относительно фазы ML.

### 3.4. Уравнение Адлера

В 1946 году [23] Адлер продемонстрировал возможность синхронизации электрических осцилляторов и предложил математическую модель для описания наблюдаемых явлений. Модель Адлера представляет собой механическую аналогию описания движения затухающего маятника во вращающемся цилиндре, заполненном вязкой жидкостью. В этой модели фаза маятника  $\varphi(t)$  описывается простым уравнением:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin \varphi + A, \quad (3.1)$$

где  $\varphi(t)$  – угол между маятником и вертикальной линией, проходящей через цилиндр, а  $A$  – угловая скорость цилиндра.

При низких скоростях вращения цилиндра система имеет две точки равновесия, устойчивое равновесие при  $\varphi_s = \arcsin A$  и неустойчивое равновесие при  $\varphi_u = \pi - \arcsin A$ . Если скорость вращения цилиндра  $A$  увеличивается, то два положения равновесия начинают сближаться и приближаться к значению  $\varphi = \pi/2$ . Когда  $A$  достигает критического значения  $A_{cr} = 1$ , два положения равновесия сливаются и исчезают. При этой скорости вращения маятник начинает двигаться вместе с цилиндром, и его угловая скорость приближается к скорости вращения цилиндра.

Описываемая колебательная система находится в режиме захвата частоты, когда присутствует устойчивое равновесие, т.е. когда  $A$  находится в пределах диапазона захвата  $-A_{cr} < A < A_{cr}$ . При этом наблюдаются два типа перехода в устойчивое равновесие  $\varphi_s$  при возмущении системы. Если отклонение мало, то система возвращается прямо к устойчивой точке  $\varphi_s$ , но если отклонение достаточно велико и выходит за пределы значения  $\varphi_u$ , то система осуществляет  $2\pi$  вращение в фазовом пространстве, прежде чем вернуться в устойчивую точку  $\varphi_s$ . Если значение  $A$  лежит вне указанного диапазона, то режим фазового захвата не осуществляется.

### 3.5. Лазер с инъекцией оптического сигнала

Полупроводниковые лазеры являются популярным оптическим источником для многих приложений. Это обусловлено их высокой эффективностью, простоте модуляции и небольшими размерами. Однако для некоторых приложений необходим низкий уровень интенсивности шума, который определяется собственными релаксационными колебаниями лазера. Явление релаксационных колебаний описано в пункте 2.1.

Под воздействием оптической инъекции лазеры класса А и В демонстрируют устойчивую динамику. Для лазеров класса В характерно большое количество разнообразных устойчивых пульсирующих режимов генерации интенсивности [25]. Лазеры класса А, не обладающие свойствами релаксационных колебаний, гораздо более стабильны [26].

Для низких уровней амплитуды инжектируемого оптического сигнала динамика лазера хорошо аппроксимируется моделью Адлера, которая была описана выше. С выводом модели Адлера из системы лазерных уравнений с оптической инъекцией можно ознакомиться в [8]. Модель Адлера, в случае полупроводникового лазера с оптической инъекцией, представляет собой одномерное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta - \kappa\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\varphi + \varphi_0), \quad (3.2)$$

где  $\varphi$  – фаза SL относительно фазы ML,  $\Delta$  есть разница угловых частот ML и SL,  $\kappa$  соответствует нормированной амплитуде инжектируемого оптического сигнала,  $\alpha$  – коэффициент уширения линии генерации полупроводникового лазера (также называемый  $\alpha$ -фактором), а  $\varphi_0 = \arctan \alpha$ . Уравнение можно переписать в стандартную форму модели Адлера как

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Delta - \eta \sin \psi, \quad (3.3)$$

определив  $\psi = \varphi + \varphi_0$  и  $\eta = \kappa\sqrt{1+\alpha^2}$ .

Если  $|\Delta| < \kappa\sqrt{1+\alpha^2}$ , то SL может быть синхронизирован с ML таким образом, что его частота равна частоте ML, а относительная фаза постоянна. Граница области синхронизации определяется как  $|\Delta| = \kappa\sqrt{1+\alpha^2}$  и является точкой бифуркации, в которой происходит столкновение устойчивого (узел) и неустойчивого (седло) состояний равновесия излучения лазера.

Эффект синхронизации (захвата частоты) соответствует нахождению лазера в состоянии устойчивого равновесия, характеризуемом постоянной интенсивностью выходного излучения. Вне области синхронизации фаза  $\varphi$  не

ограничена и вдали от границы области синхронизации соответствует частоте биения двух лазеров.

В пределах области синхронизации и в присутствии шума фазовые колебания вокруг устойчивого равновесия могут демонстрировать вращения фазы на  $2\pi$ . Эффект вращения фазы также проявляется в возникновении пульсаций интенсивности лазерного излучения большой амплитуды.

### 3.5. Упражнения к разделу 3

1. Провести линейный анализ устойчивости уравнения Адлера (3.1).

2. Найти стационарные состояния модифицированного уравнения Адлера, учитывающего влияние инерции:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + d \frac{d\varphi}{dt} + k \sin \varphi = \Delta, \quad (3.4)$$

где  $\Delta$  – разность между частотами связанных осцилляторов;  $k$  – параметр, отвечающий за силу взаимодействия осцилляторов;  $d$  – коэффициент затухания колебаний управляемого осциллятора.

3. Провести линейный анализ устойчивости стационарных состояний модели (3.4). Определить границы синхронизации осцилляторов в зависимости от величины коэффициента затухания.

## 4. Лазеры с модуляцией параметров

### 4.1. Лазер с насыщающимся поглотителем и пассивная модуляция добротности

Пассивная модуляция добротности – способ получения высокоинтенсивных импульсов при помощи управлений добротностью (потерями) внутри резонатора с использованием нелинейного элемента, например, насыщающегося поглотителя, который практически непрозрачен для излучения малой интенсивности и пропускает излучение высокой интенсивности.

Можно модифицировать уравнения для лазера класса В, рассмотренные в разделах 1 и 2 для учета насыщающегося поглотителя, помещенного в резонатор. Получаемые в результате уравнения имеют вид [8]:

$$\frac{dI}{dt} = I(D + \bar{D} - 1), \quad (4.1)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma(A - D(1 + I)), \quad (4.2)$$

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = \bar{\gamma}(-\bar{A} - \bar{D}(1 + aI)), \quad (4.3)$$

где  $\bar{D}$  – зависящие от времени потери, вызываемые насыщающимся поглотителем;  $\bar{A}$  – слабосигнальное поглощение, приведенное к пороговому значению усиления лазера без поглотителя;  $\bar{\gamma}$  – скорость релаксации населенности поглотителя;  $a$  – отношение интенсивности насыщения активной среды к интенсивности насыщения поглотителя.

Большее значение параметра  $a$  означает, что поглотитель просветляется при меньших интенсивностях, чем активная среда, и соответствует ситуации сильного поглощения. В противном случае поглотитель характеризуется более слабым поглощением интенсивности.

Модель (4.1–4.3) обладает двумя стационарными решениями:

1) состояние отсутствующей лазерной генерации (laser off):

$$I = D - A = \bar{D} + \bar{A} = 0; \quad (4.4)$$

2) состояние лазерной генерации с ненулевой интенсивностью, которое может быть записано в параметрической форме:

$$A = (1 + I) \left( 1 + \frac{\bar{A}}{1 + aI} \right), \quad (4.5)$$

$$D = \frac{A}{1 + I}, \quad (4.6)$$

$$\bar{D} = -\frac{\bar{A}}{1 + aI}. \quad (4.7)$$

Пороговое условие в случае данной модели выражается как:

$$A_{th} \equiv 1 + \bar{A}. \quad (4.8)$$

В зависимости от значений параметров  $\bar{A}$  и  $a$  возможны два случая возникновения состояния лазерной генерации:

1) суперкритическая бифуркация: состояние генерации с ненулевой интенсивностью рождается из точки порогового значения  $A_{th}$ , если  $a < (1 + \bar{A}) / \bar{A}$ ;

2) субкритическая бифуркация: состояние генерации с ненулевой интенсивностью рождается из предельной точки, находящейся до порогового значения  $A_{th}$ , если  $a > (1 + \bar{A}) / \bar{A}$ .

В случае субкритической бифуркации возможна бистабильность между состоянием laser off и состоянием с ненулевой интенсивности, которое возникает из седлоузловой точки. Можно определить выражение для нахождения данной точки, выполнив подстановку (4.7–4.8) в (4.6) и вычисляя значение производной  $dA/dI$ :

$$\frac{dA}{dI} = 1 + \frac{\bar{A}}{1 + aI} - \frac{(1 + I)a\bar{A}}{(1 + aI)^2}. \quad (4.9)$$

Седлоузловая точка соответствует условию  $dA/dI = 0$ , что дает следующее уравнение:

$$a^2 I^2 + 2aI + \bar{A}(1-a) + 1 = 0. \quad (4.10)$$

Решая данное уравнение относительно интенсивности, получаем следующее значение, определяющее положение седлоузловой точки:

$$I_{LP} = a^{-1}(-1 + \sqrt{\bar{A}(a-1)}). \quad (4.11)$$

Подстановка данного выражения в уравнение (4.5) позволяет найти соответствующее значение параметра накачки. Для анализа возникновения режима модуляции добротности и бистабильности данной системы следует воспользоваться линейным анализом устойчивости (см. упражнения).

## 4.2. Лазеры с обратной оптоэлектронной связью

Обратная связь широко используется для стабилизации параметров лазеров, таких как мощность излучения и длина волны генерации. В ряде случаев использование обратной связи позволяет расширить диапазон динамических режимов работы лазера, что может быть использовано для управляемой генерации периодических сигналов оптического и радиочастотного диапазона [27], создания датчиков отклонения профиля с нанометрическим разрешением [28] и оптической обработки данных [29].

Рассмотрим лазер с обратной оптоэлектронной связью, в которой регистрируется сигнал интенсивности лазера, после чего он усиливается и модулирует параметр накачки. Поскольку цепь обратной связи обладает конечной длиной, сигнал модуляции будет обладать запаздыванием. В реальных лазерных системах ввиду ограничений, накладываемых электронной частью контура обратной связи, также осуществляется фильтрация высоких частот лазера, то есть происходит подавление низкочастотной составляющей сигнала.

Дополним уравнения для лазера класса В (1.11–1.12) уравнением для фильтра высоких частот сигнала интенсивности и введем член, описывающий запаздывающую обратную связь. В результате получается следующая система ДУЗА:

$$\frac{dI}{dt} = I(D-1), \quad (4.12)$$

$$\frac{dI_F}{dt} = -\tau_F^{-1} I_F(t) + \frac{dI}{dt}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma [A + \eta I_F(t-\tau) - D(1+I)], \quad (4.14)$$

где  $\tau_F$  – величина, обратная частоте среза фильтра,  $\eta$  – сила обратной связи;  $\tau$  – время запаздывания обратной связи.

Для удобства рассмотрения приведем уравнения к виду, который применяется в задачах моделирования динамики полупроводниковых лазеров [8, 30]:

$$\frac{dJ}{dt} = 2NJ, \quad (4.15)$$

$$\frac{dJ_F}{dt} = -\tau_F^{-1}J_F(t) + \frac{dJ}{dt}, \quad (4.16)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma[P + \eta J_F(t - \tau) - N - (1 + 2N)J], \quad (4.17)$$

где  $J = I/2$ ,  $J_F = I_F/2$ ,  $N = (D - 1)/2$ ,  $P = (A - 1)/2$ .

Данная система имеет два стационарных состояния:

1) состояние отсутствия лазерной генерации, когда интенсивность лазерного излучения равна нулю:  $J_S = 0$ ,  $J_{F,S} = 0$ ,  $N_S = P$ , которое устойчиво при  $P < 0$ ;

2) состояние генерации с ненулевой интенсивностью:  $J_S = P$ ,  $J_{F,S} = 0$ ,  $N_S = 0$ .

Для анализа устойчивости второго стационарного состояния также, как и для моделей на основе ОДУ, можно воспользоваться линейным анализом устойчивости, который в случае ДУЗА с одним временем запаздывания  $\tau$  состоит в отыскании собственных значений, определяемых корнями следующего уравнения:

$$\det(\mathbf{J} + \mathbf{J}_\tau \exp(-\tau\lambda) - \lambda\mathbf{I}) = 0, \quad (4.18)$$

где  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{J}_\tau$ ) – якобиан системы по отношению к функциям аргумента  $t$  ( $t - \tau$ ), вычисленный для стационарного состояния.

Существенным отличием от характеристического уравнения для ОДУ является наличие экспоненциального члена, что с одной стороны приводит к трансцендентности уравнения, то есть невозможности выразить его корни в элементарных функциях, а с другой – к бесконечному числу собственных значений. Численный анализ устойчивости моделей на основе ДУЗА возможен с использованием математического пакета DDE-BIFTOOL [14].

Характеристическое уравнение для модели (4.15–4.17) имеет следующий вид:

$$(1 + \tau_F\lambda) \left\{ \lambda^2 + \gamma(\lambda + 2P(1 + \lambda)) \right\} - 2\gamma\eta\tau_F P \lambda e^{-\tau\lambda} = 0. \quad (4.19)$$

Выполняя подстановку  $\lambda = \pm i\omega_H$ , можно найти выражения для границ бифуркаций Андронова-Хопфа данной системы. В этом случае получается система трансцендентных уравнений, численное решение которых значительно проще по сравнению с уравнением (4.19):

$$\arctan \frac{(1 + 2P(1 + \tau_F))\gamma\omega_H - \tau_F\omega_H^3}{(1 + \gamma\tau_F(1 + 2P))\omega_H^2 - 2\gamma P} = \omega_H\tau + \frac{\pi}{2} - \pi M, \quad (4.20)$$

$$\eta_H = \frac{\gamma + 2\gamma P(1 + \tau_F) - \tau_F\omega_H^2}{2\gamma\tau_F P \cos \omega_H\tau}, \quad (4.21)$$

где  $M$  – неотрицательное целое число, которое является нечетным для положительной обратной связи и четным для отрицательной,  $\eta_H$  – значение параметра обратной связи, при котором происходит бифуркация.

Как следует из уравнений (4.20–4.21), запаздывающая оптоэлектронная связь приводит к появлению периодических осцилляций с дискретными частотами, причем знак обратной связи отвечает за асимметрию четности частоты данных осцилляций. На рисунке 4.1 представлены границы бифуркаций для трех разных значений параметра  $\gamma$ . Из данного рисунка можно сделать вывод, что число возникающих периодических режимов находится в прямой зависимости от частоты релаксационных колебаний. Также, для меньших значений параметра  $\gamma$  бифуркации наблюдаются для меньших значений параметра  $\eta$ .

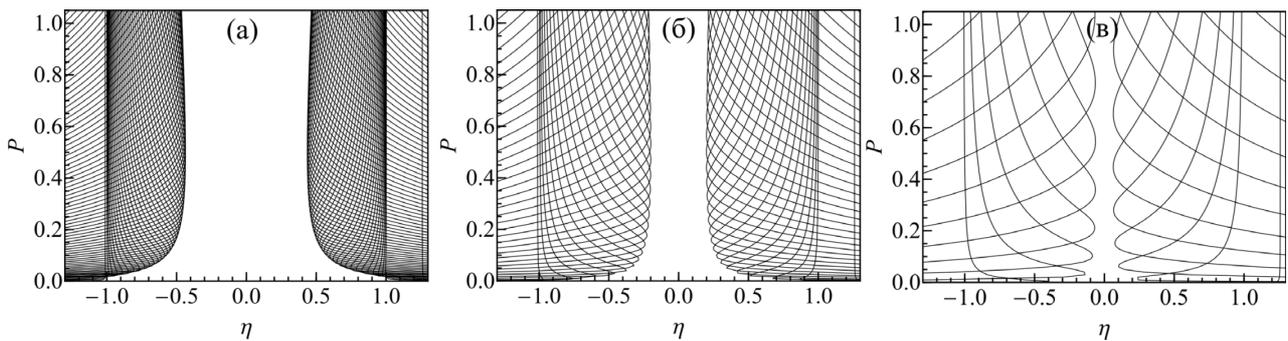


Рисунок 4.1 – Границы бифуркаций Андронова-Хопфа в плоскости параметров  $(\eta, P)$  для модели лазера с оптоэлектронной обратной связью (4.15–4.17) для разных значений  $\gamma$ : (а) 0.5; (б) 0.1; (в) 0.01. Другие параметры:  $\tau = 1000$ ,  $\tau_F = 2000$ .

### 4.3. Эффект синхронизации мод

Режимом синхронизации мод называется такой режим работы лазера, когда фазы генерирующихся продольных мод связаны каким-либо определенным соотношением [15]. В этом случае генерация лазера будет осуществляться с

частотой повторения, определяемой оптической длиной резонатора, а оптический спектр будет состоять из набора эквидистантных частот. Интерференция мод лазера, связанных фазовыми соотношениями, приводит к тому, что энергия излучения всех мод может сосредотачиваться в одном или нескольких импульсах, обеспечивая высокую пиковую мощность выходного излучения лазера. Корреляция фаз мод лазера приводит к тому, что сигнал биений мод лазера, регистрируемых с использованием фотоприемника, будет обладать низким уровнем шумов.

Различают синхронизацию мод [31]:

1) в режиме основной частоты: в этом случае частота следования импульсов лазера совпадает с обратным временем обхода резонатора. При этом выполняется соотношение между фазами соседних по частоте мод  $\varphi_l - \varphi_{l+1} = \varphi$ , где  $\varphi$  – некая константа;

2) в режиме гармоник: в данном случае частота повторения последовательности импульсов больше обратного времени обхода резонатора. При этом соотношение  $\varphi_l - \varphi_{l+1} = \varphi$  не выполняется. Для случаев, когда частота следования импульсов в два и три раза больше обратного времени обхода резонатора, выполняются соотношения для фаз  $\varphi_{l-1} - \varphi_l = \varphi_l - \varphi_{l+1} + \pi$  и  $\varphi_{l-1} - \varphi_l = \varphi_l - \varphi_{l+1}$  соответственно.

Можно выделить два класса способов синхронизации мод:

1) активная синхронизация мод, когда синхронизирующий элемент управляется или модулируется внешним источником. В качестве синхронизирующих элементов используются амплитудные и фазовые модуляторы внутрирезонаторного поля;

2) пассивная синхронизация мод, когда синхронизация достигается при помощи некоторого нелинейного оптического эффекта. В качестве нелинейного элемента могут использоваться быстро насыщающиеся поглотители, среды с квадратичной и кубической (эффект Керра) нелинейностями.

Для анализа режима синхронизации мод в основном применяются следующие типы моделей:

1) модели на основе ДУЧП (модель Хауса, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Гинзбурга-Ландау, уравнение Луджиато-Лефевра и др.) [32, 33];

2) модели на основе ДУЗА [34].

Общим для обоих типов является бесконечная размерность их пространства состояний, поскольку данные уравнения относятся к классу функциональных дифференциальных уравнений. Это позволяет учитывать эффекты межмодового взаимодействия без необходимости моделировать динамику каждой из мод с

использованием отдельного уравнения. Отличие заключается в том, что моделях на основе ДУЧП могут быть более полно учтены конкретные экспериментальные параметры, в то время как с использованием моделей второго типа это ограничено. С другой стороны, модели на основе ДУЗА дают большую свободу с точки зрения качественного анализа динамики, определения условий возникновения динамических режимов и границ их устойчивости.

#### 4.4. Синхронизация мод в лазере класса А с насыщающимся поглотителем

Модель синхронизации мод в полупроводниковом лазере с насыщающимся поглотителем на основе ДУЗА в приближении быстрых процессов в материальных средах (класса А) базируется на модели [34] и была сформулирована в работе [35] следующим образом:

$$\gamma^{-1}\dot{E}(t) + E(t) = \sqrt{\kappa} \exp\left[(1 - i\alpha_g)G_g(t - T) - (1 - i\alpha_q)G_q(t - T)\right]E(t - T) \quad (4.22)$$

где  $E(t)$  – комплексная амплитуда электрического поля на входе секции поглотителя;  $\gamma$  – пропускная способность спектрального фильтра;  $T$  – время задержки, равное времени обхода «холодного» резонатора;  $\kappa < 1$  – фактор ослабления, описывающий полные нерезонансные потери интенсивности за один полный обход резонатора;  $\alpha_g$  ( $\alpha_q$ ) коэффициент уширения линии в секции усиления (поглощения);  $G_{g,q}(t) = J_{g,q} / (1 + S_{g,q} |E(t)|^2)$  – зависящие от времени безразмерные интегральные насыщающиеся усиления и поглощения в соответствующих секциях;  $S_{g,q}$  обратно пропорциональны интенсивности насыщения секций усиления и поглощения; и  $J_{g,q}$  описывают плотность носителей в секциях усиления и поглощения.

Введем безразмерное время и получим

$$\Gamma^{-1}\dot{E}(s) + E(s) = \sqrt{\kappa} \exp\left[(1 - i\alpha_g)G_g(s - 1) - (1 - i\alpha_q)G_q(s - 1)\right]E(s - 1) \quad (4.23)$$

где точка означает дифференцирование по отношению к безразмерному времени  $s \equiv t / T$ . Здесь  $\Gamma \equiv \gamma T$  является безразмерной величиной пропускной способности внутрирезонаторного фильтра, контролирующей число генерируемых продольных мод резонатора (МР).

Стационарные состояния модели (4.23), или МР, определяются как решения уравнения (4.23) вида  $E(s) = |E| \exp(i\omega s)$ , где  $|E| > 0$  – постоянная амплитуда поля, и  $\omega$  – отстройка частоты моды от частоты максимума пропускания фильтра. Следует отметить, что в данном случае стационарные состояния не являются таковыми в исходной системе отсчета, но они являются

стационарными в системе координат, вращающейся с круговой частотой  $\omega$ . Решения данного типа являются характерной особенностью моделей на основе ДУЗА вида (4.22–4.23) и называются вращающимися волнами (rotating wave).

$|E|$  и  $\omega$  могут быть получены из трансцендентных уравнений:

$$\frac{\alpha_g J_g}{1 + S_g |E|^2} - \frac{\alpha_q J_q}{1 + S_q |E|^2} + \omega + \arctan \frac{\omega}{\Gamma} = 2\pi m, \quad (4.24)$$

$$\frac{J_g}{1 + S_g |E|^2} - \frac{J_q}{1 + S_q |E|^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{\kappa} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\Gamma^2} \right) \right), \quad (4.25)$$

где  $m$  – целое число. Для  $\alpha_q = 0$  решения МР антисимметричны и  $(\omega(-\alpha_g), |E|(-\alpha_g)) = (-\omega(\alpha_g), |E|(\alpha_g))$ .

Рассмотрим случай МР  $m = 1$ . Бифуркационная диаграмма данного решения, полученная с использованием DDE-BIFTOOL [14, 36] относительно параметра накачки активной среды  $J_g$ , приведена на рисунке 4.2. Как видно из рисунка, МР рождается неустойчивой из субкритической бифуркации стационарного состояния с нулевой интенсивностью, после чего претерпевает седлоузловую бифуркацию и далее стабилизируется через бифуркацию Андронова-Хопфа.

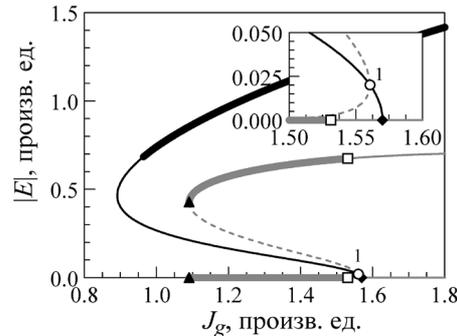


Рисунок 4.2 – Бифуркационная диаграмма моды резонатора  $m = 1$ . Толстые (тонкие) черные линии соответствуют устойчивым (неустойчивым) ветвям моды резонатора. Толстые (тонкие) серые линии соответствуют устойчивым (неустойчивым) фундаментальным периодическим решениям. На графике показаны экстремумы  $|E|$ . Пунктирная линия соответствует неустойчивым решениям до седлоузловой точки периодического решения. Отметки: бифуркация Андронова-Хопфа (кружок), седлоузловая (черные треугольники), тор (квадраты) и бифуркация Андронова-Хопфа состояния с нулевой интенсивностью (ромб). Вставка демонстрирует увеличенный вид области вблизи начала фундаментального периодического решения. Остальные параметры:

$$\Gamma = 30, \kappa = 0.32, \alpha_g = 3.5, \alpha_q = 0, J_q = 1, S_g = 1, S_q = 25.$$

Нас интересует другая бифуркация Андронова-Хопфа, расположенная на неустойчивом участке МР и ведущая к возникновению фундаментального периодического решения, то есть решения с частотой повторения, примерно равной частоте обхода резонатора. Данное решение будет соответствовать режиму синхронизации мод.

После субкритической бифуркации Андронова-Хопфа решение является неустойчивым, обладает малой амплитудой модуляции и становится устойчивым после седлоузловой бифуркации. Затем решение изменяет свою устойчивость через бифуркацию в тор.

Рассмотрим связанную с увеличением и уменьшением тока накачки временную динамику. Бифуркационная диаграмма на рисунке 4.3 была получена путем прямого численного интегрирования. Интегрирование было выполнено с использованием встроенного в Wolfram Mathematica метода переключения жесткости в сочетании с явным методом Рунге-Кутты.

Построение бифуркационной диаграммы (рисунок 4.3(а)) проводилось начиная с фундаментального периодического решения, которое соответствует синхронизации мод лазера при  $J_g = 1.4$  (рисунок 4.3(б)). По мере постепенного уменьшения накачки последовательность стабильных импульсов исчезает, а система переходит в выключенное стационарное состояние при  $J_g = 1.09$ . Это соответствует точке седлоузловой бифуркации фундаментального периодического решения, полученной с помощью DDE-BIFTOOL. При увеличении накачки выключенное состояние лазера теряет устойчивость в точке бифуркации Андронова-Хопфа  $J_g = 1.58$  состояния с нулевой интенсивностью, и система переключается на устойчивую моду резонатора  $m = 1$ . При уменьшении накачки до значения  $J_g = 0.95$  система переходит в выключенное состояние лазера. Соответствующая петля гистерезиса на рисунке 4.3(а) обозначена красными стрелками.

При увеличении тока накачки из фундаментального решения синхронизации мод возникает бифуркация суперкритического тора ( $J_g = 1.54$ ). На рисунке 4.3(а) показаны экстремумы колебаний при постепенном увеличении  $J_g$ . Квазипериодические колебания показаны на рисунке 4.3(в). Начиная с  $J_g = 1.63$  (см. рисунок 4.3(г)) и по мере дальнейшего увеличения тока накачки появляются более сложные колебания, максимальная амплитуда которых ограничена насыщением усиления (см. упражнения).

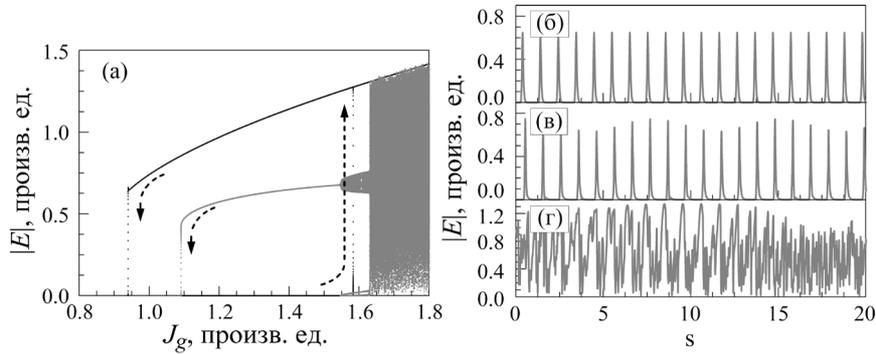


Рисунок 4.3 – Численно полученная бифуркационная диаграмма (а) и временные диаграммы фундаментального режима синхронизации мод ( $J_g = 1.4$ ) (б), квазипериодическая последовательность импульсов ( $J_g = 1.6$ ) (в) и хаотическая динамика ( $J_g = 1.7$ ) (г). Ветвь устойчивых периодических решений соответствует толстой серой линии на рисунке 4.1, график на рисунке (а) представляет собой определенные численно экстремумы (показаны серым). При постепенном увеличении параметра  $J_g$  возникает более сложная динамика, показанная на (в) и (г). Черная линия соответствует устойчивому стационарному состоянию. Стрелки демонстрируют гистерезисный характер диаграммы.

#### 4.5. Упражнения к разделу 4

1. Провести линейный анализ устойчивости стационарных решений модели (4.1–4.3). Определить критерии существования и виды точек бифуркации.
2. В предположении, что  $\bar{\gamma} \gg \gamma$  (т.е. поглотитель является быстрым), асимптотически исключить переменную для  $\bar{D}$  из модели (4.1–4.3). Найти стационарные решения получившейся системы.
3. Провести линейный анализ устойчивости стационарных решений получившейся в предыдущем упражнении модели. Определить критерии существования и виды точек бифуркации.
4. Дополнить модель лазера с оптоэлектронной обратной связью членом, учитывающим спонтанную эмиссию. Вывести характеристическое уравнение полученной модели и определить выражения для границ бифуркаций Андронова-Хопфа.
5. С использованием линейного анализа устойчивости стационарного состояния с нулевой интенсивностью модели (4.23) определить границы бифуркаций Андронова-Хопфа, ведущие к появлению стационарных состояний.
6. Определить выражение для предельных точек стационарных решений (4.24–4.25).
7. Исходя из уравнений для стационарных решений (4.24–4.25), определить их максимальную амплитуду. Сравнить полученное значение с максимальной

амплитудой колебаний в различных режимах работы лазера, полученных с использованием численного моделирования уравнения (4.23).

### **Список источников**

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Изд-во «Факториал», 1999.
2. Meiss J. Dynamical systems [Электронный ресурс] // Scholarpedia. 2007. Vol. 2. No. 2. p. 1629. URL: [http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical\\_systems](http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical_systems) (дата обращения: 19.03.2020).
3. Hansson T. and Wabnitz S. Frequency comb generation beyond the Lugiato–Lefever equation: multi-stability and super cavity solitons // Journal of the Optical Society of America B. 2015. Vol. 32. No 7. pp. 1259–1266.
4. Mandel P. Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
5. J. Ohtsubo. Semiconductor Lasers. Stability, Instability and Chaos. – Cham: Springer International Publishing, 2017.
6. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. М.: Наука: ФИЗМАТЛИТ, 1999.
7. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. No. 3. pp. 130–141.
8. Erneux T. Laser Dynamics / T. Erneux, P. Glorieux. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1966.
10. Kuznetsov Y. Elements of Applied Bifurcation Theory. – New York: Springer Verlag, 1998.
11. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
12. Doedel E.J., Champneys A.R., Fairgrieve T.F., Kuznetsov Yu.A., Sandstede B., and Wang X.J. AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), user's guide [Электронный ресурс] // Heriot-Watt University. 1997. URL: <https://www.macs.hw.ac.uk/~gabriel/auto/auto.html> (дата обращения: 19.03.2020).
13. Dhooge A., Govaerts W. Kuznetsov Yu.A. MATCONT: A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29. No. 2. pp. 141–164.

14. Engelborghs K., Luzyanina T., and Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // ACM Trans. Math. Softw. 2002. Vol. 28. No. 1. pp. 1–21.
15. Siegman A.E. Lasers. – Mill Valley: University Science Books, 1986.
16. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. 5-е изд. М.: Наука, Физматлит, 1999.
17. Arecchi F.T., Gadomski W., Meucci R., and Roversi J.A. Dynamics of laser build up from quantum noise // Physical Review A. 1989. Vol. 39. pp. 4004–4015.
18. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. – 496 с.
19. Гласс Л., Мэки М. От часов К хаосу: Ритмы жизни: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 248 с.
20. Huygens C. and Blackwell R.J. Christiaan Huygens' the pendulum clock, or, Geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks. Ames: Iowa State University Press, 1986.
21. Rayleigh L. The explanation of certain acoustical phenomena // Nature. 1878. Vol. 18. pp. 319–321.
22. Van Der Pol B. Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance. (Reception with reactive triode) // Philosophical Magazine Series. 1927. Vol. 7. No. 3. pp. 65–80.
23. Adler R. Study of Locking Phenomena in Oscillators // Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61. No. 10. pp. 1380–1385.
24. Stover H.L. and Steier W.H. Locking of laser oscillators by light injection // Applied Physics Letters. 1966. Vol. 8. No. 4. pp. 91–93.
25. Wicczorek S., Krauskopf B., Simpson T.B., Lenstra D. The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers // Physics Reports. 2005. Vol. 416. No. 1–2. pp. 1–128.
26. Mayol C., Toral R., Mirasso C.R., Natiello M.A. Class-A lasers with injected signal: bifurcation set and Lyapunov-potential function // Physical Review A. 2002. Vol. 66. P. 013808.
27. Wishon M.J., Choi D., Niebur T., Webster N., Chembo Y.K., Viktorov E.A., Citrin D., Locquet A. Low-noise X-band tunable microwave generator based on a semiconductor laser with feedback // IEEE Photonics Technology Letters – 2018. Vol. 30. No. 18. pp. 1597–1600.
28. Choi D., Wishon M.J., Viktorov E.A., Citrin D.S., Locquet A. Nanometric sensing with laser feedback interferometry // Optics Letters. 2019. Vol. 44. No. 4. pp. 903–906.

29. Brunner D., Penkovsky B., Marquez B. A., Jacquot M., Fischer I., and Larger L. Tutorial: Photonic neural networks in delay systems // *Journal of Applied Physics*. 2018. Vol. 124. No. 15. P. 152004.
30. Kovalev A.V., Islam M., Locquet A., Citrin D.S., Viktorov E.A., Erneux T. Resonances between fundamental frequencies for lasers with large delayed feedbacks//*Physical Review E*. 2019. Vol. 99. No. 6. pp. 062219.
31. Звелто О. Принципы лазеров. 4-е изд. СПб.: Издательство "Лань", 2008.
32. Avrutin E., Javaloyes J. «Mode-locked Semiconductor Lasers» in “Handbook of Optoelectronic Device Modeling and Simulation. Volume 2. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – pp. 187–210.
33. Agrawal G. P. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press: San Diego, 1995.
34. Vladimirov A.G., Turaev D. Model for Passive Mode Locking in Semiconductor Lasers // *Physical Review A*. 2005. Vol. 72. No. 3. P. 033808.
35. Butkus M., Viktorov E.A., Erneux T., Hamilton C.J., Maker G., Malcolm G.P.A., and Rafailov E.U. 85.7 MHz repetition rate mode-locked semiconductor disk laser: fundamental and soliton bound states // *Optics Express*. 2013. Vol. 21. No. 21. pp. 25526-25531.
36. Kovalev A.V., Viktorov E.A. Class-A mode-locked lasers: Fundamental solutions // *Chaos*. 2017. Vol. 27. No. 11. P. 114318.

Ковалев Антон Владимирович  
Викторов Евгений Анатольевич

## **Лазерная динамика: Учебно-методическое пособие**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49