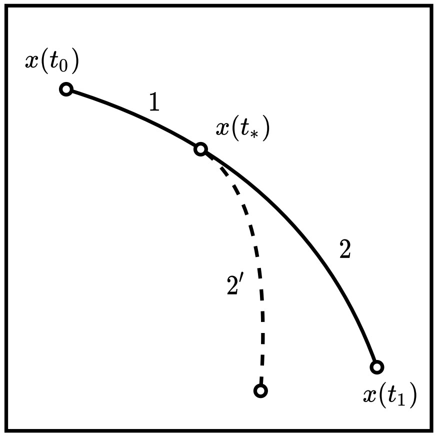
Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.О. Ведякова, Е.В. Милованович,
О.В. Слита, В.Ю. Тертычный-Даури

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ



Санкт-Петербург
2021

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.О. Ведякова, Е.В. Милованович,
О.В. Слита, В.Ю. Тертычный-Даури

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 01.03.02, 01.04.02, 15.03.06, 15.04.06, 27.03.04, 27.04.04, 24.03.02, 24.04.02
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата и магистратуры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2021

Ведякова А.О., Милованович Е.В., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю. Методы теории оптимального управления. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2021. — 219 с.

В пособии представлены различные задачи оптимизации процессов в управляемых динамических системах и качественные методы их решения. Достаточно подробно рассмотрено современное состояние некоторых разделов теории оптимального управления. Основное внимание уделено изучению основных методов оптимального управления (принципу максимума Понтрягина, методу динамического программирования и вариационной задаче оптимального управления), а также исследованию и решению различных специальных задач оптимального управления. Пособие предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры по направлениям подготовки: 01.03.02 и 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 15.03.06 и 15.04.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах», 24.03.02 и 24.04.02 «Системы управления движением и навигация».

Список литературы — 182 наим.

Рецензент:
д. физ.-мат. н., профессор Шориков А.Ф.

Одобрено Ученым советом мегафакультета КТУ.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО — участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО — становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Оглавление

Введение

Для теории оптимального управления характерно деление на два раздела: на классическую, использующую в качестве математического аппарата классическое вариационное исчисление, и современную, основной частью которой является методология, базирующаяся на применении принципа максимума Понтрягина и метода Беллмана динамического программирования.

Теория оптимального управления динамическими системами выдвинула на современном этапе научного развития ряд новых задач, которые не поддавались или плохо поддавались решению старыми методами вариационного исчисления. Речь идет о задачах с ограничениями на управляющие воздействия.

Решение подобного сорта задач было осуществлено в рамках нового подхода в теории динамической оптимизации — принципа максимума Понтрягина, позволяющего получить необходимые условия оптимальности и в случае, когда оптимальное управление лежит на границе допустимой области. Более того, из принципа максимума можно вывести все необходимые условия вариационного исчисления.

Правда, не вдаваясь в подробности, следует сказать, что при соответствующей модернизации и обобщении классического вариационного исчисления удается решать и задачи с ограничениями на управления.

Весьма эффективными для решения экстремальных задач с различными исходными математическими моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными и интегродифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом и др., оказались абстрактные теории оптимизации, использующие аппарат функционального анализа. Абстрактные методы позволяют подойти к процедуре вывода условий оптимальности с единых позиций, выдвигая на первый план общие и наиболее принципиальные моменты теории.

Остановимся далее на структуре и содержании самого учебного пособия.

В главе 1 внимание концентрируется вокруг основных методов оптимального управления в виде принципа максимума Понтрягина, метода динамического программирования, вариационного метода и внутренней взаимосвязи между ними.

В главе 2 приведены многочисленные примеры использования методов аналитической механики для решения задач оптимального управления. Основу этого подхода составляют вариационный принцип Гамильтона, уравнения Гамильтона–Якоби и принцип освобождения от связей (принцип релаксации) в отношении управляемых систем. Отмечается минимаксный принцип механики в задачах оптимального управления.

В главе 3 делается переход к изучению вариационных задач теории оптимального управления. Вначале обсуждается постановка вариационных задач управления движением, вводится понятие вариации функционала и формулируются необходимые условия экстремума. Полученные сведения конкретизируются на задачах оптимизации гашения колебаний и вариационной задаче Майера–Больца оптимизации процессов управления.

В главе 4 обсуждается ход решения задач оптимального управления системами, описываемыми регулярными и сингулярными интегральными, а также интегродифференциальными уравнениями.

Заканчивается пособие небольшим разделом из задач и упражнений, служащих своеобразным теоретическим и практическим дополнением к основному тексту пособия.

Учебное пособие призвано ввести в круг вопросов, связанных с оптимизацией управляемых процессов в динамических системах, дать достаточно полное представление о современном состоянии некоторых разделов теории оптимального управления и подчеркнуть значимость ее методов для решения разнообразных регулируемых оптимизационных задач.

Настоящее пособие предназначено для студентов бакалавриата, изучающих следующие дисциплины: теория оптимального управления (направления подготовки 15.13.06, 27.03.04, главы 1, 2), задачи механики подвижных объектов для приборостроения (направление подготовки 24.03.02, главы 1, 2), методы оптимизации (направление подготовки 01.03.02, главы 1, 2) и служит выработке компетенции

ПК-2. Также пособие предназначается для студентов магистратуры, изучающих дисциплины оптимальное управление (направление подготовки 15.04.06, главы 1–4), современная теория систем управления (направление подготовки 27.04.04, главы 1–4), управление непрерывными и дискретными процессами (направление подготовки 24.04.02, главы 1–4), современные проблемы прикладной математики и информатики (направление подготовки 01.04.02, главы 1–4) и реализации компетенций ОПК-1 и ПК-С2.1. Изложенная в пособии информация будет полезна при подготовке к промежуточной аттестации по указанным выше дисциплинам, а также при написании выпускных квалификационных работ.

Глава 1

Основные методы оптимального управления

В настоящее время теория оптимального управления сложилась в обширную и самостоятельную математическую дисциплину, результаты которой имеют важное теоретическое и практическое значение. Она располагает целым набором средств и методов решения оптимизационных задач управления для разных классов объектов (укажем в этой связи лишь на некоторые, фундаментальные работы по данной тематике [3, 6, 10–13, 19–21, 25, 37, 54, 55, 61, 67, 72, 74, 75, 77, 81–83, 86, 89, 90, 92, 93, 108, 120, 130, 133, 135, 139, 145, 146, 162, 169]).

Однако среди обилия различных аналитических приемов решения задач оптимального управления, за исключением вариационного, выделяются два основных — принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана, получивших свое оформление и развитие в 50–60–х годах прошлого века (см., например, работы [2, 5, 7, 10, 12, 13, 16, 19, 20, 39, 43, 46, 52, 59, 79, 94, 108, 117, 129, 135], посвященные этим методам оптимального управления). Можно даже сказать, что другие способы оптимизации управляемых систем являются своего рода «последующими продуктами переработки» этих двух, ставших уже классическими методов оптимального управления.

Основным побудительным мотивом к возникновению этих новых оптимальных теорий явились потребности практики в решении многочисленных технических задач управления, где на множество допустимых управлений U (область управления) накладываются ограничения в виде замкнутых неравенств.

Именно замкнутость множества U делает эти задачи «нерешабельными» с помощью стандартных приемов вариационного исчисления, поскольку варьируемые функции управления наложенным ограничениям не удовлетворяют.

Предваряя Главу 1, оговоримся, что основной материал вовсе не затрагивает вопросов качественного освещения методов оптимального управления стохастическими, адаптивными и иными специальными динамическими системами (соответствующую литературу можно изучить, к примеру, по изданиям [9, 26, 55, 67, 74, 85, 90, 132, 133, 141]). Основное внимание в Главе 1 уделяется рассмотрению принципа максимума и динамического программирования в детерминированной непрерывной постановке.

Выше были отмечены лишь основные монографии и обзорные учебные курсы лекций; конечно, этот список не претендует на полноту. Тем не менее, выделим еще некоторые журнальные публикации, оказавшие заметное влияние на развитие теории оптимального управления в целом [17, 18, 36, 53, 68, 73, 80, 106, 107, 116, 143, 144, 163, 173].

В § 1.1 изучен принцип максимума Понтрягина. Основное внимание сконцентрировано на обосновании необходимых условий оптимальности в виде принципа максимума. Приведены также аналоги принципа максимума в задаче о быстродействии и для неавтономных систем. Исследована оптимальная задача с подвижными границами, для которой сформулированы соответствующие условия трансверсальности.

В § 1.2 рассмотрены концептуальные основы метода динамического программирования Беллмана. Обоснован принцип оптимальности Беллмана. Исследована оптимальная задача с фиксированным временем регулирования и свободным правым концом траектории. Получено для этой задачи основное уравнение для выбора оптимального управления — уравнение Беллмана. В аналогичном стиле рассмотрена и задача с закрепленным концом траектории и свободным временем регулирования. Кроме того, приведено решение задачи об управлении, оптимальном по быстродействию. Указаны достаточные условия оптимальности.

В § 1.3 исследована одна вариационная задача оптимального управления в предположении, что область допустимых управлений образована множеством всех ограниченных непрерывных вектор-функций соответствующей размерности. Используя стандартные приемы классического вариационного исчисления, с помощью правила множителей Лагранжа определяются необходимые условия стационарности исходного функционала качества в виде уравнений Эйлера–Лагранжа.

§ 1.4 посвящен обсуждению ряда вопросов существования и особенностей внутренней связи изученных ранее методов оптимального управления. Среди различных вариантов сравнения методов оптимизации в теории управляемых динамических систем в данном параграфе рассмотрены: связь принципа максимума с методом динамического программирования, а также связь принципа максимума и метода динамического программирования с вариационным исчислением.

1.1 Принцип максимума Понтрягина

Основу материала данного параграфа составила выборка из монографии Л.С. Понтрягина с сотрудниками [108], в которой в наиболее точной и выразительной форме обоснованы конструкции принципа максимума в задачах оптимального управления различными видами динамических управляемых систем.

1.1.1. Необходимое условие оптимальности. Пусть управляемая динамическая система задается уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \qquad j = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $u(t) = \big(u_1(t), \ldots, u_m(t)\big)$ — кусочно-непрерывная вектор-функция времени со значениями в m–мерном замкнутом ограниченном множестве $U \subset R^m$; функции $f_j(x,u)$, $j = \overline{1,n}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$, определены $\forall\, x \in X$, $u \in U$, где X — n–мерное фазовое пространство, и непрерывны по переменным $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$ и непрерывно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$.

Необходимо систему (1.1) перевести из начальной точки $x^0 = x(t_0) \in X$ в заданную конечную точку $x^1 = x(t_1) \in X$, где конечный момент времени t_1 заранее не фиксируется. Требуется при этом управление u выбрать так, чтобы функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t)\big)\, dt \tag{1.2}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Пусть $x_0(t)$ — функция, задаваемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0\big(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\big) \tag{1.3}$$

с начальным условием $x_0(t_0) = 0$. Очевидно, что тогда функционал J (1.2) можно записать так: $J = x_0(t_1)$. Уравнения (1.1) и (1.3) представим в виде совокупной системы

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x, u), \qquad j = \overline{0, n}. \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение еще одну систему уравнений относительно вспомогательных переменных $\psi(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)$:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k}\, \psi_i, \qquad k = \overline{0, n}. \tag{1.5}$$

Для выбранного допустимого управления $u(t)$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t)$ в системе (1.5) имеем $f_i(x, u) = f_i\big(x(t), u(t)\big)$. Система (1.5) с $f_i\big(x(t), u(t)\big)$ представляет собой систему однородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для любых $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{0, n}$, она допускает единственное решение $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$.

В обозначении

$$\bar{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i\, f_i(x, u) \tag{1.6}$$

получим

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_j} = f_j(x, u), \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^{n} \psi_i\, \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k}.$$

Тогда системы уравнений (1.4), (1.5) приобретают вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_j}, \qquad j = \overline{0, n}, \tag{1.7}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j}, \qquad j = \overline{0, n}. \tag{1.8}$$

Обозначим также точную верхнюю грань значений непрерывной функции $\bar{H}(\psi, x, u)$ по $u \in U$:

$$\sup_{u \in U} \bar{H}(\psi, x, u) = \bar{M}(\psi, x).$$

Заметим, что если этот супремум достигается в некоторой точке области U, то $\bar{M}(\psi, x)$ есть максимум значений функции $\bar{H}$ при фиксированных ψ и x. Следующая теорема, решающая поставленную выше задачу в терминах необходимого условия оптимальности, носит название *принципа максимума.*

Теорема 1.1 (Принцип максимума Понтрягина). *Если $u(t)$, $t \in [\,t_0, t_1\,]$, — такое допустимое управление, при котором соответствующая ему траектория $x(t)$ исходит из точки $x^0 = x(t_0)$ и приходит в точку $x^1 = x(t_1)$, то тогда для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ в смысле критерия качества (1.2) необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)$, соответствующей вектор-функциям $u(t)$ и $x(t)$ такой, что*

1) $\forall\, t \in [\,t_0, t_1\,]$, *являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $\bar{H}\big(\psi(t), x(t), u\big)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\bar{H}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) = \bar{M}\big(\psi(t), x(t)\big); \tag{1.9}$$

2) *в конечный момент времени t_1 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_1) \le 0, \qquad \bar{M}\big(\psi(t_1), x(t_1)\big) = 0. \tag{1.10}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе уравнений (1.7), (1.8) и условию 1), то функции времени $\psi_0(t)$ и $\bar{M}\big(\psi(t), x(t)\big)$ являются постоянными, а значит, соотношения (1.10) справедливы $\forall\, t \in [\,t_0, t_1\,]$.

Из теоремы 1.1 можно получить важное следствие в виде необходимого условия оптимальности по быстродействию. В этом случае в функционале (1.2) надо положить $f_0(x, u) \equiv 1$. Тогда в соответствии с обозначением (1.6) получим

$$\bar{H}(\psi, x, u) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f_i(x, u). \tag{1.11}$$

Введем обозначения

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \qquad H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f_i(x, u). \tag{1.12}$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.5) примут вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j}, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{1.13}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{1.14}$$

Если зафиксировать значения ψ и x, то функция H станет функцией управления u. Обозначим верхнюю грань ее значений

$$\sup_{u \in U} H(\psi, x, u) = M(\psi, x).$$

Следовательно, в согласии с обозначениями (1.11) и (1.12) получим

$$H(\psi, x, u) = \bar{H}(\psi, x, u) - \psi_0, \qquad M(\psi, x) = \bar{M}(\psi, x) - \psi_0.$$

Условия (1.9), (1.10) можно теперь представить так:

$$H\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t)\big) = M\big(\psi(t),\, x(t)\big) = -\,\psi_0 \geq 0.$$

Приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 1.2 (Принцип максимума в задаче о быстродействии). *Если $u(t)$, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, — такое допустимое управление, при котором соответствующая ему траектория $x(t)$ исходит из точки $x^0 = x(t_0)$ и приходит в точку $x^1 = x(t_1)$, то тогда для оптимальности по быстродействию управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = \big(\psi_1(t),\, ...,\, \psi_n(t)\big)$, соответствующей вектор-функциям $u(t)$ и $x(t)$ такой, что*

1) $\forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $H\big(\psi(t),\, x(t), u\big)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t)\big) = M\big(\psi(t),\, x(t)\big);$$

2) в конечный момент времени t_1 выполнено соотношение

$$M\big(\psi(t_1),\, x(t_1)\big) \geq 0. \tag{1.15}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (1.13), (1.14) *и условию* 1), *то функция времени $M\big(\psi(t),\, x(t)\big)$ постоянна и соотношение* (1.15) *справедливо $\forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$.*

1.1.2. Принцип максимума для неавтономных систем. Пусть динамическая система описывается n скалярными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j\big(x_1,\, ...,\, x_n, u_1,\, ...,\, u_m, t\big) = f_j(x, u, t), \qquad j = \overline{1, n},$$

либо векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \qquad x \in X = R^n, \quad f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m. \tag{1.16}$$

По-прежнему требуется перевести систему (1.16) из точки $x^0 = x(t_0)$ фазового пространства X в заданную точку $x^1 = x(t_1) \in X$, где конечный момент времени t_1 заранее не фиксируется. Управление $u = u(t)$ должно удовлетворять ограничениям: $u \in U$. Выбор управления u при этом происходит при условии, чтобы функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t),\, t\big)\, dt \tag{1.17}$$

принимал наименьшее возможное значение. В этом случае управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ называются *оптимальными*.

Схема подготовки к необходимому условию оптимальности в рассматриваемой задаче аналогична изученной выше. А именно обозначим через $x_0(t)$ функцию времени, задаваемую уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u, t), \tag{1.18}$$

с начальным условием $x_0(t_0) = 0$. Тогда согласно (1.18) функционал (1.17) записывается так: $J = x_0(t_1)$.

Введем в рассмотрение также функцию времени $x_{n+1}(t)$, определяемую уравнением

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$$

с начальным условием $x_{n+1}(t_0) = t_0$. Получим отсюда, что $x_{n+1} = t$. Запишем также совместную систему уравнений (1.16) и (1.18):

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x, u, x_{n+1}), \qquad j = \overline{0, n}. \tag{1.19}$$

Поставим теперь задачу: требуется найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $\big(x_1(t_0), ..., x_n(t_0), t_0\big)$ с некоторой точкой прямой S_1, проходящей через точку $\big(x_1^1, ..., x_n^1, 0\big)$ параллельно оси x_{n+1} (точка о которой идет речь, очевидно, имеет координаты $\big(x_1^1(t_1), ..., x_n^1(t_1), t_1\big)$.

Таким образом, данная задача приведена к оптимальной автономной задаче с закрепленным левым и подвижным правым концом.

Составим вспомогательную систему уравнений вида (1.5):

$$\frac{d\psi_k}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_k}\,\psi_i, \qquad k = \overline{0, n}, \tag{1.20}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial t}\,\psi_i.$$

По аналогии с выражением (1.6) обозначим

$$\bar{H}(\psi, x, u, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i\, f_i(x, u, t).$$

Тогда уравнения (1.19), (1.20) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{0, n}.$$

Теперь можно представить необходимое условие оптимальности для неавтономных систем с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.3 (Принцип максимума для неавтономных систем). *Если $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, такое допустимое управление, при котором соответствующая ему траектория $x(t)$ системы* (1.16) *исходит из точки $x^0 = x(t_0)$ и приходит в точку $x^1 = x(t_1)$, то тогда для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\big)$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ такой, что*

1) *$\forall\, t \in [t_0, t_1]$, являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $\bar{H}\big(\psi(t), x(t), u, t\big)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\bar{H}\big(\psi(t), x(t), u(t), t\big) = M\big(\psi(t), x(t), t\big);$$

2) *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t) = \mathrm{const} \le 0, \tag{1.21}$$

$$M\big(\psi(t), x(t), t\big) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i\big(x(t), u(t), t\big)}{\partial t}\,\psi_i(t)\,dt. \tag{1.22}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (1.19), (1.20) *и условию* 1), *то функция времени $\psi_0(t)$ постоянна, а функция $M\big(\psi(t), x(t), t\big)$ может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного в соотношении* (1.22). *Поэтому проверку соотношений* (1.21), (1.22) *достаточно осуществить в какой-либо момент времени $t \in [t_0, t_1]$; к примеру, вместо* (1.21), (1.22) *достаточно проверить соотношения*

$$\psi_0(t_1) \le 0, \qquad M\big(\psi(t_1), x(t_1), t_1\big) = 0.$$

Отметим, что в отличие от теоремы 1.1 для автономных систем в теореме 1.3 для неавтономных систем функция $M\big(\psi(t),\, x(t),\, t\big) = \bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t),\, t\big)$ не является константой, а определяется выражением (1.22).

1.1.3. Задача с подвижными концами. Условия трансверсальности. Напомним вначале некоторые геометрические понятия. При этом отметим, что возможны задачи, где начальное положение системы $x(t_0)$ заранее не задано либо ее конечное положение $x(t_1)$ равным образом не известно. Приходим, следовательно, к оптимальной задаче с подвижными концами.

Пусть $f(x) = f(x_1,\, ...,\, x_n)$ — действительная функция, заданная в некоторой области D евклидова пространства X с ортогональными координатами $x_1,\, ...,\, x_n$. Будем считать, что функция $f(x)$ в области D дифференцируема по своим переменным; тогда $\forall\, x \in D$ определен *вектор градиента* функции $f(x)$:

$$\nabla\, f(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\, \frac{\partial f}{\partial x_2},\, ...,\, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Множество S всех точек $x = (x_1,\, ...,\, x_n)$, удовлетворяющих соотношению

$$f(x_1, x_2,\, ...,\, x_n) = 0, \tag{1.23}$$

называется *гиперповерхностью* пространства X; соотношение (1.23) — *уравнением* этой гиперповерхности. Точка $x \in S$, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{\partial\, f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial\, f(x)}{\partial x_2} = \;...\; = \frac{\partial\, f(x)}{\partial x_n} = 0$$

в предположении, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема по $x_1,\, ...,\, x_n$, называется *особой точкой* гиперповерхности S. Значит, в особой точке вектор $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Точки гиперповерхности S, в которых $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, называются неособыми точками.

Гиперповерхность с уравнением (1.23) называется *гладкой*, если она не содержит особых точек. Будем полагать, что все рассматриваемые ниже гиперповерхности являются гладкими.

Если уравнение (1.23) линейно, т.е. имеет вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \;...\; + a_n x_n + b = 0, \tag{1.24}$$

то отсутствие особых точек означает, что хотя бы один из коэффициентов a_i отличен от нуля. В этом случае гиперповерхность с уравнением (1.24) называется *гиперплоскостью*.

Вектор $\operatorname{grad} f(\bar{x})$ называется *нормальным вектором* гиперповерхности S в точке $\bar{x}$. Для гиперплоскости нормальные векторы во всех точках одинаковы и имеют вид $(a_1, a_2,\, ...,\, a_n)$. Любая гиперплоскость однозначно определяется заданием нормального вектора и одной точки, лежащей на этой гиперплоскости.

Пусть S — гладкая гиперповерхность с уравнием (1.23) и точкой $\bar{x} \in S$. Гиперплоскость, проходящая через точку $\bar{x}$ и имеющая вектор $\operatorname{grad} f(\bar{x})$ своей нормалью, называется *касательной гиперплоскостью* к гиперповерхности S в точке $\bar{x}$. Любой вектор, берущий начало в точке $\bar{x}$ и лежащий в касательной гиперплоскости, называется *касательным вектором* гиперповерхности S в точке $\bar{x}$.

Рассмотрим k гладких гиперповерхностей $S_1,\, ...,\, S_k$ с уравнениями

$$f_1(x_1,\, ...,\, x_n) = 0,\; ...,\; f_k(x_1,\, ...,\, x_n) = 0. \tag{1.25}$$

Пересечение M всех этих гиперповерхностей называется $(n-k)$–мерным гладким *многообразием* в X, если $\forall\, x \in M$ векторы $\operatorname{grad} f_1(x),\, ...,\, \operatorname{grad} f_k(x)$ линейно независимы.

Одномерные многообразия задаются $n-1$ уравнениями вида (1.25) и называются *линиями*. Если уравнения (1.25) линейны, то многообразие M называется $(n-k)$–*мерной плоскостью* пространства X. Одномерные плоскости называются *прямыми линиями*. Обозначим через $L_i,\; i = \overline{1,k}$, касательную гиперплоскость к гиперповерхности S_i с уравнением $f_i(x) = 0$ в точке x. Пересечение гиперплоскостей $L_1,\, ...,\, L_k$ представляет собой $(n-k)$–мерную плоскость, называемую *касательной плоскостью* многообразия M в точке x. Вектор с началом в точке x является *касательным вектором* многообразия M в точке x (лежит в касательной плоскости) тогда и только тогда, когда он ортогонален векторам $\operatorname{grad} f_i(x),\; \forall\, i = \overline{1,k}$.

Перейдем к формулировке задачи оптимального управления с подвижными концами. Пусть M_0 и M_1 — гладкие многообразия, расположенные в пространстве X. Поставим задачу: требуется найти допустимое управление $u(t)$, которое переводит фазовую точку из некоторого, заранее не заданного начального положения $x^0 \in M_0$ в некоторое конечное положение $x^1 \in M_1$ и при этом придает заданному функционалу J минимальное значение.

Если оба многообразия M_0 и M_1 вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в задачу с закрепленными концами. Отметим, что если бы точки x^0, x^1 были известны, то это была бы задача с закрепленными концами. Поэтому управление $u(t)$, оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, т.е. принцип максимума в виде теоремы 1.1 остается в силе и для задачи с подвижными концами.

Однако в данном случае надо иметь еще соотношения, из которых можно было бы определить положение точек x^0 и x^1 на многообразиях M_0 и M_1. Такими соотношениями являются *условия трансверсальности*, позволяющие написать условия, включающие координаты концевых точек x^0 и x^1.

Приведем формулировку условий трансверсальности. Пусть $x^0 \in M_0,\ x^1 \in M_1$ — некоторые точки, а T_0, T_1 — касательные плоскости многообразий M_0 и M_1, проведенные в этих точках. Пусть $u(t),\ x(t),\ t \in [\,t_0,\, t_1\,]$ — решение оптимальной задачи с закрепленными концами x^0 и x^1, а $\psi(t)$ — вектор, существование которого утверждается в теореме 1.1.

Будем говорить, что вектор $\psi(t)$ удовлетворяет *условию трансверсальности* на правом конце траектории $x(t)$ в точке $x^1 = x(t_1)$, если вектор $\psi(t_1) = \big(\psi_1(t_1),\, \psi_2(t_1),\, ...,\, \psi_n(t_1)\big)$ ортогонален плоскости T_1. Иными словами, условие трансверсальности означает, что для любого вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2,\, ...,\, \theta_n)$, принадлежащего плоскости T_1, выполнено соотношение $\big(\psi(t_1),\, \theta\big) = 0$.

Аналогично можно записать условие трансверсальности на левом конце траектории $x(t)$ в точке $x^0 = x(t_0)$; надо только при этом заменить t_1 на t_0, а T_1 на T_0.

Используя условия трансверсальности, можно теперь сформулировать решение задачи с подвижными концами.

Теорема 1.4. *Пусть $u(t),\ t \in [\,t_0,\, t_1\,]$ — допустимое управление, переводящее изображающую точку из некоторого положения $x^0 \in M_0$ в положение $x^1 \in M_1$, а $x(t)$ — соответствующая траектория, исходящая из точки x^0. Для того, чтобы $u(t)$ и $x(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижными концами, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы* 1.1 *и, кроме того, условию трансверсальности в обоих концах траектории $x(t)$.*

Понятно, что в случае, если одно из многообразий M_0, M_1 вырождается в точку, то условие трансверсальности на данном конце траектории $x(t)$ заменяется условием прохождения траектории $x(t)$ через эту точку.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем состоит общий смысл принципа максимума Понтрягина?

2. В чем состоит общий смысл принципа максимума в задаче о быстродействии?

3. В чем состоит общий смысл принципа максимума для неавтономных систем?

4. Сформулируйте условия трансверсальности в оптимальной задаче с подвижными концами.

1.2 Метод динамического программирования

Выбор закона управления с учетом различных ограничений на переменные системы управления определяется целевыми условиями. В оптимальной задаче целью управления считается достижение экстремума некоторого критерия качества, характеризующего собой критерий оптимальности функционирования исследуемой динамической системы во времени.

1.2.1. Принцип оптимальности Беллмана. Зададим движение управляемой системы с помощью скалярных уравнений вида (1.1):

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1,\, ...,\, x_n, u_1,\, ...,\, u_m), \qquad j = \overline{1, n},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — фазовые координаты системы, $u_1, \ldots, u_m$ — управляющие воздействия, либо с помощью векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m.$$

Зададим далее *цель управления* в виде минимизации функционала качества (1.2):

$$J = \int_0^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t)\big)\, dt,$$

где f_0 — некоторая непрерывная скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$, а t_1 — заданный момент времени.

Динамическое программирование основано на *принципе оптимальности* Беллмана [10]. Этот принцип имеет место для динамических систем, дальнейшее движение которых полностью определяется состоянием этих систем в любой текущий момент времени. К таким системам относятся, например, системы, описываемые дифференциальными уравнениями (1.1).

Принцип оптимальности был сформулирован Р. Беллманом так: оптимальное поведение (движение) обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение (закон управления) в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Для систем вида (1.1) принцип оптимальности представляет собой хорошо известный факт, что часть экстремали вновь является экстремалью. Отсюда вытекает, что принцип оптимальности может быть сформулирован также следующим образом: оптимальная стратегия не зависит от предыстории системы, а определяется только начальным условием и конечной целью.

Принцип оптимальности Беллмана дает достаточно общее необходимое условие оптимальности. Рассмотрим в качестве примера оптимальную траекторию в n–мерном пространстве состояний. Положение движущейся точки в момент времени t' обозначим через $x(t')$. Данная точка делит траекторию на две части (участок 1 + участок 2).

Принцип оптимальности утверждает, что участок оптимальной траектории от точки $x(t')$ до точки $x^1 = x(t_1)$ (участок 2) также является оптимальной траекторией. Это означает, что для начального состояния $x(t')$ та часть траектории (участок 2), которая соответствует переходу из точки $x(t')$ в точку $x(t_1)$, является оптимальной в независимости от предыстории системы.

Допустим противное, т.е. найдется траектория $(1 + 2')$, вдоль которой значение функционала J будет меньше. Полное значение функционала J равно сумме его значений, вычисленных по двум участкам траектории. Отсюда вытекает, что можно построить траекторию $(1 + 2')$, которая будет лучше исходной $(1 + 2)$. Таким образом, приходим к противоречию с исходными данными о том, что исходная траектория $(1 + 2)$ при $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$ является оптимальной. Полученное противоречие доказывает, что участок 2 оптимальной траектории $(1 + 2)$ является в свою очередь оптимальной траекторией системы (1.1) на интервале времени $[\,t',\, t_1\,]$.

Итак, оптимальность отдельных участков траектории зависит от оптимальности всей траектории. Обратное утверждение не имеет места, т.е. оптимальность всей траектории не следует из оптимальности отдельных участков.

Принцип оптимальности утверждает, что выбор оптимального управления определяется лишь состоянием системы в текущий момент времени. Данное утверждение позволяет получить оптимизационные функциональные уравнения для нахождения закона изменения управляющих воздействий в задаче об оптимальном управлении.

1.2.2. Задача с фиксированным временем и свободным правым концом траектории. Пусть управляемая система описывается векторным уравнением вида (1.16):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m,$$

с заданным начальным условием $x^0 = x(0)$. Требуется найти управление $u = u(t) \in U$, доставляющее минимум функционалу вида (1.17):

$$J = \int_0^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t),\, t\big)\, dt, \tag{1.26}$$

где t_1 — заданный момент времени.

Обозначим через $x(t)$ оптимальную траекторию системы (1.16), исходящую из точки x^0, т.е. траекторию, минимизирующую функционал J (1.26). Отметим при этом, что значение $x^1 = x(t_1)$ заранее не задано.

Минимальное значение функционала J на оптимальной траектории обозначим через $S(x(0),\,0) = S(x^0, 0)$. Положение системы в момент времени t будет равно $x(t)$; положение системы в момент времени $t' = t + \Delta t$ обозначим через $x' = x(t') = x(t + \Delta t)$.

В соответствии с принципом оптимальности участок оптимальной траектории от точки $x(t)$ до точки $x(t_1)$ является оптимальной траекторией, которая доставляет минимум функционалу

$$J_t = \int\limits_t^{t_1} f_0(x, u, v)\,dv. \tag{1.27}$$

Обозначим это минимальное значение функционала (1.27) через $S(x(t),\,t) = S(x, t)$.

Также и участок оптимальной траектории от точки $x(t')$, где $t' = t + \Delta t$, до точки $x(t_1)$ является оптимальной траекторией, доставляющей минимум функционалу

$$J_{t'} = \int\limits_{t'}^{t_1} f_0(x, u, v)\,dv. \tag{1.28}$$

Это минимальное значение функционала (1.28) обозначим через $S(x(t'),\ t') = S(x', t')$.

Таким образом, можем написать

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(v)\in U\\ t\le v\le t_1}} \int\limits_t^{t_1} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv, \tag{1.29}$$

где интеграл в соотношении (1.29) представим в виде

$$\int\limits_t^{t_1} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv = \int\limits_t^{t'} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv\ +$$

$$+\int\limits_{t'}^{t_1} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv, \qquad t' = t + \Delta t.$$

Считается, что функция $u(v)$ непрерывна на промежутке $v \in [\,t,\,t'\,]$, $t' = t + \Delta t$, Δt — некоторый малый отрезок времени.

Перепишем выражение (1.29) так:

$$S(x,t)\ = \tag{1.30}$$

$$= \min_{\substack{u(v)\in U\\ t\le v\le t'}} \left(\int\limits_t^{t'} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv + \min_{\substack{u(v)\in U\\ t'\le v\le t_1}} \int\limits_{t'}^{t_1} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv\right).$$

Обратим внимание на то, что второе слагаемое справа есть результат минимизации функционала $J_{t'}$ на множестве всех допустимых управлений U на промежутке времени $v \in [\,t',\,t_1\,]$. Это минимальное значение $S(x', t')$ является в свою очередь функцией от положения системы $x' = x(t')$, которое зависит от управления $u(v)$ на промежутке времени $v \in [\,t,\,t'\,]$.

Функция $u(v),\ v \in [\,t,\,t'\,]$, доставляющая минимальное значение функционалу J_t, определяет собой оптимальную траекторию. Поэтому в соотношении (1.30) минимизируется по $u(v),\ v \in [\,t,\,t'\,]$, все выражение, заключенное справа в скобки.

С учетом введенного обозначения $S(x', t')$ соотношение (1.30) запишем в виде

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(v)\in U\\ t\le v\le t'}} \left(\int\limits_t^{t'} f_0\bigl(x(v),\,u(v),\,v\bigr)\,dv + S(x', t')\right). \tag{1.31}$$

Представим положение x' системы (1.16) так:

$$x' = x(t+\Delta t) = x(t) + \dot x\,\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\ =$$

$$=\ x(t) + f\bigl(x(t),\,u(t),\,t\bigr)\,\Delta t + \alpha_1(\Delta t), \tag{1.32}$$

где через $\alpha_1(\Delta t)$ обозначены малые члены разложения по Δt порядка выше первого. Полагая непрерывность функции S и ее непрерывную дифференцируемость по всем $x_i,\ i = \overline{1, n}$, и t всюду, будем в соответствии с разложением (1.32) иметь

$$S(x',t') = s\big[\,x(t+\Delta t),\, t+\Delta t\,\big] \;=$$

$$=\; S\big[\,x(t) + f\big(x(t),\, u(t),\, t\big)\,\Delta t + \alpha_1(\Delta t),\, t+\Delta t\,\big] \;=$$

$$=\; S(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial x_i}\, f_i(x,u,t)\,\Delta t + \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t}\,\Delta t + \alpha_2(\Delta t), \quad (1.33)$$

где через $\alpha_2(\Delta t)$ обозначены малые от Δt второго порядка и выше.

В обозначениях

$$\nabla S = \operatorname{grad} S = \begin{pmatrix} \partial S/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial S/\partial x_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

соотношение (1.33) с помощью скалярного произведения векторов запишется в виде

$$S(x',t') = S(x,t) + \big(\nabla\, S(x,t),\; f(x,u,t)\big)\Delta t +$$

$$+\; \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t}\,\Delta t + \alpha_2(\Delta t). \quad (1.34)$$

После подстановки выражения (1.34) в соотношение (1.31), найдем

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(v)\in U \\ t\le v\le t'}} \left(\int\limits_t^{t'} f_0\big(x(v),\, u(v),\, v\big)\, dv + S(x,t) + \right.$$

$$\left. +\; \big(\nabla\, S(x,t),\; f(x,u,t)\big)\,\Delta t + \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t}\,\Delta t + \alpha_2(\Delta t) \right). \quad (1.35)$$

Укажем на то, что здесь функция $S(x,t)$ не содержит управления u, поскольку в соответствии с определением (1.29) она получена минимизацией функционала J_t (1.27) по $u(v) \in U$ на промежутке времени $v \in [\,t,\, t_1\,]$. Следовательно, величины $S(x,t)$ и $\big(\partial\, S(x,t)/\partial t\big)\,\Delta t$ в правой части соотношения (1.35) можно вынести

за знак $\min_{u\in U}$ и записать (1.35) следующим образом:

$$-\frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(v)\in U \\ t\le v\le t'}} \left(\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t'} f_0\big(x(v),\, u(v),\, v\big)\, dv + \right.$$

$$\left. +\; \big(\nabla\, S(x,t),\; f(x,u,t)\big) + \frac{\alpha_2(\Delta t)}{\Delta t} \right). \quad (1.36)$$

Переходя в уравнении (1.36) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$-\frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t} = \min_{u\in U} \big[\, f_0(x,u,t) + \big(\nabla\, S(x,t),\; f(x,u,t)\big)\,\big]. \quad (1.37)$$

Уравнение (1.37) называется *уравнением Беллмана* и является основным уравнением динамического программирования. Оно имеет граничное условие $S(x,t_1) = 0$.

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой нелинейное уравнение первого порядка в частных производных типа уравнения Гамильтона–Якоби. Его правая часть — это результат минимизации по u выражения в квадратных скобках и, следовательно, она не зависит от u. Функция $u(t)$, доставляющая указанный минимум в (1.37), является искомым оптимальным управлением $u_0(t)$, удовлетворяющим уравнению (1.37):

$$\frac{d\, S(x,t)}{dt} + f_0(x,u_0,t) = 0,$$

где $x = x(t)$ — оптимальная траектория системы (1.16), соответствующая оптимальному управлению $u_0 = u_0(t)$.

При выводе оптимизационного уравнения Беллмана (1.37) использовалось то обстоятельство, что оптимальная траектория системы (1.16) уже найдена. В предположении гладкости функции $S(x,t)$ любая оптимальная траектория $x(t)$ данной системы будет удовлетворять уравнению (1.37). Итак, уравнение Беллмана с учетом гладкости функции $S(x,t)$ дает необходимое условие оптимальности.

1.2.3. Задача с закрепленным концом траектории и свободным временем. Рассмотрим управляемую систему вида (1.1):

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j\big(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m\big), \qquad j = \overline{1, n},$$

либо

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^n.$$

Надо перевести ее из точки $x^0 = x(t_0)$ в заданную точку $x^1 = x(t_1)$, где момент времени t_1 заранее не известен.

Управление $u = u(t) \in U$ требуется выбрать так, чтобы функционал вида (1.2):

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение. Это значение, являющееся функцией начального положения x^0 системы, обозначим через $S(x^0) = S\big(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\big)$.

Будем считать, что функция $S(x^0)$ непрерывно дифференцируема. Найдем уравнение Беллмана, которому эта функция удовлетворяет. Имеем по определению

$$S(x^0) = S\big(x(t_0)\big) = \min_{u(t)\in U} \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt. \tag{1.38}$$

В правой части соотношения (1.38) интеграл представим в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt + \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt.$$

Тогда выражение (1.38) приобретает запись

$$S\big(x(t_0)\big) = \min_{\substack{u(t)\in U\\ t_0\le t\le t_0+\Delta t}} \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt + \right.$$

$$\left. + \min_{\substack{u(t)\in U\\ t_0+\Delta t\le t\le t_1}} \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt \right), \tag{1.39}$$

где вывод соотношения (1.39) осуществляется аналогичными рассуждениями, что и вывод соотношения (1.30).

В соотношении (1.39) второе слагаемое записывается так:

$$\min_{\substack{u(t)\in U\\ t_0+\Delta t\le t\le t_1}} \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt = S\big(x(t_0 + \Delta t)\big).$$

Поэтому соотношение (1.39) представимо в виде

$$S\big(x(t_0)\big) = \min_{\substack{u(t)\in U\\ t_0\le t\le t_0+\Delta t}} \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt + S\big(x(t_0 + \Delta t)\big) \right). \tag{1.40}$$

Запишем далее, пользуясь уравнением (1.1), следующее разложение:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}\,\Big|_{t=t_0} \Delta t + \alpha_1(\Delta t) =$$
$$= x(t_0) + f\big(x(t_0), u(t_0)\big)\, \Delta t + \alpha_1(\Delta t),$$

и с учетом гладкости функции $S(x^0)$ запишем

$$S\big(x(t_0 + \Delta t)\big) = \tag{1.41}$$

$$= S\big(x(t_0)\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, S(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=x(t_0)} \cdot f_i\big(x(t_0), u(t_0)\big)\, \Delta t + \alpha_2(\Delta t),$$

где $\alpha_1(\Delta t)$, $\alpha_2(\Delta t)$ — малые, порядок которых относительно Δt выше первого.

После подстановки выражения (1.41) в соотношение (1.40), принимая во внимание, что функция $S(x(t_0))$ как результат минимизации по $u \in U$ функционала (1.2) уже не содержит u и ее можно вынести за знак min в (1.40), получим

$$\min_{\substack{u(t)\in U\\ t_0\le t\le t_0+\Delta t}} \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0\big(x(t), u(t)\big)\, dt + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=x(t_0)}\cdot f_i\big(x(t_0),\,u(t_0)\big)\,\Delta t+\alpha_2(\Delta t)\bigg)=0. \qquad (1.42)$$

Поскольку в качестве начального положения системы можно взять любое текущее положение $x(t)$, то из соотношения (1.42) будет вытекать

$$\min_{\substack{u(v)\in U\\ t\le v\le t+\Delta t}}\left(\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} f_0\big(x(v),\,u(v)\big)\,dv\,+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=x(t)}\cdot f_i\big(x(t),\,u(t)\big)+\frac{\alpha_2(\Delta t)}{\Delta t}\right)=0. \qquad (1.43)$$

Так как здесь $\alpha_2(\Delta t)/\Delta t\to 0$ при $\Delta t\to 0$, то, переходя в соотношении (1.43) к пределу при $\Delta t\to 0$, получим уравнение

$$\min_{u\in U}\left(f_0(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\right)=0 \qquad (1.44)$$

с граничным условием $S(x^1)=S\big(x(t_1)\big)=0$. Уравнение (1.44) — это *уравнение Беллмана* в исследуемой задаче с закрепленным концом траектории и свободным временем движения.

Рассмотрим важнейший частный случай этой задачи — задачу об управлении, оптимальном *по быстродействию*, когда требуется определить оптимальное управление $u\in U$, которое за минимально возможное время t_* переводит систему (1.1) из начального положения $x^0=x(t_0)$ в положение начала координат: $x^1=x(t_0+t_*)=0$.

Так как время t_* является функцией начального положения системы: $t_*=t_*(x^0)$, то задача о быстродействии будет частным случаем задачи о минимизации функционала (1.2), где $f_0\big(x(t),\,u(t)\big)\equiv 1$:

$$J=t_1-t_0, \qquad (1.45)$$

т.е. функционал J (1.45) выражает время приведения системы из положения x^0 в положение $x^1=0$. Следовательно,

$$t_*=\min_{u\in U}\,J=\min_{u\in U}\,(t_1-t_0).$$

В предположении, что функция $t_*\big(x_1^0,x_2^0,\,...,\,x_n^0\big)$ является непрерывно дифференцируемой по всем своим переменным, а за начальное положение можно взять любое текущее положение $x(t)$, получим в итоге согласно уравнению (1.44) уравнение

$$\min_{u\in U}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial t_*}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\right)=\min_{u\in U}\,\big(\nabla t_*,\,f(x,u)\big)=-1 \qquad (1.46)$$

с граничным условием $t_*(0,0,\,...,\,0)=0$.

Из уравнения (1.46) можно найти оптимальное управление u_0 в виде функции от $\partial t_*/\partial x_i$, $i=\overline{1,n}$. Подставляя найденное выражение u_0 обратно в уравнение (1.46), найдем уравнение первого порядка с частными производными, куда u уже не входит. Решая далее это уравнение при нулевом граничном условии, определим $u_0=u_0(x)==\ u_0(x_1,x_2,\,...,\,x_n)$.

1.2.4. Достаточные условия оптимальности. Из уравнения Беллмана (1.44) вытекает, что $\forall\,u(t)\in U$, переводящего систему из начального положения $x(t)$ в конечное положение x^1, справедливо неравенство [18]:

$$f_0(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\ge 0,$$

либо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\ge -\,f_0(x,u), \qquad (1.47)$$

где равенство имеет место для оптимального управления $u_0(t)$.

Введем в рассмотрение функцию $\omega(x)$, пользуясь соотношением

$$\omega(x)=-\,S(x).$$

Тогда неравенство (1.47) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\le f_0(x,u),\qquad u\in U. \qquad (1.48)$$

Приведем в заключение параграфа теорему Болтянского [18] о необходимых и достаточных условиях оптимальности для непрерывных управляемых систем, служащую обоснованием метода динамического программирования.

Теорема 1.5. *Пусть M — кусочно-гладкое множество с размерностью $\dim M < n$, расположенное в фазовом пространстве X, а $\omega(x) = \omega(x_1, ..., x_n)$ — непрерывная функция, заданная на X и имеющая в точках, не принадлежащих множеству M, непрерывные производные. Пусть, кроме того, $\omega(x^1) = 0$ для некоторой точки $x^1 \in X$. Предположим также, что для любой точки $x^0 \in X$, где $x^0 \neq x^1$, существует допустимое управление $u(t) = u_{x^0}(t)$, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^1 и удовлетворяющее равенству*

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t)\big)\, dt = -\,\omega(x^0).$$

Тогда для того, чтобы все управления $u_{x^0}(t)$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, x \notin M$ функция $\omega(x)$ удовлетворяла уравнению Беллмана (1.44)*:*

$$\min_{u\in U}\left(f_0(x,u) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}\, f_i(x,u)\right) = 0$$

или, что то же самое, неравенству (1.48):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}\, f_i(x,u) \le f_0(x,u), \qquad u \in U.$$

Таким образом, при условии, что функция $\omega(x)$ является непрерывно дифференцируемой, уравнение Беллмана (1.44) дает необходимое и достаточное условие оптимальности для метода динамического программирования.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.

2. Запишите уравнение Беллмана в задаче с фиксированным временем и свободным правым концом траектории.
3. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленным концом траектории и свободным временем.
4. В чем состоит смысл теоремы Болтянского для непрерывных управляемых систем?

1.3 Вариационная задача оптимального управления

С помощью классического вариационного исчисления в случае открытого множества допустимых управлений U можно с успехом решать различные задачи оптимального управления динамическими процессами [108, 121]. Как известно, к классическому вариационному исчислению относят методы решения вариационных задач, основанные на анализе вариаций (или, иначе, малых смещений) экстремизируемого функционала.

Исследуем простейшую вариационную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории и заданным временем переходного процесса (временем регулирования). Пусть управляемая система описывается на интервале времени $[\,t_0,\, t_1\,]$ дифференциальным уравнением вида (1.16):

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m.$$

Предполагается в уточнение к сказанному, что область допустимых управлений U является множеством всех ограниченных непрерывных вектор-функций $u(t)$, определенных на промежутке времени $[\,t_0,\, t_1\,]$.

Введем подлежащий минимизации по $u \in U$ критерий качества

$$J = V\big(x(t_1),\, t_1\big) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)\, dt, \tag{1.49}$$

где V и L — заданные скалярные непрерывно дифференцируемые соответственно по совокупности переменных x и x, u, t функции. Функция $V(x(t_1),\, t_1)$ называется *функцией конечных состояний.*

Считается также, что вектор-функция f в системе (1.16) непрерывно дифференцируема по своим переменным x, u и t. При заданном t_1 считаем $V(x(t_1),\, t_1) = V(x(t_1))$.

Итак, пусть заданы: объект управления с уравнением (1.16) и начальным условием $x(t_0)$, время окончания переходного процесса t_1 и функционал качества (1.49). *Задачей оптимального управления* для системы (1.16) при всех вышесделанных предположениях является отыскание такого управления $u(t)$ из области допустимых управлений U, при котором функционал J (1.49) достигает минимального значения.

Для решения этой задачи воспользуемся *методом множителей Лагранжа.* Образуем при этом вспомогательный критерий качества по известному правилу

$$J_* = V(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \big[\, L(x,u,t) - \lambda^*(t)\,\varphi \,\big]\, dt, \tag{1.50}$$

где $\varphi = \varphi(\dot{x}, x, u, t) = f(x,u,t) - \dot{x}(t)$ — функция дифференциальной связи $\varphi(\dot{x}, x, u, t) = 0$, образованная уравнением (1.16); здесь $*$ сверху означает операцию транспонирования, а $\lambda(t) = \big(\lambda_1(t),\, ...,\, \lambda_n(t)\big)$ — вектор *множителей Лагранжа.*

Составим далее скалярную функцию

$$H(x,u,t,\lambda) = L(x,u,t) + \lambda^*(t)\, f(x,u,t), \tag{1.51}$$

называемую *гамильтонианом* данной задачи. Тогда, интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части выражения (1.50) с учетом определения (1.51), получим

$$J_* = V(x(t_1)) + \lambda^*(t_0)\, x(t_0) - \lambda^*(t_1)\, x(t_1) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1} \big[\, H(x,u,t,\lambda) + \dot{\lambda}^*(t)\, x(t) \,\big]\, dt. \tag{1.52}$$

Найдем отсюда вариацию функционала J_* (1.52), которая соответствует вариациям вектора управления $u(t)$ и вектора положения системы $x(t)$. Вектор множителей Лагранжа при этом не варьируется, а надлежащим образом выбирается. Имеем в результате

$$\delta J_* = \left[\frac{\partial\, V(x(t_1))}{\partial x(t_1)} - \lambda^*(t_1) \right] \delta x(t_1) + \lambda^*(t_0)\, \delta x(t_0) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial\, H(x,u,t,\lambda)}{\partial x(t)} + \dot{\lambda}^*(t) \right] \delta x(t) + \frac{\partial\, H(x,u,t,\lambda)}{\partial u(t)}\, \delta u(t) \right\} dt. \tag{1.53}$$

Чтобы исключить влияние вариаций $\delta\, x(t)$, вызванных вариациями по управлению $\delta\, u(t)$, на вариации критерия качества δJ_*, выберем векторный множитель $\lambda(t)$ таким образом, чтобы коэффициенты при $\delta\, x(t)$ и $\delta\, x(t_1)$ обратились в нуль. Получим тогда

$$\dot{\lambda}(t) = -\left(\frac{\partial\, H(x,u,t,\lambda)}{\partial x(t)} \right)^*, \qquad \lambda(t_1) = \left(\frac{\partial\, V(x(t_1))}{\partial x(t_1)} \right)^*. \tag{1.54}$$

Выбирая с помощью этой системы дифференциальных уравнений и соответствующего граничного условия множители $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, уравнение (1.53) преобразуем к виду

$$\delta J_* = \lambda^*(t_0)\, \delta x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\, H(x,u,t,\lambda)}{\partial u(t)}\, \delta u(t)\, dt. \tag{1.55}$$

Выражение (1.55) называется *первой вариацией* вспомогательного критерия качества J_*.

Так как на решениях управляемой системы (1.16) $J_* = J$, то $\delta J_* = \delta J$. Поэтому если функционал J достигает экстремума, то $\delta J = 0$ для произвольных $\delta\, u(t)$. Принимая во внимание, что начальное значение $x(t_0)$ задано и $\delta\, x(t_0) = 0$, а $u(t) \in U$, где U — множество ограниченных непрерывных вектор-функций, можем записать необходимые условия стационарности критерия качества J в виде

$$\frac{\partial\, H(x,u,t,\lambda)}{\partial u(t)} = 0, \tag{1.56}$$

где $t \in [\, t_0,\, t_1\,]$. В вариационном исчислении уравнения (1.54), (1.56) известны как *уравнения Эйлера–Лагранжа.*

Следовательно, приходим к заключению: для того, чтобы найти оптимальное управление $u_0(t)$, при котором критерий качества

J (1.49) принимает стационарное значение, надо решить краевую задачу для системы $2n$ дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x(t)}\right)^{*} \lambda(t) - \left(\frac{\partial L(x, u, t)}{\partial x(t)}\right)^{*},$$

где управление $u_0(t)$ определяется из уравнения (1.56):

$$\left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u(t)}\right)^{*} \lambda(t) + \left(\frac{\partial L(x, u, t)}{\partial u(t)}\right)^{*} = 0,$$

с n краевыми условиями $x(t_0) = x^0$ на левом конце и с n краевыми условиями $\lambda(t_1) = \big(\partial V(x(t_1))/\partial x(t_1)\big)^{*}$ на правом конце.

Отметим, что для достижения локального минимума функционалом J одного условия $\partial H/\partial u = 0$ недостаточно. Необходимо, чтобы *вторая вариация* функционала качества J на решениях системы принимала неотрицательные значения $\forall\, \delta u(t)$, т.е.

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\, \delta\, x^{*}(t_1)\, \frac{\partial^2 V(x(t_1))}{\partial\, x^2(t_1)}\, \delta\, x(t_1) + \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} \delta\, x(t) \\ \delta\, u(t) \end{pmatrix}^{*} G \begin{pmatrix} \delta\, x(t) \\ \delta\, u(t) \end{pmatrix} dt \geq 0,$$

где через G обозначена матрица

$$G = \begin{pmatrix} \partial^2 H/\partial x^2 & \partial^2 H/\partial x\, \partial u \\ \partial^2 H/\partial u\, \partial x & \partial^2 H/\partial u^2 \end{pmatrix},$$

при условии, что $\delta\, \big(\dot{x}(t) - f(x, u, t)\big) = 0$. Более подробно с техникой вычисления и применения второй вариации $\delta^2 J$ для задач синтеза оптимального управления можно познакомиться по работе [121].

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем состоит смысл метода множителей Лагранжа?

2. Запишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

1.4 Связь методов оптимального управления

Между рассмотренными выше методами выбора оптимального управления существует глубокая внутренняя связь [108, 117, 138]. Установление этих взаимозависимостей помогает лучше понять структуру и возможности каждого из этих методов в отдельности.

1.4.1. Связь принципа максимума с методом динамического программирования. Ставится задача с фиксированными концами траектории движения и свободным временем переходного процесса. Управляемая система описывается уравнением вида (1.1):

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1,\, ...,\, x_n, u_1,\, ...,\, u_m), \qquad j = \overline{1, n},$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m.$$

Надо перевести систему (1.1) из заданной точки $x^0 = x(t_0)$ фазового пространства X в заданную точку $x^1 = x(t_1)$, где конечный момент времени t_1 не фиксирован. Управление $u = u(t) \in U$ требуется выбрать так, чтобы функционал вида (1.2):

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t)\big)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

Заметим, что полученное при сделанных условиях наименьшее возможное значение $S(x^0) = S(x(t_0))$ функционала J (1.2) будет функцией начального положения системы $x^0 = x(t_0)$, а именно: $S(x^0) = S\big(x_1^0,\, ...,\, x_n^0\big)$.

Ранее, полагая, что функция $S(x)$ непрерывно дифференцируема по всем своим переменным, было установлено, что функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана с частными производными первого порядка вида (1.44):

$$\min_{u\in U}\left(f_0(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\right)=0.$$

Обозначим через $x_0(t)$ скалярную функцию, определяемую дифференциальным уравнением (1.3):

$$\frac{dx_0}{dt}=f_0(x_1,\,...,\,x_n,u_1,\,...,\,u_m)=f_0(x,u)$$

с начальным условием $x_0(t_0)=0$. Тогда из написанных выше соотношений вытекает, что функционал J представим следующим образом: $J=x_0(t_1)$.

Введем далее в рассмотрение векторы $\bar{x},\bar{f}\in R^{n+1}$ и скалярную функцию $\bar{S}(\bar{x})$:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \bar{f}=\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\\vdots\\f_n\end{pmatrix},\qquad \bar{S}(\bar{x})=x_0+S(x),\tag{1.57}$$

где $S(x)=S(x_1,x_2,\,...,\,x_n)$. В этих обозначениях уравнение Беллмана (1.44) будет выглядеть так:

$$\min_{u\in U}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\bar{S}(\bar{x})}{\partial x_i}\,f_i(x,u)=0.\tag{1.58}$$

При умножении уравнения (1.58) на -1 знак min надо поменять на знак max и тогда получим

$$\max_{u\in U}\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{\partial\bar{S}(\bar{x})}{\partial x_i}\,f_i(x,u)\right)=0.\tag{1.59}$$

Обозначая $\omega(x)=-S(x)$, $\bar{\omega}(\bar{x})=-\bar{S}(\bar{x})$, уравнение Беллмана (1.59) приведем к виду

$$\max_{u\in U}\,g(\bar{x},u)=0,\qquad g(\bar{x},u)\equiv\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\bar{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i}\,f_i(x,u),\tag{1.60}$$

где верхняя грань достигается для некоторого $u\in U$ в момент выхода из точки x; это значение u является оптимальным управлением.

Будем предполагать также, что функция $\omega(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функции $f_i(x,u)$ непрерывно дифференцируемы по x_j, т.е. существуют непрерывные частные производные $\partial^2\omega(x)/\partial x_i\,\partial x_j$, $i,j=\overline{1,n}$, и $\partial f_i(x,u)/\partial x_j$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^1 по соответствующей оптимальной траектории $x(t)$, $t\in[\,t_0,\,t_1\,]$. Для фиксированного момента времени $t\in[\,t_0,\,t_1\,]$ имеем функцию $g(\bar{x},\,u(t))$ (1.60) переменного $\bar{x}$. Согласно данным выше предположениям функция $g(\bar{x},\,u(t))$ непрерывно дифференцируема по переменным x_i, $i=\overline{0,n}$. Эти производные равны

$$\frac{\partial\,g(\bar{x},\,u(t))}{\partial x_k}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\bar{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i\,\partial x_k}\,f_i(x,\,u(t))\,+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\bar{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i}\,\frac{\partial f_i(x,\,u(t))}{\partial x_k},\qquad k=\overline{0,n}.\tag{1.61}$$

Для любого оптимального движения: оптимального управления и соответствующей ему оптимальной траектории $\big(u(t),\,x(t)\big)$ в силу уравнения (1.60) вытекает, что $g(\bar{x}(t),\,u(t))\equiv0$, а для любого неоптимального движения (u,x) с неоптимальным, но допустимым управлением на неоптимальной траектории выполняется неравенство $g(\bar{x},u)\le0$.

Таким образом, функция $g(\bar{x},\,u(t))$ переменного x достигает в точке $\bar{x}=\bar{x}(t)$ в фиксированный момент времени t максимума. Следовательно, ее частные производные по x_i, $i=\overline{0,n}$, в этой точке равны нулю. Итак, вдоль оптимальной траектории в соответствии с соотношениями (1.61) должны выполняться уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 \bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_i\,\partial x_k}\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_i}\,\frac{\partial\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big)}{\partial x_k}=0, \tag{1.62}$$

где $k=\overline{0,n},\ t\in[\,t_0,\,t_1\,]$.

Поскольку с учетом уравнений (1.1), (1.3) оптимальное движение $\big(u(t),\,x(t)\big)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\,x_i(t)}{dt}=f_i\big(x(t),\,u(t)\big),\qquad i=\overline{0,n},$$

то отсюда получим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_k}\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{d\,x_i(t)}{dt}\ =$$

$$=\ \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_i\,\partial x_k}\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big). \tag{1.63}$$

Следовательно, принимая во внимание соотношение (1.63), уравнения (1.62) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_i}\,\frac{\partial\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big)}{\partial x_k}=0,\ \ k=\overline{0,n}. \tag{1.64}$$

Введем обозначение $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n}$, для следующей функции:

$$\psi_k(t)=\frac{\partial\,\bar\omega(\bar x(t))}{\partial x_k},\qquad k=\overline{0,n}. \tag{1.65}$$

Эти функции на оптимальной траектории в силу уравнений (1.64) удовлетворяют системе линейных дифференциальных урав-

нений

$$\frac{d\,\psi_k(t)}{dt}=-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big)}{\partial x_k}\,\psi_i(t),\qquad k=\overline{0,n}. \tag{1.66}$$

В соответствии с обозначениями (1.57), $\bar\omega(\bar x)$, (1.65) имеем: $\psi_0(t)=-1$, а для $k=0$ уравнение (1.66) приобретает простейшую форму: $d\,\psi_0(t)/dt=0$, так как функции $f_i\big(x(t),\,u(t)\big)$, $i=\overline{0,n}$, не зависят от x_0.

Таким образом, вектор ψ, определяемый соотношениями (1.65), имеет следующие компоненты:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial\bar\omega/\partial x_0\\ \partial\bar\omega/\partial x_1\\ \vdots\\ \partial\bar\omega/\partial x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \partial\bar\omega/\partial x_1\\ \vdots\\ \partial\bar\omega/\partial x_n\end{pmatrix}, \tag{1.67}$$

а это значит, что согласно соотношениям (1.57), (1.65), (1.67) основное уравнение динамического программирования – уравнение Беллмана (1.60) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=0}^{n}\psi_i(t)\, f_i\big(x(t),\,u(t)\big)\ = \tag{1.68}$$

$$=\ \max_{u\in U}\sum_{i=0}^{n}\psi_i(t)\, f_i\big(x(t),\,u\big)=\max_{u\in U}\big(\psi(t),\,\bar f(x(t),\,u)\big)=0.$$

Если теперь ввести функцию $\bar H(\psi,x,u)$ по правилу

$$\bar H(\psi,x,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\, f_i(x,u)=\big(\psi,\,\bar f(x,u)\big),$$

зависящую от $2n+m+1$ переменных $\psi_0,\,\psi_1,\,\ldots,\,\psi_n,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,u_1,\,\ldots,\,u_m$, то уравнение (1.68) запишется так:

$$\max_{u\in U}\ \bar H(\psi,x,u)=0. \tag{1.69}$$

Отсюда следует, что оптимальное управление $u(t)$ доставляет $\forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$ функции $\bar{H}$ наибольшее значение по сравнению с любым другим допустимым управлением, переводящим систему из точки x^0 в точку x^1. Этот максимум имеет постоянное нулевое значене в любой точке оптимальной траектории, т.е.

$$\bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t)\big) \equiv 0. \tag{1.70}$$

Заметим при этом, что финальные соотношения (1.68) – (1.70) получены в предположении непрерывной дифференцируемости по всем своим аргументам функции $S(x_1,\, ...,\, x_n)$.

Остановимся кратко на установлении связи между принципом максимума и методом динамического программирования в случае неавтономной управляемой системы вида (1.16):

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad x, f \in R^n, \quad u \in U \subset R^m,$$

где вместо переменной времени t введем координату x_{n+1}, задаваемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1} = 1.$$

Запишем минимизируемый функционал качества

$$J = V\big(x(t_1),\, t_1\big) + \int\limits_0^{t_1} f_0(x,u,t)\, dt \tag{1.71}$$

с фиксированным моментом времени t_1; $V\big(x(t_1),\, t_1\big) = V(x(t_1))$.

Введем также координату x_0 с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x,u,x_{n+1}).$$

Очевидно, что если $V(x(t_1)) = 0$, то задача минимизации по $u \in U$ функционала J (1.71) эквивалентна минимизации координаты $x_0(t_1)$.

Обозначим векторы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ \partial S/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial S/\partial x_n \\ \partial S/\partial x_{n+1} \end{pmatrix} = -\,\bar{\psi}. \tag{1.72}$$

Тогда в обозначении

$$\bar{S} = \bar{S}(x_0, x_1,\, ...,\, x_n, x_{n+1}) = S(x_1,\, ..., x_n, x_{n+1}) + x_0,$$

равенство (1.72) примет вид

$$\bar{p} = \frac{d\bar{S}}{d\bar{x}} = -\,\bar{\psi}. \tag{1.73}$$

В результате несложных преобразований дифференциальное уравнение Гамильтона–Якоби отсюда можно записать так:

$$\min_{u\in U}\, (\bar{p},\, \bar{f}) = -\max_{u\in U}\, (\bar{\psi},\, \bar{f}) = 0, \tag{1.74}$$

т.е. минимум положительной функции равен взятому со знаком минус максимуму совпадающей с ней по модулю отрицательной функции, что может иметь место лишь в случае равенства нулю (1.74).

Для гамильтоновских функций состояния (гамильтонианов) $\bar{H}_p$ и $\bar{H}_\psi$:

$$\bar{H}_p = \bar{p}^*\bar{f}, \qquad \bar{H}_\psi = \bar{\psi}^*\bar{f}, \qquad \bar{H}_p = -\,\bar{H}_\psi$$

из равенств (1.74) получим два уравнения, соответствующих принципам минимума и максимума Понтрягина

$$\min_{u\in U}\, \bar{H}_p = 0, \qquad \max_{u\in U}\, \bar{H}_\psi = 0. \tag{1.75}$$

Решая одну из этих задач, найдем для произвольного t оптимальное управление $u(t)$, где зависимость функций $\bar{H}_p$, $\bar{H}_\psi$ от управления u определяется зависимостью вектор-функции f от u.

Отметим также, что в согласии с принципом Понтрягина (1.75) надо выбрать вектор управления u так, чтобы минимизировать проекцию вектора скорости $\dot{\bar{x}} = \bar{f}$ на нормаль к изоповерхности $\bar{S} =$

const или максимизировать эту проекцию на вектор отрицательной нормали (так как в силу уравнения (1.73) имеем $\bar{p} = \operatorname{grad} \bar{S} = -\bar{\psi}$) и обратить эту проекцию в нуль. Отсюда следует ортогональность вектора $\operatorname{grad} \bar{S}$ вдоль оптимального движения системы к вектору касательной $\dot{\bar{x}} = \bar{f}$ в пространстве состояний R^{n+2}.

Уравнение динамического программирования Гамильтона–Якоби–Беллмана (уравнение Беллмана (1.37)) можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_* = 0, \tag{1.76}$$

где

$$H_* = \min_{u \in U} H_p = -\min_{u \in U} H_\psi,$$

$$H_p = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^* f + f_0 = p^* f + f_0 = -(\psi^* f - f_0) = -H_\psi, \tag{1.77}$$

и все написанные векторы x, f, $\partial S / \partial x$, p, ψ имеют размерность n.

Метод динамического программирования требует решения уравнения с частными производными относительно функции S (или $\bar{S}$) (1.76). При использовании оптимизационного принципа Понтрягина достаточно найти соответствующие оптимальной траектории решения $p = -\psi$ (или $\bar{p} = -\bar{\psi}$) вспомогательной системы дифференциальных уравнений.

В частности, в неавтономном случае задачи на быстродействие $f_0 = 1$, $dS/dt = 0$. Из уравнения (1.76) получим

$$\min_{u \in U} \left(\left(\frac{dS}{dx}\right)^* f + 1 \right) = 0. \tag{1.78}$$

Учитывая соотношения (1.77), найдем отсюда

$$\min_{u \in U} H_p = 0, \qquad \max_{u \in U} H_\psi = 0.$$

Из уравнения (1.78) видно, что в n–мерном пространстве состояний вектор dS/dx не ортогонален к вектору касательной $\dot{x} = f$; их скалярное произведение вдоль оптимального движения равно -1.

В данной задаче имеем

$$S\big(x(t),\, t\big) = \min_{u \in U} \int\limits_t^{t_1} 1\, dv = t_* - t,$$

где t_* — минимальное время переходного процесса. При возрастании t величина S убывает. Уравнению $S(x(t),\, t) = \text{const}$ удовлетворяют изоповерхности $t_* - t = \text{const}$, окружающие точку $x(t_1)$.

1.4.2. Связь методов оптимального управления с вариационным исчислением. В монографии [108] показано, что принцип максимума является обобщением задачи Лагранжа в вариационном исчислении и равносилен ей в случае открытого множества допустимых управлений U.

Для начала рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Выведем из принципа максимума необходимые условия экстремума функционала

$$J = J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t)\, dt \tag{1.79}$$

для простейшей задачи вариационного исчисления, которая состоит в нахождении экстремалей функционала (1.79) при заданных, закрепленных краевых условиях $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ в фиксированные моменты времени t_0, t_1. Считается, что функция f непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Пусть имеется управляемая система с уравнением движения

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1.80}$$

и интегральный функционал

$$J = J(x, u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x_1,\, ...,\, x_n, u_1,\, ...,\, u_n, t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x, u, t)\, dt, \tag{1.81}$$

где $u = (u_1,\, ...,\, u_n)$ — управление, выбираемое из класса ограниченных измеримых вектор-функций.

Отметим, что всякая оптимальная траектория оптимальной задачи (1.80), (1.81) с фиксированными концами и временем является экстремалью интеграла (1.79) и наоборот (в силу уравнений (1.80) достаточно величины $u_i(t)$ в интеграле (1.81) заменить на $\dot{x}_i(t)$). Отсюда принцип максимума как необходимое условие оптимальности является одновременно и необходимым условием, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью интеграла (1.79). Это обстоятельство позволяет применять принцип максимума для решения вариационной задачи (1.79).

С этой целью по теореме 1.3 надо составить уравнения относительно вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ и функцию $\bar{H}$, которые с учетом уравнений (1.80) имеют вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\,\psi_0\,\frac{\partial\, f(x,u,t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.82}$$

$$\bar{H} = \psi_0\, f(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i.$$

Запишем условие максимума в соответствии с теоремой 1.3:

$$\bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t),\, t\big) = \max_{u\in U}\left(\psi_0\, f\big(x(t), u, t\big) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\, u_i\right), \tag{1.83}$$

где U — открытое множество допустимых управлений в R^n и точка максимума $u = u(t)$ функции $\bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u,\, t\big)$ переменного $u \in U$ является ее стационарной точкой.

Тогда из выражения (1.83) следует выполнение соотношений

$$\frac{\bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u(t), t\big)}{\partial u_i} = \psi_0\,\frac{\partial\, f\big(x(t),\, u(t), t\big)}{\partial u_i} + \psi_i(t) = 0,$$

где $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\psi_0 \neq 0$ (иначе бы имели $\psi_i(t) \equiv 0,\ i = \overline{0,n}$). Поэтому можно считать, что $\psi_0 = -\,1$, так как по теореме 1.3 $\psi_0 = \mathrm{const} \leq 0$. Отсюда получаем

$$\psi_i(t) = \frac{\partial\, f\big(x(t),\, u(t), t\big)}{\partial u_i}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{1.84}$$

С другой стороны, после подстановки в уравнение (1.82) значения $\psi_0 = -\,1$ и интегрирования, найдем, что

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\, f\big(x(v),\, u(v), v\big)}{\partial x_i}\, dv, \tag{1.85}$$

где $i = \overline{1,n},\ t \in [\,t_0,\, t_1\,]$. Из соотношений (1.84), (1.85) получим *уравнения Эйлера в интегральной форме*, где вместо $u_i(t)$ подставлены значения $\dot{x}_i(t)$:

$$\frac{\partial\, f\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big)}{\partial u_i} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\, f\big(x(v),\, \dot{x}(v),\, v\big)}{\partial x_i}\, dv + \psi_i(t_0), \quad i = \overline{1,n}.$$

Считая, что функция f и экстремаль $x(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, получим после дифференцирования по t *уравнения Эйлера в стандартной форме*

$$\frac{\partial\, f\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\, f\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big)}{\partial u_i}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Предположим, что: 1) функция $f(x,u,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменным $u_i,\ i = \overline{1,n}$; 2) функция

$$\bar{H}\big(\psi(t),\, x(t), u, t\big) = -\, f\big(x(t),\, u, t\big) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\, u_i$$

в качестве функции переменного u имеет в точке $u = u_0$ максимум.

Тогда в этих условиях $\forall\, \xi_i,\ i = \overline{1,n}$, квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\, \bar{H}\big(\psi(t),\, x(t),\, u_0, t\big)}{\partial u_i\, \partial u_j}\, \xi_i\xi_j = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\, f(x(t),\, u_0, t)}{\partial u_i\, \partial u_j}\, \xi_i\xi_j \leq 0.$$

Поэтому из условия максимума (1.83) следует выполнение неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\, f\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, \big)}{\partial u_i\, \partial u_j}\, \xi_i\xi_j \geq 0. \tag{1.86}$$

Написанное *условие Лежандра* (1.86) является необходимым для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью интеграла (1.79).

Пусть $\big(u(t), x(t)\big)$ — оптимальное решение задачи (1.80), (1.81), где $t \in [t_0, t_1]$, $\bar{\psi}(t) = (-1, \psi(t)) = \big(-1, \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\big)$. Обозначим при фиксированных $\bar{\psi}, x, t$:

$$M(\psi, x, t) = \sup_{u \in U} \bar{H}(\bar{\psi}, x, u, t) = \sup_{u \in U} \Big(-f(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i\Big).$$

Будем считать, что уравнение

$$\bar{H}(\bar{\psi}, x, u, t) = M(\psi, x, t) \tag{1.87}$$

имеет единственное, непрерывно дифференцируемое по своим аргументам решение $u = u(\psi, x, t)$. В этих условиях переменные $x = (x_1, ..., x_n)$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$ называются *каноническими переменными* рассматриваемой оптимальной задачи, а функция

$$H(\psi, x, t) = -f\big(x, u(\psi, x, t), t\big) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, u_i(\psi, x, t)$$

называется *функцией Гамильтона.*

Оптимальное управление $u(t)$ удовлетворяет условию максимума (1.83), а $u(\psi, x, t)$ — это единственное решение уравнения (1.87). Поэтому

$$u(t) = u\big(\psi(t), x(t), t\big) = \dot{x}(t), \tag{1.88}$$

либо

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} u\big(\psi(v), x(v), v\big)\, dv.$$

Из соотношения (1.87) вытекает, что частные производные функции $\bar{H}(\bar{\psi}, x, u, t)$ по u_i, $i = \overline{1, n}$, обращаются внуль при $u = u(\psi, x, t)$:

$$-\frac{\partial f\big(x, u(\psi, x, t), t\big)}{\partial u_i} + \psi_i = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Значит,

$$\frac{\partial H(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u_k(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} + u_i(\psi, x, t) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k \frac{\partial u_k(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} =$$

$$= u_i(\psi, x, t) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\psi_k - \frac{\partial f}{\partial u_k}\Big) \frac{\partial u_k}{\partial \psi_i} = u_i(\psi, x, t),$$

$$\frac{\partial H(\psi, x, t)}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u(\psi, x, t)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \psi_k \frac{\partial u_k(\psi, xt)}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\psi_k - \frac{\partial f}{\partial u_k}\Big) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial f\big(x, u(\psi, x, t), t\big)}{\partial x_i}.$$

Из полученных соотношений с учетом уравнений (1.82), (1.88) приходим к *каноническим уравнениям Эйлера–Гамильтона*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Укажем также, что с помощью теоремы 1.3 на основе принципа максимума можно, проводя аналогичные рассуждения, доказать *правило множителей Лагранжа* для условной вариационной задачи с интегралом (1.79).

Рассматривается система k дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t), ..., x_n(t)$:

$$\dot{x}_i - f_i\big(x_1, ..., x_n, \dot{x}_{k+1}, ..., \dot{x}_n, t\big) \equiv$$

$$\equiv \varphi_i\big(x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n, t\big) = 0, \qquad i = \overline{1, k} < n, \tag{1.89}$$

где функции f_i считаются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. *Задача Лагранжа* в виде условной вариационной задачи с закрепленными концами при заданных краевых условиях x^0, x^1 и заданной системе уравнений (1.89) состоит в определении всех экстремалей интеграла (1.79).

Данная задача сводится к некоторой оптимальной задаче для системы n–го порядка

$$\dot{x}_i = f_i(x, v, t), \qquad \dot{x}_{k+j} = v_j, \tag{1.90}$$

где $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$, $m = n - k$; здесь $v = (v_1, ..., v_m)$ — вектор управлений из множества U измеримых ограниченных вектор-функций.

Надо найти оптимальное управление $v(t)$, которому соответствует траектория $x(t)$ системы (1.90) с краевыми условиями x^0, x^1, минимизирующие интеграл

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t),\, v(t),\, t\big)\, dt,$$

где обозначено

$$f_0(x, v, t) \equiv f\big[\, x,\, f_1(x, v, t),\, ...,\, f_k(x, v, t),\, v_1,\, ...,\, v_m,\, t\,\big],$$

а функция $f(x, u_1, ..., u_n, t)$ — это подинтегральная функция (1.79), $x = (x_1, ..., x_n)$.

Хорошо видно, что любое решение этой оптимальной задачи с фиксированным временем переходного процесса является экстремалью для данной задачи Лагранжа и, наоборот, любая экстремаль $x(t) = \big(x_1(t), ..., x_n(t)\big)$ задачи Лагранжа является оптимальной кривой для оптимального управления $(v_1(t), ..., v_m(t)) = \big(\dot{x}_{k+1}(t), ..., \dot{x}_n(t)\big)$.

Обратимся к схеме получения из принципа максимума правила множителей Лагранжа (подробности см. в книге [108]). Будем считать, что $(x(t), v(t))$ — оптимальное движение системы (1.90) с краевыми условиями x^0, x^1, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, а $\bar{\psi}(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\big)$ — ненулевая непрерывная вектор-функция для функции $\bar{H}(\bar{\psi}, x, v, t)$:

$$\bar{H}(\bar{\psi}, x, v, t) = \psi_0\, f_0(x, v, t) + \sum_{i=1}^{k} \psi_i f_i + \sum_{i=1}^{n-k} \psi_{k+i} v_i.$$

В соответствии с определением функции $f_0(x, v, t)$ можем написать систему уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i}\,\frac{\partial f_i}{\partial x_l}, \qquad l = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_j} = \frac{\partial f}{\partial u_{k+j}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i}\,\frac{\partial f_i}{\partial v_j}, \qquad j = \overline{1,n-k}.$$

Отсюда система уравнений для вспомогательных неизвестных ψ_i приобретает вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_j}\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\psi_0 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\psi_j, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда из условия максимума по теореме 1.3 получим

$$\frac{\partial\, \bar{H}\big(\bar{\psi}(t),\, x(t),\, v(t),\, t\big)}{\partial v_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{k+j}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i}\,\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right)\psi_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial v_j}\,\psi_i + \psi_{k+j} = 0, \qquad j = \overline{1,n-k}.$$

Пользуясь написанными выше соотношениями, можно сформулировать и доказать [108] следующее правило множителей Лагранжа.

Теорема 1.6. *Пусть непрерывная кривая* $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in \in [\,t_0,\, t_1\,]$, *является экстремалью для интеграла* (1.79) *при заданных краевых условиях* $x^0 = x(t_0)$, $x^1 = x(t_1)$ *и заданной системе уравнений* (1.89). *Тогда найдутся* k *таких измеримых и ограниченных функций* $\lambda_i(t)$, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$ (*множителей Лагранжа*) *и такая постоянная* $\psi_0 \le 0$, *что функция*

$$F\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big) = -\,\psi_0\, f\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\, \varphi_i\big(x(t),\, \dot{x}(t),\, t\big)$$

удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial F\big(x(t),\,\dot x(t),\,t\big)}{\partial \dot x_i}=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial F\big(x(s),\,\dot x(s),\,s\big)}{\partial x_i}\,ds+c_i,\qquad i=\overline{1,n},$$

где c_i — постоянные интегрирования.

Наконец, установим связь метода динамического программирования с вариационным исчислением. Запишем уравнение Беллмана (1.37) в виде

$$\frac{\partial S(x(t),\,t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(x(t),\,t)}{\partial x}\right)^{*}\dot x(t)+f_0\big(x(t),\,\dot x(t),\,u(t),\,t\big)=0,$$

либо в сокращенной записи

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{*}\dot x+f_0=0 \tag{1.91}$$

с целевой функцией $f_0(x,\dot x,u)$ в интегральном функционале качества. Здесь $u(t)$ — оптимальное управление, $x(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория, $\dot x(t)=f\big(x(t),\,u(t),\,t\big)$ — уравнение движения, $t\in[\,0,\,t_1\,]$.

Будем считать, что $U=R^n$ и ограничения на вектор-функцию $u\in U$ отсутствуют. После дифференцирования уравнения (1.91) по вектору скорости $\dot x=\dot x(t)$ получим

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial f_0}{\partial \dot x}=0. \tag{1.92}$$

Возьмем в сокращенной записи полную производную функции в левой части соотношения (1.92) по t:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial x}+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial x}\right)^{*}\dot x+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot x}\right)=0.$$

Запишем также частную производную по x левой части соотношения (1.91):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial t}+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial x}\right)^{*}\dot x+\frac{\partial f_0}{\partial x}=0.$$

Сравнение двух последних равенств приводит к уравнению Эйлера–Лагранжа в вариационном исчислении

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot x}=0$$

в предположении непрерывности всех частных производных второго порядка.

Выведем, исходя из метода динамического программирования, некоторые известные в вариационном исчислении соотношения. Соотношение (1.92) дает необходимое условие локального экстремума выражения

$$W=\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{*}\dot x+f_0 \tag{1.93}$$

в точке $\dot x=\dot x(t)$. В самом деле, дифференцируя выражение W (1.93) по векторной переменной $\dot x$ и приравнивая эту частную производную к нулю, получим условие (1.92).

Продифференцировав вторично выражение (1.93) по $\dot x$ (или продифференцировав соотношение (1.92) один раз по $\dot x$), получим необходимое условие минимума выражения W (1.92), а именно

$$\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot x\,\partial \dot x}\right|_{\dot x=\dot x(t)}\geq 0,$$

т.е. условие неотрицательной определенности соответствующей матрицы частных производных второго порядка (условие Лежандра).

Если экстремум совпадает с абсолютным минимумом, то для выражения W (1.93) неравенство

$$\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^{*}\dot{\bar x}+f_0(x,\dot{\bar x},t)>\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^{*}\dot x+f_0(x,\dot x,t) \tag{1.94}$$

выполняется $\forall\,\dot{\bar x}\neq\dot x$, где $\dot x$ — скорость системы, соответствующая оптимальной траектории $x=x(t)$.

Запишем неравенство (1.94) в виде

$$\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^{*}\big(\dot{\bar x}-\dot x\big)+f_0(x,\dot{\bar x},t)-f_0(x,\dot x,t)>0.$$

Подставляя сюда условие экстремума (1.92), получим неравенство

$$f_0(x,\dot{\bar{x}},t) - f_0(x,\dot{x},t) - \left(\frac{\partial f_0(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}}\right)^* \bigg|_{\dot{x}=\dot{x}(t)} \cdot \left(\dot{\bar{x}} - \dot{x}\right) > 0,$$

совпадающее с условием Вейерштрасса в вариационном исчислении.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем выражается связь принципа максимума с методом динамического программирования?
2. В чем выражается связь методов оптимального управления с вариационным исчислением?
3. В чем выражается правило множителей Лагранжа?

Глава 2

Аналитическая механика и теория оптимального управления

Эта глава посвящена обзору ряда работ, в которых средствами аналитической механики демонстрируются возможности получения необходимых условий оптимальности режимов функционирования для широкого класса управляемых динамических систем. Основное достижение авторов этих работ, по-видимому, заключается в осознании обобщающей роли и фундаментальности вариационных принципов аналитической механики для целей и дальнейшего развития теории оптимального управления.

Впрочем, на данную тему (имеется в виду роль и значение приемов механики для использования в задачах оптимизации) шел разговор и раньше в предыдущих главах, но сейчас настало время для более полного и глубокого обзора применимости методов аналитической механики в оптимальном управлении.

На аналогию между вариационными принципами механики и принципом максимума для оптимальных динамических систем управления было указано в работе [108]. В дальнейшем развитие этой плодотворной идеи получило свое логическое продолжение в основном по двум направлениям: на использовании вариационных принципов с учетом достижений в области развития принципа максимума Понтрягина [56, 58, 113] и принципа оптимальности Беллмана [58, 109–111]. С некоторыми другими подходами в плане обнаружения связи между задачами механики и оптимального управления можно познакомиться по работам [57, 112, 114, 149].

В § 2.1 на основе принципа освобождения, когда формируется силовое поле для управляемого движения системы с заданными ограничениями, изложена схема сведения задачи оптимального управления к вариационной задаче с функционалом действия по Гамильтону, определяющего поле сил, реализующее оптимальное управляемое движение системы.

Данный подход может рассматриваться как естественное обобщение задач математического программирования на динамические задачи оптимизации, когда аналогом принципа минимума потенциальной энергии (термодинамического потенциала) выступает принцип наименьшего действия.

В § 2.2 изучается метод получения необходимых условий оптимальности для управляемых систем с использованием прямой аналогии между вариационными принципами механики и принципом максимума Понтрягина. С учетом уравнений связей составляется функционал действия. Его варьирование по всем переменным и приравнивание результата к нулю приводит в итоге к обоснованию принципа максимума. В параграфе рассмотрен также случай с разрывными правыми частями в уравнениях движения управляемой системы (в уравнениях дифференциальных связей).

В § 2.3 обсуждается принцип наименьшего действия совместно с принципом освобождаемости от связей в применении к механическим задачам оптимального управления. Осуществляется вывод уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана для динамических задач оптимизации управляемого движения. Рассмотрен также принцип оптимальности Кротова в терминах аналитической механики. Наряду с этим выявляются связи между функциями Гамильтона, Беллмана, Розоноэра и Кротова.

В § 2.4 представлен минимаксный принцип механики в качестве одного из фундаментальных принципов, позволяющих получить описание решений краевых задач для уравнений механики в форме Лагранжа. Устанавливается связь минимаксного принципа с гамильтонианом решения уравнения Гамильтона–Якоби, а при наличии управляемой механической системы Лагранжа в задаче оптимального управления — с необходимыми условиями принципа максимума Понтрягина.

2.1 Принцип Гамильтона в задачах оптимального управления

В работе [113] предложена методика сведения задачи оптимального управления к построению функционала действия по Гамильтону, задающего силовое поле, в котором реализуется оптимальное управляемое движение системы. В основу метода положен *принцип освобождения*, состоящий в построении поля сил, в котором движение системы подчиняется ограничениям задачи оптимального управления. Рассмотрим результаты этой работы подробнее.

2.1.1. Принцип освобождения. Задачу минимизации функций конечного числа переменных или функционалов при наличии ограничений можно интерпретировать как задачу о равновесии или движении некоторой механической системы (МС).

В общей задаче математического программирования вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min, \tag{2.1}$$

когда имеют место условия

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \begin{cases} \le 0, & s = \overline{1, k}, \\ = 0, & s = \overline{k+1, m}, \end{cases} \tag{2.2}$$

функцию $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как потенциальную энергию МС с k *неудерживающими* и $m - k$ *удерживающими* голономными *связями*. В этом случае задача (2.1), (2.2) становится задачей о равновесии несвободной МС.

При таком подходе оптимизационные задачи математического программирования приобретают вполне понятное механическое толкование. Из механической интерпретации задачи (2.1), (2.2) вытекает важный вывод о том, что такой фундаментальный принцип аналитической механики, как принцип освобождения (освобождаемости), впервые сформулированный Лагранжем, составляет методологическую основу решения задач вида (2.1), (2.2).

Напомним, что принцип освобождения утверждает об эквивалентности задачи о равновесии МС с условиями (2.2) в поле сил с силовой функцией (*функцией Лейбница*) $U(x) = -f(x_1, \ldots, x_n)$ и задачи о равновесии свободной МС, к которой помимо сил поля приложены также силы реакции связей [76]. Этот принцип представлен Лагранжем в форме метода множителей, когда реакции идеальных связей (2.2) в состоянии равновесия являются функциями сил поля.

В работе [113] осуществлен иной подход в трактовке принципа освобождения, равносильный известному *методу штрафных функ-*

ций. Кратко идея данного подхода заключается в построении отличной от $U(x)$ силовой функции $\bar{U}(x)$ такой, что $\operatorname{grad}\bar{U}(x) = 0$ в состоянии равновесия $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x})$ несвободной системы (2.1), (2.2). Здесь принцип освобождения трактуется как эквивалентность задачи о равновесии несвободной системы в заданном поле сил $\operatorname{grad} U(x) = \operatorname{grad} f(x)$ задаче о равновесии свободной системы в поле сил $\operatorname{grad}\bar{U}(x)$, где силовая функция $\bar{U}(x)$ построена так, что решение уравнения $\operatorname{grad}\bar{U}(x) = 0$ удовлетворяет условиям (2.1), (2.2).

Метод штрафных функций в виде принципа освобождения состоит в построении последовательности скалярных функций $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., для которой точка $\tilde{x}$ является предельной точкой последовательности состояний равновесия $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$, ... В этом случае силовое поле, задаваемое $\bar{U}(x)$, представляет собой суперпозицию силового поля $-\operatorname{grad} f(x)$ и поля сил упругости деформируемых связей [76].

Важно отметить, что в указанной выше трактовке принципа освобождения все силы, приложенные к освобожденной системе, являются функциями только состояния системы.

Изучаемая ниже реализация принципа освобождения состоит в замене жестких связей (2.2) некоторыми другими условиями

$$\bar{\varphi}_s(x_1, ..., x_n) \begin{cases} \le 0, & s = \overline{1, k}, \\ = 0, & s = \overline{k+1, m}, \end{cases} \tag{2.3}$$

и построении силового поля

$$\operatorname{grad} U(x) = \operatorname{grad}\Bigl(-f(x) + \sum_{s=1}^{m} U_s(x)\Bigr),$$

которое представляет собой суперпозицию полей с силовыми функциями $-f(x)$, $U_1(x)$, ..., $U_m(x)$.

Условия (2.3) здесь рассматриваются как условия, определяющие множество точек нулевой напряженности поля с силовой функцией $U_s(x)$:

$$\operatorname{grad} U_s(x) = 0 \begin{cases} \text{при } \bar{\varphi}_s(x) \le 0, & s = \overline{1, k}, \\ \text{при } \bar{\varphi}_s(x) = 0, & s = \overline{k+1, m}, \end{cases}$$

где на функции $U_s(x)$ и их частные производные наложены ограничения: непрерывность, неотрицательность и выпуклость.

Ниже будут рассмотрены некоторые реализации принципа освобождения для динамических задач оптимизации управляемого движения. Сначала изучим задачу вида

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)\, dt \to \min_{u \in \Omega}, \tag{2.4}$$

при следующих условиях:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u), \qquad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^m, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad x_i(t_1) = x_i^1, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.6}$$

Функционал (2.4) задается на траекториях системы (2.5) и управлениях из множества Ω, переводящих управляемую систему (2.5) из положения x^0 в положение x^1. Требуется найти вектор-функцию управления $\tilde{u}(t) = \bigl(\tilde{u}_1(t), ..., \tilde{u}_m(t)\bigr) \in \Omega$, доставляющую минимальное значение функционалу J (2.4) и такую, что решение системы (2.5) при $u = \tilde{u}$, определяемое начальными условиями x^0, удовлетворяет конечным условиям x^1.

Принцип освобождения в применении к динамическим задачам оптимизации приводит к вариационным принципам аналитической механики. Пусть интеграл (2.4) представляет собой некоторый аналог функционала действия по Гамильтону, а уравнения (2.5) — неголономные (дифференциальные) связи. Тогда принцип освобождения можно сформулировать как задачу построения функционала Φ ($\Phi \ne J$), удовлетворяющего следующим условиям:

I. $\Phi = J$ на любом решении управляемой системы дифференциальных уравнений вида (2.5) при любых кусочно-непрерывных $u(t) \in \Omega$, переводящих систему из состояния x^0 в состояние x^1; в частности, можно положить $\Phi = c_1 J + c_2$, где $c_1 > 0, c_2$ — некоторые постоянные.

II. Решение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ задачи безусловной минимизации

$$\min_x \bigl[\, \min_{u \in \Omega} \Phi(x, u, t_0, t_1, x^0, x^1) \,\bigr]$$

удовлетворяет условиям (2.5), (2.6).

Отметим, что при наличии условий I, II оптимальная траектория управляемой системы является траекторией действительного движения МС, для которой функционал

$$G(x, \bar{u}, t_0, t_1, x^0, x^1) = \min_{u \in \Omega} \Phi(x, u, t_0, t_1, x^0, x^1) \tag{2.7}$$

является действием по Гамильтону. Функционал Φ с условиями I, II можно построить, например, с помощью метода множителей Лагранжа.

Операция минимизации (2.7) ставит в соответствие любой допустимой траектории $x(t)$, соединяющей точки x^0 и x^1, некоторое допустимое управление $\bar{u}(t)$, которое в отличие от оптимального управления $\tilde{u}(t)$ будем называть *эффективным управлением* для выбранной допустимой траектории движения $x(t)$.

Допустимая траектория движения $x(t)$, минимизирующая функционал действия G (2.7), называется *оптимальной* или *траекторией действительного* движения $\tilde{x}(t)$; при этом соответствующее этой траектории эффективное управление $\bar{u}(t) = \tilde{u}(t)$ называется *оптимальным управлением.*

2.1.2. Принцип максимума. Введем дополнительную переменную $x_0(t)$, задаваемую уравнением $\dot{x}_0 = f_0(x, u)$ с начальным условием $x_0(t_0) = x_0^0 = 0$. Тогда задача (2.4) – (2.6) сводится к виду

$$x_0(t_1) = x_0^1 \to \min \tag{2.8}$$

при условиях

$$\dot{x}_i = f_i(x, u), \qquad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^m, \quad i = \overline{0, n}, \tag{2.9}$$

$$x_0(t_0) = x_0^0 = 0, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.10}$$

Для задачи (2.8) – (2.10) можно выбрать достаточно общий функционал

$$\Phi(x, u, t_0, t_1, x^0, x^1) = x_0(t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} F(y_0, \ldots, y_n, \tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n)\, dt, \tag{2.11}$$

где обозначено

$$y_i = \dot{x}_i - f_i(x, u), \qquad i = \overline{0, n}, \tag{2.12}$$

$\tilde{\varphi}_0(t)$, ..., $\tilde{\varphi}_n(t)$ — некоторые функции времени. В этом случае функционал действия по Гамильтону определяется для любого допустимого движения $x(t)$ с условиями (2.10) выражением

$$G(x, \bar{u}, \tilde{\varphi}, t_0, t_1, x^0, x^1) = \min_{u \in \Omega} \left(x_0(t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} F(y, \tilde{\varphi})\, dt \right), \tag{2.13}$$

где $y = (y_0, \ldots, y_n)$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$.

Изучим теперь задачу о свойствах функции $F(y, \tilde{\varphi})$ и выборе функций $\tilde{\varphi}_0$, ..., $\tilde{\varphi}_n$, обеспечивающих выполнение условий I, II. Из условия I вытекает с необходимостью наличие тождества

$$F(0, \ldots, 0, \tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n) \equiv 0 \tag{2.14}$$

вне зависимости от выбора вектор-функции $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$.

В задаче (2.8) – (2.10) положим конечный момент времени t_1 искомой величиной. Вычислим приращение ΔG функционала G, соответствующее приращению $\eta(t)$ вектор-функции $x(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta G = \eta_0(t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ F\big[\big(\dot{x} + \dot{\eta} - f(x + \eta, \widehat{u})\big), \varphi(t) \big] - \\ - F\big[\big(\dot{x} - f(x, \bar{u})\big), \varphi(t) \big] \Big\} = \\ = \eta_0(t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{\eta}_i + \frac{\partial F}{\partial x_i}\, \eta_i \right) \right] dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_s}\, \Delta \bar{u}_s(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.15}$$

В формуле (2.15) $\eta_0(t)$, ..., $\eta_n(t)$ — произвольные функции, $\Delta \bar{u}_1(t)$, ..., $\Delta \bar{u}_m(t)$ — функции, которые в силу определения функционала действия (2.13) однозначно определяются выбором приращений $\eta_0(t)$, ..., $\eta_n(t)$, так как являются разностями эффективных управлений ($\widehat{u}$ и $\bar{u}$), соответствующих допустимым траекториям $x + \eta$ и x. Помимо этого, поскольку $\widehat{u}$ и $\bar{u}$ — допустимые управления, то $\Delta \bar{u}(t)$ — допустимое приращение управления. Если $x(t) = \tilde{x}(t)$

— оптимальная траектория, $\bar{u}(t) = \tilde{u}(t)$ — оптимальное управление, то тогда получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_s}\bigg|_{x=\tilde{x},\, u=\tilde{u}} \Delta \bar{u}_s \, dt \geq 0.$$

Запишем далее выражение для первой вариации функционала G:

$$\delta G = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \eta_i(t) \, dt \; +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_s} \Delta \bar{u}_s \, dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_0} + 1 \right) \bigg|_{t=t_1} \eta_0(t_1) \; +$$

$$+ \left[F(y, \tilde{\varphi}) - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t=t_1} \delta t_1. \tag{2.16}$$

Из формулы (2.12) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = - \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{0, n}.$$

С учетом обозначений

$$\psi_i(y, \tilde{\varphi}) = \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}, \tag{2.17}$$

$$\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = \psi_i(0, \ldots, 0, \tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n) \tag{2.18}$$

получим вытекающие из соотношения (4.16) следующие необходимые условия экстремума:

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j, \qquad i = \overline{0, n}, \tag{2.19}$$

$$\psi_0 \big[\, y(t_1), \, \tilde{\varphi}(t_1) \, \big] = -1, \tag{2.20}$$

$$F \big[\, y(t_1), \, \tilde{\varphi}(t_1) \, \big] - \sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i(t_1) \, \psi_i(t_1) = 0, \tag{2.21}$$

где $y = (y_i)_{i=\overline{0,n}}$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i)_{i=\overline{0,n}}$.

Пользуясь независимостью функций f_0, ..., f_n от x_0, из уравнения (2.19) получим $\dot{\psi}_0(t) = 0$; следовательно, равенство (2.20) имеет место $\forall \, t \in [\, t_0, \, t_1 \,]$: $\psi_0 \big[\, y(t), \, \tilde{\varphi}(t) \, \big] = -1$.

Условие (2.21) также справедливо $\forall \, t \in [\, t_0, \, t_1 \,]$, так как соотношения (2.17) представляют собой формулы перехода от переменных $\dot{x}_0$, ..., $\dot{x}_n$ к сопряженным каноническим переменным ψ_0, ..., ψ_n (преобразования Лежандра). Кроме того, если в левой части равенства (2.21) заменить t_1 на произвольное $t \in [\, t_0, \, t_1 \,]$, то получим с обратным знаком известную функцию Гамильтона

$$H = \sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i \psi_i - F.$$

Так как функционал G не зависит явно от времени, значит имеет место интеграл энергии: $H = h = \mathrm{const}$. Из равенства (2.21) получим $h = 0$ и интеграл энергии принимает вид

$$H = \sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i \psi_i - F(y, \tilde{\varphi}) = 0. \tag{2.22}$$

Величины y_0, ..., y_n в формуле, задающей H, выражаются через *канонические переменные* ψ_0, ..., ψ_n с помощью преобразования Лежандра (2.17) при ограничении невырожденности на *гессиан*:

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_j} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \, \partial y_j} \right) \neq 0, \qquad i, j = \overline{0, n}. \tag{2.23}$$

Далее, из определения функционала действия по Гамильтону (2.7) вытекает, что для любой допустимой траектории $x(t)$ функционал Φ достигает $\min_{u \in \Omega}$ $\forall \, t \in [\, t_0, \, t_1 \,]$. Аналогичный результат справедлив и в частном случае функционала вида (2.13), откуда следует равенство

$$F \big[\, (\dot{x}_0 - f_0(x, \bar{u})), \, \ldots, \, (\dot{x}_n - f_n(x, \bar{u})), \, \tilde{\varphi}_0, \, \ldots, \, \tilde{\varphi}_n \, \big] \; =$$

$$= \min_{u\in\Omega} F\big[\,(\dot{x}_0 - f_0(x,u)),\, ...,\, (\dot{x}_n - f_n(x,u)),\, \tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n\,\big], \qquad (2.24)$$

имеющее место для любой допустимой траектории, удовлетворяющей граничным условиям (2.10). Равенство (2.24), вообще говоря, выполняется и для траектории, которая удовлетворяет помимо условий (2.10) также условиям (2.19) – (2.21). В этом случае из соотношений (2.22), (2.24) получим

$$H = \max_{u\in\Omega} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i\psi_i - f\big[\,(\dot{x}_0 - f_0(x,u)),\, ...,\, (\dot{x}_n - f_n(x,u)),\, \tilde{\varphi}\,\big] \right\}. \qquad (2.25)$$

Используя функцию Гамильтона, можно записать уравнения (2.19) в канонической форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{0,n}.$$

Эти соотношения справедливы для задачи минимизации функционала (2.13), где функция $F(y,\varphi)$ дифференцируема по $y = (y_0,\, ...,\, y_n)$ дважды, ее гессиан (2.23) невырожден, а $\varphi = (\varphi_0,\, ...,\, \varphi_n)$ — произвольная вектор-функция времени.

Выясним затем условия, которым должны подчиняться функции $\tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n$, чтобы экстремаль функционала (2.13), удовлетворяющая граничным условиям (2.10), была также и интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (2.9). Эти условия получим, положив в условиях стационарности (2.19) — (2.21) $y_i = 0$, $i = \overline{0,n}$, и заменив в соответствии с обозначением (2.18) величины ψ_i величинами $\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi})$, $i = \overline{0,n}$.

Так как в этом случае $\dot{x}_i = f_i(x,u)$, то получим условия, определяющие функции $\tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n$:

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, \tilde{\psi}_j, \qquad i = \overline{0,n}, \qquad (2.26)$$

$$\tilde{\psi}_0\,(\tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n) = -1, \qquad f_0(x,\bar{u}) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,\bar{u})\, \tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = 0,$$

где согласно соотношению (2.25) имеем

$$f_0(x,\bar{u}) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,\bar{u})\, \tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = \max_{u\in\Omega} \left(f_0(x,u) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)\, \tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) \right).$$

Из написанных выше выражений (2.17), (2.18) следует запись

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \varphi_j}\, \dot{\tilde{\varphi}}_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i\, \partial \varphi_j}\bigg|_{y=0} \dot{\tilde{\varphi}}_j.$$

При этом система (2.26) преобразуется к виду

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i\, \partial \varphi_j}\bigg|_{y=0} \dot{\tilde{\varphi}}_j = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, \tilde{\psi}_j\big(\tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n\big). \qquad (2.27)$$

Уравнения (2.27) разрешаются относительно производных, если матрица $\partial^2 F/\partial y_i\, \partial\varphi_j\,\big|_{y=0}$ невырождена.

Подытоживая сказанное, сформулируем утверждение, содержащее принцип максимума для автономных систем управления.

Теорема 2.1. *Обозначим через $\tilde{u}(t)$ такое допустимое управление, что при $u(t) = \tilde{u}(t)$ решение $\tilde{x}(t)$ системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\, ...,\, x_n,\, \tilde{u}_1,\, ...,\, \tilde{u}_m), \qquad i = \overline{0,n},$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_0(t_0) = 0, \qquad \tilde{x}_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n},$$

удовлетворяет конечным условиям $\tilde{x}_i(t_1) = x_i^1$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда необходимыми условиями оптимальности управления $\tilde{u}(t)$ являются следующие условия:

1) *существует непрерывная функция $F(y,\tilde{\varphi})$, $y = (y_0,\, ...,\, y_n)$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_0,\, ...,\, \tilde{\varphi}_n)$ с непрерывными частными производными по всем аргументам до второго порядка включительно такая, что*

$$F(0,\, \tilde{\varphi}) \equiv 0, \qquad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\, \partial y_j}\right) \neq 0;$$

2) *функции* $\tilde{\psi}_0(\tilde{\varphi})$, ..., $\tilde{\psi}_n(\tilde{\varphi})$, *где*

$$\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = \left.\frac{\partial F}{\partial y_i}\right|_{y=0}, \qquad i = \overline{0, n},$$

удовлетворяют условиям

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\tilde{\psi}_j, \qquad \tilde{\psi}_0(\tilde{\varphi}) = -1, \qquad \sum_{i=0}^{n} f_i(\tilde{x}, \tilde{u})\,\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = 0;$$

3) *вектор-функция* $\tilde{u}(t)$ *является эффективным управлением для траектории* $\tilde{x}(t)$, *т.е. имеет место условие максимума*

$$f_0(\tilde{x}, \tilde{u}) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}, \tilde{u})\,\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}) = \max_{u\in\Omega}\left(f_0(\tilde{x}, u) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}, u)\,\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi})\right).$$

Отметим в конце параграфа, что задачу безусловной минимизации функционала G (2.13) можно решать для произвольной вектор-функции $\varphi(t)$. В результате получим вектор-функцию $\psi(t)$ сопряженных переменных, удовлетворяющую условиям (2.19) – (2.21).

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем выражается принцип освобождаемости от связей?

2. Сформулируйте принцип максимума для автономных систем управления.

2.2 Методы аналитической механики в оптимизации процессов управления

Продолжим обсуждение возможностей получения необходимых условий оптимальности динамических управляемых систем с помощью методов механики, пользуясь результатами работы [56], ориентированной на демонстрацию аналогических зависимостей между вариационными принципами механики и принципом максимума Понтрягина.

2.2.1. Функция и система Понтрягина. Будем исходить из задачи оптимального управления [108] для системы, движение которой описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \qquad u(t) \in U, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{2.28}$$

где $f_i(\cdot)$ — непрерывные функции своих аргументов, $x = (x_1, ..., x_n)$ — фазовые переменные состояния системы, $u = (u_1, ..., u_r)$ — управления, U — заданная область допустимых управлений, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$.

Пусть начальный момент времени t_0 задан и известно начальное состояние системы

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.29}$$

Требуется управления $u \in U$ выбрать так, чтобы в конечный, но не фиксированный заранее момент времени t_1 траектория системы попала на *терминальную* (целевую) *поверхность,* заданную системой уравнений

$$h_s\left[\,x(t_1),\, t_1\,\right] = 0, \qquad s = \overline{1, m}, \tag{2.30}$$

и при этом функционал

$$\Phi = h_0\left[\,x(t_1),\, t_1\,\right] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\,dt \tag{2.31}$$

принимал наименьшее значение. Часто уравнения (2.28) называют дифференциальными связями, а условия (2.29), (2.30) — краевыми условиями.

Применяя интегральные принципы, пользуются приемом освобождения от связей, когда вместо выписывания условий связи требуют, чтобы траектория системы доставляла стационарное значение специальным образом построенному (вспомогательному, условному) функционалу.

В оптимизационных задачах критерий качества можно рассматривать в форме интегрального принципа (наименьшего действия). Можно таким образом всю исходную задачу записать в форме интегрального принципа, включив условия для связей в этот функционал (действия). С этой целью заменим уравнения (2.28) и краевые условия (2.30) общим условием

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \left[\, \dot{x}_i - f_i(x,u,t) \,\right] dt + \sum_{s=1}^{m} \nu_s \, h_s \left[\, x(t_1),\, t_1 \,\right] = 0. \tag{2.32}$$

Легко обнаружить, что требование выполнения условия (2.32) для любых $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$ приводит к эквивалентной совокупности уравнений (2.28), (2.30).

Если теперь условие (2.32) добавить к критерию (2.31), домножив его на множитель $\nu_0 \geq 0$, то получим эквивалентность задачи оптимального управления (2.28) – (2.31) следующей вариационной задаче

$$\max_{\psi,\nu} \left\{ \sum_{s=0}^{m} \nu_s \, h_s \left[\, x(t_1),\, t_1 \,\right] + \int_{t_0}^{t_1} \nu_0 \, f_0(x,u,t) \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \left[\, \dot{x}_i - f_i(x,u,t) \,\right] dt \right\} \to \min_{x,u,t_1} . \tag{2.33}$$

Действительно, процесс (x, u) должен удовлетворять уравнениям движения, а $x(t_1)$ находиться на терминальной поверхности (2.30) — в противном случае операция max приводит к сколь угодно большим значениям критерия в задаче (2.33). Если же (x, u) и $x(t_1)$ удовлетворяют этим условиям, то выражение (2.33) трансформируется с точностью до множителя ν_0 в выражение (2.31).

Можно интерпретировать задачу (2.33) как взаимодействие двух сопряженных систем (полей), где на оптимальной траектории обе системы находятся в относительном равновесии так, что реакция сопряженной системы может лишь удерживать исходную систему на этой траектории. При этом в отличие от задачи (2.33) полученные условия будут приводить в задаче (2.28) – (2.31) только к локальному минимуму.

Перейдем от операции взятия max в соотношении (2.33) к другим требованиям. Для этого представим функционал действия в

виде *функционала Больца*:

$$J = \sum_{s=0}^{m} \nu_s \, h_s \left[\, x(t_1),\, t_1 \,\right] + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \nu_0 \, f_0(x,u,t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \left[\, \dot{x}_i - f_i(x,u,t) \,\right] \right\} dt. \tag{2.34}$$

Множители $\psi_i(t), \nu_s$ в выражении (2.34) — это множители Лагранжа или так называемые *сопряженные переменные*. Их надо выбрать так, чтобы любые малые вариации оптимальных значений переменных x, u и t, освобожденных от связей (2.28), (2.30), не уменьшали величину функционала действия J (2.34), который заменил исходный критерий качества.

Пользуясь тем, что переменные $x_i(t)$, $u_k(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,r}$, уже не связаны между собой, будем варьировать их поочередно. В силу произвольности $\delta\, x_i(t)$ и δt_1 вариация действия J по этим переменным должна равняться нулю. С учетом формулы интегрирования по частям и того, что $\delta\, x(t_0) = 0$, найдем

$$\delta_x \, J = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{s=0}^{m} \nu_s \, \frac{\partial h_s}{\partial x_i} + \psi_i(t_1) \right] \delta\, x_i(t_1) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\nu_0 \, \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \dot{\psi}_i - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta\, x_i(t) \, dt = 0. \tag{2.35}$$

Произвольность $\delta\, x_i(t)$, выбор сопряженной вектор-функции $\psi(t)$ и множителей $\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m$ позволяют, чтобы скобки при вариациях фазовой переменной обратились в ноль. В этом случае внеинтегральная часть в равенстве (2.35) приводит к условиям трансверсальности

$$\psi_i(t_1) = - \sum_{s=0}^{m} \nu_s \, \frac{\partial\, h_s \left[\, x(t_1),\, t_1 \,\right]}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2.36}$$

а подинтегральное выражение — к сопряженной системе, определяющей функции $\psi_i(t)$:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \nu_0\,\frac{\partial f_0}{\partial x_i}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{2.37}$$

Поступая аналогично при варьировании J по t_1 и приравнивая $\delta_{t_1} J$ к нулю, получим с учетом условий (2.36):

$$\delta_{t_1} J = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{s=0}^{m} \nu_s\,\frac{\partial h_s}{\partial x_i} + \psi_i(t_1)\right]\dot{x}_i\,\delta t_1 +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m} \nu_s\,\frac{\partial h_s}{\partial t_1}\,\delta t_1 + \left(\nu_0 f_o - \sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i\right)\Big|_{t=t_1}\delta t_1 =$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{m} \nu_s\,\frac{\partial h_s}{\partial t}\Big|_{t=t_1} - H(\psi,x,u,t_1)\right)\delta t_1 = 0,$$

где через H обозначена *функция Понтрягина* [122]:

$$H(\psi,x,u,t) \equiv \sum_{s=0}^{m} \psi_i(t)\,f_i(x,u,t) - \nu_0\,f_0(x,u,t).$$

Отсюда имеем условие

$$H\Big|_{t=t_1} = \sum_{s=0}^{m} \nu_s\,\frac{\partial h_s}{\partial t}\Big|_{t=t_1}, \tag{2.38}$$

определяющее конечный момент времени t_1.

Условия (2.36) – (2.38) являются необходимыми, чтобы траектория системы была оптимальной. Так как эти условия не обеспечивают выполнения ограничений (2.28), (2.30), то эти ограничения надо добавить к условиям (2.36) – (2.38). В частности, их можно получить из равенства нулю вариации функционала действия по сопряженным переменным и множителям Лагранжа:

$$\delta_\psi J = 0 \implies \dot{x}_i - f_i(x,u,t) = 0, \qquad i=\overline{1,n},$$

$$\delta_\nu J = 0 \implies h_s\big[\,x(t_1),\,t_1\,\big] = 0, \qquad s=\overline{1,m}.$$

Отметим также, что уравнения движения системы (2.28) и сопряженные уравнения (2.37) относительно $\psi_i(t)$ могут быть записаны с использованием функции Понтрягина так:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{2.39}$$

Систему (2.39) называют иногда *системой Понтрягина* [122]; ее можно рассматривать в качестве прототипа гамильтоновой системы для фазовых переменных $x_i(t)$ и импульсов $\psi_i(t)$.

При наличии явных ограничений на управления u их можно включить в функционал J и приравнять нулю $\delta_u J$. Результатом будет утверждение, аналогичное интегральным принципам механики, а именно оптимальное движение управляемой системы совпадает с экстремалями функционала J, т.е. действие имеет на оптимальной траектории стационарное значение.

В случае, когда ограничение на u носит общий характер $u \in U$ и вариация δu не произвольна, описанный выше принцип не применим. Вариации по другим переменным приводят к уравнениям движения (2.28), краевым условиям (2.30), условиям трансверсальности (2.36), (2.38) и уравнениям для сопряженной системы (2.37). И тогда величина функционала действия J совпадает с величиной минимизируемого критерия Φ и поэтому на допустимых вариациях по управлению действие не убывает:

$$\delta_u J = \int_{t_0}^{t_1} \delta_u\left(\nu_0 f_0 - \sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i\right)dt = -\int_{t_0}^{t_1}\delta_u H\,dt \ge 0.$$

Обратим внимание на то, что вариации управления δu в общем случае конечны (игольчатые вариации). Поэтому равенство $\delta_u H = (\partial H/\partial u)\,\delta u$ не всегда имеет место, за исключением случая, когда множество U совпадает со всем пространством векторов u. Варьируя допустимые управления из U на произвольном бесконечно малом промежутке времени, получим

$$\delta_u H \le 0, \tag{2.40}$$

откуда следует, что оптимальное управление доставляет функции Понтрягина H максимум.

Если обозначить этот максимум через $H_*\big[\,\psi(t),\,x(t),\,t\,\big]$, то тогда условие (2.40) эквивалентно равенству

$$H_*\big[\,\psi(t),\,x(t),\,t\,\big]=H\big[\,\psi(t),\,x(t),\,u(t),\,t\,\big],$$

т.е. на оптимальном управлении $u(t)$ будет выполняться соотношение

$$H\big[\,\psi(t),\,x(t),\,u(t),\,t\,\big]=\max_{v\in U}\ H\big[\,\psi(t),\,x(t),\,v,t\,\big]. \tag{2.41}$$

Таким образом, приходим к известной формулировке принципа максимума. Пусть $u(t)$, $t\in[\,t_0,\,t_1\,]$, такое допустимое управление, при котором соответствующая траектория $x(t)$ удовлетворяет уравнениям движения (2.28) и краевым условиям (2.29), (2.30). Тогда для оптимальности управления $u(t)$, траектории $x(t)$ и момента завершения процесса t_1 в смысле минимизации критерия (2.31) необходимо существование в функционале действия (2.34) не равных нулю одновременно множителей Лагранжа $\nu_0\geq 0$, ν и $\psi(t)$, удовлетворяющих сопряженной системе (2.37), условиям трансверсальности (2.36), (2.38) и таких, что $\forall\,t\in[\,t_0,\,t_1\,]$ функция Понтрягина H достигает максимума по управлению согласно выражению (2.41).

Рассмотренная выше аналитическая схема для случая, когда ограничения задачи заданы в виде равенств, может быть при соответствующей модернизации распространена и на случай, когда ограничения задаются неравенствами. В самом деле, если какое-либо терминальное ограничение задано в форме неравенства

$$h_p\big[\,x(t_1),\,t_1\,\big]\leq 0, \tag{2.42}$$

то, вводя дополнительную неотрицательную переменную w_p, обратим его в равенство: $h_p[\,x(t_1),\,t_1\,]+w_p=0$.

На оптимальной траектории вариация действия неотрицательна

$$\delta_{w_p}\,J=\nu_p\,\delta w_p\geq 0. \tag{2.43}$$

Можно показать (подробности см. в статье [56]), что из условия (2.43) вытекает так называемое *условие дополняющей нежесткости*: $\nu_p\,h_p[\,x(t_1),\,t_1\,]=0$; значит, либо неравенство (2.42) обращается на оптимальной траектории в равенство, либо множитель $\nu_p=0$, либо то и другое вместе.

2.2.2. Системы с разрывными правыми частями. Очевидно, что программа вывода условий оптимизации с использованием функционала действия по Гамильтону удобна, прежде всего, в силу автоматического учета разного рода ограничений (связей) при одновременной освобождаемости от них. Получаемый таким способом аппарат применим для широкого класса задач оптимального управления.

Усложним задачу (2.28) – (2.31). Пусть на этот раз функции $f_i(x,u,t)$ в уравнениях (2.28) терпят разрыв при переходе системы через заданные поверхности [8, 28] (*поверхности разрыва*):

$$R_k(x,t)=0,\qquad k=\overline{1,q}. \tag{2.44}$$

Обозначим через t_k, $k=\overline{1,q}$, моменты пересечения траектории системы с поверхностями (2.44); положим $t_0<t_1<\ldots<t_q<t_{q+1}=t_1$. Правые части в уравнениях (4.28) обозначим $f_{i,k}(x,u,t)$; здесь $f_{i,k}(\cdot)$ — непрерывные в интервалах $(t_k,\,t_{k+1})$ функции. Имеем для системы (2.28):

$$\dot{x}_i=f_{i,k}(x,u,t),\qquad i=\overline{1,n},\quad k=\overline{0,q+1}. \tag{2.45}$$

Будем считать, что в моменты времени t_k оптимальная траектория пересекает поверхности разрыва (2.44) без односторонних касаний при выполнении условий

$$\Omega_k\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial R_k}{\partial x_j}\,f_{j,k}\,\big[\,x(t_k),\,u(t_k-0),\,t_k\,\big]+\frac{\partial R_k}{\partial t}\neq 0.$$

Поскольку управление может терпеть разрыв в точках t_k, то t_k-0 означает аргумент управления, входящего в функцию f_k, а t_k+0 — аргумент управления, входящего в функцию f_{k+1}.

Предположим, не умаляя общности, что $R_k(x,t) < 0$, когда $t < t_k$. В этом случае система (2.45) запишется в виде

$$\dot{x}_i = f_{i,1}(x,u,t) + \sum_{k=1}^{q} \big[\, f_{i,k+1}(x,u,t) - f_{i,k}(x,u,t)\,\big]\,\theta\big(R_k(x,t)\big),$$

где $\theta(\cdot)$ — тета-функция Хевисайда ($\theta(\cdot) = 0$ при отрицательном аргументе и $\theta(\cdot) = 1$ при положительном аргументе).

Сопряженная система в силу уравнений (2.37) запишется так:

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=1}^{n} \psi_j \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_i} - \tag{2.46}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \psi_j \sum_{k=1}^{q} \big(f_{j,k+1} - f_{j,k}\big)\,\delta(R_k)\,\frac{\partial R_k}{\partial x_i} + \nu_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}, \tag{2.46}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Систему (2.46) можно представить иначе, заменив в правой части слагаемые с дельта-функцией *условием скачка* [33]. В этом случае сопряженная система преобразуется к виду (2.37) и имеет место для любых моментов времени, отличных от t_k, $k = \overline{1,q}$.

Для моментов t_k выполняется условие скачка [28]. Запишем его, проинтегрировав уравнение (2.46) на промежутке $[\,t-\varepsilon,\ t_k+\varepsilon\,]$:

$$\psi_i(t_k+\varepsilon) - \psi_i(t_k-\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) -$$

$$- \int\limits_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \psi_j\,\big(f_{j,k+1} - f_{j,k}\big)\,\delta\big(R_k(x,t)\big)\,\frac{\partial R_k}{\partial x_i}\,dt, \tag{2.47}$$

где через $\alpha(\varepsilon)$ обозначена величина порядка ε.

В соотношении (2.47) под знаком интеграла стоит функция с разрывом в точке, которая является носителем дельта-функции. Для всякой такой функции $\varphi(t)$ с точкой разрыва t_k получим

$$\int\limits_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} \varphi(t)\,\delta(v(t-t_k))\,dt = \begin{cases} \varphi(t_k+0)/v, \\ \varphi(t_k-0)/v, \end{cases} \tag{2.48}$$

в зависимости от того, куда попадает этот носитель. В первом случае в уравнениях (2.45) справа имеем функции $f_{i,k}$, а во втором, когда траектория системы уже пересекла поверхность $R_k = 0$, имеем функции $f_{i,k+1}$.

Для первого случая при разложении R_k в окрестности точки t_k получим

$$R_k(x,t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R_k}{\partial x_j}\, f_{j,k}\big[\,x(t_k),\ u(t_k-0),\ t_k\,\big] + \frac{\partial R_k}{\partial t}\right)(t-t_k) +$$

$$+ \alpha(t-t_k) \equiv \Omega_k(t-t_k) + \alpha(t-t_k),$$

где $\alpha(t-t_k)$ — малые порядка выше первого относительно $t-t_k$. Если перейти в соотношении (2.47) к пределу при $\varepsilon \to 0$, то с учетом выражения (2.48) получим условие скачка [28]:

$$\psi_i(t_k+0) - \psi_i(t_k-0) = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_k+0)\big(f_{j,k+1} - f_{j,k}\big)\,\frac{\partial R_k}{\partial x_i}, \tag{2.49}$$

где $t_k - 0$ входит в функции $f_{j,k}$, Ω_k, а $t_k + 0$ — в функцию $f_{j,k+1}$.

Для второго случая будем иметь

$$R_k(x,t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R_k}{\partial x_j}\, f_{j,k+1}\big[\,x(t_k),\ u(t_k+0),\ t_k\,\big] + \frac{\partial R_k}{\partial t}\right)(t-t_k) +$$

$$+ \alpha(t-t_k) \equiv \Lambda_k(t-t_k) + \alpha(t-t_k)$$

с условием скачка

$$\psi_i(t_k+0) - \psi_i(t_k-0) = -\frac{1}{\Lambda_k} \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_k-0)\big(f_{j,k+1} - f_{j,k}\big)\,\frac{\partial R_k}{\partial x_i}.$$

В частном случае, когда имеется одна стационарная поверхность разрыва ($k = 1$, $t_1 = t_*$, $R_1 = R$, $\partial R/\partial t = 0$), можно записать следующие эквивалентные условия скачка:

$$\psi_i(t_*+0) - \psi_i(t_*-0) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_j} f_{j,1}} \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_*-0)\big(f_{j,2} - f_{j,1}\big)\,\frac{\partial R}{\partial x_i},$$

$$\psi_i(t_*+0)-\psi_i(t_*-0) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_j}\, f_{j,2}} \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_*+0)\bigl(f_{j,2}-f_{j,1}\bigr)\,\frac{\partial R}{\partial x_i}.$$

Укажем в конце, что использование дельта-функций можно заменить условиями, задающими поверхности разрыва (2.44), в функционале действия и получить условия скачка (2.49) варьированием t_k, $k = \overline{1,q}$ (подробности такого приема см. в работе [8], где получены необходимые условия оптимальности для систем с промежуточными условиями без ограничений на фазовые переменные).

Вопросы для самоконтроля.

1. Что из себя представляет функционал Больца?
2. Какие переменные называются сопряженными?
3. Дайте определение функции Понтрягина и системы Понтрягина.

2.3 Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в задачах оптимального управления

Такие фундаментальные принципы аналитической механики как принцип наименьшего действия и принцип освобождения от связей, можно использовать для вывода достаточных условий оптимальности в задачах управления. Основываясь на результатах работы [58], в этом параграфе делается упор на получении уравнений Гамильтона–Якоби в задачах оптимального управления (*уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана*), а также устанавливаются зависимости между функциями Гамильтона, Беллмана (Айзекса–Беллмана) и Розоноэра. Относительно деталей и особенностей конструкций уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана в различных вариантах задач оптимального управления можно познакомиться в работах [15, 62, 63, 123, 151, 156, 175, 176].

Рассматривается задача оптимального управления при фиксированных концах промежутка времени $[\,t_0,\, t_1\,]$:

$$J = h_0(x^1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0[\,x(t),\, u(t),\, t\,]\, dt \to \min_{u\in U}, \tag{2.50}$$

$$\dot x_i = f_i(x,u,t), \qquad x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Если в функционале J (2.50) оставить только интегральную часть, то получим аналог *действия по Гамильтону* [113]. В аналитической механике функция Гамильтона определяется с помощью интеграла действия для истинных траекторий системы при переменном пределе интегрирования [47, 103], который в задаче (2.50) принимает вид [56]:

$$S_u = -\,h_0(x^1) - \int\limits_{t}^{t_1} L\, d\tau. \tag{2.51}$$

В выражении (2.51) L — *лагранжиан*, имеющий в задаче оптимального управления вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\,(\dot x_i - f_i) - \psi_0 f_0, \tag{2.52}$$

где ψ_0, ..., ψ_n — *сопряженные переменные*. Оптимальное управление доставляет действию $h_0(x^1) + \int_t^{t_1} L\, d\tau$ минимальное значение.

Положим

$$-\,S = h_0(x^1) + \min_{u\in U} \int\limits_{t}^{t_1} L[\,x(\tau),\, u(\tau),\, \tau\,]\, d\tau \;=$$

$$=\; h_0(x^1) + \int\limits_{t}^{t_1} \min_{u\in U}\; L[\,x(\tau),\, u(\tau),\, \tau\,]\, d\tau, \tag{2.53}$$

или $S = -\,h_0(x^1) + \int_{t_1}^{t} L_*\, d\tau$, $L_* = \min_{u\in U} L$, где интегрирование ведется вдоль истинной (т.е. оптимальной) траектории между точками (x,t) и (x^1,t_1). Функцию действия $S(x,t)$ иногда называют *главной функцией Гамильтона* в задаче оптимального управления.

Отметим, что при фиксированных x и t правая часть выражения (2.53) дает интеграл действия на оптимальной траектории с начальным условием $x(t) = x$. При этом истинная (оптимальная) траектория в соответствии с вариационным принципом Гамильтона [44, 47, 103, 134] является экстремалью действия, а именно экстремалью правой части (2.53). Отсюда вытекает, что истинная траектория должна являться решением как уравнений движения (2.50), так и уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L_*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.54}$$

При наличии обобщенных импульсов

$$\psi_i = \frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{2.55}$$

уравнения (2.54) преобразуются в сопряженную систему задачи оптимального управления

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial L_*}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{2.56}$$

с лагранжианом L_*, взятом в форме (2.52). Совокупность уравнений (2.50), (2.56) образует систему уравнений Гамильтона.

Варьируя траекторию и функцию (2.53) по фазовым переменным с фиксированными значениями t и t_1, получим

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_*}{\partial x_i}\, \delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}_i}\, \delta \dot{x}_i \right) dt - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}\, \delta x_i^1.$$

Воспользуемся допущением о перестановочности операций дифференцирования по времени и варьирования [134]: $\delta \dot{x}_i = d\,(\delta x_i)/dt$. Тогда будем иметь

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial L_*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i\, dt \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}_i}\, \delta x_i \Big|_{t_1}^{t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}\, \delta x_i^1. \tag{2.57}$$

Принимая во внимание уравнения Эйлера–Лагранжа (2.54), выражения для обобщенных импульсов (2.55), запишем вариацию

функции действия (2.57) в следующем виде:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\, \delta x_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i(t_1) + \frac{\partial h_0}{\partial x_i} \right) \delta x_i^1.$$

Отсюда найдем зависимость ψ_i через градиент главной функции

$$\psi_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \psi_i(t_1) = -\left.\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\right|_{t=t_1}, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.58}$$

Итак, заключаем, что поле импульсов $\psi = \psi(x, t)$ является потенциальным, потенциалом которого выступает главная функция действия $S(x, t)$ [103].

Часто операция $\min_{u \in U}$ в соотношении (2.53) приводит к потере гладкости и недифференцируемости функции $S(x, t)$. Будем считать $S(x, t)$ гладкой (а в точках ее возможного излома используем условия Вейерштрасса–Эрдмана). Из выражения (2.53) найдем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, \dot{x}_i = L_*. \tag{2.59}$$

Пользуясь определением функции Гамильтона и обобщенных импульсов (2.55), можем написать

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i - L_* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, \dot{x}_i - L_*. \tag{2.60}$$

В этом случае соотношение (2.59) преобразуется в уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t \right) = 0 \tag{2.61}$$

с решением $S(x, t)$, которое должно удовлетворять краевому условию, вытекающему из соотношения (2.53) при $x^1 = x$, $t = t_1$:

$$S(x, t_1) = -\, h_0(x). \tag{2.62}$$

Введенную выше функцию Гамильтона H можно связать с функцией Понтрягина Π равенством

$$H = \max_{u \in U} \Pi, \qquad \Pi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i + \psi_0 f_0, \tag{2.63}$$

что дает возможность переписать уравнение (2.61) через функцию Π:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{u \in U} \Pi\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0. \tag{2.64}$$

Затем на промежутке времени $[\,t,\, t_1\,]$ выберем некоторое управление $u(t) \in U$, доставляющее на промежутке $[\,t+\Delta t,\, t_1\,]$ минимальное значение левой части соотношения (2.53). Тогда будем иметь

$$h_0(x^1) + \int\limits_{t+\Delta t}^{t_1} L\, d\tau = -\, S(t + \Delta t). \tag{2.65}$$

Поскольку интегрирование в выражении (2.53) (в согласии с определением главной функции Гамильтона) ведется вдоль оптимальной траектории между точками (x, t) и (x^1, t_1), то с учетом равенства (2.65) получим

$$-\, S(t) \le \int\limits_{t}^{t+\Delta} L\, d\tau + h_0(x^1) + \int\limits_{t+\Delta t}^{t_1} L\, d\tau = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} L\, d\tau - S(t + \Delta t),$$

откуда следует, что

$$-\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} L\, d\tau + \frac{\Delta S}{\Delta t} \le 0.$$

Имеем в пределе при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dS}{dt} - L \le 0. \tag{2.66}$$

Далее, учитывая выражения (2.52), (2.58), (2.63), найдем, что

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, \dot{x}_i - L.$$

В силу неравенства (2.66) получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Pi\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \le 0. \tag{2.67}$$

Заметим, что в левой части неравенства (2.67) в функции Π в отличие от функции H выбранное допустимое управление не обязательно является оптимальным.

Сопоставляя соотношения (2.61) и (2.67), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Pi \le \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0,$$

или

$$\max_{u \in U} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \Pi\right) = 0. \tag{2.68}$$

Поскольку $\partial S / \partial t$ не зависит от управления $u \in U$, то уравнение (2.68) преобразуется в уравнение (2.64) с одновременным наличием равенства (2.63). С учетом формул (2.58) при $\psi_0 = -1$ функция Понтрягина примет вид

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i - f_0,$$

а уравнение (2.64) станет выглядеть так:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i - f_0\right) = 0.$$

В теории оптимального управления вместо главной функции S как правило рассматривают *функцию Беллмана*, называемую иногда функцией Айзекса–Беллмана, которая определяется минимумом функционала J (2.50) при $\tau \in [\,t,\, t_1\,]$ по $u \in U$ на траекториях системы (2.50), начиная от точки $x(t)$:

$$B = h_0(x^1) + \min_{u\in U} \int\limits_t^{t_1} f_0\, d\tau.$$

Лагранжиан (2.52) на траекториях системы (4.50) в этом случае имеет вид

$$L = -\psi_0 f_0, \qquad \psi_0 = -1,$$

и тогда выражение (2.53) для главной функции S преобразуется в соотношение

$$-S = h_0(x^1) + \min_{u\in U} \int\limits_t^{t_1} f_0\, d\tau.$$

Значит, $S = -B$. Тогда уравнение Гамильтона–Якоби (2.68) для задачи оптимального управления (2.50) принимает форму *уравнения Беллмана* (Айзекса–Беллмана) [40]:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \min_{u\in U} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial x_i} f_i - f_0 \right) = 0 \tag{2.69}$$

с краевым условием (ср. с условием (2.62)):

$$B(x, t_1) = h_0(x). \tag{2.70}$$

Согласно выводам работ [40, 125] соотношения (2.69), (2.70) нелокальны, а следовательно, они будут являться достаточными условиями оптимальности.

Далее будем считать, что в уравнениях движения (2.50) управление фиксировано и совпадает с оптимальным управлением $\bar{u}$ задачи (2.50). Пусть точка (x, t) — начальная:

$$x(\tau) = x, \qquad \tau = t. \tag{2.71}$$

Управление $\bar{u}$ тогда вместе с уравнениями движения

$$\dot{x}_i = f_i[\, x(\tau),\, \bar{u}(\tau),\, \tau\,], \qquad i = \overline{1, n}, \qquad \tau \in [\, t,\, t_1\,], \tag{2.72}$$

определит некоторую траекторию. Вычислим вдоль этой траектории величину $S_{\bar{u}}\,(x, t)$ по формуле (2.51). Поскольку траектория,

задаваемая уравнениями (2.72), не является оптимальной при начальных условиях (2.71), то это означает, что функция $S_{\bar{u}}\,(x, t)$ — уже не главная функция Гамильтона.

Тем не менее, оптимальная траектория $\bar{x}(t)$ принадлежит семейству траекторий, определяемых уравнениями (2.72), при $x(t) = \bar{x}(t)$. Полная производная по времени t от $S_{\bar{u}}\,(x, t)$ в соотношении (2.51) приводит к следующей записи (ср. с выражениями (2.59), (2.60)):

$$\frac{\partial S_{\bar{u}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{\bar{u}}}{\partial x_i}\, \dot{x}_i - \bar{L} = 0, \tag{2.73}$$

где $\bar{L}$ — лагранжиан с фиксированным оптимальным управлением $u = \bar{u}$ задачи (2.50).

Далее зададим обобщенные импульсы с помощью соотношений (ср. с выражениями (2.55), (2.56), (2.58)):

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_i}, \qquad \psi_i(t_1) = -\frac{\partial h_0}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

В этом случае при варьировании $S_{\bar{u}}\,(x, t)$ по x найдем для лагранжиана в форме (2.52) выражения для ψ_i через градиент $S_{\bar{u}}$ (ср. с зависимостями (2.58)):

$$\psi_i = \frac{\partial S_{\bar{u}}}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.74}$$

С учетом равенств (2.74) соотношение (2.73) при $\psi_0 = -1$ запишется так:

$$\frac{\partial S_{\bar{u}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{\bar{u}}}{\partial x_i}\, f_i(x, \bar{u}, t) - f_0(x, \bar{u}, t) = 0.$$

Меняя $S_{\bar{u}}\,(x, t)$ на *функцию Розоноэра* [116] по формуле $S_{\bar{u}}\,(x, t) \ = = -R(x, t)$, запишем соотношение (2.75) в виде

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}\, f_i(x, \bar{u}, t) - f_0(x, \bar{u}, t) = 0 \tag{2.76}$$

с краевым условием

$$R(x, t_1) = h_0(x), \tag{2.77}$$

которое можно получить из выражения (2.51) подстановкой $S_u = -R$, $t = t_1$, $x_1 = x$.

Функция $R(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.76), но (ср. с аналогичным уравнением Беллмана (2.69)) не содержит операции $\min_{u\in U}$, так как в уравнении (2.76) управление фиксировано. Отсюда вытекает гладкость функции Розоноэра $R(x,t)$, порядок гладкости которой задается соотношениями (2.76), (2.77).

Сравнивая определения функций $S_{\bar u}$ и S, убеждаемся, что $-S_{\bar u} \geq -S$, т.е.

$$R(x,t) \geq B(x,t), \qquad R(\bar x, t) = B(\bar x, t), \tag{2.78}$$

где $\bar x = \bar x(t)$ —величина фазовой переменной на оптимальной траектории в момент времени t.

Функция Беллмана $B(x,t)$ в силу соотношений (2.78) является огибающей семейства функций Розоноэра $R(x,t,x_0,t_0)$ с начальными условиями (x_0,t_0): поверхность $y = B(x,t)$ касается снизу каждой из поверхностей $y = R(x,t,x_0,t_0)$ по оптимальной траектории с началом в точке $x_0 = x(t_0)$. Отсюда можно заключить, что функция Розоноэра в отличие от функции Беллмана приводит к локальным условиям оптимальности.

Завершим параграф, остановившись в общих чертах на *принципе оптимальности Кротова* [50, 72]. Исследуем задачу оптимального управления (2.50) на заданном промежутке времени $[\,t_0,\, t_1\,]$ при ограничениях

$$x(t) \in X(t), \qquad u(t) \in U(x,t), \qquad (x^0, x^1) \in \Gamma, \tag{2.79}$$

с теми же уравнениями движения (2.50):

$$\dot x_i = f_i(x,u,t), \qquad i = \overline{1,n},$$

и критерием качества

$$J = h_0(x^0, x^1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)\,dt \to \min, \tag{2.80}$$

где $x^0 = x(t_0)$, $x^1 = x(t_1)$ — заданные граничные значения на Γ.

Условия данной задачи дополним условиями оптимальности в виде некоторого уравнения в фазовом пространстве, например, уравнения Гамильтона–Якоби (2.61), (2.64), или эквивалентного уравнения Айзекса–Беллмана (2.69).

Затем введем в рассмотрение две функции: *функцию Кротова* $S(x,t)$ как аналог главной функции Гамильтона и функцию K как результат применения оператора Гамильтона–Якоби и функции $S(x,t)$:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\,\dot x_i + \frac{\partial S}{\partial t} - f_0(x,u,t), \tag{2.81}$$

либо

$$K = \frac{dS}{dt} - f_0(x,u,t).$$

Очевидно, что на траекториях системы (2.50) функцию K можно определить соотношением

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial t} - f_0(x,u,t).$$

Условия задачи (2.50), (2.79), (2.80) дополняются условием оптимальности в виде уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{u\in U}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i - f_0\right) = 0.$$

Однако, следуя Кротову, смягчим это требование, ограничившись выполнением менее жесткого условия

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i(x,u,t) - f_0(x,u,t) = 0,$$

либо $K = 0$. Это условие введем во вспомогательный функционал действия [72]:

$$D = G - \int\limits_{t_0}^{t_1} K\,dt, \tag{2.82}$$

полагая, чтобы на траекториях системы действие (2.82) совпадало с критерием качества задачи. Для этого надо взять с учетом выражения $K = dS/dt - f_0$ (см. (2.81)):

$$G = h_0(x^0, x^1) + S(x^1, t_1) - S(x^0, t_0). \tag{2.83}$$

Важно отметить, что в выборе функции S (или K) имеется значительный произвол для построения оптимального решения. Если возможно выбрать S, чтобы нижняя оценка: $\inf D$ при ограничениях (2.79) совпадала со значением критерия J для некоторого допустимого решения $\big(x(t),\, u(t)\big)$, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, задачи оптимального управления, удовлетворяющего уравнениям движения (2.50), то это решение будет оптимальным.

Значит, на траекториях системы (2.50) имеем

$$J = D \geq \inf_{x\in X,\, u\in U} D \geq \inf_{(x^0,x^1)\in\Gamma} G - \int\limits_{t_0}^{t_1} \sup_{x\in X,\, u\in U} K\, dt. \tag{2.84}$$

Ввиду неоднозначности действия [103], не умаляя общности, положим

$$\sup_{x\in X,\, u\in U} K = 0. \tag{2.85}$$

В случае, если $\sup_{x\in X,\, u\in U} K = \mu(t)$, то можно произвести замену S на $S - \int_{t_1}^{t} \mu(\tau)\, d\tau$ и прийти к равенству (2.85).

Считая, что выполнено условие (2.85), получим переход оценки (2.84) в неравенство

$$J \geq \inf_{(x^0,x^1)\in\Gamma} G. \tag{2.86}$$

Таким образом, задача состоит в подборе функции $S(x,t)$, при которой в соотношении (2.86) достигается равенство. А именно: надо найти такую $S(x,t)$, чтобы пара $\big(x(t),\, u(t)\big)$, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, обеспечивающая $\inf G$, $\sup K$, удовлетворяла уравнениям движения, т.е. чтобы на этой паре действие совпадало с критерием качества J [72].

Приведем также один из способов нахождения функции Кротова [50, 72], приводящий к процедуре Айзекса–Беллмана. Суть его состоит в следующем. Зададим начальную точку траектории (x^0, t_0), $X = R^n$, и функцию S, полагая, что в равенстве (2.85): $\sup_{u\in U} K = 0$. Будем помимо этого считать, что $G = \mathrm{const}$. Тогда

соотношение (2.85) — это уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sup_{u\in U} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\, f_i(x,u,t) - f_0(x,u,t) \right] = 0$$

с граничным условием $G = \mathrm{const}$ для главной функции (2.62): $S(x^1, t_1) = -\, h_0(x^1)$.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение функций Лагранжа и Гамильтона.
2. Запишите уравнение Беллмана (Айзекса-Беллмана).
3. Что из себя представляет принцип оптимальности Кротова?

2.4 Минимаксный принцип механики в задачах оптимального управления

Завершим главу демонстрацией результатов еще одной работы [112], ярко показывающей тесную связь принципов механики с принципами оптимального управления. Здесь имеется в виду установление идентичности между *минимаксным принципом механики* и принципом максимума Понтрягина в теории управляемых оптимальных систем.

Не отклоняясь в своем изложении сильно от оригинала [112], приведем основные идеи и сформулируем утверждения. Пусть $q(t) \in R^n$ — вектор обобщенных координат системы в момент времени $t \in \in [\,t_0,\, t_1\,]$. Известно, что принцип Гамильтона позволяет связать решения краевой задачи для уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad L = L(q, \dot q, t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.87}$$

имеющими граничные условия

$$q(t) \in A(a, b, t_0, t_1) = \big\{\, q(t):\ q(t) \in C^1[\,t_0, t_1\,],\ q(t_0) = a,\ q(t_1) = b \,\big\}, \tag{2.88}$$

с решением соответствующей вариационной задачи, а именно: на решениях уравнений (2.87) с условиями (2.88) функционал действия по Гамильтону

$$W[\,q(t)\,] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L[\,q(t),\, \dot q(t),\, t\,]\,dt \tag{2.89}$$

принимает стационарное значение.

Помимо вариационного описания задачи (2.87), (2.88) в механике большой интерес представляет вариационный подход к решению уравнений (2.87) с дифференциальными условиями, задающими ограничения на значения координат $q(t)$ и скоростей $\dot q(t)$:

$$\begin{gathered} q(t) \in B = \bigl\{\, q(t):\ q(t) \in C^1[\,t_0,\,t_1\,],\ h_l[\,q(\xi_j),\, \dot q(\xi_j)\,] = 0, \\ j = \overline{1,k},\ l = \overline{1,m},\ t_0 = \xi_0 \le \xi_1 \le\ \dots\ \le \xi_k = t_1 \,\bigr\}. \end{gathered} \tag{2.90}$$

Вариационный подход в задачах оптимального управления механическими системами имеет важное достоинство, поскольку позволяет освободиться и автоматически учесть дифференциальные связи и сформулировать равносильную задачу математического программирования об экстремуме функционала качества, задающего движение системы.

Будем считать, что функция Лагранжа $L = L(q,\dot q,t)$ является строго выпуклой функцией по переменным $\dot q_i,\ i = \overline{1,n}$. Положим, что краевая задача (2.87), (2.88) имеет единственное решение $\forall\, a,b,t_0 < t_1$.

Рассмотрим неотрицательный функционал

$$\begin{gathered} v[\,z(t)\,] = \max_{q(t)\in A(z^0,z^1,t_0,t_1)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \bigl\{\, L[\,z(t),\, \dot z(t),\, t\,] - \\ - L[\,q(t),\, \dot q(t),\, t\,]\,\bigr\}\,dt, \end{gathered} \tag{2.91}$$

определенный для всякой вектор-функции $z(t) \in C^1[\,t_0,\,t_1\,]$, $z^0 = z(t_0)$, $z^1 = z(t_1)$.

Наличие максимума (2.91) следует из единственности решений $q(t)$ системы (2.87) при условиях (2.88). В этом случае [108] существует главная функция Гамильтона $W(a,q,t_0,t)$ в виде значения

функционала (2.89) через a,q,t_0,t на решениях системы (2.87) при условиях (2.88). Эта функция $W(a,q,t_0,t)$ удовлетворяет [108] уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial W}{\partial q},\ t\right) = 0 \tag{2.92}$$

с гамильтонианом $H(q,p,t)$ системы (2.87):

$$H(q,p,t) = \max_{x\in R^n}\Bigl[\,\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - L(q,x,t)\,\Bigr]. \tag{2.93}$$

Отсюда заключаем, что величина $\Delta W = W[\,\varphi(t)\,] - W[\,q(t)\,]$ в силу соотношений (2.92), (2.93) для всякой вектор-функции $\varphi(t) \in \in A(a,b,t_0,t_1)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} \Delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\, L(\varphi,\dot\varphi,t) - \frac{d\,W(a,q,t_0,t)}{dt}\,\right\}dt\ = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\, L(\varphi,\dot\varphi,t) - \frac{d\,W(a,\varphi,t_0,t)}{dt}\,\right\}dt\ = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\, H\left(\varphi,\ \frac{\partial W}{\partial\varphi},\ t\right) - \left[\,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial\varphi_i}\,\dot\varphi_i - L(\varphi,\dot\varphi,t)\,\right]\right\}dt \ge 0, \end{gathered}$$

которое следует из неотрицательности подынтегрального выражения.

Теорема 2.2. *В предположении, что функция $L(q,\dot q,t)$ строго выпукла по $\dot q$, а краевая задача (2.87), (2.88) имеет единственное решение $\forall\, a,b,t_0 < t_1$, система (2.87) будет иметь решение, удовлетворяющее условиям (2.90), тогда и только тогда, когда выполняется требование*

$$V[\,\tilde q(t)\,] = \min_{z(t)\in B}\ \bigl\{\, V[\,z(t)\,]\,\bigr\} = 0, \tag{2.94}$$

или эквивалентное условие минимакса

$$\min_{z(t)\in B}\ \max_{q(t)\in A} \int\limits_{t_0}^{t_1} \{ L[\,z(t),\, \dot z(t),\, t\,] - L[\,q(t),\, \dot q(t),\, t\,] \}\, dt = 0, \qquad (2.95)$$

где $A = A(z^0, z^1, t_0, t_1)$.

Для доказательства необходимости считаем, что $\tilde q(t) \in B$ — решение системы (2.87). Тогда в силу условий теоремы $W[\,\tilde q(t)\,] = \min_{q(t)\in A}\ W[\,q(t)\,]$, где $A = A[\,\tilde q(t_0),\, \tilde q(t_1),\, t_0,\, t_1\,]$. Отсюда следует, что $V[\,\tilde q(t)\,] = 0$. Поскольку $V[\,z(t)\,] \ge 0$, то $\tilde q(t) \in B$ будет доставлять $V[\,z(t)\,]$ абсолютный минимум (2.94).

При доказательстве достаточности полагаем, что $\tilde q(t) \in B$ удовлетворяет условию (2.94). Тогда в силу выражения (2.91) функция $\tilde q(t)$ будет экстремалью, на которой функционал $W[\,q(t)\,]$ на множестве $A[\,\tilde q(t_0),\, \tilde q(t_1),\, t_0,\, t_1\,]$ достигает минимального значения. Согласно принципу Гамильтона $\tilde q(t) \in B$ будет являться решением уравнений (2.87). Теорема 2.2 доказана.

Если воспользоваться функцией Вейерштрасса $E(\cdot)$, то тогда функционал (2.91) представим в виде

$$V[\,z(t)\,] = \int\limits_{t_0}^{t_1} E[\,z,\, \dot z,\, \psi(z,t),\, t\,]\, dt.$$

При $B = A(a, b, t_0, t_1)$ написанный функционал совпадает с действием по Гамильтону (2.89) с точностью до постоянной. Отметим еще, что теорема 2.2 справедлива и для множеств B, в которых задаются дополнительные ограничения в форме неравенств $g[\,q(t),\, \dot q(t)\,] \le 0$ или включений $q(t) \in P$, где P — некоторая n–мерная область.

Для построения функционала $V[\,z(t)\,]$ в общем случае надо воспользоваться конструктивной схемой, приводящей к форме V (2.91), если краевая задача (2.87), (2.88) имеет единственное решение. С этой целью рассмотрим совокупность многогранников G_s^M для любой кривой $z(t) \in C^1[\,t_0,\, t_1\,]$, целого N и конечного числа M:

$$G_s^M = \{\, q, t: \ |\, q_i - z_i(\tau_s)\,| \le M\,(t - \tau_s),$$

$$\tau_0 = t_0, \quad \tau_N = t_1, \quad \tau_s - \tau_{s-1} = (t_1 - t_0)/N \,\} \qquad (2.96)$$

с вершинами в точках $D_s\{\, z(\tau_s),\, \tau_s \,\}$, $i = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, N}$. При выборе

$$M \ge \gamma = \max\ \|\, \dot z(t)\,\|, \qquad t \in [\,t_0,\, t_1\,],$$

кривая $z = z(t) \in G_s^M,\ t \in [\,\tau_{s-1},\, \tau_s\,],\ s = \overline{1, N}$.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $L(q, \dot q, t)$ *строго выпукла по* $\dot q$. *Тогда* $\forall\, z(t) \in C^1[t_0, t_1]$ *существуют числа* $M \ge \gamma$, $M_1 \ge M$ *и целое число* $N_0 = N_0[\,z(t)\,]$ *такие, что* $\forall\, N \ge N_0$ *вершину* $D_s\{\, z(\tau_s),\, \tau_s \,\}$ *каждого многогранника* G_s^M (2.96) *можно соединить с любой его точкой* $F \in G_s^M$ *единственным решением* $\tilde q_s(t)$ *системы* (2.87), *удовлетворяющим ограничению* $\|\, \dot{\tilde q}^s(t)\,\| \le M_1$, *где* $t \in [\,\tau_{s-1},\, \tau_s\,]$. *Если точка* F *лежит на кривой* $z = z(t)$, *т.е.* $F = \{\, z(t)\,\}$, $t \in [\,\tau_{s-1},\, \tau_s\,]$, *то соответствующее решение* $\tilde q^s(t)$ *системы* (2.87) *удовлетворяет условиям:* $\tilde q^s(t) \in G_s^M$, $\|\, \dot{\tilde q}^s(t)\,\| \le M$, $t \in [\,\tau_{s-1},\, \tau_s\,]$, $s = \overline{1, N}$.

Доказательство леммы основано на применении принципа сжатых отображений для системы нелинейных интегральных уравнений $\dot q(t) = R\{\, \dot q(t)\,\}$, в которую преобразуется краевая задача (2.87), (2.88). При разрешении системы (2.87) относительно старших производных: $\ddot q_i = f_i(q, \dot q, t)$, $i = \overline{1, n}$, оператор $R\{\, \dot q(t)\,\}$ будет иметь вид

$$R\{\, \dot q(t)\,\} = \frac{q(\tau) - a}{\tau - t_0} - \frac{1}{\tau - t_0} \int\limits_{t_0}^{\tau} d\xi \int\limits_{t_0}^{\xi} f\left[a + \int\limits_{t_0}^{\theta} \dot q(\mu)\, d\mu,\, \dot q(\theta),\, \theta \right] d\theta \, +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} f\left[a + \int\limits_{t_0}^{\theta} \dot q(\mu)\, d\mu,\, \dot q(\theta),\, \theta \right] d\theta.$$

Оператор $R\{\, v(t)\,\}$ здесь удовлетворяет условию Липшица с константой $\alpha < 1$ при достаточно малом τ в шаре T: $\|\, v(t)\,\| \le M_1$, $t \in [\,t_0,\, \tau\,]$. Надлежащий выбор M_1 гарантирует наличие $v_0 \in T$, для которой все точки последовательности $v_{k+1}(\cdot) = R\{\, v_k(\cdot)\,\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, будут оставаться в T.

Далее, у многогранников G_s^M, покрывающих кривую $z = z(t)$, существуют центральное с центром в D_s поле функционала (4.89), главная функция Гамильтона $W_s[\,q,\, z(\tau_s),\, t,\, \tau_s\,]$ и $\min\, W[\,q(t)\,]$ при

$q(t) \in \in A_s,\ A_s = A[\,z(\tau_{s-1}),\, z(\tau_s),\, \tau_{s-1},\, \tau_s\,]$. Поэтому $\forall\, z(t) \in C^1$ определен неотрицательный функционал

$$V[\,z(t)\,] = \sum_{s=1}^{N} \max_{q^s(t)\in(G_s^M,\, A_s)} \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} \{\, L[\,z(t),\, \dot z(t),\, t\,] -$$

$$-L[\,q^s(t),\, \dot q^s(t),\, t\,]\,\}\, dt, \tag{2.97}$$

где $G_s^M = G_s^M(z(t))$ строятся по $z(t)$ согласно формуле (2.96). Здесь $q^s(t) \in (G_s^M,\, A_s)$ означает принадлежность: $q^s(t) \in G_s^M$, $q^s(t) \in A_s$.

Пользуясь доказательством теоремы 2.2, леммой 2.1, можно убедиться в справедливости следующего минимаксного принципа, дающего вариационное описание решений задачи (2.87), (2.90). Это утверждение является аналогом теоремы 2.2 для функционала (2.97).

Теорема 2.3. *Пусть функция Лагранжа* $L(q, \dot q, t)$ *системы* (2.87) *строго выпукла по* $\dot q_i$, $i = \overline{1, n}$. *Тогда решение* $\tilde q(t) \in C^1$ *системы* (2.87), *удовлетворяющее условиям* (2.90), *существует тогда и только тогда, когда выполнено условие минимакса*

$$\min_{z(t)\in B} \max_{q^s(t)\in\left(G_s^M, A_s\right)} \Big\{ L[\,z(t), \dot z(t), t\,]\, dt -$$

$$- \sum_{s=1}^{N} \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} L[\,q^s(t), \dot q^s(t), t\,]\, dt \Big\} = 0.$$

Итак, при наличии решений $\tilde q(t)$ системы (2.87) с условиями (2.90) они могут быть заданы как решения, лежащие в пересечении множества функций B и множества нулей функционала V: $V[\,\tilde q(t)\,] = 0,\ \tilde q(t) \in B$.

Наконец, обратимся к задаче оптимального управления системой

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{2.98}$$

где $L = L(q, \dot q, t),\ u \in U$, U — выпуклое компактное множество, $u = (u_i)_{i=\overline{1,n}}$ — вектор управлений, $q(t) \in B$, с критерием качества

$$J[\,q(t),\, u(t)\,] = F_1[\,q(t_1),\, \dot q(t_1),\, t_1\,] + \int_{t_0}^{t_1} f_0[\,q(t),\, \dot q(t),\, t\,]\, dt. \tag{2.99}$$

Если записать уравнения (2.98) в форме уравнений (2.87), прибегая при этом к функции Лагранжа $L_1 = L + \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$, то тогда с помощью теоремы 2.3 задачу о минимуме критерия (2.99) на движениях системы (2.98) можно свести к эквивалентной задаче математического программирования

$$\min_{q(t)\in B,\, u(t)\in U} J[\,q(t),\, u(t)\,], \qquad V[\,q(t),\, u(t)\,] = 0. \tag{2.100}$$

Укажем на то, что при решении задачи (2.100) нельзя пользоваться методом множителей Лагранжа, поскольку допустимые функции сообщают стационарное значение функционалу V, задающему ограничение. Чтобы справиться с этой трудностью, применим метод штрафных функций.

Для простоты возьмем $F_1 = 0$, $B = A = A(q^0, q^1, t_0, t_1)$. Так как $V[\,z(t),\, u(t)\,] \geq 0$, зададим штрафной функционал задачи (2.100) по правилу

$$\Psi[\,z(t),\, q(t),\, u(t),\, \lambda\,] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_\lambda\,[\,z(t),\, q(t),\, u(t),\, \lambda\,]\, dt, \tag{2.101}$$

где $\lambda > 0$ и

$$\Phi_\lambda\,[\,z(t),\, q(t),\, u(t),\, \lambda\,] = f_0[\,z(t),\, \dot z(t),\, t\,] +$$

$$+ \lambda \{\, L_1[\,z(t),\, \dot z(t),\, u(t),\, t\,] - L_1[\,q(t),\, \dot q(t),\, u(t),\, t\,]\,\}.$$

Теорема 2.4. *Будем считать, что* $L(q, \dot q, t)$ *строго выпукла по* $\dot q$ *и краевая задача* (2.98), (2.88) *имеет единственное решение* $\forall\, u(t) \in U$ *и* $\forall\, a, b, t_0 < t_1$. *Пусть множество решений краевой задачи* (2.98) *с условиями* $q(t) \in A(q^0, q^1, t_0, t_1)$, $\forall\, u(t) \in U$ *ограничено по норме пространства* $C^1[\,t_0,\, t_1\,]$ *константой* M. *Тогда для* *достаточно больших* $\lambda > 0$ *найдется компактное в* $C^1[\,t_0,\, t_1\,]$ *множество* $\{\, z_\lambda(t),\, q_\lambda(t)\,\}$ *и слабо компактное множество* $\{\, u_\lambda(t)\,\}$ *решений* $\{\, \tilde z_\lambda(t),\, \tilde q_\lambda(t),\, \tilde u_\lambda(t)\,\}$ *задачи*

$$\min_{u(t)\in U,\, z(t)\in A}\ \max_{q(t)\in A}\ \Psi[\, z(t),\, q(t),\, u(t),\, \lambda\,] =$$
$$\Psi[\, \tilde z_\lambda(t),\, \tilde q_\lambda(t),\, \tilde u_\lambda(t),\, \lambda\,]. \qquad (2.102)$$

Пределом любой сходящейся подпоследовательности $\{\, \tilde z_{\lambda_s}(t),\, \tilde u_{\lambda_s}(t)\,\}$ *тогда при* $\lambda_s \to \infty$ *будет решение* $\{\, \tilde q(t),\, \tilde u(t)\,\}$ *исходной задачи оптимального управления:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ \Psi[\, \tilde z_\lambda(t),\, \tilde q_\lambda(t),\, \tilde u_\lambda(t),\, \lambda\,] = J[\, \tilde q(t),\, \tilde u(t)\,].$$

Замечания. 1. Отметим, что в задаче (2.102) необходимые условия приводят к условию минимума

$$\min_{u(t)\in U}\ \Phi_\lambda\,[\, \tilde z_\lambda(t),\, \tilde q_\lambda(t),\, u(t),\, t\,] = \Phi_\lambda\,[\, \tilde z_\lambda(t),\, \tilde q_\lambda(t),\, \tilde u_\lambda(t),\, t\,]. \quad (2.103)$$

Условие (2.103) при $\lambda \to \infty$ преобразуется в необходимые условия принципа максимума Понтрягина [108], если сделать переход от лагранжевых переменных (z, q) к соответствующим каноническим переменным $(z, q;\, y, p)$.

2. Для общего случая, когда $L = L_0(q, \dot q, t) + L_1(q, u, t)$, в штрафном функционале вида (2.101) надо использовать функционал (2.97) и с помощью метода множителей учитывать условия $q(t) \in B$.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем состоит минимаксный принцип механики?
2. Запишите условие минимакса.
3. Запишите штрафной функционал.

Глава 3

Вариационные задачи теории оптимального управления

Задачи оптимального управления движением динамических систем привлекают большое внимание специалистов. При их решении пользуются как классическим аппаратом вариационного исчисления [4, 55, 60, 70, 71, 79, 87, 102, 104, 118, 127, 128, 140, 142, 145, 165, 168, 169, 174, 178], так и новейшими методами, включая принцип максимума, методы функционального анализа и динамического программирования [10, 11, 13, 19, 39–42, 49, 50, 66, 69, 72, 107, 108, 116, 119, 125, 130, 131, 136, 137, 153, 166, 167, 179].

Особое место в теории оптимальных систем при использовании вариационных методов занимают задачи вариационного исчисления для установления условий оптимальности и обнаружения экстремальных режимов функционирования в динамических системах и, в частности, в управляемых системах. Задачам вариационного исчисления посвящена эта глава; здесь же акцентируется внимание на общих вариационных проблемах теории управления [100–102, 104] и на одной из важнейших вариационных задач — задаче Майера–Больца и обсуждается ход ее решения [14, 87, 127, 128].

Задачи оптимизации при наличии ограничений на фазовые переменные и управления могут быть решены в рамках методов классического вариационного исчисления при их соответствующей модификации и обобщении, например, при использовании: преобразования Гернет–Валентайна, позволяющего переходить от замкнутых к открытым областям, метода Красовского–Кирилловой замены ограничений на управление с последующим предельным переходом, метода интервалов Фельдбаума, модификаций Кротова в теории разрывных экстремалей, метода Лурье–Троицкого в решении задачи Майера–Больца, а также некоторых других усовершенствований и обобщающих приемов.

В § 3.1 изучаются вариационные задачи управления движением динамических систем при наличии ограничений на управления. Задача оптимального управления ставится как вариационная задача Больца. Вводятся слабые (бесконечно малые) и сильные (конечные) вариации соответственно фазовых переменных и их скоростей. Сильным вариациям управлений отвечают игольчатые вариации. Основное внимание в параграфе уделяется выводу формулы для полной вариации условного функционала. Для управляемых систем обосновываются условия непрерывности Вейерштрасса–Эрдмана в угловых точках, а также необходимые условия экстремума, включая условие трансверсальности, которые при сильной вариации управлений приобретают форму принципа максимума Понтрягина.

В § 3.2 помещена модельная задача, на которой проходят обкатку вариационные методы решения задач оптимального управления, представленные в § 3.1. А именно изучается достаточно полно задача оптимального гашения колебаний спутника относительно его центра масс. Вначале делается обоснование уравнения движения спутника, вводятся ограничения по управлению, граничные условия и функционалы качества. Затем проводится исследование оптимальных режимов управления с помощью анализа функции Гамильтона и делаются заключения о характере поведения энергетически оптимальных и оптимальных по быстродействию фазовых траекторий.

§ 3.3 содержит материал о вариационной задаче Майера–Больца оптимизации процессов управления. Особенностью рассматриваемой задачи является наличие ограничений на управления в виде равенств и нахождение необходимых условий стационарности исходного неинтегрального функционала качества. С учетом связей, накладываемых на концы траекторий, когда конечный момент времени может быть нефиксированным, составляется полная вариация вспомогательного условного функционала, равенство которой нулю позволяет найти всю совокупность необходимых условий стационарности.

В § 3.4 рассматривается вариационная проблема Майера–Больца в оптимизационной задаче управления с функционалом, содержащим как неинтегральную, так и интегральную части, с ограничениями на управления в виде равенств и с концевыми условиями, где начальный и конечный моменты времени могут быть нефиксированными. Устанавливаются: условие стационарности исходного функционала качества и необходимые условия его минимума в форме Вейерштрасса, Клебша, Якоби.

3.1 О вариационных задачах управления движением

Этот параграф может рассматриваться как своего рода общедоступное введение в теорию варьирования в расширенном «управляемом» пространстве допустимых кривых сравнения [102],откуда сведения потребуются нам для изучения других вариационных задач оптимизации движения.

3.1.1. Постановка вариационных задач управления движением. Пусть движение управляемой динамической (механической) системы описывается векторным n–мерным уравнением

$$\dot{x} = F(x, u, t), \qquad F, F'_x \in C^1, \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ — *фазовый вектор*, $x \in R^n$, $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — фазовые переменные (координаты, скорости), время $t \in [t_0, t_1] \subset R$, $u = (u_1, ..., u_r)$ — *вектор управления*, $u \in U \subset R^r$, $u_j = u_j(t)$, $j = \overline{1, r}$ — *управляющие функции* из класса кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разрыва и со значениями в r–мерном множестве допустимых управлений U:

$$C_{j1} \leq u_j \leq C_{j2}, \qquad j = \overline{1, r}, \tag{3.2}$$

где C_{j1}, C_{j2} — некоторые постоянные (не исключен случай, когда $C_{j1} = -\infty$, $C_{j2} = \infty$).

Предполагается, что разрывы управлений изолированы, либо управления непрерывны справа. Такие управления будем называть *допустимыми*. Кроме того, считается, что правые части уравнения (3.1) при некотором выбранном управлении удовлетворяют условию существования и единственности решения задачи Коши в некоторой ограниченной области $D \subset R^n \times R^r \times R$. То есть любому допустимому управлению для уравнения (3.1) отвечает единственная непрерывная интегральная траектория в расширенном фазовом пространстве $R^n \times R$ — с началом в точке $x_i^0 = x_i(t_0)$ и с концом в точке $x_i^1 = x_i(t_1)$, $i = \overline{1,n}$. Пару векторов (x, u) будем называть также *управляемым процессом.*

Отметим, что граничные значения фазовых переменных x_i^0, x_i^1 и моментов времени t_0, t_1 могут быть связаны l зависимостями:

$$G_k(x_i^0,\, x_i^1,\, t_0,\, t_1) = 0, \qquad k = \overline{1,l}, \tag{3.3}$$

$$G_k \in C^1, \qquad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial G_k}{\partial x_i^0}, \frac{\partial G_k}{\partial x_i^1}, \frac{\partial G_k}{\partial t_0}, \frac{\partial G_k}{\partial t_1}\right) = l,$$

где $l \le 2n + 2$. Непрерывную интегральную траекторию системы (3.1), удовлетворяющую условиям (3.2), (3.3), называют *допустимой траекторией.*

Задача оптимизации движения системы (3.1) заключается в нахождении допустимых управлений как явных функций времени, а также допустимых граничных значений $x_i^0,\, x_i^1,\, t_0, t_1,\ i = \overline{1,n}$, при которых функционал

$$J = G_0(x^0, x^1, t_0, t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(x, u, t)\, dt, \qquad F_0,\, F'_{0x},\, G_0 \in C^1, \tag{3.4}$$

вычисленный при выбранных управлениях и граничных значениях на соответствующей интегральной кривой уравнения (3.1), был наименьшим в сравнении со значениями функционала на всех других допустимых траекториях.

Обратимся теперь к понятию вариации. *Вариацией* переменной величины называется разность значений этой величины на некоторой допустимой траектории (основной, *опорной*) и на какой-либо допустимой близкой траектории, называемой *траекторией сравнения.*

Дополнительные переменные — управления $u_j(t)$, $j = \overline{1,r}$ — могут меняться скачками. Поэтому вариация управления в качестве разности значения управления на опорной траектории и бесконечно близкой (по x и t) возможной траектории сравнения может быть величиной конечной и достигать значения $C_{j2} - C_{j1}$, $j = \overline{1,r}$.

Векторное уравнение (3.1) можно рассматривать как векторное n–мерное уравнение связи, которое дает ограничения на производные от фазовых переменных: $\dot{x}(t)$. На фазовые переменные $x(t)$ наложены лишь удерживающие ограничения (3.3) для начальных и конечных значений. Из уравнения (3.1) следует, что на бесконечно близких (по x и t) допустимых траекториях из-за конечности вариаций управлений вариации $\dot{x}$ могут быть конечными. Бесконечно малые вариации называют также *слабыми*, а конечные вариации — *сильными.*

При сильном варьировании управлений используют так называемые *игольчатые вариации.* Их построение основано на следующей конструкции. Возьмем произвольные $t^{(\sigma)}$ и $v_1^{(\sigma)}, \ldots, v_r^{(\sigma)}$, $\sigma = \overline{1,N}$, такие, что $t_0 < t^{(1)} < \ldots < t^{(N)} < t_1$, $C_{j1} \le v_j^{(\sigma)} \le C_{j2}$, $j = \overline{1,r}$. Выберем также достаточно малые числа $\Delta t^{(\sigma)} > 0$, Δt_0, Δt_1 так, чтобы не пересекались полуинтервалы $\tau^{(\sigma)} = \left[\, t^{(\sigma)},\, t^{(\sigma)} + \Delta t^{(\sigma)}\right)$ и τ_0, τ_1, где

$$\tau_0 = \begin{cases} [\, t_0,\, t_0 + \Delta t_0), & \Delta t_0 > 0, \\ [\, t_0 + \Delta t_0,\, t_0), & \Delta t_0 < 0, \end{cases} \qquad \tau_1 = \begin{cases} [\, t_1,\, t_1 + \Delta t_1), & \Delta t_1 > 0, \\ [\, t_1 + \Delta t_1,\, t_1), & \Delta t_1 < 0. \end{cases}$$

Пусть $u(t)$ — управление на основной (опорной) траектории, а $\bar{u}(t)$ — управления сравнения такие, что

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t_0), & t \in \tau_0, \\ v^{(\sigma)}, & t \in \tau^{(\sigma)}, \quad \sigma = \overline{1,N}, \\ u(t), & t \notin \tau_0 \cup \tau^{(\sigma)} \cup \tau_1, \\ u(t_1), & t \in \tau_1. \end{cases}$$

Игольчатой вариацией вектора управления Δu называется разность: $\Delta u = \bar{u}(t + \Delta t) - u(t)$.

Укажем в связи с этим определением, что величины, взятые на траектории сравнения, будем отмечать черточкой сверху. Разность какой-либо величины на основной траектории и бесконечно близкой к ней (по x и t) траектории сравнения берем в качестве вариации этой величины на основной траектории.

Далее, вариация величины, вычисленная для одного и того же момента времени t называется *изохронной* и обозначается δ. Если же при вычислении вариации рассматривается значение величины на траектории сравнения в момент времени $t + \Delta t$, то эту вариацию называем *полной* и обозначаем Δ.

3.1.2. Вариация функционала. С учетом наличия дифференциальных связей в виде уравнений движения (3.1) введем *множители Лагранжа* $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, где $\lambda_i(t)$ — неизвестные функции времени, определяемые в процессе решения задачи оптимизации при обеспечении уравнений связей (3.1).

В этом случае исходный функционал качества J (3.4) равносилен на допустимых траекториях *условному* (или вспомогательному) *функционалу*

$$J_* = G_0(x^0, x^1, t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, \lambda, u, t)\, dt, \tag{3.5}$$

где $L = F_0 + \lambda\,(\dot{x} - F)$, $\lambda = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{1,n}}$, L — *функция Лагранжа.* При задании и учете граничных условий (3.3) целесообразно ввести дополнительный набор лагранжевых множителей μ_k, $k = \overline{1,l}$, и рассматривать вспомогательный функционал вида

$$J_{**} = G + \int_{t_0}^{t_1} L\, dt, \qquad G = G_0 + \sum_{k=1}^{l} \mu_k G_k. \tag{3.6}$$

Безусловная вариационная задача с функционалом (3.5) (или (3.6)), обеспечивающим выполнение связей (3.1) ((3.1) и (3.3)), как известно, обладает решением, удовлетворяющим условной вариационной задаче с функционалом (3.4) и связями (3.1) ((3.1) и (3.3)).

Для варьирования условного функционала J_{**} будем предполагать, что величины $\delta x, \delta\lambda, \Delta t$ и общие длительности участков конечных вариаций управлений u и скоростей $\dot{x}$ имеют одинаковый порядок малости σ. Взаимосвязь полных и изохронных вариаций задается соотношениями

$$\Delta x_i = \bar{x}_i(t + \Delta t) - x_i(t) = \bar{x}_i(t + \Delta t) - \bar{x}_i(t) + \delta x_i,$$

$$\Delta x_i = \delta x_i + \dot{\bar{x}}_i\, \Delta t, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Слабая вариация некоторой функции выражается главной линейной частью ее приращения при варьировании аргументов этой функции. В формуле (3.7) величину $\dot{\bar{x}}_i$ можно поменять на $\dot{x}_i$, если эти величины бесконечно мало разнятся между собой. Полезно

также иметь в виду, что $\delta\dot{x}_i = \dot{\bar{x}}_i - \dot{x}_i = d\,(\bar{x}_i - x_i)/dt = d\,(\delta x_i)/dt$ и здесь конечное значение $\delta\dot{x}_i$ не противоречит тому, что величина δx_i имеет бесконечно малое значение.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении полной вариации функционала J_{**}:

$$\Delta J_{**} = \Delta S + \Delta G, \qquad S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt, \tag{3.8}$$

где величина S называется *функционалом действия.* Для определения ΔS перейдем от функции Лагранжа L к соответствующей *функции Гамильтона* H с помощью *преобразования Лежандра*:

$$H(x, \lambda, u, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \dot{x} - L, \qquad L = L(x, \dot{x}, \lambda, u, t). \tag{3.9}$$

Используя определение функции L и формулу (3.9), получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \lambda, \qquad H = \lambda F - F_0. \tag{3.10}$$

Пусть $\Delta S = \Delta_1 S + \Delta_2 S$, где $\Delta_1 S$ — вариация функционала действия, вызванная слабыми вариациями x, λ, u и t, а также слабыми и сильными вариациями $\dot{x}$; $\Delta_2 S$ — вариация функционала действия, вызванная сильными игольчатыми вариациями u.

На основании соотношений (3.8) – (3.10) можем написать

$$\Delta_1 S = \int_{t_0+\Delta t_0}^{t_1+\Delta t_1} \bar{\lambda}\dot{\bar{x}}\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda\dot{x}\, dt - \Delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt \; =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big(\bar{\lambda}\dot{\bar{x}} - \lambda\dot{x}\big)\, dt + \bar{\lambda}\dot{\bar{x}}\big|_{t_1} \Delta t_1 - \bar{\lambda}\dot{\bar{x}}\big|_{t_0} \Delta t_0 -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \delta H\, dt - H_1\, \Delta t_1 + H_0\, \Delta t_0, \tag{3.11}$$

где все равенства в (3.11) справедливы с точностью до бесконечно малых, порядка малости выше первого.

Пусть $\bar\lambda = \lambda + \delta\lambda$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\bar\lambda\dot{\bar x} - \lambda\dot x\big)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda\,\big(\dot{\bar x} - \dot x\big)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{\bar x}\,\delta\lambda\,dt \;= \tag{3.12}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda\,\frac{d}{dt}\,(\delta x)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot x\,\delta\lambda\,dt + ... = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(-\,\dot\lambda\,\delta x + \dot x\,\delta\lambda\big)\,dt + \lambda\,\delta x\,\Big|_{t_0}^{t_1} + ...,$$

где многоточием обозначены малые с порядком малости выше первого.

Воспользуемся тем, что для слабых вариаций управлений

$$\delta H(x,\lambda,u,t) = \frac{\partial H}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial H}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial H}{\partial u}\,\delta u. \tag{3.13}$$

Учитывая равенства (3.12), (3.13) и соотношения (3.7), получим для $\Delta_1 S$ (3.11):

$$\Delta_1 S = -\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot\lambda\Big)\,\delta x + \Big(\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \dot x\Big)\,\delta\lambda + \frac{\partial H}{\partial u}\,\delta u\Big]\,dt +$$
$$+\,\big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\,\Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{3.14}$$

С точностью до малых второго и выше порядков можем, пользуясь формулами (3.8) – (3.10), написать равенство для $\Delta_2 S$:

$$\Delta_2 S = \sum_{\sigma=1}^{N}\int\limits_{t^{(\sigma)}}^{t^{(\sigma)}+\Delta t^{(\sigma)}}\big[\,H(x,\lambda,u,t) - H(x,\lambda,v^{(\sigma)},t)\,\big]\,dt. \tag{3.15}$$

Пусть $t_* \in (t_0,\,t_1)$ — произвольный момент времени, в том числе и совпадающий с точкой разрыва управлений. Имеем для функционала действия

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_*} L\,dt + \int\limits_{t_*}^{t_1} L\,dt. \tag{3.16}$$

К каждому интегралу справа в равенстве (3.16) применим формулу вида (3.14):

$$\Delta_1 S = -\int\limits_{t_0}^{t_*}\Big[\Big(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot\lambda\Big)\,\delta x + \Big(\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \dot x\Big)\,\delta\lambda + \frac{\partial H}{\partial u}\,\delta u\Big]\,dt +$$
$$+\,\big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\,\Big|_{t_0}^{t_*-0} -$$
$$-\int\limits_{t_*}^{t_1}\Big[\Big(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot\lambda\Big)\,\delta x + \Big(\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \dot x\Big)\,\delta\lambda + \frac{\partial H}{\partial u}\,\delta u\Big]\,dt +$$
$$+\,\big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\,\Big|_{t_*+0}^{t_1}. \tag{3.17}$$

Сравнивая выражения (3.14) и (3.17), найдем, что

$$\big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\,\Big|_{t_*-0} - \big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\,\Big|_{t_*+0} = 0. \tag{3.18}$$

Из непрерывности основной траектории и траектории сравнения устанавливаем

$$\Delta x\,\Big|_{t_*-0} = \Delta x\,\Big|_{t_*+0} = \Delta x, \qquad \Delta t\,\Big|_{t_*-0} = \Delta t\,\Big|_{t_*+0} = \Delta t_*.$$

В силу независимости вариаций Δx_i и Δt_* из равенства (3.18) следует, что

$$\Lambda_i\,\Big|_{t_*-0} = \lambda_i\,\Big|_{t_*+0}, \qquad H\,\Big|_{t_*-0} = H\,\Big|_{t_*+0}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.19}$$

Написанные условия называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана.* Условия (3.19) иначе называются условиями непрерывности, так как указывают на непрерывность лагранжевых множителей и гамильтониана на основной траектории, в том числе и в *угловых точках*, где скорости $\dot x$ терпят разрыв.

Из этих условий также вытекает непрерывность подинтегрального выражения в формуле (3.15), которую можно после выделения линейной части записать в виде

$$\Delta_2 S = \sum_{\sigma=1}^{N}\big[\,H(x,\lambda,u,t) - H(x,\lambda,v^{(\sigma)},t\,\big]_{t=t^{(\sigma)}}\,\Delta t^{(\sigma)}, \tag{3.20}$$

где $x = \big(x_i(t^{(\sigma)})\big)$, $\lambda = \big(\lambda_i(t^{(\sigma)})\big)$, $i = \overline{1,n}$ — значения фазовых переменных и множителей Лагранжа на основной траектории.

Теперь можем привести окончательную формулу полной вариации условного функционала J_{**}, где $\Delta S = \Delta_1 S + \Delta_2 S$. Имеем

$$\Delta J_{**} = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right) \delta\lambda + \frac{\partial H}{\partial u}\, \delta u \right] dt +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{N} \left[H(x,\lambda,u,t) - H(x,\lambda,v^{(\sigma)},t) \right]_{t=t^{(\sigma)}} \Delta t^{(\sigma)} +$$

$$+ \Delta G + \big(\lambda\, \Delta x - H\, \Delta t\big)\Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{3.21}$$

3.1.3. Необходимые условия сильного экстремума. Говорят, что на опорной траектории достигается *сильный* по $\dot{x}$ *относительный* (локальный) *минимум*, если на этой траектории значение функционала не превосходит значения функционала на любой допустимой траектории при слабых и сильных изолированных вариациях $\dot{x}_i$ и при слабых вариациях x_i, u_j, t, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r}$.

В случае, если на опорной траектории достигается локальный минимум, то имеем $\Delta J_{**} \geq 0$. Пусть на допустимых траекториях сравнения управления выбраны оптимальными и $\bar{u} = u$, $\delta u = 0$. Тогда для наличия экстремума необходимо выполнение *условия стационарности* $\Delta J_{**} = 0$.

Исходя из формулы (3.21) при соответствующей независимости вариаций получим с учетом равенств (3.10) необходимые условия стационарности в виде:

уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial F_0}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{\partial F_s}{\partial x_i}; \tag{3.22}$$

уравнений движения (3.1), представленных как

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = F_i; \tag{3.23}$$

и общих *условий трансверсальности*:

$$\Delta G + \big(\lambda\, \Delta x - H\, \Delta t\big)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{3.24}$$

После подстановки в соотношение (3.24) выражения

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x^0}\, \Delta x^0 + \frac{\partial G}{\partial x^1}\, \Delta x^1 + \frac{\partial G}{\partial t_0}\, \Delta t_0 + \frac{\partial G}{\partial t_1}\, \Delta t_1$$

получим $2n+2$ условий трансверсальности в развернутом виде

$$\frac{\partial G}{\partial x_i^0} - \lambda_i^0 = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_i^1} + \lambda_i^1 = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t_0} + H_0 = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t_1} - H_1 = 0,$$

где $x_i^0 = x_i(t_0)$, $\lambda_i^0 = \lambda_i(t_0)$, $x_i^1 = x_i(t_1)$, $\lambda_i^1 = \lambda_i(t_1)$, $H_0 = H\big|_{t_0}$, $H_1 = = H\big|_{t_1}$, которые следует решать совместно с граничными условиями (3.3).

Полагая, что управления имеют слабые вариации, найдем из формулы полной вариации условного функционала (3.21) необходимое условие минимума

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial u}\, \delta u\, dt \geq 0.$$

Для внутренних значений $u_j \in (C_{j1}, C_{j2})$, $j = \overline{1,r}$, при изолированных разрывах, когда $\delta u_j \neq 0$ и подинтегральное выражение не меняет знак, должно выполняться условие стационарности по u_j:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \qquad u_j \in (C_{j1}, C_{j2}), \qquad j = \overline{1,r}. \tag{3.25}$$

Кроме того, считая, что $\delta u_j \geq 0$ при $u_j = C_{j1}$ и $\delta u_j \leq 0$ при $u_j = C_{j2}$, получим следующие неравенства:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}\bigg|_{u_j = C_{j1}} \leq 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial u_j}\bigg|_{u_j = C_{j2}} \geq 0. \tag{3.26}$$

3.1.4. Некоторые замечания. Выскажем ряд замечаний и соображений (подробности см. в работе [102]) в связи с обсуждением вопроса о необходимых условиях экстремума.

Из курса вариационного исчисления известно, что для случая сильного по $\dot{x}$ и слабого по x и t относительного минимума функционала действия, когда лагранжиан $L(x,\dot{x},t)$ нелинейно зависит от $\dot{x}$, необходимо наличие условия Вейерштрасса. С этой целью вводят в рассмотрение функцию $L(x,\xi,t)$, полученную из функции Лагранжа $L(x,\dot{x},t)$ при замене $\dot{x}$ на ξ. Разлагая в ряд, найдем

$$L(x,\xi,t) = L(x,\dot{x},t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\big(\xi - \dot{x}\big) + \alpha\big(|\,\xi - \dot{x}\,|\big),$$

где через $\alpha(\cdot)$ обозначена совокупность бесконечно малых порядка малости выше первого относительно $|\,\xi - \dot{x}\,|$. Затем составляется *функция Вейерштрасса*:

$$E = L(x,\xi,t) - L(x,\dot{x},t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\big(\xi - \dot{x}\big),$$

и *условие Вейерштрасса* имеет вид: $E \geq 0$.

В исследуемой вариационной задаче механики управляемого движения в согласии с формулами (3.9), (3.10), когда функция Лагранжа L линейно зависит от $\dot{x}$, имеем

$$L = F_0(x,u,t) + \lambda\big[\,\dot{x} - F(x,u,t)\,\big], \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \lambda,$$

и, следовательно,

$$E = F_0 + \lambda\,(\xi - F) - F_0 - \lambda\,(\dot{x} - F) - \lambda\,(\xi - \dot{x}) \equiv 0,$$

т.е. условие Вейерштрасса выполняется.

Легко обнаружить, что система уравнений (3.22), (3.23) составляет каноническую систему с функцией Гамильтона H, координатами x_i и импульсами λ_i. Отличие этой системы от обычной канонической системы динамики заключается в линейной зависимости H от λ_i и присутствии дополнительных переменных u_j как неизвестных функций t.

На участках, которые не содержат угловых точек с разрывами управлений, имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial u}\,\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3.27}$$

где $H = H(x,\lambda,u,t)$ и равенство (3.27) достигается на основании соотношений (3.22), (3.23), (3.25).

Отсюда с учетом формулы (3.10) для любого участка экстремали, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума, имеем

$$H = h + \int\limits_{t_0}^{t}\left(-\frac{\partial F_0}{\partial t} + \lambda\,\frac{\partial F}{\partial t}\right)dt, \qquad h = \text{const}, \tag{3.28}$$

где постоянная h принимает одинаковое значение на всей экстремали в силу непрерывности H в угловых точках по условиям Вейерштрасса–Эрдмана. Если F_0, F явно от t не зависят, то из равенства (3.28) следует $H = h$.

При $\partial F_0/\partial x_i = 0$ уравнения (3.22) и (3.23) принимают вид

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{*}\lambda, \qquad \dot{x} = F,$$

т.е. в этом случае система уравнений (3.22) *сопряжена* с системой (3.23) и вектор $\lambda(t)$ является вектором сопряженных переменных.

Кроме того, функции L и H в силу преобразования Лежандра являются сопряженными характеристическими функциями, поскольку на основании соотношений (3.9), (3.10), (3.23) можем написать

$$L = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,\lambda - H = F_0.$$

Если теперь ввести новую переменную x_0, определяемую уравнением $\dot{x}_0 = F_0(x_i,u_j,t)$, $x, F \in R^{n+1}$, и дополнительный лагранжев множитель $\lambda_0 = -1$, то тогда $H = \lambda_0 F_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i = \lambda F$, $\lambda \in R^{n+1}$. Имеем также дополнительное уравнение Эйлера–Лагранжа по λ_0 : $\dot{\lambda}_0 = -\partial H/\partial x_0 = 0$. При таком подходе *вариационная задача Больца* с функционалом вида (3.4) заменяется *вариационной задачей Майера* с неинтегральным функционалом $J = x_0^1 - x_0^0 + G_0$.

Иногда бывает предпочтительно в отдельных задачах минимизировать функционал J_* (3.5) непосредственно, без введения множителей μ_k, $k = \overline{1,l}$. В этом случае общее условие трансверсальности будет иметь вид (ср. с условием (3.24)):

$$\Delta G_0 + \big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{3.29}$$

Для задачи оптимального быстродействия можно взять $F_0 = 0$, $G_0 = = t_1 - t_0$ и решать вариационную задачу Майера. При этом условие трансверсальности (3.29) запишется как

$$\big[\,\lambda\,\Delta x + (1 - H)\,\Delta t\,\big]_{t_0}^{t_1} = 0, \qquad H = \lambda F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i. \tag{3.30}$$

При заданных x^0, x^1, t^0 имеем $\Delta x^0 = 0$, $\Delta x^1 = 0$, $\Delta t_0 = 0$. Так как $\Delta t_1 > 0$, то из равенства (3.30) получим $H_1 = \lambda F\big|_{t_1} = 1$. Если $\partial F/\partial t = 0$, то найдем первый интеграл системы уравнений движения и уравнений Эйлера–Лагранжа, а именно $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i = h = \mathrm{const}$.

Если в указанной задаче оптимального быстродействия положить $F_0 = 1$, $G_0 = 0$, то придем к вариационной задаче с чисто интегральным функционалом, называемой *вариационной задачей Лагранжа*. В этом случае общее условие трансверсальности приобретает вид

$$\big(\lambda\,\Delta x - H\,\Delta t\big)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \qquad H = -1 + \lambda F.$$

Имеем также $H_1 = -1 + \lambda F\big|_{t_1} = -1 + 1 = 0$. Для стационарной задачи, когда $\partial F/\partial t = 0$, получим тот же интеграл системы уравнений движения и уравнений Эйлера–Лагранжа.

Заметим еще, что если функция Гамильтона H линейна по управлениям u_j, то функция $\partial H/\partial u_j$ будет непрерывной функцией времени. Из формул (3.25), (3.26) следует, что в моменты времени, когда u_j изменяется (*точки переключения управлений*), выполняются равенства: $\partial H/\partial u_j = 0$, $j = \overline{1,r}$.

3.1.5. Условие экстремальности при сильной вариации управления. Обратимся к формуле полной вариации функционала ΔJ_{**} (3.21). Для ненулевой игольчатой вариации с верхним индексом σ и нулевых значениях других вариаций из нее получим

$$H\big(x, \lambda, u, t^{(\sigma)}\big) - H\big(x, \lambda, v^{(\sigma)}, t^{(\sigma)}\big) \ge 0, \tag{3.31}$$

где $v^{(\sigma)} \in U$, $x = x\big(t^{(\sigma)}\big)$, $\lambda = \lambda\big(t^{(\sigma)}\big)$, $u = u\big(t^{(\sigma)}\big)$ — соответствующие значения на оптимальной траектории.

Необходимое условие (3.31) вместе с уравнением (3.22) относительно λ называется *принципом максимума Понтрягина*, поскольку оно равносильно при выбранном ограниченном множестве допустимых управлений U, удовлетворяющих неравенству (3.2), следующему соотношению:

$$H(x, \lambda, u, t) = \max_{\bar u \in U}\; H(x, \lambda, \bar u, t). \tag{3.32}$$

В формуле (3.32) максимум функции H берется по управлениям, а значения переменных x и λ слева и справа, взятые в момент времени t на оптимальной траектории, одинаковые. Из принципа максимума (3.32) следуют условия (3.25), (3.26). Итог: условия (3.22) – (3.26), (3.29), (3.32) представляют собой необходимые условия сильного по $u, \dot x$ относительного минимума функционала (3.4) при наличии ограничений (3.1) – (3.3).

Пусть функция H линейна по u_j, где $u_j \in U$ (3.2), т.е. имеем уравнение прямой в плоскости $(u_j,\, H)$: $H = H_1 u_j + H_2$, где H_1, H_2 не зависят от u_j. При $\partial H/\partial u_j = H_1 > 0$ прямая имеет острый угол наклона с осью u_j; на отрезке $u_j \in [\,C_{j1},\, C_{j2}\,]$ функция H растет и max H достигается, когда $u_j = C_{j2}$. И наоборот, при $\partial H/\partial u_j = H_1 < < 0$ угол наклона прямой с осью u_j тупой, функция H убывает и max H достигается при $u_j = C_{j1}$.

В точках переключения управлений и при $u_j \in (C_{j1},\, C_{j2})$ имеем $\partial H/\partial u_j = 0$, поэтому, если это уравнение выполняется только в изолированных точках, то участков с $u_j \in (C_{j1},\, C_{j2})$ не будет. В этом случае оптимальный режим осуществляется при чередовании граничных управлений $u_j = C_{j1}$ и $u_j = C_{j2}$, $j = \overline{1,r}$.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте постановку вариационной задачи управления движением.

2. Какие вариации называются слабыми, сильными, игольчатыми?
3. Что такое траектория сравнения?
4. Что из себя представляет полная вариация функционала?
5. Как выглядят преобразования Лежандра?
6. Запишите условия Вейерштрасса-Эрдмана.
7. Запишите функцию Вейерштрасса.

3.2 Оптимальное гашение колебаний

Рассмотрим задачу оптимального демпфирования колебаний спутника относительно центра масс, пользуясь результатами работы [102] на основе материала предыдущего параграфа.

Пусть имеется две системы координат с началом в центре масс C спутника, находящегося на круговой орбите. Первая: орбитальная (C, x_0, y_0, z_0) с ортами i_0, j_0, k_0, где ось Cz_0 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс r_c, ось Cx_0 — в сторону движения центра масс в плоскости орбиты ортогонально Cz_0, ось Cy_0 ортогональна плоскости орбиты; вторая: (C, x, y, z) — жестко связанная со спутником система координат главных центральных осей инерции с ортами i, j, k и моментами инерции I_x, I_y, I_z. Напоминаем, что векторные величины нигде не выделяются, а определяются из контекста задачи.

Обозначим через κ^2 произведение гравитационной постоянной на массу планеты. Тогда выражение для момента M гравитационных сил относительно точки C запишется в виде интеграла по массе m спутника

$$M = -\kappa^2 \int\limits_m \big((r - r_c) \times r\big)/|\, r\,|^3\, dm,$$

где $|\, r\,|$ — модуль вектора r, r — радиус-вектор элемента массы dm.

Имеем

$$r - r_c = xi + yj + zk, \quad r_c = |\, r_c\,|\, k_0, \quad k_0 = a_{13} i + a_{23} j + a_{33} k.$$

Отсюда получим

$$(r - r_c) \times r = (r - r_c) \times r_c = |\, r_c\,| \big[\big(y a_{33} - z a_{23}\big)\, i + \big(z a_{13} - x a_{33}\big)\, j + \big(x a_{23} - y a_{13}\big)\, k \,\big],$$

$$|\, r\,|^2 = |\, r_c\,|^2 + 2\, |\, r_c\,| \, \big(x a_{13} + y a_{23} + z a_{33}\big) + x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{1}{|\, r\,|^3} = \frac{1}{|\, r_c\,|^3} \left[1 + 2 \left(\frac{x}{|r_c\,|}\, a_{13} + \frac{y}{|\, r_c\,|}\, a_{23} + \frac{z}{|\, r_c\,|}\, a_{33} \right) + \left(\frac{x}{|\, r_c\,|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|\, r_c\,|}\right)^2 + \left(\frac{z}{|\, r_c\,|}\right)^2 \right]^{-3/2} + $$

$$= \frac{1}{|\, r_c\,|^3} \left[1 - \frac{3}{|\, r_c\,|} \, \big(x a_{13} + y a_{23} + z a_{33}\big) + \alpha \left(\frac{l}{|\, r_c\,|} \right) \right],$$

где l — наибольший линейный размер спутника, $\alpha\,(\beta)$ — величины бесконечно малые относительно β. Угловая скорость орбитального движения центра масс C для кругового спутника равна $\kappa/|\, r_c\,|^{3/2} = \omega_0 = \mathrm{const}$.

При совпадении центра подвижной системы координат (C, x, y, z) с центром масс спутника имеем нулевые статические моменты: $\int_m x\, dm = \int_m y\, dm = \int_m z\, dm = 0$. При равенстве нулю центробежных моментов: $\int_m xy\, dm = \int_m xz\, dm = \int_m yz\, dm = 0$ с точностью до членов $\alpha\big(x^2 m l^2/|\, r_c\,|^3\big)$ получим следующее выражение для $M_x = \mathrm{pr}_{Cx}\, M$:

$$M_x = \frac{3\kappa^2}{|\, r_c\,|^2} \int\limits_m \big(y a_{33} - z a_{23}\big) \left(\frac{x}{|\, r_c\,|}\, a_{13} + \frac{y}{|\, r_c\,|}\, a_{23} + \frac{z}{|\, r_c\,|}\, a_{33} \right) dm =$$

$$= \frac{3\kappa^2}{|\, r_c\,|^3} \int\limits_m \big(y^2 - z^2\big)\, a_{23} a_{33}\, dm = 3\omega_0^2 \, \big(I_z - I_y\big)\, a_{23} a_{33}. \tag{3.33}$$

Остальные проекции M_y, M_z получим из формулы (3.33), перемещая индексы по правилу: $x \to y \to z \to x$, $a_{13} \to a_{23} \to a_{33} \to a_{13}$.

В дальнейшем ограничимся изучением колебаний спутника в плоскости его орбиты; при этом полагаем для осей: $Cy_0 = Cy$. Движение спутника относительно точки C имеет одну степень свободы. За обобщенную координату возьмем угол $\theta = (\widehat{Cx_0, Cx}) =$

$(\widehat{Cz_0, Cz})$. Спутник вращается относительно Cy_0 — оси, которая движется поступательно и проходит через центр масс C. Относительно этой оси имеем закон изменения момента количества движения: $I_y\ddot{\theta} = M_y$.

С другой стороны, пользуясь формулой (3.33) при перемещении индексов, получим

$$M_y = 3\omega_0^2 \left(I_x - I_z\right) a_{33}a_{13}. \tag{3.34}$$

Для нашего случая $a_{13} = \cos(\widehat{z_o, x}) = -\sin\theta$, $a_{33} = \cos(\widehat{z_0, z}) = \cos\theta$. В результате получим уравнение вращательного движения спутника относительно оси y под действием момента M_y (3.34):

$$I_y\ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \left(I_x - I_z\right) \sin\theta\cos\theta = 0.$$

Считая $I_x > I_z$, что равносильно вытянутости спутника вдоль оси Cz, в обозначении $\omega^2 = 3\omega_0^2 \left(I_x - I_z\right)/I_y > 0$, последнее уравнение можно представить в виде

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta\cos\theta = 0. \tag{3.35}$$

Если в уравнении (3.35) положить $2\theta = \varphi$, то получим уравнение аналогичное уравнению колебаний математического маятника $\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0$ относительно угла φ отклонения нити подвеса от вертикали, где $k^2 = g/l$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Имеем здесь незатухающие колебания относительно положения равновесия $\varphi = 0$.

Отметим, что при эксплуатации спутника часто требуется ориентировать его в орбитальной системе координат с возможно меньшими значениями угла θ. Отделяясь от носителя в процессе запуска, спутник получает значительное вращение с угловой скоростью порядка $100\,\omega_0$. Система предварительного успокоения с реактивными двигателями переводит спутник в режим малых колебаний по θ.

Затем гашение колебаний происходит за счет работы микродвигателей, у которых запас энергии, время функционирования и число включений ограничены. Два микродвигателя создают силовой момент в положительном направлении оси y, два других — в отрицательном. Пусть u_1, u_2 — отношения этих моментов к моменту

инерции I_y спутника. Можем в этом случае уравнение (3.35) для малых управляемых колебаний спутника в плоскости орбиты записать как

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u_1 - u_2, \tag{3.36}$$

где $\omega^2 = \text{const}$, поскольку расход массы для работы микродвигателей по сравнению с массой спутника есть величина пренебрежимо малая.

Для постановки задачи оптимального демпфирования колебаний системы (3.36) введем ограничение по мощности для однотипных микрореактивных двигателей вида

$$0 \le u_1 \le C_u, \quad 0 \le u_2 \le C_u, \quad C_u = \text{const} > 0. \tag{3.37}$$

Зададим еще граничные условия

$$x^0 = x(t_0), \quad \dot{x}^0 = \dot{x}(t_0), \quad x^1 = x(t_1) = 0, \quad \dot{x}^1 = \dot{x}(t_1) = 0, \tag{3.38}$$

полагая, что величины $x^0, \dot{x}^0, t_0$ заданы.

Отметим, что система (3.36), (3.37) *вполне управляема* в смысле существования кусочно-непрерывного управления $u \in U$, переводящего ее из заданного начального в нулевое конечное состояние, поскольку для данной линейной системы выполняется *условие Калмана*: $\operatorname{rank}\left[\, B,\, AB,\, ...,\, A^{n-1}B \,\right] = n$, где $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in R^n$, $u \in R^r$. В самом деле, пусть

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u_1 - u_2, \quad n = 2. \tag{3.39}$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\left[\, B,\, AB \,\right] = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Организация закона оптимального управления производится в соответствии с обеспечением некоторого критерия качества работы управляемой системы. Например, возможно рассмотрение минимизируемых функционалов качества следующего вида:

1) энергетического функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} (u_1 + u_2)\, dt; \tag{3.40}$$

2) функционала быстродействия

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0. \tag{3.41}$$

Выясним, что характеризует критерий качества (3.40) в оптимальной задаче демпфирования колебаний системы (3.36) – (3.38) с одной степенью свободы. Пусть реактивная тяга микродвигателя равна κu_r, где κ — расход массы топлива в единицу времени, u_r — постоянная относительная скорость истечения частиц топлива из двигательной установки.

Обозначим через κ_1 — расход массы топлива в единицу времени двух микродвигателей, создающих положительный момент. Имеем $u_1 = l\kappa_1 u_r/(2I_y)$, l — расстояние между двигателями, образующее плечо пары реактивных сил. Для двигателей, создающих обратный момент имеем соответственно $u_2 = l\kappa_2 u_r/(2I_y)$. Подставляя эти значения в энергетический интеграл (3.40), получим

$$J_1 = \frac{lu_r}{2I_y} \int_{t_0}^{t_1} (\kappa_1 + \kappa_2)\, dt = \frac{lu_r\,(m_0 - m_1)}{2I_y},$$

где $m_0 - m_1$ — общий расход массы топлива, m_0, m_1 — начальная и конечная массы. Итак, величина интеграла $J_1 \geq 0$ (3.40) пропорциональна расходу топлива.

Проведем исследование функции Гамильтона в схеме решения энергетически оптимальной задачи. Образуем функцию H, пользуясь соотношениями (3.10), (3.39), (3.40):

$$H = -\,(u_1 + u_2) + \lambda_1 x_2 + \lambda_2\,(-\omega^2 x_1 + u_1 - u_2). \tag{3.42}$$

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа (3.22) будут выглядеть так:

$$\dot\lambda_1 = -\,\frac{\partial H}{\partial x_1} = \omega^2 \lambda_2, \qquad \dot\lambda_2 = -\,\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\,\lambda_1. \tag{3.43}$$

Эти уравнения являются сопряженными по отношению к однородной системе, соответствующей уравнениям (3.39).

Запишем общее решение уравнений (3.43): $\ddot\lambda_2 + \omega^2\lambda_2 = 0$. Будем иметь

$$\lambda_1 = -\,a\omega\,\cos(\omega t + \alpha), \qquad \lambda_2 = a\,\sin(\omega t + \alpha), \tag{3.44}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $\alpha = \mathrm{const}$. При $a = 0$ получим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и по формуле (3.42) $H = -(u_1 + u_2)$. По формуле (3.32) $\max_u H$ достигается при $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. Этот режим в данной задаче реализовать нельзя, так как он отвечает выключенным двигателям, при которых происходит «переход» из начального положения в конечное в свободном движении без расхода топлива.

Если функция H стационарна по управлениям ($\partial H/\partial u_j = 0$), то режим, ей отвечающий, называется *программируемым*; в задачах с линейным управлением он называется также *вырожденным* режимом. Покажем невозможность такого режима в данной задаче, означающего отсутствие промежутка времени, где выполнялись бы равенства $\partial H/\partial u_j = 0$, $j = 1, 2$.

Действительно, из формулы (3.42) получим

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = -1 + \lambda_2, \qquad \frac{\partial H}{\partial u_2} = -1 - \lambda_2. \tag{3.45}$$

Согласно формулам (3.44), (3.45) вырожденный режим соответствует выполнению равенств $-1 \pm \lambda_2 \equiv 0$, или $-1 \pm a\,\sin(\omega t + \alpha) \equiv 0$. Этого быть не может, поскольку данное тригонометрическое уравнение имеет при $a \neq 0$ изолированные (отдельные) решения по t, но никак не промежутки времени.

Удобно эти точки представлять смещением фазы от нечетного кратного $\pi/2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0, && \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0, \\ &\omega\tau_1 + \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \sigma, && \omega\tau_3 + \alpha = (4n+3)\frac{\pi}{2} - \sigma, \\ &\omega\tau_2 + \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \sigma, && \omega\tau_4 + \alpha = (4n+3)\frac{\pi}{2} + \sigma, \end{aligned} \tag{3.46}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots, \sigma = \arccos(1/a) > 0,\ a > 1$.

С учетом невыполнения условий стационарности H по управлениям $\max_u H$ не достигается внутри области U (3.37). Значит, оптимальный режим состоит из участков с граничными управлениями. Так как H линейно зависит от u_1, u_2, то в силу сделанных ранее замечаний моменты времени τ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, определяемые формулами (3.46), являются точками переключения управлений u_1 и u_2.

Согласно формулам (3.44) функция $\lambda_2(t)$ кусочно-монотонная:

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} \text{строго возрастает, где} & (\omega t + \alpha) \in (-\pi/2,\ 2,\ \pi/2) (\operatorname{mod} 2\pi), \\ \text{строго убывает, где} & (\omega t + \alpha) \in (\pi/2,\ 3\pi/2) (\operatorname{mod} 2\pi). \end{cases}$$

Укажем на особенности режимов функционирования исследуемой системы при решении задачи оптимального гашения колебаний:

1) при $t < \tau_1$ имеем $\partial H/\partial u_1 < 0$, $\partial H/\partial u_2 < 0$ и свободное движение с выключенными двигателями;

2) при $t = \tau_1$ имеем $\partial H/\partial u_1 = 0$. Включается до $t = \tau_2$ максимальное значение управления $u_1 = C_u$, поскольку при $t \in (\tau_1,\ \tau_2)$ имеем $\partial H/\partial u_1 > 0$, а при $t = \tau_2$ имеем $\partial H/\partial u_1 = 0$;

3) при $t \in (\tau_2,\ \tau_3)$ имеем свободное движение;

4) при $t = \tau_3$ величина $\partial H/\partial u_2 < 0$ меняет знак, проходя через ноль: $\partial H/\partial u_2 > 0$. Включается максимальное значение управления $u_2 = C_u$;

5) при $t = \tau_4$ управление u_2 выключается. Имеем очередной режим свободного движения.

Через период свобных колебаний описанная картина включения–выключения управлений повторяется. Процесс управления

имеет ярко выраженный периодический характер с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Осталось при решении задачи найти неизвестные α и σ в формулах (3.46). В общем условии трансверсальности (3.29) $G_0 = 0$. В соотношениях (3.38) начальные и конечные значения фазовых переменных, а также t_0 — это заданные постоянные. Их вариации равны нулю. Условие трансверсальности дает: $-H_1\,\Delta t_1 = 0$. В силу произвольности Δt_1 имеем $H_1 = 0$. А так как функция H (3.42) не зависит явно от t, то $H = \text{const} = 0$. Пусть $t_0 = 0$ и тогда с учетом формул (3.42), (3.44) получим

$$0 = H = \lambda_1 x_2 - \omega^2 \lambda_2 x_1 = -\,\omega a \left(\omega x_1^0 \sin\alpha + x_2^0 \cos\alpha\right),$$

откуда α определяется по начальным данным: $\operatorname{tg}\alpha = -\,x_2^0/(\omega x_1^0)$.

Исходя из того, что оптимальная траектория состоит из чередования участков трех видов: 1) $u_1 = C_u$, $u_2 = 0$, 2) $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и 3) $u_1 = 0$, $u_2 = C_u$, уравнения движения (3.39) равносильны уравнению (3.36): $\ddot{x} + \omega^2 x = u$, где $u = u_1 - u_2 = \text{const}$. Имеем отсюда

$$\begin{aligned} &x_1 = x = b\,\sin(\omega t + \beta) + u/\omega^2, && b = \text{const} > 0, \\ &x_2 = \dot{x} = b\omega\,\cos(\omega t + \beta), && \beta = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Для участка начального движения, когда $u = 0$, получим

$$b = \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_2^0)^2}{\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega x_1^0}{x_2^0}.$$

Из формул для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ следует, что начальные фазы координаты x_1 и множителя λ_2 сдвинуты по фазе синуса на $\pi/2$: $\alpha = \beta \pm \pi/2$. Это начальное смещение фаз будет сохраняться при движении, так как угловая частота колебаний x_1 и λ_2 одинакова и равна ω.

Из соотношений (3.47) вытекает, что x_2 смещена с опережением по фазе на $\pi/2$ относительно фазы x_1. В задаче гашения колебаний надо принять, что λ_2 находится в противофазе со скоростью $x_2 = \dot{x}$, поскольку при совпадении фаз имеем раскачку. Наконец, из (3.47) можно получить уравнение фазовой траектории вида

$$\left(\omega x_1 - \frac{u}{\omega}\right)^2 + x_2^2 = \omega^2 b^2,$$

где $\omega^2 b^2 = \mathrm{const}$, т.е. имеем в осях ωx_1 и x_2 дуги окружностей, которые в процессе оптимального успокоения колебаний уменьшают свой радиус.

Несколько слов о решениях задачи, оптимальных по быстродействию. Функционал (3.41) в отличие от функционала (3.40) не зависит явно от управлений u_1, u_2. Для задачи оптимального быстродействия удобно взять одно скалярное управление $u = u_1 - u_2$ с ограничением: $-C_u \le u \le C_u$.

Функция Гамильтона имеем вид

$$H = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left(-\omega^2 x_1 + u\right),$$

где множители Лагранжа λ_1, λ_2 находятся из уравнений (3.43), (3.44). Так как управление u входит в функцию H линейно, то при $\lambda_2 \ne 0$ из условия $\max_u H$ следует, что $u = C_u \operatorname{sign} \lambda_2$. Можно показать, аналогично тому как это делалось ранее, невозможность существования вырожденного режима для любого интервала времени. Условие $\partial H/\partial u = \lambda_2 = 0$ определяет точки переключения граничных управлений C_u и $-C_u$.

Режим оптимального управления состоит в смене участков активного движения длительностью π/ω. За это время фазовая траектория проходит половину окружности. Итак, фазовая траектория включает последовательное соединение полуокружностей; на заключительном участке — часть одной из полуокружностей радиуса C_u/ω, поскольку только по этим дугам можно попасть в начало координат.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что означает полная управляемость системы?

2. Какой режим управления называется программируемым?

3.3 Вариационная задача Майера–Больца оптимизации процессов управления

Ниже задача оптимизации процессов управления поставлена в форме *проблемы Майера–Больца* вариационного исчисления [127, 128], признанная наиболее общей среди проблем в форме Лагранжа, Больца и Майера. Основное внимание, как и прежде, уделяется выводу соответствующих необходимых условий оптимальности.

3.3.1. Постановка задачи. Пусть задана система n дифференциальных уравнений вида

$$g_s = \dot{x}_s - f_s(x, u, t) = 0, \qquad s = \overline{1, n}, \tag{3.48}$$

$$x = x(t) = \big(x_s(t)\big) \in R^n, \qquad u = u(t) = \big(u_j(t)\big) \in R^m,$$

а также r конечных соотношений:

$$\psi_k = \psi_k(u, t) = 0, \qquad k = \overline{1, r}, \quad r < m, \tag{3.49}$$

которые в совокупности описывают поведение некоторой управляемой динамической системы. В соотношениях (3.48), (3.49) введены обозначения для координат x_1, ..., x_n системы и параметров управления (управлений) u_1, ..., u_m.

Зададим начальное положение системы при $t = t_0$:

$$x_s(t_0) = x_s^0, \qquad s = \overline{1, n}, \tag{3.50}$$

и потребуем, чтобы конечные значения координат $x_s(t_1)$, $s = \overline{1, n}$, в некоторый конечный момент времени (момент t_1 здесь не обязательно фиксированный) были связаны зависимостями

$$\varphi_l = \varphi_l[\,x(t_1),\, t_1\,] = 0, \qquad l = \overline{1, p}, \quad p \le n. \tag{3.51}$$

Задача оптимизации ставится следующим образом. Надо найти функции $x_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, удовлетворяющие уравнениям (3.48) и начальным условиям (3.50), и управления $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, связанные равенствами (3.49), так, чтобы при выполнении в момент времени $t = t_1$ условий (3.51) функционал $J = J[\,x(t_1),\, t_1\,]$ принимал стационарное значение.

Данная постановка охватывает обширный класс задач оптимизации. К примеру, в задаче оптимального быстродействия функционал J надо взять в виде $J = t_1$ при условиях $x_l = x_l(t_1) - x_l^1 = 0$, $l = = \overline{1, n}$, что соответствует задаче минимизации длительности перехода системы изз заданного (3.50) начального положения в положение, соответствующее значениям координат $x_s(t_1) = x_s^1$, $s = \overline{1, n}$. Приходим, тем самым, к классической задаче Майера.

Использование функционалов вида $J = \int_{t_0}^{t_1} F[\,x(t),\, u(t),\, t\,]\, dt$ позволяет свести задачу оптимизации к проблеме Лагранжа с помощью введения новой координаты $x_{n+1}(t)$, удовлетворяющей уравнению: $g_{n+1} = \dot{x}_{n+1} - F(x, u, t) = 0$, с одновременной оптимизацией значения $x_{n+1}(t)$.

3.3.2. Необходимые условия стационарности функционала. Составим вспомогательный функционал

$$I = J + \int_{t_0}^{t_1} \left[\, \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(t)\, g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k(t)\, \psi_k \,\right] dt + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l, \tag{3.52}$$

где через $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$, ρ_l обозначены неопределенные множители Лагранжа. Если в соотношении (3.52) положить все слагаемые справа равными нулю (в силу уравнений (3.48), (3.49), (3.51)), то $I = J$; значит, условия стационарности I и J совпадают. Для простоты будем считать, что имеется одна точка $t_* \in (t_0,\, t_1)$ разрыва непрерывности управлений $u_j(t)$.

При вычислении вариации функционала I время t не варьируется, но варьируются координаты конца t_1. Поэтому будем различать вариацию на конце $\delta x_s(t_1)$ и вариацию конца (полную вариацию) $\Delta x_s(t_1)$, связанных между собой известными зависимостями

$$\Delta x_s(t_1) = \delta x_s(t_1) + \dot{x}_s(t_1)\, \delta t_1. \tag{3.53}$$

Аналогичные соотношения можно написать и для вариаций относительно точки t_* разрыва непрерывности $u_j(t)$:

$$\Delta x_s(t_*) = \delta x_s(t_*) + \dot{x}_s(t_*)\, \delta t_*. \tag{3.54}$$

С учетом равенств (3.53) для полной вариации ΔJ имеем выражение

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s(t_1)}\, \delta x_s(t_1) + \left[\, \frac{\partial J}{\partial\, t_1} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s(t_1)}\, \dot{x}_s(t_1) \,\right] \delta t_1.$$

Опуская промежуточные преобразования, запишем вариацию ΔI в окончательном виде

$$\begin{aligned}
\Delta I = \Delta J = \delta \int_{t_0}^{t_*} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- g_s^- - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^- \psi_k^- \right) dt \,+ \\
+ \int_{t_*}^{t_1} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ g_s^+ - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^+ \psi_k^+ \right) dt + \Delta \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \ = \\
= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \delta\lambda_s \left[\, \dot{x}_s - f_s(x, u, t) \,\right] - \sum_{k=1}^{r} \delta\mu_k\, \psi_k(u, t) \right\} dt \,- \\
- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \delta x_s \left(\dot{\lambda}_s + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}\, \lambda_\alpha \right) + \right. \\
\left. + \sum_{j=1}^{m} \delta u_j \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial u_j} + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta \frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_j} \right) \right\} dt \,+ \\
+ \sum_{s=1}^{n} \left\{ \lambda_s^+(t_1) + \frac{\partial}{\partial x_s^+(t_1)} \left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \right) \right\} \delta x_s^+(t_1) \,+ \\
+ \delta t_1 \frac{d}{dt_1} \left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \right) + \sum_{s=1}^{n} \left[\, \lambda_s^-(t_*) - \lambda_s^+(t_*) \,\right] \Delta x_s(t_*) \,- \\
- \sum_{s=1}^{n} \left[\, \lambda_s^-(t_*)\, \dot{x}_s^-(t_*) - \lambda_s^+(t_*)\, \dot{x}_s^+(t_*) \,\right] \delta t_*,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

где функции с верхним индексом «$-$» — это их значения при $t \in [\,t_0,\, t_*\,]$, а с верхним индексом «+» — это их значения при $t \in [\,t_*,\, t_1\,]$. Отметим, что в интегральных выражениях (3.55) следует интегралы разбить на два промежутка по $t \in [\,t_0,\, t_*\,]$ и $t \in [\,t_*,\, t_1\,]$ при соответствующих значениях функций.

Здесь пределы интегрирования можно не варьировать, так как подинтегральные выражения и δt_0 равны нулю. Кроме того, поскольку $\varphi_l = 0$, то нет и слагаемых, содержащих $\delta\rho_l$. Отметим также, что вывод соотношения (3.55) осуществлен с помощью формул интегрирования по частям

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} \lambda_s^- \,\delta\dot{x}_s^-\, dt = \lambda_s^-(t_*)\,\delta x_s^-(t_*) - \int\limits_{t_0}^{t_*} \dot{\lambda}_s^-(t)\,\delta x_s^-(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{t_*}^{t_1} \lambda_s^+ \,\delta\dot{x}_s^+\, dt = \lambda_s^+(t_1)\,\delta x_s^+(t_1) - \lambda_s^+(t_*)\,\delta x_s^+(t_*) - \\ - \int\limits_{t_*}^{t_1} \dot{\lambda}_s^+(t)\,\delta x_s^+(t)\, dt,$$

зависимостей (3.54) и условий непрерывности функций $x_s(t)$:

$$x_s^-(t_*) = x_s^+(t_*), \qquad \Delta x_s^-(t_*) = \Delta x_s^+(t_*) = \Delta x_s(t_*). \tag{3.56}$$

Вариации $\delta x_s(t)$, $\delta\lambda_s(t)$, $\Delta x_s(t_*)$, $s = \overline{1,n}$, $\delta\mu_k(t)$, $k = \overline{1,r}$, δt_*, δt_1, $2\,(m-r)$ вариаций $\delta u_j(t)$ и $n-p$ вариаций $\delta x_s(t_1)$ будут независимыми. В этой ситуации можно выбрать $2r$ множителей $\mu_k(t)$ и p постоянных ρ_l так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при зависимых вариациях $\delta u_j(t)$ и p зависимых вариациях $\delta x_s(t_1)$. Затем следует приравнять к нулю коэффициенты при оставшихся независимых вариациях. В результате придем:

1) к системе уравнений

$$\dot{x}_s - f_s(x,u,t) = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{3.57}$$

$$\psi_k(u,t) = 0, \qquad k = \overline{1,r}, \tag{3.58}$$

совпадающей с системой (3.48), (3.49);

2) к уравнениям

$$\dot{\lambda}_s + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}\,\lambda_\alpha = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{3.59}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s\,\frac{\partial f_s}{\partial u_j} + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta\,\frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_j} = 0, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{3.60}$$

с краевыми условиями относительно функций $\lambda_s(t)$:

$$\lambda_s(t_1) + \frac{\partial}{\partial x_s(t_1)}\left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l\varphi_l\right) = 0, \qquad s = \overline{1,n}; \tag{3.61}$$

3) к равенству

$$\frac{d}{d\,t_1}\left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l\varphi_l\right) = 0; \tag{3.62}$$

4) и к условиям Вейерштрасса–Эрдмана

$$\lambda_s^-(t_*) = \lambda_s^+(t_*), \qquad \sum_{s=1}^{n}\left(\lambda_s^-\dot{x}_s^- - \lambda_s^+\dot{x}_s^+\right)\Big|_{t=t_*} = 0. \tag{3.63}$$

К этим соотношениям надо еще добавить начальные условия (3.50), условия сопряжения (3.56), а такжже равенства (3.51).

Важно указать, что данная оптимальная задача об отыскании экстремали может быть доведена до конечного решения, поскольку является замкнутой. Действительно, для вычисления $4n+2m+2r$ функций $x_s^\pm(t)$, $\lambda_s^\pm(t)$, $u_j^\pm(t)$, $\mu_k^\pm(t)$ имеем $4n$ дифференциальных уравнений первого порядка (3.57) и (3.59) с $4n$ постоянными интегрирования, $2m$ соотношений (3.60) и $2r$ зависимостей (3.58). Неизвестными являются $4n$ произвольных постоянных, p множителей ρ_l и величины t_* и t_1 в количестве $4n+p+2$. Для их определения имеем n начальных условий (3.50), n условий сопряжения (3.56), n краевых условий (3.61), $n+1$ условий Вейерштрасса–Эрдмана (3.63), p соотношений (3.51) и равенство (3.62); их число также равно $4n+p+2$.

3.3.3. Каноническая система и принцип максимума. Из полученных выше соотношений можно получить другие формы записи, в частности, можно преобразовать их к каноническим уравнениям и обосновать принцип максимума Понтрягина.

Для функции Лагранжа вида

$$L = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k$$

уравнения (3.59), (3.60) можно записать в эйлеровой форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial L}{\partial x_s} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Таким же путем получим равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_s} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mu_k} = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,r},$$

для уравнений (3.56), (3.58).

В этом случае первые n условий Вейерштрасса–Эрдмана (3.63) приводят к условиям непрерывности производных лагранжиана L:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)^{-}\bigg|_{t=t_*} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)^{+}\bigg|_{t=t_*}$$

в точке разрыва непрерывности управлений $u_j(t)$, причем последнее условие (3.63) приводит к условию непрерывности функции

$$H_\lambda^-\big|_{t=t_*} = H_\lambda^+\big|_{t=t_*}, \tag{3.64}$$

$$H_\lambda = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s\, f_s(x,u,t),$$

служащей для обоснования принципа максимума Понтрягина. Оптимальные режимы при наличии ограничений (3.49) сообщают усло-вный экстремум функции H_λ; на это указзывают равенства (3.60), полученные при помощи функции H:

$$H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta \psi_\beta = H_\lambda.$$

Кроме того, уравнения (3.57) и (3.59) могут быть записаны в каноническом виде

$$\dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda_s}, \qquad \dot{\lambda}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s} = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x_s}, \qquad s = \overline{1,n},$$

используемом для вывода принципа максимума. Таким же образом можно представить и уравнения (3.58) и (3.60):

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial \mu_k} = 0, \qquad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,r}.$$

Затем обратимся к условию (3.62). Запишем его так:

$$\frac{\partial}{\partial\, t_1}\left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l\right) = H_\lambda\big|_{t=t_1} = H\big|_{t=t_1}. \tag{3.65}$$

Если функции f_s и ψ_k не зависят явно от времени t, то уравнения (3.57), (3.59) допускают первый интеграл: $H = h = \mathrm{const}$. В самом деле, рассматривая выражение

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_s}\frac{\partial H}{\partial \lambda_s} - \frac{\partial H}{\partial \lambda_s}\frac{\partial H}{\partial x_s}\right) \equiv 0,$$

вместо (3.65) получим

$$\frac{\partial}{\partial\, t_1}\left(J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l\right) = h = \mathrm{const}.$$

Представим также соотношения (3.57) – (3.63) в векторной форме. В обозначениях

$$x = \left(x_s\right)_{s=\overline{1,n}}, \quad u = \left(u_j\right)_{j=\overline{1,m}}, \quad \lambda = \left(\lambda_s\right)_{s=\overline{1,n}}, \quad \mu = \left(\mu_k\right)_{k=\overline{1,r}},$$

$$f = (f_s)_{s=\overline{1,n}},\ \psi = (\psi_k)_{k=\overline{1,r}},\quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)_{s=\overline{1,n}},\ \frac{\partial}{\partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_{j=\overline{1,m}},$$

уравнения (3.57) – (3.60) запишутся в виде

$$\dot{x} - f = 0,\qquad \psi = 0,\qquad \dot{\lambda} + \frac{\partial}{\partial x} f^* \lambda = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(f^*\lambda + \psi^*\mu\right) = 0,$$

где звездочкой сверху, как обычно, обозначена операция транспонирования.

Аналогично для условий непрерывности (3.56), (3.63) получим

$$x^-(t_*) = x^+(t_*),\qquad \lambda^-(t_*) = \lambda^+(t_*),$$

а для краевых условий (3.61) будем иметь

$$\lambda(t_1) + \frac{\partial}{\partial x(t_1)}\left(J + \rho^*\varphi\right) = 0,\quad \rho = (\rho_l)_{l=\overline{1,p}},\quad \varphi = (\varphi_l)_{l=\overline{1,p}}.$$

Кроме того, для соотношений (3.62) и (3.63) получим соответственно

$$\frac{d}{d\,t_1}\left(J + \rho^*\varphi\right) = 0,\qquad \left(\lambda^*\dot{x}\right)^-\Big|_{t=t_*} - \left(\lambda^*\dot{x}\right)^+\Big|_{t=t_*} = 0,\qquad (3.66)$$

причем для функции Гамильтона $H = H_\lambda + H_\mu = \lambda^* f + \mu^*\psi$ сохраняется требование (3.64) условия (3.66).

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте постановку задачи Майера-Больца.
2. Запишите необходимые условия стационарности функционала.
3. Запишите каноническую систему и принцип максимума.

3.4 Необходимые условия оптимизации в вариационных задачах управления

Материал этого параграфа во многом дополняет предыдущее изучение вариационных задач оптимизации процессов управления; он основан главным образом на результатах исследовательской работы [128].

3.4.1. Постановка задачи. Пусть имеется управляемая система (3.48) с ограничениями на управления вида (3.49) и концевыми условиями

$$\varphi_l = \varphi_l\left[\, x(t_0),\, x(t_1),\, t_0,\, t_1 \,\right] = 0,\qquad l = \overline{1,p},\quad p \le 2n+1,\quad (3.67)$$

где моменты времени t_0, t_1 могут быть нефиксированными. Требуется среди функций $x_s(t)$, $s = \overline{1,n}$, и $u_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, удовлетворяющих этим соотношениям, найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = g\left[\, x(t_0),\, x(t_1),\, t_0,\, t_1 \,\right] + \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)\,dt \qquad (3.68)$$

экстремальное значение.

Задача (3.48), (3.49), (3.67), (3.68) приводит к вариационной проблеме Майера–Больца, отличительной особенностью которой является наличие равенств (3.49). Для определенности полагаем, что все требования вариационного анализа для функций указанной задачи выполнены; кроме того, будут рассматриваться лишь кривые в $n+m$–мерном пространстве координат и управлений, доставляющие минимум функционалу J (3.68).

Отметим, что в отличие от изученных в § 3.3 случаев применительно к необходимым условиям стационарности здесь исследуются траектории с концевыми условиями (3.67) для функционала J с неинтегральной и интегральной частями, а также устанавливаются все необходимые условия минимума функционала J.

3.4.2. Условие стационарности функционала *J*. Чтобы выписать условие стационарности функционала J, введем в рассмотрение вспомогательный функционал

$$I = \theta + \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt,$$

где обозначено

$$L = f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s - H, \tag{3.69}$$

$$\theta = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l, \qquad H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k,$$

причем $\lambda_0 = -1$. Здесь λ_s, $\mu_k(t)$, ρ_l — неопределенные, подлежащие вычислению множители Лагранжа. Надо далее приравнять полную вариацию ΔI к нулю. Полученное условие стационарности функционала I будет совпадать с условием стационарности функционала J.

Опуская схему построения ΔI и решения уравнения $\Delta I = 0$, приведем окончательные результаты. Получим следующие соотношения:

1) уравнения

$$\dot{\lambda}_s^{\pm} = -\frac{\partial H}{\partial x_s^{\pm}}, \qquad \frac{\partial H}{\partial u_j^{\pm}} = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}; \tag{3.70}$$

2) краевые условия

$$\lambda_s^-(t_0) - \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_0)} = 0, \qquad f_0 \big|_{t=t_0} - \frac{d\theta}{d\,t_0} = 0, \tag{3.71}$$

$$\lambda_s^+(t_1) + \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_1)} = 0, \qquad f_0 \big|_{t=t_1} + \frac{d\theta}{d\,t_1} = 0; \tag{3.72}$$

3) условия Вейерштрасса–Эрдмана непрерывности $\lambda_s(t)$ и H:

$$\lambda_s^-(t_*) = \lambda_s^+(t_*), \qquad H^- \big|_{t=t_*} = H^+ \big|_{t=t_*}, \tag{3.73}$$

где по предположению $t_* \in [\,t_0,\, t_1\,]$ — одна точка разрыва непрерывности управлений $u_j(t)$, а индексами «$-$» и «$+$» сверху обозначены значения соответствующих функций в подинтервалах $[\,t_0,\, t_*\,]$ и $[\,t_*,\, t_1\,]$. Укажем и на то, что в равенствах (3.71), (3.72) производ-

ные θ по t_0 и t_1 равны

$$\frac{d\theta}{d\,t_0} = \frac{\partial \theta}{\partial\,t_0} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_0)}\, \dot{x}_s(t_0), \qquad \frac{d\theta}{d\,t_1} = \frac{\partial \theta}{\partial\,t_1} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_1)}\, \dot{x}_s(t_1).$$

Условие стационарности функционала J заключается в наличии всей совокупности соотношений (3.70) – (3.73). С целью решения задачи оптимизации надо добавить к ним исходные уравнения (3.48), (3.49), записанные в виде

$$\dot{x}_s^{\pm} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_s^{\pm}}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \mu_k^{\pm}} = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,r}, \tag{3.74}$$

а также условия (3.67) на концах и условия сопряжения координат

$$x_s^-(t_*) = x_s^+(t_*), \qquad s = \overline{1,n}. \tag{3.75}$$

Таким образом, чтобы найти $2n+2m+2r$ функций $x_s^{\pm}(t)$, $\lambda_s^{\pm}(t)$, $u_j^{\pm}(t)$, $\mu_k^{\pm}(t)$, надо воспользоваться $2n + 2m$ уравнениями (3.70) и $2n + 2r$ уравнениями (3.74). Для определения $4n$ постоянных интегрирования вместе с множителями ρ_l, $l = \overline{1,p}$, и величинами t_0, t_*, t_1 надо взять $4n + p + 3$ условий (3.71) – (3.73) и (3.75).

Отметим также, что вторые равенства (3.70) совпадают с необходимыми условиями экстремума функции Гамильтона H по управлениям u_j. В случае, если функции f_s, ψ_k не зависят явно от времени, то имеем первый интеграл: $H = H_\lambda + H_\mu = h = \text{const}$. Кроме того, для этого случая справедливы соотношения

$$-\frac{\partial \theta}{\partial\,t_0} = \frac{\partial \theta}{\partial\,t_1} = h,$$

равносильные вторым равенствам (3.71), (3.72).

3.4.3. Необходимое условие Вейерштрасса. Рассмотрим *функцию Вейерштрасса* следующего вида:

$$E = L\big(x, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \lambda, \mu, t\big) - L\big(x, \dot{x}, u, \lambda, \mu, t\big) - \sum_{s=1}^{n} \big(\dot{\bar{x}} - \dot{x}_s\big)\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}, \tag{3.76}$$

с помощью которой обосновывается необходимое и достаточное условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J. Здесь x_s, u_j соответствуют кривой, доставляющей минимум J, а $\bar{x}_s, \bar{u}_j$ — это любые допустимые функции координат и управлений, удовлетворяющие уравнениям (3.48), (3.49) и условиям (3.67). Через $x, \bar{x}, u, \bar{u}, \lambda, \mu$ обозначены компоненты вектор-функций соответствующей размерности, состоящие из элементов $x_s, \bar{x}_s, u_j, \bar{u}_j, \lambda_s, \mu_k$.

Для задач оптимального управления характерно, что функция E зависит от управлений u_j и $\bar{u}_j$. Подставляя в выражение (3.76) зависимость (3.69), получим

$$E = -H(x, \bar{u}, \lambda, \mu, t) + H(x, u, \lambda, \mu, t).$$

Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J:

$$E \geq 0 \tag{3.77}$$

эквивалентно неравенству

$$H(x, \bar{u}, \lambda, \mu, t) \leq H(x, u, \lambda, \mu, t). \tag{3.78}$$

Заметим, что *достаточное условие Вейерштрасса* сильного минимума будет достигнуто, если взять строгое неравенство (3.78). В этом случае оптимальный режим, при котором достигается минимум J, доставляет $\max_u H$.

Полагая, что $H_\mu \equiv 0$, условие Вейерштрасса и условие стационарности для данной задачи можно представить в формулировке, аналогичной принципу максимума Понтрягина. Добавим также, что управления u_j, при которых достигается минимум J, сообщают $\max_u H_\lambda$ для любых $x_s(t)$, $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$, удовлетворяющих уравнениям (3.70), (3.74), условиям (3.67), (3.71), (3.72) и условиям сопряжения (непрерывности) (3.73), (3.75).

3.4.4. Необходимое условие Клебша. Будем считать, что функции $\dot{\bar{x}}_s$ и $\bar{u}_j$, удовлетворяющие уравнениям (3.48), (3.49), отличаются от $\dot{x}_s$ и u_j на малые величины так, что при этом

$$\dot{\bar{x}}_s = \dot{x}_s + \delta\dot{x}_s, \qquad \bar{u}_j = u_j + \delta u_j, \tag{3.79}$$

где $\delta\dot{x}_s, \delta u_j$ — допустимые малые вариации, для которых имеют место уравнения вариаций вдоль кривой, доставляющей минимум функционалу J:

$$\delta\dot{x}_s - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial u_j}\,\delta u_j = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{3.80}$$

$$\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta}\,\delta u_\beta = 0, \qquad k = \overline{1,r}. \tag{3.81}$$

После подстановки выражения (3.79) в формулу (3.76) и разложения первого слагаемого его правой части в ряд по $\delta\dot{x}_s$ и δu_j получим с точностью до слагаемых второго порядка малости включительно

$$E = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_s\,\partial \dot{x}_\alpha}\,\delta\dot{x}_s\,\delta\dot{x}_\alpha + {}$$
$$+ 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_s\,\partial u_j}\,\delta\dot{x}_s\,\delta u_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j\,\partial u_\beta}\,\delta u_j\,\delta u_\beta. \tag{3.82}$$

Подставим затем в соотношение (3.82) выражение для L (3.69) и применим условие (3.77). Будем иметь тогда

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_j\,\partial u_\beta}\,\delta u_j\,\delta u_\beta \leq 0. \tag{3.83}$$

Неравенство (3.83), взятое вместе с уравнениями (3.80), (3.81), и составляет содержание *необходимого условия Клебша* слабого минимума функционала J. Отметим, что условие (3.83) вместе с условием стационарности совпадает с необходимыми условиями $\max_u H_\lambda$ при обеспечении равенств (3.49) для малых допустимых отклонений управлений. Укажем также, что в соотношениях (3.80) – (3.83) производные взяты по кривой, доставляющей минимум функционалу J.

3.4.5. Необходимое условие Якоби. Согласно *необходимому условию Якоби* минимума функционала J вторая вариация $\Delta^2 I$ функционала I должна быть неотрицательна на кривой, сообщающей минимум функционалу J. Не проводя промежуточных вычислений, запишем эту вариацию в следующем виде [14, 128]:

$$\Delta^2 I = 2\varphi\big[\,\Delta x(t_0),\, \Delta x(t_1),\, \delta t_0,\, \delta t_1\,\big] + 2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\,\Delta x_s\,\delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_s}\,\dot{x}_s\right)(\delta t)^2\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} 2\omega(\delta x,\, \delta u)\,dt. \tag{3.84}$$

В формуле (3.84) через 2φ и 2ω обозначены квадратичные формы

$$2\varphi = \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_s\,\partial x_\alpha}\,\Delta x_s\,\Delta x_\alpha + 2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial t\,\partial x_s}\,\Delta x_s\,\delta t + \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,(\delta t)^2\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}, \tag{3.85}$$

$$2\omega = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_s\,\partial x_\alpha}\,\delta x_s\,\delta x_\alpha +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_s\,\partial u_j}\,\delta x_s\,\delta u_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial u_j\,\partial u_\beta}\,\delta u_j\,\delta u_\beta. \tag{3.86}$$

В соотношениях (3.84), (3.85) указанные пределы у некоторых слагаемых введены для сокращения записи. К примеру, в выражении (3.84) второе слагаемое в развернутом виде можно записать так:

$$2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\,\Delta x_s\,\delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\right)\Bigg|_{t=t_1}\Delta x_s(t_1)\,\delta t_1 -$$

$$- 2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\right)\Bigg|_{t=t_0}\Delta x_s(t_0)\,\delta t_0.$$

Здесь $\Delta x_s(t_0)$, $\Delta x_s(t_1)$ — это вариации концов кривых сравнения

$$\Delta x_s(t_0) = \delta x_s(t_0) + \dot{x}_s(t_0)\,\delta t_0,\;\; \Delta x_s(t_1) = \delta x_s(t_1) + \dot{x}_s(t_1)\,\delta t_1. \tag{3.87}$$

Отметим еще, что коэффициенты при произведениях вариаций в формулах (3.84) – (3.86) вычисляются в точках кривой минимума функционала J.

С помощью формулы (3.69) коэффициенты квадратичной формы (3.86) выражаются через вторые производные функции H. В результате будем иметь

$$-\,2\omega = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_s\,\partial x_\alpha}\,\delta x_s\,\delta x_\alpha +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial x_s\,\partial u_j}\,\delta x_s\,\delta u_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial u_j\,\partial u_\beta}\,\delta u_j\,\delta u_\beta.$$

Перейдем к условию неотрицательности второй вариации $\Delta^2 I$ (3.84). Это условие часто получают путем перехода к решению *присоединенной задачи* о минимуме второй вариации [14, 128], связанной с задачей определения вариаций δx_s, δu_j, δt_0, δt_1, удовлетворяющих уравнениям вариаций вдоль кривой минимума функционала J:

$$\delta g_s = \delta\dot{x}_s - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial x_\alpha}\,\delta x_\alpha - \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_s}{\partial u_j}\,\delta u_j = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{3.88}$$

$$\delta\psi_k = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_\alpha}\,\delta x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial\psi_k}{\partial u_\beta}\,\delta u_\beta = 0, \qquad k = \overline{1,r}, \tag{3.89}$$

и условиям

$$\frac{d\varphi_l}{d\,t_0}\,\delta t_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(t_0)}\,\delta x_s(t_0) + \frac{d\varphi_l}{d\,t_1}\,\delta t_1 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(t_1)}\,\delta x_s(t_1) = 0, \tag{3.90}$$

где $l = \overline{1,p}$. Для данного случая после подстановки вариаций (3.87) в формулу (3.84) найдем выражение $\Delta^2 I$, подлежащее минимизации:

$$\Delta^2 I = \zeta\big[\,\delta x(t_0),\, \delta x(t_1),\, \delta t_0,\, \delta t_1\,\big] + \int_{t_0}^{t_1} 2\omega(\delta x,\, \delta u)\,dt. \tag{3.91}$$

Присоединенная задача о минимуме второй вариации, определяемой равенством (3.91) с учетом ограничений (3.88) – (3.90), будет вариационной задачей Майера–Больца (см. раздел 3.4.1). Отметим также, что присоединенная задача имеет тривиальное решение: $\delta x_s = 0$, $s = \overline{1,n}$, $\delta u_j = 0$, $j = \overline{1,m}$, $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$. Если это решение единственно и удовлетворяет условию стационарности $\Delta^2 I$, то условие Якоби будет выполнено.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала.
2. Запишите необходимое условие Клебша слабого минимума функционала.
3. Запишите необходимое условие Якоби минимума функционала.

Глава 4

Задачи оптимального управления с интегральными и интегродифференциальными уравнениями

Начнем с упоминания В. Гейзенберга, одного из создателей квантовой механики, который, размышляя над вопросами всеобъемлющего математического описания материи, сделал предположение [45], что основное уравнение материи должно описываться системой интегральных или интегродифференциальных уравнений.

Переходя к оптимизационным задачам с интегральными и интегродифференциальными уравнениями (ИУ и ИДУ), укажем на то, что с помощью интегральных и интегродифференциальных уравнений описываются различные достаточно сложные явления и процессы в механике, физике, математической физике, биологии [35, 64, 84, 95, 98, 99].

Более того, к интегральным и интегродифференциальным уравнениям приводят многочисленные задачи теории упругости и гидродинамики, задачи распределения зарядов, потенциалов и проч., задачи распространения волн, теории переноса и рассеяния, задачи математической теории развития биологических видов и т.д. При этом решение упомянутых задач требует по существу привлечения достаточно сложного математического аппарата ИУ и ИДУ.

ИУ и ИДУ Вольтерра возникают в тех задачах, в которых существует некоторое доминирующее или предпочтительное направление изменения искомой функции. Сам же интегральный оператор Вольтерра

$$A\,x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\,x(s)\,ds$$

характерен тем, что значение функции $A\,x(t)$ в любой момент времени t определяется значениями функции $x(t)$ при значениях времени $s \le t$, т.е. этот оператор учитывает «предысторию» процесса.

Однако тема этой главы находится несколько в стороне от вопросов непосредственного исследования данных типов уравнений. Основной вопрос, который будет изучаться — это обоснование необходимых (и, возможно, достаточных) условий оптимальности управляемых динамических систем, описываемых интегральными и интегродифференциальными уравнениями Вольтерра.

Здесь надо заметить, что имеется сравнительно небольшой список литературы, где рассматриваются соответствующие вопросы [1, 23, 26, 30, 36, 88, 90, 148] применительно к управляемым интегральным уравнениям. При этом важные для приложений задачи оптимального управления системами, описываемыми сингулярными интегральными и интегродифференциальными уравнениями, оставались вне рамок изучения.

Материал Главы 4 призван в определенной мере восполнить указанный пробел. Общие и специальные вопросы теории ИУ и ИДУ подробно изложены во многих изданиях. Отметим лишь некоторые из этих публикаций [24, 27, 29, 35, 48, 64, 65, 95–97, 99, 105, 126, 147, 150, 152, 154, 155, 157–161, 164, 170–172, 177, Д1, Д2].

В § 4.1 для управляемых систем, динамика которых описывается интегральным уравнением Вольтерра с дополнительными ограничениями в виде равенств, получены необходимые условия оптимальности. Вывод этих условий осуществлен на базе абстрактной теории Якубовича–Матвеева оптимального управления и, в частности, абстрактного принципа максимума [90]. В линейном случае эти условия становятся также достаточными. Аналитическое изучение интегральной задачи сопровождается рассмотрением модельного примера, в котором удается найти выражение для оптимального управления по быстродействию.

В § 4.2 рассматриваются два вида управляемых сингулярных интегральных уравнений с неограниченными множителями под знаком интеграла: со степенным ядром типа ядра Коши и с логарифмическим ядром. В обоих случаях проведены интегральные преобразования, позволяющие свести исходные сингулярные уравнения к соответствующим равносильным регулярным уравнениям без особенностей. Приведены также теоремы о необходимых условиях оптимальности для названных управляемых сингулярных интегральных уравнений.

В § 4.3 в качестве объектов управления выступают нелинейные управляемые динамические системы, описываемые интегродифференциальными уравнениями Вольтерра первого порядка. Решена основная задача оптимального управления для систем подобного класса с дополнительными ограничениями в виде интегральных удерживающих связей. Определены необходимые условия оптимальности путем обоснования соответствующего сопряженного уравнения, условия трансверсальности и принципа максимума.

4.1 Оптимальное управление регулярными интегральными системами

Пусть динамическая управляемая система задана общим *интегральным* векторным *уравнением Вольтерра* следующего вида:

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds, \tag{4.1}$$

где $x(t),\ f(t),\ F(\cdot) \in R^n,\ u(t) \in R^m$; здесь $x(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — управление из класса кусочно-непрерывных функций, $u \in U \subset R^m,\ U$ — ограниченное замкнутое множество допустимых управлений. Решение $x(t)$ уравнения (4.1) при данном $u(t)$ назовем также траекторией, соответствующей управлению $u(t)$; $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, где начальный момент времени t_0 фиксирован, а конечный t_1 — не фиксирован. Если уравнение (4.1) не содержит особенностей в подинтегральном выражении, то оно называется также *регулярным интегральным уравнением Вольтерра*.

Отметим, что согласно уравнению (4.1) состояние $x(t)$ в момент времени t зависит от значений управления $u(s)$ в предыдущие моменты времени на промежутке $s \in (t_0,\, t_1)$.

Зададим функционал

$$J(x, u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_0\big[\,x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds, \tag{4.2}$$

и будем считать, что в соотношениях (4.1), (4.2) скалярные и векторные функции $f(t)$, $F(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$ непрерывны вместе со своими производными по всем аргументам, причем $F(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$ обладают второй степенью гладкости, включая непрерывность смешанных производных по $\partial t\,\partial x_\alpha$ и $\partial t\,\partial u_\beta$, $\alpha = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,m}$, второго порядка; $t_0 \le s \le t \le t_1$, $u \in U$, момент времени t_1 не фиксируется.

Зададим также k дополнительных условий в виде интегральных равенств

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_i\big[\,x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = 0, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4.3}$$

где функции $\varphi_i(\cdot)$ считаются непрерывными по всем своим переменным и гладкими по x. На самом деле, при задании равенств (4.3) можно исходить из равенств $\varphi_i(\cdot) = 0$, $i = \overline{1,k}$, которые затем подлежат интегрированию по s, $s \in [\,t_0,\, t_1\,]$ и домножению на некоторые множители λ_i, $i = \overline{1,k}$.

Требуется среди допустимых управлений найти такое управление $u_0(t)$ и соответствующую ему траекторию $x_0(t)$, которая является решением уравнения (4.1), $t \in [\,t_0,\, t_1]$, чтобы функционал (4.2) принимал минимальное значение: $J \to \min_{u\in U}$, и были выполнены также равенства (4.3).

Иначе говоря, требуется систему (4.1) перевести из заданного начального положения $x^0 = x(t_0) = f(t_0)$ в некоторое незаданное конечное $x^1 = x(t_1)$ по фазовой траектории $x(t)$, являющейся решением уравнения (4.1), $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, где t_1 — нефиксированный момент времени окончания процесса оптимизации. При этом надо среди допустимых управлений найти такое управление $u_0(t)$ и соответствующую ему траекторию $x(t) = x_0(t)$, чтобы функционал (4.2) принимал минимальное значение и были выполнены равенства (4.3).

Решение $\big(x_0(t),\, u_0(t)\big)$ задачи (4.1)–(4.3) будем называть соответственно оптимальной траекторией и оптимальным управлением. Пару $\big(x(\cdot),\, u(\cdot)\big)$ будем называть *процессом*, пару $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$ — *оптимальным процессом*, $t \in [\,t_0,\, t_1\,]$.

Задачи, подобные (4.1)–(4.3), но в более общих, абстрактных формах рассматривались в работах [23, 30, 90]. Решение задачи (4.1)–(4.3) позволяет, тем не менее, достичь более пригодных для практических целей результатов.

4.1.1. Необходимые условия оптимальности. Следуя работе [298], в задаче (4.1)–(4.3) обозначим через $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$, $t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$ оптимальный процесс, а через λ_i, $i = \overline{0,k}$ — множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (4.2), (4.3); здесь t_1^0 — конечный нефиксированный момент времени, отвечающий оптимальному процессу $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$.

Введем в рассмотрение систему вспомогательных кусочно-непрерывных функций $\psi(t) = \big(\psi_j(t)\big)_{j=\overline{1,n}}$, $t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$, и построим функцию Гамильтона

$$H(x,u,s) = \int_s^{t_1^0} \psi^*(t)\, F(t,x,u,s)\, dt - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, \varphi_i(x,u,s). \tag{4.4}$$

Сформулируем и докажем утверждение, обобщающее принцип максимума [90, 108] на интегральные системы вольтерровского типа.

Теорема 4.1. *Пусть в задаче* (4.1)–(4.3) *процесс* $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),$ $t_1^0\big)$ *оптимален. Тогда найдутся множители Лагранжа* λ_0, ..., λ_k *и вектор-функция* $\psi(t) \in R^n$, $t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$, *обеспечивающие выполнение следующих соотношений:*

$$\psi^*(s) = \frac{\partial\, H\big[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x}, \tag{4.5}$$

$$H\big[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big] = \max_{u\in U}\; H\big[\,x_0(s),\, u(s),\, s\,\big], \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, \varphi_i\big[\,x_0^1,\, u_0(t_1^0 - 0),\, t_1^0\,\big] = 0, \tag{4.7}$$

$$\lambda_i \ge 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i > 0, \tag{4.8}$$

где $H(\cdot)$ *— функция Гамильтона, определяемая выражением* (4.4), $x_0^1 = x_0(t_1^0)$.

Доказательство. Вначале сделаем ряд общих замечаний, способствующих уяснению дальнейшего хода рассуждений. По условию в исходном уравнении (4.1) вектор-функция $F(\cdot)$ считается непрерывной по совокупности аргументов и гладкой по x. Непрерывность по t функции $F(\cdot)$ и верхнего предела интегрирования влечет за собой непрерывность интеграла в уравнении (4.1), а тем самым и непрерывность решения $x(t)$ уравнения (4.1).

Отметим, что при фиксированном s функция Гамильтона (4.4) зависит от сопряженной переменной $\psi(t)$, $\forall\, t \in [\,s,\, t_1^0\,]$. Принцип максимума (4.6) в этом отличается от стандартного принципа максимума для обыкновенных дифференциальных уравнений, где значение функции $\psi(t)$ рассматривается только в момент времени $t = s$.

Далее, сопряженное уравнение (4.5) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции ψ. Действительно, после подстановки выражения $H(\cdot)$ (4.4) в уравнение (4.5) получим

$$\psi(s) = \int\limits_s^{t_1^0} K(t,s)\,\psi(t)\,dt + \theta(s),$$

где введены обозначения

$$K^*(t,s) = \frac{\partial F\big[\,t,\, x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x},$$
$$\theta^*(s) = -\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, \frac{\partial \varphi_i\big[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x}.$$

Укажем также, что условие теоремы (4.8) означает условие невырожденности системы множителей λ_0, ..., λ_k. Если $\lambda_0 = ... = \lambda_k = 0$, то в силу определения функции Гамильтона (4.4) сопряженное уравнение (4.5) является однородным. Уравнение (4.5), как только что было установлено, это уравнение Вольтерра второго рода. Если это уравнение однородно, то известно (см., например, [90, 91]), что оно имеет единственное и лишь нулевое решение $\psi(t) = 0$.

Помимо этого, обратим внимание на то, что здесь на множители Лагранжа λ_i, $i = \overline{0,k}$, можно смотреть и как на непрерывно дифференцируемые функции времени: $\lambda_i = \lambda_i(t)$; от этого дальнейший анализ никоим образом не изменится.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы. Для этого воспользуемся абстрактной теорией оптимального управления, описанной в работе [90]. Сведем нашу задачу (4.1)–(4.3) к абстрактной задаче по известной схеме (подробности см. в работе [90]). Продолжим оптимальный процесс $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$ на некоторый больший интервал $\Delta = [\,t_0,\, \widehat{t}_1\,]$, где $\widehat{t}_1 > t_1^0$, считая, что $u_0(t) = u_0(t_1^0 - 0)$ при $t > t_1^0$. Запишем уравнение (4.1) с ограничениями (4.3) в общем виде

$$G(w) = z, \qquad z = (y,v)^*, \qquad w = (\bar{x},u)^*, \qquad v = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{\varphi}\, ds,$$

$$y(t) = x(t) - f(t) - \int\limits_{t_0}^{t} F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\,ds, \qquad t \in \Delta,$$

где $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\big[\,x(s),\, u(s),\, s\,\big] = \big(\varphi_i\big)_{i=\overline{1,k}}$, $\bar{x} = (x, t_1)$.

Очевидно, что уравнение $G(w) = 0$ совпадает с интегральным уравнением (4.1) и равенствами (4.3). В абстрактной задаче минимизируемый функционал: $V(w) = J(\bar{x}, u)$. Решением этой абстрактной задачи является оптимальный процесс $w_0(\cdot) = \big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)^* = \big(x_0(\cdot),\, t_1^0,\, u_0(\cdot)\big)^*$.

Перейдем к построению лагранжиана в задаче с ограничениями в виде равенств. Равенствам (4.3) сопоставим набор множителей λ_1, ..., λ_k, а уравнению (4.1) сопоставим линейный функционал m^*y. Уравнению $G(w) = 0$ сопоставим линейный функционал l^*z, действующий на пространстве $Z = \{\,z\,\}$, $l^* \in Z^*$. Функционал l^*z имеет вид

$$l^*z = m^*y + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \varphi_i\big[\,x(s),\, u(s),\, s\,\big]\,ds,$$

где $z = (y,v)^*$. Вещественная функция $L(w)$ переменной $w \in W$, зависящая от множителей $m^* \in Y^*$, $\hat{\lambda} \in R^k$, $\hat{\lambda} = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{1,k}}$, и λ_0

образует *функцию Лагранжа*

$$L(w) = m^* y + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \, \varphi_i[\, x(s),\, u(s),\, s \,]\, ds, \tag{4.9}$$

или *лагранжиан* задачи:

$$V(w) \to \min_{u \in U}, \qquad G(w) = 0, \qquad w = (\bar{x}, u)^*.$$

Для определения структуры функционала m^* рассмотрим абстрактное сопряженное уравнение $\big(\delta_{\bar{x}}\, L\big)_0 = 0$ или $L'_{\bar{x}}\,(w_0) = 0$ на траекториях оптимального процесса $w_0 = (\bar{x}_0,\, u_0)^*$, называемое также *уравнением Лагранжа*, где $\bar{x} = (x,\, t_1)$. Это уравнение распадается на условия стационарности по x и по t_1 [90]:

$$\big(\delta_x\, L\big)_0 = 0, \qquad \big(\delta_{t_1}\, L\big)_0 = 0. \tag{4.10}$$

Запишем первое уравнение (4.10):

$$m^*\, \delta x = N^*\, \delta x - \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_0 \delta\, x(s)\, ds, \tag{4.11}$$

где

$$N^*\, \delta x = m_t^* \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \delta\, x(s)\, ds. \tag{4.12}$$

Здесь m_t^* означает действие функционала m^* по переменной t. Поскольку интеграл (4.12) берется по переменной s и функция $\delta\, x(s)$ зависит от переменной s, то функционал N^* в целом должен записываться в виде интеграла

$$N^*\, \delta x = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi_0^*(s)\, \delta\, x(s)\, ds. \tag{4.13}$$

В соответствии с выражением (4.11) аналогичный (4.13) вид имеет функционал m^*:

$$m^*\, \delta x = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(s)\, \delta\, x(s)\, ds. \tag{4.14}$$

Подставляя интеграл (4.14) в формулу, определяющую лагранжиан $L(w)$, получим

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t) \, \big[\, x(t) - f(t) \,\big] \, dt \; -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, dt \int\limits_{t_0}^{t} F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_i\big[\, x(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds,$$

или, после изменения порядка интегрирования в двойном интеграле будем иметь

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t) \, \big[\, x(t) - f(t) \,\big] \, dt - \tag{4.15}$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s \,\big]\, dt + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_i\big[\, x(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds.$$

Обратимся вновь к первому равенству (4.10). Его можно, принимая во внимание соотношение (4.15), выразить так:

$$\int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(s)\, \delta\, x(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \delta\, x(s)\, dt \; +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_0 \delta\, x(s)\, ds = 0. \tag{4.16}$$

Из соотношения (4.16) вытекают согласно основной лемме вариационного исчисления равенства (в силу соответствующего выбора $k+1$ множителей Лагранжа λ_i, $i = \overline{0, k}$, и произвольности оставшихся $n-k-1$ вариаций $\delta\, x(s)$):

$$\psi^*(s) - \int\limits_s^{\widehat{t}_1} \psi^*(t) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 dt + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \forall\, s \in [\, t_0,\, t_1^0\,],$$

$$\psi^*(s) - \int\limits_s^{\widehat{t}_1} \psi^*(t) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 dt = 0, \qquad \forall\, s \in (t_1^0,\, \widehat{t}_1\,].$$

Второе из этих равенств означает, что на промежутке $s \in (t_1^0,\, \widehat{t}_1\,]$ функция $\psi(s)$ является решением однородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Ранее уже оговаривалось, что такое уравнение имеет единственное и при том нулевое решение, т.е. $\psi(s) = 0,\ s \in (t_1^0,\, \widehat{t}_1\,]$.

Следовательно, первое из написанных двух равенств, учитывая определение функции Гамильтона H (4.4), преобразуется в равенство (4.5) из формулировки теоремы 4.1. Одновременно с этим лагранжиан (4.15) приобретает вид

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \psi^*(t) \left[\, x(t) - f(t)\, \right] dt -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1^0} ds \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\, F\left[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\right] dt + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_i \left[\, x(s),\, u(s),\, s\,\right] ds.$$

Заключаем отсюда (после взятия производной от $L(w)$ по t_1), что второе равенство стационарности (4.10) переходит в равенство (4.7).

Подставим в выражение $L(w)$ (4.15) значения $x(t) = x_0(t),\ t_1 = t_1^0$ и учтем определение функции Гамильтона H (4.4). Тогда, легко обнаружить, функционал $L(x_0, u) = L(x_0, u, t_1^0)$ принимает вид

$$L(x_0, u) = \mathrm{const} - \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} H_0\left[\, u(s),\, s\,\right] ds, \tag{4.17}$$

где

$$H_0(u,s) = \begin{cases} H\left[\, x_0(s),\, u,\, s\,\right] & \text{при } s \in [\, t_0,\, t_1^0\,], \\ 0 & \text{при } s \in (t_1^0,\, \widehat{t}_1\,]. \end{cases}$$

Согласно результатам работы [90] представление лагранжиана и гамильтониана в форме (4.17) является важным условием выполнения абстрактного принципа максимума и абстрактного сопряженного уравнения при наличии некоторого допустимого набора множителей Лагранжа $l^* = (m^*, \lambda_0,\, ...,\, \lambda_k)$. В этом случае функционал m^* записывается в виде интеграла (4.14), а сопряженное уравнение — в виде равенств (4.5) и (4.7).

Кроме того, исходя из сделанных предположений, гамильтониан H (4.4) непрерывен. Значит, функция $H_0(u,s)$ в соотношении (4.17) непрерывна по u и кусочно-непрерывна по s. Следовательно, абстрактный принцип максимума в соответствии с работой [90] выражается при $s \in [\, t_0,\, t_1^0\,]$ соотношением (4.6). Таким образом, данную теорему можно считать доказанной.

Заметим, что при некоторой модернизации теорема 4.1 остается в силе и для более общих нелинейных интегральных управляемых систем вольтерровского типа

$$E\left[\, t,\, x(t),\, u(t)\,\right] = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} F\left[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\right] ds,$$

где $E(\cdot)$ — некоторая заданная непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих аргументов. По этому поводу см. далее § 4.2. Теорема 4.1 является здесь базовой и на ее основе удобно проводить изучение оптимизационных свойств различных объектов управления, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра.

4.1.2. Достаточное условие оптимальности. Рассматривается задача оптимального управления (4.1)–(4.3). Предполагается, что все условия теоремы 4.1 выполнены.

Обратимся вновь к абстрактной теории [90]. Абстрактная задача оптимизации имеет известный вид

$$G(w) = 0, \qquad w = (x,u)^*, \qquad V(w) \to \min_{u \in U},$$

где $G:\ X\times U\to Z$, $V:\ X\times U\to R$; здесь X, Z — линейные нормированные пространства, U — линейное метрическое пространство (в нашем случае это линейное пространство кусочно-непрерывных функций с метрикой: $d(u_1,u_2)=\operatorname{mes}\{\,t:\ u_1(t)\neq u_2(t)\,\}$, где $d(\cdot)$ — расстояние между значениями векторов u_1 и u_2 в момент времени t). Уравнение $G(w)=0$ описывает совокупность уравнений (4.1) и (4.3).

Представим лагранжиан $L(w)$ формулой (см. соотношения (4.15), (4.16)):

$$L(w)=\int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1}\psi^*(t)\,x(t)\,dt-\int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1}H\big[\,x(s),\,u(s),\,s\,\big]\,ds, \tag{4.18}$$

где гамильтониан H — функция (4.4). После подстановки сюда $x(t)=x_0(t)$ будем иметь выражение (4.17):

$$L(x_0,u)=\text{const}-\int\limits_{t_0}^{t_1}H\big[\,x_0(s),\,u(s),\,s\,\big]\,ds.$$

Далее, абстрактное сопряженное уравнение $\big(L'_{\bar{x}}\big)_0=0$, как это было показано в разделе 4.1.1, равносильно уравнениям (4.5) и (4.7). Кроме того, абстрактный принцип максимума

$$H_0\big[\,u_0(t),\,t\,\big]=\max_{v\in U}\ H_0\big[\,v(t),\,t\,\big],$$

где $H_0(u,t)=H(x_0,u,t)$, $t\in[\,t_0,\,t_1\,]$, эквивалентен выражению (4.6) в формулировке теоремы 4.1. Значит, должны быть выполнены соотношения (4.5)–(4.7), совпадающие с необходимыми условиями оптимальности.

Помимо этого, лагранжиан должен быть представим в виде суммы: $L=L_1(x)+L_2(u)$, где $L_1(x)$ — выпуклая по x функция. Из выражения (4.18) следует, что только второе слагаемое зависит от u. Данное представление лагранжиана L в виде указанной суммы имеет место, если подобное представление имеет место для гамильтониана H:

$$H(x,u,s)=H_1(x,s)+H_2(u,s),$$

где $x\in R^n$, $u\in U\subset R^m$.

Для обеспечения этого представления H достаточно, в свою очередь, как это вытекает из выражения (4.4) для H, чтобы таким же образом представлялись функции $F(\cdot)$ и $\varphi_i(\cdot)$:

$$F(t,x,u,s)=M(t,x,s)+P(t,u,s),$$

$$\varphi_i(x,u,s)=\eta_i(x,s)+\zeta_i(u,s), \tag{4.19}$$

где $i=\overline{0,k}$, причем

$$H_1(x,s)=\int\limits_{s}^{t_1^0}\psi^*(t)\,M(t,x,s)\,dt-\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\,\eta_i(x,s). \tag{4.20}$$

Понятно, что функционал $L_1(x)$ можно получить из L, если в правую часть (4.18) вместо H подставить $H_1(x,s)$. Для выпуклости $L_1(x)$ достаточно, чтобы функция $H_1(x,s)$ была выпукла по x.

Отметим, что вполне эффективные условия выпуклости по x функции $H_1(x,s)$ (4.20) можно получить, если потребовать линейности функций M и η_i, $i=\overline{1,k}$, и выпуклости $\eta_0(x,s)$ по x:

$$M(t,x,s)=A(t,s)\,x+m_0(t,s),\qquad \eta_i(x,s)=\alpha^*(s)\,x+\eta_{i0}\,(s),$$

где $A(t,s)\in R^n\times R^n$, $m_0(t,s)$, $\alpha(s)\in R^n$, $\eta_{i0}(s)\in R$. В силу выражений (4.19) можно без ущерба для общности положить $m_0(t,s)\equiv\equiv 0$, $\eta_{i0}(s)\equiv 0$, $i=\overline{1,k}$.

При выполнении всех указанных соотношений по теореме о достаточных условиях оптимальности в абстрактной задаче оптимизации [298] процесс $\big(x_0(\cdot),\,u_0(\cdot)\big)$, $t\in[\,t_0,\,t_1^0\,]$ оптимален. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Будем считать, что в задаче оптимизации* (4.1) – (4.3) *функции* F,φ_i, $i=\overline{0,k}$, *имеют вид* (4.19). *Предположим также, что для некоторых* $\psi(\cdot)$, λ_0, ..., λ_k $\big(\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=0}^{k}\lambda_i>0\big)$ *процесс* $\big(x_0(\cdot),\,u_0(\cdot)\big)$, $t\in[\,t_0,\,t_1^0\,]$, *удовлетворяет необходимым условиям оптимальности* (4.5)–(4.7). *Тогда процесс* $\big(x_0(\cdot),\,u_0(\cdot)\big)$ *оптимален в задаче* (4.1)–(4.3).

4.1.3. Линейное уравнение Вольтерра. В предыдущем разделе были наложены ограничения на функции $F(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$, $i=\overline{1,k}$, в уравнениях (4.1), (4.3) в виде требований линейности по x и выпуклости функции $\varphi_0(\cdot)$ по x, которые обеспечивают выпуклость гамильтониана задачи (4.1)–(4.3) по x, а тем самым согласно теореме 4.2 и оптимальность процесса $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big),\ t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$.

Упомянутый эпизодический характер наличия линейности по x ввиду важности этого случая распространим на более общую ситуацию. Пусть имеется управляемая система, описываемая интегральным линейным уравнением Вольтерра:

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \big[\, A(t,s)\, x(s) + B(t,s)\, u(s) \,\big]\, ds, \tag{4.21}$$

где, как и раньше, $x(t),\ f(t)$ — n–мерные столбцевые векторы, $u(t) \in \in U \subset R^m,\ A(t,s),\ B(t,s)$ — матрицы соответственно порядков $n\times n$ и $n \times m,\ t \in [\,t_0,\, t_1\,],\ t_1$ — нефиксированный момент времени.

Зададим также функционал, подлежащий минимизации J (4.2):

$$J(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_0\big[\, x(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds$$

и интегральное векторное равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \big[\, a(s)\, x(s) + b(s)\, u(s) \,\big]\, ds = 0, \tag{4.22}$$

где $a(s) \in R^k \times R^n,\ b(s) \in R^k \times R^m$, причем предполагается, что вектор-функции

$$F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s \,\big] = A(t,s)\, x(s) + B(t,s)\, u(s) \in R^n,$$

$$\hat{\varphi}\big[\, x(s),\, u(s),\, s \,\big] = a(s)\, x(s) + b(s)\, u(s) \in R^k$$

и скалярная функция $\varphi_0(\cdot)$ удовлетворяют всем оговоренным ранее для задачи (4.1)–(4.3) условиям.

Для задачи (4.21), (4.2), (4.22) также требуется сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности. Заранее ясно, что их можно объединить в одном утверждении.

Обозначим, как и прежде, через $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big),\ t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$ — оптимальный процесс, $\lambda_i,\ i = \overline{0,k}$, — множители Лагранжа, а через $\psi(t) \in R^n$ — систему вспомогательных кусочно-непрерывных функций. Применительно к рассматриваемой задаче введем функцию Гамильтона

$$H(x,u,s) = \int\limits_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, A(t,s)\, x(s)\, dt - \hat{\lambda}^*\, a(s)\, x(s) - \lambda_0\, \varphi_0[\, x(s),\, u(s),\, s\,] +$$

$$+ \int\limits_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, B(t,s)\, u(s)\, dt - \hat{\lambda}^*\, b(s)\, u(s), \tag{4.23}$$

где $\hat{\lambda} = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{1,k}} \in R^k$.

Теорема 4.3. *Для того, чтобы процесс $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$ в задаче (4.21), (4.2), (4.22) был оптимальным, необходимо и достаточно существование таких множителей Лагранжа λ_0, ..., λ_k и вектор-функции $\psi(t) \in R^n,\ t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$, при которых имеют место следующие соотношения:*

$$\psi^*(s) = \frac{\partial\, H\big[\, x_0(s),\, u_0(s),\, s \,\big]}{\partial x} =$$

$$= \int\limits_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, A(t,s)\, dt - \hat{\lambda}^*\, a(s) - \lambda_0\, \frac{\partial \varphi_0[\, x_0(s),\, u_0(s),\, s]}{\partial x}, \tag{4.24}$$

$$H\big[\, x_0(s),\, u_0(s),\, s \,\big] = \max_{u \in U}\ H\big[\, x_0(s),\, u_(s),\, s \,\big], \tag{4.25}$$

$$\lambda^*\, \varphi\big[\, x_0^1,\, u_0(t_1^0 - 0),\, t_1^0 \,\big] = 0, \quad \lambda = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{0,k}}, \quad \varphi = \big(\varphi_i\big)_{i=\overline{0,k}}, \tag{4.26}$$

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i > 0, \tag{4.27}$$

где $H(\cdot)$ — функция Гамильтона, задаваемая формулой (4.23). Здесь $x_0^1 = x_0(t_1^0),\ t_1^0$ — конечный нефиксированный момент времени окончания оптимального процесса $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$.

Разумеется, доказательство теоремы 4.3 полностью укладывается в рамки доказательства двух предыдущих теорем 4.1 и 4.2. Отметим только, что необходимые условия оптимальности (4.24)–(4.27) соответствуют аналогичным условиям (4.5)–(4.8) теоремы 4.1. Линейность задачи (4.21), (4.22) и выпуклость в (4.2) гарантируют наличие выпуклости по x гамильтониана H (4.23) и лагранжиана L этой задачи, а значит, и обеспечение достаточных условий оптимальности процесса $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$.

В качестве замечания укажем еще на то, что сопряженное уравнение в формулировке теоремы 4.3 может быть представлено в форме линейного интегрального уравнения Вольтерра (4.24) второго рода относительно неизвестной вектор-функции ψ:

$$\psi(s) = \int\limits_s^{t_1^0} K(t,s)\,\psi(t)\,dt + \theta(s),$$

где

$$K^*(t,s) = \frac{\partial\, F\big[\,t,\, x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x},$$

$$\theta^*(s) = -\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, \frac{\partial\,\varphi_i\big[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x},$$

откуда будет следовать, что $K^*(t,s) = A^*(t,s),\ \theta^*(s) = -\,\hat\lambda^*\, a(s) - -\lambda_0\, \partial\varphi_0[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,]/\partial x$.

Модельный пример 1. Пользуясь результатами теоремы 4.3, найдем оптимальное управление в системе (4.21) для задачи быстродействия с функционалом

$$J(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} ds = t_1 - t_0$$

и дополнительными связями в виде интегральных равенств (4.22).

На допустимые управления $u(t) \in R^m$ наложим ограничение: $\|\,u(t)\,\| \le 1,\ \forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, где t_1 —нефиксированный конечный момент времени. Систему (4.21) требуется перевести с помощью допустимого оптимального управления $u_0(t)$ из заданной начальной точки $x^0 = x(t_0) = f(t_0)$ в некоторую конечную точку $x^1 = x(t_1)$ за наименьшее возможное время по траектории $x_0(t)$, удовлетворяющей уравнению (4.21), где $t_1 = t_1^0$ — нефиксированное время окончания оптимального процесса $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$, $t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$.

Из постановки задачи следует, что любая конечная точка x^1 на оптимальной траектории $x_0(t)$, когда на вход интегральной системы (4.21) подается оптимальное по быстродействию управление $u_0(t)$, будет достигаться за минимальное время.

Согласно выражению (4.23) введем функцию Гамильтона при дополнительном условии, что $b(t_1^0)$ — нулевая матрица соответствующей размерности:

$$\begin{aligned} H(x,u,s) &= \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\,A(t,s)\,x(s)\,dt - \hat\lambda^*\,a(s)\,x(s) - \lambda_0\, + \\ &+ \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\,B(t,s)\,u(s)\,dt - \hat\lambda^*\,b(s)\,u(s) \;= \\ &= \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\,A(t,s)\,x(s)\,dt - \hat\lambda^*\,a(s)\,x(s) - \lambda_0\, + \\ &+ \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\,B(t,s)\,u(s)\,dt + \hat\lambda^*\left(\int\limits_s^{t_1^0} \frac{d\,b(t)}{dt}\,dt\right)u(s) \;= \\ &= \int\limits_s^{t_1^0} \psi^*(t)\,A(t,s)\,x(s)\,dt - \hat\lambda^*\,a(s)\,x(s) - \lambda_0\, + \\ &+ \int\limits_s^{t_1^0} \big[\,\psi^*(t)\,B(t,s) + \hat\lambda^*\,\dot b(t)\,\big]\,u(s)\,dt, \qquad \hat\lambda = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{1,k}}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

где вектор-функция $\psi(t) \in R^n$ и вектор множителей $\hat\lambda \in R^k$ удовлетворяют по теореме 4.3 уравнению (4.24) и уравнению связей (4.22).

В соответствии с принципом максимума (4.25) теоремы 4.3 оптимальное управление u_0 в выражении (4.28) следует взять в виде

$$u_0(s) = \operatorname{sign}\big[\,B^*(t,s)\,\psi(t) + \dot b^*(t)\,\hat\lambda\,\big], \tag{4.29}$$

который обеспечивает при наложенном ограничении на управление $\|\,u\,\| \le 1$ максимум по u гамильтониану H (4.28).

Обратим внимание на то, что при выводе формулы (4.29) линейность по x нигде не использовалась. Это означает, что формула (4.29) остается в силе и для интегральных управляемых систем, куда лишь управление u входит линейно:

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} \left[A\big(t,\, x(s),\, s\big) + B(t,s)\, u(s) \right] ds,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[a\big(x(s),\, s\big) + b(s)\, u(s) \right] ds = 0,$$

где $x(t)$, $f(t)$, $A(\cdot) \in R^n$, $B(t,s) \in R^n \times R^m$, $a(\cdot) \in R^k$, $b(s) \in R^k \times R^m$. Правда, при этом, условия (4.24)–(4.27) теоремы 4.3 остаются лишь необходимыми и теряют характер достаточных.

Подводя предварительные итоги, можно с уверенностью сказать, что используемая здесь абстрактная схема вывода необходимых (и достаточных) условий оптимальности управляемых динамических систем обладает большой степенью общности. Благодаря этому удается их обосновать для широкого класса регулярных интегральных и, как это будет показано дальше, сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений. Кроме того, полученные условия оптимальности в виде сопряженного уравнения и принципа максимума являются алгоритмической основой для формирования закона оптимального управления.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите интегральное уравнение Вольтерра.
2. Сформулируйте необходимые условия оптимальности.
3. Запишите уравнения Лагранжа.
4. Запишите достаточные условия оптимальности в абстрактной задаче оптимизации.
5. Запишите линейное уравнение Вольтерра.

4.2 Оптимальное управление сингулярными интегральными системами

Этот параграф посвящен обоснованию принципа максимума для интегральных управляемых систем с сингулярным множителем в подинтегральной части. Здесь могут возникать разные варианты сингулярных особенностей в интегралах типа Вольтерра, но из большого разнообразия ситуаций выберем наиболее типичные.

4.2.1. Интегральные уравнения со степенными ядрами. Вначале рассмотрим управляемые системы, описываемые векторным уравнением Вольтерра первого рода следующего вида:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\alpha}}\, F\left[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\right] ds = f(t), \tag{4.30}$$

в случае, когда подинтегральная вектор-функция обращается в бесконечность при $t = s$, $0 < \alpha < 1$ (в анализе для неограниченных подинтегральных функций, напомним, вводят понятие несобственного интеграла, главного значения интеграла или *сингулярного интеграла*). При $\alpha = 1/2$ уравнение (4.30) в упрощенной форме известно под названием *интегрального уравнения Абеля.*

Предполагается, что вектор-функция $F(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по своим аргументам, ограничена по норме и все переменные, входящие в уравнение (4.30) имеют тот же смысл и удовлетворяют тем же условиям, что и в уравнении (4.1).

Как и в предыдущем параграфе, будем считать, что требуется выбором управления u минимизировать функционал качества (4.2) при условии, что на систему (4.30) наложены дополнительные связи в виде k интегральных равенств (4.3).

Прежде чем переходить к формальному и достаточно абстрактному алгоритму получения необходимых условий оптимальности в задаче (4.30), (4.2), (4.3), преобразуем интеграл в левой части уравнения (4.30), пользуясь методом преобразования сингулярного ядра, описанным в работе [35].

Умножим обе части уравнения (4.30) на множитель $(\xi - t)^{\alpha-1}$ и проинтегрируем по t в пределах от t_0 до ξ. Тогда будем иметь интегральное уравнение

$$\int_{t_0}^{\xi} \frac{dt}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \int_{t_0}^{t} \frac{F(t,x,u,s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}} = \int_{t_0}^{\xi} \frac{f(t)\,dt}{(\xi - t)^{1-\alpha}}.$$

Если положить

$$\int_{t_0}^{\xi} \frac{f(t)\,dt}{(\xi - t)^{1-\alpha}} = g(\xi), \qquad g(t_0) = 0,$$

$$\int_{s}^{\xi} \frac{F(t,x,u,s)\,dt}{(\xi - t)^{1-\alpha}\,(t-s)^{\alpha}} = D(\xi,x,u,s), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

то придем по правилу Дирихле [35] к векторному интегральному уравнению первого рода с неизвестной функцией $x(s)$:

$$\int_{t_0}^{\xi} D(\xi,x,u,s)\,ds = g(\xi), \tag{4.31}$$

в котором подинтегральная векторная функция $D(\xi,x,u,s)$ уже не имеет особенностей.

Действительно, пусть $t = s+(\xi-s)\,m$. Тогда (полагая $(\xi-s)\,dm = dt$ при фиксированных ξ и s):

$$\int_{0}^{1} \frac{F\big[\,s+(\xi-s)\,m, x, u, s\,\big]\,dm}{(1-m)^{1-\alpha}\,m^{\alpha}} = D(\xi,x,u,s),$$

и в предположении, что $F(\cdot)$ по норме ограничена: $\|\,F(\cdot)\,\| \le C_F = \mathrm{const}$, получим оценку

$$\|\,D(\cdot)\,\| \le C_F \int_{0}^{1} \frac{dm}{(1-m)^{1-\alpha}\,m^{\alpha}} = C_F\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Итак, начальное сингулярное уравнение (4.30) описанным методом приводится к регулярному интегральному уравнению (4.31). Можно показать [35], что любое решение уравнения (4.31) является также решением уравнения (4.30).

Будем теперь исходить из уравнения (4.31). Возникает естественный вопрос, как к оптимальной задаче (4.31), (4.2), (4.3) применить методику абстрактного принципа максимума (§ 4.1). Для этого сведем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. После дифференцирования по параметру $t = \xi$ уравнения (4.31) получим

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\,D\big[\,t,\,x(s),\,u(s),\,s\,\big]\,ds}{\partial t} + D\big[\,t,\,x(t),\,u(t),\,t\,\big] = \dot g(t), \tag{4.32}$$

где справа точкой сверху обозначена производная функции $g(t)$ по времени t.

В обозначениях

$$\frac{\partial\,D\big[\,t,\,x(s),\,u(s),\,s\,\big]}{\partial t} = S\big[\,t,\,x(s),\,u(s),\,s\,\big], \qquad \dot g(t) = -\,h(t),$$

$$D\big[\,t,\,x(t),\,u(t),\,t\,\big] = -\,T\big[\,t,\,x(t),\,u(t)\,\big],$$

можем уравнение (4.32) представить в обобщенном по сравнению с уравнением (4.1) виде

$$T\big[\,t,\,x(t),\,u(t)\,\big] = h(t) + \int_{t_0}^{t} S\big[\,t,\,x(s),\,u(s),\,s\,\big]\,ds. \tag{4.33}$$

Предполагается, что все функциональные коэффициенты уравнений в задаче (4.33), (4.2), (4.3) удовлетворяют требованиям непрерывной дифференцируемости по своим аргументам , предъявляемым ранее к коэффициентам уравнений задачи (4.1)–(4.3).

Тем не менее, и к задаче (4.33), (4.2), (4.3) можно применить абстрактную схему. Более того, формулировка теоремы о необходимых условиях оптимальности в задаче (4.33), (4.2), (4.3) в точности совпадает с формулировкой теоремы 4.1. Надо только вместо функции Гамильтона H (4.4) взять функцию

$$H(x,u,s) = \int_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\,S(t,x,u,s)\,dt - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\,\varphi_i(x,u,s). \tag{4.34}$$

В результате придем к утверждению.

Теорема 4.4. *Пусть в задаче* (4.30) ((4.33)), (4.2), (4.3) *процесс* $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$ *оптимален. Тогда найдутся множители Лагранжа* $\lambda_0,\, \ldots,\, \lambda_k$ *и вектор-функция* $\psi(t) \in R^n$, $t \in [\,t_0,\, t_1^0\,]$, *обеспечивающие выполнение соотношений* (4.5)–(4.8), *где* $H(\cdot)$ — *функция Гамильтона, определенная выражением* (4.34).

Произойдут некоторые изменения в доказательстве этой теоремы с гамильтонианом (4.34). Опуская все уже известные детали и повторы, приведем лишь отличия в схеме доказательства (см. доказательство теоремы 4.1).

После подстановки H (4.34) в сопряженное уравнение (4.5) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции ψ:

$$\psi(s) = \int\limits_s^{t_1^0} K(t,s)\,\psi(t)\,dt + \theta(s),$$

$$K^*(t,s) = \frac{\partial\, S\big[\,t, x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x},$$

$$\theta^*(s) = -\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, \frac{\partial\, \varphi_i\big[\,x_0(s),\, u_0(s),\, s\,\big]}{\partial x}.$$

Итак, рассматривается следующая абстрактная задача:

$$G(w) = 0, \qquad w = (x,u)^*, \qquad V(w) \to \min_{u \in U},$$

где

$$G(w) = z, \qquad z = (y,v)^*, \qquad v = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{\varphi}\, ds, \quad \hat{\varphi} = \big(\varphi\big)_{i=\overline{1,k}},$$

$$y(t) = T\big[\,t,\, x(t),\, u(t)\,\big] - h(t) - \int\limits_{t_0}^{t} S\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds.$$

Далее, уравнения (4.9)–(4.14) сохраняют свой вид; в уравнении (4.1) надо поменять $F(\cdot)$ на $S(\cdot)$. Выражение для лагранжиана $L(w)$

(4.15) в новой задаче станет выглядеть так:

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{\hat{t}_1} \psi^*(t)\,\big\{\, T\big[\,t,\, x(t),\, u(t)\,\big] - h(t)\,\big\}\, dt - \tag{4.35}$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\hat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\hat{t}_1} \psi^*(t)\, S\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, dt + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_i\big[\,x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds.$$

С учетом соотношения (4.35) первое равенство (4.10) запишется в виде (ср. с равенством (4.16)):

$$\int\limits_{t_0}^{\hat{t}_1} \psi^*(s) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 \delta\, x(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{\hat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\hat{t}_1} \psi^*(t) \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_0 \delta\, x(s)\, dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)_0 \delta\, x(s)\, ds = 0. \tag{4.36}$$

В силу произвольности функций $\delta\, x(s)$ из соотношения (4.36) получим равенства

$$\psi^*(s)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 - \int\limits_{s}^{\hat{t}_1} \psi^*(t)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_0 dt + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)_0 = 0, \;\; \forall\, s \in [\,t_0,\, t_1^0\,],$$

$$\psi^*(s) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 - \int\limits_{s}^{\hat{t}_1} \psi^*(t) \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_0 dt = 0, \qquad \forall\, s \in (t_1^0,\, \hat{t}_1\,].$$

Подставим далее в выражение $L(w)$ (4.35) значения $x(t) = x_0(t)$, $t_1 = t_1^0$. С учетом определения функции Гамильтона H (4.34) получим и для исследуемого функционала $L(x_0, u) = L(x_0, u, t_1^0)$ представление в форме (4.17). В остальном доказательства двух теорем 4.1 и 4.4 будут практически полностью совпадать.

Модельный пример 2. Видоизменим предыдущий пример для задачи быстродействия с функционалом $J = \int_{t_0}^{t_1} ds = t_1 - t_0$

применительно к линейному сингулярному уравнению вида

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha}\left[\,A(t,s)\,x(s)+B(t,s)\,u(s)\,\right]ds = f(t), \qquad 0<\alpha<1, \tag{4.37}$$

с интегральными равенствами (4.22).

Предполагается ограниченность нормы вектора управлений: $\|\,u(t)\,\| \le 1,\ \forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, где t_1 — нефиксированный момент времени. Выбором управления $u(t)=u_0(t)$ надо систему (4.37) перевести из заданной начальной точки x^0 в конечную точку x^1 за минимальное время по траектории $x_0(t)$, удовлетворяющей уравнению (4.37).

Для начала преобразуем сингулярное уравнение (4.37) к регулярному по известному правилу:

$$\int\limits_{t_0}^{\xi}\left[\,D_1(\xi,s)\,x(s)+D_2(\xi,s)\,u(s)\,\right]ds = g(\xi), \tag{4.38}$$

где введены обозначения

$$\int\limits_{t_0}^{\xi}\frac{f(t)\,dt}{(\xi-t)^{1-\alpha}} = g(\xi), \qquad g(t_0)=0,$$

$$\int\limits_{s}^{\xi}\frac{A(t,s)\,dt}{(\xi-t)^{1-\alpha}\,(t-s)^\alpha} = D_1(\xi,s), \quad \int\limits_{s}^{\xi}\frac{B(t,s)\,dt}{(\xi-t)^{1-\alpha}\,(t-s)^\alpha} = D_2(\xi,s).$$

Следующий этап — сведение уравнения (4.38), где для единообразия положено $\xi = t$, к уравнению (4.33), а именно к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Дифференцируя по t уравнение (4.38), получим

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial\, D_1(t,s)}{\partial t}\,x(s)+\frac{\partial\, D_2(t,s)}{\partial t}\,u(s)\right]ds +$$

$$+\,D_1(t,t)\,x(t)+D_2(t,t)\,u(t)=\dot g(t). \tag{4.39}$$

В обозначениях

$$\frac{\partial\, D_1(t,s)}{\partial t} = S_1(t,s), \qquad \frac{\partial\, D_2(t,s)}{\partial t} = S_2(t,s),$$

$$\dot g(t) = -\,h(t), \qquad D_1(t,t) = -\,D_1(t), \qquad D_2(t,t) = -\,D_2(t)$$

уравнение (4.39) запишется так:

$$D_1(t)\,x(t)+D_2(t)\,u(t)=h(t)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left[\,S_1(t,s)\,x(s)+S_2(t,s)\,u(s)\,\right]ds. \tag{4.40}$$

Дальше начинает «работать» теорема 4.4 для задачи (4.40), функционала J, (4.22). Составим гамильтониан

$$H(x,u,s) = \int\limits_{s}^{t_1^0}\psi^*(t)\,S_1(t,s)\,x(s)\,dt - \hat\lambda^*\,a(s)\,x(s) - \lambda_0 \,+$$

$$+\int\limits_{s}^{t_1^0}\psi^*(t)\,S_2(t,s)\,u(s)\,dt - \hat\lambda^*\,b(s)\,u(s), \quad \hat\lambda = \left(\lambda_i\right)_{i=\overline{1,k}}, \tag{4.41}$$

и пользуясь приемом возведения под знак интеграла (4.28), запишем при условии, что $b(t_1^0)=0$, функцию Гамильтона H (4.41) в виде

$$H(x,u,s) = \int\limits_{s}^{t_1^0}\psi^*(t)\,S_1(t,s)\,x(s)\,dt - \hat\lambda^*\,a(s)\,x(s) - \lambda_0 \,+$$

$$+\int\limits_{s}^{t_1^0}\left[\,\psi^*(t)\,S_2(t,s)+\hat\lambda^*\,\dot b(t)\,\right]u(s)\,dt, \tag{4.42}$$

где функции $\psi(t)\in R^n$ и множители $\hat\lambda \in R^k$ удовлетворяют в силу теоремы 4.4 замкнутой системе n сопряженных уравнений

$$\psi^*(s) = \frac{\partial\, H\left[\,x_0(s),\,u_0(s),\,s\,\right]}{\partial x} \;=$$

$$= \int_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, S_1(t,s)\, dt - \hat{\lambda}^*\, a(s)$$

и k уравнениям связей (4.22); здесь множитель λ_0 — заданное число.

Согласно принципу максимума теоремы 4.4 оптимальное управление u_0 в выражении (4.42) надо взять в виде

$$u_0(s) = \operatorname{sign}\,\big[\, S_2^*(t,s)\, \psi(t) + \dot{b}^*(t)\, \hat{\lambda}\,\big],$$

обеспечивая тем самым выполнение условия $\|\, u\,\| \le 1$ и максимальное значение по u функции H (4.42).

4.2.2. Интегральные уравнения с логарифмическими ядрами. К теме сингулярных интегральных уравнений примыкают и интегральные уравнения с логарифмическими ядрами специального вида, которые также представляют большой интерес для приложений [35].

Рассмотрим следующее нелинейное векторное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с логарифмическим множителем, доставляющим при $t = s$ сингулярную (неограниченную) особенность (здесь для удобства взято $t_0 = 0$):

$$\int_0^t \mu(t,s,C)\, F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = f(t), \tag{4.43}$$

$$\mu(t,s,C) = \ln(t-s) + C,$$

где $C = 0,5772157$ — *постоянная Эйлера.*

Воспользуемся для регуляризации уравнения (4.43) *методом Вольтерра* [35] интегрального преобразования логарифмического ядра. Прежде всего покажем, что уравнение (4.43) равносильно уравнению

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial\alpha}\, \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bigg|_{\alpha=1} F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = f(t), \tag{4.44}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, определяемая формулой

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt, \;\; \Gamma(1) = 1.$$

Имеем в интеграле (4.44):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\, \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bigg|_{\alpha=1} = \frac{(t-s)^{\alpha-1}\,\big[\ln(t-s)\,\Gamma(\alpha) - \Gamma'(\alpha)\big]}{\Gamma^2(\alpha)}\,\bigg|_{\alpha=1},$$

где производная по α гамма-функции: $\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \ln t\, e^{-t}\, dt$. Подставляя сюда $\alpha = 1$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\, \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bigg|_{\alpha=1} = \ln(t-s) - \int_0^\infty \ln t\, e^{-t}\, dt = \ln(t-s) + C,$$

так как число Эйлера C задается значением интеграла [51]:

$$\int_0^\infty \ln t\, e^{-1}\, dt = -C.$$

Наряду с уравнением (4.44) рассмотрим с помощью однопараметрических семейств функций $f(t,\alpha)$, $\nu(t,\alpha) \in R^n$, непрерывно дифференцируемых по своим аргументам, уравнение

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, F\big[\, t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = \nu(t,\alpha), \tag{4.45}$$

где обозначено

$$\frac{\partial\, \nu(t,\alpha)}{\partial\alpha} = f(t,\alpha), \qquad f(t,1) = f(t).$$

Очевидно, что дифференцирование уравнения (4.45) по α при $\alpha = 1$ приводит к уравнению (4.44).

Затем введем в рассмотрение конечную, непрерывную скалярную функцию

$$\sigma(t,\xi) = \int\limits_0^\infty \frac{(t-\xi)^\rho \, d\rho}{\Gamma(1+\rho)}.$$

Умножим уравнение (4.45) на функцию $\sigma(t,\xi)$ и проинтегрируем по $\xi \in [\,0,\, t\,]$:

$$\int\limits_0^t \sigma(t,\xi)\, d\xi \int\limits_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, F\big[\,\xi,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \nu(\xi,\alpha)\, \sigma(t,\xi)\, d\xi. \tag{4.46}$$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле уравнения (4.46), получим в левой части

$$\int\limits_0^t F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \int\limits_s^t \sigma(t,\xi)\, \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_s^t \frac{(t-\xi)^\rho}{\Gamma(1+\rho)}\, \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \int\limits_0^\infty \frac{(t-s)^{\rho+\alpha}\, d\rho}{\Gamma(1+\rho+\alpha)}.$$

Следовательно, уравнение (4.46) можно записать в виде

$$\int\limits_0^t F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \int\limits_0^\infty \frac{(t-s)^{\rho+\alpha}\, d\rho}{\Gamma(1+\rho+\alpha)} = \int\limits_0^t \nu(\xi,\alpha)\, \sigma(t,\xi)\, d\xi. \tag{4.47}$$

И дальше после дифференцирования уравнения (4.47) по α получим

$$\int\limits_0^t F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds\, \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\int\limits_0^\infty \frac{(t-s)^{\rho+\alpha}\, d\rho}{\Gamma(1+\rho+\alpha)} \right) =$$

$$= \int\limits_0^t f(\xi,\alpha)\, \sigma(t,\xi)\, d\xi. \tag{4.48}$$

В соотношении (4.48):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\int\limits_0^\infty \frac{(t-s)^{\rho+\alpha}\, d\rho}{\Gamma(1+\rho+\alpha)} \right) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\int\limits_\alpha^\infty \frac{(t-s)^{\rho}\, d\rho}{\Gamma(1+\rho)} \right) = -\frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{4.49}$$

Подставим выражение (4.49) в левую часть уравнения (4.48). Будем иметь

$$\int\limits_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\, F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = -\int\limits_0^t f(\xi,\alpha)\, \sigma(t,\xi)\, d\xi,$$

откуда при $\alpha = 1$, $\Gamma(2) = 1$ вытекает следующее соотношение:

$$\int\limits_0^t (t-s)\, F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds = g(t), \tag{4.50}$$

где обозначено

$$g(t) = -\int\limits_0^t f(\xi)\, \sigma(t,\xi)\, d\xi = -\int\limits_0^t f(\xi)\, d\xi \int\limits_0^\infty \frac{(t-\xi)^\rho\, d\rho}{\Gamma(1+\rho)}.$$

Таким образом, проведенное интегральное преобразование позволяет исходное сингулярное интегральное уравнение (4.43) представить в виде равносильного, но уже регулярного интегрального уравнения (4.50) с решением, которое является также решением уравнения (4.43).

Вместе с тем, сложности на этом не заканчиваются. Дело в том, что однократное дифференцирование по t уравнения (4.50) за счет множителя $(t-s)$ под знаком интеграла приводит не к интегральному уравнению второго рода (ср. с уравнением (4.32)), а вновь к интегральному уравнению первого рода:

$$\int\limits_0^t \left\{ F\big[t, x(s), u(s), s\big] + (t-s)\, \frac{\partial F\big[t, x(s), u(s), s\big]}{\partial t} \right\} ds = \dot g(t). \tag{4.51}$$

Чтобы уравнение (4.50) имело решение, необходимо, очевидно, выполнение условий $g(0) = 0,\ \dot{g}(0) = 0$.

Дифференцируя уравнение (4.51) еще раз по t, получим в итоге интегральное уравнение второго рода, аналогичное уравнению (4.33):

$$T\big[\,t,\, x(t),\, u(t)\,\big] = h(t) + \int\limits_0^t S\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \qquad (4.52)$$

с обозначениями

$$T\big[\,t,\, x(t),\, u(t)\,\big] = \,-\, F\big[\,t,\, x(t),\, u(t),\, t\,\big], \quad h(t) = -\,\ddot{g}(t),$$
$$S\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big] = 2\ \frac{\partial F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]}{\partial t} \,+$$
$$+\ (t-s)\,\frac{\partial^2 F\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]}{\partial t^2}. \qquad (4.53)$$

Теперь, находясь в рамках известной схемы, можем привести, также как это делалось ранее, теорему о необходимых условиях оптимальности для интегрального уравнения с логарифмическим множителем. Доказательство этой теоремы лежит в русле доказательств теорем 4.1 и 4.4.

Теорема 4.5. *Пусть в задаче* (4.43) (4.52), (4.2), (4.3) *с обозначениями* (4.50), (4.53) *процесс* $\big(x_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$ *оптимален. Тогда найдутся множители Лагранжа* λ_0, ..., λ_k *и вектор-функция* $\psi(t) \in R^n,\ t \in [0,\, t_1^0]$, *обеспечивающие выполнение соотношений* (4.5)–(4.8) *с функцией Гамильтона* H (4.34), *где вектор-функция* $S\big[\,t,\, x(s),\, u(s),\, s\,\big]$ *задается выражением* (4.53).

Вопросы для самоконтроля.

1. Как выглядит уравнение Абеля?
2. В чем состоит смысл метода регуляризации Вольтерра интегрального преобразования?

4.3 Оптимальное управление интегродифференциальными системами

Интегродифференциальные уравнения (ИДУ) — это интегральные уравнения, связывающие неизвестную функцию и ее производные. Производные могут быть и частными, но этот более сложный случай ИДУ мы оставим вне рамок нашего изучения.

Первые работы по интегродифференциальным уравнениям возникли в связи с исследованиями В. Вольтерра [35] по теории упругости и электродинамике, призванных математическими средствами показать функциональную зависимость состояния изучаемого вещества от каких-либо физических (силовых) характеристик в данный момент времени, но также и от «истории» этих характеристик во все предыдущие моменты. Мы видим явное присутствие так называемого явления гистерезиса или, по другой терминологии, наличие эффекта запаздывания, эредитарности, наследственности, сохранения памяти и т.д.

Итак, учет «предыстории» в том или ином виде приводит к описанию данного явления с помощью ИДУ. Более подробно с различными интегродифференциальными уравнениями, возникающими в задачах физики, математической физики, теории упругости, теории колебаний, биологии и методами их решения можно познакомиться, например, по работам [31, 32, 34, 115, 124].

Классификация интегродифференциальных уравнений достаточно сложная. Будем рассматривать лишь обыкновенные управляемые ИДУ, т.е. интегродифференциальные уравнения, где производная берется всегда по одной переменной. Кроме того, будем рассматривать лишь ИДУ первого порядка, где порядок уравнения определяется порядком производной.

Пусть задано нелинейное интегродифференциальное уравнение Вольтерра первого порядка следующего вида:

$$F_1\big[\,t,\, x(t),\, \dot{x}(t),\, u(t)\,\big] = f(t) + \int\limits_{t_0}^t F_2\big[\,t,\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds, \ (4.54)$$

где $\dot{x}(t) = d\,x(t)/dt$ и векторные неизвестные функции $x(t) \in R^n,\, u(t) \in \in U \subset R^m$ имеют тот же смысл и ограничения, что и прежде; считается, что заданные вектор-функции

$F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, $f(t) \in R^n$ непрерывно дифференцируемы по своим переменным и $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ обладают требуемой степенью гладкости по x и по $\dot{x}$.

Зададим также подлежащий минимизации по $u \in U$ функционал качества

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0\big[\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds \tag{4.55}$$

и k дополнительных интегральных равенств, полученных путем интегрирования по t, $t \in [\, t_0,\, t_1 \,]$, уравнений дифференциальных связей $\varphi_i(\cdot) = 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_i\big[\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s \,\big]\, ds = 0, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4.56}$$

где функции $\varphi_i(\cdot)$, $i = \overline{0,k}$, считаются непрерывными по своим аргументам и гладкими по $x, \dot{x}$. Здесь, как и раньше, t_1 — нефиксированный конечный момент времени.

По большому счету, можно, конечно, вместо равенств (4.56) взять соответствующие интегродифференциальные равенства. Однако ради простоты используемой алгоритмической схемы ограничимся интегральными равенствами (4.56).

Задача оптимального управления (4.54)–(4.56) ставится в уже стандартной форме: надо среди допустимых управлений $u \in U$ найти такое управление $u_0(t)$ и соответствующие этому управлению оптимальную траекторию $x_0(t)$ со скоростью $\dot{x}_0(t)$, которые удовлетворяют уравнению системы (4.54), чтобы функционал J (4.55) принимал минимальное по $u \in U$ значение вместе с обеспечением равенства (4.56).

Унифицируем данную задачу, пользуясь абстрактным алгоритмом. Решение этой задачи дадим в виде обоснования необходимых условий оптимальности. Из-за вхождения производной $\dot{x}(t)$ во все соотношения поставленной задачи это обоснование будет носить чисто технически более сложный характер, чем аналогичная процедура в § 4.1. Опуская некоторые, малозначительные детали, будем придерживаться изученной ранее схемы.

Пусть $\big(x_0(\cdot),\, \dot{x}_0(\cdot),\, u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$, $t \in [\, t_0,\, t_1^0 \,]$ — оптимальный процесс, $\lambda(t) = \big(\lambda_i(t)\big)_{i=\overline{0,k}}$ — вектор множителей Лагранжа, $\psi(t) = \big(\psi_j(t)\big)_{j=\overline{1,n}}$ — вектор вспомогательных кусочно-непрерывных функций.

Для дальнейшего нам понадобится конструкция дифференциального оператора Эйлера–Лагранжа, часто используемого в вариационном исчислении:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \qquad x = x(t).$$

Кроме того, введем в рассмотрение следующий гамильтониан задачи

$$H(x,\dot{x},u,s) = \int_{s}^{t_1^0} \psi^*(t) F_2(t,x,\dot{x},u,s)dt - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i(s)\varphi_i(x,\dot{x},u,s), \tag{4.57}$$

где сумму можно представить как слагаемое $\lambda^*(s)\,\varphi(\cdot)$, и обобщим принцип максимума на интегродифференциальные системы Вольтерра первого порядка вида (4.54).

Теорема 4.6. *Пусть в задаче* (4.54)–(4.56) *процесс* $\big(x_0(\cdot), \dot{x}_0(\cdot),$ $u_0(\cdot),\, t_1^0\big)$ *— оптимален. Тогда найдутся множители Лагранжа* $\lambda_0(t)$, ..., $\lambda_k(t)$ *и вектор-функция* $\psi(t) \in R^n$, $t \in [\, t_0,\, t_1^0 \,]$, *при которых выполняются следующие соотношения:*

$$\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 - \frac{d}{ds}\left[\,\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right)_0\right] = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)_0,$$

либо

$$D\big[\, \psi^*(s)\,\big(F_1\big)_0 \,\big] = DH_0, \tag{4.58}$$

$$H\big[\, x_0(s),\, \dot{x}_0(s),\, u_0(s),\, s \,\big] = \max_{u \in U}\, H\big[\, x_0(s),\, \dot{x}_0(s),\, u(s),\, s \,\big], \tag{4.59}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i(t_1^0)\, \varphi_i\big[\, x_0^1,\, \dot{x}_0^1,\, u_0(t_1^0 - 0),\, t_1^0 \,\big] = 0 \tag{4.60}$$

для функции Гамильтона $H(x,\dot{x},u,s)$, *определенной выражением* (4.57); $x_0^1 = x_0(t_0^1)$, $\dot{x}_0^1 = \dot{x}_0(t_1^0)$, *причем в граничной точке* t_1^0 *вы-*

полнено также условие трансверсальности

$$\left[\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right)_0 + \lambda^*(s)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\right)_0\right]_{s=t_1^0} = \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \psi^*(t)\left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\right)_0\Big|_{s=t_1^0} dt. \quad (4.61)$$

Замечания.

1. Нулевой индекс в соотношениях (4.58), (4.61) указывает на то, что берется соответствующее выражение на значениях оптимального процесса.

2. Если исходное уравнение системы (4.54) является интегро-дифференциальным уравнением (по x), то и сопряженное уравнение (4.58) также является интегродифференциальным уравнением (по ψ).

Доказательство. Сопряженное уравнение (4.58) представляет собой интегродифференциальное уравнение Вольтерра первого порядка относительно функции ψ. В самом деле, подставляя выражение (4.57) для функции Гамильтона H в уравнение (4.58), будем иметь

$$\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 - \frac{d}{ds}\left[\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right)_0\right] = \int\limits_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\,K(t,s)\,dt + \theta(s),$$

где обозначено

$$\begin{aligned} K(t,s) = {} & \frac{\partial F_2[\,t,\,x_0(s),\,\dot{x}_0(s),\,u_0(s),\,s\,]}{\partial x} - \\ & - \frac{d}{ds}\,\frac{\partial F_2[\,t,\,x_0(s),\,\dot{x}_0(s),\,u_0(s),\,s\,]}{\partial \dot{x}}, \\ \theta(s) = {} & -\lambda^*(s)\,\frac{\partial \varphi[\,x_0(s),\,\dot{x}_0(s),\,u_0(s),\,s\,]}{\partial x} + \\ & + \frac{d}{ds}\left[\lambda^*(s)\,\frac{\partial \varphi[\,x_0(s),\,\dot{x}_0(s),\,u_0(s),\,s\,]}{\partial \dot{x}}\right]. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы вновь обратимся к абстрактной схеме оптимизации. Продолжим оптимальный процесс $\big(x_0(\cdot),\,\dot{x}_0(\cdot),$

$u_0(\cdot)\big)$ на интервал $\Delta = [\,t_0, \widehat{t}_1\,]$, где $\widehat{t}_1 > t_1^0$. Запишем уравнение системы (4.54) с равенством (4.56) в общей форме

$$G(w) = z,\ \ z = (y,v)^*,\ \ w = (\bar{x},u)^*,\ \ v = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{\varphi}(\cdot)\,ds,\ \ \hat{\varphi} = \big(\varphi_i\big)_{i=\overline{1,k}},$$

$$y(t) = F_1[\,t,\,x(t),\,\dot{x}(t),\,u(t)\,] - f(t) - \int\limits_{t_0}^{t} F_2[\,t,\,x(s),\,\dot{x}(s),\,u(s),\,s\,]\,ds,$$

где $\bar{x} = (\tilde{x}, t_1)$, а через $\tilde{x}$ обозначен вектор $\tilde{x} = (x, \dot{x})^*$. При $z = 0$ уравнение $G(w) = 0$ совпадает с интегродифференциальным уравнением (4.54) и равенством (4.56). В данной абстрактной задаче минимизируемый функционал (4.55) запишем так: $V(w) = J(\bar{x}, u)$, а ее решение — в виде оптимального процесса $w_0(\cdot) = \big(x_0(\cdot),\,\dot{x}_0(\cdot),\,t_1^0,\,u_0(\cdot)\big)^*$.

Займемся теперь записью лагранжиана $L(w)$ данной абстрактной задачи

$$G(w) = 0, \qquad V(w) \to \min_{u\in U}, \qquad w = (\bar{x},u)^*$$

с ограничением в виде векторного равенства (4.56). Равенству (4.56) сопоставим набор функций $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_k(t)$, уравнению (4.54) сопоставим линейный функционал m^*y, а уравнению $G(w) = 0$ сопоставим линейный функционал l^*z, заданный на пространстве Z, $Z = \{\,z\,\}$, $l^* \in Z^*$, образующий лагранжиан данной задачи:

$$\begin{aligned} L(w) = {} & l^*z + \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda_0\,\varphi_0[\,x(s),\,\dot{x}(s),\,u(s),\,s\,]\,ds = \\ = {} & m^*y + \int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(s)\,\varphi_i[\,x(s),\,\dot{x}(s),\,u(s),\,s\,]\,ds, \end{aligned} \quad (4.62)$$

где $z = (y,v)^*$, $w = (\bar{x},u)^* \in W$, $m^* \in Y^*$, $Y = \{\,y\,\}$, $\lambda(s) \in R^{k+1}$.

Чтобы определить структуру функционала m^*, рассмотрим абстрактное сопряженное уравнение $\big(\delta_{\bar{x}}\,L\big)_0 = 0$, взятое на траекториях оптимального процесса $w_0 = (x_0, \dot{x}_0, t_1^0, u_0)^*$, где $\bar{x} = (\tilde{x}, t_1)$. Это уравнение распадается на два условия стационарности по $\tilde{x}$ и по t_1:

$$\big(\delta_{\tilde{x}}\, L\big)_0 = 0, \qquad \big(\delta_{t_1}\, L\big)_0 = 0, \tag{4.63}$$

где вариация по $\tilde{x}$ любой вектор-функции $Q = Q(t, x, \dot{x}, u) \in R^n$ понимается в смысле одновременного варьирования Q по x и по $\dot{x}$:

$$\delta_{\tilde{x}}\, Q = \delta_x\, Q + \delta_{\dot{x}}\, Q = \frac{\partial Q}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}\,\delta \dot{x} \;=\; \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}}\,\delta \tilde{x},\;\; \delta_{\tilde{x}}\, Q \in R^n; \tag{4.64}$$

здесь матрицы частного дифференцирования имеют следующие размерности:

$$\frac{\partial Q}{\partial x},\, \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} \in R^n \times R^n, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}} \in R^n \times R^{2n}.$$

С учетом задания вариации $\delta_{\tilde{x}}\,(\cdot)$ по правилу (4.64) введем линейный функционал m^*:

$$m^*\, \delta_{\tilde{x}}\, Q = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(s)\, \delta_{\tilde{x}}\, Q\, ds, \qquad \forall\, Q = Q(t, x, \dot{x}, u). \tag{4.65}$$

Подставим далее интеграл (4.65) в выражение (4.62) для лагранжиана $L(w)$:

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\,\big\{\, F_1\big[\, t,\, x(t),\, \dot{x}(t),\, u(t)\,\big] - f(t)\,\big\}\, dt \, -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, dt \int\limits_{t_0}^{t} F_2\big[\, t,\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds \, +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda^*(s)\, \varphi\big[\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds, \quad \lambda = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{0,k}}, \quad \varphi = \big(\varphi_i\big)_{i=\overline{0,k}}.$$

После изменения порядка интегрирования в двойном интеграле получим

$$L(w) = \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\,\big\{\, F_1\big[\, t,\, x(t), \dot{x}(t),\, u(t)\,\big] - f(t)\,\big\}\, dt \, -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, F_2\big[\, t,\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s\,\big]\, dt \, +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda^*(s)\, \varphi\big[\, x(s),\, \dot{x}(s),\, u(s),\, s\,\big]\, ds. \tag{4.66}$$

Первое равенство стационарности (4.63) при использовании соотношений (4.64)–(4.66) примет вид

$$\int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(s)\, \Big[\, \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big)_0 \delta\, x(s) + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \delta\, \dot{x}(s) \Big]\, ds \, -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} ds \int\limits_{s}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, \Big[\, \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big)_0 \delta\, x(s) + \Big(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \delta\, \dot{x}(s) \Big]\, dt \, +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1^0} \lambda^*(s)\, \Big[\, \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)_0 \delta\, x(s) + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \delta\, \dot{x}(s) \Big]\, ds = 0. \tag{4.67}$$

Предположим, что выполнено условие перестановочности для вариаций: $\delta\,(dx/dt) = d\,(\delta x/dt)$. Тогда производя интегрирование по частям во вторых слагаемых всех интегралов равенства (4.67), найдем, что

$$\int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \Big\{\, \psi^*(s)\, \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big)_0 - \frac{d}{ds}\, \Big[\, \psi^*(s)\, \Big(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \Big] \Big\}\, \delta\, x(s)\, ds \, -$$

$$- \Big[\, \psi^*(s)\, \Big(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \delta\, x(s) \Big]_{s=\widehat{t}_1} -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \Big(\int\limits_{s}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, \Big[\, \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big)_0 - \frac{d}{ds}\, \Big(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \Big]\, \delta\, x(s)\, dt \, -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\widehat{t}_1} \psi^*(t)\, \Big[\, \Big(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\Big)_0 \delta\, x(s) \Big]_{s=\widehat{t}_1} \Big)\, ds \, +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1^0}\left\{\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left[\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x}\right)_0\right]\right\}\delta\,x(s)\,ds\,-$$

$$-\left[\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x}\right)_0\delta\,x(s)\right]_{s=t_1^0}=0, \qquad (4.68)$$

где полная вариация $\delta\,x(s)\,\big|_{s=t_1^0}$ равна по определению

$$\delta\,x(s)\,\big|_{s=t_1^0}=\delta\,x(t_1^0)-\dot x(t_1^0)\,\delta\,t_1^0,$$

если величина t_1^0 не фиксирована.

Итак, стационарность лагранжиана $L(w)$ по $\tilde x$ (4.63) приводит к равенству (4.68). Если бы моменты времени t_1^0, $\widehat{t}_1$ были фиксированы, то из (4.68) следовала бы в силу выбора $k+1$ множителей $\lambda_i(t)$, $i=\overline{0,k}$, и прозвольности оставшихся $n-k-1$ функций $\delta\,x(s)$ из основной леммы вариационного исчисления справедливость следующих равенств:

$$\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left[\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\dot x}\right)_0\right]-$$

$$-\int_s^{\widehat{t}_1}\psi^*(t)\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F_2}{\partial\dot x}\right)_0\right]dt\,+$$

$$+\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left[\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x}\right)_0\right]=0,\quad\forall\,s\in[\,t_0,\,t_1^0\,],\qquad(4.69)$$

а также

$$\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left[\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\dot x}\right)_0\right]-$$

$$-\int_s^{\widehat{t}_1}\psi^*(t)\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F_2}{\partial\dot x}\right)_0\right]dt=0,\quad\forall\,s\in(t_1^0,\,\widehat{t}_1\,].\qquad(4.70)$$

Понятно, что если в задаче с подвижными концами на некоторых кривых (экстремалях) достигается экстремум (стационарность) некоторого функционала, то на тех же кривых будет достигаться экстремум функционала в соответствующей задаче с неподвижными концами.

Берем значение функционала $L(w)$ лишь на экстремалях. Значит, имеют место равенства (4.69) и (4.70). И тогда из соотношения (4.68) получим для граничной точки t_1^0 еще одно векторное равенство:

$$\left[\psi^*(s)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\dot x}\right)_0+\lambda^*(s)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x}\right)_0\right]\delta\,x(s)\Big|_{s=t_1^0}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1^0}\psi^*(t)\left(\frac{\partial F_2}{\partial\dot x}\right)_0\delta\,x(s)\Big|_{s=t_1^0}dt=0,$$

откуда следует условие трансверсальности (4.61).

При нахождении решения $\psi(s)$ линейное однородное интегродифференциальное уравнение (4.70) на промежутке $s\in(t_1^0,\widehat{t}_1\,]$ может быть путем однократного интегрирования сведено к однородному линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое, как известно, имеет единственное нулевое решение $\psi(s)=0$.

Таким образом, заключаем отсюда, что равенство (4.69) с учетом определения функции Гамильтона H (4.57) преобразуется в равенство (4.58) в формулировке теоремы 4.6.

При этом лагранжиан (4.66) принимает следующий вид:

$$L(w)=\int_{t_0}^{t_1^0}\psi^*(t)\left\{\,F_1\big[\,t,\,x(t),\,\dot x(t),\,u(t)\,\big]-f(t)\,\right\}dt\,-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1^0}ds\int_s^{t_1^0}\psi^*(t)\,F_2\big[\,t,\,x(s),\,\dot x(s),\,u(s),\,s\,\big]\,dt\,+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\lambda^*(s)\,\varphi\big[\,x(s),\,\dot x(s),\,u(s),\,s\,\big]\,ds.$$

Если в этом выражении взять в последнем интеграле производную по t_1, то второе равенство стационарности (4.63) преобразуется в равенство (4.60).

Осталось в выражение $L(w)$ (4.66) подставить значения $x(t)=$ $=x_0(t)$, $\dot x(t)=\dot x_0(t)$, $t_1=t_1^0$ и учесть определение гамильтониана

H (4.57). В этом случае лагранжиан $L(x_0, \dot{x}_0, u) = L(x_0, \dot{x}_0, u, t_1^0)$ имеет структуру аналогичную (4.17):

$$L(x_0, \dot{x}_0, u) = \text{const} - \int_{t_0}^{\widehat{t}_1} H_0\big[\, u(s),\, s\,\big]\, ds,$$

где $H_0(u, s) = H\big[\, x_0(s),\, \dot{x}_0(s),\, u,\, s\,\big]$ при $s \in [\, t_0,\, t_1^0\,]$, и $H_0(u, s) = 0$ при $s \in (t_1^0,\, \widehat{t}_1\,]$.

Известно [90], что при наличии такой зависимости между лагранжианом и гамильтонианом задачи вытекает справедливость абстрактного принципа максимума и абстрактного сопряженного уравнения при некотором наборе множителей Лагранжа $l^* = (m^*, \lambda_0, ..., \lambda_k)$. В этом случае функционал m^* имеет форму (4.65), а сопряженное уравнение записывается в виде равенства (4.58).

Помимо этого, в силу непрерывности функции Гамильтона H (4.57), непрерывности функции $H_0(u, s)$ по u и кусочной непрерывности по s абстрактный принцип максимума согласно результатам работы [90] выражается соотношением (4.59) при $s \in [\, t_0,\, t_1^0\,]$. Теорема доказана.

Модельный пример 3. Возьмем управляемую систему, описываемую интегродифференциальным векторным уравнением вида

$$T\big[t, x(t), \dot{x}(t)\big] = f(t) + \int_{t_0}^{t} \big[A_1(t, s)x(s) + \\ + A_2(t, s)\dot{x}(s) + B(t, s)u(s)\big] ds, \qquad (4.71)$$

где $x(t),\ f(t) \in R^n,\ u(t) \in U \subset R^m$, для задачи быстродействия с функционалом $J = \int_{t_0}^{t_1} ds = t_1 - t_0$ и дополнительным интегральным k–векторным равенством

$$\int_{t_0}^{t_1} \big[\, a_1(s)\, x(s) + a_2(s)\, \dot{x}(s) + b(s)\, u(s)\,\big]\, ds = 0, \qquad (4.72)$$

где все участвующие в соотношениях (4.71), (4.72) функциональные коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы 4.6.

Пусть $\forall\, u(t) \in R^m :\ \|\, u(t)\,\| \le 1,\ \forall\, t \in [\, t_0,\, t_1\,]$, где t_1 — нефиксированный конечный момент времени. Задача заключается в нахождении закона оптимального управления $u_0(t)$, переводящего систему (4.71) из начального положения $T\big[\, t_0,\, x^0,\, \dot{x}^0\,\big] = f(t_0)$ в конечное $T\big[\, t_1,\, x^1,\, \dot{x}^1\,\big]$ за наименьшее время по кривой $\big(x_0(t),\, \dot{x}_0(t)\big)$, удовлетворяющей уравнению системы (4.71). Здесь $t_1 = t_1^0$ — нефиксированное время окончания оптимального процесса $\big(x_0(\cdot),\, \dot{x}_0(\cdot),\, u_0(\cdot)\big)$, $t \in [\, t_0,\, t_1^0\,]$.

Для рассматриваемой задачи функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, \dot{x}, u, s) = \int_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, \big[\, A_1(t, s)\, x(s) + A_2(t, s)\, \dot{x}(s)\,\big]\, dt - \\ - \hat{\lambda}^*(s)\, \big[\, a_1(s)\, x(s) + a_2(s)\, \dot{x}(s)\,\big] - \lambda_0 + \\ + \int_{s}^{t_1^0} \psi^*(t)\, B(t, s)\, u(s)\, dt - \hat{\lambda}^*(s)\, b(s)\, u(s), \quad b(t_1^0) = 0, \quad \hat{\lambda} = \big(\lambda_i\big)_{i=\overline{1,k}}.$$

Хорошо видно, что из принципа максимума (4.59) следует вывод о выборе оптимального управления u_0 в уже стандартной форме (4.29), где $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(s)$.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите интегродифференциальные уравнения (системы) Вольтерра 1-го порядка.

2. Как получить однородное линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода?

Задачи и упражнения

В эту часть книги вошли задачи по оптимальному синтезу управляемых динамических систем. Это сделано, конечно же, не случайно. Методы оптимального управления в механических и динамических системах самого разного типа получили в настоящее время весьма широкое распространение. Ввиду важности данной тематики для целей практического использования были взяты в основном задачи, имеющие ярко выраженную прикладную направленность.

Представляется целесообразным, тем не менее, с методической точки зрения при освещении той или иной задачи сохранить в тексте основные этапы ее решения в виде определенной алгоритмической схемы. Такой подход, во-первых, поможет лучше понять специфику самой задачи и, во-вторых, предоставит творческие возможности воспользоваться имеющимся математическим аппаратом для окончательного решения.

Укажем на некоторые представленные здесь задачи, преследующие цель выявить тесную связь уравнения Беллмана в методе динамического программирования, а также принципа максимума Понтрягина с уравнением Гамильтона–Якоби в задачах аналитической механики.

Развивая этот тезис, скажем, что если рассматривать эту механическую аналогию, то данная связь берет свое начало в вариационном принципе стационарного действия Гамильтона и с этой точки зрения задача экстремизации интегрального функционала качества (функционала действия) обеспечивает глубокую связь различных методов и равносильность получаемых решений исследуемой оптимальной задачи.

1. Задача о предельном быстродействии. В системе дифференциальных уравнений [78, 108, 117]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u, \qquad t \in [\,0,\, t_1\,], \tag{1}$$

описывающей движение точки в плоскости с фазовыми переменными x_1, x_2, требуется определить управляющую функцию $u(t)$ так, чтобы точка $A_0(x_1^0,\, x_2^0)$ переместилась в точку $A_1(x_1^1,\, x_2^1) = A_1(0, 0)$ за наименьший промежуток времени с учетом ограничения $|\,u\,| \le 1$. Отметим, что в данной задаче $\ddot{x}_1 = u$ и управление u можно рассматривать как силу, действующую на точку единичной массы.

Предполагается, что управляющая функция $u(t)$ кусочно-непрерывна. Из эвристических соображений несложно обнаружить, что на оптимальных траекториях $u = \pm 1$, поскольку при этих значениях $|\,\dot{x}_1\,|$ и $|\,\dot{x}_2\,|$ достигают наибольших значений и, следовательно, точка движется с наибольшей скоростью. При $u = 1$ имеем из системы (1):

$$x_2 = t + C_1, \qquad x_1 = t^2/2 + C_1 t + C_2,$$

или $x_2^2 = 2\,(x_1 - C)$. Аналогично при $u = -\,1:$

$$x_2 = -\,t + C_1, \qquad x_1 = -\,t^2/2 + C_1 t + C_2,$$

или $x_2^2 = -\,2\,(x_1 - C)$, где C_1, C_2, C — постоянные интегрирования.

Применение к этой задаче классических вариационных методов решения было бы затруднительным, так как оптимальное управление здесь находится на границе области допустимых управлений $U = \big\{\, u:\ |\,u\,| \le 1 \,\big\}$ и двусторонние вариации в этой замкнутой области невозможны; кроме того, оптимальное решение задачи ищется в классе кусочно-непрерывных управлений.

От этих наводящих рассуждений перейдем к более точным формулировкам. Согласно принципу максимума в задаче о быстродействии функция H принимает вид (см. Главу 1, формулу (1.12)):

$$H = \psi_1\, f_1(x, u) + \psi_2\, f_2(x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \tag{2}$$

где переменные ψ_1 и ψ_2 в соответствии с уравнениями (П3.14) удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = -\,\psi_1. \tag{3}$$

Из выражения (2) вытекает, что $\forall\, t \in [\,t_0,\, t_1\,]$, где t_0, t_1 — соответственно начальный и конечный моменты времени, при ограничении $|\,u\,| \le 1$ наибольшее возможное значение функции

$H\big(\psi(t),\, x(t),\, u\big)$ переменного u доставит управление

$$u(t) = \operatorname{sign}\psi_2(t), \tag{4}$$

где $\psi(t) = \big(\psi_1(t),\, \psi_2(t)\big),\ x(t) = \big(x_1(t),\, x_2(t)\big)$.

Следовательно, исходя из выражения (4), можем написать оптимальное управление:

$$u(t) = 1 \quad \text{при} \quad \psi_2(t) > 0, \qquad u(t) = -1 \quad \text{при} \quad \psi_2(t) < 0.$$

Решения системы (3) имеют следующий вид:

$$\psi_1(t) = \psi_1(t_0), \qquad \psi_2(t) = -\psi_1(t_0)\,(t - t_0) + \psi_2(t_0). \tag{5}$$

Поскольку начальные значения $\psi_1(t_0)$ и $\psi_2(t_0)$ в решениях (5) неизвестны, то в соответствии с формулами (4), (5) задача синтеза оптимального управления не может считаться разрешенной. Надо отметить, что вопрос о нахождении начального значения $\psi(t_0)$ является одним из наиболее сложных при использовании принципа максимума.

Однако в данном примере этот вопрос может быть снят из-за возможности определения на фазовой плоскости Ox_1x_2 кривой $x_2 = \varphi(x_1)$, на которой управление u меняет знак. Согласно формуле (4) для этого управления $|\,u\,| = 1$. Эта кривая $x_2 = \varphi(x_1)$ называется *линией переключения управления.*

В соответствии с формулой (4) имеем

$$u(t) = \operatorname{sign}\big[-\psi_1(t_0)\,(t - t_0) + \psi_2(t_0)\big],$$

где функция $\psi_2(t) = -\psi_1(t_0)(t - t_0) + \psi_2(t_0)$ меняет знак только один раз в момент времени

$$t_* = t_0 + \frac{\psi_2(t_0)}{\psi_1(t_0)}, \qquad t_* \in [\,t_0,\, t_1\,].$$

Поэтому оптимальное управление $u(t)$ меняет свой знак не более одного раза на интервале времени $[\,t_0,\, t_1\,]$, где t_1 — момент попадания изображающей точки в начало координат $A_1(0,0) = O$. Оптимальное управление $u = u(t)$ является кусочно-постоянной функцией с $|\,u(t)\,| = 1$ и имеет не более двух промежутков постоянства.

Найдем семейство оптимальных траекторий на фазовой плоскости Ox_1x_2. На интервале времени, где $u = 1$, уравнения (1) имеют вид

$$\dot x_1 = x_2, \qquad \dot x_2 = 1,$$

откуда получим, что $dx_1/dx_2 = x_2$. После интегрирования этого уравнения найдем семейство парабол

$$x_1 = x_2^2/2 + C_1.$$

При $C_1 = 0$ получим параболу $x_1 = x_2^2/2$, проходящую через начало координат.

Аналогично при $u = -1$ уравнения (1) имеют вид

$$\dot x_1 = x_2, \qquad \dot x_2 = -1,$$

откуда следует, что $dx_1/dx_2 = -x_2$. Интегрируя это уравнение, найдем семейство парабол

$$x_1 = -x_2^2/2 + C_2.$$

При $C_2 = 0$ получим параболу $x_1 = -x_2^2/2$, проходящую через начало координат.

Задача о предельном быстродействии для системы (1) может быть решена с помощью метода динамического программирования [78, 117]. Для этого обратимся к величине $S(x,t)$ (П3.29), где подинтегральная функция $f_0 \equiv 1$. Функции $S(x,t)$ соответствует уравнение Беллмана вида (П3.37):

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u \in U}\big[\,1 + (\operatorname{grad} S,\, f\,)\big], \qquad f = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Уравнение с частными производными (6) обосновано в той мере, в которой имеет место предположение о существовании частных производных функции $S(x,t)$. С помощью уравнения Беллмана (6) могут быть найдены оптимальные управления и траектории. Стоит, однако, обратить внимание на сложность поиска процедуры аналитического решения уравнения с частными производными (6).

Будем считать, что $|\,u\,| \le u_* = 1$. Поскольку система (1) автономна, то наименьшее время перехода зависит только от координат начальной x^0 и конечной x^1 точек и не зависит от времени t. Значит $S(x,t)=S(x)$, $\partial S/\partial t=0$ и уравнение (6) приобретает вид

$$\min_{u\in U}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x_1}\,x_2+\frac{\partial S}{\partial x_2}\,u\right)=0. \tag{7}$$

Важно отметить, что уравнение (7) справедливо во всей фазовой плоскости, за исключением точек, находящихся на линии переключения управления, так как в уравнение (7) входят величины $\partial S/\partial x_i$, $i=1,2$, не существующие в этих точках.

Из уравнения (7) найдем оптимальное управление, при котором достигает минимума соответствующая величина:

$$u=-\,u_*\operatorname{sign}\frac{\partial S}{\partial x_2}.$$

Итак, оптимальное управление $u=\pm\,u_*$. После подстановки двух этих возможных значений в уравнение (7) получим

$$1+\frac{\partial S}{\partial x_1}\,x_2\pm\frac{\partial S}{\partial x_2}\,u_*=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) — это неоднородное уравнение с частными производными, где $S=S(x_1,x_2)$. Введем вспомогательную функцию $V=V(S,x_1,x_2)=0$, с помощью которой сведем уравнение (8) к однородному. Имеем

$$\begin{aligned}dV&=\frac{\partial V}{\partial S}\,dS+\frac{\partial V}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\,dx_2\ =\\&=\frac{\partial V}{\partial S}\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial S}{\partial x_2}\,dx_2\right)+\frac{\partial V}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\,dx_2=0,\end{aligned}$$

откуда после приравнивания величин при dx_1 и dx_2 к нулю найдем

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}=-\,\frac{\partial V/\partial x_1}{\partial V/\partial S},\qquad \frac{\partial S}{\partial x_2}=-\,\frac{\partial V/\partial x_2}{\partial V/\partial S}. \tag{9}$$

Подставляя затем значения (9) в уравнение (8), получим уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial S}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\,x_2\pm\frac{\partial V}{\partial x_2}\,u_*=0$$

с соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dS}{1}=-\,\frac{dx_1}{x_2}=\frac{dx_2}{\pm\,u_*}.$$

Отсюда найдем уравнение оптимальной фазовой траектории

$$x_2\,dx_2=\pm\,u_*\,dx_1,\qquad x_2^2=\pm\,u_*x_1+C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Предлагается далее самостоятельно найти оптимальную траекторию движения системы (1) по быстродействию с заданными граничными условиями и доказать ее единственность, пользуясь результатами работы [78].

2. Задача Понтрягина. Рассматривается система уравнений (1), $t\in\in[0,\,t_1]$, где ограничение на управление $|\,u(t)\,|\le 1$ можно представить в виде системы двух неравенств

$$\varphi_1(u)=-\,1-u\le 0,\qquad \varphi_2(u)=u-1\le 0. \tag{10}$$

Задаются следующие начальные и конечные условия:

$$x_1(0)=x_1^0,\qquad x_2(0)=x_2^0,\qquad x_2(t_1)=x_2^1. \tag{11}$$

Требуется максимизировать отклонение системы (1) в конечный момент времени t_1, т.е. ставится оптимальная задача: $x_1(t_1)\to\max_{u\in U}$ при наличии условий (10), (11) для системы (1). С подробностями общей формулировки задачи Понтрягина вместе с различными вариантами, а также с деталями ее решения можно познакомиться по работе [7].

Задачу (1), (10), (11) можно составить в эквивалентной форме в терминах задачи Лагранжа об определении необходимых условий экстремума функционала

$$J=\int\limits_0^{t_1}L\,dt\ = \tag{12}$$

$$=\int\limits_0^{t_1}\big[\,\lambda_1(t)(\dot x_1-x_2)+\lambda_2(t)(\dot x_2-u)+\mu_1(t)\,\varphi_1+\mu_2(t)\,\varphi_2\,\big]\,dt,$$

где L — функция Лагранжа с множителями Лагранжа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.

Запишем необходимое условие экстремума относительно управляющей фун-кции $u(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\,\lambda_2(t) - \mu_1(t) + \mu_2(t) = 0,$$

где полагают, что $\mu_1(t)$, $\mu_2(t) \geq 0$ и для функций $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ выполнены так называемые *условия дополняющей нежесткости*:

$$\mu_1(t)\,\varphi_1(u) = 0, \qquad \mu_2(t)\,\varphi_2(u) = 0. \tag{13}$$

Из условий (13) заключаем, что максимум достигается на границе области, когда $u = \pm 1$. В самом деле, полагая $\lambda_2(t) \geq 0$, имеем $\mu_2(t) = \lambda_2(t)$, откуда $u = 1$; если же $\lambda_2(t) < 0$, то $\mu_1(t) = -\,\lambda_2(t)$ и $u = -\,1$.

Если для определения оптимального управления исходить из принципа максимума, то надо вместо функции Лагранжа L взять функцию H (функцию Понтрягина):

$$H = \psi_1\dot{x}_1 + \psi_2\dot{x}_2 = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \tag{14}$$

где вспомогательные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ выполняют роль, аналогичную той, которую играют множители Лагранжа $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ в задании функции L (10).

Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ задаются системой уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\,\psi_1,$$

откуда получим, что $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = -\,C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Чтобы управление $u(t)$ было оптимальным, оно должно удовлетворять необходимому условию: а именно, если $u(t)$ — оптимальное управление, то оно доставляет максимум функции H (14), т.е. $u = 1$, если $\psi_2 \geq 0$, и $u = -\,1$, если $\psi_2 < 0$.

В качестве переменной $\psi_1(t)$, соответствующей функционалу $x_1(t_1) \to \max$, обычно берут переменную, для которой $\psi_1(t_1) = 1$. Отсюда получим, что $\psi_1(t) \equiv 1$. Следовательно, приходим к однопараметрической краевой задаче относительно определения константы C_2 с краевым условием $x_2(t_1) = x_2^1$.

Таким образом, принцип максимума позволяет свести исходную оптимальную задачу к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поставленная задача (1), (10), (11) о максимуме $x_1(t_1)$ может рассматриваться при смешанном ограничении на фазовую координату $x_1(t)$ и управление $u(t)$ в виде совместного неравенства

$$\varphi(x_1, u) = x_1^2(t) + u^2(t) - a \leq 0, \qquad a > 1. \tag{15}$$

Если при оптимальном движении $\forall\, t \in [\,0,\, t_1\,]$ имеет место условие $\varphi(x_1, u) < < 0$, то данная задача сводится к задаче Понтрягина, в противном случае получаем задачу Дубовицкого–Милютина [7]. Предположим, что при оптимальном движении в некоторый момент времени $t_* \in [\,0,\, t_1\,]$ выполнено равенство $\varphi(x_1, u) = 0$. Из соотношения (15) тогда получим

$$u(t_*) = \pm\sqrt{a - x_1^2(t_*)},$$

где знак перед корнем определяется из условия максимума функции H (14):

$$u(t_*) = \;\;\sqrt{a - x_1^2(t_*)}, \quad \text{если} \quad \psi_2(t_*) \geq 0,$$

$$u(t_*) = -\sqrt{a - x_1^2(t_*)}, \quad \text{если} \quad \psi_2(t_*) < 0.$$

Переменные $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ в этом случае будут удовлетворять системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial L}{\partial x_1}, \qquad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial L}{\partial x_2},$$

где $L = H - \lambda(t)\,\varphi(x_1, u)$ — функция Лагранжа с множителем Лагранжа $\lambda(t)$, который находится из условия

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \psi_2 - 2\lambda u = 0,$$

откуда следует, что

$$\lambda(t_*) = \frac{\psi_2(t_*)}{2u(t_*)} \geq 0.$$

Кривая движения называется *регулярной*, если выполнено следующее ограничение: $\partial\varphi/\partial u = 2u \neq 0$. Требуется для исследуемой задачи в регулярном и нерегулярном случаях построить соответствующие траектории движения, установить системы дифференциальных уравнений для определения переменных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, а также условия для нахождения оптимального управления и множителя Лагранжа $\lambda(t)$.

3. Задача о минимизации рассеиваемой энергии. Эту задачу [78] рассмотрим в разных постановках, что позволит составить довольно общее представление о возможностях того или иного метода оптимизации.

3.1. *Вариационный подход; функционалы, зависящие от высших производных, уравнение Эйлера–Пуассона.* Пусть задана управляемая система (1), которую можно записать в виде уравнения второго порядка: $\ddot{x}_1(t) = u(t),\ t \in [\,0,\, t_1\,]$ с заданными граничными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0, \quad \dot{x}_1(t_1) = \dot{x}_1^1.$$

Требуется найти оптимальный закон движения $\big(x_1(t),\, \dot{x}_1(t) = x_2(t),\, u(t)\big)$, при котором минимизируется функционал

$$J = \int\limits_0^{t_1} F\,dt = \int\limits_0^{t_1} u^2(t)\,dt = \int\limits_0^{t_1} \ddot{x}_1^2(t)\,dt, \tag{16}$$

т.е. интеграл по времени от квадрата управляющего воздействия, характеризующий общее количество «рассеиваемой энергии».

Напомним, что необходимое условие экстремума функционала, зависящего от высших производных

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F\big[\,x(t),\, \dot{x}(t),\, ...,\, x^{(n)}(t),\, t\,\big]\,dt,$$

где F — непрерывно дифференцируемая порядка $n+2$ по своим аргументам функция, определяется уравнением Эйлера–Пуассона

$$F_x - \frac{d}{dt}\,F_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\,F_{\ddot{x}} + \ \dots\ + (-1)^n\,\frac{d^n}{dt^n}\,F_{x^{(n)}} = 0, \tag{17}$$

интегрирование которого дает уравнение экстремали.

Применим уравнение вида (17) к задаче нахождения оптимального процесса, минимизирующего функционал качества (16). Имеем

$$F = \ddot{x}_1^2, \quad F_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad F_{\dot{x}_1} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad F_{\ddot{x}_1} = \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} = 2\ddot{x}_1.$$

При подстановке этих выражений в уравнение (17) получим

$$2\,\frac{d^2\ddot{x}_1}{dt^2} = 0,$$

откуда после двойного интегрирования найдем оптимальное управление в виде закона изменения по времени:

$$u(t) = \ddot{x}_1(t) = C_1 t + C_2.$$

Дальнейшее интегрирование приводит к оптимальным фазовым траекториям:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) = C_1 t^2/2 + C_2 t + C_3,$$

$$x_1(t) = C_1 t^3/6 + C_2 t^2/2 + C_3 t + C_4$$

с постоянными интегрирования C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, определяемыми из граничных условий. Отметим также, что условие Лежандра: $\partial F_{\ddot{x}_1}/\partial \ddot{x}_1 = 2 > 0$ указывает на то, что на найденной экстремали реализуется минимум функционала (16).

В данной задаче необходимо найти постоянные C_1, ..., C_4 и вычислить минимальное значение интеграла (16).

3.2. *Вариационный подход; задача Лагранжа на условный экстремум.* Задается система уравнений (1) с известными фиксированными граничными условиями. Надо минимизировать функционал (16).

Управляющую функцию $u(t)$ нельзя варьировать независимо от функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, поскольку они связаны уравнениями:

$$\varphi_1 \equiv \dot{x}_2 - u = 0, \qquad \varphi_2 \equiv \dot{x}_1 - x_2 = 0.$$

Поэтому составим вспомогательный функционал

$$J_* = \int\limits_0^{t_1} F_*(u, x_1, x_2)\,dt = \int\limits_0^{t_1} \big[\, u^2(t) + \lambda_1(t)\,(\dot{x}_2 - u) + \lambda_2(t)\,(\dot{x}_1 - x_2) \,\big]\,dt$$

с множителями Лагранжа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$.

Имеем следующие компоненты для системы уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial F_*}{\partial u} = 2u - \lambda_1(t), \qquad \frac{\partial F_*}{\partial \dot{u}} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_*}{\partial \dot{u}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_*}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F_*}{\partial \dot{x}_1} = \lambda_2(t), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_*}{\partial \dot{x}_1}\right) = \dot{\lambda}_2(t),$$

$$\frac{\partial F_*}{\partial x_2} = -\,\lambda_2(t), \qquad \frac{\partial F_*}{\partial \dot{x}_2} = \lambda_1(t), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_*}{\partial \dot{x}_2}\right) = \dot{\lambda}_1(t).$$

Следовательно, экстремаль должна определяться системой уравнений Эйлера

$$2u - \lambda_1(t) = 0, \qquad -\,\dot{\lambda}_2(t) = 0, \qquad -\,\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) = 0,$$

откуда найдем

$$\lambda_2(t) = C_1, \qquad \lambda_1(t) = -\,C_1 t + C_2, \qquad u(t) = D_1 t + D_2,$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — постоянные интегрирования.

В этой задаче требуется найти оптимальные фазовые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$ и постоянные интегрирования, зная оптимальный закон управления $u(t)$ и граничные условия.

3.3. *Вариационный подход; изопериметрическая задача.* Представим исследуемую задачу как изопериметрическую, исходя из граничных условий $x_1^0, x_1^1, x_2^0, x_2^1$. Запишем их в виде интегралов,

пользуясь системой уравнений (1):

$$x_2^1 - x_2^0 = \int\limits_0^{t_1} u(t)\,dt, \tag{18}$$

$$x_1^1 - x_1^0 = t_1 x_2^0 + \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t)\,u(t)\,dt. \tag{19}$$

Покажем, что уравнение (19) действительно имеет место. Из системы (1) получим

$$x_1^1 - x_1^0 = \int\limits_0^{t_1} x_2(v)\,dv, \qquad x_2(v) = x_2^0 + \int\limits_0^{v} u(t)\,dt,$$

откуда после подстановки и изменения порядка интегрирования в двойном интеграле найдем

$$x_1^1 - x_1^0 = \int\limits_0^{t_1}\left(x_2^0 + \int\limits_0^{v} u(t)\,dt\right)dv = t_1 x_2^0 + \int\limits_0^{t_1}\left(\int\limits_0^{v} u(t)\,dt\right)dv \;=$$

$$=\; t_1 x_2^0 + \int\limits_0^{t_1} u(t)\left(\int\limits_t^{t_1} dt\right)dv = t_1 x_2^0 + \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t)\,u(t)\,dt.$$

Таким образом, приходим к задаче об экстремуме функционала (16) при наличии интегральных связей (18), (19). Составим для ее решения вспомогательный функционал

$$J_{**} = \int\limits_0^{t_1} F_{**}\,dt = \int\limits_0^{t_1} \big[\, u^2(t) + \lambda_1\,u(t) + \lambda_2\,(t_1 - t)\,u(t) \,\big]\,dt,$$

где λ_1, λ_2 — постоянные числа. Этот функционал зависит только от одной переменной $u(t)$. Поэтому уравнение Эйлера записывается так:

$$\frac{\partial F_{**}}{\partial u} = 0,$$

откуда получим

$$2\,u(t) + \lambda_1 + \lambda_2\,(t_1 - t) = 0, \qquad u(t) = D_1 t + D_2,$$

где D_1, D_2 — постоянные, подлежащие дальнейшему определению.

3.4. *Принцип максимума.* Ставится задача о минимизации функционала рассеиваемой энергии (16) для системы (1) с заданными краевыми условиями при фиксированном времени t_1. На фазовые координаты и управление ограничения не накладываются.

Будем решать оптимальную задачу с помощью принципа максимума. Составим функцию Понтрягина H :

$$H = \psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u,$$

где функции $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ определим из системы уравнений

$$\dot{\psi}_0(t) = 0, \qquad \dot{\psi}_1(t) = 0, \qquad \dot{\psi}_2(t) = -\,\psi_1(t),$$

откуда найдем

$$\psi_0(t) = C_0, \qquad \psi_1(t) = C_1, \qquad \psi_2(t) = -\,C_1 t + C_2,$$

где C_0, C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Таким образом, имеем

$$H = C_0 u^2 + C_1 x_2 + (C_2 - C_1 t)\, u.$$

Из условия $\max_u H$ получим

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2C_0 u + C_2 - C_1 t = 0$$

и далее найдем линейный закон изменения $u(t)$ по времени

$$u(t) = \frac{C_1}{2C_0}\, t - \frac{C_2}{2C_0},$$

дающий выражение для оптимального управления. И в этой задаче, как и раньше, требуется, пользуясь краевыми условиями, найти значения постоянных C_0, C_1, C_2 и оптимальную траекторию движения.

4. Задача об оптимальном управлении расходом топлива. В задачах управления летательными аппаратами управление

$u(t)$ — сила тяги, которая пропорциональна скорости расхода топлива. Понятно, что в силу ограниченности запаса топлива движение системы должно осуществляться с минимальным расходом топлива.

Рассмотрим задачу [138], в которой для управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t), \qquad u \in U \subset R^r, \quad t \in [\,0,\, t_1\,], \tag{20}$$

с ограничением $u \in U = \big\{\, u_j \,:\ \ |\, u_j\,| \le 1,\ j = \overline{1, r}\,\big\}$ требуется определить оптимальное управление $u(t)$, переводящее систему из начального положения $x^0 = x(0)$ в конечное $x^1 = x(t_1)$ таким образом, чтобы функционал, характеризующий расход топлива

$$J = \int\limits_0^{t_1} \sum_{j=1}^{r} |\, u_j(t)\,|\, dt = \int\limits_0^{t_1} u^*(t)\,\mathrm{sign}\, u(t)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение. В системе (20) A и B — постоянные матрицы соответствующей размерности.

Здесь целевая подинтегральная функция имеет вид

$$f_0(u) = \sum_{j=1}^{r} |\, u_j(t)\,| = u^*(t)\,\mathrm{sign}\, u(t)$$

и представляет сумму скоростей расхода топлива в единицу времени; интеграл от нее дает выражение для общего потребления топлива.

Запишем гамильтониан задачи относительно вектора вспомогательных переменных $p(t) = -\,\psi(t)$; $H_p = -\,H_\psi$:

$$H_p = u^*\,\mathrm{sign}\, u + p^*\, Ax + p^*\, Bu = u^*\,\mathrm{sign}\, u + x^*\, A^* p + u^*\, B^* p. \tag{21}$$

Далее найдем дифференциальное уравнение по p с решением

$$\dot{p}(t) = -\,A^*\, p(t), \qquad p(t) = p(0)\, \exp\big(-\,A^* t\big).$$

Полагая по определению

$$q(t) = B^*\, p(t) = B^*\, e^{-A^* t}\, p(0),$$

получим, что гамильтонин H_p (функция состояния (21)) достигает минимума (имеет место принцип минимума), если минимально выражение

$$u^*(t)\,\mathrm{sign}\,u(t) + u^*(t)\,q(t) = u^*(t)\,\big[\,\mathrm{sign}\,u(t) + q(t)\,\big].$$

Отсюда заключаем, что гамильтониан достигнет минимума, если оптимальное управление удовлетворяет необходимым условиям:

$$1)\ u_j(t) = -\,\mathrm{sign}\,q_j(t), \quad \text{если} \quad |\,q_j(t)\,| \geq 1;$$

$$2)\ u_j(t) = \ \ 0, \qquad\qquad \text{если} \quad |\,q_j(t)\,| \leq 1,$$

где $q_j(t)$ — j–я компонента вектора $q(t),\ j = \overline{1,r}$.

Итак, управление, минимизирующее расход топлива, задается кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения $u_j = -1,\ u_j = 0,\ u_j = 1$ в зависимости от выхода сопряженной системы.

В этой задаче требуется провести исследование функции $q_j(t)$ в зависимости от времени и установить время перехода по управлению $u_j = 0$ между периодами с управлениями $u_j = -1,\ u_j = 1$.

Усложним несколько задачу. Пусть имеется нелинейная система уравнений

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t),\,t\big) + B\big(x(t),\,t\big)\,u(t).$$

Допустим, что скорость потока топлива задается функцией $f_0(t) \geq 0,\ t \in [\,0,\,t_1\,]$, такой, что $f_0(t) = f_0\big(|\,u(t)\,|_\Delta\big)$, где по определению

$$|\,u(t)\,|_\Delta \equiv \big(|\,u_1\,|,\ |\,u_2\,|,\ \ldots,\ |\,u_r\,|\big).$$

Будем считать, что

$$f_0(t) = c^*\,|\,u(t)\,|_\Delta, \qquad c_j = \mathrm{const_j} > 0, \quad j = \overline{1,r}. \tag{22}$$

Суммарный расход топлива при этом зададим с помощью функционала

$$J = \int\limits_0^{t_1} f_0(t)\,dt = \int\limits_0^{t_1} c^*\,|\,u(t)\,|_\Delta\,dt,$$

а уравнение изменения массы топлива запишем в виде

$$\frac{d\,m(t)}{dt} = -\,c^*\,|\,u(t)\,|_\Delta.$$

Тогда, очевидно, общее изменение массы выразится величиной $J = m(0) - m(t_1)$.

Для целевой функции $f_0(t)$ (22) закон оптимального управления определяется из условия минимума выражения

$$\big|\,u_j(t)\,\big| + u_j(t)\,\frac{q_j(t)}{c_j},$$

откуда найдем оптимальное управление $u_j(t),\ \ j = \overline{1,r}$:

$$u_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \big|\,q_j(t)/c_j\,\big| < 1,\\ -\,\mathrm{sign}\,\big(q_j(t)/c_j\big), & \text{если } \big|\,q_j(t)/c_j\,\big| > 1. \end{cases}$$

Задача об оптимальном расходе топлива называется *нормальной*, если имеется счетное множество моментов времени в интервале $[\,0,\,t_1\,]$ таких, что

$$\left|\,\frac{q_j(t)}{c_j}\,\right| = \left|\,\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,b_{ij}\big(x(t),\,t\big)\,\right| = 1, \tag{23}$$

где $\big(b_{ij}\big) = B,\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,r}$. Если условие (23) выполняется также для конечного числа промежутков времени, то эта задача называется *вырожденной*. Для нормальной задачи оптимальное управление может принимать только три значения: $-1, 0, 1$.

Как и в предыдущем случае надо исследовать функцию $q_j(t),\ \ j = \overline{1,r}$, в зависимости от времени и установить моменты изменения оптимального управления с одного значения на другое.

5. Принцип Гамильтона и уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Пусть система описывается векторным дифференциальным уравнением [117]:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad x, u, f \in R^r, \quad t \in [\,t_0,\,t_1\,].$$

Начальное состояние системы $x^0 = x(t_0)$ и состояние $x = x(t)$ в момент времени t считаются заданными. Требуется найти управление $u(t)$, переводящее систему из x^0 в x и доставляющее минимум интегралу

$$J_t = \int_{t_0}^{t} f_0\big(x(v),\, u(v),\, v\big)\, dv. \qquad (24)$$

Обозначим

$$S\big(x(t),\, t\big) = \min_{u(v)} \int_{t_0}^{t} f_0\big(x(v),\, u(v),\, v\big)\, dv.$$

Если $u_*(v)$, $v \in [\, t_0,\, t\,]$ — управление, доставляющее минимум интегралу (24), а $x(v)$ — соответствующая фазовая траектория, то тогда

$$S\big(x(t),\, t\big) = \int_{t_0}^{t} f_0\big(x(v),\, u_*(v),\, v\big)\, dv$$

и, следовательно, имеет место уравнение Беллмана вида

$$f_0(x, u_*, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial x_i}\, \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial\, S(x,t)}{\partial t} = 0, \qquad (25)$$

где $\dot{x} = f(x, u_*, t)$.

Получим аналог уравнения (25) для механической системы с каноническими уравнениями и функцией Гамильтона H :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\,\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad (26)$$

в виде уравнения Гамильтона–Якоби, пользуясь принципом стационарного действия Гамильтона.

Согласно принципу Гамильтона для действительного движения системы между двумя заданными в моменты времени t_0 и t конфигурациями системы в пространстве с обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ интеграл действия $\int_{t_0}^{t} L\, dt$ с функцией Лагранжа L имеет стационарное значение S. При наличии уравнений движения (26) будет выполнено равенство: $\int_{t_0}^{t} L\, dt = S$.

В пространстве конфигураций $q_1, q_2, \ldots, q_n$ системы (26) рассмотрим систему, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \qquad i = \overline{1, n}, \qquad (27)$$

с известной функцией f_i (см. уравнения (26)):

$$f_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Отождествим переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с оптимальными управлениями $u_{1*}, u_{2*}, \ldots, u_{n*}$ в системе (27), при которых интеграл действия $\int_{t_0}^{t} L\, dt$ принимает экстремальное (стационарное) значение, т.е. можно считать, что система (27) — это управляемая система вида

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, \ldots, q_n, u_1, \ldots, u_n, t), \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (28)$$

Соотношение (25) для системы (28), где $u(t) = u_*(t)$, отсюда запишем так:

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, S(q,t)}{\partial q_i}\, \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\, S(q,t)}{\partial t},$$

либо

$$\frac{\partial S}{\partial t} - L + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i}\, \dot{q}_i = 0. \qquad (29)$$

Функция Гамильтона H для системы (26) имеет вид

$$H(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = -\,L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (30)$$

Продифференцируем по $\dot{q}_i$ уравнение (29). Тогда получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial\, S(q,t)}{\partial q_i} = p_i, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad (31)$$

а значит

$$\dot q_i = \dot q_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \dot q_i\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right). \quad (32)$$

Требуется, воспользовавшись соотношениями (30)–(32), привести в результате уравнение (29) к уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

для механической системы с каноническими уравнениями (26).

6. Осциллятор с линейной пружиной. Пусть имеется механическая система с одной степенью свободы [22, 117]: тело массой m, связанное с неподвижной опорой при помощи линейной пружины, может перемещаться в горизонтальном гладком прямолинейном направлении.

6.1. *Применение формализма Гамильтона.* Обобщенная координата q — отклонение тела от начала координат. Кинетическая энергия T тела, обобщенная сила Q и потенциальная энергия Π системы выражаются формулами

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot q^2, \qquad Q = -\, cq, \qquad \Pi = -\int_0^q Q\, dq = \int_0^q cq\, dq = \frac{1}{2}\, cq^2,$$

где c — жесткость пружины.

Запишем теперь функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\, m\dot q^2 - \frac{1}{2}\, cq^2. \quad (33)$$

Пользуясь соотношением (33), найдем

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q \implies \dot q = \frac{p}{m}. \quad (34)$$

В соответствии с выражением (30) запишем функцию Гамильтона

$$H = -\, L + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\, \dot q = \frac{m\dot q^2}{2} + \frac{cq^2}{2}. \quad (35)$$

С помощью выражения (34) представим функцию Гамильтона (35) в канонических переменных

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}. \quad (36)$$

Канонические уравнения движения системы (26) по q и p :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\, \frac{\partial H}{\partial q}$$

с учетом выражения (36) принимают вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}\, p, \qquad \frac{dp}{dt} = -\, cq. \quad (37)$$

Далее запишем *действие по Гамильтону* в рассматриваемой задаче о движении осциллятора с линейной пружиной

$$S = \int_{t_0}^{t} L\, dt = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{2}\, m\, \dot q^2(t) - \frac{1}{2}\, c\, q^2(t)\right) dt,$$

где величина $\dot q(t)$ определяется уравнением (28). В данной задаче согласно соотношениям (34) и (37) имеем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}\, u. \quad (38)$$

Поэтому функционал J_t (24), подлежащий минимизации, где $f_0 = L$ (33), принимает вид

$$J_t = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{u^2(t)}{2m} - \frac{c\, q^2(t)}{2}\right) dt. \quad (39)$$

Оптимальное управление $u = u_*(t)$, исходя из принципа Гамильтона, задается в виде $u_*(t) = p$. При таком выборе $u_*(t)$ достигается экстремальное значение S функционала J_t, поскольку только в этом случае $\delta S = 0$. При этом уравнение Беллмана (25) можно записать так:

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\,cq^2 - \frac{\partial S}{\partial q}\,\dot q - \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{40}$$

В соответствии с выражением (31) имеем: $p = \partial S/\partial q$. Пользуясь этой заменой, представим формулу (34) в виде

$$\dot q = \frac{1}{m}\,\frac{\partial S}{\partial q}. \tag{41}$$

Если теперь подставить выражение (41) вместо $\dot q$ в уравнение (40), то получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\,cq^2 = 0. \tag{42}$$

Уравнение (42) — это уравнение Гамильтона–Якоби для нашей задачи.

Требуется уравнение (42) представить в стандартной форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\, \frac{\partial S}{\partial q},\, t\right) = 0,$$

воспользовавшись зависимостью функции Гамильтона H от канонических переменных.

6.2. *Применение принципа максимума.* К задаче о движении осциллятора с линейной пружиной применим принцип максимума Понтрягина [117] в предположении, что на управляющее воздействие u отсутствуют какие-либо ограничения. Интересно будет сравнить эти два подхода в решениях задач 6.1 и 6.2 между собой с учетом того, что они, в сущности, приводят к эквивалентным результатам.

Итак, будем исходить из уравнения (38):

$$\frac{dq}{dt} = f(q,u), \qquad f(q,u) = \frac{1}{m}\,u, \qquad t \in [\,0,\, t_1\,],$$

с заданным начальным условием $q^0 = q(0)$.

Требуется систему (38) привести в положение $q^1 = q(t_1) = 0$ с помощью такого управления $u = u(t)$, которое бы минимизировало функционал J_t (39), где $t_0 = 0$, с подинтегральной функцией $f_0(q,u) = (1/2m)\,u^2 - (c/2)\,q^2$.

Обратимся к формуле (1.6) из Главы 1. Составим функцию Понтрягина (гамильтониан) $\bar H$ вида (1.6):

$$\bar H(\psi_0, \psi, q, u) = \psi_0\, f_0(q,u) + \psi\, f(q,u) \; = \; \psi_0\left(\frac{1}{2m}\,u^2 - \frac{c}{2}\,q^2\right) + \frac{1}{m}\,\psi u, \tag{43}$$

а затем выпишем уравнения (1.7) и (1.8):

$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial \bar H}{\partial \psi_0}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial \bar H}{\partial \psi}, \qquad \frac{d\psi_0}{dt} = -\,\frac{\partial \bar H}{\partial q_0}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\,\frac{\partial \bar H}{\partial q}. \tag{44}$$

С учетом выражения (43) уравнения (44) приведем к виду

$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{1}{2m}\,u^2 - \frac{c}{2}\,q^2, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}\,u, \tag{45}$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} = cq\psi_0. \tag{46}$$

Из условия $\max_u \bar H$ найдем оптимальное управление. Поскольку

$$\frac{\partial \bar H}{\partial u} = \frac{1}{m}\,\bigl(\psi_0 u + \psi\bigr), \qquad \frac{\partial^2 \bar H}{\partial u^2} = \frac{1}{m}\,\psi_0,$$

то при $\psi_0 < 0$ функция $\bar H$ будет иметь максимум по u, если

$$u = -\,\frac{\psi}{\psi_0}. \tag{47}$$

Первое уравнение (46) дает: $\psi_0 = \mathrm{const}$. При подстановке во второе уравнение (45) $=$ (38) оптимального управления u (47) получим

$$\frac{dq}{dt} = -\,\frac{1}{m}\,\frac{\psi}{\psi_0}. \tag{48}$$

Продифференцируем по t уравнение (48), где $\psi_0 = \mathrm{const}$:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\,\frac{1}{m\psi_0}\,\frac{d\psi}{dt}. \tag{49}$$

Уравнение (49) может быть записано с помощью второго уравнения (46) в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\,k^2 q, \qquad k^2 = \frac{c}{m}. \tag{50}$$

Таким образом, принцип максимума приводит к необходимости решения краевой задачи для дифференциального уравнения (50) с заданными условиями q^0 и $q^1 = 0$. Запишем это решение

$$q(t) = -\,\frac{q^0 \cos kt_1}{\sin kt_1}\,\sin kt + q^0 \cos kt, \tag{51}$$

считая, что для существования $q(t)$ выполнено требование $t_1 \neq \pi n/k$, $n = 1, 2, \ldots$.

Из второго уравнения (45) вытекает, что $u = m\,dq/dt$. Следовательно, подставляя сюда решение $q(t)$ (51), получим

$$u = -\sqrt{mc}\,q^0\left(\frac{\cos kt_1}{\sin kt_1}\,\cos kt + \sin kt\right).$$

Сравним u (47) и $u = m\,dq/dt$. Имеем отсюда

$$-\,\frac{\psi}{\psi_0} = m\,\frac{dq}{dt}$$

и далее приходим к выражению

$$\psi(t) = \sqrt{mc}\,q^0\,\psi_0\left(\frac{\cos kt_1}{\sin kt_1}\,\cos kt + \sin kt\right).$$

Обратим внимание на то, что у рассматриваемой механической системы функция Лагранжа L имеет вид (33) и канонический импульс p вычисляется по формуле (34). Значит, для управляемой системы с уравнением (38) имеем

$$u = p, \qquad \psi = -\,\psi_0 p. \tag{52}$$

Требуется в этой задаче, пользуясь соотношениями (52), определить связь между функцией Понтрягина $\bar{H}$ (43) и функцией Гамильтона H (36).

7. Задача оптимального слежения. Рассматривается вариационная задача с подвижными границами в виде задачи оптимального слежения (сопровождения) летящего самолета [78]. Предполагается, что самолет совершает горизонтальный полет с постоянной скоростью v и в момент времени $t = 0$ находится на расстоянии a по горизонтали от станции слежения.

Угол визирования на объект равен

$$\varphi_*(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a + vt}{h}\right),$$

где h — высота полета. Обозначим через $\varphi(t)$ — текущую угловую координату станции слежения. Пусть $\varphi(0) \neq \varphi_*(0)$. Задача состоит в том, чтобы начальное рассогласование $\varepsilon = \varphi(0) - \varphi_*(0)$ устранить с минимальными энергетическими затратами.

Важно отметить, что время окончания процесса регулирования t_1 и соответствующие ему координаты правой точки заранее неизвестны и находятся в процессе решения поставленной вариационной задачи с фиксированной левой и подвижной правой точками.

Будем считать далее, что электропривод станции слежения схематично представляет собой последовательное соединение двух интегрирующих звеньев и описывается системой уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \mu,$$

где $\mu(t)$ — входная (управляющая) величина углового ускорения, а $\varphi(t)$ — выходная величина угла поворота.

Оптимальный процесс $\varphi(t)$ и время t_1 необходимо выбрать так, чтобы энергия системы, описываемая функционалом

$$J = \int_0^{t_1} \mu^2(t)\,dt,$$

принимала для заданных граничных условий минимальное значение.

Найдем экстремаль $\varphi(t)$ исходного функционала J :

$$J = \int\limits_0^{t_1} F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, t)\, dt = \int\limits_0^{t_1} \ddot{\varphi}^2(t)\, dt$$

с помощью уравнения Эйлера–Пуассона (17) (см. задачу 3 о минимизации рассеиваемой энергии):

$$F_\varphi - \frac{d}{dt} F_{\dot{\varphi}} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{\varphi}} = 0, \qquad (53)$$

где

$$F_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \qquad F_{\dot{\varphi}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \qquad F_{\ddot{\varphi}} = \frac{\partial F}{\partial \ddot{\varphi}} = 2\ddot{\varphi}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (53), будем иметь: $2\, d^4\varphi/dt^4 = 0$. После двойного интегрирования получим оптимальный закон изменения управляющего воздействия

$$\mu(t) = \ddot{\varphi}(t) = D_1 t + D_2$$

с постоянными интегрирования D_1, D_2. Затем, интегрируя еще два раза, получим оптимальный закон изменения угла поворота

$$\varphi(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4,$$

где $C_1 = D_1/6,\ C_2 = D_2/2$.

Чтобы определить постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и время t_1, следует воспользоваться пятью уравнениями:

1) двумя граничными условиями в фиксированной левой точке:

$$\varphi(0) = \varphi^0, \qquad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}^0;$$

2) двумя граничными условиями на правом конце траектории, когда выполняется требование $\varepsilon(t_1) = 0$:

$$\varphi(t_1) = \varphi_*(t_1), \qquad \dot{\varphi}(t_1) = \dot{\varphi}_*(t_1);$$

3) одним условием трансверсальности при наличии связей между вариациями, когда правая граничная точка должна принимать заданные значения. Условие трансверсальности для случая

$$\varphi(t_1) = \varphi_*(t_1), \qquad \dot{\varphi}(t_1) = \dot{\varphi}_*(t_1), \qquad \ddot{\varphi}(t_1) = \ddot{\varphi}_*(t_1)$$

записывается в виде

$$\left[F - \dot{\varphi}\, F_{\dot{\varphi}} - \ddot{\varphi}\, F_{\ddot{\varphi}} + \left(F_{\dot{\varphi}} - \frac{d}{dt} F_{\ddot{\varphi}} \right) \dot{\varphi}_* + F_{\ddot{\varphi}}\, \ddot{\varphi}_* \right]_{t=t_1} = 0, \qquad (54)$$

или после подстановки соответствующих значений:

$$-\ddot{\varphi}^2(t_1) - 2\, \frac{d\, \ddot{\varphi}(t)}{dt} \bigg|_{t=t_1} \cdot \dot{\varphi}_*(t_1) + 2\, \ddot{\varphi}(t_1)\, \ddot{\varphi}_*(t_1) = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем искомое экстремальное решение задачи. Требуется представленное выше условие трансверсальности (54) получить самостоятельно.

Список литературы

1. *Абуладзе А.А.* О необходимых условиях оптимальности для систем, описываемых интегральными уравнениями // Сообщ. АН ГССР. — 1985. — Т. 119, № 1. — С. 49 – 52.

2. *Айзерман М.А.* Теория автоматического управления. — М.: Наука, 1966. — 452 с.

3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

4. *Анрион Р.* Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1979. — 208 с.

5. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. — М.: Факториал Пресс, 2006. — 144 с.

6. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.

7. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990. — 318 с.

8. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, Вып. 2. — С. 215 – 222.

9. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами. — М.: Наука, 1987. — 225 с.

10. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.

11. *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 336 с.

12. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965. — 458 с.

13. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 118 с.

14. *Блисс Г.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950. — 348 с.

15. *Богатырев А.В.* Управляемые системы и обобщенные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 9. — С. 40 – 48.

16. *Бойчук Л.М.* Оптимальные системы автоматического регулирования. — Киев: Наукова думка, 1965. — 82 с.

17. *Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.* Теория оптимальных процессов. Принцип максимума // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1960. — Т. 24, № 1. — С. 3 – 42.

18. *Болтянский В.Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 481 – 514.

19. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.

20. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. — 446 с.

21. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.

22. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

23. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с.

24. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. — Фрунзе: Изд-во Киргиз. ун-та, 1957. — 327 с.

25. *Ван-Трис Г.* Синтез оптимальных нелинейных систем управления. — М.: Мир, 1964. — 167 с.

26. *Варга Дж.* Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

27. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. — М.: Наука, 1970. — 379 с.

28. *Величенко В.В.* О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 7. — С. 20 – 30.

29. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наукова думка, 1986. — 542 с.

30. *Винокуров В.Р.* Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями. I-III // Изв. вузов. Математика. — 1967. — № 7. — С. 21 – 33, № 8. — С. 16 – 23, № 9. — С. 16 – 25.

31. *Владимиров В.С.* Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1957. — Т. 21, № 5. — С. 681 – 710.

32. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1961. — Т. 61. — С. 1 – 159.

33. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.

34. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.

35. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

36. *Габасов Р.* Необходимые условия оптимальности для системы интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 5. — С. 952 – 953.

37. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971. — 508 с.

38. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Современное состояние теории оптимальных процессов (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 10. — С. 31 – 62.

39. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск: Наука и техника, 1974. — 271 с.

40. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. — 262 с.

41. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1960. — Т. 24, № 3. — С. 315 – 356.

42. *Гамкрелидзе Р.В.* Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач // Тр. матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. — 1971. — Т. 112. — С. 152 – 180.

43. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1977. — 254 с.

44. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.

45. *Гейзенберг В.* Физика и философия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 293 с.

46. *Гноенский Л.С., Каменский А.Г., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. — М.: Наука, 1969. — 512 с.

47. *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Гостехиздат, 1957. — 408 с.

48. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967. — 508 с.

49. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977. — 304 с.

50. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1985. — 288 с.

51. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977. — 228 с.

52. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989. — 143 с.

53. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал выч. матем. и мат. физики. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 395 – 453.

54. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. — М.: Наука, 1971. — 113 с.

55. *Зеликин М.И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1985. — 96 с.

55+. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. — Л.: Судостроение, 1966. — 352 с.

56. *Иванилов Ю.П.* Применимость методов аналитической механики в оптимальном управлении // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 61 – 71.

57. *Иванилов Ю.П.* Принцип освобождения от связей в форме штрафных функций // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. — 1985. — № 3. — С. 170 – 178.

58. *Иванилов Ю.П.* Главная функция Гамильтона и условия оптимальности // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 5. — С. 51 – 61.

59. *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1981. — 331 с.

60. *Иоффе А.Д.* Выпуклые функции, связанные с вариационными задачами, и проблема абсолютного минимума // Матем. сборник. — 1972. — Т. 88, № 2. — С. 194 – 210.

61. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

62. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 279 с.

63. *Комаров В.А.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1905 – 1913.

64. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

65. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956. — 392 с.

66. *Красовский А.А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы теории оптимального управления // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. — 1992. — № 1. — С. 3 – 41.

67. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 271 *с.*

68. *Красовский Н.Н.* К теории оптимального регулирования // Автоматика и телемеханика. — 1957. — Т. 18, № 11. — С. 960 – 970.

69. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

70. *Кротов В.Ф.* Об оптимальном управлении траекториями полета. Абсолютный оптимум. Аналитические решения, алгоритмы. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 3. — С. 47 – 57; 1997. — № 2. — С. 37 – 47.

71. *Кротов В.Ф., Букреев В.В., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969. — 288 с.

72. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 446 с.

73. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журнал выч. матем. и мат. физики. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 13 – 34.

74. *Куликовский Р.Э.* Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. — М.: Наука, 1967. — 379 с.

75. *Кунцевич В.М.* Системы экстремального управления. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961. — 151 с.

76. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. — М.: Мир, 1963. — 408 с.

77. *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. — М.: Наука, 1968. — 190 с.

78. *Лернер А.Я., Розенман Е.А.* Оптимальное управление. — М.: Энергия, 1970. — 360 с.

79. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I-IV // Автоматика и телемеханика. — 1960. — № 4. — С. 436 – 441; № 5. — С. 561 – 568; № 6. — С. 661 – 665; 1961. — № 4. — С. 425 – 435.

80. *Летов А.М.* Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления // Дифференц. уравнения. — 1970. — Т. 6, № 4. — С. 592 – 615.

81. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. — М.: Наука, 1981. — 256 с.

82. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966. — 176 с.

83. *Ли Э., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с.

84. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

85. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

86. *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.

87. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

88. *Матвеев А.С.* Задачи оптимального управления с запаздываниями общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1200 – 1229.

89. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления. — СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1994. — 364 с.

90. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения, специальные задачи. — СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 2003. — 540 с.

91. Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1977. — Т. 1. — 1152 с.

92. *Мерриэм К.* Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. — М.: Мир, 1967. — 549 с.

93. Методы оптимизации с приложением к космическим полетам / Под ред. Дж. Лейтмана. — М.: Наука, 1965. — 538 с.

94. *Милютин А.А.* Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. — М.: Физматлит, 2001. — 303 с.

95. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 380 с.

96. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959. — 232 с.

97. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.

98. *Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Интегральные уравнения в теории упругости. — СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1994. — 271 с.

99. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.

100. *Новоселов В.С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. — 318 с.

101. *Новоселов В.С.* Варьирование динамических моделей движения. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. — 108 с.

102. *Новоселов В.С.* Аналитическая динамика управляемого движения. — СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1998. — 146 с.

103. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — 574 с.

104. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления. — Л.: Энергия, 1977. — 280 с.

105. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965. — 127 с.

106. *Плотников В.И.* Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1972. — Т. 36, № 3. — С. 652 – 679.

107. *Понтрягин Л.С.* Оптимальные процессы регулирования // Успехи матем. наук. — 1959. — Т. 14, Вып. 1. — С. 3 – 20.

108. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 *с.*

109. *Пятницкий Е.С.* Управляемость классов лагранжевых систем с ограниченными управлениями // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 12. — С. 29 – 37.

110. *Пятницкий Е.С., Богатырев А.В.* Обобщенные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в задачах оптимального управления при наличии фазовых ограничений. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 10. — С. 21 – 28; № 11. — С. 46 – 56.

111. *Пятницкий Е.С., Богатырев А.В.* Необходимые условия оптимальности в терминах обобщенных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана при наличии фазовых ограничений // Тр. матем. ин-та АН СССР. им. В.А. Стеклова. — 1995. — Т. 211. — С. 62 – 80.

112. *Пятницкий Е.С., Богатырева Н.А.* Минимаксный принцип механики и его применение к задачам оптимального управления // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 304, № 3. — С. 533 – 537.

113. *Разумихин Б.С.* Принципы аналитической механики и проблема оптимального управления. I. Принцип Гамильтона для задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 2. — С. 31 – 43.

114. *Разумихин Б.С., Разумихин Ю.Б.* Метод избыточных переменных // Тр. ВНИИСИ. — М.: ВНИИСИ, 1984. — Вып. 12. — С. 116 – 130.

115. *Розовский М.П.* Приложение интегродифференциальных уравнений к некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последействия // Прикладная математика и механика. — 1947. — Т. 11, Вып. 3. — С. 329 – 338.

116. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I-III // Автоматика и телемеханика. — 1959. — Т. 20, № 10. — С. 1320 – 1334; № 11. — С. 1442 – 1458; № 12. — С. 1561 – 1578.

117. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978. — 552 с.

118. *Рулев В.А.* О необходимых и достаточных условиях экстремума в вариационных задачах динамики полета летательных аппаратов // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1961. — № 1. — С. 19 – 26.

119. *Сейдж Э., Уайт Ч.* Оптимальное управление системами. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 с.

120. Современная теория систем управления / Под ред. К.Т. Леондеса. — М.: Наука, 1970. — 511 с.

121. Справочник по теории автоматического управления / По ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

122. *Стратонович Р.Л.* Об одном обобщении принципа максимума Понтрягина // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. — 1967. — № 1. — С. 3 – 7.

123. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991. — 215 с.

124. *Тертычный-Даури В.Ю.* Гиперреактивная механика. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.

125. *Трампан А.* О функциональном уравнении Беллмана в классе оптимальных по времени систем управления // Механика / Сб. переводов. — М., Мир, 1966. — № 6. — С. 3 – 14.

126. *Трикоми Ф.Дж.* Интегральные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 299 с.

127. *Троицкий В.А.* Задача Майера-Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем // Прикладная математика и механика. — 1961. — Т. 25, Вып. 4. — С. 668 – 679.

128. *Троицкий В.А.* О вариационных задачах оптимизации процессов управления // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, Вып. 1. — С. 29 – 38.

129. *Фан Л.* Дискретный принцип максимума. Оптимизация многоступенчатых процессов. — М.: Мир, 1967. — 180 с.

130. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Наука, 1966. — 623 с.

131. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. — М.: Наука, 1971. — 743 с.

132. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 487 с.

133. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978. — 316 с.

134. *Хаар Д. тер.* Основы гамильтоновой механики. — М.: Наука, 1974. — 223 с.

135. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967. — 506 с.

136. *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия для задачи оптимального управления // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 1. — С. 59 – 62.

137. *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 242, № 5. — С. 1023 – 1026.

138. *Чаки Ф.* Современная теория управления. — М.: Мир, 1975. — 424 с.

139. *Чанг Ш.* Синтез оптимальных систем автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964. — 440 с.

140. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.

141. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ. — М.: ВИНИТИ, 1977. — Т. 14. — С. 101 – 166.

142. *Энеев Т.М.* О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления // Космич. исследования. — 1966. — Т. 4, Вып. 5. — С. 651 – 670.

143. *Якубович В.А.* Некоторые варианты абстрактного принципа максимума // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 229, № 4. — С. 816 – 819.

144. *Якубович В.А.* К абстрактной теории оптимального управления. I-IV // Сибирский матем. журнал. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 816 – 819; 1978. — Т. 19, № 2. — С. 685 – 707; 1979. — Т. 20, № 4. — С. 885 – 910; Т. 20, № 5. — С. 1131 – 1159.

145. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.

146. *Anderson B., Moore J.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. — N.-Y.: Prentice-Hall Inc., 1990. — 351 p.

147. *Barbu V.* Degenerate nonlinear Volterra integral equations in Hilbert space // Lecture Notes in Math. — Berlin: Springer, 1979. — № 737. — P. 9 – 23.

148. *Bittner L.* On optimal control of processes, governed by abstract functional, integral and hiperbolic differential equation // Math. Operation. und Statistik. — 1975. — № 6. — P. 107 – 134.

149. *Brockett R.W.* Control theory and analytical mechanics // Geometric Control Theory, Lie Groups / Eds. C. Martin, R. Hermann. — Mat. Sic. Press. — Brookline, MA, 1977. — P. 1 – 48.

150. *Burton T. A.* An integro-differential equation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — V. 79, № 3. — P. 393 – 399.

151. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton-Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 318, № 2. — P. 643 – 683.

152. *Chen Hung Yih.* Solutions for certain nonlinear Volterra integral equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1979. — V. 69. — P. 475 – 488.

153. *Clarke F.H., Winter R.B.* The relationship between the maximum principle and dynamic programming // SIAM J. Control Optimization. — 1987. — V. 25. — P. 1291 – 1311.

154. *Crandall M., Londen S., Nohel J.* An abstract nonlinear Volterra integro-differential equation // J. Math. Anal. and Appl. — 1978. — V. 64. — P. 701 – 735.

155. *Dafermos C.* An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Differential Equat. — 1970. — V. 7. — P. 554 – 569.

156. *Frankowska H.* Optimal trajectories associated to a solution of contingent Hamilton-Jacobi equation // Appl. Math. Optim. — 1989. — V. 19, № 3. — P. 291 – 311.

157. *Friedman A.* On integral equations of Volterra type // J. Analyse Math. — 1963. — V. 11. — P. 381 – 413.

158. *Friedman A., Shinbrot M.* Volterra integral equations in Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 126. — P. 131 – 179; 1969. — V. 138. — P. 129 – 148.

159. *Grimmer R., Seifert G.* Stability properties of Volterra integro-differential equations // J. Differential Equat. — 1975. — V. 19. — P. 142 – 166.

160. *Hendry W.L.* A Volterra integral equation of the first kind // J. Math. Anal. and Appl. — 1976. — V. 54. — P. 266 – 278.

161. *Honig C.S.* Volterra-Stieltjes integral equations // Lect. Notes in Math. — Berlin: Springer, 1980. — № 799. — P. 173 – 216.

162. *Hsu G.C., Meyer A.V.* Modern Control Principles and Applications. — N.-Y.: McGraw-Hall Book Company, 1968. — 770 p.

163. *Jacobson D.* New second-order and first-order algorithms for determining optimal control: a differential dynamic programming approach // J. Optim. Theory and Appl. — 1968. — V. 2, № 4. — P. 411 – 440.

164. *Kanazawa T.* On a nonlinear Volterra integral equation with singular kernel // Proc. Japan. Acad. — 1971. — V. 47. — P. 921 – 924.

165. *Krotov V.F.* A technique of global bounds of optimal control theory // Control Cybern. — 1988. — V. 17, № 2-3. — P. 115 – 144.

166. *Kyung Eung Kim.* Relationship between dynamic programming and the maximum principle under state constraints // J. Convex Anal. — 1999. — V. 6. — P. 335 – 348.

167. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. — N.-Y.: John Willey and Sons, 1967. — 576 p.

168. *Leitmann G.* On class of variational problems in rocket flight // J. of aerospace sciences. — 1959. — V. 9. — P. 586 – 591.

169. *Leitmann G.* The Calculus of Variations and Optimal Control. — N.-Y.: Plenum Press, 1986. — 312 p.

170. *Levin J.* On a nonlinear Volterra equation // J. Math. Anal. and Appl. — 1972. — V. 39. — P. 458 – 476.

171. *Levin J., Nohel J.* On a system of integro-differential equations occuring in reactor dynamics. I, II // J. Math. and Mech. — 1960. — V. 9. — P. 347 – 368; Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1962. — V. 11. — P. 210 – 243.

172. *Ling R.* Integral equations of Volterra type // J. Math. Anal. and Appl. — 1978. — V. 68. — P. 381 – 397.

173. *Messerli E.J., Polak E.* On second order necessary condition of optimality // SIAM J. Control. — 1969. — V. 7, № 2. — P. 272 – 291.

174. *Miele A.* General variational theory of the flight paths of rocket powered aircraft, missiles and sattelite carriers // Astronaut. acta. — 1958. — V. 4, № 4. — P. 264 – 288.

175. *Soner M.H.* Optimal control with state-space constraint. I // SIAM J. on Control and Optim. — 1986. — V. 24, № 3. — P. 552 – 561.

176. *Vinter., Wolenski P.* Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time // SIAM J. on Control and Optim. — 1990. — V. 28, № 6. — P. 1404 – 1419.

177. *Walter W.* On nonlinear Volterra integral equations in several variables // J. Math. and Mech. — 1976. — V. 16. — P. 967 – 985.

178. *Warga J.* Relaxed variational problems // J. Math. Anal. Appl. — 1962. — V. 4. — P. 111 – 128.

179. *Zhou X.Y.* Maximal principle, dynamic programming, and their connection in deterministic control // J. Optim. Theory and Appl. — 1990. — V. 65. — P. 363 – 373.

Д1. *Тертычный В.Ю.* Интегральные и интегродифференциальные объекты управления: условия оптимальности // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 45–74; Autom. Remote Control. — 2009. — 70: 10. — P. 1635–1661.

Д2. http://www.elibrary.ru/item.asp?id=15203752

Ведякова Анастасия Олеговна
Милованович Екатерина Воиславовна
Слита Ольга Валерьевна
Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

Методы теории оптимального управления

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка А.О. Ведякова
Дизайн обложки В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе