



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ



Санкт-Петербург
2020

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

Пространства и операторы

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 01.03.02, 12.03.03, 16.03.01 в качестве учебного
пособия для реализации основных профессиональных образовательных
программ высшего образования бакалавриата**



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2020

Попов А.И., Попов И.Ю. Пространства и операторы. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 85 с.

Рецензент:

Уздин Валерий Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник физико-технического факультета, Университета ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. Теория пространств и операторов является важным инструментом исследования физических систем. В пособии рассмотрены следующие темы: “Метрическое пространство”, “Линейное пространство”, “Гильбертово пространство”, “Операторы”, “Обратные операторы”, “Ограниченные операторы”, “Симметрические и самосопряженные операторы”, “Замкнутые операторы”, “Спектр и резольвента оператора в конечномерном пространстве”, “Спектр оператора в бесконечномерном пространстве”.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020

© Попов А.И., Попов И.Ю., 2020

Оглавление

Введение.....	4
1. Метрическое пространство	5
2. Полное метрическое пространство	8
3. Принцип сжимающих отображений.....	9
4. Линейное пространство.....	13
5. Линейное нормированное пространство.....	15
6. Гильбертово пространство.....	18
7. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.....	27
8. Операторы	30
9. Обратные операторы.....	31
10. Ограниченные операторы	33
11. Симметрические и самосопряженные операторы.....	39
12. Построение обратного оператора	45
13. Замкнутые операторы.....	52
14. Спектр и резольвента оператора.....	67
15. Резольвента и спектр оператора в конечномерном простран- стве	71
16. Спектр оператора в бесконечномерном пространстве	72
17. Контрольные вопросы.....	80

Введение

“Господа, в гильбертовом пространстве остается еще много места.” С. Маклейн

“В тридцатые годы под расслабляющим влиянием квантово-механической теории возмущений математический уровень физика-теоретика свелся к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами.” Рес Йост.

Цитирование по книгам [7], [8].

Данное пособие посвящено основам функционального анализа и теории операторов. Этот раздел математики логично продолжает линейную алгебру. Однако, если линейная алгебра имеет дело с конечномерными пространствами, то в функциональном анализе речь идет о пространствах функций, которые, вообще говоря, бесконечномерны, “в них гораздо больше места” (см. эпиграф). Оказывается, что такой переход к бесконечномерности решительно меняет ситуацию и делает теорию существенно более богатой. При этом, несмотря на абстрактность, эта математическая наука тесно связана с естественнонаучными приложениями. Она составляет основу современной теоретической физики. В частности, с точки зрения математики, квантовая механика – это просто теория операторов в гильбертовом пространстве. И чтобы физик-теоретик был на современном уровне, и с ним не происходило то, о чем говорит в эпиграфе известный швейцарский физик Рес Вильгельм Йост, он должен владеть аппаратом теории операторов и функционального анализа. Данное учебное пособие, конечно, не охватывает всего функционального анализа, но закладывает основу для подключения студента к научным исследованиям в этой области. В первой части пособия мы рассматриваем различные пространства, всюду подчеркивая сходства и отличия от конечномерного случая. Вторая часть пособия посвящена основным

положениям теории операторов. Мы описываем, в основном, линейные операторы, делая акцент на наиболее важных для физики спектральных свойствах.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, специализирующихся в области теоретической и математической физики, прикладной математики и информатики, фотоники и оптоинформатики, а также технической физики. Изложение материала основано на курсе лекций, который читался авторами на протяжении ряда лет студентам факультетов информационных технологий и программирования, систем управления и робототехники, фотоники и оптоинформатики, физико-технического факультета.

1. Метрическое пространство

Понятие пространства используется в математике для объединения объектов по определенным признакам. Если нас интересует только расстояние между объектами, то достаточно ввести только одну характеристику – метрику (расстояние), которая позволит объединить наши элементы в метрическое пространство.

Определение

Пусть M – произвольное множество, и пусть каждой паре его элементов x, y сопоставлено неотрицательное число $\rho(x, y)$ так, что для всех $x, y, z \in M$ выполнено:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – симметрия;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – неравенство треугольника.

Функция ρ называется метрикой (расстоянием), а само множество M , снабженное метрикой – метрическим пространством.

Примеры

- 1) Множество вещественных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ обра-

зует метрическое пространство $\mathbb{R}^1$.

2) Множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ с расстоянием (смотри рис. 1):

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |g(t) - f(t)|.$$

3) Множество точек на сфере.

Расстояние между двумя точками – это длина дуги большого круга (наименьшая из двух дуг), проходящего через эти точки (смотри рис. 2).

Замечание

Большой круг – это сечение шара плоскостью, проходящее через центр шара.

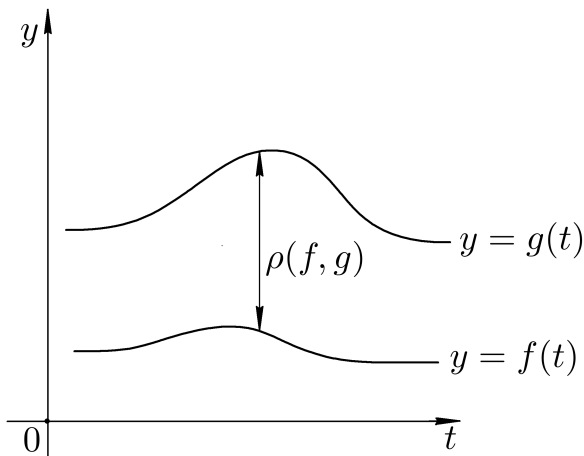


Рис. 1: Расстояние между функциями на множестве $C[a, b]$

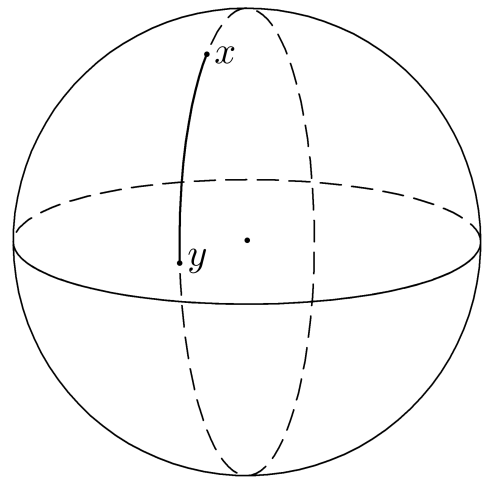


Рис. 2: Расстояние между точками на сфере

Определение

Открытым (или замкнутым) шаром $B(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 называется множество точек $x \in M$ таких, что $\rho(x, x_0) < r$ (или $\rho(x, x_0) \leq r$ соответственно). $B(x, \varepsilon)$ называется также ε -окрестностью точки x_0 .

Пусть X – подмножество метрического пространства. Дадим классификацию точек пространства M по отношению к X .

Определение

Точка $x_0 \in X \subset M$ называется внутренней по отношению к X , если она содержится в X вместе с некоторой своей окрестностью.

Рассмотрим $M \setminus X$ – дополнение множества X в M (то есть множество точек из M , которые не принадлежат X).

Определение

Точки, внутренние для $M \setminus X$, называются внешними по отношению к X .

Определение

Если точка не является ни внутренней, ни внешней по отношению к X , то она является граничной для X .

Определение

Множество X называется открытым, если вместе с каждой своей точкой x оно содержит и некоторый шар $B(x, \varepsilon)$.

Определение

Множество называется замкнутым, если его дополнение открыто.

Замечание

Граничные точки множества X могут принадлежать, а могут и не принадлежать X . Операция присоединения к множеству всех его граничных точек называется замыканием. В результате замыкания получается замкнутое множество.

Определение

Множество называется всюду плотным в пространстве M , если после замыкания оно совпадет со всем пространством.

Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел. Иррациональные числа – это бесконечные непериодические десятичные дроби. В любой окрестности иррациональных чисел найдется рациональное число – конечная (обрезанная) десятичная дробь. Соответственно, иррациональные числа являются граничными для мно-

жества рациональных чисел, так как они не являются ни внутренними, ни внешними по отношению к рациональным (так как любая окрестность иррациональных чисел содержит как рациональные, так и иррациональные числа). Замыкание $\mathbb{Q}$ – это присоединение к нему граничных точек, то есть присоединение $\mathbb{I}$. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ – всё пространство, то есть $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Определение

Говорят, что последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ метрического пространства сходится к точке x , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что $B(x, \varepsilon)$ содержит все точки x_n , начиная с номера $n > N$.

Точка x называется пределом последовательности x_n .

Определение

Точка $x \in M$ называется предельной точкой множества $X \subset M$, если любая её окрестность содержит хотя бы одну точку из X (отличную от неё самой), а, значит, и бесконечно много точек из X , так как окрестность можно сужать.

Комментарий

Точки называются предельными, так как они могут быть получены как пределы некоторых последовательностей точек из X .

2. Полное метрическое пространство

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства M называется фундаментальной (сходящейся в себе или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует N так, что для любых $n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Теорема

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство:

Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любого $n > N$ выполнено: $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, то есть $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $n, m > N$:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что соответствует определению фундаментальной последовательности. ■

Замечание

Обратное утверждение теоремы, вообще говоря, неверно, так как не всякая фундаментальная последовательность сходится. Например, последовательность рациональных чисел может сходиться к иррациональному числу (не принадлежит пространству $\mathbb{Q}$), то есть говорить о сходимости в пространстве $\mathbb{Q}$ нельзя.

Определение

Метрическое пространство называется полным, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

Пример

Из предыдущего замечания следует, что:

- 1) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ – неполные пространства.
- 2) $\mathbb{R}$ – полное пространство.

3. Принцип сжимающих отображений

Некоторые алгебраические и интегральные уравнения (а также дифференциальные уравнения, которые сводятся к интегральным) оказывается удобно решать с помощью принципа сжимающих отображений. Пусть A – отображение метрического пространства M в себя. Найдем решение уравнения $Ax = x$. Любое алгебраическое или интегральное уравнение можно привести к виду $Ax = x$, однако решить уравнение этим способом удастся лишь тогда, когда A – сжимающее отображение.

Примеры уравнений

$x = \sin(x - 1)$ – алгебраическое уравнение в пространстве $\mathbb{R}$.

$f(s) = g(s) + \int_a^b K(s, t)f(t)dt$ – интегральное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

Определение

Решение x уравнения $Ax = x$ называется неподвижной точкой отображения A .

Определение

Отображение A метрического пространства M в себя называется сжимающим (сжатием), если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (1)$$

Теорема (Принцип сжимающих отображений)

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве M , имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство:

Пусть x_0 – произвольная точка в M .

Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, ..., $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

Действительно, считая для определенности $m \geq n$, имеем:

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq$$

$$\leq \alpha^n \cdot [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})],$$

$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax_0, Ax_1)$ и в силу (1): $\rho(Ax_0, Ax_1) \leq \alpha \rho(x_0, x_1)$. Тогда:

$$\alpha^n \cdot [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \leq$$

$$\leq \alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}].$$

Для получения бесконечно убывающей геометрической прогрессии добавим слагаемые, от чего сумма только возрастет:

$$\begin{aligned} \alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1} + \dots] = \\ = \alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом n эта величина будет сколь угодно мала – меньше любого наперед заданного ε , соответственно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. По условиям теоремы, M – полное пространство, $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, следовательно, $\{x_n\}$ имеет предел (в силу определения полного метрического пространства).

Положим $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Пусть в формуле (1) $y = x_n$:

$$\rho(Ax, Ax_n) \leq \alpha \rho(x, x_n). \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho(x, x_n) \xrightarrow[x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x]{} 0 \Rightarrow \rho(Ax, Ax_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x, \end{aligned}$$

то есть мы построили решение уравнения $Ax = x$, а значит нашли неподвижную точку отображения A . Теперь докажем единственность неподвижной точки.

От противного.

Пусть есть две различные неподвижные точки: $Ax = x$, $Ay = y$, соответственно: $\rho(Ax, Ay) = \rho(x, y)$. С другой стороны, в силу (1): $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Значит $\rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y)$ и, следовательно: $\rho(x, y) = 0$, так как $\alpha < 1$. Таким образом, $x = y$, что доказывает единственность.

■

Пример

Принцип сжимающих отображений дает конструктивный метод прибли-

женного нахождения решения уравнения. Пусть f – функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая условию Липшица:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| \quad \text{при } k < 1 \quad (4)$$

Пусть f отображает отрезок $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно принципу сжимающих отображений, последовательность $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$. В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция дифференцируема и $|f'(x)| \leq k < 1$ ($f'(x)$ не должна стремиться к 1).

В самом деле:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{|f'(x)|}_{\leq k} dx \leq \int_{x_1}^{x_2} k dx = k(x_2 - x_1), \quad x_2 > x_1.$$

Если $k < 1$, то выполнено условие Липшица с $\alpha = k$.

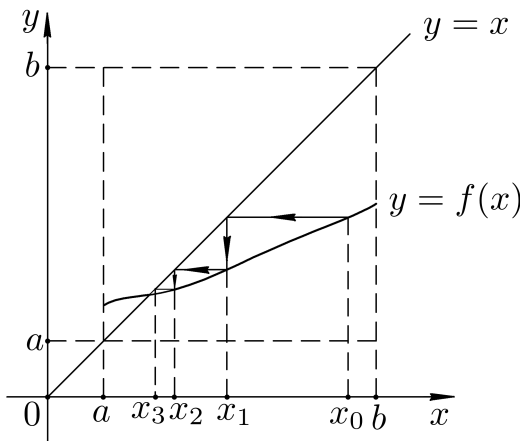


Рис. 3: Принцип сжимающих отображений при $|f'(x)| < 1$

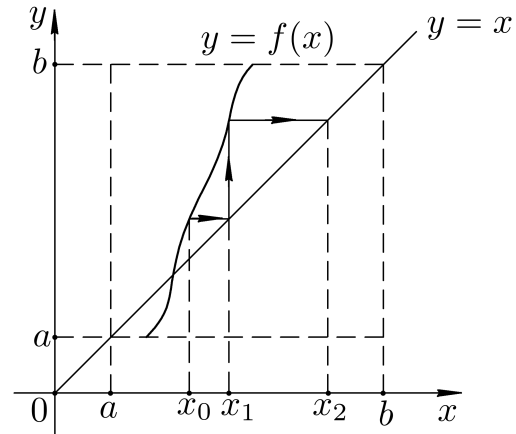


Рис. 4: Отсутствие сходимости последовательности итераций при $|f'(x)| \geq 1$, отображение не является сжимающим

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ – последовательные приближения решения.

В случае, если $|f'(x)| \geq 1$, принцип сжимающих отображений не работает, и последовательность $\{x_n\}$, вообще говоря, не будет сходиться к решению задачи.

Задача

При каком a отображение $A : [0, a) \rightarrow [0, a)$, $Ax = x^2$ является сжимающим?

Решение. $\rho(Ax, Ay) = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$.

С другой стороны, A является сжатием: $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) = \alpha |x - y|$.

Следовательно, $|x - y||x + y| \leq \alpha |x - y|$, что эквивалентно неравенству: $|x + y| \leq \alpha$, которое должно быть выполнено для любых $x, y \in [0, a)$.

Тогда из последнего неравенства получаем условие на константу a :

$2a \leq \alpha < 1$ (так как A – сжатие). Следовательно, $a < \frac{1}{2}$.

Задачу можно решить другим способом. Условие сжимаемости будет выполнено, если: $|f'(x)| < 1$. В нашем случае: $Ax = f(x) = x^2$. Тогда $f'(x) = 2x < 1$. Последнее неравенство должно быть выполнено для любого $x \in [0, a)$. Следовательно, $a < \frac{1}{2}$.

Замечание

Неподвижные точки отображения $Ax = x^2$ можно найти напрямую, решив уравнение $Ax = x \Leftrightarrow x^2 = x$. Находим 2 неподвижные точки: $x = 0$ и $x = 1$. Проведенный выше анализ показывает, что методом сжимающих отображений мы можем найти только одну из двух неподвижных точек: $x = 0$.

Комментарий

Метод сжимающих отображений не является универсальным методом поиска решения уравнения. Он будет работать только когда выполнено условие сжатия.

4. Линейное пространство

Определение

Пусть M – множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на вещественное (либо комплексное) число:

а) паре элементов множества $x \in M, y \in M$ отвечает элемент $x + y \in M$ (сумма x и y);

б) паре $x \in M, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ отвечает элемент $\alpha x \in M$ (произведение числа α и элемента x).

Множество M называется линейным (вещественным или комплексным) пространством, если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на вещественное (комплексное) число и для любых элементов $x, y, z \in M$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполнено:

- 1) $x + y = y + x$ – коммутативность;
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ – ассоциативность;
- 3) $x + 0 = x \quad \forall x \in M$ – существование нулевого элемента;
- 4) $x + (-x) = 0 \quad \forall x \in M$ – существование противоположного элемента;
- 5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ – ассоциативность умножения на число;
- 6) $1 \cdot x = x$ – согласование масштабов чисел и векторов;
- 7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ – дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов;
- 8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ – дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения чисел.

Определение

Система $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимой, если из равенства $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Определение

Число n называется размерностью пространства $\mathcal{L}$, если в нем существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из $(n + 1)$ -го вектора линейно зависима.

Обозначение: $\dim \mathcal{L}$ – размерность пространства $\mathcal{L}$.

Замечание

Линейное пространство может быть бесконечномерно.

Пример

$C[a, b]$ – пространство непрерывных функций $f(x)$ на $[a, b]$. Оно бесконечномерно, так как в нем существуют бесконечные системы линейно независимых векторов, например:

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots$$

Определение

Система линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ называется базисом в пространстве $\mathcal{L}$, если любой вектор $x \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots$$

Замечание

В случае конечномерного пространства количество векторов базиса равно размерности пространства.

Определение

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ называются координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$

5. Линейное нормированное пространство

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется нормированным, если любому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число, называемое нормой и обозначаемое $\|x\|$, причем выполнено:

- 1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;
- 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathcal{L}$;
- 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Линейное нормированное пространство становится метрическим, если ввести в нем расстояние $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств 1–3 нормы. Например, проверим свойство 2 (симметрия).

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \rho(x, y).$$

Определение

Говорят, что последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ линейного нормированного пространства сходится к точке x , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любого $n > N$ справедливо:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon. \quad (5)$$

Замечание

Это определение полностью соответствует определению сходимости в метрическом пространстве при определении метрики по правилу:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Замечание

Все определения и теоремы из метрического пространства распространяются и на линейное нормированное пространство.

Определение

Полное линейное нормированное пространство называется **банаховым пространством**.

Примеры введения норм

1) Множество вещественных чисел становится нормированным пространством, если положить $\|x\| = |x|$.

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ можно положить

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}.$$

В этом же пространстве можно ввести норму по-другому:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k| \text{ или } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|.$$

Аксиомы нормы выполняются.

Замечание

При $n = \infty$ соответствующие нормы называются ℓ^2 (евклидова норма), ℓ^1 , ℓ^∞ (здесь вместо $\max$ в определении следует написать $\sup$).

3) Норма в $C[a, b]$ – пространстве всех непрерывных функций на $[a, b]$:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Пример необычной геометрии в линейном нормированном пространстве

Пусть в двумерном линейном пространстве (на плоскости) норма введена следующим образом:

$$\|f\|_1 = |x| + |y|, \quad \text{где } f = (x, y) \quad (6)$$

Единичным кругом в нем служит квадрат следующей геометрии:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \pm x \pm y = 1.$$

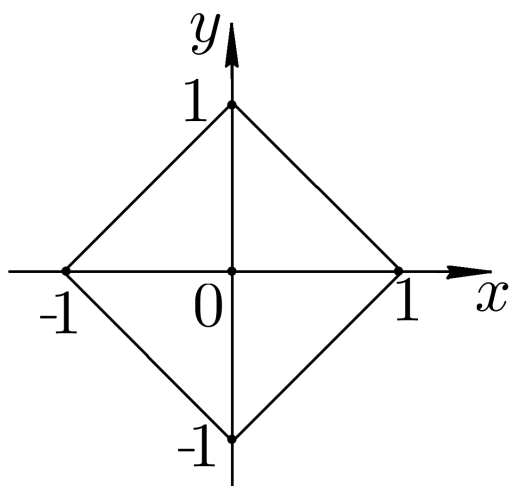


Рис. 5: Единичный круг в пространстве с нормой $\|f\|_1 = |x| + |y|$

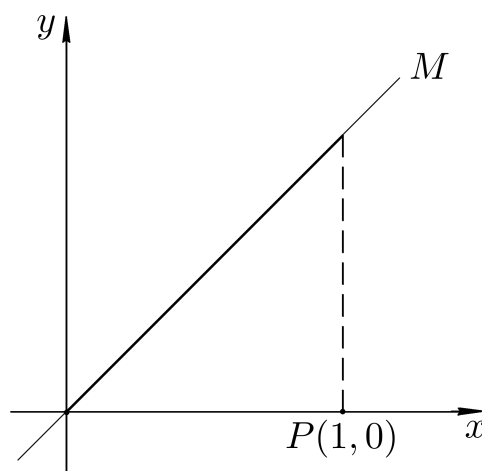


Рис. 6: Проекция точки P на подпространство

В обычном двумерном евклидовом пространстве, если заданы проходящая через начало координат прямая l и не лежащая на ней точка P ,

найдется единственная точка $\tilde{P}$ на l такая, что расстояние $P\tilde{P}$ минимально. $\tilde{P}$ называется проекцией точки P на подпространство.

Выберем подпространство M следующим образом:

$$M = \{(x, y) : x = y\}.$$

Найдем проекцию точки $P(1, 0)$ на подпространство M . Найдем расстояние между точкой $P(1, 0)$ и произвольной точкой $\tilde{P}(x, x) \in M$, где $x \in \mathbb{R}$:

$$\|P - \tilde{P}\| = |1 - x| + |x|,$$

$$\text{при } 0 \leq x \leq 1 : \quad \|P - \tilde{P}\| = 1 - x + x = 1,$$

$$x > 1 : \quad \|P - \tilde{P}\| = x - 1 + x = 2x - 1 > 1,$$

$$x < 0 : \quad \|P - \tilde{P}\| = 1 - x - x = 1 - 2x > 1.$$

Мы получили, что минимальное расстояние между точками P и $\tilde{P}$ равно 1, но достигается оно не в одной точке, а на целом отрезке при $0 \leq x \leq 1$. Таким образом, проекция точки P в данном пространстве уже не будет единственной, а значит и вводить её нет смысла.

6. Гильбертово пространство

Определение

Комплексное линейное пространство E называется евклидовым (предгильбертовым), если любым двум его элементам f, g поставлено в соответствие комплексное число, называемое скалярным произведением и обозначаемое (f, g) , причем выполнено:

$$1) (f, g) = \overline{(g, f)} \quad - \text{симметричность};$$

$$2) (f + g, h) = (f, h) + (g, h) \quad - \text{дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов};$$

$$3) (\alpha f, g) = \alpha(f, g), \alpha \in \mathbb{C} \quad - \text{вынесение числового множителя};$$

$$4) (f, f) \geq 0 \quad - \text{неотрицательность скалярного произведения}.$$

Если $(f, f) = 0$, то $f = 0$.

Примеры

1) В пространстве $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение вводится по правилу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (7)$$

2) В пространстве $C[a, b]$ можно ввести скалярное произведение так:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (8)$$

Обозначение: обозначим это пространство за $CL_2(a, b)$.

Свойства скалярного произведения

1) Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g). \quad (9)$$

Эквивалентная формулировка:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|. \quad (10)$$

Доказательство:

1 случай.

Вещественное евклидово пространство, то есть $(f, g) \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, допустимо умножение только на вещественное число. По аксиоме 4 из определения евклидова пространства имеем:

$$(f + \alpha g, f + \alpha g) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$(f, f) + (f, \alpha g) + (\alpha g, f) + \alpha^2 (g, g) \geq 0.$$

$$(f, \alpha g) = \overline{(\alpha g, f)} = \overline{\alpha (g, f)} = \bar{\alpha} (f, g) = / \alpha \in \mathbb{R} / = \alpha (f, g).$$

$$(\alpha g, f) = \alpha (g, f) = \alpha \overline{(f, g)} = / (f, g) \in \mathbb{R} / = \alpha (f, g).$$

$$(f, f) + 2\alpha (f, g) + \alpha^2 (g, g) \geq 0 \quad \forall \alpha.$$

Квадратный трехчлен будет неотрицательным при любом α , если выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} (g, g) \geq 0 \text{ (по аксиоме 4)} \\ D \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4(f, g)^2 - 4(f, f)(g, g) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g).$$

■

2 случай.

Комплексное евклидово пространство, то есть $(f, g) \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Пусть $(f, g) = |(f, g)|e^{i\varphi}$, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$.

$$(f + \alpha g, f + \alpha g) \geq 0 \quad \forall f, g \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

$$(f, f) + \alpha(g, f) + \bar{\alpha}(f, g) + \alpha\bar{\alpha}(g, g) \geq 0.$$

Учитывая, что $(g, f) = |(f, g)|e^{-i\varphi}$, $\bar{\alpha} = |\alpha|e^{-i\theta}$:

$$(f, f) + |\alpha|e^{i\theta} \cdot |(f, g)|e^{-i\varphi} + |\alpha|e^{-i\theta} \cdot |(f, g)|e^{i\varphi} + |\alpha|^2(g, g) \geq 0,$$

$$(f, f) + |\alpha| \cdot |(f, g)| \cdot \underbrace{(e^{i\theta-i\varphi} + e^{-i\theta+i\varphi})}_{=2\cos(\theta-\varphi)} + |\alpha|^2(g, g) \geq 0 \quad \forall \alpha, f, g.$$

$$\begin{cases} (g, g) \geq 0 \text{ (выполнено)} \\ D \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(f, g)|^2 \cdot 4\cos^2(\theta - \varphi) - 4(g, g)(f, f) \leq 0. \quad (11)$$

Неравенство (11) выполнено для каждого θ, φ . В частности, оно выполнено при $\theta = \varphi$:

$$|(f, g)|^2 \cdot 4 - 4(g, g)(f, f) \leq 0 \Leftrightarrow |(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g).$$

■

2) Равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g)$$

достигается тогда и только тогда, когда векторы f и g пропорциональны:
 $g = \alpha f$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Доказательство:

Достаточность.

Простой подстановкой нетрудно убедиться, что если $g = \alpha f$, $\alpha \in \mathbb{C}$, то равенство достигается: $|(f, g)|^2 = (f, f)(g, g)$.

Необходимость.

Покажем, что если векторы f и g непропорциональны, то равенство не может быть достигнуто. Рассмотрим вектор $h = g - \frac{(g, f)}{(f, f)}f$. Скалярно домножим обе части равенства на f и получим:

$$(g, f) - \frac{(g, f)}{(f, f)}(f, f) = (h, f) \Leftrightarrow 0 = (h, f), \quad \text{то есть } h \perp f.$$

Итак, $g = \alpha f + h$, где $\alpha = \frac{(g, f)}{(f, f)}$, причем $h \perp f$. Преобразуем обе части неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

$$|(f, g)|^2 = |(f, \alpha f + h)|^2 = |\underbrace{\bar{\alpha}(f, f) + (f, h)}_{=0}|^2 = |\bar{\alpha}|^2 |(f, f)|^2 = |\alpha|^2 \|f\|^4.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 \|g\|^2 &= \|f\|^2 (g, g) = \|f\|^2 (\alpha f + h, \alpha f + h) = \\ &= \|f\|^2 \left(|\alpha|^2 \|f\|^2 + \underbrace{\alpha (f, h)}_{=0} + \underbrace{\bar{\alpha} (h, f)}_{=0} + \|h\|^2 \right) = \\ &= |\alpha|^2 \|f\|^4 + \underbrace{\|f\|^2}_{>0} \underbrace{\|h\|^2}_{>0} > |\alpha|^2 \|f\|^4. \end{aligned}$$

Следовательно, $|(f, g)|^2 < \|f\|^2 \|g\|^2$, то есть равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца не достигается в случае когда векторы f и g непропорциональны.



3) Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ (то есть норму можно ввести таким образом).

Доказательство:

Проверим аксиомы линейного нормированного пространства. Аксиомы 1 и 3 очевидны, проверим аксиому 2 (неравенство треугольника):

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sqrt{(f + g, f + g)} = \sqrt{(f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g)} = \\ &= \sqrt{(f, f) + 2\operatorname{Re}(f, g) + (g, g)}.\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f, g) &\leq |(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}, \\ \sqrt{(f, f) + 2\operatorname{Re}(f, g) + (g, g)} &\leq \sqrt{(f, f) + 2\sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)} + (g, g)} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}\right)^2} = \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)} = \|f\| + \|g\|. \blacksquare\end{aligned}$$

Замечание

Из доказательства видно, что равенство в неравенстве треугольника $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ достигается тогда же, когда и в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца, то есть в случае пропорциональности векторов f и g : $g = \alpha f$.

Определение

Евклидово пространство, полное по норме $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, называется гильбертовым пространством.

Замечание

Полнота пространства связана со сходимостью фундаментальных последовательностей. Сходимость последовательности определяется через норму, поэтому изменение определения нормы может повлиять на полноту пространства (например, сделать его неполным). Поэтому при определении гильбертова пространства важно указывать способ введения нормы.

Обозначение: $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство.

Определение

Пусть Ω – множество вещественных чисел. Число a называется инфимумом Ω (точной нижней границей Ω), если:

- 1) $\forall x \in \Omega : a \leq x$ – нижняя граница;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \Omega : a \leq x < a + \varepsilon$ – граница не может быть улучшена.

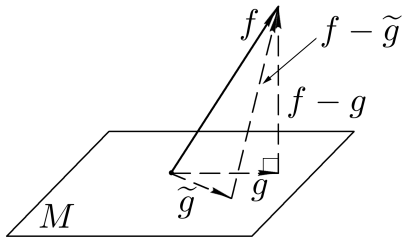
Определение

Число a называется супремумом Ω (точной верхней границей Ω), если:

- 1) $\forall x \in \Omega : a \geq x$ – верхняя граница;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \Omega : a - \varepsilon < x \leq a$ – граница не может быть улучшена.

Проекция вектора на подпространство

В гильбертовом пространстве может быть введено понятие проекции вектора на подпространство. В пространстве $\mathbb{R}^3$ это понятие хорошо известно.



Пусть M – плоскость в $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathbb{R}^3 \setminus M$.

Рассмотрим расстояние от f до различных векторов g из M , то есть $\|f - g\|$.

Это расстояние будет минимально, если:

$$(f - g) \perp M.$$

Рис. 7: Проекция вектора f на плоскость M в $\mathbb{R}^3$

Такой вектор g называется проекцией вектора f на подпространство M .

Определение

Вектор $g \in M$ такой, что $\|f - g\| = \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|$, называется проекцией вектора f на M .

Определение

Два вектора f, g называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

Обозначение: $f \perp g$ – ортогональные векторы.

3) **Теорема о проекции**

Пусть M – подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$. Рассмотрим расстояние от f до различных векторов $\tilde{g} \in M$. Пусть δ – это точная нижняя граница этих расстояний ($\delta = \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|$). Тогда существует единственный вектор $g \in M$ такой, что: $\|f - g\| = \delta$.

Доказательство:

Единственность.

От противного. Пусть существуют два таких вектора g' , g'' .

Так как $\frac{1}{2}(g' + g'') \in M$, то: $\|f - \frac{g' + g''}{2}\| \geq \delta$.

С другой стороны, $\|f - \frac{g' + g''}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|f - g'\| + \frac{1}{2}\|f - g''\| = \delta$. Следовательно, $\|f - \frac{g' + g''}{2}\| = \delta$, и поэтому:

$$\|f - \frac{g' + g''}{2}\| = \frac{1}{2}\|f - g'\| + \frac{1}{2}\|f - g''\|,$$

то есть мы имеем случай знака равенства в неравенстве треугольника, что означает пропорциональность векторов $f - g''$ и $f - g'$:

$$f - g'' = \alpha(f - g'), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\delta = \|f - \frac{g' + g''}{2}\| = \frac{1 + \alpha}{2}\|f - g'\| = \frac{1 + \alpha}{2}\delta, \quad (13)$$

откуда получаем что $\alpha = 1$. Тогда из (12) следует, что $g' = g''$.

Существование.

В определении инфимума возьмем последовательность ε_n , $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Для каждого ε_n найдется вектор g_n такой что: $\delta \leq \|g_n - f\| \leq \delta + \varepsilon_n$. Тогда по теореме о сжатой переменной (“правило двух милиционеров”):

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\| = \delta$. Рассмотрим неравенства:

$$\delta \leq \|f - \frac{g_m + g_n}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|f - g_m\| + \frac{1}{2}\|f - g_n\|.$$

$\uparrow$
 т.к. $\delta = \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|$

Поскольку правая часть неравенства стремится к δ , по теореме о сжатой переменной:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \frac{g_m + g_n}{2}\| = \delta.$$

Используем далее следующее равенство

$$2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2,$$

которое нетрудно проверить. Действительно,

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 &= (a + b, a + b) + (a - b, a - b) = \\ &= (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) + (a, a) - (a, b) - (b, a) + (b, b) = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \end{aligned}$$

Выберем в этом равенстве $a = f - g_m$, $b = f - g_n$:

$$2\|f - g_n\|^2 + 2\|f - g_m\|^2 = 4\|f - \frac{g_m + g_n}{2}\|^2 + \|g_n - g_m\|^2.$$

Таким образом,

$$\|g_n - g_m\|^2 = \underbrace{2\|f - g_n\|^2}_{\rightarrow 2\delta^2} + \underbrace{2\|f - g_m\|^2}_{\rightarrow 2\delta^2} - \underbrace{4\|f - \frac{g_m + g_n}{2}\|^2}_{\rightarrow 4\delta^2} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Итак, $\|g_n - g_m\| \rightarrow 0$, то есть последовательность g_n фундаментальная. Так как пространство полное, эта последовательность сходится к некоторому элементу g . Все члены последовательности g_n принадлежат подпространству M . Подпространство – это замкнутое множество, а значит содержит все свои предельные точки. Следовательно, $g \in M$.

Осталось доказать, что $\|f - g\| = \delta$. По неравенству треугольника: $\|f - g\| \leq \|f - g_n\| + \|g - g_n\|$. Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = \delta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\| = 0$. Поэтому $\|f - g\| \leq \delta$. Знак “ $<$ ” отбрасывается, так как значение не может быть меньше инфимума.

■

Теорема

Пусть M – подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$. Из теоремы о проекции известно, что для любых $f \in \mathcal{H} \exists! g \in M$, для которого $\|f - g\| = \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|$. Тогда выполнено:

$$f - g \perp M. \tag{14}$$

Доказательство:

От противного.

Пусть существует вектор g_0 такой, что: $(f - g, g_0) = \sigma \neq 0$. Рассмотрим вектор следующего вида: $g^* = g + \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0 \in M$. Для него будет выполнено:

$$\begin{aligned} \|f - g^*\|^2 &= \left(f - g - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0, f - g - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0 \right) = \\ &= \|f - g\|^2 - \frac{\bar{\sigma}}{(g_0, g_0)} \underbrace{(f - g, g_0)}_{\sigma} - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} \underbrace{(g_0, f - g)}_{\bar{\sigma}} + \frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)} = \\ &= \|f - g\|^2 - \frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)} < \|f - g\|^2, \end{aligned}$$

то есть $\|f - g^*\|$ оказалась меньше $\inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|$, что противоречит условию теоремы.

■

Определение

Для данного подпространства $S \subset E$ множество векторов в E , ортогональных каждому вектору из S называется ортогональным дополнением к S и обозначается как $S^\perp$.

Определение

Пусть M и N – подпространства евклидова пространства E . Если каждый вектор $f \in E$ представим единственным образом в виде $f = g + h$, где $g \in M$, $h \in N$, то говорят, что E есть прямая сумма подпространств M и N , и пишут: $E = M \dot{+} N$.

Если же при этом всякий элемент из M ортогонален всякому элементу из N , то говорят, что E есть ортогональная сумма M и N , и пишут: $E = M \oplus N$.

Пример

Пусть M – некоторая плоскость в пространстве $\mathbb{R}^3$. $M^\perp$ – прямая, перпендикулярная этой плоскости.

Любой вектор f может быть однозначно записан в виде $f = g + h$, где $g \in M$, $h \in M^\perp$.

В данном примере $\mathbb{R}^3$ представлено в виде ортогональной суммы плоскости M и перпендикулярной ей прямой $M^\perp$.

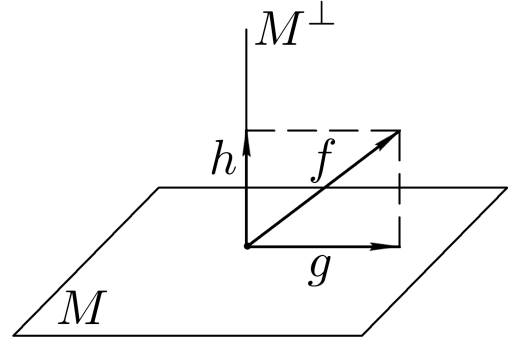


Рис. 8: Ортогональная сумма плоскости M и прямой $M^\perp$

$$\mathbb{R}^3 = M \oplus M^\perp.$$

7. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Гильбертово пространство – это первое из рассмотренных ранее пространств, которое позволяет определить ряды Фурье. Для использования рядов Фурье необходимы следующие свойства пространства: линейность, наличие скалярного произведения и полнота. Гильбертово пространство этим свойствам удовлетворяет.

Определение

Счетное множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ называется ортонормированным, если для его элементов выполнено:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (15)$$

Определение

Рядом Фурье функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ называется ряд следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad \text{где } (f, \varphi_n) \text{ – коэффициенты Фурье.} \quad (16)$$

Свойства рядов Фурье:

1) **Ряд Фурье наилучшим образом приближает функцию**

Для каждой $f \in \mathcal{H}$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для любой последовательности чисел α_n и любого m выполнено:

$$\|f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n) \varphi_n\|. \quad (17)$$

Доказательство:

Найдем коэффициенты α_n , при которых сумма $\sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n$ наилучшим образом приближает функцию f . Рассмотрим квадрат нормы их разности.

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n\|^2 &= \left(f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n \right) = (f, f) - \sum_{n=1}^m \alpha_n (\varphi_n, f) - \\ &- \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n} (f, \varphi_n) + \sum_{n,k=1}^m \alpha_n \overline{\alpha_k} (\varphi_n, \varphi_k) = \left/ \begin{array}{l} (f, \varphi_n) = C_n \text{ — коэфф. Фурье} \\ (\varphi_n, f) = \overline{C_n}, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{nk} \end{array} \right/ \\ &= (f, f) - \sum_{n=1}^m \alpha_n \overline{C_n} - \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n} C_n + \sum_{n=1}^m C_n \overline{C_n} + \sum_{n=1}^m \alpha_n \overline{\alpha_n} - \sum_{n=1}^m C_n \overline{C_n} = \\ &= (f, f) + \sum_{n=1}^m (\alpha_n - C_n)(\overline{\alpha_n} - \overline{C_n}) - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 = (f, f) - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 + \sum_{n=1}^m |\alpha_n - C_n|^2. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых не зависят от выбора α_n . Последнее слагаемое неотрицательно. Мы хотим добиться минимального значения всей суммы, которое будет достигнуто, если третье слагаемое равно нулю, то есть $\alpha_n = C_n = (f, \varphi_n)$. Полученное равенство верно для любого $m \in \mathbb{N}$. Выбрав $\alpha_n = C_n$ для каждого n , получим:

$$\|f - \sum_{n=1}^m C_n \varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^m |C_n|^2, \quad (18)$$

верное для всех m . Таким образом, минимум нормы достигается на коэффициентах Фурье $C_n = (f, \varphi_n)$. ■

2) Неравенство Бесселя

Для каждой $f \in \mathcal{H}$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \quad (19)$$

что означает, в частности, сходимость ряда Фурье (не обязательно к функции f).

Доказательство:

В левой части (18) стоит квадрат нормы, то есть неотрицательное число, поэтому $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 \geq 0 \quad \forall m$, то есть частичные суммы положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ ограничены: $\sum_{n=1}^m |C_n|^2 \leq \|f\|^2$. Следовательно, ряд сходится и верно неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

■

3) Равенство Парсеваля

Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис, то ряд Фурье для функции f сходится к f и выполнено:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \quad (20)$$

Доказательство:

Если φ_n – ортонормированный базис, то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n. \quad (21)$$

Домножим скалярно равенство (21) на φ_k :

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \underbrace{(\varphi_n, \varphi_k)}_{=\delta_{nk}} = \beta_k,$$

то есть коэффициенты в разложении f по базису φ_n есть коэффициенты Фурье ($\beta_k = C_k = (f, \varphi_k)$). Тогда $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n$ и левая часть в равенстве (18) стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Получаем равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2.$$

■

8. Операторы

Определение

Оператором называется отображение $A : F \rightarrow G$, где F, G – некоторые пространства. Область определения оператора $D(A) \subset F$ – множество, на котором задано действие оператора. Область значений оператора $R(A) = AD(A) \subset G$.

Определение

Операторы A_1 и A_2 называются равными, если:

- 1) $D(A_1) = D(A_2)$;
- 2) $A_1 f = A_2 f \quad \forall f \in D(A_1)$.

Определение

Оператор B называется расширением A ($B \supset A$), а A – сужением B ($A \subset B$), если:

- 1) $D(B) \supset D(A)$;
- 2) $Bf = Af \quad \forall f \in D(A)$.

Замечание

В дальнейшем мы будем иметь дело с ситуацией, когда $F = G$, где F, G – это линейные нормированные либо гильбертовы пространства.

Определение

Оператор A называется непрерывным в точке $f \in D(A)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall g \in D(A) : \quad \|f - g\| < \delta \Rightarrow \|Af - Ag\| < \varepsilon.$$

Необходимо, чтобы область определения оператора являлась линейным

многообразием, то есть линейные операции над множеством не должны выводить из множества.

Определение

Оператор называется непрерывным в области G , если он непрерывен для каждой $f \in G$.

Определение

Оператор A называется линейным, если для любых $f, g \in D(A)$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнено: $A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$.

Примеры

1) Дифференциальный оператор:

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] : Af = f', D(A) = C^\infty[0, 1],$$

где $C^\infty[0, 1]$ – бесконечно дифференцируемые функции на $[0, 1]$.

Также можно рассмотреть дифференциальный оператор, являющийся расширением A ($B \supset A$):

$$B : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] : Bf = f', D(B) = C^1[0, 1],$$

где $C^1[0, 1]$ – непрерывно дифференцируемые функции на $[0, 1]$.

2) Интегральный оператор

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] : (Af)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt,$$

где $K(s, t)$ – некоторая непрерывная функция двух переменных на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$D(A) = C[0, 1].$$

Функция $K(s, t)$ называется ядром интегрального оператора A .

9. Обратные операторы

Определение

Обратным оператором к оператору A называется оператор A^{-1} , определяемый следующими условиями:

$$1) D(A^{-1}) = R(A),$$

$$R(A^{-1}) = D(A);$$

$$2) A^{-1}Af = f \quad \forall f \in D(A),$$

$$AA^{-1}f = f \quad \forall f \in R(A).$$

Вопрос существования обратного оператора – это вопрос об условиях разрешимости операторного уравнения:

$$Af = h. \quad (22)$$

В конечномерном случае эти условия формулирует альтернатива Фредгольма.

Альтернатива Фредгольма

Либо однородное уравнение $Af = 0$ имеет нетривиальное решение, либо соответствующее неоднородное уравнение $Af = h$ разрешимо единственным образом при любой правой части.

В бесконечномерном случае ситуация значительно сложнее. Альтернатива Фредгольма здесь работает не всегда.

Пример нарушения альтернативы Фредгольма

Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] : (Af)(s) = \int_0^s f(t)dt$.

1) Покажем, что однородное уравнение $Af = 0$ имеет только тривиальное решение $f \equiv 0$.

$f \in C[0, 1]$, соответственно, по теореме Барроу существует производная от интеграла по верхнему пределу:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\int_0^s f(t)dt \right)' = f(s) \\ f \in C[0, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow Af \in C^1[0, 1].$$

В силу определения оператора A :

$$Af = 0 \Leftrightarrow \int_0^s f(t)dt = 0 \quad \forall s. \quad (23)$$

Продифференцируем равенство (23) и получим $f(s) = 0$ для любого s .

Таким образом, однородное уравнение имеет только тривиальное реше-

ние ($Af = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$).

2) Теперь приведем пример неразрешимого неоднородного уравнения.

Заметим, что:

$$\int_0^s f(t)dt \Big|_{s=0} = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим $h \in C[0, 1]$ такое, что:

$$h(0) \neq 0. \quad (25)$$

Тогда уравнение $\int_0^s f(t)dt = h(s)$ не имеет решения, так как при $s = 0$ оно не выполнено в силу (24), (25), соответственно, альтернатива Фредгольма нарушена.

10. Ограниченные операторы

Определение

Линейный оператор A называется ограниченным, если существует $C > 0$ такое, что для любого $f \in D(A)$ справедливо: $\|Af\| \leq C\|f\|$.

Наименьшая из таких констант C называется нормой оператора:

$$\|A\| = \inf C.$$

Способ вычисления нормы оператора

$$\begin{aligned} \|Af\| \leq C\|f\| \quad \forall f \in D(A) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\|Af\|}{\|f\|} \leq C \quad \forall f \in D(A), \quad f \neq 0. \end{aligned}$$

Мы получим $\|A\| = \inf C$, если найдем наибольшее значение для $\frac{\|Af\|}{\|f\|}$:

$$\|A\| = \inf C = \sup_{f \in D(A)} \frac{\|Af\|}{\|f\|}.$$

Можно считать норму по-другому:

$$\|A\| = \sup_{f \in D(A)} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \left/ \begin{array}{c} \text{по свойству нормы} \\ \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \end{array} \right/ = \sup_{f \in D(A)} \left\| \frac{1}{\|f\|} Af \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left/ \begin{array}{c} \text{из-за линейности} \\ \text{оператора } A \end{array} \right/ = \sup_{f \in D(A)} \left\| A \frac{f}{\|f\|} \right\| = \\
&= \left/ \begin{array}{c} \text{обозначение:} \\ \frac{f}{\|f\|} = g \in D(A), \|g\| = 1 \end{array} \right/ = \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(A)}} \|Ag\|. \quad (26)
\end{aligned}$$

Теорема 1

Если линейный оператор непрерывен в некоторой точке $f \in D(A)$, то он непрерывен на всей области определения $D(A)$.

Доказательство:

Пусть A непрерывен в точке $f \in D(A)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall g \in D(A) : \|f - g\| < \delta \Rightarrow \|Af - Ag\| < \varepsilon. \quad (27)$$

Докажем непрерывность оператора A в произвольной точке $h \in D(A)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое же $\delta > 0$, как в формуле (27). Докажем, что для любого $g \in D(A)$: $\|h - g\| < \delta$ будет выполнено $\|Ah - Ag\| < \varepsilon$. Действительно, элемент $f + h - g \in D(A)$ удовлетворяет условию:

$$\|f - (f + h - g)\| = \|h - g\| < \delta.$$

Тогда по определению непрерывности в точке f (формула (27)) выполнено:

$$\begin{aligned}
\|Af - A(f + h - g)\| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left/ \begin{array}{c} \text{из-за линейности} \\ \text{оператора } A \end{array} \right/ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|Af - Af - Ah + Ag\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|Ah - Ag\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Следствие

Для доказательства непрерывности линейного оператора достаточно проверять его непрерывность в точке 0.

Теорема 2

Для линейных операторов непрерывность эквивалентна ограниченности.

Доказательство:

Согласно следствию, достаточно проверять, что ограниченность эквивалентна непрерывности в точке 0.

1) Докажем, что из ограниченности следует непрерывность в точке 0.

Согласно определению:

A – ограничен $\Leftrightarrow \exists C > 0 \forall f \in D(A) : \|Af\| \leq C\|f\|$.

$\forall \varepsilon > 0$ возьмем $f \in D(A)$ такую, что: $\|f - 0\| = \|f\| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Тогда $\|Af - A0\| = \|Af\|$ и, исходя из ограниченности A ,

$$\|Af\| \leq C\|f\| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что:

$$\|f - 0\| < \frac{\varepsilon}{C} = \delta \Rightarrow \|Af - A0\| < \varepsilon.$$

2) Вместо того, чтобы доказывать обратное следствие, мы будем доказывать прямое для противоположных объектов.

Покажем, что неограниченность ведет к не непрерывности в 0. По формуле (26), если оператор A неограничен:

$$\sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(A)}} \|Ag\| = \infty.$$

Это означает, что существует последовательность $\{g_n\}$ такая, что:

$\|g_n\| = 1, \quad \|Ag_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ следующего вида:

$$f_n = \frac{g_n}{\|Ag_n\|},$$

для неё будет выполнено:

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \frac{1}{\|Ag_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{так как } \|Ag_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty),$$

с другой стороны:

$$\|Af_n - A0\| = \|Af_n\| = \left\| \frac{Ag_n}{\|Ag_n\|} \right\| = 1 \not\rightarrow 0.$$

Получим противоречие с определением непрерывности в точке 0, так как $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, но $Af_n \not\rightarrow 0$.



Замечание

В конечномерном пространстве все линейные операторы ограничены (а значит и непрерывны по теореме 2). В бесконечномерном пространстве существуют линейные неограниченные операторы.

Пример

Оператор дифференцирования $Af = f'$ в пространстве $C[0, 1]$ неограничен. Возьмем последовательность $f_n(t) = t^n$. Тогда:

$$\|f_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [0,1]} t^n = 1,$$

$$\|f'_n(t)\| = \max_{t \in [0,1]} nt^{n-1} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Итак, мы построили последовательность, для которой $\|f_n\| = 1$, но $\|Af_n\| = \|f'_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, то есть $\sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in D(A)}} \|Af\| = \infty$, что эквивалентно неограниченности оператора A .

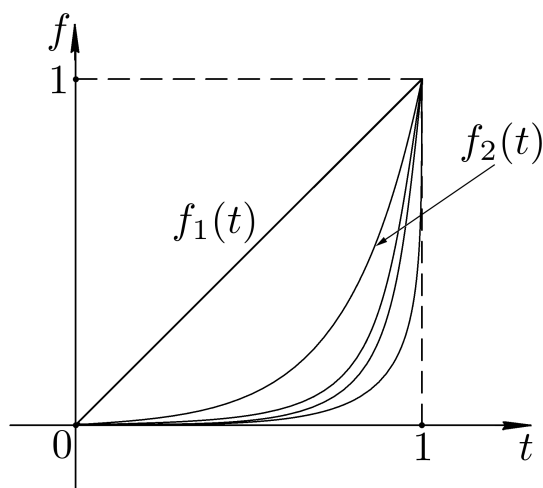


Рис. 9: Последовательность $f_n(t) = t^n$

Пример вычисления нормы оператора

Пусть оператор $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ задается матрицей $\{a_{ij}\}$, то есть для любого

вектора $f = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ выполнено:

$$(Af)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим норму в $\mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$\|f\|_\infty = \max_i |\xi_i|,$$

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |\xi_j| \leq \left/ \begin{array}{c} \text{учитывая, что} \\ |\xi_j| \leq \max_j |\xi_j| \end{array} \right/ \leq \\ &\leq \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \max_j |\xi_j| = \left/ \begin{array}{c} \text{учитывая, что} \\ \max_j |\xi_j| = \|f\|_\infty \end{array} \right/ = \\ &= \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Доказали, что оператор A ограничен, так как мы нашли константу $C = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, при которой неравенство $\|Af\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ выполнено для любого f . Пусть максимум достигается при $i = k$, то есть $C = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$. Покажем, что C в неравенстве нельзя уменьшить. Для этого достаточно предъявить элемент (вектор), для которого выполняется обратное неравенство $\|Af\|_\infty \geq C\|f\|_\infty$.

Выберем $f = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ следующим образом: $\xi_j = \text{sign } a_{kj}$.

Тогда $\|f\|_\infty = \max_j |\text{sign } a_{kj}| = 1$.

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} \xi_j \right| = \left/ a_{kj} \cdot \xi_j = a_{kj} \cdot \text{sign } a_{kj} = |a_{kj}| \right/ = \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = C = \left/ \|f\|_\infty = 1 \right/ = C\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Значит, C нельзя уменьшить, то есть:

$$\|A\| = C = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Пример вычисления нормы оператора в бесконечномерном пространстве

Рассмотрим оператор $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, действующий следующим образом: $(Af)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t)dt$ – интегральный оператор с ядром $K(s, t)$, где $K(s, t)$ – непрерывная функция двух переменных в квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Определим норму в $C[a, b]$ следующим образом:

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Найдем $\|A\|$:

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \max_{s \in [a, b]} \left| \int_a^b K(s, t)f(t)dt \right| \leq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)||f(t)|dt \leq \\ &\leq \left/ \begin{array}{c} \text{учитывая, что} \\ |f(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| = \|f\|_\infty \end{array} \right/ \leq \left(\max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|dt \right) \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Итак, A ограничен и выполнено:

$$\|A\| \leq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|dt.$$

Чтобы доказать, что эта константа и дает норму, достаточно предъявить функцию, для которой выполняется обратное неравенство или достигается равенство. $\int_a^b |K(s, t)|dt$ – непрерывная функция от s на $[a, b]$, поэтому она достигает максимума в некоторой точке $s_0 \in [a, b]$.

Если $K(s, t) \geq 0$, то возьмем $f(t) \equiv 1$:

$$\|Af\|_\infty = \max_{s \in [a, b]} \left| \int_a^b K(s, t)dt \right| = \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|dt =$$

$$= \left(\max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt \right) \cdot \|f\|_\infty,$$

то есть $\|A\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|Af\|_\infty \geq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt$.

Если $K(s, t)$ меняет знак, то предъявить функцию, на которой константа $\max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt$ точно достигается, не удастся, так как для этого требуется взять функцию $f(t) = \text{sign } K(s_0, t)$, которая не является непрерывной. Однако можно сколь угодно близко приблизиться к нужной константе, выбирая непрерывные приближения кусочно-постоянной функции. Это и позволяет доказать, что норма равна указанной величине. Подробного доказательства мы здесь приводить не будем.

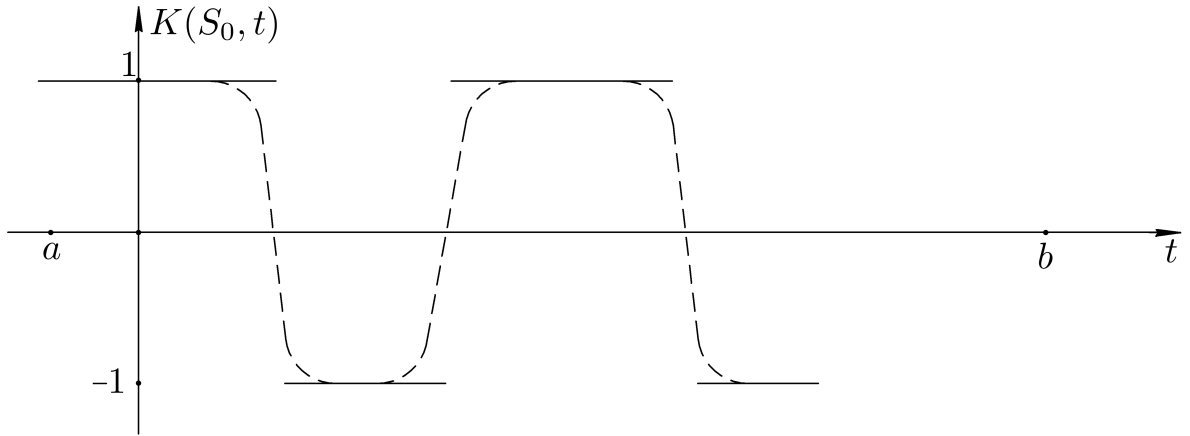


Рис. 10: Функция $f(t) = \text{sign } K(s_0, t)$

11. Симметрические и самосопряженные операторы

Будем рассматривать операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть оператор A имеет плотную область определения $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Определим оператор A^* , сопряженный к A . Для того, чтобы ввести оператор, необходимо описать его область определения и задать действие оператора на элементы из этой области.

Определение

Элемент g принадлежит области определения $D(A^*)$, если существует

$g^* \in \mathcal{H}$ такой, что для каждой $f \in D(A)$ выполнено $(Af, g) = (f, g^*)$.

Действие сопряженного оператора A^* определим следующим образом:

$$g^* = A^*g.$$

Замечание

Условие плотности области определения оператора A имеет значение, так как если $\overline{D(A)} \neq \mathcal{H} \Rightarrow \overline{D(A)}$ – подпространство $\mathcal{H}$, следовательно, существует элемент $h \perp \overline{D(A)} \Rightarrow h \perp D(A)$.

Согласно определению:

$$(Af, g) = (f, g^*) = (f, g^*) + \underbrace{(f, h)}_{=0} = \left/ \text{т.к. } f \in D(A), h \perp D(A) \right/ = (f, g^* + h),$$

то есть оператор A^* будет определен неоднозначно.

Определение

Оператор A называется симметрическим (симметричным), если для любых $f, g \in D(A)$ выполнено: $(Af, g) = (f, Ag)$, при этом $D(A)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$.

Определение

Оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Замечание

Оператор может быть симметрическим, но не самосопряженным. Для самосопряженного должно быть выполнено:

$$\begin{cases} D(A) = D(A^*) \\ Af = A^*f \end{cases};$$

а для симметрического возможна ситуация $D(A) \subset D(A^*)$.

Теорема

Если оператор A ограничен, то оператор A^* тоже ограничен и выполнено:

$$\|A^*\| = \|A\|. \quad (28)$$

Доказательство:

Согласно определению сопряженного оператора:

$$(Af, g) = (f, A^*g). \quad (29)$$

Пусть $f = A^*g$. Тогда:

$$(AA^*g, g) = (A^*g, A^*g). \quad (30)$$

Рассмотрим $\|A^*g\|^2$.

$$\begin{aligned} \underbrace{\|A^*g\|^2}_{\geq 0} &= (A^*g, A^*g) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (30)}}{=} (AA^*g, g) \leq \left/ \begin{array}{c} \text{Нер-во Коши-Буняковского-Шварца:} \\ |(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)} \end{array} \right/ \\ &\leq \underbrace{\sqrt{(AA^*g, AA^*g)}}_{=\|AA^*g\|} \underbrace{\sqrt{(g, g)}}_{=\|g\|} = \|AA^*g\| \|g\| \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ A - \text{ограничен}}}{\leq} \|A\| \|A^*g\| \|g\|. \end{aligned} \quad (31)$$

Сокращая обе части неравенства (31) на $\|A^*g\|$, получим:

$$\|A^*g\| \leq \|A\| \|g\|. \text{ Следовательно, оператор } A^* \text{ ограничен и } \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Теперь возьмем $g = Af$ в равенстве (29):

$$(Af, Af) = (f, A^*Af). \quad (32)$$

Рассмотрим $\|Af\|^2$.

$$\begin{aligned} \underbrace{\|Af\|^2}_{\geq 0} &= (Af, Af) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (32)}}{=} (f, A^*Af) \leq \left/ \begin{array}{c} \text{Нер-во Коши-Буняковского-Шварца:} \\ |(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)} \end{array} \right/ \\ &\leq \underbrace{\sqrt{(f, f)}}_{=\|f\|} \underbrace{\sqrt{(A^*Af, A^*Af)}}_{=\|A^*Af\|} = \|f\| \|A^*Af\| \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ A^* - \text{ограничен}}}{\leq} \|f\| \|A^*\| \|Af\|. \end{aligned} \quad (33)$$

Сокращая обе части неравенства (33) на $\|Af\|$, получим:

$$\|Af\| \leq \|A^*\| \|f\|. \text{ Следовательно, } \|A\| \leq \|A^*\|. \text{ Итак, } \|A^*\| = \|A\|.$$

■

Пример 1

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, пусть в нём есть ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Пусть оператор A задан матрицей $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ в базисе $\{e_i\}$. Найдём A^* . Рассмотрим векторы f, g в базисе $\{e_i\}$:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad g = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j, \quad Af = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \alpha_i \right) e_k. \\
 f &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \\
 (Af, g) &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \alpha_i \right) e_k, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = \left\langle (f, \alpha g) = \overline{\alpha}(f, g) \right\rangle = \\
 &= \sum_{k,j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \alpha_i \right) \overline{\beta_j} \underbrace{(e_k, e_j)}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \alpha_i \right) \overline{\beta_k} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} \alpha_i \overline{\beta_k} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n a_{ki} \overline{\beta_k} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\sum_{k=1}^n a_{ki} \beta_k} = (f, g^*). \tag{34}
 \end{aligned}$$

Согласно определению скалярного произведения:

$$(f, g) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \underbrace{(e_i, e_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i},$$

то есть в силу формулы (34) имеем:

$$g^* = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} \beta_k \right) e_i = A^* g. \tag{35}$$

Таким образом, мы нашли матрицу оператора A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Пример 2

Найдем сопряженный оператор к интегральному в пространстве $L_2(a, b)$.

$$(Af)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t)dt,$$

где $K(s, t)$ – непрерывная функция двух переменных в квадрате $[a, b] \times [a, b]$.

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \\ (Af, g) &= \int_a^b (Af)(s)\overline{g(s)}ds = \int_a^b \left(\int_a^b K(s, t)f(t)dt \right) \overline{g(s)}ds = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(s, t)f(t)\overline{g(s)}ds \right) dt = \\ &= \int_a^b f(t) \overline{\left(\int_a^b K(s, t)g(s)ds \right)} dt = (f, g^*). \end{aligned} \quad (36)$$

$$g^*(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)}g(s)ds = (A^*g)(t). \quad (37)$$

Согласно определению ядра интегрального оператора:

$$\left. \begin{aligned} (A^*g)(s) &= \int_a^b \tilde{K}(s, t)g(t)dt \\ \text{По формуле (37): } (A^*g)(s) &= \int_a^b \overline{K(t, s)}g(t)dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{K}(s, t) = \overline{K(t, s)},$$

откуда следует условие самосопряженности интегрального оператора:

$$K(s, t) = \overline{K(t, s)} \quad (38)$$

Пример 3

Найдем сопряженный оператор к оператору дифференцирования в пространстве $L_2(a, b)$.

1) Определим оператор дифференцирования в $L_2(a, b)$ следующим образом:

$$Af = f',$$

где $D(A) = \{f \in C^1(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}$.

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_a^b f'(t) \overline{g(t)} dt = f(t) \overline{g(t)} \Big|_a^b - \int_a^b f(t) \overline{g'(t)} dt = \\ &= \left/ \begin{array}{l} f \in D(A) \\ \Rightarrow f(a) = f(b) = 0 \end{array} \right/ = \left/ \begin{array}{ll} u = \overline{g(t)} & du = \overline{g'(t)} dt \\ v = f(t) & dv = f'(t) dt \end{array} \right/ = \\ &= \int_a^b f(t) (-\overline{g'(t)}) dt = (f, g^*). \end{aligned} \quad (39)$$

Итак:

$$g^* = A^* g = -\overline{g'(t)}, \quad (40)$$

то есть сопряженный оператор A^* действует не так, как исходный. Это означает, что оператор A не может быть самосопряженным ни при каких краевых условиях на функцию f .

2) Попробуем определить оператор дифференцирования в $L_2(a, b)$ по-другому:

$$Af(t) = if'(t),$$

где $D(A) = \{f \in C^1(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}$.

$$\begin{aligned} (Af, g) &= i \underbrace{(f(b) \overline{g(b)} - f(a) \overline{g(a)})}_{=0} - i \int_a^b f(t) \overline{g'(t)} dt = \\ &= \int_a^b f(t) (\overline{ig'(t)}) dt = (f, g^*), \end{aligned} \quad (41)$$

$$g^* = A^* g = ig'(t), \quad (42)$$

то есть сопряженный оператор A^* действует так же, как исходный. Однако оператор A по-прежнему не может быть самосопряженным, так как

в $D(A)$ на функцию f наложены краевые условия, а на функцию g таких условий не возникло. Таким образом, оператор A является симметрическим, но не самосопряженным.

$$D(A) \subset D(A^*) \Rightarrow A \subset A^*.$$

3) Попробуем построить самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A . Для этого нам необходимо обеспечить выполнение следующего условия:

$$f(a)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g(b)} = 0. \quad (43)$$

Для самосопряженности оператора $\tilde{A}$ необходимо, чтобы функции f и g удовлетворили одинаковым граничным условиям, соответственно, в формуле (43) можно положить $f = g$:

$$\begin{aligned} f(a)\overline{f(a)} - f(b)\overline{f(b)} = 0 &\Leftrightarrow |f(a)|^2 - |f(b)|^2 = 0 \Leftrightarrow |f(a)| = |f(b)| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(b) = e^{i\theta} f(a), \quad \text{где } \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставим (44) в (43):

$$f(a)\overline{g(a)} - e^{i\theta} f(a)\overline{g(b)} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{f(a)}, \quad \text{где } f(a) \neq 0.$$

Мы строим расширение $\tilde{A}$ оператора A , а значит $D(\tilde{A})$ отличается от $D(A)$. В частности, мы можем выбрать $f(a) \neq 0$.

$$\overline{g(a)} = e^{i\theta} \overline{g(b)} \Leftrightarrow \overline{g(b)} = e^{-i\theta} \overline{g(a)} \Leftrightarrow g(b) = e^{i\theta} g(a). \quad (45)$$

Получили, что краевые условия на функциях f и g совпадают, соответственно, оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным.

12. Построение обратного оператора

Решение уравнения $Af = g$ сводится к нахождению обратного оператора A^{-1} :

$$f = A^{-1}g. \quad (46)$$

Рассмотрим частный случай оператора A :

$$A = I - M, \quad (47)$$

где I – единичный оператор, M – малый по норме оператор: $\|M\| < 1$.

$$Af = g \Leftrightarrow (I - M)f = g \Leftrightarrow f = g + Mf. \quad (48)$$

Уравнение (48) можно решать методом итераций. Построим последовательность $\{f_n\}$, которая будет сходиться к решению уравнения.

Пусть $f_0 = g$.

$$\begin{aligned} f_1 &= g + Mf_0 = g + Mg, \\ f_2 &= g + Mf_1 = g + Mg + M^2g, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= g + Mf_{n-1}. \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения будет иметь вид:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n \right) g. \quad (49)$$

С другой стороны:

$$f = (I - M)^{-1}g. \quad (50)$$

Формула (49) будет давать решение уравнения (48), если выполнено равенство:

$$(I - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n. \quad (51)$$

Эту формулу мы и будем доказывать. Для этого нам понадобятся некоторые факты из теории операторов.

Определение

Сумма операторов A и B с одинаковыми областями определения есть оператор $A + B$ с той же областью определения, действующей по правилу:

$$(A + B)f = Af + Bf.$$

Определение

Оператор αA , $\alpha \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), есть оператор с той же областью определения, действующий по правилу:

$$(\alpha A)f = \alpha(Af).$$

Определение

Нулевой оператор – это оператор, переводящий любой элемент в нулевой:

$$0f = 0.$$

Определение

Противоположный оператор к оператору A – это $(-1) \cdot A$.

Теорема 1

Множество линейных операторов с одинаковой областью определения образует линейное пространство.

Доказательство теоремы сводится к проверке аксиом линейного пространства.

Теорема 2

Норма оператора может быть взята в качестве нормы в линейном пространстве ограниченных операторов.

Доказательство сводится к проверке аксиом нормы в линейном пространстве.

Следствие

Таким образом, множество линейных ограниченных операторов образует линейное нормированное пространство.

Теорема 3

Если линейное нормированное пространство, на котором действуют линейные ограниченные операторы, полное, то и пространство самих операторов полное по операторной норме.

Без доказательства.

Теорема 4

Пусть A и B – линейные ограниченные операторы.

Тогда $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \|ABg\| = \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \frac{\|ABg\|}{\|Bg\|} \|Bg\| \leq \\
&\leq \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \frac{\|ABg\|}{\|Bg\|} \cdot \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \|Bg\| \leq \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \frac{\|ABg\|}{\|Bg\|} \cdot \overbrace{\sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(B)}} \|Bg\|}^{=\|B\|} \leq \\
&\leq \left/ \begin{array}{l} D(AB) = \{f : f \in D(B), Bf \in D(A)\} \\ \text{то есть } D(B) \text{ есть расширение } D(AB) \end{array} \right/ \leq \\
&\leq \left/ \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in D(AB)}} \frac{\|ABg\|}{\|Bg\|} = \sup_{\substack{f \in D(A) \\ f=Bg \\ g \in D(AB) \\ \|g\|=1}} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \leq \sup_{f \in D(A)} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \|A\| \right/ \leq \\
&\leq \underbrace{\sup_{f \in D(A)} \frac{\|Af\|}{\|f\|}}_{=\|A\|} \cdot \|B\| = \|A\| \cdot \|B\|.
\end{aligned}$$

■

Теорема 5

В банаховом пространстве из абсолютной сходимости ряда следует его сходимостъ: если $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ сходится, то и $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ сходится.

Доказательство:

Сходимость ряда – это сходимость последовательности его частичных сумм:

$$S_m = \sum_{n=0}^m f_n.$$

В силу полноты пространства достаточно доказать фундаментальность последовательности $\{S_m\}$, так как в полном пространстве любая фундаментальная последовательность сходится.

Пусть числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ сходится. Тогда сходится последовательность его частичных сумм. Следовательно, эта последовательность удовлетворяет критерию Коши, то есть является фундаментальной: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любого $m > k > N$ выполняется: $\left| \sum_{n=0}^m \|f_n\| - \sum_{n=0}^k \|f_n\| \right| < \varepsilon$, соответственно, $\left| \sum_{n=k+1}^m \|f_n\| \right| < \varepsilon$. Тогда для данного ε будет выполнено:

$$\|S_m - S_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^m f_n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^m \|f_n\| < \varepsilon,$$

то есть $\{S_m\}$ – фундаментальная. В полном пространстве фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства, то есть последовательность частичных сумм $\{S_m\}$ сходится, и, соответственно, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ сходится. ■

Теорема 6 (об обращении оператора, близкого к единичному)

Пусть M – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ и $\|M\| < 1$. Тогда существует обратный оператор:

$$(I - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n, \quad (52)$$

причем ряд сходится по операторной норме и выполнено:

$$\|(I - M)^{-1}\| \leq (1 - \|M\|)^{-1}. \quad (53)$$

Доказательство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|M^n\| \leq \text{/по теореме 4/} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n = \text{/}\|M\| < 1\text{/} = \frac{1}{1 - \|M\|} < \infty,$$

значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|M^n\|$ сходится. Соответственно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ сходится абсолютно, и, по теореме 5, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ сходится к элементу этого пространства. Но так как в пространстве есть только линейные ограниченные операторы, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ – линейный ограниченный

оператор. Проверим, что $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ – это обратный оператор к $(I - M)$.

$$\begin{aligned} (I-M) \sum_{n=0}^k M^n &= \sum_{n=0}^k M^n (I-M) = I - M + M - M^2 + M^2 - M^3 + \dots - M^{k+1} = \\ &= I - M^{k+1}. \end{aligned} \quad (54)$$

$$\|M^{k+1}\| \leq \|M\|^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{так как } \|M\| < 1) \Rightarrow M^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

При $k \rightarrow \infty$ равенство (54) примет вид:

$$(I - M) \sum_{n=0}^{\infty} M^n = \sum_{n=0}^{\infty} M^n (I - M) = I,$$

откуда $(I - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$.

Оценим норму обратного оператора:

$$\begin{aligned} \|(I - M)^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} M^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M^n\| \leq \text{/по теореме 4/} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n = \frac{1}{1 - \|M\|}. \end{aligned}$$

■

Замечание

Формула $\sum_{n=0}^{\infty} M^n = (I - M)^{-1}$ – это аналог формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для операторов.

Задача

Привести пример операторов A, B , для которых $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$.

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^2$.

$\|A\| > 0$, $\|B\| > 0$, так как A и B – ненулевые матрицы, а нулевая норма свойственна только нулевой матрице.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то есть } \|AB\| = 0.$$

Этому примеру можно дать геометрическую интерпретацию, если рассматривать операторы A и B как операторы проектирования на оси OX и OY соответственно.

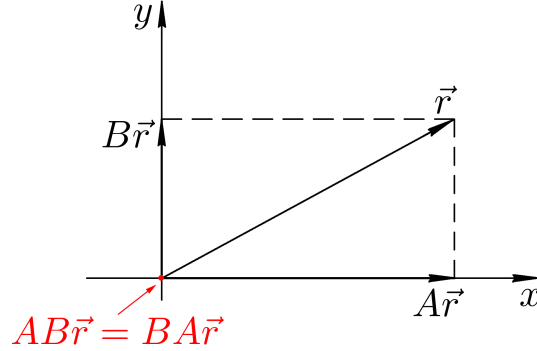


Рис. 11: Геометрическая интерпретация примера

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\|AB\| = \|BA\| = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \|A\vec{r}\| \leq \|\vec{r}\| \Rightarrow \|A\| \leq 1 \\ \|A\| = \sup_{\vec{r}} \frac{\|A\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} \geq \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} = 1 \Rightarrow \|A\| \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \|A\| = 1.$$

Возьмем $\vec{r}$ на оси OX , т.е. $A\vec{r} = \vec{r}$

Аналогично $\|B\| = 1$. $\|AB\| = 0 < 1 = \|A\| \cdot \|B\|$.

Теорема 7 (об обращении оператора, близкого к обратимому)

Пусть для линейного ограниченного оператора L_0 , действующего в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ ($D(L_0) = \mathcal{B}$), известен ограниченный обратный оператор L_0^{-1} . Найдём обратный оператор к оператору L , близкому к L_0 . Пусть $A = L_0 - L$, соответственно:

$$L = L_0 - A = L_0(I - L_0^{-1}A). \quad (55)$$

Допустим, что выполнено неравенство:

$$\|L_0^{-1}A\| < 1. \quad (56)$$

Тогда по теореме 6 у оператора $I - L_0^{-1}A$ существует ограниченный обратный оператор $(I - L_0^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}A)^n$. Тогда:

$$L^{-1} = (L_0(I - L_0^{-1}A))^{-1} = \underbrace{(I - L_0^{-1}A)^{-1}}_{\text{ограничен}} \underbrace{L_0^{-1}}_{\text{ограничен}} = \sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}A)^n L_0^{-1}, \quad (57)$$

следовательно, L^{-1} – ограничен.

$$\begin{aligned} \|L^{-1} - L_0^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}A)^n L_0^{-1} - L_0^{-1} \right\| = \\ &= \left\| \cancel{(L_0^{-1}A)^0 L_0^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (L_0^{-1}A)^n L_0^{-1} - \cancel{L_0^{-1}} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(L_0^{-1}A)^n L_0^{-1}\| \leq \\ &\leq \|L_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|L_0^{-1}A\|^n = \|L_0^{-1}\| \cdot \frac{\|L_0^{-1}A\|}{1 - \|L_0^{-1} \cdot A\|} = \\ &= \|L_0^{-1}\| \cdot \|L_0^{-1}A\| (1 - \|L_0^{-1} \cdot A\|)^{-1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Теперь, когда все оценки получены и теорема доказана, мы можем точно сформулировать её условие.

Пусть для линейного ограниченного оператора L_0 , действующего в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ ($D(L_0) = \mathcal{B}$), известен ограниченный обратный оператор L_0^{-1} . Тогда если для оператора L , близкого к L_0 , выполнено: $\Delta = \|L_0^{-1}(L_0 - L)\| < 1$, то существует ограниченный оператор:

$$L^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}(L_0 - L))^n \right] L_0^{-1},$$

причем $\|L^{-1} - L_0^{-1}\| \leq \|L_0^{-1}\| \cdot \Delta \cdot (1 - \Delta)^{-1}$.

13. Замкнутые операторы

Определение

Оператор $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется замкнутым, если для любой последо-

вательности $\{f_n\}$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{cases} f_n \in D(L), \\ f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g. \end{cases}$$

будет выполнено:

$$\begin{cases} f \in D(L), \\ Lf = g. \end{cases}$$

Смысл этого определения становится понятен после сравнения с непрерывным оператором с замкнутой областью определения.

Замкнутый оператор L :

$$\underbrace{\forall \{f_n\} : \begin{cases} f_n \in D(L) \\ f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g \end{cases}}_{\text{ограничения на последовательность } \{f_n\}} \implies \underbrace{\begin{cases} f \in D(L) \\ Lf = g \end{cases}}_{\text{свойства предельных элементов}}.$$

Непрерывный оператор L с замкнутой областью определения:

$$\underbrace{\forall \{f_n\} : \begin{cases} f_n \in D(L) \\ f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \\ D(L) \text{ замкнута} \end{cases}}_{\text{ограничения на последовательность } \{f_n\}} \implies \underbrace{\begin{cases} f \in D(L) \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g \\ Lf = g \end{cases}}_{\text{свойства предельных элементов}}.$$

Замечание

Верно ли, что у замкнутого оператора область определения $D(L)$ есть замкнутое множество? Вообще говоря, неверно, ибо предельный элемент f будет принадлежать $D(L)$ только при выполнении дополнительного условия $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g)$. Таким образом, $D(L)$ может содержать не все свои предельные элементы, то есть не будет являться замкнутым множеством.

Утверждение

Из непрерывности оператора с замкнутой областью определения следует его замкнутость.

Доказательство:

Следствие в определении замкнутого оператора L проверяется на меньшем количестве последовательностей, а именно: проверяются только те сходящиеся последовательности, для которых выполнено: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g$. Если мы расширим количество последовательностей, на которых осуществляется проверка (убрав условие $\lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g$), то получим более жесткие условия на оператор L : в свойства оператора L будет добавлено условие существования $\lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n = g$ для всех рассматриваемых сходящихся последовательностей. Итак, на непрерывный оператор L с замкнутой областью определения наложены довольно жесткие условия. Если мы их ослабим, то получим замкнутый оператор L .

■

Замечание

Ранее в параграфе 1.10 “Ограниченные операторы” было проверено, что оператор дифференцирования не является ограниченным $\Rightarrow$ не является непрерывным. Однако он является замкнутым. Оставим этот факт без доказательства.

Определение

Пусть M и N – линейные пространства. Для $f_1, f_2 \in M$ и $g_1, g_2 \in N$ положим:

$$\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\}, \quad (59)$$

$$\alpha\{f_1, g_1\} = \{\alpha f_1, \alpha g_1\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (60)$$

Линейное пространство $M \times N$, состоящее из всевозможных элементов $\{f_1, g_1\}$, называют прямым произведением M и N .

График оператора

Несмотря на то, что определение достаточно хорошо показывает разницу между замкнутыми и непрерывными операторами, в нем достаточно сложно описывается последовательность $\{f_n\}$. Поэтому более удобным представляется другое определение. Оно основано на идее, что замкнутые операторы характеризует одновременная сходимость последовательностей $\{f_n\}$ и $\{Lf_n\}$, поэтому будем рассматривать вместо двух единственное гильбертово пространство. Для этого превратим линейное пространство $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ в гильбертово, определив в нем скалярное произведение и норму следующим образом:

$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2), \quad (61)$$

$$\|\{f_1, g_1\}\| = \sqrt{\|f_1\|^2 + \|g_1\|^2}. \quad (62)$$

Здесь f_1, g_1, f_2, g_2 – элементы $\mathcal{H}$, $\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}$ – элементы $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Проверив свойства скалярного произведения и нормы, нетрудно убедиться, что $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ будет гильбертовым пространством. По аналогии с графиком функции введем понятие графика оператора.

Определение

Графиком $G(L)$ оператора L называется линейное подпространство в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, состоящее из всех элементов вида $\{f, Lf\}$, где $f \in D(L)$. Аналогично обратный график $G'(L)$ есть множество всех $\{Lf, f\}$, где $f \in D(L)$.

Теорема 1

Линейный оператор $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ замкнут $\iff$ его график $G(L)$ замкнут (в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$).

Доказательство:

Необходимость.

Пусть оператор L замкнут. Тогда согласно определению замкнутого опе-

ратора:

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \\ Lf_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in D(L) \\ Lf = g \end{array} \right.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \Rightarrow \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ Lf_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \Rightarrow \|Lf_n - g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \|\{f_n - f, g_n - g\}\| = \sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|Lf_n - g\|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \{f_n, Lf_n\} \rightarrow \{f, \underbrace{g}_{=Lf}\} \text{ в } \mathcal{H} \times \mathcal{H} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ предел последовательности элементов графика функции $\{f_n, Lf_n\}$ сошелся к элементу графика функции $\{f, Lf\}$, что означает замкнутость графика $G(L)$.

Достаточность.

Пусть график $G(L)$ замкнут. Тогда для любой сходящейся в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ последовательности $\{f_n, Lf_n\}$ будет выполнено: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, $Lf_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Lf$ (так как иначе предельный элемент графика не будет принадлежать графику). Это и означает замкнутость оператора L .

■

Теорема 1 позволяет дать новое эквивалентное определение замкнутости оператора.

Определение

Линейный оператор $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется замкнутым, если замкнут его график.

Определение

Оператор L называется замыкаемым, если он имеет замкнутое расширение.

На первый взгляд может показаться, что всякий оператор замыкаем, поскольку график оператора всегда можно замкнуть, включив в него все предельные точки. Однако, это замыкание необязательно будет графиком линейного оператора. Следующая теорема позволит определить, замыкаем оператор или нет.

Теорема 2

Для того чтобы линейное подпространство $M \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ было графиком линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало элементов вида $\{0, g\}$, где $g \neq 0$.

Необходимость.

Пусть M – график некоторого оператора L . Если $\{0, g\} \in M$, то для некоторого $f \in D(L)$ получим:

$$\begin{cases} f \in D(L) \\ Lf = g \end{cases},$$

что невозможно для линейного оператора, так как L может перевести нулевой элемент только в нулевой.

Достаточность.

Пусть подпространство $M \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ не содержит элементов вида $\{0, g\}$, где $g \neq 0$. То есть из условия $\{0, g\} \in M$ следует, что $g = 0$. Покажем, как построить линейный оператор L , для которого M будет графиком. Начнем с области определения. Введем множество S по следующему правилу:

$$S = \{f : \exists g, \text{ такое что: } \{f, g\} \in M\}.$$

Покажем, что для данного f такое g будет единственно. Действительно, если g_1, g_2 – два таких элемента, то $\{f, g_1\} - \{f, g_2\} = \{0, g_1 - g_2\} \in M$ (поскольку M – линейное подпространство), тогда по предположению $g_1 - g_2 = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2$. Так как g по f находится единственным образом,

можно определить оператор L по правилу: $Lf = g$, где $D(L) = S$ и $G(L) = M$. Очевидно, что L будет линейным оператором. ■

Построение замыкания для оператора

Пусть L – незамкнутый оператор. $G(L)$ – его график. Построим замыкание $\overline{G(L)}$ множества $G(L)$. Если $\overline{G(L)}$ является графиком некоторого линейного оператора, то этот оператор назовем замыканием оператора L и обозначим его за $\bar{L}$. Если $\overline{G(L)}$ – не график линейного оператора, то оператор L незамыкаем. $\bar{L}$ является минимальным замкнутым расширением оператора L , так как график любого замкнутого расширения содержит $\overline{G(L)}$ (то есть $\overline{G(L)}$ уменьшить нельзя).

Определение

Минимальное замкнутое расширение $\bar{L}$ замыкаемого оператора L называется его замыканием.

Теорема 3 (теорема о замкнутом графике)

Замкнутый линейный оператор, определенный на всем пространстве ($\mathcal{H}$) ограничен.

Без доказательства.

Замечание

Теорема о замкнутом графике позволяет проверять ограниченность замкнутого линейного оператора с помощью проверки его области определения.

$D(L) = \mathcal{H} \implies$ оператор ограничен.

$D(L) \neq \mathcal{H} \implies$ оператор неограничен.

Теорема 4

$$G'(-L^*) = G(L)^\perp. \quad (63)$$

Обратный график оператора $(-L^*)$ совпадает с ортогональным дополнением графика оператора L .

Доказательство:

Согласно определению скалярного произведения в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (формула (61)):

$$\begin{aligned} (\{f, Lf\}, \{-L^*g, g\}) &= (f, -L^*g) + (Lf, g) = -(f, L^*g) + (Lf, g) = \\ &= -\underbrace{(f, L^*g)}_{\substack{\text{Согласно определению сопряженного оператора:} \\ (f, L^*g) = (Lf, g)}} + (Lf, g) = \\ &= -(Lf, g) + (Lf, g) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, элементы $\{-L^*g, g\} \in G'(-L^*)$ и $\{f, Lf\} \in G(L)$ ортогональны, то есть $G'(-L^*) \subset G(L)^\perp$. Для доказательства обратного включения возьмем произвольный элемент $\{h, g\} \in G(L)^\perp$. Тогда:

$$(f, g) + (Lf, g) = \underbrace{(\{f, Lf\}, \{h, g\})}_{\substack{\in G(L) \quad \in G(L)^\perp}} = 0. \quad (64)$$

Равенство (64) перепишем в виде:

$$(Lf, g) = (f, -h). \quad (65)$$

Отсюда согласно определению сопряженного оператора:

$$\begin{cases} g \in D(L^*) \\ -h = L^*g \end{cases} \Rightarrow \{h, g\} = \{-L^*g, g\} \in G'(-L^*),$$

то есть $G(L)^\perp \subset G'(-L^*)$. Доказали обратное включение, а значит имеет место равенство. ■

Лемма 1

Пусть M – линейное подпространство $\mathcal{H}$. Его ортогональное дополнение $M^\perp$ – замкнутое множество.

Доказательство:

Нам нужно доказать, что множество $M^\perp$ содержит все свои предельные точки, то есть для любой последовательности $\{f_n\}$ такой, что $f_n \in M^\perp$, $f_n \rightarrow f$, будет выполнено: $f \in M^\perp$. Нам известно следующее:

$$f_n \in M^\perp \Leftrightarrow (f_n, g) = 0 \quad \forall g \in M.$$

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow \|f_n - f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Нужно доказать: $(f, g) = 0$.

Используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получим:

$$|(f_n - f, g)| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \|g\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Следовательно, } (f_n - f, g) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \text{С другой стороны, } (f_n - f, g) = \underbrace{(f_n, g)}_{=0} - (f, g) \end{array} \right\} \Rightarrow (f, g) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Но (f, g) не зависит от n , то есть $(f, g) = 0$, а значит $f \in M^\perp$.

■

Теорема 5

Сопряженный оператор замкнут.

Доказательство:

Ортогональное дополнение $G(L)^\perp$ есть замкнутое множество (по лемме 1). По теореме 4: $G(L)^\perp = G'(-L^*)$. Следовательно, график $G'(-L^*)$ замкнут, то есть оператор L^* замкнут.

■

Следствие

Самосопряженный оператор замкнут.

Лемма 2

$$(\overline{L})^* = L^*. \quad (66)$$

Доказательство:

Операторы равны, если у них равны области определения и на этой области определения они действуют одинаково:

- 1) $D((\bar{L})^*) = D(L^*)$,
- 2) $(\bar{L})^*g = L^*g \quad \forall g \in D(L^*)$.

Докажем, что $D(L^*) \subset D((\bar{L})^*)$. Пусть $g \in D((\bar{L})^*)$, то есть:

$$\exists h : \quad \forall f \in D(\bar{L}) : \quad (\bar{L}f, g) = (f, h), \quad \text{где } h = (\bar{L})^*g. \quad (67)$$

Возьмем произвольный элемент $f \in D((\bar{L})^*)$. Замыкание оператора L есть замыкание графика L , то есть присоединение к $G(L)$ всех его предельных элементов. Следовательно, любой элемент $(f, \bar{L}f)$ из $G(\bar{L})$ представим как предел элементов $(f_n, Lf_n) \in G(L)$, то есть:

$$\begin{cases} f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \\ \bar{L}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n \end{cases}, \quad f_n \in D(L).$$

Тогда:

$$(\bar{L}f_n, g) \underset{\substack{\uparrow \\ f_n \in D(L)}}{=} (Lf_n, g) = (f_n, L^*g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, L^*g). \quad (68)$$

/ На $D(L)$ операторы L и $\bar{L}$ действуют одинаково. /

С другой стороны:

$$(\bar{L}f_n, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\bar{L}f, g). \quad (69)$$

Из (68) и (69) получаем:

$$(\bar{L}f, g) = (f, L^*g) = (f, h), \quad \text{где } h = L^*g. \quad (70)$$

Тогда из определения (67) получаем, что $g \in D((\bar{L})^*)$. Таким образом,

$D(L^*) \subset D((\bar{L})^*)$. Согласно определению сопряженного оператора:

$$(\bar{L}f, g) = (f, (\bar{L})^*g). \quad (71)$$

Согласно равенству (70),

$$(\bar{L}f, g) = (f, L^*g). \quad (72)$$

Следовательно, $(f, (\bar{L})^*g) = (f, L^*g) \quad \forall g \in D(L^*)$, то есть операторы действуют одинаково:

$$(\bar{L})^*g = L^*g \quad \forall g \in D(L^*).$$

Теперь докажем, что $D((\bar{L})^*) \subset D(L^*)$. Пусть $g \in D((\bar{L})^*)$. Тогда согласно определению сопряженного оператора:

$$\exists h : \quad \forall f \in D(\bar{L}) : \quad (\bar{L}f, g) = (f, h), \quad \text{где } h = (\bar{L})^*g. \quad (73)$$

Если мы сузим область определения, равенство (73) также будет выполнено:

$$\exists h : \quad \forall f \in D(L) \subset D(\bar{L}) : \quad \underbrace{(\bar{L}f, g)}_{=(Lf, g), \text{ т.к. } f \in D(L)} = (f, h), \quad \text{где } h = (\bar{L})^*g. \quad (74)$$

Перепишем (74) в сокращенном виде:

$$\exists h : \quad \forall f \in D(L) : \quad (Lf, g) = (f, h), \quad (75)$$

что согласно определению сопряженного оператора означает, что $g \in D(L^*)$ и $h = L^*g$. Но у нас $h = (\bar{L})^*g \implies (\bar{L})^*g = L^*g \quad \forall g \in D((\bar{L})^*)$.

Итак,

- 1) $D((\bar{L})^*) = D(L^*),$
- 2) $(\bar{L})^*g = L^*g \quad \forall g \in D(L^*).$

■

Лемма 3

$$(\bar{M})^\perp = M^\perp. \quad (76)$$

Доказательство:

Так как $M \subseteq \bar{M}$, то для их ортогональных дополнений верно обратное включение: $M^\perp \supseteq (\bar{M})^\perp$. Мы хотим доказать, что $M^\perp = (\bar{M})^\perp$.

От противного. Пусть $(\bar{M})^\perp \subset M^\perp$. $(\bar{M})^\perp$ состоит из всех элементов $a \in \mathcal{H} : (a, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \bar{M}$.

$$(\bar{M})^\perp \subset M^\perp \Rightarrow \exists \begin{cases} a \in M^\perp : (a, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in M, \\ a \notin (\bar{M})^\perp. \end{cases} \quad (77)$$

$$a \notin (\bar{M})^\perp \Rightarrow \exists \varphi \in \bar{M} : (a, \varphi) \neq 0. \quad (78)$$

Так как $\varphi \in \bar{M}$, он представим в виде: $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$, где $\varphi_n \in M$. Однако, в силу формулы (77) имеем: $(a, \varphi_n) = 0$. Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим:

$(a, \varphi) = 0$, что противоречит формуле (78). Итак, $(\bar{M})^\perp = M^\perp$.

■

Лемма 4

Пусть M и N – линейные подпространства $\mathcal{H}$. Тогда из условия $N = M^\perp$ следует, что $N^\perp = \bar{M}$.

Доказательство:

Равенство подпространств $N = M^\perp$ означает:

$$\begin{cases} \forall f \in N, \forall g \in M : f \perp g \text{ (то есть } (f, g) = 0), & (79) \\ \text{Если } f \perp g \ \forall g \in M \Rightarrow f \in N. & (80) \end{cases}$$

Для того чтобы доказать, что $N^\perp = \overline{M}$, проверим свойства (79) и (80) для $N^\perp$ и $\overline{M}$. Пусть $f \in N$, $g \in \overline{M}$. Докажем, что выполнено: $(f, g) = 0$.

$$g \in \overline{M} \Rightarrow g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \quad g_n \in M.$$

$$f \in N, g_n \in M \Rightarrow \left/ \text{в силу (79)} \right/ \Rightarrow (f, \underbrace{g_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{}} g) = 0 \Rightarrow (f, g) = 0,$$

то есть проверили свойство (79) для $N^\perp$.

Проверим свойство (80) для $N^\perp$. Пусть $f \in N$, $g \perp f$, то есть $(f, g) = 0$. Докажем, что: $g \in \overline{M}$. От противного. Пусть $g \notin \overline{M}$. Тогда по теореме о проекции g представимо в виде:

$$g = g_1 + g_2, \quad \text{где } g_1 \in \overline{M}, \quad g_2 \in (\overline{M})^\perp.$$

По лемме 3: $(\overline{M})^\perp = M^\perp \Rightarrow g_2 \in \underbrace{M^\perp}_{=N \text{ (по условию)}} \Rightarrow g_2 \in N$.

$$(f, g) = 0 \Rightarrow (f, g_1) + (f, g_2) = 0.$$

$(f, g_1) = 0$, так как $f \in N$, $g_1 \in \overline{M}$ (доказывали при проверке свойства (79)). Следовательно, $(f, g_2) = 0$ для $g_2 \in N$ и $\forall f \in N \Rightarrow g_2 = 0$.

Тогда $g = g_1 + \underbrace{g_2}_{=0} = g_1$, где $g_1 \in \overline{M}$, то есть $g \in \overline{M}$. Противоречие.

Итак, свойства (79) и (80) верны для $N^\perp$ и $\overline{M}$:

$$\begin{cases} \forall f \in N, \forall g \in \overline{M} : f \perp g \\ \text{Если } g \perp f \ \forall f \in N \Rightarrow g \in \overline{M} \end{cases} \Leftrightarrow N^\perp = \overline{M}. \quad (81)$$

Теорема 6

Область определения L^* плотна тогда и только тогда, когда L замыкаем, и в этом случае $L^{**} = \overline{L}$. В частности, $L^{**} = L$, если L замкнут.

Замечание

В теореме 6 сформулировано 2 утверждения:

1) $D(L^*)$ плотна в $\mathcal{H} \iff L$ замыкаем.

2) L замыкаем $\implies L^{**} = \bar{L}$.

В частности, $L^{**} = L$, если L замкнут (то есть $\bar{L} = L$).

Доказательство:

Пусть $D(L^*)$ плотна в $\mathcal{H}$. Если $\{0, g\} \in G'(-L^*)^\perp$, то:

$$(g, f) = (\underbrace{\{0, g\}}_{\in G'(-L^*)^\perp}, \underbrace{\{-L^*f, f\}}_{\in G'(-L^*)}) = 0 \quad \forall f \in D(L^*) \implies g = 0 \implies$$

$\implies G'(-L^*)^\perp$ есть график линейного оператора (по теореме 2)

$\implies G(L) \perp G'(-L^*)$ (по теореме 4) $\implies G(L) \subset G'(-L^*)^\perp \implies$

$\implies \overline{G(L)} \subset G'(-L^*)^\perp$.

Последнее следствие нетрудно доказать.

Пусть $\varphi \in \overline{G(L)} \implies \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$, $\varphi_n \in G(L)$.

$(\varphi_n, a) = 0 \quad \forall a \in G'(-L^*)$. С другой стороны, $(\varphi_n, a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\varphi, a)$. Отсюда делаем вывод, что $(\varphi, a) = 0 \quad \forall a \in G'(-L^*)$, а это означает что

$\varphi \in G'(-L^*)^\perp$. Итак, $\overline{G(L)} \subset G'(-L^*)^\perp$, где $G'(-L^*)^\perp$ – график. Линейное подпространство графика само является графиком, то есть $\overline{G(L)}$ – график. Следовательно, оператор L замыкаем (согласно процедуре построения замыкания для оператора).

Докажем в обратную сторону. Пусть оператор L замыкаем. Тогда график $G(\bar{L}) = \overline{G(L)}$ – замкнутое множество. Согласно теореме 4:

$$G'(-L^*) = G(L)^\perp \implies \text{по лемме 4} \implies G'(-L^*)^\perp = \overline{G(L)} = G(\bar{L}).$$

Если бы $D(L^*)$ была неплотна, то существовало бы ненулевое g такое что: $g \perp D(L^*)$. В самом деле, пусть $g \perp D(L^*)$. Тогда:

$$0 = (\underbrace{g}_{g \perp D(L^*)}, \underbrace{f}_{f \in D(L^*)}) = (\{0, g\}, \underbrace{\{-L^*f, f\}}_{\in G'(-L^*)}) \implies \{0, g\} \in G'(-L^*)^\perp.$$

По теореме 2 график не может содержать элементы $\{0, g\}$, где $g \neq 0$,

а значит $G'(-L^*)^\perp$ не может быть графиком линейного оператора. Так как $G'(-L^*)^\perp = G(\bar{L})$, то $G(\bar{L})$ – не график, что противоречит условию. Следовательно, $D(L^*)$ плотна в $\mathcal{H}$.

Докажем, что $G(L^{**}) = G'(-L^*)^\perp$. Для этого нам нужно проверить свойства (79) и (80) для $G(L^{**})$ и $G'(-L^*)^\perp$. Проверим свойство (79). Пусть $\{f, L^{**}f\} \in G(L^{**})$, $\{-L^*g, g\} \in G'(-L^*)^\perp$. Докажем, что $\{f, L^{**}f\} \perp \{-L^*g, g\}$. Так как $D(L^*)$ плотна в $\mathcal{H}$, то существует L^{**} и выполнено:

$$(f, L^*g) = (L^{**}f, g). \quad (82)$$

$$(\{f, L^{**}f\}, \{-L^*g, g\}) = (f, -L^*g) + \underbrace{(L^{**}f, g)}_{=(f, L^*g)} = 0 \Rightarrow \{f, L^{**}f\} \perp \{-L^*g, g\}.$$

Проверим свойство (80). Пусть $\{f, h\} \perp \{-L^*g, g\} \quad \forall g \in D(L^*)$. Докажем, что $\{f, h\} \in G(L^{**})$, то есть: $\{f, h\} = \{f, L^{**}f\}$.

$$(\{-L^*g, g\}, \{f, h\}) = (-L^*g, f) + (g, h) = 0 \Leftrightarrow (L^*g, f) = (g, h) \quad \forall g \in D(L^*).$$

Следовательно, по определению сопряженного оператора:

$$\begin{cases} f \in D(L^{**}), \\ h = L^{**}f, \end{cases} \quad \text{то есть } \{f, h\} = \{f, L^{**}f\}.$$

Итак, свойства (79) и (80) проверены. Следовательно,

$$G(L^{**}) = G'(-L^*)^\perp = G(\bar{L}).$$

Таким образом, графики операторов L^{**} и $\bar{L}$ совпадают, а значит совпадают и сами операторы: $L^{**} = \bar{L}$. ■

Определение

Множество нулей оператора A :

$$N(A) = \{g \in D(A) : Ag = 0\}. \quad (83)$$

Теорема 7

Замыкание области значений оператора L с плотной областью определения равно ортогональному дополнению к множеству нулей сопряженного оператора L^* :

$$\overline{R(L)} = N(L^*)^\perp. \quad (84)$$

Доказательство:

Докажем, что выполнено: $N(L^*) = R(L)^\perp$. Тогда по лемме 4 отсюда следует, что $N(L^*)^\perp = \overline{R(L)}$. Нам нужно доказать равенство множеств, то есть проверить свойства (79) и (80) для $N(L^*)$ и $R(L)^\perp$. Проверим свойство (79). Пусть $h = Lf \in R(L)$, $g \in N(L^*)$. Докажем, что $h \perp g$.

$$(h, g) = (Lf, g) = (f, L^*g) = \left/ L^*g = 0 \text{ ибо } g \in N(L^*) \right/ = (f, 0) = 0,$$

то есть $h \perp g$. Проверим свойство (80). Пусть $g \perp h \quad \forall h \in R(L)$. Докажем, что $g \in N(L^*)$.

$$h \perp g \Rightarrow 0 = (h, g) = (Lf, g) = (f, L^*g) \quad \forall f \in D(L).$$

Кроме того, $\overline{D(L)} = \mathcal{H}$. Вектор, ортогональный плотному множеству на всем пространстве, равен 0. Следовательно,

$$L^*g = 0 \Rightarrow g \in N(L^*).$$

Проверили свойства (79) и (80), а значит доказали равенство множеств. ■

14. Спектр и резольвента оператора

Определение

Спектр оператора в конечномерном пространстве – это множество его собственных значений.

Определение

$\lambda \in \mathbb{C}$ есть собственное значение (число) оператора A , если существует вектор $f \neq 0$, для которого

$$Af = \lambda f. \quad (85)$$

Этот элемент f называется собственным вектором, отвечающим собственному значению λ .

Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов оператора в конечномерном евклидовом пространстве E

Фиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в пространстве E .

Оператору A соответствует матрица в этом базисе: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Пусть разложение вектора f по базису имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \quad (86)$$

Подставляя (86) в (85) и приравнявая коэффициенты при линейно независимых векторах e_i , получаем набор линейных алгебраических уравнений для α_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = \lambda\alpha_2 \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad (87)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)f = 0 \quad (88)$$

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (88) – это равенство нулю её определителя:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (89)$$

Корни уравнения (89) есть собственные значения оператора A , а соответствующие решения (88) – собственные векторы.

Задача

Найти собственные числа и собственные векторы оператора, заданного

матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе в пространстве $\mathbb{C}^2$:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3, \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

$$(A - \lambda I)f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) $\lambda_1 = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = t \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = t$:

$$f_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|f_1\| = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}|t|.$$

Для получения ортонормированного базиса векторы необходимо нормировать:

$$\|f_1\| = 1 \Leftrightarrow |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Выберем } t = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Тогда } f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Пусть $\alpha_1 = t \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha_2 = -t$:

$$f_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|f_2\| = \sqrt{t^2 + (-t)^2} = \sqrt{2}|t|.$$

$$\|f_2\| = 1 \Leftrightarrow |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Выберем } t = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Тогда } f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

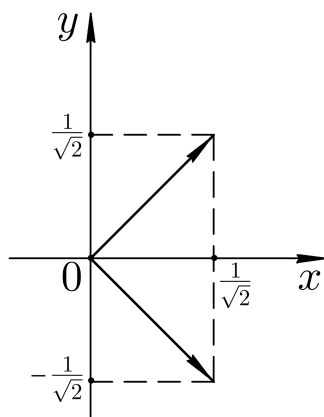


Рис. 12: Ортонормированный базис

Обратим внимание на две закономерности, полученные в данной задаче:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad f_1 \perp f_2.$$

Теорема 1

Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Доказательство:

Пусть λ – собственное значение оператора A . $Af = \lambda f$, где f – соответствующий собственный вектор.

$$\left. \begin{array}{l} (Af, f) = (\lambda f, f) = \lambda(f, f) \\ \text{С другой стороны:} \\ (Af, f) = (f, Af) = (f, \lambda f) = \bar{\lambda}(f, f) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad (\text{так как } (f, f) \neq 0).$$

■

Теорема 2

Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство:

Пусть $Af_1 = \lambda_1 f_1$ и $Af_2 = \lambda_2 f_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$(Af_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2) = \lambda_1(f_1, f_2).$$

С другой стороны:

$$(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) = \bar{\lambda}_2(f_1, f_2) =$$

$$= / \text{ по теореме 1 } / = \lambda_2(f_1, f_2).$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем $(f_1, f_2) = 0$.



Замечание

Теорема 1 и теорема 2 будут верны и в бесконечномерном пространстве.

15. Резольвента и спектр оператора в конечномерном пространстве

В конечномерном случае условие $\det(A - \lambda I) \neq 0$ гарантирует, что соответствующее неоднородное уравнение $(A - \lambda I)f = g$ имеет решение при любом g (альтернатива Фредгольма), что означает существование обратного оператора $(A - \lambda I)^{-1}$, определенного на всем пространстве.

Определение

Оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется резольвентой оператора A .

Множество таких λ , для которых существует резольвента $R_\lambda(A)$, называется резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$.

Определение

В конечномерном случае спектр $\sigma(A)$ есть множество собственных значений оператора A . Также можно определить спектр как дополнение к резольвентному множеству:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Классификация точек комплексной плоскости:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma(A),$$

$$\det(A - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A),$$

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A).$$

16. Спектр оператора в бесконечномерном пространстве

Будем рассматривать операторы в банаховом ($\mathcal{B}$) или гильбертовом ($\mathcal{H}$) пространствах. Определение резольвенты совпадает с конечномерным случаем:

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Определение

Резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A – это множество таких комплексных чисел λ , при которых существует резольвента $R_\lambda(A)$, определенная и ограниченная на всем пространстве.

В конечномерном случае последние два условия были выполнены автоматически, так как в конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен и определен на всем пространстве.

Определение

В бесконечномерном случае спектр – это дополнение к резольвентному множеству:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Определение

λ принадлежит точечному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A , если $R_\lambda(A)$ не существует, что эквивалентно тому, что λ – собственное значение, то есть существует $f \neq 0$, для которого $Af = \lambda f$.

Определение

λ принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(A)$, если $R_\lambda(A)$ существует, но не ограничена, и её область определения всюду плотна в $\mathcal{H}$.

Определение

λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(A)$, если $R_\lambda(A)$ существует, но не ограничена, и её область определения не является всюду плотной в $\mathcal{H}$.

Замечание

Спектр оказался разбит на несколько частей:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Замечание

В физике принято выделять дискретный спектр. Дискретный спектр – это множество изолированных точек спектра кроме собственных значений бесконечной кратности (то есть это часть точечного спектра).

Точка спектра называется изолированной, если существует её окрестность, которая не содержит других точек спектра. Собственное значение имеет бесконечную кратность, если ему отвечает бесконечное число линейно независимых собственных векторов. Эти собственные значения не включают в дискретный спектр, так как поведение соответствующих физических систем аналогично случаю непрерывного спектра.

Определение

Точки резольвентного множества называются регулярными точками.

Теорема 3

Пусть оператор A ограничен. Тогда все λ , для которых выполнено $|\lambda| > \|A\|$, являются регулярными точками.

Доказательство:

$(A - \lambda I) = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$, то есть достаточно выяснить обратимость оператора $(I - \frac{1}{\lambda}A)$:

$$|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \|\frac{1}{\lambda}A\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1.$$

По теореме 6 об обращении оператора, близкого к единичному, существует обратный оператор $(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$ и выполнено:

$$\|(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}},$$

то есть мы доказали существование резольвенты и её ограниченность, а значит, такие λ являются регулярными точками.



Теорема 4 (тождество Гильберта)

Пусть λ и μ – регулярные точки оператора A . Тогда выполнено следующее соотношение между резольвентами:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu. \quad (90)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu \Leftrightarrow \\ (A - \lambda I) \cdot \Big| \quad (A - \lambda I)^{-1} - (A - \mu I)^{-1} &= (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I - (A - \lambda I)(A - \mu I)^{-1} &= (\lambda - \mu)(A - \mu I)^{-1} \Big| \cdot (A - \mu I) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A - \mu I - (A - \lambda I) &= (\lambda - \mu)I \Leftrightarrow \cancel{A} - \mu I - \cancel{A} + \lambda I = (\lambda - \mu)I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - \mu)I &= (\lambda - \mu)I. \end{aligned}$$

Полученное равенство верно.



Следствие 1

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\mu R_\lambda, \quad (91)$$

то есть резольвенты перестановочны.

Следствие 2

R_λ – аналитическая функция от параметра λ , то есть она дифференцируема как функция комплексной переменной и выполнено:

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2. \quad (92)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} R_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda}{\Delta\lambda} \stackrel{(90)}{=} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda}{\Delta\lambda} = \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda. \end{aligned} \quad (93)$$

$$R_{\lambda+\Delta\lambda} = (A - (\lambda + \Delta\lambda)I)^{-1} = (A - \lambda I - \Delta\lambda I)^{-1},$$

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Воспользуемся теоремой 7 об обращении оператора, близкого к обратимому.

Пусть $L_0 = A - \lambda I$, $L = A - \lambda I - \Delta\lambda I$.

Тогда $\Delta = \|L_0^{-1}(L_0 - L)\| = \|(A - \lambda I)^{-1}\Delta\lambda I\| = |\Delta\lambda| \cdot \underbrace{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}_{\text{ограничена}} < 1$

при достаточно малых $\Delta\lambda$.

Тогда по теореме 7 существует ограниченный оператор:

$$\underbrace{L^{-1}}_{R_{\lambda+\Delta\lambda}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{((A - \lambda I)^{-1} \Delta\lambda I)^n}_{=R_\lambda} \right] \underbrace{(A - \lambda I)^{-1}}_{=R_\lambda} = R_\lambda + R_\lambda^2 \cdot \Delta\lambda + R_\lambda^3 \cdot (\Delta\lambda)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda\| &= \|R_\lambda^2 \cdot \Delta\lambda + R_\lambda^3 \cdot (\Delta\lambda)^2 + \dots\| \leq \\ &\leq |\Delta\lambda| \cdot (\|R_\lambda^2\|^2 + |\Delta\lambda| \cdot \|R_\lambda^2\|^3 + \dots + |\Delta\lambda|^n \cdot \|R_\lambda^2\|^{n+2} + \dots) = \\ &= |\Delta\lambda| \underbrace{\frac{\|R_\lambda\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \cdot \|R_\lambda\|}}_{\text{ограничена}} \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (94)$$

$$\Rightarrow R_{\lambda+\Delta\lambda} \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} R_\lambda. \quad (95)$$

Сравнивая (93) и (95), получаем:

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2.$$

■

Замечание

Формула (92) хорошо согласуется с производной от обычной функции:

$$\left(\frac{1}{A - \lambda} \right)'_\lambda = \frac{1}{(A - \lambda)^2}.$$

Понятие спектрального радиуса

В теореме 3 мы выяснили, что все λ , для которых выполнено $|\lambda| > \|A\|$, являются регулярными точками, то есть все точки спектра сосредоточены внутри круга $|\lambda| < \|A\|$. Иногда этот круг удается уменьшить.

По теореме 6 об обращении оператора, близкого к единичному, при $|\lambda| > \|A\|$ выполнено:

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}. \quad (96)$$

Выясним область сходимости этого ряда. По признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n}} = \frac{1}{|\lambda|} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Ряд сходится при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} < |\lambda|. \quad (97)$$

Те λ , для которых ряд (96) сходится, будут регулярными точками, так как при таких λ существует ограниченная резольвента, даваемая рядом (96).

$$r_\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \quad - \text{спектральный радиус}. \quad (98)$$

Спектр оператора A находится в круге:

$$|\lambda| \leq r_\sigma(A). \quad (99)$$

Замечание

Приведем пример оператора, у которого спектральный радиус $r_\sigma(A)$ меньше нормы оператора.

Пример

Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, действующий следующим образом:

$$(Af)(s) = \int_0^s f(t) dt. \quad (100)$$

Норма в $C[0, 1]$:

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

1) Найдем $\|A\|$:

$$\|Af\|_\infty = \max_{s \in [0, 1]} \left| \int_0^s f(t) dt \right| \leq \max_{s \in [0, 1]} \int_0^s |f(t)| dt \leq$$

$$\begin{aligned}
& \left/ |f(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty \right/ \leq \|f\|_\infty \cdot \max_{s \in [0,1]} \int_0^s dt = \|f\|_\infty \cdot \max_{s \in [0,1]} s = \|f\|_\infty \Rightarrow \\
& \left. \begin{aligned} & \Rightarrow \|A\| \leq 1 \\ & \text{Пусть } f(t) \equiv 1. \\ & \|Af\|_\infty = \max_{s \in [0,1]} \int_0^s dt = 1 = \|f\|_\infty \Rightarrow \|A\| \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|A\| = 1.
\end{aligned}$$

2) Найдем спектральный радиус $r_\sigma(A)$:

Для этого нам нужно найти $\|A^n\|$. Применив оператор A из формулы (100) n раз, получим:

$$(A^n f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f(t_n). \quad (101)$$

Приведем формулу (101) к более простому виду:

$$(A^2 f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 f(t_2) = \int_0^s dt_2 \int_{t_2}^s dt_1 f(t_2) = \int_0^s dt_2 (s - t_2) f(t_2).$$

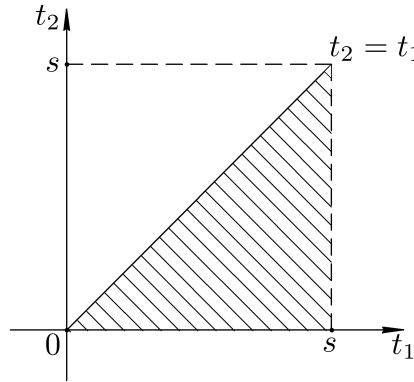


Рис. 13: Изменение порядка интегрирования в интеграле для $(A^2 f)(s)$

$$(A^3 f)(s) = \int_0^s dt_1 \underbrace{\int_0^{t_1} dt_2 (t_1 - t_2) f(t_2)}_{=(A^2 f)(t_1)} = \int_0^s dt_2 \int_{t_2}^s dt_1 (t_1 - t_2) f(t_2) =$$

$$= \int_0^s dt_2 f(t_2) \frac{(t_1 - t_2)^2}{2} \Big|_{t_1=t_2}^{t_1=s} = \int_0^s dt_2 f(t_2) \frac{(s - t_2)^2}{2}.$$

Индукционное предположение:

$$(A^n f)(s) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^s dt_2 f(t_2) (s - t_2)^{n-1}. \quad (102)$$

Переход $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} (A^{n+1} f)(s) &= \int_0^s dt_1 \underbrace{\int_0^{t_1} \frac{1}{(n-1)!} dt_2 f(t_2) (t_1 - t_2)^{n-1}}_{(A^n f)(t_1)} = \\ &= \int_0^s dt_2 \int_{t_2}^s \frac{1}{(n-1)!} dt_1 f(t_2) (t_1 - t_2)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^s dt_2 f(t_2) \frac{(t_1 - t_2)^n}{n} \Big|_{t_1=t_2}^{t_1=s} = \\ &= \int_0^s dt_2 f(t_2) \frac{(s - t_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

■

Проведем оценку нормы $\|A^n\|$:

$$\begin{aligned} \|A^n f\|_\infty &= \max_{s \in [0,1]} \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_0^s dt f(t) (s - t)^{n-1} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \max_{s \in [0,1]} \int_0^s dt |f(t)| |(s - t)^{n-1}| \leq \frac{\|f\|_\infty}{(n-1)!} \int_0^1 dt (1 - t)^{n-1} = \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{(n-1)!} \cdot \left(-\frac{(1-t)^n}{n} \right) \Big|_0^1 = \frac{\|f\|_\infty}{n!} (-0^n + 1^n) = \frac{1}{n!} \|f\|_\infty \Rightarrow \quad (103) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A^n\| \leq \frac{1}{n!}. \quad (104)$$

Теперь докажем, что $r_\sigma(A) = 0$. Согласно формуле (98):

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq / \text{ по формуле (104) } / \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} =$$

$$= / \text{ по формуле Стирлинга } / = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = 0.$$

С другой стороны, $r_\sigma(A) \geq 0$, так как это предел неотрицательной величины ($\|A^n\| \geq 0$). Следовательно, $r_\sigma(A) = 0$, то есть спектр оператора A состоит из одной точки 0:

$$\sigma(A) = \{0\}.$$

Таким образом, у оператора A спектральный радиус $r_\sigma(A) = 0$, что меньше нормы оператора ($\|A\| = 1$).

3) Определим тип спектра.

Проверим, является ли точка 0 собственным значением. Выясним, есть ли нетривиальные решения у уравнения $Af = \lambda f$ при $\lambda = 0$.

$$(Af)(s) = 0 \quad \forall s \in [0, 1] \Leftrightarrow \int_0^s f(t)dt = 0 \Rightarrow f(s) = 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

($f(t)$ – непрерывная функция, а значит теореме Барроу можно продифференцировать интеграл по верхнему пределу). Следовательно, нетривиальных решений нет. Таким образом, 0 – не собственное значение, и $0 \notin \sigma_p(A)$ (точечный спектр).

Для того, чтобы выяснить, к непрерывному или остаточному спектру относится точка 0, необходимо определить, является ли область значений оператора A (то есть область определения $R_\lambda(A)$) всюду плотной в $\mathcal{H}$.

Рассмотрим функцию $g(s)$ из области значений оператора A :

$$g(s) = (Af)(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

Очевидно, что $g(0) = 0$. Согласно определению, множество называется всюду плотным, если после замыкания оно совпадает со всем пространством. Замыкание заключается в присоединении к множеству всех его граничных точек. Граничные точки являются предельными, так как в любой их окрестности есть точки множества. Таким образом, если множество всюду плотно в пространстве, то любую точку пространства можно получить как предел некоторой последовательности точек множества.

Следовательно, если область значений оператора A всюду плотна в $\mathcal{H}$, то любую функцию из пространства $C[0, 1]$ можно получить как предел последовательности функций $\{g(s)\}$ из области значений оператора A . Однако, $g(0) = 0$, а произвольная функция из $C[0, 1]$, вообще говоря, не обращается в 0 в точке 0. То есть подобное приближение не работает, следовательно, область значений оператора A не является всюду плотной в $\mathcal{H}$, и $0 \in \sigma_r(A)$ (остаточный спектр).

Выводы:

- 1) $\|A\| = 1$.
- 2) $r_\sigma(A) = 0$,
- $\sigma_p(A) = \emptyset$,
- $\sigma_c(A) = \emptyset$,
- $\sigma_r(A) = \{0\}$.

17. Контрольные вопросы

Контрольные вопросы для самопроверки. Вопросы сгруппированы по двум основным разделам: “Пространства” и “Операторы”.

Пространства

1. Что такое метрика?
2. Как полнота пространства связана со сходимостью последовательностей?
3. Что такое сжимающее отображение?
4. Почему полнота пространства важна для принципа сжимающих отображений?
5. Каковы свойства операций в линейном пространстве?
6. Что такое размерность пространства?

7. Что такое норма элемента?
8. Почему в линейном нормированном пространстве можно ввести метрику?
9. Всякое ли линейное нормированное пространство является банаховым?
10. Есть ли в линейном нормированном пространстве теорема о проекции вектора на подпространство?
11. Каковы аксиомы скалярного произведения?
12. Почему в гильбертовом пространстве можно ввести норму?
13. Есть ли в гильбертовом пространстве теорема о проекции вектора на подпространство?
14. По каким системам функций можно строить ряд Фурье?
15. Каков общий вид ряда Фурье в гильбертовом пространстве?

Операторы

1. Какой оператор называется линейным?
2. Во что линейный оператор отображает нулевой элемент?
3. Как вводится обратный оператор?
4. Что такое ограниченный и неограниченный операторы?
5. Как найти норму оператора?
6. Есть ли неограниченные операторы в конечномерном пространстве?
7. Чем отличаются симметричный оператор от самосопряженного?
8. Как построить обратный оператор к оператору, близкому к единичному?

9. Как построить обратный оператор к оператору, близкому к обратимому?
10. Чем замкнутый оператор отличается от непрерывного?
11. Обязательно ли замкнута область определения у замкнутого оператора?
12. Что такое резольвента оператора?
13. Как выглядит тождество Гильберта?
14. Является ли резольвента аналитической оператор-функцией?
15. Из чего состоит спектр линейного оператора в конечномерном пространстве?
16. Чем отличается спектр оператора в бесконечномерном пространстве от случая конечномерного пространства?
17. Чем отличается непрерывный спектр от остаточного?
18. В чем специфика спектра самосопряженного оператора?

Литература

- [1] Ахиезер Н.Т., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве (2-е изд.). Москва: Наука, 1966, 544 с.
- [2] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Санкт-Петербург: Лань, 2010, 464 с.
- [3] Блинова И.В., Попов И.Ю., Трифанова Е.С. Типовые расчеты по функциональному анализу. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2011, 24 с.
- [4] Иосида К. Функциональный анализ. Изд. 2-ое. Москва: ЛКИ, 2007, 624 с.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7. Москва: URSS, 2019, 572 с.
- [6] Попов И.Ю. Математическая физика. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2005, 104 с.
- [7] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1977, 355 с.
- [8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4. Теория операторов. Москва: Мир, 1982, 428 с.
- [9] Садовничий В.А. Теория операторов: учебник для вузов с углубленным изучением математики. 5-е изд., стереотип. Москва: Дрофа, 2004, 384 с.

- [10] Хатсон В., Пим Дж., Приложения функционального анализа и теории операторов. Москва: Мир, 1983, 432 с.

Попов Антон Игоревич
Попов Игорь Юрьевич

Пространства и операторы

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49