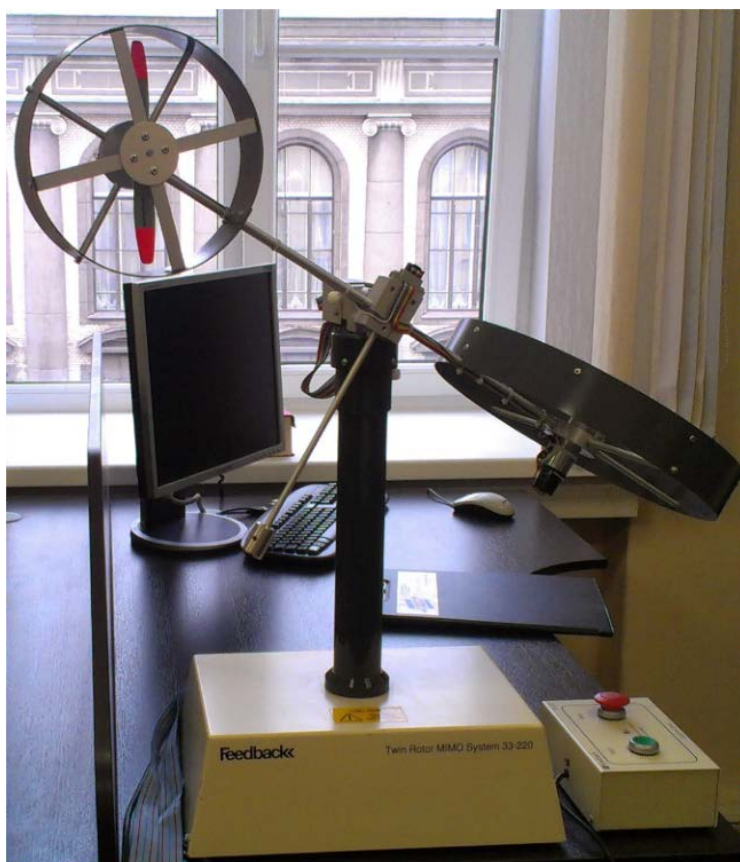


С.А. Вражевский, И.Б. Фуртат

**УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ
СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**



**Санкт-Петербург
2021**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.А. Вражевский, И.Б. Фуртат
УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ
СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 27.04.03 «Системный анализ и управление»
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры



Санкт-Петербург
2021

Вражевский С.А., Фуртат И.Б., Управление нелинейными системами с запаздыванием– СПб: Университет ИТМО, 2021. – 73 с.

Рецензент(ы):

Зименко Константин Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник мегафакультета компьютерных технологий и управления Университета ИТМО.

Учебное пособие посвящено применению метода бэкстеппинга для управления гладкими и негладкими нелинейными системами с запаздыванием. Пособие содержит теоретические сведения об управлении одним нелинейным объектом и сетью таких систем. Приведено описание экспериментального стенда, расположенного в Университете ИТМО, по управлению двухроторным стендом, имитирующим полет вертолета. Предложены задания для аудиторного и самостоятельного освоения предложенных методов в виде заданий моделирования в MatLab и экспериментов на стенде.

Пособие предназначено для студентов старших курсов факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО, специализирующихся по направлению подготовки 27.04.03 «Системный анализ и управление».

Учебное пособие написано в ИПМаш РАН при поддержке гранта Президента РФ № МД-1054.2020.8.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021

© Вражевский С.А., Фуртат И.Б., 2021

Содержание

Введение.....	4
Глава 1 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга	6
1.1 Негладкие нелинейные системы	6
1.2 Гладкие нелинейные системы	13
1.3 Нелинейные многоканальные системы	24
1.4 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений для нелинейных многоканальных объектов с учетом перекрестных связей.....	33
1.5 Выводы по главе 1	44
1.6 Задания для самостоятельной работы.....	45
Глава 2 Управление двухроторным лабораторным стендом	46
2.1 Математическая модель стенда TRMS	48
2.2 Децентрализованный субоптимальный робастный регулятор	55
2.3 Централизованный субоптимальный робастный регулятор	60
2.4 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений и учетом перекрестных связей.....	63
2.5 Выводы по главе 2	66
2.6 Задания для самостоятельной работы.....	67
Глава 3 Задания для экспериментальных исследований	69
Список литературы	70

Введение

Нелинейные многоканальные модели намного более широко, чем линейные модели, описывают множество технически реализуемых объектов, для которых требуется разработка систем автоматического управления. Важным часто встречающимся свойством нелинейных систем, неудобным для разработчиков, является невозможность применения классических методов в линейных задачах, таких как, например, метод сильной обратной связи. Кроме того, современные тенденции требуют разработки методов управления, которые могут быть легко применены к различным техническим задачам и масштабироваться в зависимости от значения контролируемых единиц системы. При этом алгоритм управления должен быть простым в реализации, обеспечивать высокую надежность, работать при задержках связи и быть применимым к многоагентным системам и сетевым объектам. В данном пособии рассмотрена задача управления нелинейными многоканальными объектами с компенсацией внешних ограниченных возмущений. Для этого разработана робастная модификация алгоритма бэкстеппинга на базе метода вспомогательного контура и упрощенного модельного преобразования для перехода к параметрически определенному виду модели объекта управления. Последнее снижает динамический порядок системы управления и, следовательно, упрощает применения полученного регулятора в практических задачах по сравнению с аналогами. Для синтеза алгоритма достаточно знать только относительную динамическую степень объекта управления. Для нелинейных объектов понятие относительной динамической степени и процедура ее расчета приведены в работах [1, 2].

Новизна полученных в данном пособии результатов заключается в распространении регулятора [3] на класс нелинейных объектов с помощью модельного преобразования, рассмотренного в [4]. В итоге получен регулятор, способный обеспечить по сравнению с аналогами [5-15] существенно более высокую точность регулирования и компенсацию возмущений в нелинейных системах без использования сильной обратной связи, который не требует большого количества информации об объекте управления и обладает относительно низким динамическим порядком.

Для удобства изложения ключевых идей, на которых основан материал данного пособия, сначала модифицированный метод бэкстеппинга будет применен для линейного одноканального случая при управлении по состоянию, но при наличии внешних возмущений. Это позволит рассмотреть идею модификации, не перегружая результат дополнениями, необходимыми для его применения в нелинейных системах. Затем будет рассмотрен алгоритм управления нелинейным одноканальным объектом по выходу. На этом этапе будет рассмотрен метод параметризации, используемый для работы с нелинейными объектами, и доказана устойчивость сигналов замкнутой системы при использовании наблюдателей. Затем будут рассмотрены два обобщения на

класс многоканальных систем. В первом случае будет описан децентрализованный алгоритм для многоканальных систем без учета перекрестных связей. Во втором случае перекрестные связи будут учтены в модели объекта и предложен расчет относительной динамической степени многоканальной системы для такого случая.

Пособие предназначено для студентов старших курсов факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО для изучения дисциплины «Управление системами с запаздыванием» по направлению подготовки 27.04.03 «Системный анализ и управление». Пособие содержит теоретический материал, читаемый на лекционных занятиях. В конце первых двух глав содержатся теоретические вопросы и практические задания для самостоятельной работы студентов. Третья глава содержит лабораторные задания для экспериментальных исследований на двухроторном стенде изученных методов управления.

Глава 1 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга

В данном разделе рассмотрена проблема управления по состоянию линейными объектами с возможным запаздыванием в векторе состояния при наличии несогласованных внешних возмущающих воздействий. Задача управления по состоянию и выбор линейного одноканального объекта для рассмотрения модифицированного алгоритма бэкстеппинга помогает понять структуру алгоритма, не усложняя процедуру синтеза модельными преобразованиями и рассмотрением ряда дополнительных допущений, которые будут необходимы в нелинейном случае. Наличие несогласованных возмущающих воздействий и запаздываний в векторе состояния помогают продемонстрировать преимущества предлагаемого подхода перед ближайшими аналогами в том смысле, что предложенный алгоритм не меняет своей структуры независимо от вида возмущений и присутствия запаздывания.

1.1 Негладкие нелинейные системы

Постановка задачи. Рассмотрим объект порядка n

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{[n-1] \times [n-1]} & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u + H\varphi, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – измеряемый вектор состояния, $u(t) \in R$ – управляющее воздействие, $b > 0$ – неизвестный коэффициент, $\varphi(x(t-\tau), f) \in R^n$ – неизвестная функция, включающая нежелательную внутреннюю динамику, значения элементов вектора состояния с задержками, параметрические неопределенности и внешние возмущающие воздействия, H – нижняя треугольная матрица, $f \in R^n$ – вектор неизвестных параметров. Функция $\varphi(x(t-\tau), f)$ ограничена по t и ограничена либо липшицева по x , $\tau \geq 0$ – неизвестное время запаздывания.

Цель управления. Цель управления заключается в условии

$$\|x\| < \delta, t \geq T, \quad (2)$$

где $\|x\|$ – норма вектора состояния, $\delta > 0$ – требуемая точность регулирования, $T > 0$ – время стабилизации.

Синтез алгоритма. Синтез системы управления включает в себя три этапа. На первом этапе отдельно будет проанализирована устойчивость первого уравнение системы (1). Затем аналогичные расчеты будут приведены для остальных уравнений состояния объекта, кроме последнего. На последнем этапе при анализе последнего уравнения состояния системы (1) будет сформулирован закон управления, обеспечивающий устойчивость всех сигналов объекта.

Процедура синтеза алгоритма управления повторяет известную процедуру бэкстеппинга. В отличие от классического метода бэкстеппинга, на каждом шаге дополнительно будет введен в рассмотрение вспомогательный контур, обеспечивающий оценку и компенсацию возмущающих воздействий.

Введем в рассмотрение вспомогательный контур

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -c_i z_i + x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{z}_n &= -c_n z_n + \alpha u,\end{aligned}\tag{3}$$

который поставлен в соответствие уравнению объекта (1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1} + \varphi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n &= bu + \varphi_n,\end{aligned}\tag{4}$$

где $z_i(t)$ – переменные вектора состояния вспомогательного контура, определяющие желаемую динамику объекта (1) для случая $\varphi_i(t) = 0$; $\alpha, c_i > 0$ – настраиваемые параметры. Рассмотрим ошибки рассогласования

$$\xi_i = e_i - z_i, i = \overline{1, n},\tag{5}$$

где $\xi_i(t)$ – ошибки рассогласования, $e_i(t)$ – ошибки слежения между желаемым и фактическим значениями соответствующих переменных состояния. Каждая из ошибок ξ_i, e_i может быть определена и скомпенсирована последовательно в n шагов.

Шаг 1. Согласно (2), первая ошибка слежения $e_1(t)$ может быть определена следующим образом

$$e_1 = x_1.\tag{6}$$

Ошибка рассогласования $\xi_1(t)$ принимает вид $\xi_1 = x_1 - z_1$, тогда ее производная вычисляется по формуле

$$\dot{\xi}_1 = c_1 z_1 + \varphi_1.\tag{7}$$

Из (3.7) следует, что функция $\varphi_1(t)$ может быть оценена в виде

$$\varphi_1 = \dot{\xi}_1 - c_1 z_1.\tag{8}$$

Выражение (8) позволяет представить первое уравнение состояния объекта (1) в виде

$$\dot{e}_1 = x_2 + \dot{\xi}_1 - c_1 z_1.\tag{9}$$

Согласно методу бэкстеппинга, допустим, что $x_2(t)$ является виртуальным управляющим воздействием в (9) и существует виртуальный закон управления $x_2 = v_1$ такой, что динамика (9) будет обеспечивать выполнение цели управления (2). Из (9) следует, что первый виртуальный закон управления может быть представлен в форме

$$v_1 = -c_1 \xi_1 - \hat{\xi}_1,\tag{10}$$

где $\hat{\xi}_1(t)$ – оценка функции $\dot{\xi}_1(t)$. Подставляя (10) в (9), получим

$$\dot{e}_1 = -c_1 e_1 + \eta_1, \quad (11)$$

где $\eta_1 = \dot{\xi}_1 - \widehat{\xi}_1$ – ошибка наблюдения.

Шаг i , $i = \overline{2, n-1}$. Расчеты, аналогичные проведенным на шаге 1, справедливы для каждого уравнения состояния (4) при $i = \overline{2, n-1}$. Определим ошибки слежения в виде

$$e_i = x_i - v_{i-1}, i = \overline{2, n-1}, \quad (12)$$

где $v_{i-1}(t)$ – закон виртуального управления, сформированный на предыдущем шаге

$$v_{i-1} = -c_{i-1} \xi_{i-1} - \widehat{\xi}_i. \quad (13)$$

Учитывая (4), ошибка слежения на шаге i может быть представлена в форме

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + \tilde{\varphi}_i, \quad (14)$$

где $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \dot{v}_{i-1}$ – новая функция возмущений для i -го уравнения состояния. Из (3)-(5) и (14) следует

$$\dot{\xi}_i = c_i z_i + \tilde{\varphi}_i, i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что функция $\tilde{\varphi}_1$ может быть представлена в виде

$$\tilde{\varphi}_i = \dot{\xi}_i - c_i z_i. \quad (16)$$

Оценка (16) позволяет представить ошибку слежения на i -м шаге в виде

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + \dot{\xi}_i - c_i z_i. \quad (17)$$

Предположим, что $x_{i+1}(t)$ является управляющим сигналом в (17) и существует закон виртуального управления $x_{i+1} = v_i$ такой, что динамика ошибки (17) обеспечивает выполнение цели управления (2). Из (17) следует, что i -й закон виртуального может быть представлен в виде

$$v_i = -c_i \xi_i - \widehat{\xi}_i, \quad (18)$$

где $\widehat{\xi}_i(t)$ – оценка функции $\dot{\xi}_i(t)$, так как последняя недоступна для измерения. Подставляя (18) в (17), получим

$$\dot{e}_i = -c_i e_i + \eta_i, \quad (19)$$

где $\eta_i = \dot{\xi}_i - \widehat{\xi}_i$ – ошибка наблюдения.

Шаг n . Ошибка слежения для n -го уравнения состояния имеет вид

$$e_n = x_n - v_{n-1}, \quad (20)$$

где $v_{n-1}(t)$ – закон виртуального управления, полученный на предыдущем шаге. Учитывая (4), ошибка слежения на n -м шаге может быть представлена в виде

$$\dot{e}_n = b u + \tilde{\varphi}_n, \quad (21)$$

где $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \dot{v}_{n-1}$ – новая функция возмущений для n -го уравнения состояния. Из (3)-(5) and (21) следует

$$\dot{\xi}_n = c_n z_n + \tilde{\varphi}_n + (b - \alpha)u. \quad (22)$$

Из (22) следует, что функция $\tilde{\varphi}_n(t)$ может быть переписана в виде

$$\tilde{\varphi}_n = \dot{\xi}_n - c_n z_n - (b - \alpha)u. \quad (23)$$

Функция (23) позволяет представить ошибку слежения на n -м шаге в виде

$$\dot{e}_n = \dot{\xi}_n - c_n z_n + \alpha u. \quad (24)$$

Из (24) следует, что закон управления может быть представлен в виде

$$u = -\frac{1}{\alpha}(c_n \xi_n + \hat{\xi}_n), \quad (25)$$

где $\hat{\xi}_n(t)$ – оценка функции $\dot{\xi}_n(t)$. Подставляя (25) в (24), получим

$$\dot{e}_n = -c_n e_n + \eta_n, \quad (26)$$

где $\eta_n = \dot{\xi}_n - \hat{\xi}_n$ – ошибка наблюдения. В качестве наблюдателя для оценки производных $\dot{\xi}_n(t)$ используется звено реального дифференцирования

$$\dot{\hat{\xi}}_i = -\mu^{-1}\hat{\xi}_i + \mu^{-1}\xi_i, i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

где $\mu > 0$ – малое положительное число, являющееся настраиваемым параметром в системе управления.

Утверждение 1.1 [50]. Существуют параметры $c_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, и $\mu_0 > 0$ такие, что для любого $0 < \mu \leq \mu_0$ алгоритм управления, содержащий вспомогательный контур (3), виртуальные законы управления (10), (18), закон управления (25) и наблюдатель (27) обеспечивают для объекта управления (1) выполнение цели управления (2).

Доказательство. С учетом (27) динамика ошибок наблюдения может быть представлена в виде

$$\dot{\eta}_i = -\mu^{-1}\eta_i + \ddot{\xi}_i, i = \overline{1, n} \quad (28)$$

Выражения (11), (19), (26) и (28) описывают систему

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -c_i e_i + \eta_i, \\ \mu_1 \dot{\eta}_i &= -\eta_i + \mu_2 \ddot{\xi}_i, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Устойчивость системы (29) может быть исследована при помощи Леммы [24].

Лемма. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2, t) \quad (30)$$

где $x(t) \in R^{S_1}$, $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2) \in R^{S_2}$, $f(x, \mu_1, \mu_2, t)$ – липшицевы непрерывные функции по x , ограниченные по t , и для них существует замкнутая ограниченная область притяжения $\mu_2 = 0$

$$\Omega = \{x : P(x) \leq C\}, \quad (31)$$

где $P(x)$ – кусочно-гладкая, положительно определенная функция на R^{S_1} . Пусть существуют $C_1 > 0$ и $\bar{\mu}_1 > 0$ такие, что выполняется условие

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left[\left\langle [\nabla P(x)]^T, f(x, \mu_1, 0, t) \right\rangle \middle| P(x) = C \right] \leq -C_1. \quad (32)$$

Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \mu_2 \leq \mu_0$ система (30) имеет аналогичную область притяжения Ω .

Данная лемма обобщает лемму Брусина [4] на случай непрерывных систем. Покажем, что система (29) отвечает условиям Леммы. Рассмотрим поведение системы (29) для случая $\mu_2 = 0$ и определим $P(x) = V(t)$, где $V(t)$ – функция Ляпунова вида

$$V = 0.5 \sum_{i=1}^n e_i^2 + 0.5 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \quad (33)$$

Производная $V(t)$ вдоль траекторий (29) принимает вид

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n \left[-c_i e_i^2(t) + e_i(t) \eta_i(t) \right] - \sum_{i=1}^n \mu_1^{-1} \eta_i^2(t). \quad (34)$$

Для второго слагаемого в (34) справедливы оценки

$$e_i \eta_i \leq 0.5 \mu_0^{-1} e_i^2 + 0.5 \mu_0 \eta_i^2, i = \overline{1, n}, \mu_0 > 0. \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34), получим

$$\dot{V}(t) \leq - \sum_{i=1}^n \bar{c}_i e_i^2(t) - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \eta_i^2(t), \quad (36)$$

где $\bar{c}_i = c_i - 0.5 \mu_0^{-1}$, $\bar{d}_i = \mu_1^{-1} - 0.5 \mu_0$, $i = \overline{1, n}$. Существуют значения μ_0 , μ_1 , $c_i, i = \overline{1, n}$ такие, что $\bar{c}_i > 0$, $\bar{d}_i > 0$ и система (36) является асимптотически устойчивой. Учитывая (33), перепишем (36) в виде

$$\dot{V} \leq -\beta V, \quad (37)$$

где $\beta = \min \{ \bar{c}_i, \bar{d}_i \}, i = \overline{1, n}$. Решение неравенства (37) имеет вид

$$V \leq V(0) e^{-\beta t}. \quad (38)$$

Выражение (38) подтверждает тот факт, что система (29) экспоненциально стремится к нулю. Ограниченность всех сигналов в (29) устанавливается следующим образом. Учитывая (27) и (29), перепишем ошибки рассогласования (5) в форме

$$\xi_i = \frac{(p + c_i)(\mu_i p + 1)}{\mu_i p^2} e_i, i = \overline{1, n}, \quad (39)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Поскольку все ошибки слежения $e_i, i = \overline{1, n}$ асимптотически устойчивы, то все функции $\xi_i, \dot{\xi}_i, \ddot{\xi}_i, i = \overline{1, n}$, ограничены.

Далее, из (27) и (29) следует, что ограничены функции $\widehat{\xi}_i, i = \overline{1, n}$. Из вида законов управления (10), (18), (25) следует, что функции $v_i, i = \overline{1, n}$ и $u(t)$ ограничены. Следовательно, из (6), (12) и (20) следует ограниченность вектора состояния $x = \text{col}\{x_i, i = \overline{1, n}\}$, из (5) – ограниченность вектора $z = \text{col}\{z_i, i = \overline{1, n}\}$. Тогда с учетом (7), (14), (21), функции $\varphi_i, \tilde{\varphi}_i, i = \overline{1, n}$ также являются ограниченными. Таким образом последовательно устанавливается ограниченность всех сигналов замкнутой системы (29), что обеспечивает выполнение условий Леммы. В таком случае найдется значение $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \mu_2 \leq \mu_0$ система (29) имеет область притяжения, аналогичную той, что существует для случая $\mu_2 = 0$. С другой стороны, свойство асимптотической устойчивости может не выполняться для системы (29) при $\mu_2 \neq 0$, возможно выделить достаточно малую область диссипативности для случая $\mu_2 \neq 0$ и оценить размер этой области. Производная (33) с учетом оценок (35) для случая $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$ принимает вид

$$\dot{V}(t) \leq -\sum_{i=1}^n \bar{c}_i e_i^2(t) - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \eta_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \ddot{\xi}_i(t), \quad (40)$$

где $\bar{d}_i = \mu_0^{-1} - 0.5\mu_0$. Воспользуемся оценками

$$\begin{aligned} \eta_i(t) \ddot{\xi}_i(t) &\leq 0.5\mu_0^{-1} \eta_i^2(t) + 0.5\mu_0 \ddot{\xi}_i^2(t), \\ 0.5\mu_0 \ddot{\xi}_i^2(t) &\leq \mu_0 \chi, i = \overline{1, n}, \mu_0 > 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\chi = 0.5 \sup_{t, i=1, n} \{\ddot{\xi}_i^2\}$. С учетом (41), выражение (40) может быть переписано в виде

$$\dot{V}(t) \leq -\sum_{i=1}^n \bar{c}_i e_i^2(t) - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \eta_i^2(t) + n\mu_0 \chi. \quad (42)$$

Учитывая (33), оценка (42) принимает вид

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma V + n\mu_0 \chi, \quad (43)$$

где $\gamma = 2 \min\{\bar{c}_i, \bar{d}_i\}, i = \overline{1, n}$. Решение неравенства (43) имеет вид

$$V(t) \leq e^{-\gamma t} V(0) + (1 - e^{-\gamma t}) \gamma^{-1} n\mu_0 \chi. \quad (44)$$

Несложно найти $\mu_0 > 0$ такое, что будет выполнено условие

$$-\gamma V + n\mu_0 \chi < 0. \quad (45)$$

Чтобы показать, что область диссипативности системы (29) может быть достаточно малой, воспользуемся следующими преобразованиями. Из (44) следует

$$\|e\|^2 \leq 2V(0) e^{-\gamma t} + 2(1 - e^{-\gamma t}) \gamma^{-1} n\mu_0 \chi. \quad (46)$$

Учитывая (6), (12), (20) и неравенство Коши, из (46) получим

$$\|x\|^2 \leq 1.5(\|e\|^2 + \|v\|^2), \quad (47)$$

где $v = \text{col}\{v_{i-1}, i = \overline{1, n}\}$, $v_0 = 0$. Для неравенства (47) справедливо

$$\|e\|^2 + \|v\|^2 \leq 2V(0)e^{-\gamma t} + 2\gamma^{-1}n\mu_0\chi + \phi_1, \quad (48)$$

где $\phi_1 = \sup_{t \geq 0} \|v\|^2$. Подставляя точностную характеристику δ в правую часть (48),

становится возможным получить оценку величины вектора состояния:

$$\|x\|^2 \leq 2V(0)e^{-\gamma t} + \delta, \quad (49)$$

где $\delta = 2\gamma^{-1}n\mu_0\chi + \phi_1$. Таким образом, точность стабилизации замкнутой системы может быть улучшена путем приближения значения параметра μ_0 к значению

$$\mu_0 = (\delta - \phi_1) / 2\gamma^{-1}n\chi. \quad (50)$$

Теорема доказана.

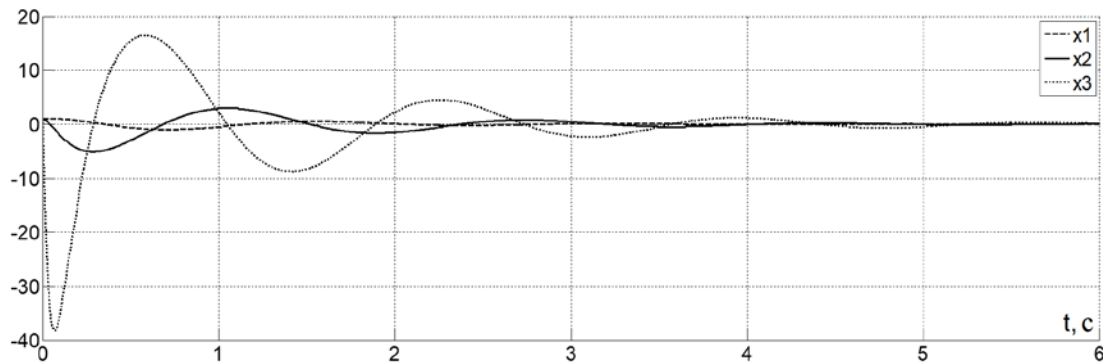
Моделирование. Рассмотрим модель объекта управления в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1.7 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $f = [(1 + 0.5\sin(t))x_1^2, (x_1^2 + x_2^2)\sin(t), 10\sin(x_3^2)]^T$. Вспомогательный контур задан в следующем виде:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Наблюдатель сформирован со значением настраиваемого параметра $\mu = 0.01$. Переходные процессы замкнутой системы с использованием модифицированного алгоритма бэкстеппинга представлены на рисунке 1.



Из графика видно, что замкнутая система устойчива и регулятор обеспечивает выполнение цели управления (3.2) при наличии возмущающих воздействий неизвестной величины и задержек в векторе состояния.

1.2 Гладкие нелинейные системы

В данном разделе рассматривается нелинейный объект с не полностью известным вектором состояния. Как и в предыдущем случае, ключевая идея заключается в применении метода вспомогательного контура, что обеспечивает оценку и компенсацию возмущающих воздействий на каждом шаге итеративной процедуры синтеза системы управления. Кроме этого, используются модельные преобразования, позволяющие уменьшить необходимое количество фильтров в системе управления. Считается, что для объекта управления известна либо может быть найдена величина его относительной динамической степени, а функции возмущений удовлетворяют условию Липшица. Приводится математическое доказательство сходимости всех сигналов ошибок замкнутой системы с показателями качества, отвечающими цели управления. Работоспособность алгоритма подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Модель объекта управления. Рассмотрим нелинейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), \xi) + b(x(t), \xi)(u(t) + \varphi(x(t), t)), \\ y(t) &= h(x(t)), x(0) = x_0, t_0 = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R$ – управляющее воздействие, $y(t) \in Y \subset R$ – измеряемая выходная величина, $t \in T \subset [0, \infty)$, $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ и $h(x)$ – гладкие функции, $\varphi(x, t)$ – неизвестное возмущение, которое ограничено на T и липшицево либо ограничено по $x(t) \in X$, $\xi \in \Xi$ – неизвестный вектор внутренних параметров, Ξ – некоторое известное и ограниченное множество.

Цель управления – обеспечить выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_s(t)| < \delta, t > t_\kappa, \quad (52)$$

где $\delta > 0$ – точность слежения, $y_s(t)$ – ограниченный по величине и по величине своих производных сигнал слежения, $t_\kappa > 0$ – время сходимости. Сформируем предположения.

Предположения:

1. Для всех значений вектора состояния параметров ξ верно условие:

$$L_b h(x) = L_b L_f^1 h(x) = \dots = L_b L_f^{\gamma-1} h(x) = 0, \beta(x, \xi) = L_b L_f^\gamma h(x) > 0, \quad (53)$$

где $L_f^1 h(x) = \frac{dh(x)}{dx} f(x, \xi)$, $L_b h(x) = \frac{dh(x)}{dx} b(x, \xi)$ – переобозначения производной функции $h(x)$ по направлениям полей $f(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ в терминах производной

Ли; $\gamma \leq n$, γ – относительная динамическая степень объекта [10, 40]. Старшие производные могут быть представлены в виде

$$L_f^2 h(x) = \frac{d(L_f^1 h(x))}{dx} f(x, \xi), \dots, L_f^k h(x) = \frac{d(L_f^{k-1} h(x))}{dx} f(x, \xi).$$

2. Функция $c(x, \xi) = L_f^\gamma h(x)$ ограничена на Ξ и ограничена либо липшицева по $x \in X$.

3. Существует функция $\phi^{-1}(x)$ такая, что

$$\bar{x}(t) = \phi(x(t)) = [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\gamma-1)}(t)]^T = [h(x), L_f^1 h(x), \dots, L_f^{\gamma-1} h(x)]^T. \quad (54)$$

Модельные преобразования. Проведем параметризацию объекта управления и получим уравнения динамики ошибок [43]. Для этого вычислим производную от выходного сигнала объекта γ раз:

$$p^\gamma y(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)), \quad (55)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Ошибка слежения $e_1 = y(t) - y_3(t)$ представима в следующей форме:

$$p^\gamma e_1(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)) - p^\gamma y_3(t). \quad (56)$$

Введем оператор $Q_{\gamma-1}(p) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} k_{\gamma-i} p^i$ такой, что полином $Q(\lambda) = \lambda^\gamma + Q_{\gamma-1}(\lambda)$ является гурвицевым, λ – алгебраическая переменная, тогда

$$Q(p)e_1(t) = u(t) + \psi(x, u, \xi, y_3, t), \quad (57)$$

где $\psi(x, u, \xi, y_3, t)$ – функция параметрических и внешних возмущений вида:

$$\begin{aligned} \psi(x, u, \xi, y_3, t) = & c(x, \xi) + \beta(x, \xi)\varphi(x, t) + \\ & + (\beta(x, \xi) - 1)u(t) - p^\gamma y_3(t) + Q_{\gamma-1}(p)e_1(t). \end{aligned} \quad (58)$$

Синтез системы управления. Уравнение ошибки слежения можно представить в следующей форме:

$$e_1(t) = Q(p)^{-1}u(t) + Q(p)^{-1}\psi(x, u, \xi, y_3, t). \quad (59)$$

Рассмотрим фильтр:

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t), \quad (60)$$

где $v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_\gamma(t) \end{bmatrix}^T, l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ & -k_2 & & I_{\gamma-1} \\ & \vdots & & \\ -k_\gamma & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$ тогда

$$e_1(t) = v_1(t) + Q(p)^{-1}\psi(x, u, \xi, y_3, t), \quad (61)$$

Принимая во внимание (60), найдем производную (61) в виде:

$$\dot{e}_1(t) = -k_1 v_1(t) + v_2(t) + p Q(p)^{-1}\psi(x, u, \xi, y_3, t). \quad (62)$$

Обозначив $\hat{f}_1 = c_1 e_1 + pQ(p)^{-1} \psi(x, u, \xi, y, t)$ в качестве новой функции возмущений, преобразуем (62) к виду:

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t) + \hat{f}_1, \quad (63)$$

Объект (51) включает в себя неизвестную функцию возмущающих воздействий $\varphi(x(t), t)$, что делает неприменимыми алгоритмы [13, 41]. Алгоритм [13] может быть обобщен на случай присутствия возмущений $\varphi(x(t), t)$ в описании объекта, если дополнительно вводить на каждом шаге синтеза регулятора специальную динамическую систему – вспомогательный контур. Таким образом будет выполнена итеративная (повторяющая идею метода бэкстеппинга) компенсация нежелательной динамики в каждом уравнении параметризованной модели объекта. При этом метод компенсации не относится к классу методов с сильной обратной связью, что позволяет синтезировать компенсирующее воздействие не большей величины, чем величина самого возмущения.

Шаг 1. Определим динамическую систему – вспомогательный контур, который в идеализированном виде воспроизводит динамику ошибки слежения:

$$\dot{e}_1^g(t) = -c_1 e_1^g(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t). \quad (64)$$

Разность между динамикой реального объекта и динамикой вспомогательного контура назовем ошибкой рассогласования

$$\xi_1(t) = e_1(t) - e_1^g(t), \quad (65)$$

тогда ее производная принимает следующий вид:

$$\dot{\xi}_1(t) = \dot{e}_1(t) - \dot{e}_1^g(t) = -c_1 \xi_1(t) + \hat{f}_1(t). \quad (66)$$

Можно выделить оценку функции нежелательной динамики $\hat{f}_1(t)$:

$$\hat{f}_1(t) = \dot{\xi}_1 + c_1 \xi_1. \quad (67)$$

Совмещая (67) и (3.40), получим:

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t) + \dot{\xi}_1(t) + c_1 \xi_1(t). \quad (68)$$

Если в (3.45) сигнал $v_2(t)$ может выступать в роли управляющего воздействия, то положим, что $v_2(t) = u_1(t)$ и сформируем вспомогательный закон управления:

$$u_1(t) = k_1 v_1(t) - \dot{\xi}_1(t) - c_1 \xi_1(t). \quad (69)$$

Заменяя неизвестные сигналы их оценками, перепишем вспомогательный закон управления:

$$u_1(t) = k_1 v_1(t) - \hat{\dot{\xi}}_1(t) - c_1 \xi_1(t), \quad (70)$$

где $\hat{\dot{\xi}}_1(t)$ – оценка функции $\dot{\xi}_1(t)$. Для вычисления оценок неизвестных производных используется звено реального дифференцирования

$$\hat{\xi}_1(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_1(t), \quad (71)$$

где p – оператор дифференцирования, $\mu > 0$. Подставим (70) в (68):

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) + e_2 + \eta_1(t), \quad (72)$$

где $\eta_1(t) = \hat{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_1(t)$ – ошибка наблюдения, $e_2(t)$ – ошибка виртуального управления:

$$e_2 = v_2(t) - u_1(t). \quad (73)$$

Шаг 2. Производная ошибки (73) принимает вид

$$\dot{e}_2(t) = -k_2 v_1(t) + v_3(t) - \dot{u}_1(t). \quad (74)$$

Второй вспомогательный контур в идеализированном виде определяет динамику системы (3.51):

$$\dot{e}_2^g(t) = -c_2 e_2^g(t) - k_2 v_1(t) + v_3(t). \quad (75)$$

Разность между динамикой (3.51) и динамикой второго вспомогательного контура (3.52) назовем второй ошибкой рассогласования:

$$\xi_2(t) = e_2(t) - e_2^g(t), \quad (76)$$

тогда ее производная получает представление

$$\dot{\xi}_2(t) = \dot{e}_2(t) - \dot{e}_2^g(t) = -c_2 \xi_2(t) + \hat{f}_2, \quad (77)$$

где функция $\hat{f}_2(t) = -\dot{u}_1(t) + c_2 e_2(t)$ определяет нежелательную динамику подсистемы (74). Оценка этой динамики, исходя из (3.54), имеет вид:

$$\hat{f}_2(t) = \dot{\xi}_2 + c_2 \xi_2. \quad (78)$$

Совмещая (74) и (3.55), получим:

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - k_2 v_1(t) + v_3(t) + \dot{\xi}_2(t) + c_2 \xi_2(t). \quad (79)$$

Если в (3.51) сигнал $v_3(t)$ может выступать в роли управляющего воздействия, то положим, что $v_3(t) = u_2(t)$, и сформируем второй вспомогательный закон управления:

$$u_2(t) = k_2 v_1(t) - \dot{\xi}_2(t) - c_2 \xi_2(t). \quad (80)$$

Заменяя неизвестные сигналы их оценками, перепишем второй вспомогательный закон управления:

$$u_2(t) = k_2 v_1(t) - \hat{\xi}_2(t) - c_2 \xi_2(t), \quad (81)$$

где $\hat{\xi}_2(t)$ – оценка функции $\dot{\xi}_2(t)$. Подставим (81) в (79), получим:

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) + e_3 + \eta_2(t), \quad (82)$$

где $\eta_2(t) = \hat{\xi}_2(t) - \dot{\xi}_2(t)$ – ошибка наблюдения, $e_3(t)$ – ошибка виртуального управления:

$$e_3 = v_3(t) - u_2(t). \quad (83)$$

Эти расчеты могут быть продолжены для анализа сигналов e_i при $i = 1, \dots, \gamma - 1$. В итоге будут получены законы управления замкнутых подсистем и сформированы законы виртуального управления, повторяющие с точностью до индексов функции (81) и (82).

Шаг γ . На последнем шаге для анализа останется уравнение ошибки $e_\gamma = v_\gamma(t) - u_{\gamma-1}(t)$, которая была сформирована на предпоследнем шаге $\gamma - 1$. Ее динамика имеет вид:

$$\dot{e}_\gamma(t) = -k_\gamma v_1(t) + u(t) - \dot{u}_{\gamma-1}(t), \quad (84)$$

Последний вспомогательный контур в идеализированном виде определяет динамику (3.61):

$$e_\gamma^e(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) - k_\gamma v_1(t) + u(t). \quad (85)$$

Разность между динамикой (3.61) и динамикой второго вспомогательного контура (3.62) назовем последней ошибкой рассогласования:

$$\xi_\gamma(t) = e_\gamma(t) - e_\gamma^e(t), \quad (86)$$

ее производная имеет представление:

$$\dot{\xi}_\gamma(t) = \dot{e}_\gamma(t) - \dot{e}_\gamma^e(t) = -c_\gamma \xi_\gamma(t) + \hat{f}_\gamma, \quad (87)$$

где функция $\hat{f}_\gamma(t) = -\dot{u}_{\gamma-1}(t) + c_\gamma e_\gamma(t)$ определяет нежелательную динамику подсистемы (84). Оценка этой нежелательной динамики выражается в виде

$$\hat{f}_\gamma(t) = \dot{\xi}_\gamma + c_\gamma \xi_\gamma. \quad (88)$$

Совмещая (3.61) и (3.65), получим

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) - k_\gamma v_1(t) + u(t) + \dot{\xi}_\gamma(t) + c_\gamma \xi_\gamma(t). \quad (89)$$

Определим закон реального управления:

$$u(t) = k_\gamma v_1(t) - \dot{\xi}_\gamma(t) - c_\gamma \xi_\gamma(t). \quad (90)$$

Заменяя неизвестные сигналы их оценками, перепишем (3.67):

$$u(t) = k_\gamma v_1(t) - \hat{\xi}_\gamma(t) - c_\gamma \xi_\gamma(t), \quad (91)$$

где $\hat{\xi}_\gamma(t)$ – оценка функции $\xi_\gamma(t)$. Подставляя (91) в (89), получим

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + \eta_\gamma(t), \quad (92)$$

где $\eta_\gamma(t) = \hat{\xi}_\gamma(t) - \xi_\gamma(t)$ – ошибка наблюдения.

Утверждение 1.2 [50]. Если предположения 1-3 верны, то найдутся такие значения параметров $c_i > 0, i = \overline{1, \gamma}, \mu_0 > 0$, что при $\mu \in (0; \mu_0]$ система управления, состоящая из фильтра (60), вспомогательных контуров (64), (75), (85), вспомогательных законов управления (70), (81), наблюдателя (71) и закона управления (91), обеспечивает для объекта управления (51) выполнение цели управления (52).

Доказательство. Динамика всех сигналов ошибок в замкнутой системе определяется в виде

$$\dot{e}_i(t) = -c_i e_i(t) + e_{i+1} + \eta_i(t), i = \overline{1, \gamma-1}, \quad (93)$$

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + \eta_\gamma(t), \quad (94)$$

$$\mu_{j1} \dot{\eta}_j(t) = -\eta(t) + \mu_{j2} \ddot{\xi}_j(t), j = \overline{1, \gamma}. \quad (95)$$

Так как значения настраиваемых параметров c_i строго положительные по определению, то ограниченность сигналов (3.70), (3.71) следует из ограниченности ошибки наблюдателя η_j и, следовательно, сигналов $\ddot{\xi}_j$. Для доказательства последнего воспользуемся результатом [24], в котором лемма Брусина [4] расширена для класса систем неавтономных дифференциальных уравнений:

Лемма. Рассмотрим объект вида

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2, t), \quad (96)$$

где $x(t) \in R^{S_1}$, $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2) \in R^{S_2}$, $f(x, \mu_1, \mu_2, t)$ – липшицева по x и ограниченная по t функция, которая имеет ограниченное замкнутое ограниченное множество притяжения

$$\Omega = \{x : P(x) \leq C\},$$

где $P(x)$ – гладкая положительно определенная функция в R^{S_1} . Если существуют числа $C_1 > 0$ и $\bar{\mu}_1 > 0$ такие, что

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left[\left\langle [\nabla P(x)]^T, f(x, \mu_1, 0, t) \right\rangle \Big| P(x) = C \right] \leq -C_1,$$

тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что система (96) при $\mu_2 \in (0; \mu_0]$ сохраняет область притяжения Ω .

Чтобы условия Леммы были удовлетворены, достаточно доказать асимптотическую устойчивость объекта (3.70) – (3.72) в редуцированной форме, то есть при $\mu_0 = 0$. Тогда, исходя из утверждения Леммы, область притяжения будет сохранена и для исходного случая при $\mu_0 > 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = 0.5 \sum_{i=1}^{\gamma} e_i^2(t) + 0.5 \sum_{i=1}^{\gamma} \eta_i^2(t), \quad (97)$$

и ее производную

$$\dot{V}(t) = -\sum_{i=1}^{\gamma} c_i e_i^2(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t) e_{i+1}(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t) \eta_i(t) - \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} \eta_i^2(t). \quad (98)$$

Следующие оценки справедливы для второго и третьего слагаемых в (98):

$$\sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t)e_{i+1}(t) \leq \sum_{i=1}^{\gamma-1} \left(\frac{1}{2}e_i^2(t) + \frac{1}{2}e_{i+1}^2(t) \right), \quad (99)$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t)\eta_i(t) \leq \sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{1}{2}e_i^2(t) + \frac{1}{2}\eta_i^2(t) \right).$$

Используя (99), найдем оценку сверху для (98) в виде

$$\dot{V}(t) \leq (1-c_1)e_1^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma-1} (1.5-c_i)e_i^2(t) + (1-c_\gamma)e_\gamma^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma} (0.5-\mu_{i1}^{-1})\eta_i^2(t). \quad (100)$$

Видно, что при $c_{1,\gamma} > 1, c_i|_{i=2,\gamma-1} > 1.5, \mu_{i1}^{-1} > 0.5$ выполняются неравенства

$$(1-c_1)e_1^2(t) < 0,$$

$$(1.5-c_i)e_i^2(t) < 0, i = \overline{1, n},$$

$$(1-c_\gamma)e_\gamma^2(t) < 0,$$

$$(0.5-\mu_{i1}^{-1})\eta_i^2(t) < 0,$$

тогда неравенство (100) может быть переписано:

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} \sum_{i=1}^{\gamma} e_i^2(t) - \bar{\mu} \sum_{i=1}^{\gamma} \eta_i^2(t) = -\alpha V(t), \quad (101)$$

где $\bar{c} = \sup_{i=1,\gamma} c_i, \bar{\mu} = \sup_{i=1,\gamma} \mu_{i1}^{-1}, \alpha = \sup(\bar{c}, \bar{\mu})$. Функция Ляпунова для редуцированной

системы (93) - (95) получена, решения экспоненциально стремятся к нулю. Следовательно, все сигналы в (93) - (95) ограничены, то есть выполнение условий Леммы обеспечено. Значит, найдется такой параметр $\mu_0 > 0$, что при $\mu_{1,2} \in (0; \mu_0]$ система (93) - (95) сохраняет множество притяжения как в случае $\mu_2 = 0$. Произведем оценку области диссипативности для сигналов e_i, η_i в нередуцированном случае ($\mu_0 > 0$). Вернемся к рассмотрению функции Ляпунова. Для случая $\mu_0 > 0$ ее производная принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\sum_{i=1}^{\gamma} c_i e_i^2(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t)e_{i+1}(t) + \\ & + \sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t)\eta_i(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} (\mu_{i2}/\mu_{i1})\ddot{\xi}_i(t)\eta_i(t) - \mu_{i1}^{-1}\eta_i(t). \end{aligned} \quad (102)$$

Используя оценки (99), получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (1-c_1)e_1^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma-1} (1.5-c_i)e_i^2(t) + (1-c_\gamma)e_\gamma^2(t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} (\mu_{i1} + \mu_{i2} - 2)\eta_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} \mu_{i2} \ddot{\xi}_i^2(t). \end{aligned} \quad (103)$$

При значениях параметров $c_{1,\gamma} > 1, c_i|_{i=2,\gamma-1} > 1.5$, $\mu_{i1} = \mu_{i2} = \mu_{i0}|_{i=1,\gamma} > 1$ неравенство (103) принимает вид

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} \sum_{i=2}^{\gamma} e_i^2(t) - \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \eta_i^2(t) + \frac{1}{2} \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \ddot{\xi}_i^2(t) = -\alpha V(t) + \bar{\xi}, \quad (104)$$

где $\bar{c} = \sup_{i=1,\gamma} c_i, \bar{\mu} = \sup_{i=1,\gamma} \mu_{i0}^{-1}, \alpha = \sup(\bar{c}, \bar{\mu}), \bar{\xi} = \sup_{t \geq 0, i=1,\gamma} \frac{1}{2} \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \ddot{\xi}_i^2(t)$. Неравенство (104)

имеет решение

$$V(t) \leq -e^{-\alpha t} V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \bar{\xi} \alpha^{-1}. \quad (105)$$

Из неравенства (105) можно вывести оценку область диссипативности:

$$\|e\| \leq \sqrt{-e^{-\alpha t} 2V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \bar{\xi} \alpha^{-1}}. \quad (106)$$

Таким образом, точность замкнутой системы определяется значениями настраиваемых параметров $\mu_{i0}, c_i, i = \overline{1, \gamma}$, которые формируют величины α и $\bar{\xi}$.

Моделирование. Выбор модели объекта управления мотивирован тем фактом, что представленная модель используется в работе [14], которая является ближайшим аналогом к предложенному алгоритму управления и может быть использована для сравнительного анализа качества регулирования. Рассмотрим объект вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda_1 \sin x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) - \lambda_3 x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_4 x_1(t) + \lambda_5 \sin x_3(t) + (1 + x_2^2(t))^{-1} (u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t) + f(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= \lambda_6 x_1(t) - x_3^3(t) + (1 + x_2^2(t))^{-1} (u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t) + f(t)), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

где $f \in [-20; 20]$ полагается неизвестной функцией возмущающих воздействий. При моделировании данная функция была сформирована следующим образом:

$$f(t) = \sin(t) + 0,3 \sin(3,14t) + 15 \sin(0,30t).$$

Расчет относительной динамической степени выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 = h(x) &= x, \quad y_2 = L_f^1 h(x) = \xi_1 \sin x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3, \\ c(x, \xi) &= L_f^2 h(x) = \xi_1 \cos x_1 (\xi_1 \sin x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3) + \\ &+ \xi_2 (\xi_4 x_1 + \xi_5 \sin x_3) - \xi_3 (\xi_6 x_1 - x_3^3), \\ L_b h(x) &= 0, \quad b(x, \xi) = L_b L_f^1 h(x) = (\xi_2 - \xi_3) (1 + x_2^2)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, относительная степень объекта управления равна двум ($\gamma = 2$). Наблюдатель и вспомогательный контур имеют следующие значения настраиваемых параметров: $\mu = 0.01, c_{1,2} = 10$. На рисунках 2–5 показаны графики работы двух алгоритмов: модификации бэкстеппинга на основе

вспомогательного контура (на рисунках — MBADC 2) и регулятора из работы [16-49] (MBADC 1). В установившемся режиме видно значительно более высокое качество регулирования и лучшая компенсация возмущающего воздействия в случае включения предложенного алгоритма. Точность слежения на порядок выше, чем у аналога [14]. Достигнутые целевые показатели приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Показатели качества алгоритмов MBADC 1 и MBADC 2

	t_k, c	$\delta, \%$
MBADC 1	0.97	4
MBADC 2	0.56	0.035

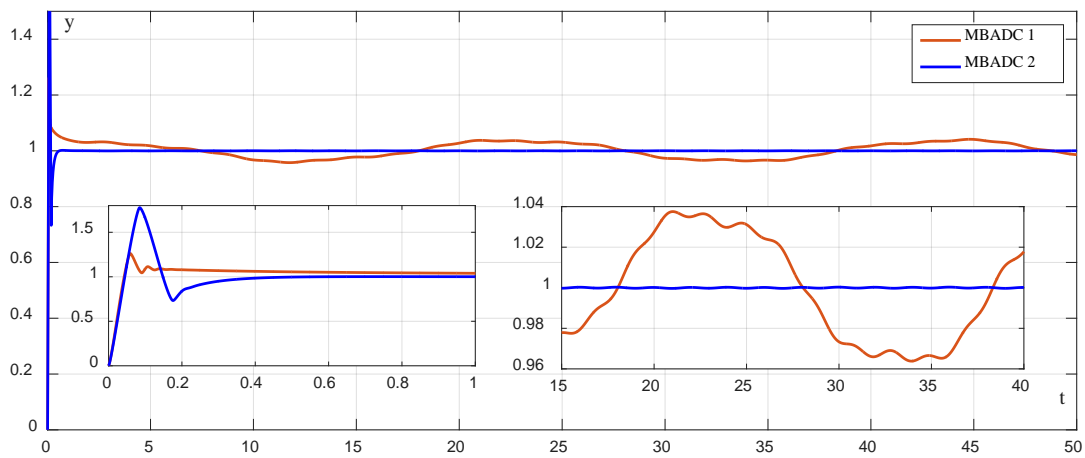


Рисунок 2 – Результаты моделирования работы алгоритмов управления MBADC 1 и MBADC 2 в режиме стабилизации. Переходные процессы по выходу

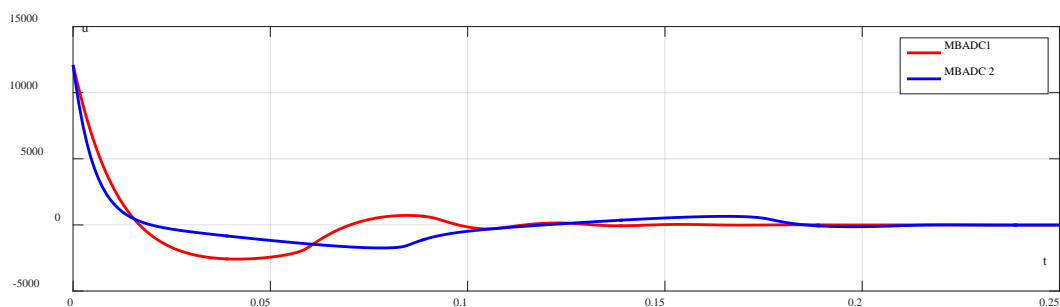


Рисунок 3 – Результаты работы алгоритмов MBADC 1 и MBADC 2 в режиме стабилизации. Переходные процессы по управлению

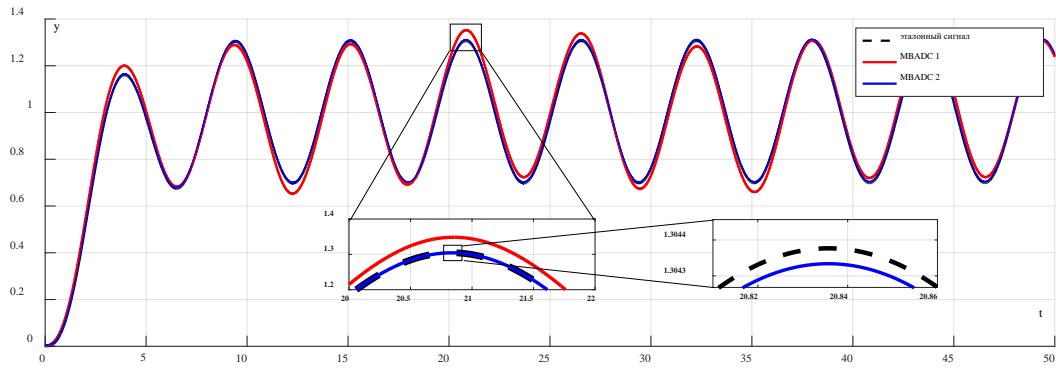


Рисунок 4 – Результаты работы алгоритмов MBADC 1 и MBADC 2 в режиме слежения. Переходные процессы по выходу

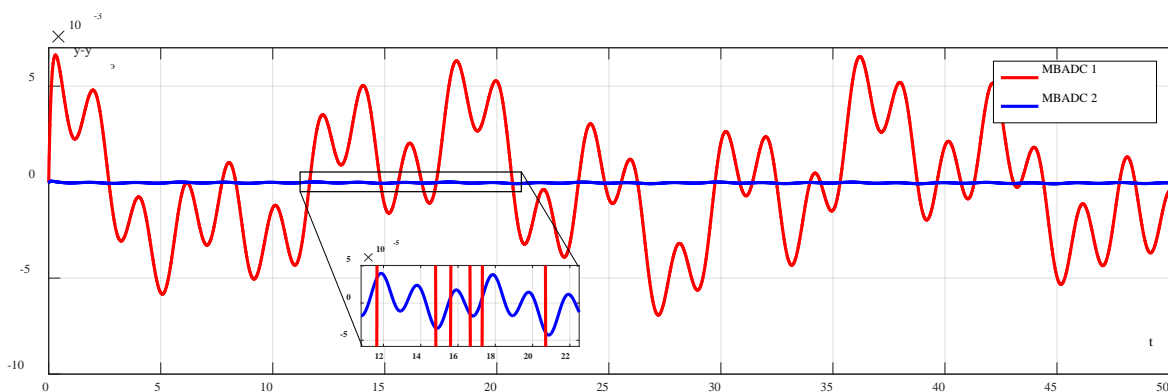


Рисунок 5 – Результаты работы алгоритмов MBADC 1 и MBADC 2 в режиме слежения. Переходные процессы по ошибке

Касаясь вопросов практической реализуемости, рассмотрим многоканальную нелинейную динамическую модель, описывающую движение винтокрылого летательного аппарата по двум угловым координатам [48]:

$$J_1 \ddot{\alpha} = -k_{f11} \dot{\alpha} - k_{f12} \text{sign}(\dot{\alpha}) + gN_1 \cos \alpha - gN_2 \sin \alpha - N_3 \beta^2 \sin \alpha \cos \alpha + F_1(u_1),$$

$$J_2 \ddot{\beta} = -k_{f21} \dot{\beta} - k_{f22} \text{sign}(\dot{\beta}) + F_2(u_2),$$

где α , β - углы наклона балки в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно, J_1 , J_2 - моменты инерции объекта в вертикальной и горизонтальной плоскостях, k_{f11} , k_{f21} - коэффициенты сил вязкого трения, k_{f12} , k_{f22} - коэффициенты сил сухого трения, g - ускорение свободного падения, N_i , $i = \overline{1,3}$ - константы, значения которых определяются массогабаритными показателями установки, F_1 , F_2 - нелинейные функции управления, включающие в себя динамику двигателей постоянного тока и работу аэродинамических сил от вращения лопастей установки, u_1 , u_2 - управляющие воздействия, в качестве

которых выступают напряжения, подаваемые на ДПТ. Численные значения параметров объекта взяты из документации к установке [48].

Функция возмущающих воздействий выбрана такой же, как и в предыдущем примере. Необходимость наличия такой функции обусловлена наличием воздушных потоков при движении винтокрылых летательных аппаратов и параметрических неточностей, что естественно при управлении реальными техническими устройствами. Наблюдатель и вспомогательный контур имеют те же значения настраиваемых параметров, что и в предыдущем примере: $\mu = 0.01$, $c_{1,2} = 10$. Рисунок 6 демонстрирует переходный процесс и установившийся режим замкнутой системы по углу тангажа. Рисунок 7 показывает результаты работы замкнутой системы в режиме слежения по углу рысканья. Достигнута высокая точность регулирования и малое время переходных процессов без видимых недостатков или негативных свойств в процессах. Достигнутая точность составила 0.3% по углу тангажа (точность стабилизации) и 0.5% по углу рысканья (точность слежения) при ограничении на возмущения $f \in [-20; 20]$.

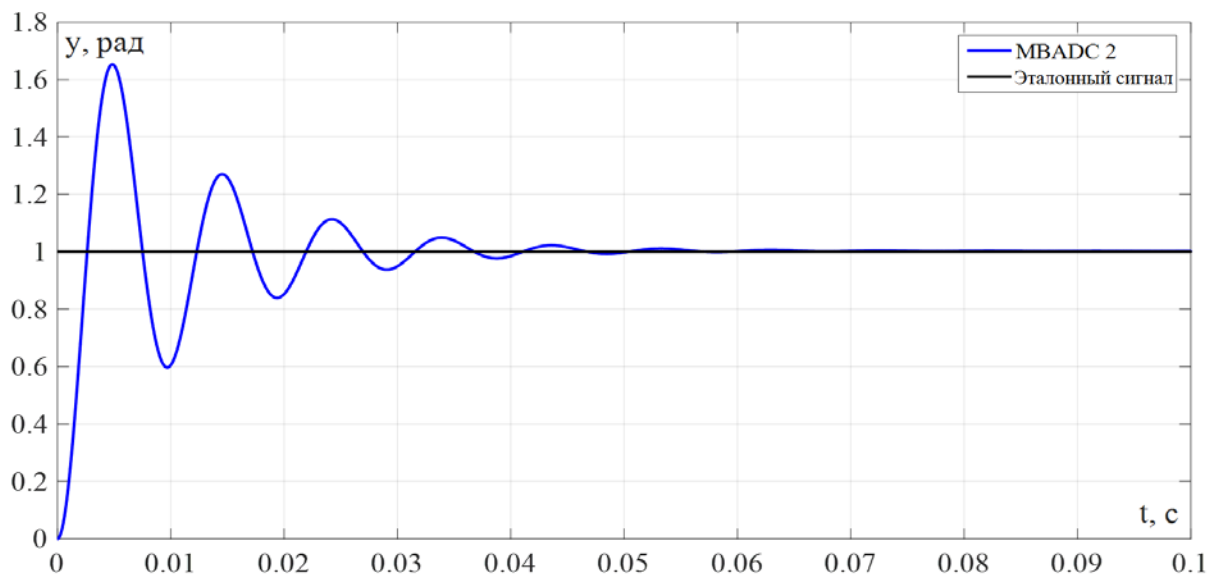


Рисунок 6 - Результаты моделирования работы алгоритма MBADC в режиме стабилизации. Переходные процессы по выходу

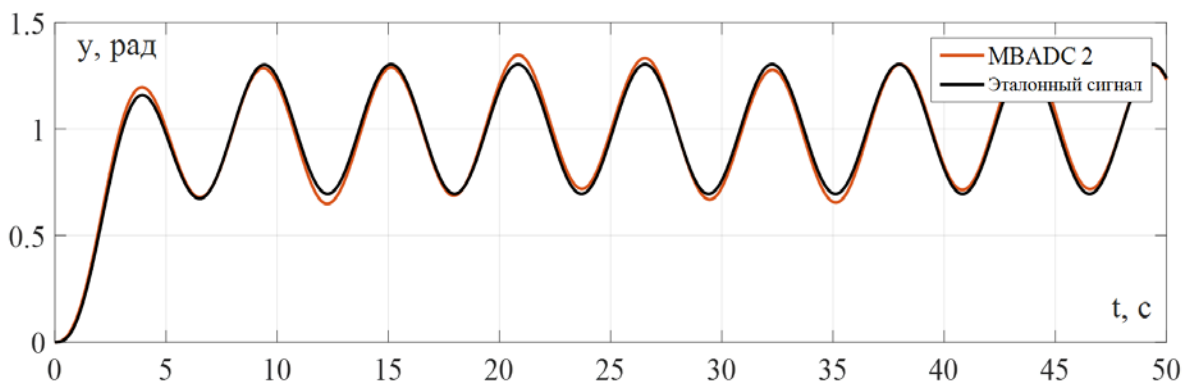


Рисунок 7 - Результаты моделирования работы алгоритма MBADC в режиме слежения. Переходные процессы по выходу

1.3 Нелинейные многоканальные системы

Данный раздел является обобщением предыдущего результата на класс многоканальных объектов, декомпозируемых на конечное множество одноканальных подсистем либо многоагентных систем. На данном этапе влияние перекрестных связей не рассматривается. Для простоты полагается, что относительная динамическая степень всех агентов (или всех одноканальных подсистем) одинакова и может быть определена. Приводятся математическое доказательство устойчивости замкнутой системы и результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие эффективность работы алгоритма.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейный многоканальный объект управления:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i, \xi_i) + b_i(x_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(x_i, t)), \\ y_i(t) &= h_i(x_i), x_i(0) = x_{i0}, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (107)$$

где $x_i(t) \in X_i \subset R^{n_i}$ - неизмеряемый вектор состояния i -го компонента объекта управления, $u_i(t) \in R$ - соответствующий входной сигнал, $y_i(t) \in Y_i \subset R$ - i -й выходной сигнал, доступный измерению, $t \in T \subset [0, \infty)$ - время, f_i, χ_{ij}, b_i, h_i - гладкие функции соответствующих размерностей, χ_{ij} описывают влияния перекрестных связей i -го компонента объекта управления с другими, φ_i - функции неизмеряемых возмущающих воздействий, которые являются ограниченными либо ограниченными на множестве T и липшицевыми по X_i , $\xi_i \in \Xi$ - вектора неизвестных параметров, Ξ - известное ограниченное множество. Дополнительно сформулируем следующие предположения.

1. Для всех $x_i \in X_i$ и $\xi_i \in \Xi$ верно следующее:

$$\begin{aligned} L_{b_i} h_i(x) &= L_{b_i} L_{f_i}^1 h_i(x) = \dots = L_{b_i} L_{f_i}^{y_i-2} h_i(x_i) = 0, \\ \beta_i(x_i, \xi_i) &= L_{b_i} L_{f_i}^{y_i-1} h_i(x_i) > 0, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (108)$$

где $L_{f_i}^1 h_i(x) = \frac{dh_i(x_i)}{dx_i} f_i(x_i, \xi_i)$, $L_{b_i} h_i(x_i) = \frac{dh_i(x_i)}{dx_i} b_i(x_i, \xi_i)$ - производные функций $h_i(x)$ по направлениям векторных полей $f_i(x_i, \xi_i)$ и $b_i(x_i, \xi_i)$ в терминах производных Ли, γ_i - относительная степень i -го компонента объекта $\gamma_i \leq n_i$. Старшие производные могут быть представлены в виде:

$$L_{f_i}^2 h(x) = \frac{d(L_{f_i}^1 h(x_i))}{dx_i} f_i(x_i, \xi_i),$$

...

$$L_{f_i}^{\gamma_i} h(x_i) = \frac{d(L_{f_i}^{\gamma_i-1} h(x_i))}{dx_i} f_i(x_i, \xi_i).$$

2. Функции вида $c_i(x_i, \xi_i) = L_{f_i}^{\gamma_i} h_i(x_i)$ ограничены на множестве Ξ и ограничены либо липшицевы по X_i .

3. Существуют функции $\phi_i^{-1}(x_i)$ такие, что

$$\bar{x}_i(t) = \phi_i(x_i) = [y_i(t), \dot{y}_i(t), \dots, y_i^{(\gamma_i-1)}(t)]^T = [h_i(x_i), L_{f_i}^1 h_i(x_i), \dots, L_{f_i}^{\gamma_i-1} h_i(x_i)]^T. \quad (109)$$

Цель управления: обеспечить выполнение целевого условия

$$|y_i(t) - y_{r_i}(t)| < \delta_i, t > t_f, \quad (110)$$

где $y_{r_i}(t)$ - гладкий ограниченный (включая производные) эталонный сигнал для i -го выхода, $\delta_i > 0$ - некоторая точность слежения, $t_f > 0$ - время переходного процесса.

Модельные преобразования. Используя известную модель преобразования, описанную в [43], рассмотрим динамическую модель ошибки объекта управления (107). Опираясь на предположение 1, продифференцируем уравнения каждого выхода в соответствии с их относительными степенями γ_i раз

$$p^{\gamma_i} y_i(t) = c_i(x_i, \xi_i) + \beta_i(x_i, \xi_i)(u_i(t) + \varphi_i(x_i, t)), i = \overline{1, n}, \quad (111)$$

где $p = d/dt$ - оператор дифференцирования. Уравнения ошибки $e_{1_i}(t) = y_i(t) - y_{r_i}(t), i = \overline{1, n}$, переписутся в форме

$$p^{\gamma_i} e_{1_i}(t) = c_i(x_i, \xi_i) + \beta_i(x_i, \xi_i)(u_i(t) + \varphi_i(x_i, t)) - p^{\gamma_i} y_{r_i}(t). \quad (112)$$

Введем такой оператор $Q_{\gamma_i-1}(p) = \sum_{j=0}^{\gamma_i-1} k_{\gamma_i-j} p^j$, что $Q_i(\lambda) = \lambda^{\gamma_i} + Q_{\gamma_i-1}(\lambda)$ - гурвицев полином, λ - алгебраическая переменная. Сложение и вычитание $Q_{\gamma_i-1}(p)e_{1_i}(t)$ с левой частью выражения (112) дает

$$Q_i(p)e_{1_i}(t) = u_i(t) + \psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t), i = \overline{1, n}, \quad (113)$$

где $\psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t)$ - функции параметрических и внешних возмущений вида

$$\begin{aligned} \psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t) = & c_i(x_i, \xi_i) + \beta_i(x_i, \xi_i)\varphi_i(x_i, t) + \\ & + (\beta_i(x_i, \xi_i) - 1)u_i(t) - p^{\gamma_i} y_{r_i}(t) + Q_{\gamma_i-1}(p)e_{1_i}(t) \end{aligned} \quad (114)$$

Синтез системы управления. Перепишем (113) в форме

$$e_{1_i}(t) = Q_i(p)^{-1}u_i(t) + Q_i(p)^{-1}\psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t), i = \overline{1, n}. \quad (115)$$

Рассмотрим фильтр

$$\dot{v}_i(t) = A_{0_i}v_i(t) + l_i u_i(t), i = \overline{1, n}, \quad (116)$$

где $v_i(t) = \begin{bmatrix} v_{1_i}(t) \\ v_{2_i}(t) \\ \vdots \\ v_{\gamma_i}(t) \end{bmatrix}^T, l_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{0_i} = \begin{bmatrix} -k_{1_i} & & & \\ & -k_{2_i} & & I_{\gamma_i-1} \\ & \vdots & & \\ & -k_{\gamma_i} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. С учетом (116) преобразуем

(115):

$$e_{1_i}(t) = v_{1_i}(t) + Q_i(p)^{-1}\psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t). \quad (117)$$

Производная от (117) принимает вид

$$\dot{e}_{1_i}(t) = -k_{1_i}v_{1_i}(t) + v_{2_i}(t) + pQ_i(p)^{-1}\psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t). \quad (118)$$

Преобразуем (118), сложив и вычтя компонент, обозначающий желаемую динамику:

$$\dot{e}_{1_i}(t) = -c_{1_i}e_{1_i}(t) - k_{1_i}v_{1_i}(t) + v_{2_i}(t) + \hat{f}_{1_i}, \quad (119)$$

где $\hat{f}_{1_i} = c_{1_i}e_{1_i} + pQ_i(p)^{-1}\psi_i(x_i, u_i, \xi_i, y_{r_i}, t)$ - новые функции возмущений.

Оригинальный метод бэкстеппинга, применяемый непосредственно к модели (116), (119), предлагает итерационную процедуру синтеза законов виртуального управления для каждого уравнения состояния и, на последнем этапе, синтез реального закона управления. В данном случае представлены неизвестные ограниченные возмущения. Чтобы учесть неизвестные ограниченные возмущения в алгоритме управления, дополнительно введем в рассмотрение специальный вспомогательный контур для согласования помех на каждом шаге итерационной процедуры. Будет показано, что предлагаемый подход и для многомерного случая позволяет значительно повысить надежность системы управления без использования сильной обратной связи.

Шаг 1. Введем в рассмотрение первый набор вспомогательных контуров вида

$$\dot{e}_{1_i}^a(t) = -c_{1_i}e_{1_i}^a(t) - k_{1_i}v_{1_i}(t) + v_{2_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (120)$$

На основе (119) и (120) можно рассмотреть ошибки рассогласования

$$\xi_{1_i}(t) = e_{1_i}(t) - e_{1_i}^a(t), i = \overline{1, n} \quad (121)$$

и их производные

$$\dot{\xi}_{1_i}(t) = \dot{e}_{1_i}(t) - \dot{e}_{1_i}^a(t) = -c_{1_i} \xi_{1_i}(t) + \hat{f}_{1_i}, i = \overline{1, n}. \quad (122)$$

Из (122) следует, что возмущения могут быть оценены следующим образом:

$$\hat{f}_{1_i}(t) = \dot{\xi}_{1_i} + c_{1_i} \xi_{1_i}, i = \overline{1, n}. \quad (123)$$

Таким образом, производные (119) от ошибок (117) принимают вид

$$\dot{e}_{1_i}(t) = -c_{1_i} e_{1_i}(t) - k_{1_i} v_{1_i}(t) + v_{2_i}(t) + \dot{\xi}_{1_i}(t) + c_{1_i} \xi_{1_i}(t). \quad (124)$$

Согласно методу бэкстеппинга, предположим, что сигналы $v_{2_i}(t)$ могут рассматриваться как виртуальные управляющие сигналы для системы (119) так, что выполняется следующее равенство

$$v_{2_i}(t) = u_{1_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (125)$$

Из (124) следует, что закон виртуального управления в виде

$$u_{1_i}(t) = k_{1_i} v_{1_i}(t) - \dot{\xi}_{1_i}(t) - c_{1_i} \xi_{1_i}(t), i = \overline{1, n} \quad (126)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость (117). Значения функций $\dot{\xi}_{1_i}(t)$ могут быть оценены при помощи наблюдателя, тогда

$$u_{1_i}(t) = k_{1_i} v_{1_i}(t) - \hat{\xi}_{1_i}(t) - c_{1_i} \xi_{1_i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (127)$$

где $\hat{\xi}_{1_i}(t)$ - оценка $\dot{\xi}_{1_i}(t)$. Подставляя (125), (127) в (124), получим

$$\dot{e}_{1_i}(t) = -c_{1_i} e_{1_i}(t) + e_{2_i} + \eta_{1_i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (128)$$

где $\eta_{1_i}(t) = \hat{\xi}_{1_i}(t) - \dot{\xi}_{1_i}(t)$ - ошибки наблюдения, $e_{2_i}(t)$ - ошибка виртуального управления:

$$e_{2_i} = v_{2_i}(t) - u_{1_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (129)$$

Шаг 2. Рассмотрим производную (129) с суммированием и вычитанием компонента, обозначающего желаемую динамику:

$$\dot{e}_{2_i}(t) = -k_{2_i} v_{1_i}(t) + v_{3_i}(t) - \dot{u}_{1_i}(t) - c_{2_i} e_{2_i}(t) + c_{2_i} e_{2_i}(t). \quad (130)$$

Введем в рассмотрение второй набор вспомогательных контуров следующего вида:

$$\dot{e}_{2_i}^a(t) = -c_{2_i} e_{2_i}^a(t) - k_{2_i} v_{1_i}(t) + v_{3_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (131)$$

Ошибки рассогласования могут быть сформированы в соответствии с (130), (131) в форме

$$\xi_{2_i}(t) = e_{2_i}(t) - e_{2_i}^a(t), i = \overline{1, n}, \quad (132)$$

и их производные

$$\dot{\xi}_{2_i}(t) = \dot{e}_{2_i}(t) - \dot{e}_{2_i}^a(t) = -c_{2_i}\xi_{2_i}(t) + \hat{f}_{2_i}, i = \overline{1, n}, \quad (133)$$

где $\hat{f}_{2_i}(t) = -\dot{u}_{1_i}(t) + c_{2_i}e_{2_i}(t)$ - новые функции возмущений для подсистемы (130).

Из (133) следует, что

$$\hat{f}_{2_i}(t) = \dot{\xi}_{2_i} + c_{2_i}\xi_{2_i}, i = \overline{1, n}. \quad (134)$$

Таким образом, производные (130) от ошибок (129) принимают вид

$$\dot{e}_{2_i}(t) = -c_{2_i}e_{2_i}(t) - k_{2_i}v_{1_i}(t) + v_{3_i}(t) + \dot{\xi}_{2_i}(t) + c_{2_i}\xi_{2_i}(t). \quad (135)$$

Предположим, что сигналы $v_{3_i}(t)$ могут рассматриваться как виртуальные управляющие сигналы для системы (130) так, что выполняется следующее равенство:

$$v_{3_i}(t) = u_{2_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (136)$$

Из (135) следует, что вспомогательный закон управления вида

$$u_{2_i}(t) = k_{2_i}v_{1_i}(t) - \dot{\xi}_{2_i}(t) - c_{2_i}\xi_{2_i}(t), i = \overline{1, n} \quad (137)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость (129). Значения функций $\dot{\xi}_{2_i}(t)$ могут быть оценены при помощи наблюдателя, тогда

$$u_{2_i}(t) = k_{2_i}v_{1_i}(t) - \hat{\xi}_{2_i}(t) - c_{2_i}\xi_{2_i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (138)$$

где $\hat{\xi}_{2_i}(t)$ - оценка функции $\dot{\xi}_{2_i}(t)$. Подстановка (136), (138) в (135) дает:

$$\dot{e}_{2_i}(t) = -c_{2_i}e_{2_i}(t) + e_{3_i} + \eta_{2_i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (139)$$

где $\eta_{2_i}(t) = \hat{\xi}_{2_i}(t) - \dot{\xi}_{2_i}(t)$ - ошибки наблюдения, $e_{3_i}(t)$ - ошибки виртуального управления:

$$e_{3_i} = v_{3_i}(t) - u_{2_i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (140)$$

Анализ сигналов e_{j_i} , $j = \overline{1, \gamma-1}$, $i = \overline{1, n}$, повторяет расчеты на шаге 2 с учетом индексации сигналов и позволяет сформировать законы виртуального управления управления и уравнения замкнутых подсистем, повторяющие (127), (138) и (128), (139) соответственно, которые можно получить для каждого уравнения состояния каждого компонента объекта управления.

Шаг γ . Рассмотрим ошибки виртуального управления $e_{\gamma_i} = v_{\gamma_i}(t) - u_{\gamma_{i-1}}(t)$, которые были получены на предыдущем шаге ($\gamma-1$), и их производные с сложением и вычитанием компонента желаемой динамики:

$$\dot{e}_{\gamma_i}(t) = -k_{\gamma_i}v_{1_i}(t) + u_i(t) - \dot{u}_{\gamma_{i-1}}(t) - c_{\gamma_i}e_{\gamma_i}(t) + c_{\gamma_i}e_{\gamma_i}(t), \quad (141)$$

где $u_i(t), i = \overline{1, n}$ - реальные управляющие воздействия на соответствующие входы многомерного объекта. Введем в рассмотрение окончательный набор вспомогательных контуров в виде

$$e_{\gamma_i}^a(t) = -c_{\gamma_i} e_{\gamma_i}(t) - k_{\gamma_i} v_{1_i}(t) + u_i(t). \quad (142)$$

Ошибки рассогласования между (131) и (142) представимы в форме

$$\xi_{\gamma_i}(t) = e_{\gamma_i}(t) - e_{\gamma_i}^a(t), \quad (143)$$

и их производные принимают вид

$$\dot{\xi}_{\gamma_i}(t) = \dot{e}_{\gamma_i}(t) - \dot{e}_{\gamma_i}^a(t) = -c_{\gamma_i} \xi_{\gamma_i}(t) + \hat{f}_{\gamma_i}, \quad (144)$$

где $\hat{f}_{\gamma_i}(t) = -\dot{u}_{\gamma_{i-1}}(t) + c_{\gamma_i} e_{\gamma_i}(t)$ - новая функция возмущающих воздействий, которую можно оценить в виде

$$\hat{f}_{\gamma_i}(t) = \dot{\xi}_{\gamma_i} + c_{\gamma_i} \xi_{\gamma_i}. \quad (145)$$

Производные (141) принимают следующий вид:

$$\dot{e}_{\gamma_i}(t) = -c_{\gamma_i} e_{\gamma_i}(t) - k_{\gamma_i} v_{1_i}(t) + u_i(t) + \dot{\xi}_{\gamma_i}(t) + c_{\gamma_i} \xi_{\gamma_i}(t). \quad (146)$$

Из (146) следует, что законы управления в виде:

$$u_i(t) = k_{\gamma_i} v_{1_i}(t) - \dot{\xi}_{\gamma_i}(t) - c_{\gamma_i} \xi_{\gamma_i}(t) \quad (147)$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость $e_{\gamma_i}(t)$. Для оценки значений функций $\dot{\xi}_{\gamma_i}(t)$ может быть использован наблюдатель, тогда

$$u_i(t) = k_{\gamma_i} v_{1_i}(t) - \hat{\xi}_{\gamma_i}(t) - c_{\gamma_i} \xi_{\gamma_i}(t), \quad (148)$$

где $\hat{\xi}_{\gamma_i}(t)$ - оценка функции $\dot{\xi}_{\gamma_i}(t)$. Подставим (148) в (146):

$$\dot{e}_{\gamma_i}(t) = -c_{\gamma_i} e_{\gamma_i}(t) + \eta_{\gamma_i}(t), \quad (149)$$

где $\eta_{\gamma_i}(t) = \hat{\xi}_{\gamma_i}(t) - \dot{\xi}_{\gamma_i}(t)$ - ошибка наблюдения. Оценка сигналов $\dot{\xi}_{j_i}(t)$ может быть получена с использованием звена реального дифференцирования:

$$\hat{\xi}_{j_i}(t) = \frac{p}{\mu_i p + 1} \xi_{j_i}(t), \quad j = \overline{1, \gamma - 1}, i = \overline{1, n}, \quad (150)$$

где p - оператор дифференцирования, $\mu_i(t)$ - достаточно малая величина. Законы управления (148) обеспечивают асимптотическую устойчивость $e_{\gamma_i}(t)$, если ошибки $\eta_{\gamma_i}(t)$ оценки стремятся к нулю. В свою очередь, асимптотическая устойчивость $e_{\gamma_i}(t)$ и $\eta_{\gamma_{i-1}}(t)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость $e_{\gamma_{i-1}}(t)$. Следуя тому же пути, можно показать, что набор законов управления (148)

обеспечивает асимптотическую устойчивость всех ошибок e_{ji} , $j = \overline{1, \gamma - 1}$, $i = \overline{1, n}$, если ошибки наблюдения $\eta_{ji}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, \gamma}$ устойчивы.

Утверждение 1.3 [50]. Если условия предположения выполнены, то существуют такие значения параметров $\mu_{0_i}(t)$, $c_{ji}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, \gamma}$, что для каждого $\mu_i \in (0; \mu_{0_i}]$ система управления, включающая фильтр (116), наборы вспомогательных контуров (120), (131), (142), виртуальные законы управления (127), (138), законы управления (148) и наблюдатели (150), обеспечивает выполнение цели управления (108) для объекта (107).

Доказательство утверждения для более общего случая с учетом перекрестных связей в многоканальной структуре объекта представлено в следующем разделе.

Моделирование. Рассмотрим упрощенную нелинейную модель вертолета [60]:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\alpha} = -k_{f11} \dot{\alpha} - k_{f12} \text{sign}(\dot{\alpha}) + gN_1 \cos \alpha - gN_2 \sin \alpha - N_3 \beta^2 \sin \alpha \cos \alpha + F_1(u_1), \\ J_2 \ddot{\beta} = -k_{f21} \dot{\beta} - k_{f22} \text{sign}(\dot{\beta}) + F_2(u_2), \end{cases} \quad (151)$$

где α - угол наклона (тангажа) объекта управления, β - угол поворота (рысканья) объекта, $J_{1,2}$ - моменты инерции по углам тангажа и рыскания соответственно, k_{fij} , $i, j = \overline{1, 2}$ - коэффициенты сил трения, $N_{1,2}$ - коэффициенты, зависящие от веса и размеров объекта, g - ускорение свободного падения, $F_{1,2}$ - нелинейные функции управления, зависящие от динамики двигателя и аэродинамических сил.

Существует ряд статей, в которых описан этап преобразования модели (151) перед применением системы управления. Например, в работе [6] аналогичная модель была разделена на линейные и нелинейные части, а затем нелинейная часть была классифицирована как внутренние возмущения и должна была подавляться методом сильной обратной связи. В [63] объект с динамикой (151) был линеаризован методом интервальной линеаризации. В свою очередь, представленный алгоритм может быть реализован по полной нелинейной неупрощенной модели и учитывает всю нелинейную динамику и перекрестные связи.

Эксперимент состоит из двух частей. Сначала рассматривается задача стабилизации в обеих плоскостях для анализа качества переходных процессов. Также демонстрируется поведение замкнутой системы в режиме слежения. Параметры системы управления выбираются следующим образом:

$$A_{0_{pitch}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{0_{yaw}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{1pitch} = 40, c_{2pitch} = 20, c_{3pitch} = 1, \mu_{1,3pitch} = 20, c_{1,2yaw} = 20, \mu_{1,2yaw} = 0.01$$

В дополнение к (151) рассматривается функция возмущения, определяемая как $\varphi(t) = 0.1\sin(t) + 0.07\sin(\pi t) + 0.15\sin(0.3t)$ для обеих плоскостей (тангажа и рысканья). В случае режима слежения все амплитуды функции возмущения были умножены на 10, чтобы сделать ее влияние более заметным: $\varphi(t) = \sin(t) + 0.7\sin(\pi t) + 1.5\sin(0.3t)$. Результаты эксперимента приведены на рисунках 8-11. Как следует из рисунков, алгоритм управления обеспечивает устойчивость замкнутой системы с высокой точностью. Достигнутая точность стабилизации угла тангажа составляет около 0,005 [рад], что на порядок меньше амплитуды наибольшего возмущения. Немного меньшая точность достигается при стабилизации угла рыскания: 0,02 [рад]. Время переходного процесса – менее 0,5 секунд в плоскости тангажа и около 5 секунд в плоскости рыскания. В режиме слеживания значение наиболее заметного отклонения от задающего сигнала после переходного процесса составляет около 0,1 [рад] в плоскости тангажа, в то время как амплитуды функции возмущения имеют значения 1, 0,7 и 1,5.

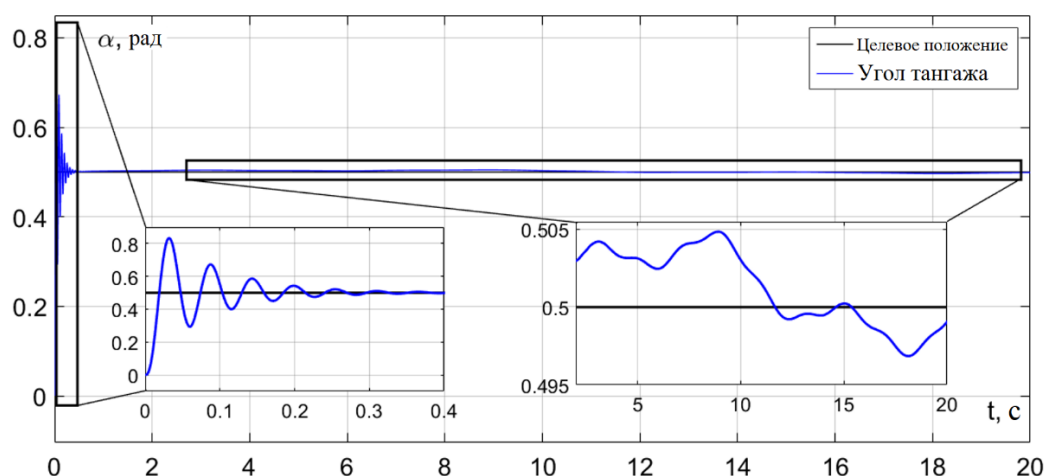


Рисунок 8 - Переходный процесс и установившийся режим при стабилизации по углу тангажа

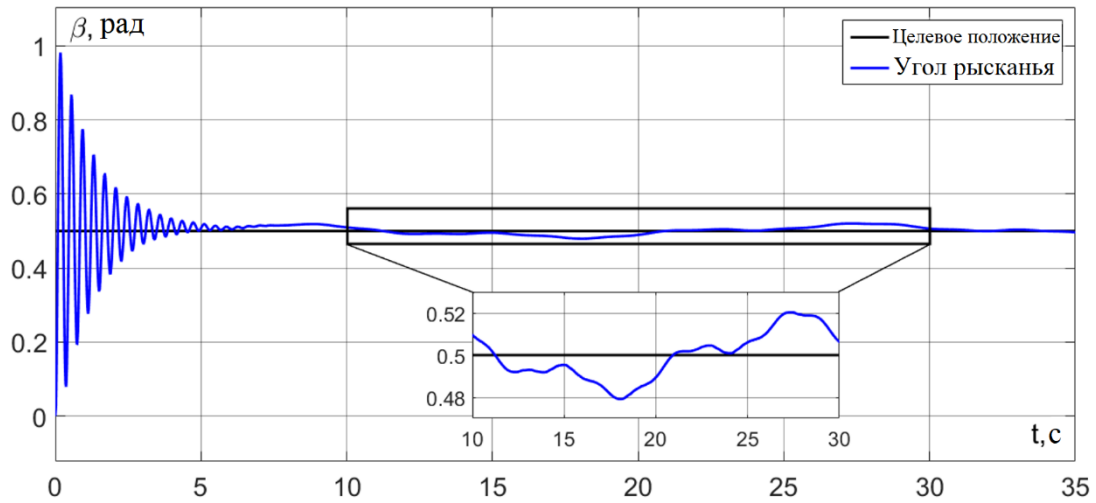


Рисунок 9 - Переходный процесс и установившийся режим при стабилизации по углу рысканья

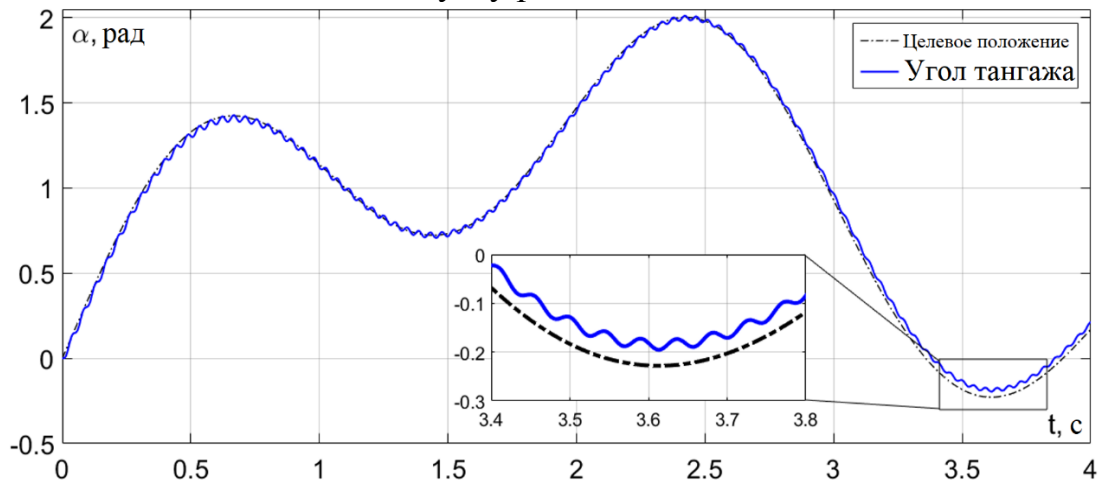


Рисунок 10 – Регулирование по углу тангажа в режиме слежения

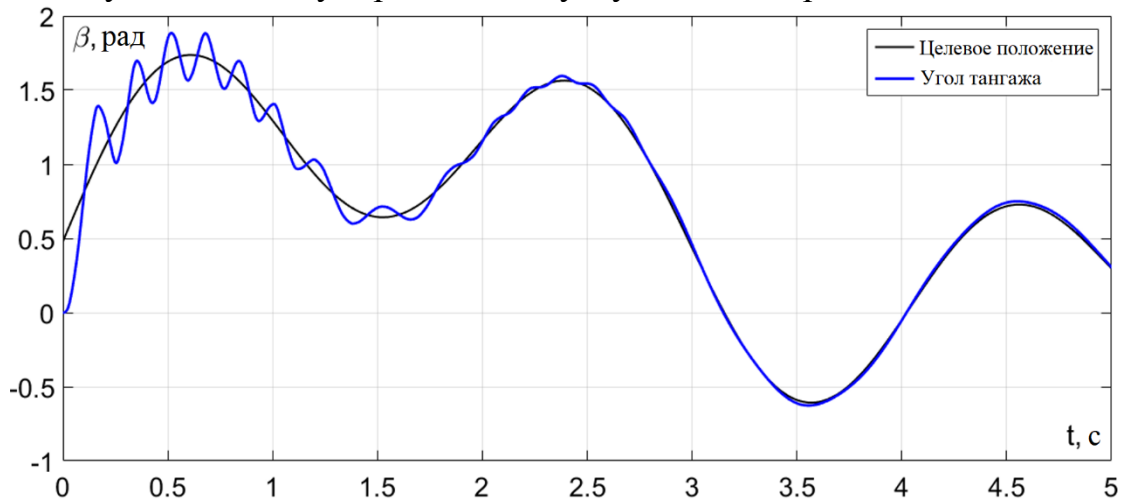


Рисунок 11 – Регулирование по углу рысканья в режиме слежения

1.4 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений для нелинейных многоканальных объектов с учетом перекрестных связей

Данный раздел описывает алгоритм управления по выходу нелинейным многоканальным объектом с перекрестными связями, параметрическими неопределенностями и внешними возмущениями. Для учета перекрестных связей рассмотрена процедура вычисления относительной динамической степени многоканального объекта с перекрестными связями. Предоставлено математическое доказательство устойчивости замкнутой системы и результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие эффективность метода.

Постановка задачи. Рассматривается нелинейный многоканальный объект

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n f_{j1}^i(x_{j1}, \xi_{j1}) + b_i(x_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(x_i, t)), \\ y_i &= h_i(x_i), i = \overline{1, n}, x_i(0) = x_{i0}, t_0 = 0, t \in T \subset [0, \infty) \end{aligned} \quad (152)$$

где $f_{j1}^i(x_{j1}, \xi_{j1}) \Big|_{j1=i} + b_i(x_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(x_i, t))$ – собственная динамика i -й подсистемы;

$\sum_{j1=1}^n f_{j1}^i(x_{j1}, \xi_{j1}), j1 \neq i$ – функции перекрестных связей; $[\xi_1, \dots, \xi_n]^T \in \Xi$ – вектора с

неизвестными параметрами, а Ξ – известное ограниченное множество; $x_i \in R^n$ – вектора состояния; f_i, b_i и h_i – достаточно гладкие функции; φ_i – неизвестные функции внешних возмущающих воздействий, ограниченные по t и ограниченные либо липшицевы по x .

Цель управления задается в виде

$$\begin{aligned} \|e\| &< \delta, t > t_f, \\ e &= [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}]^T, e_{1i} = y_i(t) - y_{ref,i}(t), i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (153)$$

где каждая из переменных e_{1i} является ошибкой слежения i -й подсистемы, δ – желаемая точность регулирования, $t_f > 0$ – время переходного процесса, $y_{ref,i}$ – ограниченные (вместе с производными) эталонные сигналы i -й подсистемы.

Относительная динамическая степень многоканального нелинейного объекта. Для определения относительной динамической степени объекта (152) вычислим производные сигналов y_i в соответствии с [10], [40]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x_i} \left[\sum_{j1=1}^n f_{j1}^i(x_{j1}, \xi_{j1}) + b_i(x_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(x_i, t)) \right] = \\ &= \sum_{j1=1}^n \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x_i} f_{j1}^i(x_{j1}, \xi_{j1}) + \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x_i} b_i(x_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(x_i, t)). \end{aligned} \quad (154)$$

Переобозначенная в терминах производных Ли, получим:

$$\begin{aligned} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) &= \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x_i} f_{j_1}^i(x_{j_1}, \xi_{j_1}), \\ L_{b_i} h_i(x_i) &= \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x_i} b_i(x_i, \xi_i), \forall i, j_1 = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (155)$$

Если $L_{b_i} h_i(x_i) = 0$, то ни один из сигналов \dot{y}_i не зависит от u_i и может быть представлен как

$$\dot{y}_i = \sum_{j_1=1}^n L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}), i = \overline{1, n}. \quad (156)$$

Вычислим вторую производную от функции y_i :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1})}{\partial x_{j_1}} \dot{x}_{j_1} = \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1})}{\partial x_{j_1}} \sum_{j_2=1}^n f_{j_2}^{j_1}(x_{j_2}, \xi_{j_2}) + \\ &+ \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1})}{\partial x_{j_1}} b_{j_1}(x_{j_1}, \xi_{j_1})(u_{j_1} + \varphi_{j_1}(x_{j_1}, t)). \end{aligned} \quad (157)$$

Соответствующие производные Ли можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_2}) &= \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1})}{\partial x_{j_1}} f_{j_2}^{j_1}(x_{j_2}, \xi_{j_2}), \\ L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) &= \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1})}{\partial x_{j_1}} b_{j_1}(x_{j_1}, \xi_{j_1}), \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (158)$$

Повторяя рассуждения, если $L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) = 0, \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}$, то сигналы \ddot{y}_i не зависят от u_i и могут быть записаны в виде

$$\ddot{y}_i = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_2}), \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}. \quad (159)$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для старших производных объекта (152):

$$\begin{aligned} y_i^{(3)} &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n L_{f_{j_3}^{j_2}} L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_3}), \\ &\vdots \\ y_i^{(\gamma-1)} &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_{\gamma-1}}), \end{aligned} \quad (160)$$

до тех пор, пока выполняются условия

$$\begin{aligned}
L_{b_i} h_i(x_i) &= 0, \\
L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) &= 0, \\
&\vdots \\
L_{b_{j_{\gamma-2}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-3}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_{\gamma-1}}) &= 0.
\end{aligned} \tag{161}$$

Допустим, что существует значение $\gamma > 0$ такое, что $L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) \neq 0$. Из этого следует, что объект (152) имеет относительную динамическую степень γ . Тогда производная порядка γ примет вид

$$\begin{aligned}
y_i^{(\gamma)} &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_\gamma=1}^n L_{f_{j_\gamma}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_\gamma}) + \\
&+ \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n \left[L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_{\gamma-1}}) (u_{j_{\gamma-1}} + \Phi_{j_{\gamma-1}}(x_{j_{\gamma-1}}, t)) \right].
\end{aligned} \tag{162}$$

В данной работе ограничим себя рассмотрением объектов, в которых для каждой одноканальной подсистемы отсутствуют прямые зависимости, в том числе при вычислении производных, от сигналов управления других подсистем, т.е.

$$\begin{aligned}
y_i^{(\gamma)} : L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) \neq 0 &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} L_{b_i} L_{f_i^i}^{\gamma-1} h_i(x_i) \neq 0, \\ \sum_{\substack{j_1=1, \\ j_1 \neq i}}^n \dots \sum_{\substack{j_{\gamma-1}=1, \\ j_{\gamma-1} \neq i}}^n L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{163}$$

Перепишем (3.139) в виде

$$y_i^{(\gamma)} = \sum_{m=1}^n \bar{f}_m^i(x_m) + L_{b_i} L_{f_i^i}^{\gamma-1} h_i(x_i) (u_i + \Phi_i(x_i, t)), \tag{164}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_m^i(x_m) &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_\gamma=1}^n L_{f_{j_\gamma}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_\gamma}) \Big|_{j_\gamma=m} = \\ &= \sum_{l=1}^{n^{\gamma-1}} L_{f_{j_\gamma}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_m). \end{aligned} \quad (165)$$

Выражение $\sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_\gamma=1}^n L_{f_{j_\gamma}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_\gamma})$ – это сумма n^γ функций, среди

которых ровно $n^{\gamma-1}$ являются функциями, содержащими собственную динамику i -й подсистемы. Также для объекта (152) выполнены следующие предположения.

Предположения:

1. Каждая подсистема объекта управления (152) имеет одну и ту же динамическую степень γ , причем все функции $c_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_i) = \sum_{m=1}^n \bar{f}_m^i(x_m)$ являются ограниченными (или ограниченными на множестве Ξ и липшицевыми по x) и все функции $\beta_i(x_i, \xi_i) = L_{b_i} L_{f_i}^{\gamma-1} h_i(x_i) > 0$.

2. Существует функция $\phi_i^{-1}(x_i)$ такая, что

$$\bar{x}_i(t) = \phi_i(x_i(t)) = \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_i^{(\gamma-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i(x) \\ \sum_{j_1=1}^n L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) \\ \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{f_{j_1}^{j_2}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_2}) \\ \vdots \\ \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_{\gamma-1}}^{j_{\gamma-2}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_{\gamma-1}}) \end{bmatrix}, i, j_1, \dots, j_n = \overline{1, n}.$$

Модельные преобразования. Система (152), переписанная в форме (164), позволяет преобразовать уравнения ошибок слежения $e_{1i} = y_i(t) - y_{ref,i}(t)$, $i = \overline{1, n}$, к виду

$$\begin{aligned} p^\gamma e_{1i}(t) &= c_i(x_1, \dots, x_n, \xi_i) + \\ &+ \beta_i(x_i, \xi_i)(u_i(t) + \varphi_i(x_i, t)) - p^\gamma y_{ref,i}(t), i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (166)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Введем в рассмотрение такие операторы $Q_i(p^{\gamma-1}) = \sum_{g=1}^{\gamma} k_{gi} p^{\gamma-g}$, что $Q_i(p^{\gamma}) = p^{\gamma} + Q_i(p^{\gamma-1})$ – гурвицев полином,

тогда

$$Q_i(p^{\gamma})e_{1i}(t) = u_i(t) + \psi_i(x_{1,n}, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t), i = \overline{1, n}, \quad (167)$$

где ψ_i – новая функция описания возмущающих воздействий вида

$$\begin{aligned} \psi_i(x_{1,n}, u_i, \xi_i, y_{ref}, t) = & c_i(x_{1,n}, \xi_i) + \beta_i(x_i, \xi_i)\phi_i(x_i, t) + \\ & + (\beta_i(x_i, \xi_i) - 1)u_i(t) - p^{\gamma}y_{ref,i}(t) + Q_i(p^{\gamma-1})e_i(t), i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (168)$$

Из (167) следует, что

$$e_{1i}(t) = Q_i(p^{\gamma})^{-1}u_i(t) + Q_i(p^{\gamma})^{-1}\psi_i(x_{1,n}, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t). \quad (169)$$

Основной результат. Для слагаемого $Q_i(p^{\gamma})^{-1}u_i(t)$ в (169) рассмотрим фильтр

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) = & A_{0i}v_i(t) + lu_i(t), i = \overline{1, n}, \\ v_i(t) = & \begin{bmatrix} v_{1i}(t) \\ v_{2i}(t) \\ \vdots \\ v_{\gamma i}(t) \end{bmatrix}^T, l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{0i} = \begin{bmatrix} -k_{1i} & & & \\ -k_{2i} & & I_{\gamma-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_{\gamma i} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (170)$$

Перепишем (169) в форме

$$e_{1i}(t) = v_{1i}(t) + Q_i(p^{\gamma})^{-1}\psi_i(x_{1,n}, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t), i = \overline{1, n}. \quad (171)$$

Производная (20) имеет вид

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i} - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t) + \hat{f}_{1i}, i = \overline{1, n}, \quad (172)$$

где $\hat{f}_{1i} = c_{1i}e_{1i} + pQ_i(p^{\gamma})^{-1}\psi_i(x_{1,n}, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t)$, $i = \overline{1, n}$ – новая функция возмущений.

Снова, следуя алгоритму бэкстеппинга и вводя в рассмотрение на каждом шаге вспомогательный контур для оценки и компенсации возмущений, проведем последовательно в γ шагов синтез алгоритма управления объектом (152), обеспечивающий выполнение цели управления (153).

Шаг 1. Рассмотрим вспомогательный контур

$$\dot{e}_{1i}^a(t) = -c_{1i}e_{1i}^a(t) - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (173)$$

и выделим ошибки рассогласования

$$\xi_{1i}(t) = e_{1i}(t) - e_{1i}^a(t), i = \overline{1, n}, \quad (174)$$

вместе с их производными

$$\dot{\xi}_{1i}(t) = \dot{e}_{1i}(t) - \dot{e}_{1i}^a(t) = -c_{1i}\xi_{1i}(t) + \hat{f}_{1i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (175)$$

Из (175) следует, что возмущения могут быть оценены в виде

$$\hat{f}_{1i}(t) = \dot{\xi}_{1i} + c_{1i}\xi_{1i}, i = \overline{1, n}. \quad (176)$$

Перепишем (173) в форме

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i}(t) - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t) + \dot{\xi}_{1i}(t) + c_{1i}\xi_{1i}(t). \quad (177)$$

Пусть функция $v_{2i}(t)$ является виртуальным управляющим сигналом в (177). Для каждой из подсистем сформируем закон виртуального управления

$$u_{1i}(t) = k_{1i}v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{1i}(t) - c_{1i}\xi_{1i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (178)$$

где $\hat{\xi}_{1i}(t)$ – оценки производных $\dot{\xi}_{1i}(t)$, так как последние не измеряются напрямую. Для оценки производных воспользуемся наблюдателем

$$\mu \dot{\hat{\zeta}} + \hat{\zeta} = \zeta, \quad (179)$$

где $\mu > 0$ – достаточно малое число, которое является настраиваемым параметром наблюдателя, ζ – измеряемый сигнал, $\hat{\zeta}$ – оценка производной $\dot{\zeta}$.

Подставляя $v_{2i}(t) = u_{1i}(t)$, получим

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i}(t) + e_{2i} + \eta_{1i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (180)$$

где $\eta_{1i}(t) = \hat{\xi}_{1i}(t) - \dot{\xi}_{1i}(t)$ – ошибка наблюдения, $e_{2i}(t)$ – ошибка виртуального управления:

$$e_{2i}(t) = v_{2i}(t) - u_{1i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (181)$$

Шаг 2. В соответствии с (170), производные ошибок (181) имеют вид

$$\dot{e}_{2i}(t) = -k_{2i}v_{1i}(t) + v_{3i}(t) - \dot{u}_{1i}(t) \pm c_{2i}e_{2i}, i = \overline{1, n}. \quad (182)$$

Рассмотрим вспомогательный контур

$$\dot{e}_{2i}^a(t) = -c_{2i}e_{2i}^a(t) - k_{2i}v_{1i}(t) + v_{3i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (183)$$

и определим второй набор ошибок рассогласования и их производных

$$\xi_{2i}(t) = e_{2i}(t) - e_{2i}^a(t), i = \overline{1, n}, \quad (184)$$

$$\dot{\xi}_{2i}(t) = \dot{e}_{2i}(t) - \dot{e}_{2i}^a(t) = -c_{2i}\xi_{2i}(t) + \hat{f}_{2i}, i = \overline{1, n}, \quad (185)$$

где каждая из функций $\hat{f}_{2i}(t) = -\dot{u}_{1i}(t) + c_{2i}e_{2i}(t)$ является функцией возмущений для системы (182). Из (185) следует, что

$$\hat{f}_{2i}(t) = \dot{\xi}_{2i} + c_{2i}\xi_{2i}, i = \overline{1, n}. \quad (186)$$

Перепишем (182) в форме

$$\dot{e}_{2i}(t) = -c_{2i}e_{2i}(t) - k_{2i}v_{1i}(t) + v_{3i}(t) + \dot{\xi}_{2i}(t) + c_{2i}\xi_{2i}(t). \quad (187)$$

Аналогично расчетам на предыдущем шаге предположим, что функция $v_{3i}(t)$ может быть рассмотрена как управляющее воздействие для системы (187).

Сформируем виртуальный закон управления

$$u_{2i}(t) = k_{2i}v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{2i}(t) - c_{2i}\xi_{2i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (188)$$

где $\hat{\xi}_{2i}(t)$ – оценки производных $\dot{\xi}_{2i}(t)$. Подставляя $v_{3i}(t) = u_{2i}(t)$, получим

$$\dot{e}_{2i}(t) = -c_{2i}e_{2i}(t) + e_{3i} + \eta_{2i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (189)$$

где $\eta_{2i}(t) = \hat{\xi}_{2i}(t) - \dot{\xi}_{2i}(t)$ – ошибки наблюдения, $e_{3i}(t)$ – ошибки виртуального управления, которая имеет вид

$$e_{3i}(t) = v_{3i}(t) - u_{2i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (190)$$

Шаг $r, r = \overline{2, \gamma - 1}$. Вычисления, аналогичные проделанным на шаге 2, справедливы для последующего синтеза виртуальных законов управления и анализа динамики ошибок виртуального управления

$$e_{ri}(t) = v_{ri}(t) - u_{(r-1)i}(t), r = \overline{3, \gamma - 1}, i = \overline{1, n}. \quad (191)$$

В результате должны быть сформированы наборы вспомогательных контуров

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ri}^a(t) &= -c_{ri}e_{ri}^a(t) - k_{ri}v_{li}(t) + v_{r+1,i}(t), \\ r &= \overline{3, \gamma - 1}, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (192)$$

и могут быть получены следующие наборы ошибок рассогласования:

$$\xi_{ri}(t) = e_{ri}(t) - e_{ri}^a(t), r = \overline{3, \gamma - 1}, i = \overline{1, n}. \quad (193)$$

Введем в рассмотрение законы виртуального управления

$$\begin{aligned} u_{ri}(t) &= k_{ri}v_{li}(t) - \hat{\xi}_{ri}(t) - c_{ri}\xi_{ri}(t), \\ r &= \overline{3, \gamma - 1}, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (194)$$

которые определяют динамику ошибок (191) в форме

$$\dot{e}_{ri}(t) = -c_{ri}e_{ri}(t) + e_{(r+1)i} + \eta_{ri}(t), i = \overline{1, n}, \quad (195)$$

$$e_{(r+1)i}(t) = v_{(r+1)i}(t) - u_{ri}(t), i = \overline{1, n}, \quad (196)$$

с ошибкой наблюдения $\eta_{ri}(t) = \hat{\xi}_{ri}(t) - \dot{\xi}_{ri}(t)$.

Шаг γ . Производная ошибки $e_{\gamma i}$, сформированной на предыдущем шаге синтеза алгоритма, имеет вид

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -k_{\gamma i}v_{li}(t) + u_i(t) - \dot{u}_{(\gamma-1)i}(t) \pm c_{\gamma i}e_{\gamma i}, i = \overline{1, n}. \quad (197)$$

Рассмотрим вспомогательный контур

$$\dot{e}_{\gamma i}^a(t) = -c_{\gamma i}e_{\gamma i}^a(t) - k_{\gamma i}v_{li}(t) + u_i(t), i = \overline{1, n}, \quad (198)$$

и сформируем набор ошибок рассогласования вместе с их производными:

$$\xi_{\gamma i}(t) = e_{\gamma i}(t) - e_{\gamma i}^a(t), i = \overline{1, n}, \quad (199)$$

$$\dot{\xi}_{\gamma i}(t) = \dot{e}_{\gamma i}(t) - \dot{e}_{\gamma i}^a(t) = -c_{\gamma i}\xi_{\gamma i}(t) + \hat{f}_{\gamma i}, i = \overline{1, n} \quad (200)$$

где $\hat{f}_{\gamma i}(t) = -\dot{u}_{(\gamma-1)i}(t) + c_{\gamma i}e_{\gamma i}(t)$ – функции возмущений для системы (197). Из (200) следует, что функции возмущений для системы (197) могут быть оценены в виде

$$\hat{f}_{\gamma i}(t) = \dot{\xi}_{\gamma i} + c_{\gamma i} \xi_{\gamma i}, i = \overline{1, n}, \quad (201)$$

и система (197) может быть переписана с учетом (201)

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -c_{\gamma i} e_{\gamma i}(t) - k_{\gamma i} v_{1i}(t) + u_i(t) + \dot{\xi}_{\gamma i}(t) + c_{\gamma i} \xi_{\gamma i}(t). \quad (202)$$

Сформируем закон управления для каждой подсистемы объекта (152) в виде

$$u_i(t) = k_{\gamma i} v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{\gamma i}(t) - c_{\gamma i} \xi_{\gamma i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (203)$$

где $\hat{\xi}_{\gamma i}(t)$ – оценки производных $\dot{\xi}_{\gamma i}(t)$. Перепишем (202) в виде

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -c_{\gamma i} e_{\gamma i}(t) + \eta_{\gamma i}(t), i = \overline{1, n} \quad (204)$$

где $\eta_{\gamma i}(t) = \hat{\xi}_{\gamma i}(t) - \dot{\xi}_{\gamma i}(t)$ – ошибки наблюдения.

Утверждение 1.4 [50]. Пусть выполнены условия предположений 1 и 2. Существуют значения параметров $c_{ri} > 0$, $\mu_{ri0} > 0$, $r = \overline{1, \gamma}$, $i = \overline{1, n}$, такие, что для любого $\mu_{ri} \in (0; \mu_{ri0}]$ система управления, состоящая из фильтров (170), вспомогательных контуров (173), (183), (192), (198), наблюдателей (179), виртуальных законов управления (178), (188), (194) и законов управления (203), обеспечивает выполнение цели управления (153) для объекта управления (152).

Структурная схема системы управления, соответствующей утверждению 1.4, приведена на рисунке 12.

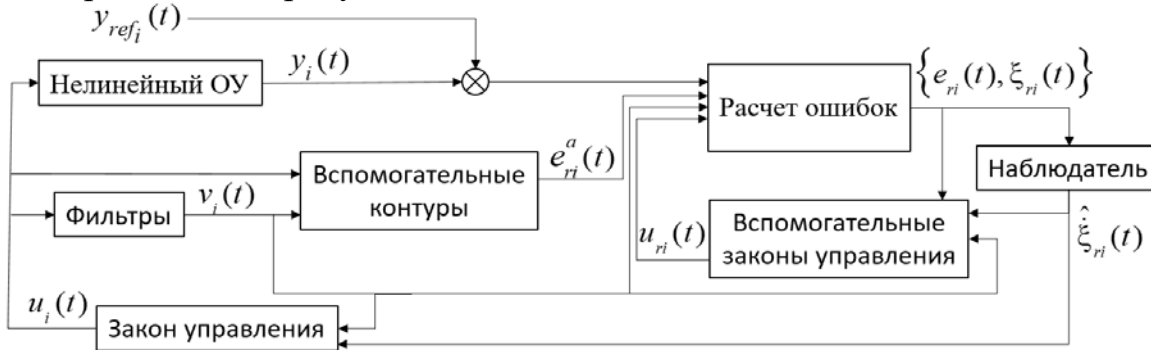


Рисунок 12 – Структурная схема робастной системы управления многоканальным нелинейным объектом на базе метода бэкстеппинга.

Доказательство. Рассмотрим динамику ошибок, совместив (179), (180), (189), (195), (204):

$$\dot{e}_{ji}(t) = -c_{ji} e_{ji}(t) + e_{(j+1)i} + \eta_{ji}(t), j = \overline{1, \gamma-1}, i = \overline{1, n}, \quad (205)$$

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -c_{\gamma i} e_{\gamma i}(t) + \eta_{\gamma i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (206)$$

$$\mu_{ji1} \dot{\eta}_{ji}(t) = -\eta_{ji}(t) - \mu_{ji2} \ddot{\xi}_{ji}(t), j = \overline{1, \gamma}, i = \overline{1, n}. \quad (207)$$

Выбирая значения настраиваемых параметров из условия $c_{ji} > 0$, $\mu_{ji1} = \mu_{ji2} = \mu_{ji} > 0$, видим, что каждая из ошибок e_{ij} будет ограничена в случае,

если ограничены ошибки наблюдения η_{ji} . Из (207) следует, что ограниченность сигналов η_{ji} полностью зависит от ограниченности сигналов $\ddot{\xi}_{ji}$. Для доказательства последнего воспользуемся результатом [24], в котором лемма Брусина [4] расширена для класса систем неавтономных дифференциальных уравнений.

Лемма. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2, t) \quad (208)$$

где $x(t) \in R^{S_1}$, $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2) \in R^{S_2}$, $f(x, \mu_1, \mu_2, t)$ – липшицева функция, непрерывная по x , ограниченная по t и имеющая ограниченную замкнутую область притяжения для $\mu_2 = 0$ в виде

$$\Omega = \{x : P(x) \leq C\}, \quad (209)$$

где $P(x) \in R^{S_1}$ – непрерывная положительно-определенная функция. Пусть существуют значения $C_1 > 0$ и $\bar{\mu}_1 > 0$ такие, что выполняется условие

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left[\left\langle [\nabla P(x)]^T, f(x, \mu_1, 0, t) \right\rangle \Big|_{P(x) = C} \right] \leq -C_1. \quad (210)$$

Тогда существует параметр $\mu_0 > 0$ такой, что для любого $\mu_2 \in (0; \mu_0]$ система (208) имеет ту же самую область притяжения Ω .

Таким образом, для удовлетворения условиям Леммы необходимо доказать асимптотическую устойчивость редуцированной системы (205)-(207) при $\mu_{ji2} = 0$. Тогда область притяжения системы (205)-(207) при $\mu_{ji2} > 0$ будет такой же, как и для случая $\mu_{ji2} = 0$.

Рассмотрим для системы (205)-(207) функцию Ляпунова вида

$$V(t) = 0.5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} e_{ji}^2(t) + 0.5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_{ji}^2(t). \quad (211)$$

Производная функции $V(t)$ вдоль траекторий (205)-(207) при $\mu_{ji2} = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} c_{ji} e_{ji}^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma-1} e_{ji}(t) e_{(j+1)i}(t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} e_{ji}(t) \eta_{ji}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \mu_{ji1}^{-1} \eta_{ji}^2(t). \end{aligned} \quad (212)$$

Для (212) выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned}
e_{ji}(t)e_{(j+1)i}(t) &\leq \frac{1}{2}e_{ji}^2(t) + \frac{1}{2}e_{(j+1)i}^2(t), \\
e_{ji}(t)\eta_{ji}(t) &\leq \frac{1}{2}e_{ji}^2(t) + \frac{1}{2}\eta_{ji}^2(t).
\end{aligned} \tag{213}$$

Используя (213), перепишем (212):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^n (1 - c_{1i})e_{1i}^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\gamma-1} (1.5 - c_{ji})e_{ji}^2(t) + \\
&+ \sum_{i=1}^n (1 - c_{\gamma i})e_{\gamma i}^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\gamma} (0.5 - \mu_{ji1}^{-1})\eta_{ji}^2(t).
\end{aligned} \tag{214}$$

Существуют значения параметров $c_{1i,\gamma i} > 1$, $c_{ji} \Big|_{j=2,\overline{\gamma-1}} > 1.5$, $\mu_{ji1}^{-1} \Big|_{j=1,\overline{\gamma}} > 0.5$, $i = \overline{1,n}$ такие, при которых производная функции Ляпунова строго отрицательна и неравенство (214) может быть переписано в виде

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} e_{ji}^2(t) - \bar{\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_{ji}^2(t) \leq -\alpha V(t), \tag{215}$$

где $\bar{c} = \sup_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,\gamma}} c_{ji}$, $\bar{\mu} = \sup_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,\gamma}} \mu_{ji1}^{-1}$, $\alpha = \sup(\bar{c}, \bar{\mu})$. Из (215) следует, что существует положительно определенная функция $V(t)$ такая, что ее производная будет строго отрицательной функцией вдоль траекторий (205)-(207), и решения системы (205)-(207) экспоненциально стремятся к нулю. Данное условие гарантирует, что все сигналы в (205)-(207) являются ограниченными. Рассмотрим функцию Ляпунова (211) при $\mu_{ji2} > 0$ и ее производную

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} c_{ji} e_{ji}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma-1} e_{ji} e_{(j+1)i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} e_{ji} \eta_{ji} - \\
&- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} ((\mu_{ji2}/\mu_{ji1}) \ddot{\xi}_{ji} \eta_{ji} + \mu_{ji1}^{-1} \eta_{ji}).
\end{aligned} \tag{216}$$

Используя оценки (213) и подставляя $\mu_{ji1} = \mu_{ji2} = \mu_{ji} \Big|_{j=1,\overline{\gamma}} > 0$, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^n (1 - c_{ji}) e_{ji}^2 \Big|_{j=\{1,\gamma\}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\gamma-1} (1.5 - c_{ji}) e_{ji}^2 + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} (0.5 - \mu_{ji}^{-1}) \eta_{ji}^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \ddot{\xi}_{ji}(t) \eta_{ji}(t).
\end{aligned} \tag{217}$$

Существуют значения параметров $c_{ji} \Big|_{j=\{1,\gamma\}} > 1$, $c_{ji} \Big|_{j=2,\overline{\gamma-1}} > 1.5$, $\mu_{ji}^{-1} > 0.5$ такие, что функция Ляпунова будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \ddot{\xi}_{ji}(t) \eta_{ji}(t), \quad (218)$$

где $\alpha = \sup_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,\gamma}} \left\{ (2c_{ji}|_{j=\{1,\gamma\}} - 2); (2c_{ji}|_{j=\overline{2,\gamma-1}} - 3); (2\mu_{ji}^{-1} - 1) \right\}$. Слагаемое

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \ddot{\xi}_{ji}(t) \eta_{ji}(t)$ может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \ddot{\xi}_{ji}(t) \eta_{ji}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{\mu_{ji} p^4}{\mu_{ji} p + 1} \xi_{ji}(t), \quad (219)$$

и, следовательно, удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu_{ji} \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \ddot{\xi}_{ji}(t) \eta_{ji}(t) \right] = 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,\gamma}. \quad (220)$$

Из (218), (220) следует

$$V(t) \leq -e^{-\alpha t} V(0) - \mu_{ji} (1 - e^{-\alpha t}) \alpha^{-1} \bar{\xi}(t), \quad (221)$$

где $\bar{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{p^4}{\mu_{ji} p + 1} \xi_{ji}(t)$. Таким образом, для области диссипативности

системы (205)-(207) может быть получена оценка

$$\|e_i\| \leq \sqrt{-e^{-\alpha t} 2V(0) - \mu_{ji} (1 - e^{-\alpha t}) \bar{\xi} \alpha^{-1}}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,\gamma}. \quad (222)$$

Из (222) следует, что точность регулирования замкнутой системы зависит от значений параметров α и μ_{ji} , при этом параметр α , в свою очередь, определяется значениями параметров μ_{ji} , c_{ji} .

1.5 Выводы по главе 1

Основным результатом данной главы является модифицированный алгоритм бэкстеппинга для управления нелинейными одноканальными и многоканальными объектами по выходу в условиях наличия неизвестных внешних возмущающих воздействий, перекрестных связей (для многоканального случая) и параметрических неопределенностей. Предложенный подход основан на совмещении метода бэкстеппинга и метода вспомогательного контура и обеспечивает более высокую точность регулирования по сравнению с ближайшими аналогами [13, 14, 34].

Предложенный метод относится к классу децентрализованных алгоритмов управления, но может также быть представлен и в централизованном виде в смысле выполнения общей для всех подсистем цели управления. Цель управления может быть выбрана как синхронизация подсистем многоканальной системы либо сети агентов. Для этого достаточно заменить все эталонные сигналы для подсистем одним $y_{ref,i}(t) = y_{ref}(t) \forall i = \overline{1, n}$ и переписать цель управления в виде

$$\|e\| < \delta, t > t_f,$$
$$e = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}]^T, e_{1i} = y_i(t) - y_{ref}(t), i = \overline{1, n},$$

без дополнительных изменений в структуре алгоритма. Такой выбор цели управления решает задачу слежения за единственной траекторией, определенной для всех агентов многоагентной системы (или подсистем многоканального объекта).

Кроме того, централизованная вариация алгоритма в смысле генерации единственного управляющего сигнала для всех подсистем (агентов) может быть выбрана путем определения единственного набора параметров для всех подсистем. Это может привести к снижению качества регулирования замкнутой системы, так как выбор параметров должен будет определяться подсистемой с наименее «удачной» динамикой.

При анализе устойчивости замкнутых систем методом функции Ляпунова были использованы достаточно грубые оценки. Это позволяет считать, что доказанные математически ограничения на выбор настраиваемых параметров на практике могут быть «мягче», что подтверждено экспериментально.

Для линейного случая новым свойством алгоритма по сравнению с аналогами является способность алгоритма работать в условиях неизвестных несогласованных возмущений. Был проведен и представлен ряд теоретических и практических экспериментов, подтверждающих работоспособность и эффективность предложенного алгоритма управления. В частности, в ходе компьютерного моделирования продемонстрированы высокое качество

переходных процессов разработанного алгоритма и его преимущества перед ближайшим аналогом.

1.6 Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы.

1. Основные отличия метода бэкстеппинга от методов непосредственной компенсации.
2. Основные отличия метода вспомогательного контура от методов подавления возмущений.
3. Что такое инвариантное управление и диссипативность?
4. Сформулируйте лемму Брусина для дискретных по времени нелинейных систем и систем с постоянным запаздыванием.
5. Как учесть запаздывание при синтезе закона управления с использованием метода бэкстеппинга?

Практические вопросы.

Синтезируйте закон управления с помощью метода бэкстеппинга для следующих систем:

$$1. \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

где $|a_i| \leq 1$, $|d_i| \leq 0,1$ и $\tau = 1$.

$$2. \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t),$$

где $|a_i| \leq 1$, $|d_i| \leq 0,1$, $\tau = 1$ и $f(t) = 1 + \sin(t)$.

$$3. \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t),$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x,$$

где $|a_i| \leq 1$, $|d_i| \leq 0,1$ и $\tau = 0,5 + 0,5 \cos(5t)$.

В Matlab/Simulink промоделируйте полученные замкнутые системы. Результаты моделирования оформите в виде отчетов по домашней работе. Отчеты должны содержать рисунки с переходными процессами по состоянию объектов и сигналам управления.

Глава 2 Управление двухроторным лабораторным стендом

Данная глава посвящена практической апробации разработанных алгоритмов на реальном техническом объекте, анализу эффективности и достигаемых показателей качества [50]. Объектом управления является лабораторная установка «Twin Rotor MIMO System», предназначенная для исследования алгоритмов управления нелинейными многомерными объектами и, в частности, для моделирования динамики винтокрылых летательных аппаратов и маятниковых систем. Общий вид ОУ представлен на рисунке 13.

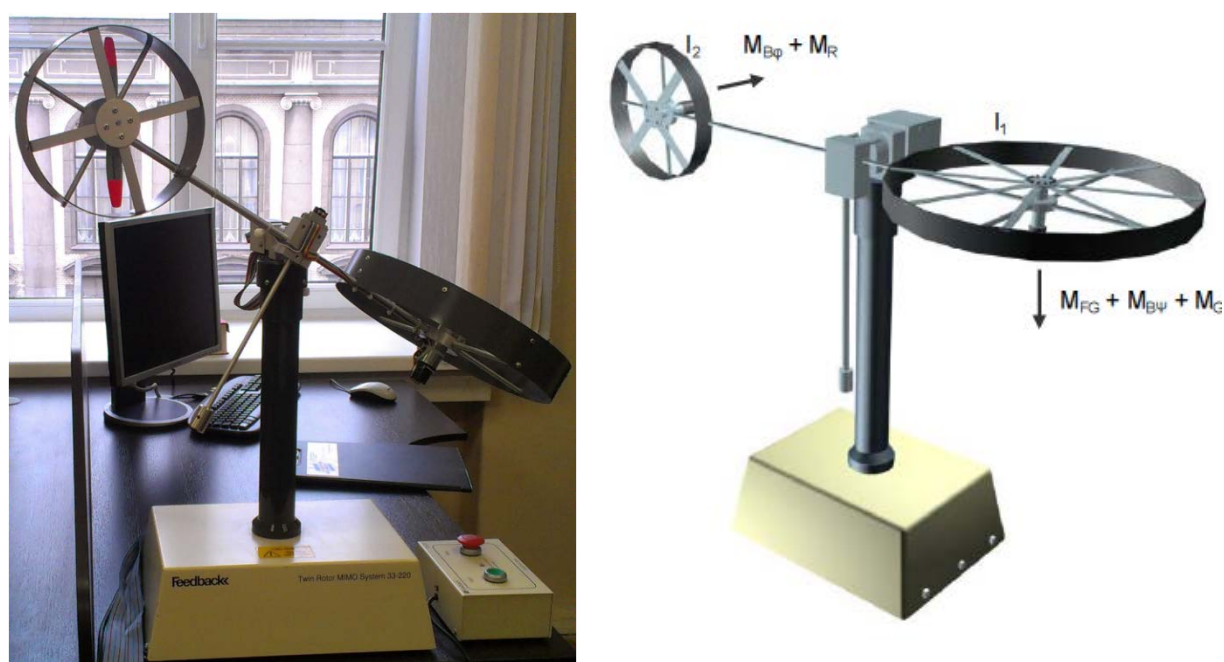


Рисунок 13 – Лабораторный стенд «Twin Rotor MIMO System»

Стенд состоит из длинной балки, на концах которой закреплены двигатели постоянного тока и приводимые ими в движение лопасти, защищенные специальным щитом, а также включает в себя маятниковый противовес, не позволяющий длинной балке принимать строго вертикальное положение при свободном движении. Лопастные системы расположены на балке взаимно ортогонально, а сама балка закреплена посередине на неподвижном штативе таким образом, что может вращаться вокруг точки крепления в двух плоскостях: в вертикальной плоскости и в горизонтальной. Такая конструкция позволяет осуществлять управление положением балки вокруг точки крепления в нужной плоскости за счет создания воздушной тяги раскручивающихся винтов в главной либо в хвостовой части установки. Конфигурация ОУ приведена на рисунке 14.

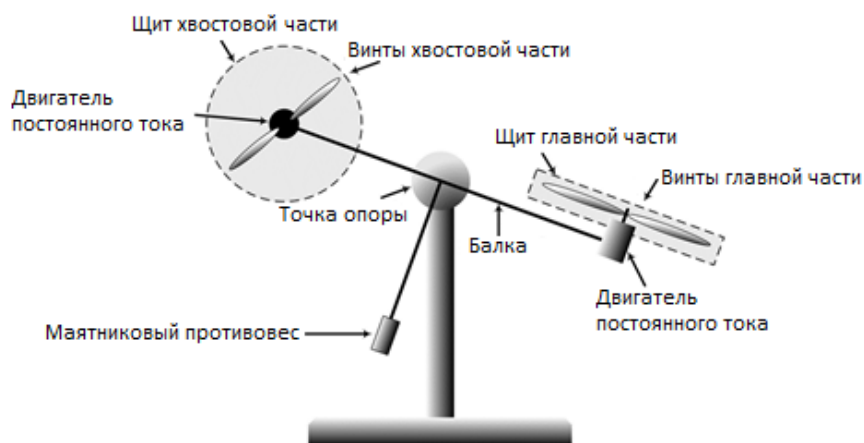


Рисунок 14 – Конфигурация лабораторного стенда «Twin Rotor MIMO System»

Условно двигатель и винты, способные регулировать динамику ОУ в вертикальной плоскости, обозначаются как «главные»; за вынужденное движение в горизонтальной плоскости отвечают двигатель и винты, обозначенные как «хвостовые». Обозначения такого рода согласуются с терминологией, применяемой при описании вертолета, конфигурация которого в упрощенном виде воссоздана в представленном ОУ. Некоторые различия между динамикой вертолета и динамикой рассматриваемого лабораторного стенда, приведены в таблице 2. Питание на двигатели и на энкодеры, а также передача данных осуществляется с помощью гибких проводов, закрепленных на отдельных участках балки и штативе, проложенных от исполнительных устройств до специализированной платы управления, расположенной внутри утяжеленной опоры. Питание на саму плату осуществляется от сети. В целях безопасности кнопки включения/отключения питания установки выведены на отдельный пульт управления. Цифровые данные, включающие в себя показания датчиков, поступают от энкодеров на специализированную плату, затем от нее на внешнюю плату, соединенную с персональным компьютером (ПК).

Таблица 2 – Основные различия в динамиках вертолета и стенда «TRMS»

	TRMS	Вертолет
Расположение центра тяжести	Посередине между главной и хвостовой лопастными системами	Под главной лопастной системой
Создание подъемной силы	Скорость вращения винтов главной части	Угловое положение и скорость вращения винтов главной части
Количество степеней свободы	2	6

Внешняя плата осуществляет передачу данных от стенда к персональному компьютеру и обратно. ПК отвечает за формирование сигналов управления, которые поступают на внешнюю плату, затем на специализированную встроенную плату, затем на исполнительные устройства – двигатели. Для формирования сигналов управления разработчиками предусмотрена интеграция стенда с программной средой Matlab/Simulink, что позволяет синтезировать регулятор для установки без дополнительных инженерных усилий сразу в виде Simulink-модели и тестировать его работу в реальном времени на самом ОУ. Структурная схема ОУ и вспомогательных систем приведена на рисунке 15.

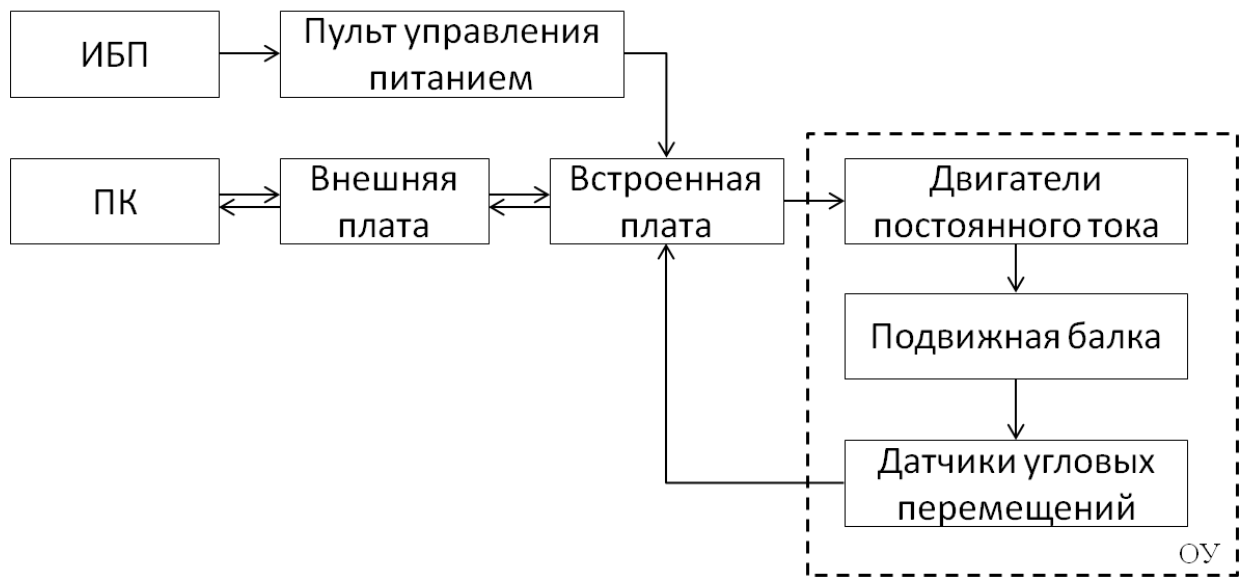


Рисунок 15 – Структурная схема стенда TRMS, систем обеспечения питания и передачи сигналов управления.

2.1 Математическая модель стенда TRMS

Согласно функциональному описанию стенда, управление положением подвижной балки достигается созданием воздушной тяги с помощью раскручивающихся лопастей, закрепленных на валах двигателей постоянного тока (ДПТ). Скорость вращения лопастей и, следовательно, величины создаваемых ими воздушных потоков определяются скоростью вращения вала соответствующего ДПТ, которая, в свою очередь, зависит от величины напряжения на клеммах этих ДПТ. Таким образом, вектор входных переменных – это вектор напряжений на клеммах двигателей постоянного тока:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (223)$$

где $u_i \in [-2.5; 2.5] \text{В}$, $i=1,2$ – уровень напряжения на клеммах соответствующего ДПТ, допустимый диапазон его изменений указан в документации к лабораторному стенду и подтвержден в ходе экспериментов.

Возмущающие воздействия, требующие учета при синтезе системы управления стендом, определяются несколькими факторами. Во-первых, существуют конструктивные недочеты, которые создают нелинейный ограниченный возмущающий момент вращения, измерить или оценить который не представляется возможным. Недочеты связаны с характером крепления гибких проводов, которые связывают встроенную плату в основании стенда с двигателями и энкодерами, установленными на концах подвижной балки. В месте крепления проводов к балке возникает момент, определяемый силой упругости, с которой гибкие провода воздействуют на балку. Величина силы упругости зависит от взаимного расположения балки и проводов, а также от формы проводов, которая может меняться. Таким образом, предварительный расчет момента влияния гибких проводов на подвижную балку не представляется возможным, равно как и прямые измерения этого момента во время эксперимента.

К возмущениям также удобно отнести воздушные потоки и механические вибрации, которые могут присутствовать в пространстве работы лабораторного стенда. В силу расположения самого стенда в закрытом помещении лаборатории можно считать, что влияние воздушных потоков и вибраций оценивается ограниченной неизвестной величиной и не превосходит максимально возможной величины управляющих моментов в системе. Таким образом, функция возмущений может быть определена как неизвестная ограниченная нелинейная функция, зависящая как от внешних факторов, так и от внутренних:

$$f_d = f_d(M_{da}, M_{dy}), \quad (224)$$

где M_{da} – суммарный аэродинамический момент воздушных потоков, действующих на объект управления, M_{dy} – неизмеряемые нестационарные моменты влияния сил упругости отдельных частей конструкции стенда на подвижную балку.

Функционирование стенда определяется динамикой подвижной балки в двух плоскостях. Как для всякой механической системы, динамику данного ОУ удобней всего описать в уравнениях моментов, т.е. динамическими уравнениями второго порядка для каждой из плоскостей движения. Поэтому в качестве переменных состояния выбраны угловые положения и угловые скорости подвижной балки:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad (225)$$

где x_1, x_3 – угол тангажа (угол поворота ОУ в вертикальной плоскости) и угол рысканья (угол поворота ОУ в горизонтальной плоскости) соответственно; x_2, x_4 –

угловые скорости ОУ в вертикальной и в горизонтальной плоскостях соответственно.

В качестве выходных переменных выступают угловые положения ОУ в горизонтальной и в вертикальной плоскостях, так как эти величины доступны прямому измерению с помощью энкодеров и передаются в режиме реального времени на персональный компьютер, где могут быть использованы регулятором, сконструированном в Matlab/Simulink:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (226)$$

где y – вектор выходных параметров ОУ. Общий вид уравнений динамики принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, f_d), x(0), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (227)$$

где $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, точный вид функции f будет определен позже. Отсутствие

прямого влияния возмущений и управляющих сигналов на выходные переменные ОУ следует из общего анализа структуры ОУ, приведенного выше.

Динамика двигателей. Динамику управляющих подсистем необходимо проанализировать отдельно от остальных подсистем установки. Функциональная схема устройств управления представлена на рисунке 16.

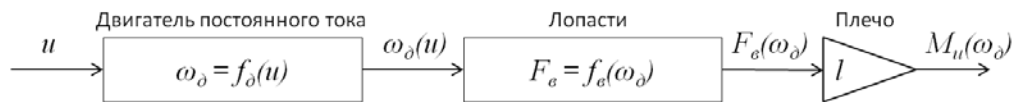


Рисунок 16 – Функциональная схема управляющих подсистем TRMS

Описание динамики двигателей постоянного тока лабораторного стенда TRMS отличается в различных источниках и имеет разную степень детализации описания процессов. Наиболее подробно динамика двигателей рассматриваемого стенда и электрические контура, в которых они функционируют, разобраны в работе [60]. Обозначен факт неучтенной нелинейной зависимости между уровнем напряжения на клеммах ДПТ и значением, которое устанавливается регулятором в Matlab/Simulink. Указано также, что двигатели, используемые в объекте, идентичны друг другу. Электрический контур, описывающий динамику двигателей, представлен на рисунке 16. Динамические процессы в каждом двигателе описываются следующими уравнениями:

$$V_{h/v} = E_{ah/h} + R_{ah/v} i_{ah/v} + L \frac{di_{ah/v}}{dt}, \quad (228)$$

$$E_{ah/h} = k_{ah/v} \Phi_{h/v} \omega_{h/v}, \quad (229)$$

$$M_{eh/v} = M_{Lh/v} + J_{tr/mr} \frac{d\omega_{h/v}}{dt} + B_{tr/mr} \omega_{h/v}, \quad (230)$$

$$M_{eh/v} = k_{ah/v} \Phi_{h/v} i_{ah/v}, \quad (231)$$

$$M_{Lh/v} = k_{th/v} |\omega_{h/v}| \omega_{h/v}, \quad (232)$$

где $V_{h/v}$ – напряжение на клеммах двигателей; $E_{ah/h}$ – ЭДС двигателей; $R_{ah/v}$ – сопротивление цепи якоря; $i_{ah/v}$ – сила тока в цепи; L – индуктивность обмотки якоря; $k_{ah/v}$, $k_{th/v}$ – положительная константа; $\Phi_{h/v}$ – магнитный поток; $\omega_{h/v}$ – угловая скорость вала; $M_{eh/v}$ – электромагнитный вращающий момент; $M_{Lh/v}$ – момент нагрузки; $J_{tr/mr}$ – момент инерции; $B_{tr/mr}$ – коэффициент вязкого трения.

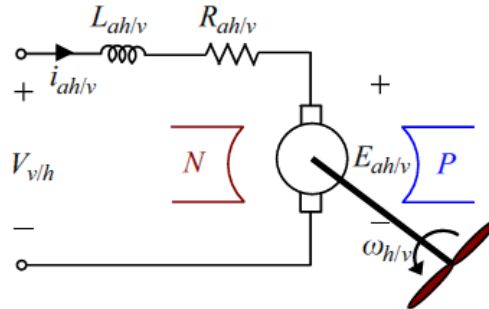


Рисунок 17 – Электрическая схема двигателей постоянного тока

Введем обозначения $x_{1h/v} = \omega_{h/v}$, $x_{2h/v} = \omega_{h/v} i_{ah/v}$, $u_{h/v} = V_{h/v}$, тогда систему (6)-(10) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{1h/v} = -(B_{tr/mr}/J_{tr/mr})x_{1h/v} + (k_{th/v}/J_{tr/mr})|x_{1h/v}|x_{1h/v} + (k_{ah/v}\Phi_{h/v}/J_{tr/mr})x_{2h/v}, \\ \dot{x}_{2h/v} = -(k_{ah/v}\Phi_{h/v}/L)x_{1h/v} - (R_{ah/v}/L)x_{2h/v} + u_{h/v}, \\ y_{h/v} = x_{1h/v}. \end{cases} \quad (233)$$

Значения параметров системы (233) приведены в таблице 3. Необходимо отметить, что для моделирования динамики двигателей в соответствии с моделью (233) необходимо оценить значение коэффициента вязкого трения, которое не приведено в таблице 3, и получить его экспериментально не представляется возможным.

Таблица 3 – Расчетные значения параметров модели двигателей в TRMS

Параметр	Значение	Единицы измерения
J_{mr}	1272	г·см ²
J_{tr}	248	г·см ²
R_a	8	Ом
L	0.86	мГн
$k_{ah/v} \Phi_{h/v}$	0.0202	-
k_{th}	3.6×10^{-7}	-
k_{tv}	8.7×10^{-7}	-

Так как оценка всех параметров модели (233) невозможна, то, несмотря на подробное описание динамики двигателей в [61], большую практическую ценность несет экспериментальная аппроксимация этих уравнений, предоставленная в одном из официальных руководств к лабораторному стенду [60]:

$$x_{1v}(u_v) = 90.99u_v^6 + 599.73u_v^5 - 129.26u_v^4 - 1238.64u_v^3 + 63.45u_v^2 + 1283.41u_v \quad (234)$$

$$x_{1h}(u_h) = 2020u_h^5 - 194.69u_h^4 - 4283.15u_h^3 + 262.27u_h^2 + 3796.83u_h \quad (235)$$

Динамика систем. На валу каждого ДПТ установлена система лопастей, которые, раскручиваясь, создают аэродинамический момент достаточной силы, чтобы изменить угловое положение подвижной балки ОУ. Сила воздушного потока может быть описана следующим уравнением:

$$F_v(\omega_v) = \begin{cases} k_{fvp} |\omega_v| \omega_v, & \omega_v \geq 0, \\ k_{fvn} |\omega_v| \omega_v, & \omega_v < 0, \end{cases} \quad (236)$$

где k_{fvp}, k_{fvn} – неизвестные положительные константы. Отсутствие информации о значениях параметров затрудняет использование функции (236). В руководстве [60] зависимости между воздушной тягой, которую создают винты установки, и скоростью вращения вала ДПТ измерены экспериментально и аппроксимированы степенными функциями:

$$F_v(x_{1v}) = -3.48 \cdot 10^{-12} x_{1v}^5 + 109 \cdot 10^{-9} x_{1v}^4 + 4.123 \cdot 10^{-6} x_{1v}^3 - 1.632 \cdot 10^{-4} x_{1v}^2 + 9.544 \cdot 10^{-2} x_{1v} \quad (237)$$

$$F_h(x_{1h}) = -3 \cdot 10^{-14} x_{1h}^5 - 1.595 \cdot 10^{-11} x_{1h}^4 + 2.511 \cdot 10^{-7} x_{1h}^3 - 1.808 \cdot 10^{-4} x_{1h}^2 + 0.801 x_{1h} \quad (238)$$

В силу упрощений (234), (235), (237), (238) нет необходимости в расширении вектора состояния и увеличении динамического порядка обобщенной модели лабораторной установки, несмотря на рассмотренную динамику двигателей. Вместо этого удобнее сделать выбор в пользу указанных разработчиками аппроксимаций.

Динамика механической части. Динамика механических подсистем включает в себя две относительно независимые части: движение объекта в горизонтальной плоскости и, отдельно, движение объекта в вертикальной плоскости. В каждой из плоскостей движение объекта описывается соответствующим уравнением моментов:

$$\begin{cases} J_v \ddot{\alpha} = -M_{fv} - M_{grv} - M_{gyv} + M_{uv} + f_{dv}, \\ J_h \ddot{\beta} = -M_{fh} + M_{uh} + f_{dh}, \end{cases} \quad (239)$$

где $J_{h/v}$ – момент инерции ОУ в каждой из плоскостей; $M_{fh/v}$ – момент всех сил трения в соответствующей плоскости; M_{grv} – момент гравитационных сил; M_{gyv}

– гироскопический момент, представляющий собой вид перекрестной связи; $M_{uh/v}$ – управляющий момент, порождаемый работой актуаторов; $f_{dh/v}$ – проекция обобщенной функции возмущений на горизонтальную (вертикальную) плоскость. В развернутом виде описание механической части объекта принимает вид [60]

$$\begin{cases} J_v \ddot{\alpha} = -k_{fv1} \dot{\alpha} - k_{fv2} \text{sign}(\dot{\alpha}) + gN_1 \cos \alpha - \\ -gN_2 \sin \alpha - N_3 \beta^2 \sin \alpha \cos \alpha + F_v(u_v) + f_{dv}, \\ J_h \ddot{\beta} = -k_{fh1} \dot{\beta} - k_{fh2} \text{sign}(\dot{\beta}) + F_h(u_h) + f_{dv}, \end{cases} \quad (240)$$

где $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$ – угол поворота ОУ в вертикальной плоскости; $\beta \in (-3\pi/4; 3\pi/4)$ – угол поворота ОУ в горизонтальной плоскости; $k_{fv/h1}$, – коэффициенты вязкого трения; $k_{fv/h2}$, – коэффициенты сухого трения; $g=9.8$ [м/с²] – ускорение свободного падения; $F_{h/v}(u_{h/v})$ – аппроксимация сложной степенной функцией нелинейной зависимости аэродинамической тяги вращающихся лопастей от напряжения на клеммах соответствующих ДПТ; $N_i, i = \overline{1,3}$, – числовые выражения, определенные массогабаритными показателями ОУ. Все значения числовых коэффициентов и выражений, длины, массы, иные параметры, требуемые для моделирования системы уравнений (240), приведены в документации [60]. Систему (240) можно привести к виду (227), подставляя $x_1 = \alpha, x_2 = \dot{\alpha}, x_3 = \beta, x_4 = \dot{\beta}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\left(k_{fv1}/J_v\right)x_2 - \left(k_{fv2}/J_v\right)\text{sign}(x_2) + \left(gN_1/J_v\right)\cos x_1 - \\ -\left(gN_2/J_v\right)\sin x_1 - \left(N_3/J_v\right)x_3^2 \sin x_1 \cos x_1 + \left(1/J_v\right)F_v(u_v) + \left(1/J_v\right)f_{dv}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\left(k_{fh1}/J_h\right)x_4 - \left(k_{fh2}/J_h\right)\text{sign}(x_4) + \left(1/J_h\right)F_h(u_h) + \left(1/J_h\right)f_{dv}. \end{cases} \quad (241)$$

Уравнения (233), (236), (241) в полной мере описывают динамику ОУ. Однако, для удобства моделирования и синтеза регулятора, системы уравнений (233), (236) удобно заменить на уравнения (234), (235), (237), (238), которые не отражают физический смысл протекающих процессов, но являются правомерной заменой в силу их получения [60]. Нелинейную систему (241) также удобно преобразовать к более удобному виду – линейному с интервальными параметрами.

Приведение к линейной интервальной форме. Метод интервальной линеаризации, который может быть использован для приведения модели ОУ к

линейному виду, хорошо описан в работах А.В. Ушакова, например, в [11]. В основе метода лежит справедливость утверждения

$$\exists S_x : \|x(t)\| < d_s \forall t > 0 \Rightarrow f(x) = A(x)x \subseteq [A]x, \quad (242)$$

где $[A]_{n \times n} : [A_{ij}] = \left[\min_{x \in S_x} (f_i(x)/nx_j), \max_{x \in S_x} (f_i(x)/nx_j) \right], A(x) = \text{row}_i \left\{ \text{col}_j \left\{ f_i(x)/nx_j \right\} \right\}$.

Общая суть метода состоит в замене нелинейных функций их секторными ограничениями, если это возможно. Нетрудно проверить, что все нелинейные функции, описанные в уравнениях (234), (235), (237), (238), (241), могут быть заменены поставленными им в соответствие линейными интервальными выражениями, если вектор состояния ОУ ограничен известным замкнутым множеством. Таким образом, модель (241) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t) + f_d(t), x(0) = 0, \\ y(t) = Lx(t), \end{cases} \quad (243)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ [-1753.7; 1729] & [-5.4; -0.1] & 0 & [-3.1; 3.1] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ [-0.3; 0.3] & 0 & 0 & [-1.6; 0] \end{bmatrix}, \quad (244)$$

$$[B] = \text{diag} \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ [0.173; 1.522] \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ [0.007; 0.085] \end{array} \right] \right\}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данные оценки вариаций параметров линейной интервальной модели были получены с помощью компьютерного моделирования исходной модели и расчета значений для преобразования (242) на интервале допустимых значений и области определения. Полученные результаты расчета использованы в работах [7, 17, 63] для апробации различных вариаций алгоритмов робастного управления. Согласно методу интервальных исчислений, интервальные матрицы представимы в виде суммы номинальной матрицы и интервальной матрицы дополнений, тогда система (243) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + [\Delta A]x(t) + Bu(t) + [\Delta B]u(t) + f(t), \\ y(t) = Lx(t). \end{cases} \quad (245)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12.354 & -2.774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.56 \end{bmatrix}, B = \text{diag} \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0.847 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0.046 \end{array} \right] \right\}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (246)$$

Таким образом, система (245) с подстановкой матриц (246) также описывает динамику ОУ, при том является линейным интервальным описанием ОУ. Все программные реализации алгоритмов получены с использованием пакета прикладных программ Simulink/MATLAB на ПК и в режиме реального времени включены для управления лабораторной установкой «TRMS 33-220».

2.2 Децентрализованный субоптимальный робастный регулятор

Структура децентрализованного робастного субоптимального регулятора соответствует утверждению 2.1. В данном эксперименте для получения линейного описания динамики установки нелинейные функции модели (241) были линеаризованы в окрестности точки, соответствующей желаемым угловым положениям. Выбор матриц для описания объекта управления основан на технической документации данного лабораторного оборудования и имеет следующий вид:

$$A_{m1} = A_1|_{\gamma_1=0, \gamma_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.2491 & -0.9849 \end{bmatrix};$$

$$B_{m1} = B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6116 \end{bmatrix}; A_{m2} = A_2|_{\varphi_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.5013 \end{bmatrix};$$

$$B_{m2} = B_2|_{\varphi_2=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.8446 \end{bmatrix}; L = [1 \ 0].$$

Так как вторая строка обеих матриц $B_{mi}, i=1,2$ не равна нулю, то параметр $k=2$. Функционал качества (2.4), имеет следующие значения весовых матриц: $Q_1=0.5$, $Q_2=0.001$, $R_1=0.6$, $R_2=1.9$. Матрицы обратной связи G_i , обеспечивающие минимизацию функционала качества, принимают вид $G_1=[0.2720 \ 0.2321]$, $G_2=[0.0229 \ 0.0012]$. Матрицы A_{oi} вспомогательных контуров (2.14) выбраны в виде

$$A_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6875 & -1.359 \end{bmatrix}, A_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0653 & -18.9675 \end{bmatrix}.$$

Оценки сигналов в законе управления (2.23) получены с использованием наблюдателей (2.12) и (2.22) с параметром $\tau=0.01s$. Дополнительно для работы в условиях измерительных шумов были использованы фильтры:

$$y_{i_filtered} = \frac{1}{0.01p^2 + p} y_{i_measured}, p = \frac{d}{dt}, i=1, 2.$$

Результаты экспериментальной апробации приведены на рисунке 17. Полученные данные демонстрируют следующие результаты при управлении TRMS. Ошибка стабилизации по выходу в обеих плоскостях не превосходит разрешающей способности измерительных устройств. Сигналы управления не

достигают уровня насыщения. Перерегулирование отсутствует. Точные значения времени переходного процесса t_{fi} , перерегулирования σ_i и размеров области диссипативности $\delta_i, i = 1, 2$ представлены в Таблице 4.

Разность между интегральными показателями качества рассматриваемой системы и аналогичными показателями эталонной модели (2.13) рассчитываются следующим образом:

$$\Delta J_i = J_{i_real} - J_{i_ideal}, \quad (247)$$

$$\Delta J_{yi} = J_{yi_real} - J_{yi_ideal}, \quad (248)$$

$$\Delta J_{ui} = J_{ui_real} - J_{ui_ideal}, i = 1, 2. \quad (249)$$

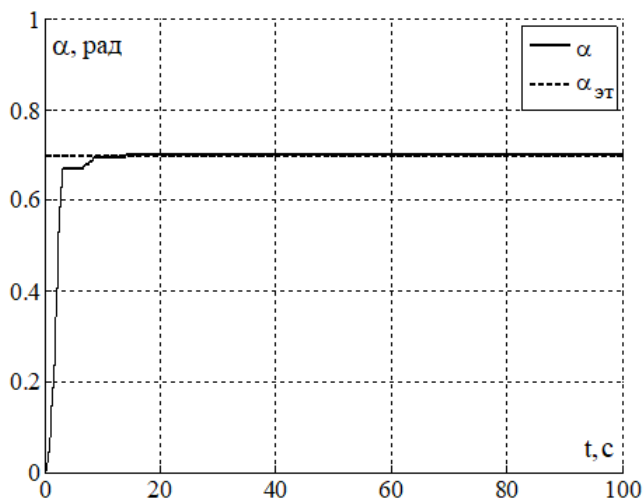
В уравнениях (247)-(249) J_i – интегральный критерий качества, рассчитанный согласно (2.4); $J_{yi} = \int_0^{\infty} y_i^T Q_i y_i dt$, $J_{ui} = \int_0^{\infty} u_i^T Q_i u_i dt$; индекс *real* (*ideal*)

соответствует случаю работы реального (идеального) объекта управления, регулируемого робастным субоптимальным (чистым субоптимальным) алгоритмом управления. Численные значения данных показателей представлены в Таблице 4.

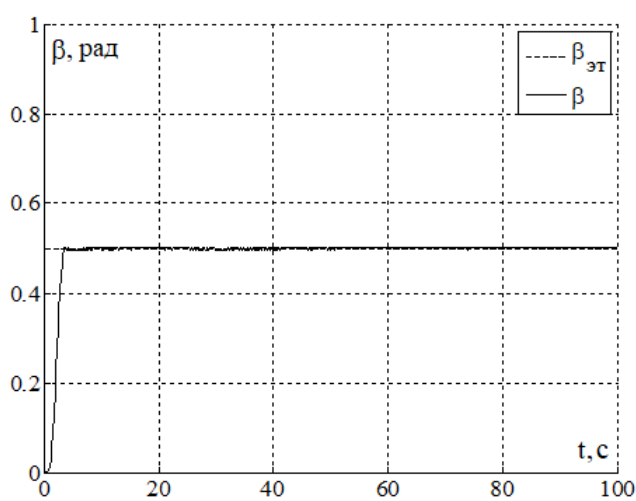
Для демонстрации преимуществ предложенного алгоритма основные показатели качества приведены в сравнении с чистым субоптимальным регулятором в следующей форме:

$$u_{oi}(t) = -G_i \hat{x}_i(t), i = 1, 2,$$

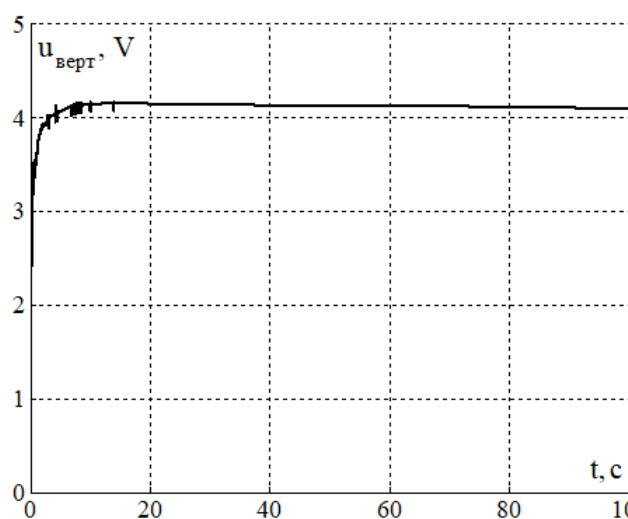
рассчитанным с использованием (2.8), где $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$, $R_1 = 0.35$, $R_2 = 0.055$. Экспериментальные данные представлены на рисунке 19.



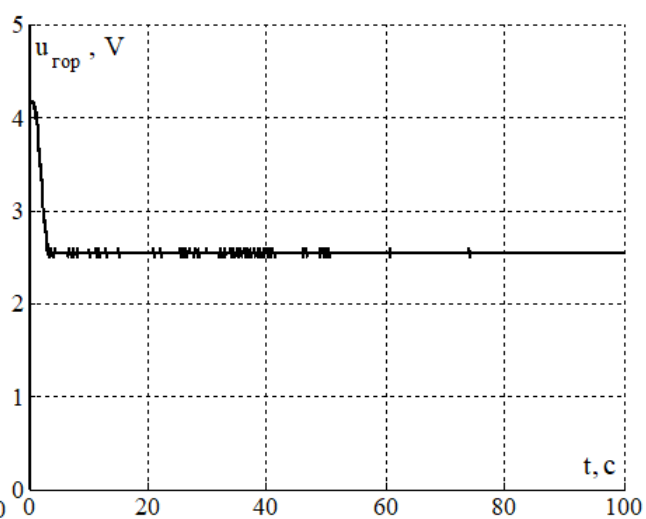
а)



б)



в)



г)

Рисунок 18 – Переходные процессы при работе субоптимального робастного регулятора по а) углу тангажа б) углу рысканья в) сигналу управления для вертикальной подсистемы г) сигналу управления для горизонтальной подсистемы.

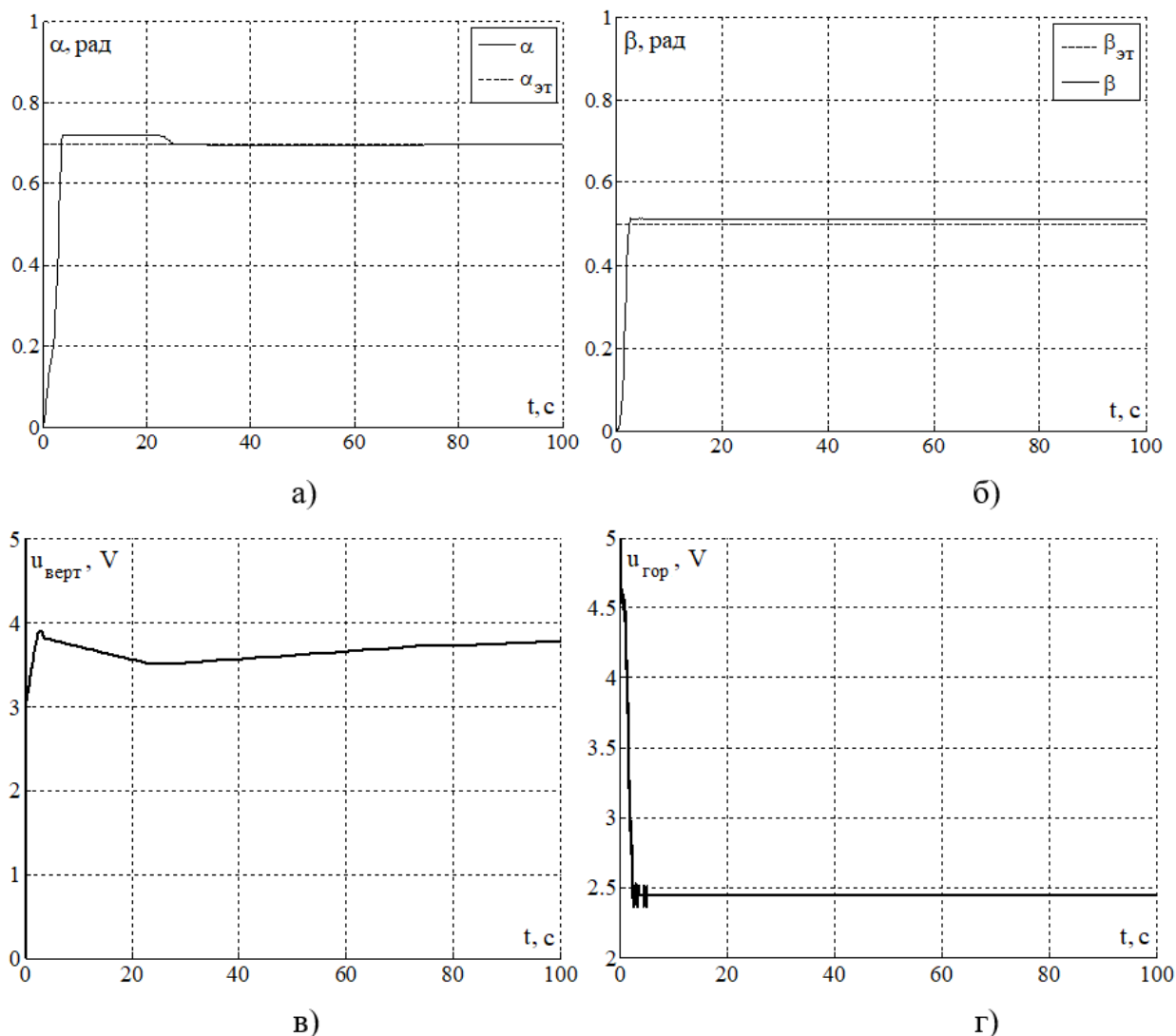


Рисунок 19 – Переходные процессы при работе чистого субоптимального регулятора по а) углу тангажа б) углу рысканья в) сигналу управления для вертикальной подсистемы г) сигналу управления для горизонтальной подсистемы.

Таблица 4 – Значения интегральных показателей качества

Интегральный критерий	Подсистема	
	Тангаж, $i = 1$	Рысканье, $i = 2$
ΔJ_i , [n/a]	-1034.31	-408.4861
ΔJ_{yi} , [rad ²]	-22.341	-10.6524
ΔJ_{ui} , [V ²]	-1011.9682	-397.8337

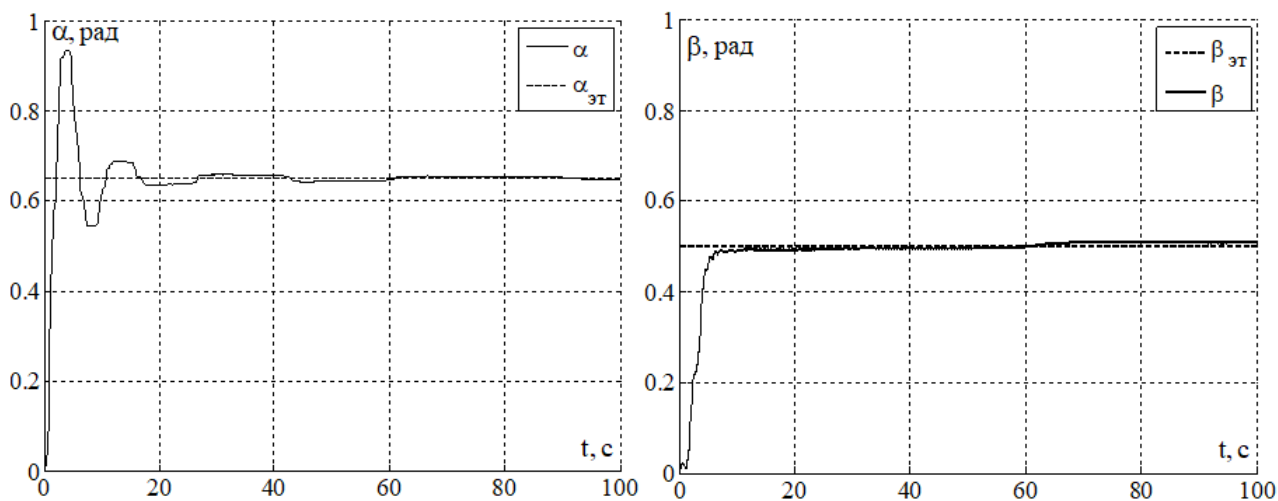
В данном случае экспериментальные данные демонстрируют следующие результаты. Ошибка стабилизации по выходу в обеих плоскостях достаточно мала и не превосходит 3% от желаемого значения. Сигналы управления не

достигают уровня насыщения. Небольшое перерегулирование присутствует. Точные значения времени переходного процесса t_{fi} , перерегулирования σ_i и размеров области диссипативности δ_i , $i = 1, 2$ представлены в Таблице 5.

Кроме того, полученные результаты сопоставлены с результатами, полученными при управлении установкой пропорционально-интегрально-дифференциальным (ПИД) регулятором. Поскольку использование систем фильтрации измерительных шумов в данном случае делало замкнутую систему неустойчивой, линейные фильтры были отключены. Экспериментальные данные представлены на рисунке 20. Результаты эксперимента показывают, что ошибка стабилизации по выходу в обеих плоскостях достаточно мала и не превосходит 2% от желаемого значения. Сигналы управления достигают насыщения, что вызвано спецификой работы интегральной составляющей регулятора, а также невозможностью использовать фильтрацию шумов измерений. Значительное перерегулирование присутствует. Точные значения времени переходного процесса t_{fi} , перерегулирования σ_i и размеров области диссипативности δ_i , $i = 1, 2$ представлены в Таблице 5.

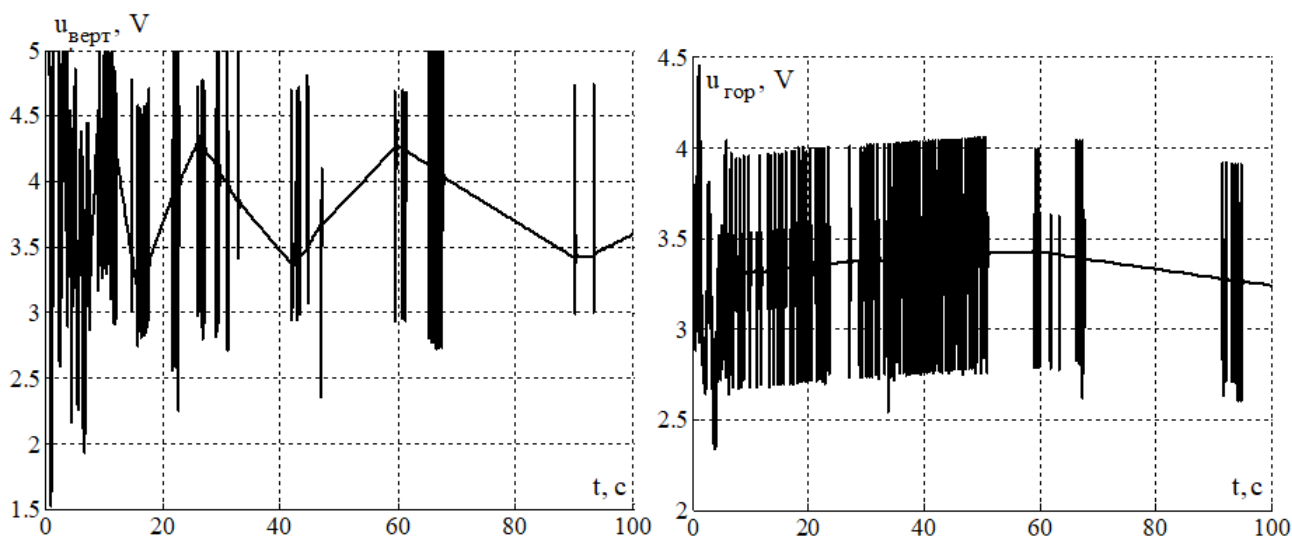
Таблица 5 – Показатели качества

		Показатели качества	Тип регулятора		
			<i>Робастный субоптимальный</i>	<i>Субоптимальный</i>	<i>ПИД</i>
тангаж	t_{f1} , [s]		8.5	4	16
	δ_1 , [%]		1	3	2
	σ_1 , [%]		0	3.6	43.8
рысканье	t_{f2} , [s]		3.5	2.4	9.9
	δ_2 , [%]		0.6	2.4	2
	σ_2 , [%]		0	3.1	0



а)

б)



в)

г)

Рисунок 20 – Переходные процессы при использовании ПИД-регулятора по а) углу тангажа б) углу рысканья в) сигналу управления для вертикальной подсистемы г) сигналу управления для горизонтальной подсистемы.

2.3 Централизованный субоптимальный робастный регулятор

Программная реализация централизованной версии субоптимального робастного регулятора соответствует утверждению 2.2. Для учета перекрестных связей при получении линейного описания используется интервальная модель (243)-(246). Стоит отметить, что использование интервальной модели более корректно с точки зрения математической обоснованности применения алгоритма к объекту с нелинейной динамикой. Сформулируем замечание.

Замечание 2.1. Доказательство утверждения 2.2 приведено для случая, если объект управления представлен в линейной интервальной форме. Тем не

менее, положения теоремы справедливы и для нелинейных объектов, динамика которых удовлетворяет условию (2.42), так как если для линейного интервального представления объекта будет найдена область притяжения, то размер этой области также ограничивает и сигналы исходной нелинейной системы.

Рассматривается задача стабилизации TRMS в желаемом положении $y_{ref} = [0.5, 0.5]^T$. В соответствии с замечанием, предложенный метод управления может быть применен к для управления нелинейными объектами, такими как TRMS. Согласно алгоритму, рассмотрим номинальные матрицы интервальной модели:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12.354 & -2.774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.56 \end{bmatrix},$$

$$B = \text{blkdiag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.847 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.046 \end{bmatrix} \right\}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Весовые матрицы функционала качества (2.29) выбраны в виде

$$Q = \text{diag} \{35, 0.5\}, R = \text{diag} \{10, 2\}.$$

Матрица обратных связей для оптимального контура управления (2.36):

$$G = \text{blkdiag} \{[0.1195 \ 0.0269], [0.5 \ 0.3293]\}.$$

Матрица состояния вспомогательного контура принимает вид

$$A_o = \text{blkdiag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12.455 & -4.45 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.023 & -1.526 \end{bmatrix} \right\}.$$

Матрицы наблюдателя (2.35) определены в виде

$$H_o = \text{blkdiag} \{H_i, i=1,2\}, H_i = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_o = \text{blkdiag} \{D_{oi}, i=1,2\}, D_{oi} = -[3\tau_0^{-1}, 3\tau_0^{-2}, \tau_0^{-3}]^T,$$

$$\bar{L} = \text{blkdiag} \{[1 \ 0 \ 0], [1 \ 0 \ 0]\},$$

где параметр $\tau = 0.01$ определяется в соответствии с частотой дискретизации датчиков положения установки.

Для предотвращения эффекта насыщения в каналах управления закон робастного управления в ходе эксперимента рассчитывается в форме $u_{r_sat}(t) = \gamma u_r(t)$, где $u_r(t)$ рассчитывается в соответствии с (2.42), $\gamma = \text{diag} \{0.06, 1\}$. Вспомогательный контур имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_o x_a(t) + B\gamma^{-1} u_r(t), \\ y_a(t) = Lx_a(t). \end{cases}$$

Результаты тестирования демонстрируют, что робастный субоптимальный алгоритм управления обеспечивает сходимость выходных сигналов к требуемому значению с высокой точностью без перерегулирования в переходных процессах. Выбросы в установившемся режиме в сигналах управления вызваны квантованием измеряемых величин.

В установившемся режиме точность стабилизации оказалась сопоставима с разрешающей способностью используемых датчиков. Цель управления достигается за время $T=3.5$ с. Достигнутые показатели качества приведены в таблице 6. Для сравнения представлены показатели качества аналогичного алгоритма управления в децентрализованном виде, субоптимального регулятора без робастного контура и ПИД регулятора. Оптимальный (линейный квадратичный) регулятор рассчитан в соответствии с (2.36). Используемый ПИД регулятор является частью встроенного программного обеспечения от разработчиков TRMS, его параметры приведены в документации [49].

Как можно судить по результатам сравнительного анализа, учет полезных перекрестных связей в централизованной версии алгоритма позволяет существенно сократить время переходного процесса. Кроме того, время переходного процесса меньше, чем при использовании других алгоритмов при управлении данной установкой. Уменьшение времени стабилизации является особенно важным качеством системы управления в задачах управления летательными аппаратами.

Таблица 6 – Показатели качества

	Показатели качества	Тип регулятора			
		<i>Робастный субоптимальный (централизованный)</i>	<i>Робастный субоптимальный (децентрализованный)</i>	<i>LQR</i>	<i>PID</i>
тангаж	t_{f1} , [с]	3.5	8.5	4	16
	δ_1 , [%]	1	1	3	2
	σ_1 , [%]	0	0	3.6	43.8
рысканье	t_{f2} , [с]	2.5	3.5	2.4	9.9
	δ_2 , [%]	2	0.6	2.4	2
	σ_2 , [%]	0	0	3.1	0

2.4 Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений и учетом перекрестных связей

Для апробации модифицированного алгоритма бэкстеппинга использована исходная нелинейная модель (241). В данном случае для синтеза системы управления необходима только информация об относительной динамической степени объекта. В документации динамика двигателей и аэродинамических сил установки TRMS аппроксимирована полиномами высоких порядков. Используя данные аппроксимации, объект управления декомпозируется на две подсистемы с одинаковыми относительными степенями $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 2$. Матрицы системы управления выбраны следующим образом:

$$A_{0pitch} = A_{0yaw} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$c_{1pitch} = c_{2pitch} = 0.05, \mu_{1,2pitch} = 0.06,$$
$$c_{1,2yaw} = 0.075, \mu_{1,2yaw} = 0.06,$$

Результаты эксперимента показаны на рисунках 21-28. Как следует из графиков, алгоритм управления обеспечивает устойчивость замкнутой системы с высокой точностью. Достигнутая точность стабилизации по углу тангажа составляет около 0,064 [рад]. Отклонение оказалось больше, чем при компьютерном моделировании, что объясняется другим видом и величиной функции внешних возмущений, а также иным характером влияния параметрических неточностей, что невозможно точно воспроизвести при моделировании. Точность стабилизации по углу рыскания составила 0,027 [рад], что очень близко к результатам компьютерного моделирования и является высоким точностным показателем. Переходные процессы демонстрируют заметные колебания, предположительно вызванные высокими значениями производных ошибок измерений из-за использования наблюдателей с высоким коэффициентом усиления, а также фактом ручной настройки параметров всех вспомогательных контуров и фильтров.

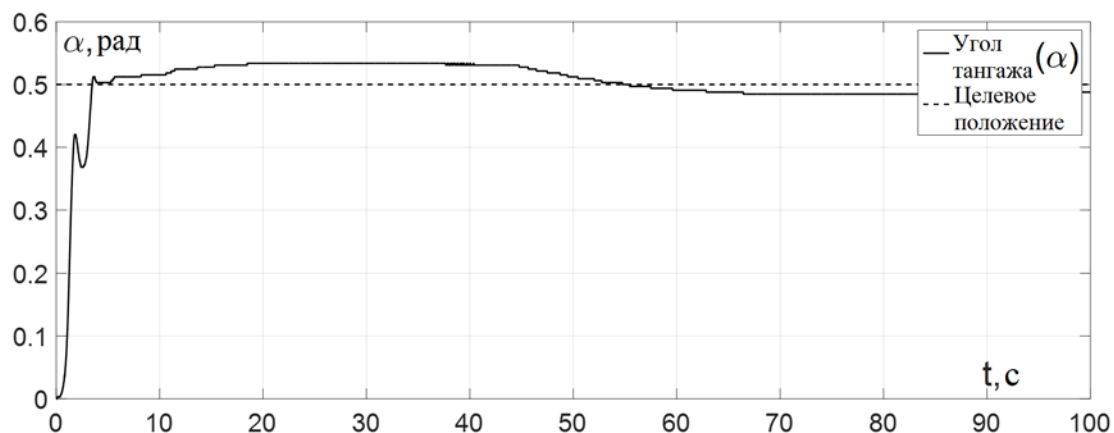


Рисунок 21 – Переходный процесс по углу тангажа в режиме стабилизации

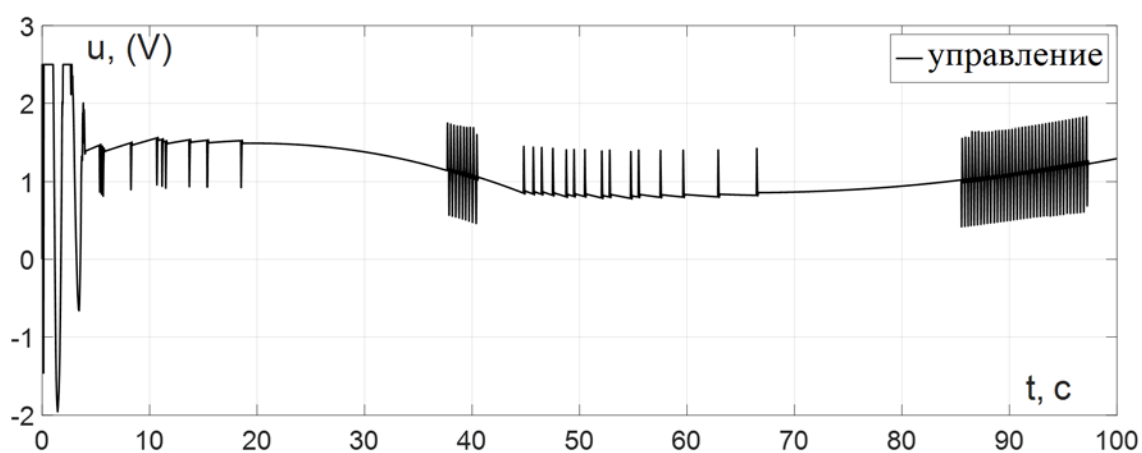


Рисунок 22 – График сигнала управления при стабилизации объекта по тангажу

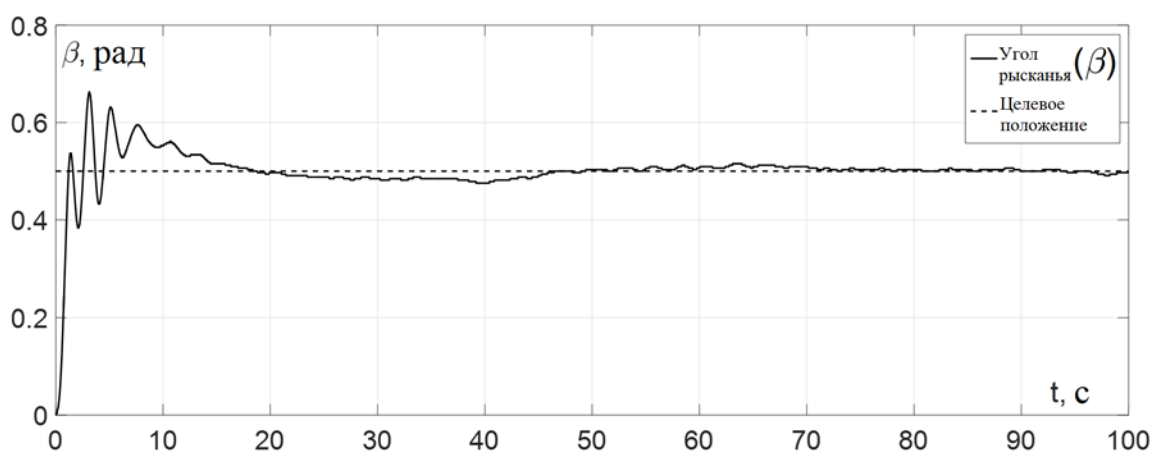


Рисунок 23 – Переходный процесс по углу рысканья в режиме стабилизации

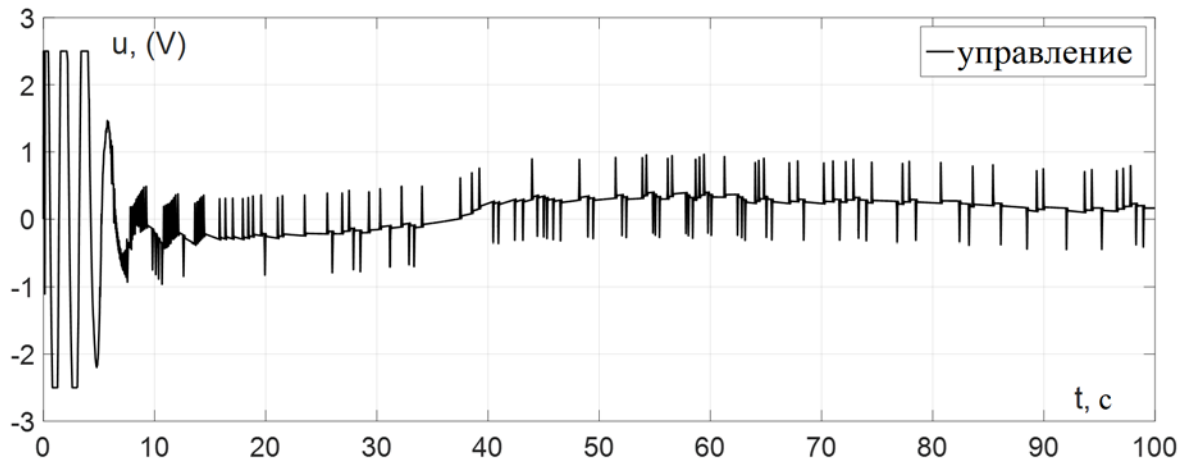


Рисунок 24 – График сигнала управления при стабилизации объекта по углу рысканья

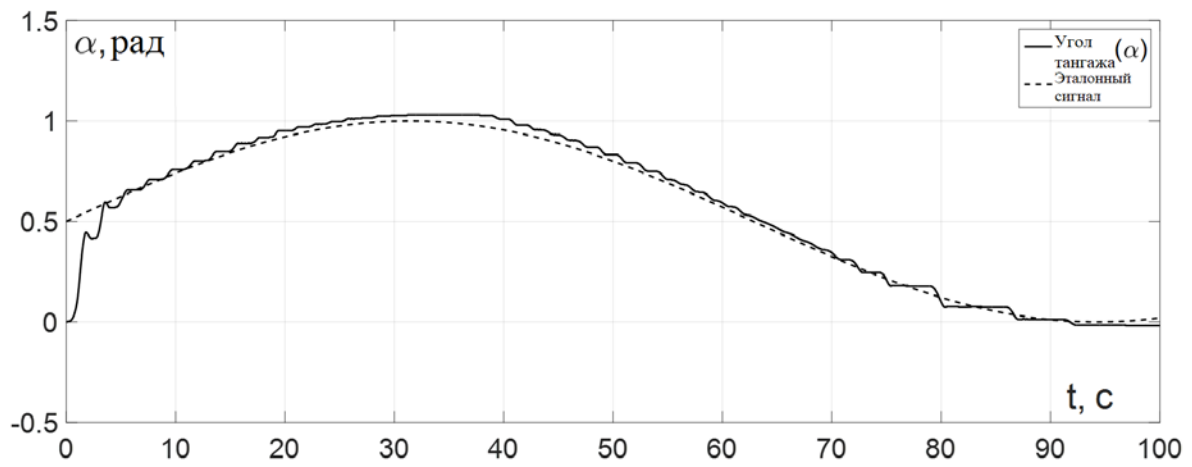


Рисунок 25 – Угол тангажа в режиме слежения

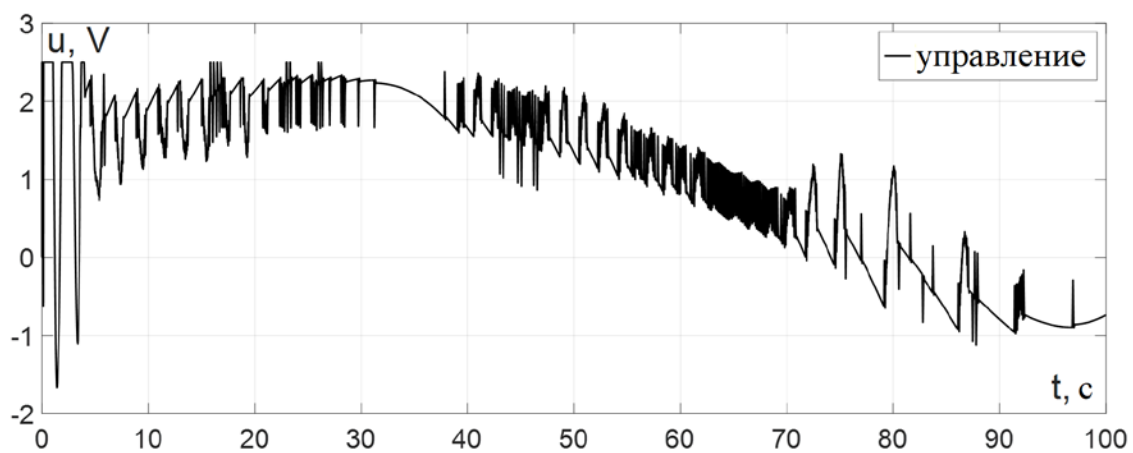


Рисунок 26 – График сигнала управления при регулировании по углу тангажа в режиме слежения

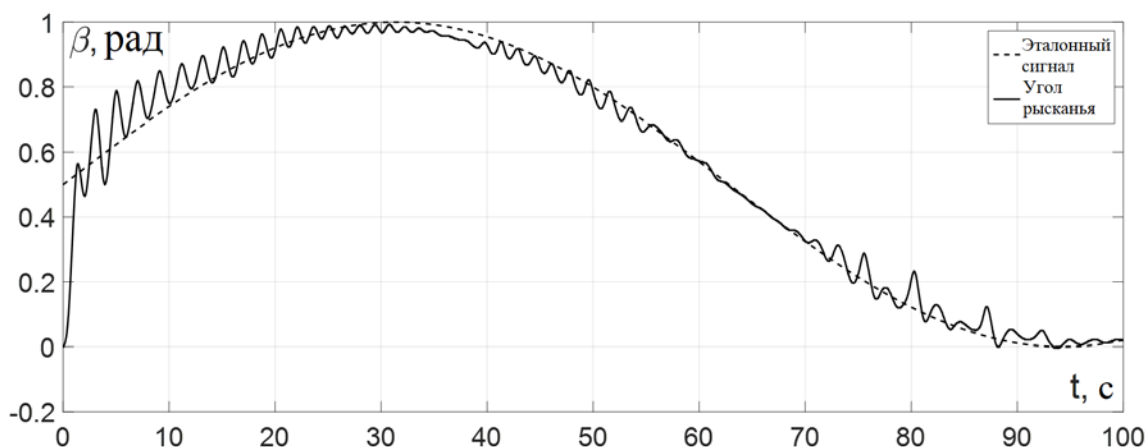


Рисунок 27 – Угол рысканья в режиме слежения

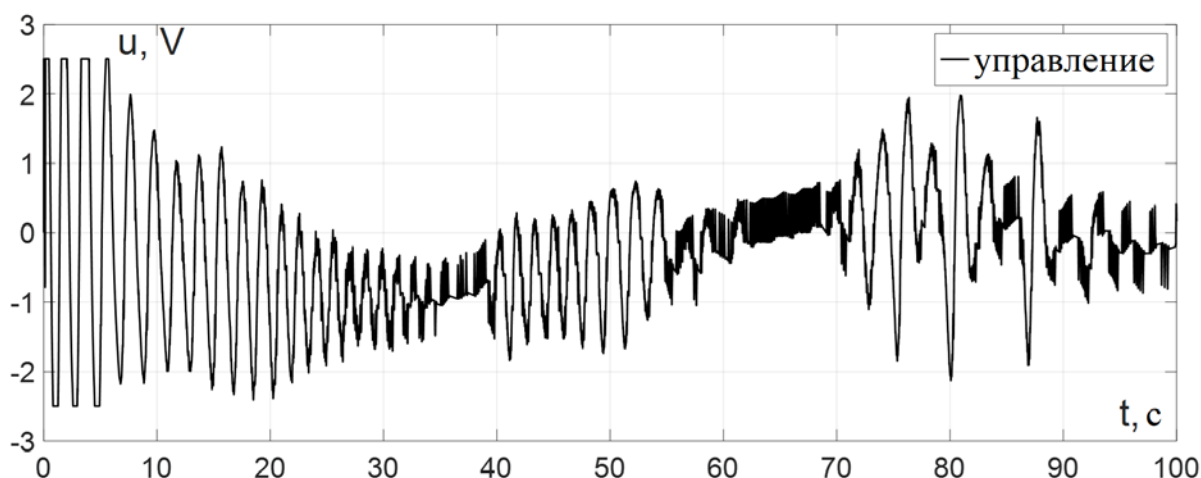


Рисунок 28 – График сигнала управления при регулировании по углу рысканья в режиме слежения

Графики демонстрируют способность системы управления обеспечить стабилизацию установки в заданном положении за необходимое время, равно как и траекторное слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью. Сигналы управления после переходных процессов не достигают величины насыщения.

2.5 Выводы по главе 2

Основным результатом данной главы является практическая реализация робастного субоптимального алгоритма управления и модифицированного алгоритма бэкстепинга для решения задач стабилизации и траекторного слежения на лабораторном стенде «Twin Rotor MIMO System». Результаты экспериментов подтвердили практическую применимость всех представленных в пособии алгоритмов для управления широким классом электромеханических систем, в том числе для управления винтокрылыми летательными аппаратами,

маятниковыми системами и другими многоканальными объектами с нелинейной динамикой.

Все алгоритмы используют метод вспомогательного контура для компенсации возмущений, что обеспечило высокую точность стабилизации и малые значения ошибки слежения, близкие к разрешающей способности датчиков угловых положений установки. При этом робастный субоптимальный алгоритм использует в своей структуре линейную модель объекта управления, что неизбежно порождает значительные параметрические неопределенности для систем управления. Тем не менее, правомерность использования данных алгоритмов для нелинейных объектов обоснована замечанием 2.1 и подтверждена результатами практических испытаний.

Несмотря на визуально сложную структуру синтеза алгоритмов модифицированного бэкстеппинга, на практике для синтеза системы управления потребовались только информация об относительной динамической степени объекта управления и выбор настраиваемых параметров наблюдателя, вспомогательных контуров и фильтра. Это значительно облегчает использование алгоритма в практических задачах.

Оценки, полученные для области диссипативности сигналов замкнутых систем на основе предложенных алгоритмов, не позволяют точно определить оптимальные значения настраиваемых параметров, а лишь определяют область выбора параметров их влияние на точность регулирования и время переходных процессов. На практике выбор настраиваемых параметров оказался шире, чем было установлено в доказательствах, из-за достаточно грубых оценок при анализе функции Ляпунова. Этот факт в целом затрудняет процесс настройки систем управления в практических задачах, но в то же время открывает возможность для синтеза систем с более высокими показателями качества, чем допускается в доказательствах.

2.6 Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы.

1. Принцип работы лабораторного стенда «Twin Rotor MIMO System» (TRMS).
2. Вывод модели TRMS.
3. Выбор эталонной модели для TRMS.

Практические вопросы.

Для модели TRMS рассчитайте линейно-квадратичный закон управления, ПИД-регулятор и закон управления на базе метода бэкстеппинга. В Matlab/Simulink промоделируйте полученные алгоритмы управления и сравните результаты переходных процессов. Дополнительно проведите моделирование при

наличии запаздывания в канале управления. Найдите максимальное значение запаздывания, при котором замкнутая система остается работоспособной. Результаты моделирования и выводы оформите в виде отчетов по домашней работе.

Глава 3 Задания для экспериментальных исследований

Экспериментальные исследования проводятся на лабораторных занятиях на установке TRMS. Экспериментально исследовать линейно-квадратичный закон управления, ПИД-регулятор и закон управления на базе метода бэкстеппинга (рассчитанные при выполнении домашнего задания после изучения главы 2) при:

а) изменении масс поперечного и продольного винтов путем добавления грузиков (массами около 10 грамм) на решетки над винтами;

б) децентрализованном управлении винтами, считая, что перекрестные связи – возмущающие воздействия;

в) управлении винтами с учетом перекрестных связей;

г) наличии запаздывания в каналах управления и измерениях. Запаздывания моделируются стандартными блоками в Matlab/Simulink. Экспериментально найдите максимальное запаздывание в канале управления, при котором замкнутая система остается работоспособной. Сравните результат с выводами домашнего задания по второй главе.

Результаты экспериментов и выводы оформить в виде отчетов по лабораторной работе.

Список литературы

- 1 Мирошник И.В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. / Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. – СПб : Наука, 2000.
- 2 Khalil H.K. Nonlinear systems / Khalil H.K., Grizzle J.W. – Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002. – Т. 3.
- 3 Furtat I. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay / Furtat I., Fridman E., Fradkov A. // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2018. – Т. 63. – №. 1. – С. 298-305.
- 4 Фуртат И.Б. Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора / Фуртат И.Б. // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – №. 10. – С. 2-7.
- 5 Фуртат И.Б. Модифицированный алгоритм бэкстеппинга для нелинейных систем / Фуртат И.Б., Тупичин Е.А. // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №. 9. – С. 70-83.
- 6 Atassi A.N. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems / Atassi A.N., Khalil H.K. // 1997 European Control Conference (ECC). – IEEE, 1997. – С. 3829-3834.
- 7 Belyaev, A.N. Robust control of electric generator in the case of time-dependent mechanical power/ Belyaev, A.N., Smolovik, S.V., Fradkov, A.L., Furtat, I.B. // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2013. – Т. 52. – №. 5. – С. 750-758.
- 8 Chang J.L. Sliding mode control design for mismatched uncertain systems using output feedback / Chang J.L. // International Journal of Control, Automation and Systems. – 2016. – Т. 14. – №. 2. – С. 579-586.
- 9 Fradkov A.L. Robust control for a network of electric power generators / Fradkov A.L., Furtat I.B. // Automation and Remote Control. – 2013. – Т. 74. – №. 11. – С. 1851-1862.
- 10 Fradkov A.L. Nonlinear and adaptive control of complex systems / Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. – Springer Science & Business Media, 2013. – Т. 491.
- 11 Freeman R.A. Backstepping design of robust controllers for a class of nonlinear systems / Freeman R.A., Kokotovic P.V. // Nonlinear Control Systems Design 1992. – Pergamon, 1993. – С. 431-436.
- 12 Furtat I.B. Robust control for a specific class of non-minimum phase dynamical networks / Furtat I.B. // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2014. – Т. 53. – №. 1. – С. 33-46.
- 13 Furtat I.B. Robust suboptimal control with disturbances compensation / Furtat I.B. // Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2014 19th International Conference On. – IEEE, 2014. – P. 532-537.

- 14 Furtat I.B. Robust synchronization of the structural uncertainty nonlinear network with delay & disturbances / Furtat I.B. // IFAC Proceedings Volumes. – 2013. – T. 46. – №. 11. – C. 227-232.
- 15 Furtat I.B. Robust adaptive control with disturbances compensation / Furtat I.B., Chugina J.V. // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – T. 49. – №. 13. – C. 117-122.
- 16 Furtat, I.B. Synchronization of Dynamic Network Subjected to Control Input Saturation / Furtat, I.B., Chugina, J.V. // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), IET - 2015, Vol. 48, No. 11, pp. 527-533.
- 17 Furtat I. B. Robust control of multi-machine power systems caused by perturbation of mechanical input power and variable unknown communication time-delay / Furtat I.B., Chugina J.V., Fradkov A.L. // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – T.49. – №.14. – C. 24-29.
- 18 Furtat I.B. Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output / Furtat I.B., Fradkov A.L., Liberzon D. // Automatica. – 2015. – T. 60. – C. 239-244.
- 19 Furtat I. Robust synchronization of linear dynamical networks with compensation of disturbances / Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A. // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – T. 24. – №. 17. – C. 2774-2784.
- 20 Furtat I. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay / Furtat I., Fridman E., Fradkov A. // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2018. – T. 63. – №. 1. – C. 298-305.
- 21 Furtat I. Modified backstepping algorithm with disturbances compensation / Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A. // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – T. 48. – №. 11. – C. 1056-1061.
- 22 Furtat I. B. Modified backstepping algorithm for nonlinear systems / Furtat I. B., Tupichin E. A. // Automation and Remote Control. – 2016. – T. 77. – №. 9. – C. 1567-1578.
- 23 Furtat, I. B. Robust control algorithm under mismatched disturbances / Furtat, I.B., Vrazevsky, S.A., Kremlev, A.S., Gushchin, P.A. // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – IEEE, 2017. – C. 61-66.
- 24 Gao Z. Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design / Gao Z. // 2006 American control conference. – IEEE, 2006. – C. 7 pp.
- 25 Han X.R. Output feedback sliding mode control of time delay systems with bounded disturbances / Han X.R., Fridman E., Spurgeon S.K. // Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference. – IEEE, 2009. – C. 8417-8422.
- 26 Huang L. An approach for robust control of a twin-rotor multiple input multiple output system / Huang L. // Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on. – IEEE, 2011. – P. 4423-4428.

- 27 Kanellakopoulos I. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems / Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S. // 1991 American Control Conference. – IEEE, 1991. – C. 649-654.
- 28 Khalil H.K. Nonlinear systems / Khalil H.K., Grizzle J.W. – Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002. – T. 3.
- 29 Kokotovic P.V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive / Kokotovic P.V. // IEEE Control Systems Magazine. – 1992. – T. 12. – №. 3. – C. 7-17.
- 30 Kokotovic P. Constructive nonlinear control: a historical perspective / Kokotovic P., Arcak M. // Automatica. – 2001. – T. 37. – №. 5. – C. 637-662.
- 31 Krener A.J. Linearization by output injection and nonlinear observers / Krener A.J., Isidori A. // Systems & Control Letters. – 1983. – T. 3. – №. 1. – C. 47-52.
- 32 Krstic M. Adaptive nonlinear control without overparametrization / Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. // Systems & Control Letters. – 1992. – T. 19. – №. 3. – C. 177-185.
- 33 Krstic M. Nonlinear and adaptive control design / Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. – New York : Wiley, 1995. – T. 222. – C. 490-491.
- 34 Krstic M. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems / Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994. – T. 39. – №. 4. – C. 738-752.
- 35 Krstic M. Passivity and parametric robustness of a new class of adaptive systems / Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. // Automatica. – 1994. – T. 30. – №. 11. – C. 1703-1716.
- 36 Li, G. Output consensus of double-integrator multi-agent systems with mismatched disturbances via SMC and GPIO / Li, G., Wang, X., Li, S., Yang, J., Chen, X. // 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC). – IEEE, 2016. – C. 3468-3473.
- 37 Li, S. Disturbance observer-based control: methods and applications / Li, S., Yang, J., Chen, W. H., Chen, X. – CRC press, 2016.
- 38 Marino R. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations / Marino R., Tomei P. // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1992. – T. 37. – №. 8. – C. 1239-1245.
- 39 Marino R. Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems. I. Linear parameterization / Marino R., Tomei P. // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1993. – T. 38. – №. 1. – C. 17-32.
- 40 Moore R. E. Interval analysis. 1966 // Prince-Hall, Englewood Cliffs, NJ. – 1969.
- 41 Morse A.S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems / Morse A.S. // Systems, models and feedback: Theory and Applications. – Birkhäuser, Boston, MA, 1992. – C. 339-364.
- 42 Nikiforov V.O. Adaptive backstepping with a high-order tuner / Nikiforov V.O., Voronov K.V. // Automatica. – 2001. – T. 37. – №. 12. – C. 1953-1960.

- 43 Su J.P. Robust control of a class of nonlinear systems and its application to a twin rotor MIMO system / Su J.P., Liang C.Y., Chen H.M. // *Industrial Technology*, 2002. IEEE ICIT'02. 2002 IEEE International Conference on. – IEEE, 2002. – Т. 2. – P. 1272-1277.
- 44 Sun, H. Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances / Sun, H., Li, S., Yang, J., Zheng, W.X. // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. – 2015. – Т. 25. – №. 15. – С. 2631-2645.
- 45 Swaroop, D. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems / Swaroop, D., Hedrick, J.K., Yip, P.P., Gerdes, J.C. // *IEEE transactions on automatic control*. – 2000. – Т. 45. – №. 10. – С. 1893-1899.
- 46 Tao, C.W. A novel fuzzy-sliding and fuzzy-integral-sliding controller for the twin-rotor multi-input–multi-output system / Tao, C.W., Taur, J.S., Chang, Y.H., & Chang, C.W. // *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. – 2010. – Т. 18. – №. 5. – С. 893-905.
- 47 Tsykunov A.M. Robust control of multidimensional nonstationary linear plants / Tsykunov A.M. // *Automation and Remote Control*. – 2009. – Т. 70. – №. 2. – P. 271-282.
- 48 Twin Rotor M. System Advanced Teaching Manual 1 (33-007-4M5) // *Feedback Instruments Ltd, Crowborough, UK*. – 1998. С. 72.
- 49 Twin Rotor MIMO System Control Experiments 33-949S. East Sussex, UK: *Feedback Instruments Ltd*, 2006.
- 50 Вражевский С.А. Управление нелинейными и многоканальными системами на базе метода бэкстеппинга и метода вспомогательного контура // *Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук*. 2019. Санкт-Петербург, Университет ИТМО.

Бражевский Сергей Александрович
Фуртат Игорь Борисович

**Управление нелинейными системами с
запаздыванием**

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А