

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Павлов

**Квантовые и оптические методы обработки
информации и вычислений**

Том 2

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2021

А.В. Павлов, Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений. Т.2. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 58 с.

Рецензент: Стариков Р.С., д.ф-м.н., профессор Отделения лазерных и плазменных технологий, зав. Лаборатории фотоники и оптической обработки информации Национального исследовательского ядерного университета МИФИ.

В пособии представлены методические материалы по курсу «Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений». Пособие развивает и расширяет материалы, представленные в пособии «Методы обработки информации в фотонике», СПб, ИТМО, 2010. Кратко изложены базовые сведения из области Фурье-оптики, голографии Фурье, вейвлет-анализа и методах обработки информации, основанных на использовании преобразования Фурье, корреляционных методах, включая Ghost Imaging, и техники голографии, в том числе, с использованием хаоса в детерминированных системах, даны сведения по реализации квантово-подобных моделей обработки информации методом голографии Фурье.

Для магистров, обучающихся по направлению подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика» по образовательной программе: «Квантовые коммуникации и фемтотехнологии».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021

©Павлов А.В., 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Том 2.

	Стр.
Список обозначений и сокращений	4
Тема 7. Основы теории хаоса в детерминированных системах и его применения в задачах обработки, хранения и конфиденциальной передачи информации	5
Возможности использования хаотической динамики для записи, хранения и считывания информации	13
Методы передачи информации на основе хаотической динамики	15
Хаотический синхронный отклик на основе декомпозиции	18
Вопросы для самопроверки по теме 7	26
Тема 8. Математические основания оптических логических вентилях и процессоров квантовой и нечеткой логики	27
8.1. Алгебраические основания	27
8.2. Нечеткая логика	38
Вопросы для самопроверки по теме 8	44
Тема 9. Квантовые модели обработки информации и их реализация методом голографии Фурье	45
9.1. Квантовая логика и квантовая вероятность: общие замечания	45
9.2. Квантовые модели обработки информации: квантовая логика и её реализация методом голографии Фурье, нарушение классического закона вероятности для конъюнкции независимых событий	45
9.2. Квантовые модели обработки информации: квантовая вероятность и её реализация методом голографии Фурье, нарушение классического закона вероятности для дизъюнкции несовместных событий	51
Вопросы для самопроверки по теме 9	58

Список сокращений и обозначений

АКФ	Авто-корреляционная функция
ВКФ	Взаимно-корреляционная функция
ГМ АКФ	Глобальный максимум авто-корреляционной функции
ГРС	Голографическая регистрирующая среда
ККФ	Кросс-корреляционная функция
BD	Bucket detector
IS	Imaging sensor
RM	Rotating mirror
j	Мнимая единица
F	Символ преобразования Фурье, фурье-образ (спектр) функции
\mathcal{H}	Гильбертово пространство
k	Волновое число
λ	Длина волны
τ	Пропускание
ζ, η	Координаты в частотной плоскости
v_x, v_y	Пространственные частоты
*	Символ операции свертки
\otimes	Символ операции корреляции
$\hat{+}$	Алгебраическая сумма

Тема 7. Основы теории хаоса в детерминированных системах и его применение в задачах обработки, хранения и передачи информации

В настоящей лекции мы рассмотрим начала хаотической динамики в детерминированных системах. Обратим особое внимание на термин «детерминированные». Он означает, что фактор случайности отсутствует.

1. Определение 7.1. Сжимающее отображение.

Пусть (X, d) – метрическое пространство,

def. $T: X \rightarrow X$ сжимающее отображение

$\exists S, 0 < S < 1, \forall x, y \in X, d(T(x), T(y)) \leq Sd(x, y)$.

Если $S \in (0, \infty)$, то T – отображение Липшица.

Определение 7.2. неподвижная точка.

Точка $x_f: T(x_f) = x_f$ называется неподвижной точкой отображения T .

2. Теорема о сходимости к неподвижной точке.

(X, d) , T – сжимающее отображение, x_f – неподвижная точка, т.е. $T(x_f) = x_f$,

$T(x)$ имеет в конечном счете одну неподвижную точку и, кроме того,

$\forall x_0 \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, где $x_n = T(x_{n-1})$.

Доказательство:

2.1. Единственность. Пусть $T(x)$ имеет две неподвижные точки x_{f1} и x_{f2} .

Тогда по определению сжимающего отображения

$d(T(x_{f1}), T(x_{f2})) = d(T(x_{f1}), T(x_{f2})) \leq Sd(x_{f1}, x_{f2})$.

Так как $S < 1$, то последнее неравенство выполняется только при $x_{f1} = x_{f2}$.

2.2. Сходимость. Для доказательства используется метод Коши.

3. Хаотическая динамика.

а. Притягивающие и отталкивающие точки.

Отображение T теперь не предполагается сжимающим, следовательно, теорема о неподвижной точке в данном случае неприменима. Пусть x_f – неподвижная точка. Если функцию T разложить в ряд Тейлора вблизи неподвижной точки, то получим

$T(x_n) = T(x_f) + (x_n - x_f)T'(x_f)$.

Поскольку по определению неподвижной точки $T(x_f) = x_f$, то следующий шаг итерации $x_{n+1} = T(x_n)$, откуда получим следующее выражение:

$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_f)T'(x_f)$.

Отсюда наглядно видно, что:

– если $|T'(x_f)| > 1$, то точка x_f – отталкивающая, так как с каждым шагом расстояние увеличивается, орбиты из ее окрестности расходятся;

– если $|T'(x_f)| < 1$, то точка x_f – притягивающая, так как с каждым шагом расстояние уменьшается, орбиты из ее окрестности сходятся.

б. Определение 6.2. Периодические точки.

Точки ζ_1 и $\zeta_2: T(\zeta_1) = \zeta_2; T(\zeta_2) = \zeta_1; \zeta_1 = T(T(\zeta_1)) \equiv T^{(2)}(\zeta_1)$

Определение 7.3 Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{T^{(n)}(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ называется орбитой точки x_0 .

Определение 7.4. Орбита называется периодической с периодом p , если $x_{n+p}=x_n$; $n=0,1,2,\dots$. Если уравнение периодичности $x_{n+p}=x_n$ справедливо только после некоторого $n \geq n_0$, то орбита в конечном счете – периодическая.

с. Примеры функций, использование которых в качестве итерирующих отображений позволяет реализовать сценарии перехода к хаотической динамике.

- i. модель ограниченного роста Т: $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ (Верхольст, 1845)
- ii. $x_{n+1}=x_n^2+a$
- iii. $x_{n+1}=x_n(1+a(1-x_n))$
- iv. $x_{n+1}=x_n \exp(a(1-x_n))$

Этот список может быть продолжен. Важно, что для перехода к хаотической динамике итерирующее отображение должно относиться к классу неаффинных, т.е. они не могут быть представлены в виде $y(x)=ax+b$ – хаотическая динамика является свойством нелинейных систем.

Рассмотрим отображение $T(x)=x^2+a$. Нетрудно видеть, что неподвижная точка есть решения уравнения $x=x^2+a$, т.е.

$$\zeta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4a}), \quad \eta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4a})$$

Неподвижная точка есть действительное число, только если $1-4a \geq 0$.

Если $a \leq 1/4$, то $\zeta < \eta < \zeta$, $T(-\zeta) = \zeta$.

Для $x_0 > \zeta$ и $x_0 < \zeta$ орбиты стремятся к ∞ .

Пусть $I = [-\zeta, \zeta]$, если $-2 \leq a \leq 1/4$ и $x_0 \in I$, то $T(x_0) \in I$. Рассмотрим, к чему будет сходиться процесс, стартовавший на данном итерирующем отображении из начальной точки x_0 в зависимости от параметра a .

1. Если $-3/4 < a < 1/4$, то имеет место $|T'(\eta)| = |1-(1-4a)^{1/2}| < 1$ и, следовательно, неподвижная точка – притягивающая и все орбиты с $x_0 \in I$ сходятся к η . На рис.7.1. приведены примеры развития итерационного процесса для трех значений параметра a – видно, что после нескольких итераций процесс сходится к устойчивой точке.

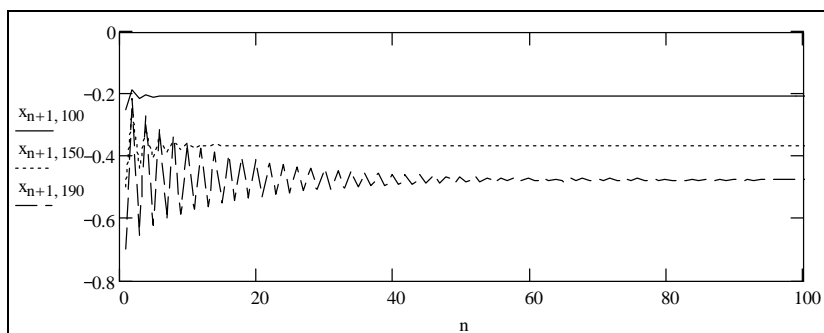


Рис.7.1. Динамика системы при различных значениях параметра a

2. На рис.7.2 приведен фрагмент диаграммы, показывающей зависимость значения неподвижной точки от значения параметра a .

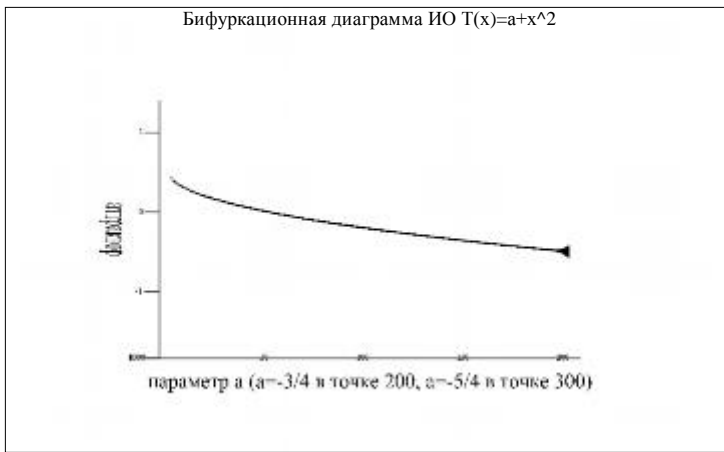


Рис.7.2. Зависимость значения неподвижной точки от величины параметра a в диапазоне $-3/4 < a < 1/4$

2. $a < -3/4 \Rightarrow |T'(\eta)| > 1 \Rightarrow$ Неподвижная точка η – отталкивающая. В то же время $T^{(2)}$ доставляет пару притягивающих точек, приводящих к появлению цикла с периодом 2. Динамика системы для этого случая дана на рис. 7.3, а зависимость значений неподвижных точек $T^{(2)}$ на рис.4.4

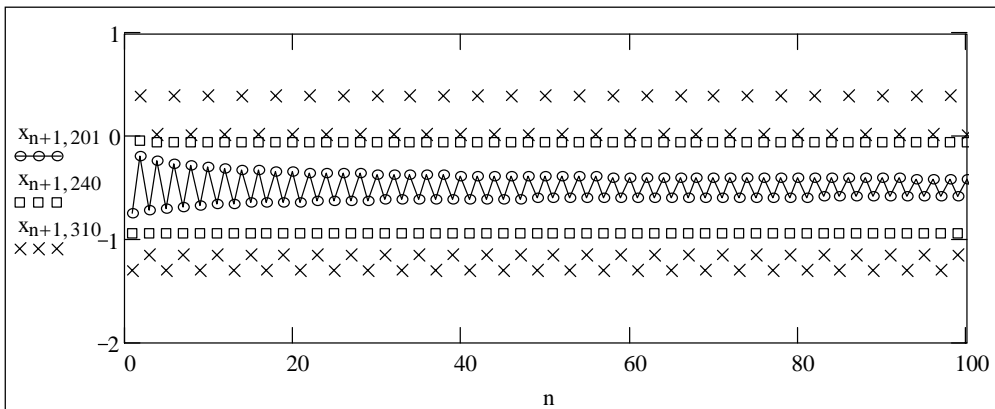


Рис. 7.3. Динамика системы при $a < -3/4$.

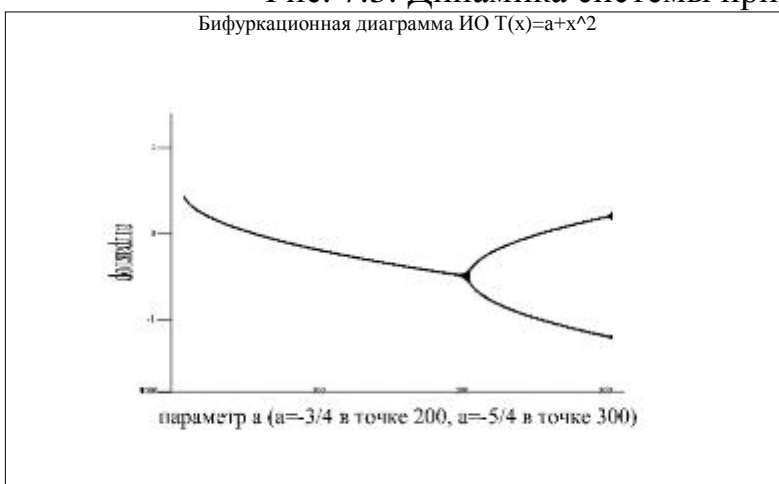


Рис.7.4. Зависимость значения неподвижной точки от величины параметра a в диапазоне $a < -3/4$

3. $a = -5/4$ – снова бифуркация удвоения периода – цикл с периодом 4.

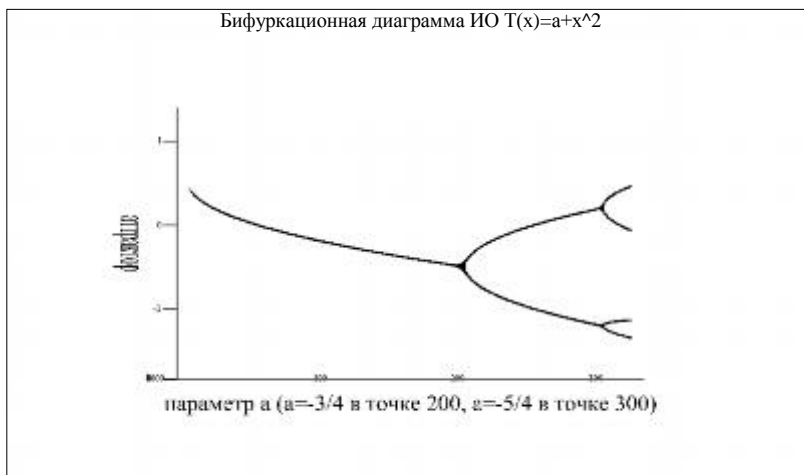


Рис.7.5. Зависимость значения неподвижной точки от величины параметра a в диапазоне $a < -5/4$

4. При $a < -1.401155\dots$ система из циклического переходит в режим, в котором неподвижные точки отсутствуют. На рис.7.6 приведена динамика системы при значении параметра $a < a_\infty = -1.401155\dots$. Можно видеть, что после некоторого числа итераций (в данном случае после 60 итераций) система выходит на режим, в котором ее траектория с некоторым периодом проходит в определенной области, называемой странным аттрактором. Траектория системы не точно повторяет саму себя, но каждый раз проходит вблизи от предыдущей траектории.

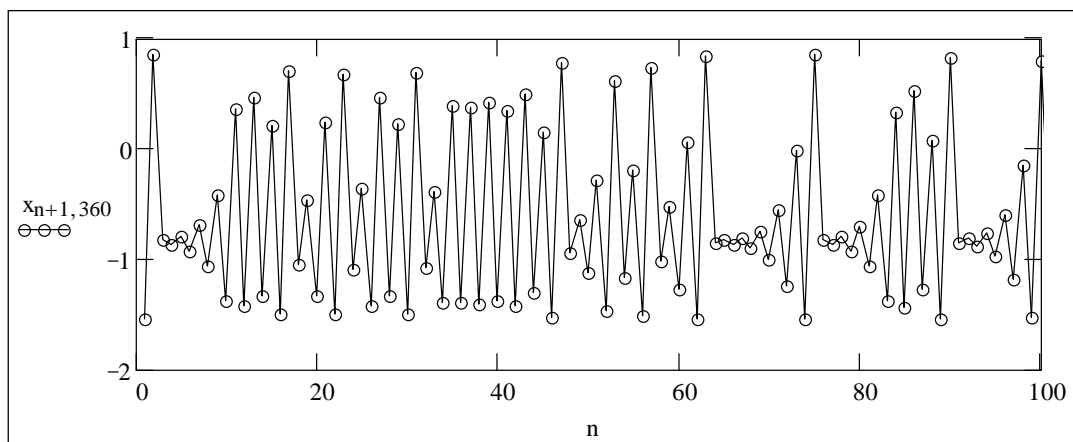


Рис.7.6. Динамика системы при значениях параметра $a < -1.401155\dots$

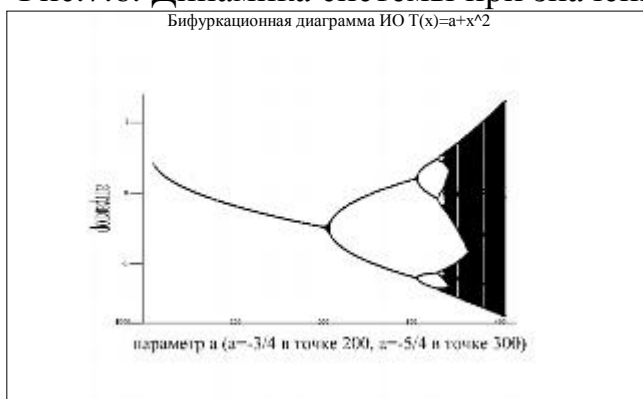


Рис.7.7. Бифуркационная диаграмма

5. При $a=-2$, $\varepsilon=2$, $I=[-2,2]$, $y=x$ пересекает график $T^{(n)}(x)$ точно 2^n раз, каждая точка – периодическая с периодом n , следовательно существуют периодические орбиты с $p=2,3,4,\dots,n$.

6. Точка Фейгенбаума $a_\infty=\lim a_n=-1.401155\dots$, где a_n – значения точек бифуркаций.

$1/4 < a < a_\infty$ - удвоение периода

$a_\infty < a$ – область хаоса

в окрестности $a = -1.7548777\dots$ – окно периода 3.

Отношение длин интервалов между точками бифуркаций имеет предел

$d = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669162\dots$ – постоянная Фейгенбаума. Если значения a_∞

для разных функций разные, то значение d одно для очень многих функций.

d. Определение 7.5. Хаос. Пусть (X,d) – метрическое пространство.

Отображение $T:X \rightarrow X$ называется хаотическим, если:

i. T обладает существенной зависимостью от начальных условий, а именно: (X,d) , $x \in X$, U – открытое множество, $x \in U$, для $\delta > 0 \exists n > 0$ и $(\cdot)y \in U$, что $d(T^{(n)}(x), T^{(n)}y) > \delta$;

ii. T транзитивно, т.е. для $\forall U, V$ – открытых множеств $\exists n \geq 0$ такое, что $T^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$;

iii. Периодические точки плотны в X , т.е. в любой окрестности \forall точки в X существует по крайней мере одна периодическая точка и, следовательно, бесконечное множество периодических точек.

Это – строгий хаос. Строго говоря, условие (1) избыточно, так как оно следует из 2 и 3.

Определение 7.6. Замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется аттрактором системы $\dot{x} = T(x)$, где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t < \infty$, если выполняются условия:

А. Существует открытое множество $\Omega_0 \supset \Omega$ такое, что все траектории $x(t)$ системы, начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$, т.е. $d(x(t), \Omega) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $x(0) \in \Omega_0$, где d – расстояние от точки x до множества $\Omega, d(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$;

Б. Никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 7.7. Аттрактор называется хаотическим, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 7.8. Система называется хаотической, если у неё существует хотя бы один хаотический аттрактор.

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических систем – крайне высокую чувствительность к начальным

условиям. Две любые, сколь угодно близкие траектории, обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для практических целей, в первую очередь – задач управления, существенно свойство рекуррентности хаотических траекторий – со временем эти траектории попадают в сколь угодно малую окрестность своего положения в прошлом.

Определение 7.9. Функция $x: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется рекуррентной, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $T_\varepsilon > 0$, что для любого $t \geq 0$ имеется $T(t, \varepsilon), 0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon$ такое, что $\|x(t + T(t, \varepsilon)) - x(t)\| < \varepsilon$.

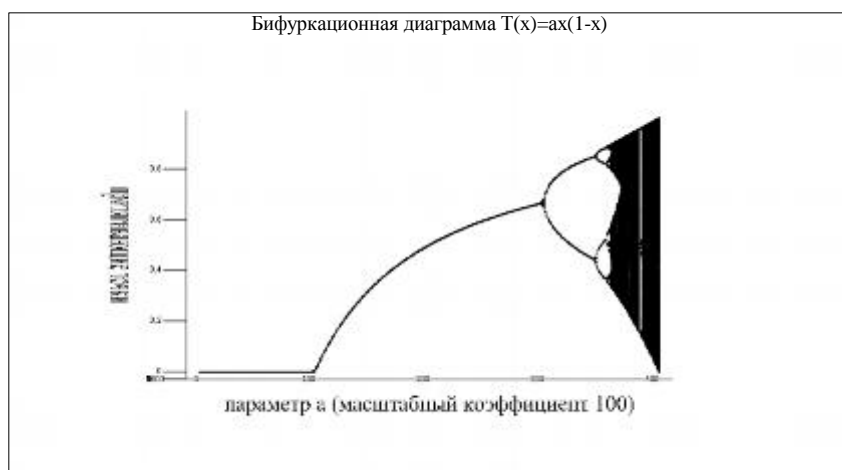


Рис.7.7. Бифуркационная диаграмма для ИО «Модель ограниченного роста»

Из сравнения рисунков 7.6 и 7.7 видно, что в зависимости от вида итерирующего отображения конкретный вид бифуркационной диаграммы, называемой также деревом Фейгенбаума, может изменяться, но все бифуркационные диаграммы отображают переход к хаосу, содержащий три последовательных этапа: хаотическую динамику, циклическую динамику, хаотическую динамику.

В связи с переходом к хаосу в детерминированных системах по сценарию Фейгенбаума, т.е. через удвоение периода, возникает закономерный вопрос о том, как на практике отличить хаотический режим от многопериодического. Один из возможных методов, перекликающийся с изучаемым курсом, заключается в изучении спектра Фурье – для многопериодического режима спектр будет состоять из дискретных спектральных максимумов, а для хаотического будет непрерывным и иметь достаточно большую мощность на низких частотах. При этом очевидно, что длина исследуемой реализации должна быть достаточно большой для того, чтобы получить достаточно высокое разрешение в спектре. В противном случае уширение спектральных линий может скрыть дискретный характер спектра.

Еще один метод различения хаотического режима от многопериодического основан на анализе автокорреляционной функции исследуемой реализации. Автокорреляционная функция многопериодического процесса будет состоять из затухающих осцилляций, а автокорреляционная функция хаотического процесса спадает достаточно быстро.

Возможности реализации хаотической динамики в оптических системах основаны на использовании нелинейных свойств оптических сред.

Например, в схеме «голографический коррелятор в линейном резонаторе», приведенной на рис.7.8, в качестве фазо-сопрягающих зеркал могут быть использованы регистрирующие среды с передаточной характеристикой, подобной приведенной на рис.7.9.

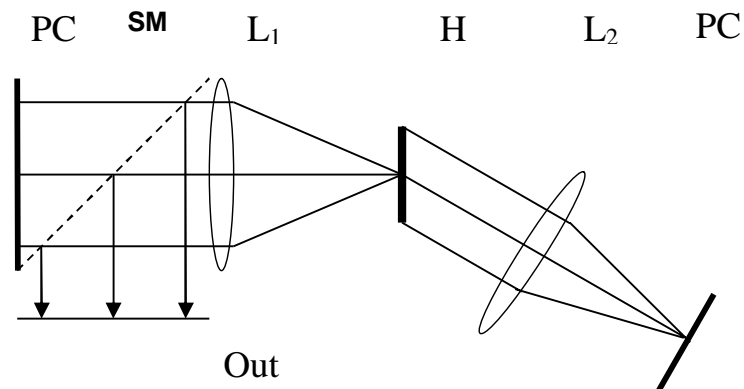


Рис.7.8. Принципиальная схема устройства «голографический коррелятор в линейном резонаторе»; резонатор образован двумя фазо-сопрягающими зеркалами РСМ₁ и РСМ₂ (устройствами обращения волнового фронта), помещенными в плоскости изображений и корреляций, соответственно

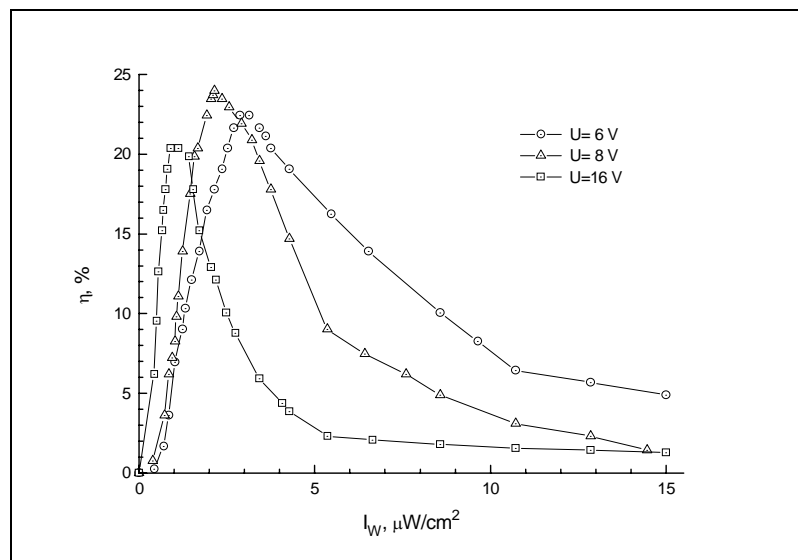


Рис. 7.9. Модуляционные характеристики оптически управляемой структуры стибнит – нематический жидкий кристалл ($v = 22 \text{ nm}^{-1}$, случай немодулированных во времени записывающих пучков). Зависимости сняты А.Н.Чайкой, структура разработана в ВНЦ ГОИ им.С.И.Вавилова И.Е.Моричевым, Н.И.Плетневой, Л.П.Амосовой

На рис.7.10. приведена бифуркационная диаграмма, рассчитанная для схемы «4- f фурье-голографии с обращением волнового фронта в корреляционной плоскости» применительно к использованию передаточных характеристик фазо-сопрягающего зеркала на структуре фотополупроводник – жидкий кристалл, приведенных на рис.7.9.

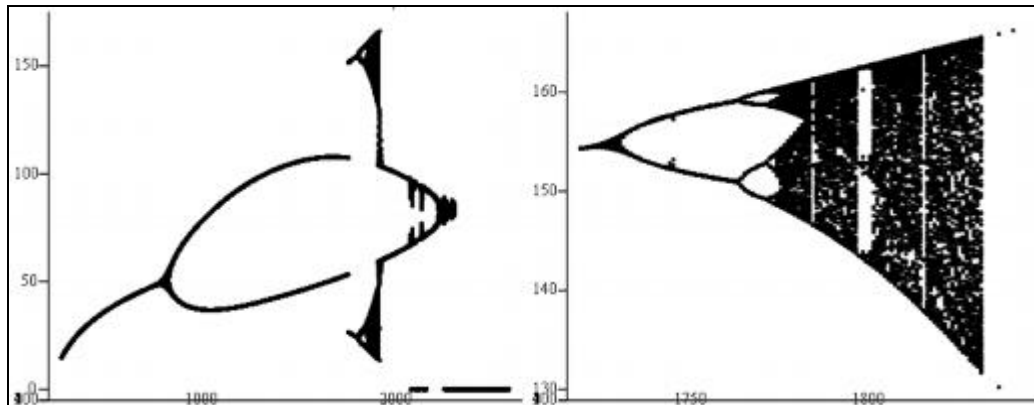


Рис.7.10. Бифуркационная диаграмма и ее увеличенный фрагмент, рассчитанные для итерирующего отображения, приведенного на Рис.7.8

На рис.7.11. приведена схема разработанного группой исследователей Laurent Larger, Eric Genin, Jean-Pier Codgebuer and Vladimir Udaltsov из Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux оптоэлектронного генератора для защищенных систем связи, использующего оптический фазовый модулятор, работающий с частотой 12 GHz на структуре LiNbO₃ [3].

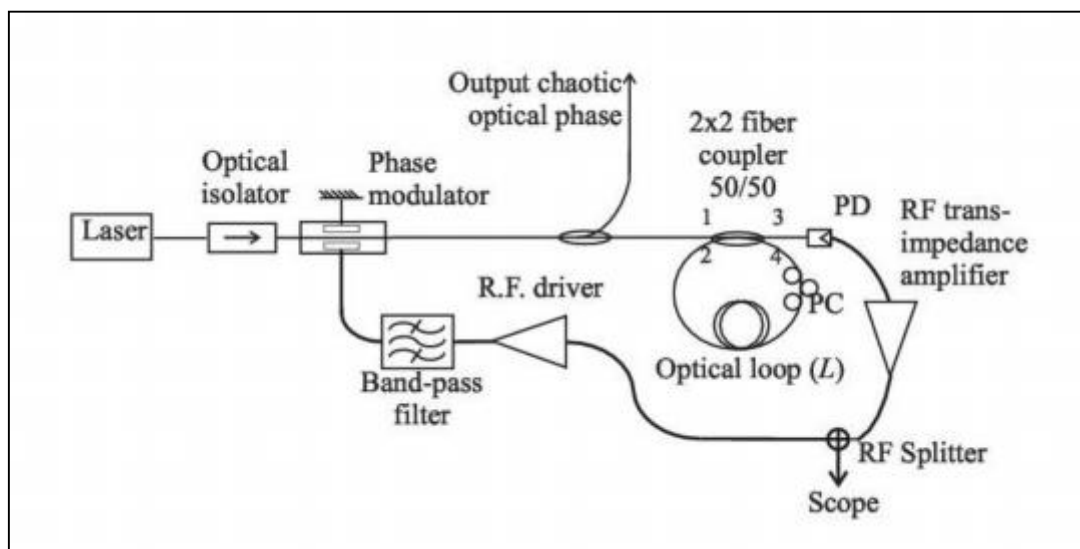


Рис.7.11. Оптоэлектронный генератор оптического сигнала с хаотической динамикой

Оптоэлектронный генератор состоит из высокостабильного лазера, освещающего фазовый модулятор на основе структуры LiNbO₃, выход которого поступает на волоконную петлю длиной 1,25м. Эта петля осуществляет нелинейную модуляцию интенсивности по отношению к

входной модуляции фазы. Флуктуации интенсивности детектируются фотодиодом и усиливаются с тем, чтобы модулировать электронный вход модулятора фазы. Поскольку модуляция фазы происходит быстрее, чем время прохождения петли сигналом, то для различных коэффициентов обратной связи могут быть получены различные виды колебаний. Если коэффициент обратной связи превосходит порог, то генерируется широкополосный хаотический режим.

Возможности использования хаотической динамики для записи, хранения и считывания информации.

В основе использования хаоса в детерминированных системах для задач записи, хранения и считывания информации лежит очень простая идея сопоставления некоторой последовательности символов или цифр, представляющей интересующую нас информацию, определенной орбите системы в хаотическом режиме. Другой последовательности, кодирующей другой информационный фрагмент, сопоставляется другая орбита, и так далее. Если это возможно, то для восстановления (считывания) записанной таким образом информации достаточно вывести систему на орбиту, хранящую интересующий нас фрагмент информации. Вместе с тем, исходя из свойства плотности орбит в режиме хаотической динамики достаточно очевидно, что в этом случае возникает проблема точного попадания на нужную нам орбиту как проблема ключевая.

Эта проблема теряет свою остроту в режиме периодическом. Здесь важно, чтобы период орбиты был достаточно большим для того, чтобы записать всю требуемую последовательность. В таком режиме выведение системы на нужную периодическую орбиту может быть сделано предъявлением системе фрагмента нужной последовательности. Однако в таком (периодическом) режиме при данном значении параметра, определяющего динамику системы, система может хранить только одну последовательность, так как обладает единственным циклическим аттрактором. Соответственно, для хранения нескольких последовательностей необходимо наличие нескольких предельных циклов – каждой информационной последовательности должен быть поставлен во взаимно-однозначное соответствие свой предельный цикл.

Рассмотрим память на основе предельных циклов подробнее [7-9]. Пусть имеется некоторая конечная последовательность символов $\{a_i\}$ из некоторого алфавита длиной N и имеется некоторое одномерное итерирующее отображение T , которое порождает набор предельных циклов с дискретным временем. Тогда для последовательности длиной n конструируется отображение T , обладающее устойчивым циклом периода n ; в этом случае элементы этого цикла будут находиться во взаимно-однозначном соответствии элементам последовательности $\{a_i\}$. Нетрудно видеть, что в простейшем случае каждому элементу последовательности

$\{a_i\}$ будет взаимно-однозначно соответствовать интервал значений переменной T . Для того, чтобы записать несколько последовательностей, необходимо отображение, содержащее несколько предельных циклов – по циклу на каждую последовательность.

Этот метод имеет существенное ограничение – каждый символ алфавита может входить в последовательность $\{a_i\}$ только один раз. Возможное решение проблемы – переход на более высокий уровень, на котором значению переменной отображения соответствует не символ, а последовательность символов, которая, в свою очередь, также не должна повторяться. Этот подход, в котором можно увидеть аналогию с разными типами алфавитов или азбук – буквенными (первый уровень), слоговыми (второй), иероглифами (обозначающими слова или их комбинации), имеет принципиальные ограничения – при превышении некоторого уровня записи длина информационных интервалов становится очень малой, что ведет к вычислениям с двойной точностью. Соответственно, возрастает и объем вычислений.

Для решения этой проблемы был предложен метод специального кодирования. Суть метода – в расширении алфавита введением в него дополнительных символов для встречающихся повторяющихся фрагментов. Например, пусть исходный алфавит – латинский. Задача состоит в том, чтобы записать две последовательности:

abc...dxyfrt

cde...kxyzvk

Если уровень записи выбран $n=2$, то в обеих последовательностях есть повторяющиеся элементы xy . Вводится новый символ для обозначения этой повторяющейся последовательности $xy = \beta$, который и подставляется в первоначальные последовательности, т.е.

abc...d β frt

cde...k β zvk

Нетрудно видеть, что при сохранении уровня записи $n=2$ повторяющиеся субпоследовательности исчезли. Если же повторяющиеся последовательности остались, то в алфавит вводится еще один новый символ и т.д. В рамках такого подхода для записи информации объема L необходимо $\sim L^2$ операций.

Для того, чтобы дозаписать информацию на отображении T , не требуется создавать новое отображение, а достаточно лишь провести его локальную модификацию в окрестностях точек, соответствующих информационным отрезкам для новой информации [10].

Таким образом, память на основе хаотической динамики оказывается ассоциативной памятью – вся записанная информация восстанавливается по предъявлению её фрагмента. Нетрудно видеть, что такая система памяти

должна обладать очень высокой информационной емкостью – это следует из свойств хаоса, рассмотренных выше.

Вместе с тем динамический хаос как математическая модель имеет физические ограничения. Любая реальная система – система диссипативная, и именно диссипативный фактор определяет возможность синхронизации двух хаотических систем, без чего невозможна передача информации.

Возвращаясь к проблеме хранения и, главное, извлечения информации в хаотическом режиме, отметим, что в силу того, что неустойчивые циклы практически ненаблюдаемы, хранимая информация является информацией скрытой. Один из возможных подходов к проблеме извлечения скрытой информации (попадания на нужную орбиту) заключается в том, чтобы сделать неустойчивую орбиту устойчивой, т.е. циклической. Это так называемый метод подавленного хаоса, пригодный для использования в системах связи для передачи конфиденциальной информации.

Предложены разные методы подавления хаоса. В первой работе [10] явление подавления хаоса в системе Лоренца было обнаружено при подаче на хаотическую систему гармонического возбуждения. В работах [11,12] для перехода от хаотического типа динамики к периодическому использовались также периодические управляющие воздействия. Классический метод OGY, названный так по первым буквам фамилий его авторов [13], основан на использовании малых управляющих воздействий, например, введением обратной связи в хаотическом осцилляторе.

Методы передачи информации на основе хаотической динамики

1. Вернемся к бифуркационной диаграмме как зависимости характеристик аттрактора от значения параметра. В системе кодов ASCII каждому символу соответствует трехзначное число из интервала [0,255]. Если сопоставить каждой цифре из этого трехзначного числа период цикла, например по правилу

$$N_N = P - 1,$$

где N_N - число, а P - период орбиты, то каждый символ может быть закодирован в виде тройки периодов. В свою очередь, каждый период определяется для данного итерирующего отображения конкретным значением параметра. Таким образом, при выбранном итерирующем отображении каждый символ и, соответственно, последовательность символов может быть представлена в виде последовательности значений параметра, входящего в выражение для итерирующего отображения.

В результате для того, чтобы прочитать такую последовательность, необходимо знать итерирующее отображение, которое является ключом.

Однако хорошо известно, что частота появления символов специфична для каждого языка – этот метод дешифрирования прекрасно описан в одном из рассказов о Шерлоке Холмсе. Но вспомним, что период орбиты, в отличие от значений самих периодических точек, не изменяется на некотором интервале значений параметра – между точками бифуркаций.

Таким образом, для того, чтобы передать одно и то же значение периода орбиты, может использоваться произвольно выбранное из интервала значение. При этом это значение в сообщении может никогда больше не повториться. В результате последовательность значений параметра представляет собой псевдослучайную последовательность, найти в которой какую-либо статистическую закономерность если и возможно, то весьма и весьма непросто. Иными словами, эта последовательность, т.е само сообщение, воспринимается как шум.

При передаче того же самого сообщения следующий раз получится уже другая последовательность, и т.д. Приняв эту последовательность и зная требуемое итерирующее отображение, получим последовательность периодических орбит, а измерив их периоды – расшифруем само сообщение в кодах ASCII.

2. Описанный выше метод относится, строго говоря, к использованию периодического типа динамики. Рассмотрим применение собственно хаотического типа динамики.

2.1. Привлекательность использования хаоса в системах передачи информации определяется следующими факторами [14]:

1. Возможностью получения сложных колебаний посредством простых моделей и, соответственно, устройств;
2. Возможностью реализации большого количества моделей хаотической динамики в одном устройстве (следует из высокой чувствительности хаотических систем к начальным условиям);
3. Возможностью управления хаотическими режимами посредством малых управляющих воздействий (малых изменений параметров системы). Этот пункт имеет как «+», так и «-». Плюс в том, что мощность управляющего сигнала может быть существенно ниже мощности модулируемого. Минус – высокая чувствительность;
4. Высокой информационной емкостью;
5. Большим числом возможных методов модуляции (ввода информационного сигнала в сигнал хаотический). Напомним, что для регулярного сигнала существуют три основных вида модуляции - амплитудная, частотная, фазовая), а для хаотического возможен еще ряд методов, например:
 - 5.1. модуляция параметров;
 - 5.2. нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому;
 - 5.3. коррекция траекторий хаотической системы малыми возмущениями;
 - 5.4. использование тонкой структуры аттрактора;
6. Возможностью увеличения скорости модуляции по сравнению со скоростью модуляции регулярных сигналов;
7. Возможностью самосинхронизации передатчика и приемника;
8. Возможностью разработки и использования нетрадиционных методов мультиплексирования;

9. Возможностью повышения степени конфиденциальности связи.

Слабые места хаотических методов передачи информации являются продолжением их сильных сторон. Можно упомянуть следующие:

1. Высокая чувствительность к искажениям в канале связи;
2. Высокая чувствительность к шумам;
3. Высокая чувствительность к неполной идентичности параметров приемника и передатчика.

Некоторые методы обеспечения конфиденциальности связи:

4. Хаотическая маскировка;
5. Переключение хаотических режимов;
6. Нелинейное подмешивание;
7. Использование фазовой автоподстройки частоты;
8. Инверсные схемы;

Методы синхронизации ведущей (передатчика) и ведомой (приемника) хаотических систем

Один из первых методов синхронизации известен под названием «синхронный хаотический отклик».

Пусть имеется две автоколебательные системы $X(t)$ и $X'(t)$. Тогда под синхронизацией этих систем понимается выполнение условия

$$|X(t) - X'(t)| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty ,$$

и это условие должно быть устойчиво по отношению к возмущениям.

Для случая нетождественных систем (генераторов хаоса) под хаотической синхронизацией понимают ситуацию, когда движение в обоих парциальных генераторах (ведущем и ведомом) одинаково в топологическом смысле, т.е. траектории $X(t)$ и $X'(t)$ повторяют друг друга, но не изохронны, и функция $(X(t) - X'(t))$ есть случайная функция с нулевым математическим ожиданием [14].

Возможность самосинхронизации обусловлена тем, что любая реальная физическая система является системой диссипативной. Диссипативный фактор действует в противоположном направлении, нежели фактор хаотический и, тем самым, «убивает» рассогласование в поведении отдельных хаотических генераторов. Таким образом, две разнонаправленные тенденции определяют явление хаотической синхронизации:

1. неустойчивость системы ответственна за хаотичность поведения и, следовательно, «разбегание» их траекторий;
2. диссипативные явления заставляют реальные системы «сжиматься» и приближаться друг к другу вдоль устойчивых направлений.

Задача конструктора системы заключается, таким образом, в нахождении компромисса между этими двумя конкурирующими факторами.

т

Хаотический синхронный отклик на основе декомпозиции

Метод декомпозиции – один из основных методов обеспечения синхронизации хаотических систем. Пусть имеется автоколебательная система

$$\frac{dU}{dt} = f(U),$$

где U – в общем случае вектор в многомерном пространстве $U \in R^n$.

Если структура системы такова, что она может быть представлена (как на уровне модели, так и реально, физически) в виде двух подсистем V и W ($U \rightarrow (V, W)$),

то

$$\frac{dV}{dt} = g(V, W)$$

$$\frac{dW}{dt} = h(V, W),$$

$$V = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_m)$$

$$W = (U_{m+1}, U_{m+2}, U_{m+3}, \dots, U_n)$$

где

$$g = (f_1(U), f_2(U), f_3(U), \dots, f_m(U))$$

$$h = (f_{m+1}(U), f_{m+2}(U), f_{m+3}(U), \dots, f_n(U))$$

Таким образом, принципиальная схема метода декомпозиции может быть представлена в виде очень простого рис.7.12. Еще раз подчеркнем, что речь должна идти о декомпозиции не только на уровне математической модели, но обязательно и на уровне физической реализации.

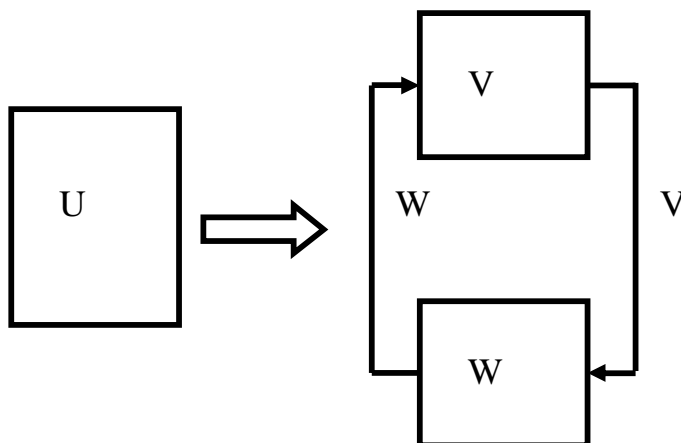


Рис.7.12. Принципиальная схема метода декомпозиции.

Имеется две идентичные системы, в одной из которых одну из связей, например, V , разрываем, как это изображено на рис.7.13. Если выход подсистемы V_1 подать на вход W_2 , то при определенных условиях можно получить $|V_1(t) - W_2(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Иными словами, система ведомая будет повторять траекторию системы ведущей.

Устойчивость отклика определяется тем, что

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= g(V_1, W_1) \\ \frac{dW_1}{dt} &= h(V_1, W_1) \\ \frac{dV_2}{dt} &= g(V_2, W_2) \\ \frac{dW_2}{dt} &= h(V_2, W_2) \end{aligned} \tag{7.1.}$$

Здесь векторная переменная V_1 – воздействие ведущей системы на ведомую, которая может рассматриваться как нелинейный фильтр.

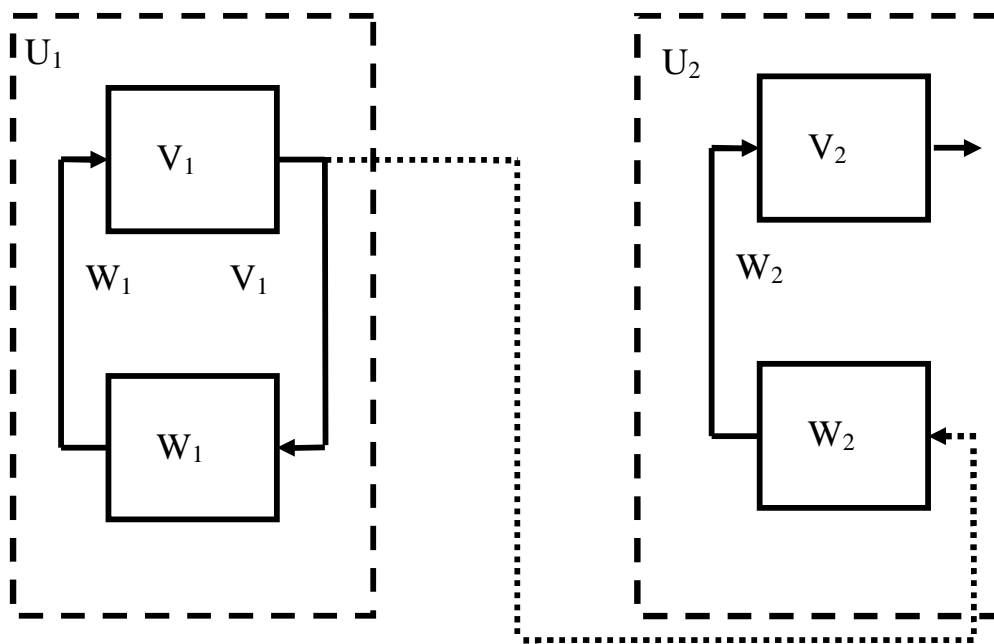


Рис.7.13. Обеспечение хаотического синхронного отклика ведомой системы U_2 при использовании метода декомпозиции. U_1 – ведущая система или передатчик, а U_2 – ведомая система или приемник.

Для наблюдения хаотического синхронного отклика необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1. В ведущей и ведомой системах должна существовать траектория $(V_1, W_1) = (V_2, W_2)$;
2. Движение системы вдоль этой траектории должно быть устойчивым по отношению к любым малым, трансверсальным к хаотическому аттрактору синхронизации, возмущениям.

Условие существования множества синхронизации определяется условием (1). Траектории, удовлетворяющие этому условию, существуют в силу (7.1).

Устойчивость же множества синхронизации определяется требованием (2). Необходимым условием устойчивости аттрактора синхронизации

является отрицательность первого ляпуновского показателя $\lambda < 0$ ведомой системы при воздействии на неё ведущей системы. Это условие необходимо для того, чтобы траектории системы притягивались к множеству синхронизации. Но можно заметить, что условие $\lambda < 0$ усреднено и, следовательно, не является достаточным, так как не гарантирует отсутствия специальных траекторий, принадлежащих множеству синхронизации, но неустойчивых к возмущениям. Отсюда возникает явление «on-off перемежаемости» - кратковременных срывов синхронизации.

Хаотический синхронный отклик в кольцевых системах

Типичный пример структуры кольцевой автоколебательной системы приведен на рис.7.14. Этот тип автоколебательных систем представляет интерес в силу того, что для него хаотический синхронный отклик, в отличие от других типов систем, абсолютно устойчив.

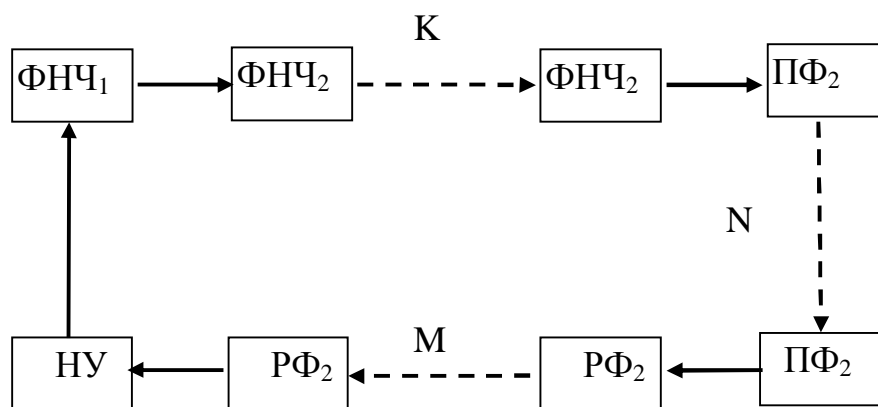


Рис.7.14. Пример структуры кольцевой автоколебательной системы. ФНЧ₁ и ФНЧ₂ – фильтры низких частот первого и второго порядков, соответственно, ПФ₁ и ПФ₂ – полосовые фильтры, РФ – режекторные фильтры, НУ – нелинейный усилитель.

Вернемся к выражению (7.1). Устойчивость ведомой системы на множестве синхронизации означает близость траекторий (V_1, W_1) и (V_2, W_2) .

Введем новые переменные, имеющие смысл малых отклонений:

$$(\delta V, \delta W) = (V_1, W_1) - (V_2, W_2), \quad (7.2)$$

и проведем замену переменных в (6.1), подставив (6.2) вместо (V_2, W_2) .

Тогда режим синхронизации будет достигаться при решениях $(\delta V, \delta W) = 0$. Линейная устойчивость таких решений может быть исследована посредством анализа устойчивости решения $(\delta V, \delta W) = 0$ для линеаризованного в окрестности $(\delta V, \delta W) = 0$ дифференциального уравнения

$$(\delta\dot{V}, \delta\dot{W}) = \frac{d(g, h)}{d(V_1, W_1)} (\delta V, \delta W) = M - (\delta V, \delta W), \quad (7.3)$$

где M – матрица коэффициентов, зависящих от (V_1, W_1) . Отсюда, собственные значения матрицы M определяют устойчивость аттрактора синхронизации, поскольку решение системы уравнений (6.1) абсолютно устойчиво, если действительные части собственных значений M во всех точках аттрактора отрицательны.

Рассмотрим упрощенную модель кольцевой автоколебательной системы, состоящей из последовательно соединенных (и замкнутых в кольцо) нелинейного усилителя и фильтров низких частот первого и второго порядка. Такая система может быть описана следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta\dot{x} &= mf(z) - x \\ \dot{y} &= x - z \\ \dot{z} &= y - \alpha z \end{aligned}, \quad (7.4)$$

где α и β – параметры фильтров первого и второго порядков, соответственно, m – коэффициент усиления, а $f(z)$ – кусочно-линейная функция вида

$$f(z) = \left| z + \frac{1}{2} \right| - \left| z - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} |z - 1| - \frac{1}{2} |z + 1|.$$

Связь между ведомой и ведущей системами посредством z может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \beta\dot{x} = mf(z) - x, \dot{y} = x - z, \dot{z} = y - \alpha z \\ \beta\dot{u} = mf(z) - u, \dot{v} = u - w, \dot{w} = v - \alpha w \end{cases} \quad (7.5)$$

Если коэффициент усиления $m=4,8$, а параметры фильтров имеют значения $\alpha=1$ и $\beta=2$, то матрица M будет иметь вид

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

и постоянна для всего фазового пространства системы. Собственные значения M $\mu_1 = -0.5$, $\mu_{2,3} = -0.05 \pm 0.9987i$. Т.е. в силу отрицательности их действительных частей система абсолютно устойчива.

Рассмотрим некоторые методы передачи информации с использованием хаотической синхронизации.

1. Хаотическая маскировка – в этом случае информационный сигнал аддитивно подмешивается к хаотическому. Принципиальная схема метода приведена на рис.6.15. Первый сумматор вводит информационный сигнал S в хаотический сигнал x , второй сумматор введен для моделирования

аддитивного шума канала связи w . Восстановленный входной сигнал S' получается в результате вычитания выходного сигнала ведущей системы из синхронизированного хаотического сигнала ведомой системы.

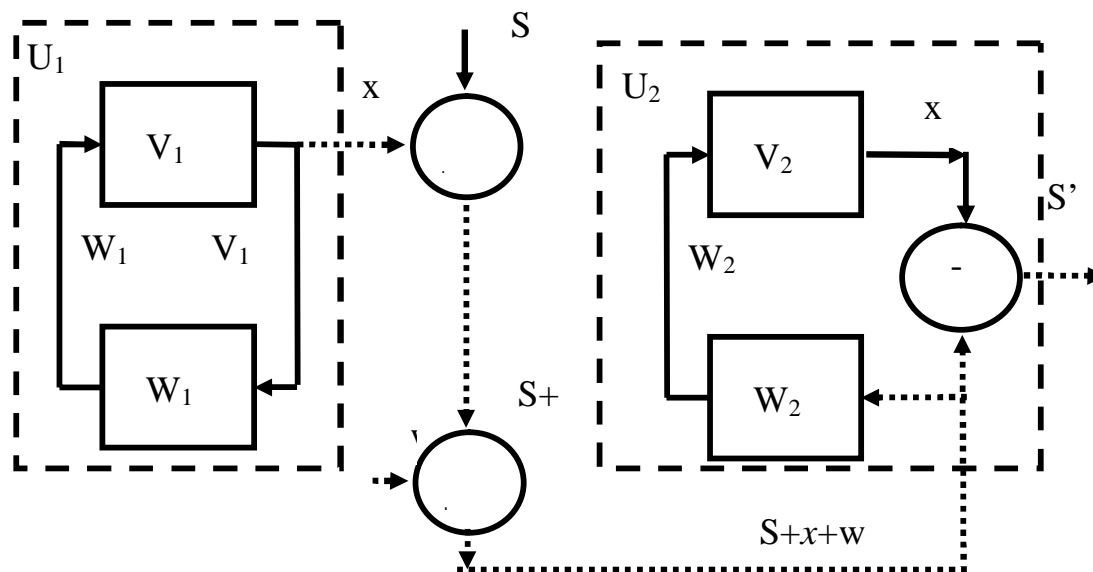


Рис.6.15. Принципиальная схема метода хаотической маскировки: x – хаотический сигнал; S – информационный сигнал; S' – восстановленный информационный сигнал; W – аддитивный шум в тракте связи.

Слабые места этого метода суть следующие:

- a. Низкое отношение сигнал/шум. Согласно опубликованным результатам, при условии идентичности ведущей и ведомой систем и отсутствии шума в канале связи для качественной передачи информации необходимо превышение мощности хаотического сигнала над информационным на 35–65 дБ. [14]. Столь жесткое требование обусловлено тем, что в данном методе информационный сигнал возмущает опорный хаотический сигнал, вследствие чего возможно появление шумов десинхронизации. Однако сигнал такого уровня соизмерим с шумом канала связи, следствием чего является низкое отношение сигнал/шум на выходе.
- b. Система критична к появлению дополнительных возмущающих факторов;
- c. Низкая энергетическая эффективность;
- d. Низкая степень конфиденциальности.

Точность оценки извлеченной информации S' по отношению к передаваемому сообщению S зависит от следующих факторов:

1. степени идентичности ведущей и ведомой систем;
2. уровня шума в тракте связи.

2. Переключение хаотических режимов. Принципиальная схема метода приведена на рис.6.16. На каждом конце канала связи имеются по два хаотических генератора, желательно, чтобы их характеристики были

близки. Коммутатор осуществляет переключение между генераторами хаоса. Для того, чтобы прочесть сообщение, на стороне приемника необходимо определить, хаотический сигнал какого именно из генераторов в данный момент присутствует на входе. Если генераторы идентичны по своим характеристикам, то решить эту задачу можно только имея на приемной стороне генераторы, синхронизированные с передающими.

Метод не накладывает таких жестких требований на степень идентичности систем и уровень шумов, как ранее рассмотренный, поскольку для выделения информационного сигнала достаточно определить «свой» или «чужой» сигнал на входе ведомой системы.

Конфиденциальность связи определяется близостью переключаемых хаотических режимов, т.е. идентичностью генераторов. Однако известно [14], что возможно воспроизведение в приемнике исходного хаотического сигнала, что снижает конфиденциальность метода.

Энергетическая эффективность метода высока, так как передатчик хаотического сигнала является носителем сигнала информационного.

Слабое место этого метода определяется тем, что при переключении возникают переходные процессы, ограничивающие скорость коммутации и, следовательно, скорость передачи информации.

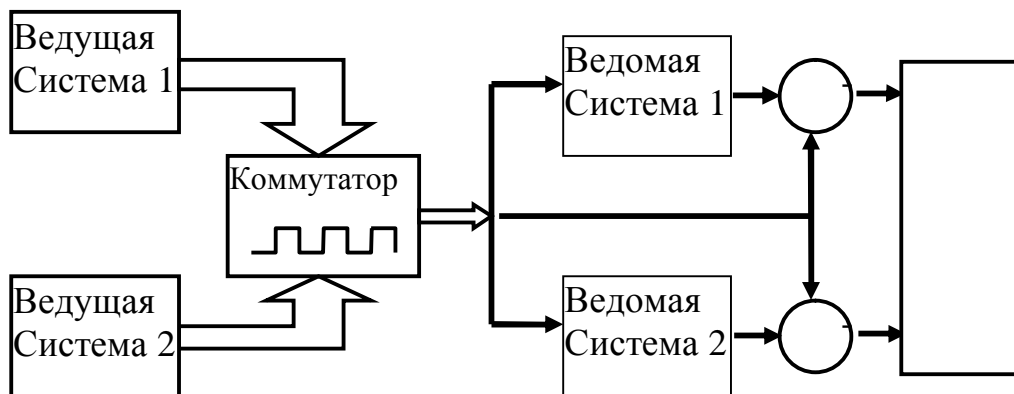


Рис.6.16. Принципиальная схема метода переключения хаотических режимов.

3. Нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому.

В этом случае информационный сигнал вводится непосредственно в ведущий генератор хаоса. Извлечение информационного сигнала производится в ведомой системе за счет использования обратного преобразования. Предложен ряд пар взаимобратных операций:

1. сложение – вычитание;
2. умножение – деление;
3. сложение по модулю с основанием 2;
4. преобразование напряжение – ток;
5. etc.

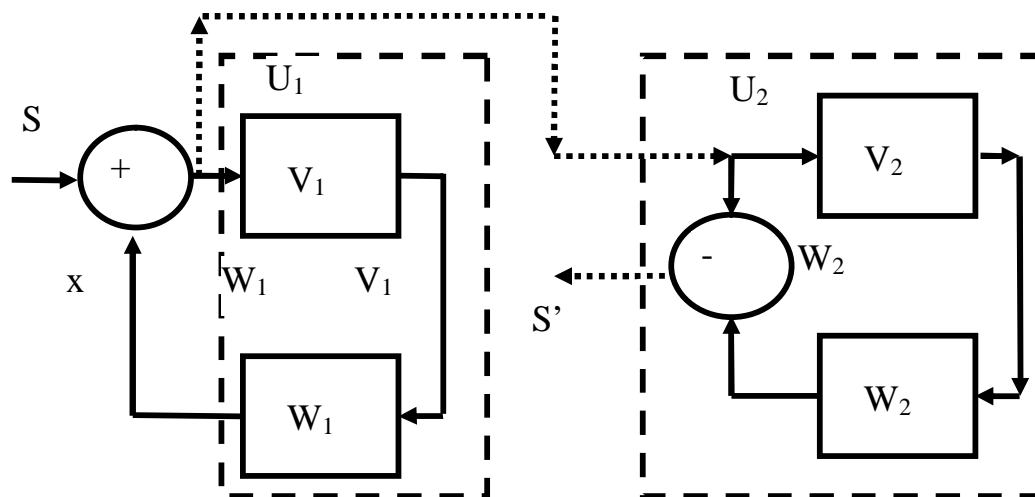


Рис.6.17. Принципиальная схема метода нелинейного подмешивания информационного сигнала к хаотическому.

Термин «нелинейное» обусловлен тем, что результирующий сигнал циркулирует по кольцу обратной связи ведущей системы, претерпевая при этом нелинейные преобразования в одной из её подсистем.

Достоинство метода – возможность варьирования в широких пределах уровня подмешиваемого сигнала. Амплитуда информационного сигнала может быть соизмерима с амплитудой сигнала хаотического и даже превосходить её. Отсюда следует более высокое качество передачи, более высокое отношение сигнал/шум.

Проблемы, связанные с методом нелинейного подмешивания

Хаотический сигнал, вырабатываемый системой, является функцией информационного сигнала. Как следствие, ведомая система неавтономна, т.е. в отсутствие информационного сигнала на выходе ведомой отсутствует хаотический сигнал, что позволяет однозначно определить, есть передача сообщения или нет. Более того, даже при наличии информационного сигнала, в зависимости от уровня его амплитуды, хаотический сигнал на выходе может иногда прерываться квазипериодическим сигналом вследствие возникновения эффекта «подавления хаоса».

С точки зрения обеспечения конфиденциальности связи важно, чтобы ведомая система постоянно генерировала хаотический сигнал, даже при отсутствии сигнала информационного.

Конфиденциальность уменьшается с ростом уровня сигнала.

Очевидно, что полоса частот информационного сигнала должна быть не уже полосы частот сигнала хаотического.

Описанные методы уже могут считаться классическими для такой активно развивающейся области, как динамический хаос. Этот перечень далеко не исчерпывающий – исследования в этой области интенсивно развиваются, постоянно появляются новые методы и модели.

Литература к Теме 7

1. *Кроновер Р.М.*, Фракталы и хаос в динамических системах, М.2000.
2. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы, Спб, 2000.
3. *Фриман Дж.У.*, Динамика мозга в восприятии и сознании: творческая роль хаоса // В сб. «Синергетика и психология». Вып.3. "Когнитивные процессы", Издательство «Когито-Центр», 2004.
4. *Ижикевич Е.М., Малинецкий Г.Г.*, Модель нейронной сети с хаотическим поведением // Ин-т прикладной математики им. М.В.Келдыша. Препринт №17 за 1993, М., 1993.
5. *L. Larger, E. Genin and V. Udaltsov* Optoelectronic phase chaos generator for secure communication, Int. Topical Meeting on Optoinformatics, St. Petersburg, 18-21 October 2004, Book of Abstracts, p.13
6. *А.В.Павлов* О применимости голографических технологий при решении творческих задач // Сб. трудов IV межд. Конф. «Интегрированные модели и мягкие вычисления в ИИ», Коломна 2007, т.1, с.282-290.
7. *Dmitriev A.S., et.al.* Storing and recognizing information based on stable cycles of one-dimensional map // Phys. Lett. A. 1991. V.155. P.494-499.
8. *Дмитриев А.С.* Запись и восстановление информации в одномерных динамических системах // Радиотехника и элект., 1991. Т.36. №1. С.101.
9. *Дмитриев А.С., Куминов Д.А., Павлов В.В., Панас А.И.* Запись, хранение и обработка текстов на основе одномерных динамических систем // Препринт ИРЭ РАН, М.: ИРЭ РАН. 1993. №3 (585).
10. *Дмитриев А.С.* Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38(1). С.1-24.
11. *Лоскутов А.Ю., Попкова А.В.* Стабилизация хаотических колебаний в системах с аттрактором гиперболического типа // Письма в ЖЭТФ, 2011. Т. 94. № 1. С. 86-91.
12. *А.С. Дмитриев, Л.В. Кузьмин, А.И.Панас, С.О.Старков.* Эксперименты по передаче информации с использованием хаоса через радиоканал. Радиотехника и электроника. 1998. V. 43. № 9. С. 1115.
13. Успехи современной радиоэлектроники. Спец. выпуск. 2000. № 11.
14. *Дудник Е. Н., Кузнецов Ю. И., Минакова И. И., Романовский Ю. М.* Синхронизация в системах со странным аттрактором. Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1983. Т. 24, (4). С. 84-87.
15. *Алексеев В. В., Лоскутов А. Ю.* Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия. ДАН СССР, 1987, Т.293, (6), С. 1346—1348.
16. *Алексеев В. В., Лоскутов А. Ю.* Дестохастизация системы со странным аттрактором посредством параметрического воздействия. Вестн. МГУ. сер.3, Физика, астрономия. 1985, Т.26, (3), С. 40-44.
17. *Ott E., Grebogi C., Yorke G.* Controlling chaos. // Phys. Rev. Lett. 1990. V.64. (11) 1196—1199.
18. *А.С. Дмитриев, А.И. Панас* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.Физматлит.2002. – 251 с.

Вопросы для самопроверки по теме 7

1. Что такое универсальное множество?
2. Что такое метрическое пространство?
3. Что такое итерирующее отображение?
4. Дайте математическое определение неподвижной точки итерирующего отображения (напишите формулу).
5. Как, имея аналитическое описание итерирующего отображения, определить тип неподвижной точки и, соответственно, тип итерирующего отображения?
6. Как называется графическое представление итерационного процесса, например, схождения к притягивающей неподвижной точке?
7. Как называется графическое представление зависимости координаты притягивающей неподвижной точки от значения параметра итерирующего отображения?
8. Какие типы динамики можно выделить на диаграмме Фейгенбаума?
9. Что такое точка Фейгенбаума?
10. Что такое постоянная Фейгенбаума? (напишите формулу)
11. Дайте определение хаоса.
12. Что такое аттрактор и что такое джокер в теории динамических систем?
13. Зачем нужен джокер с точки зрения теории управления?
14. Что такое странный аттрактор? В чем его странность?
15. Что такое свойство плотности точек (определение)? К чему оно относится, когда актуально?
16. Что является причиной конечного горизонта прогноза (ограниченной глубины предсказания) в детерминированной системе?
17. Какой параметр позволяет оценить тип динамики системы – конвергентный или дивергентный?
18. Как с помощью преобразования Фурье можно отличить периодический тип динамики от хаотического?
19. Что такое фрактал?
20. Дайте примеры того, как физические явления вводят ограничения на математические модели на примерах разных моделей фракталов.
21. Дайте определение (формулу) Хаусдорфовой размерности. Как она иначе называется?
22. Какой фактор, всегда присутствующий в реальности, определяет возможность синхронизации двух хаотических систем?
23. Перечислите те преимущества, что дает применение хаотического типа динамики при передаче информации сравнительно с использованием регулярной несущей.
24. Перечислите основные методы ввода информационного сигнала в хаотический при передаче информации.
25. Как можно использовать многопериодический режим динамической системы для кодирования информации?

Тема 8. Математические основания оптических логических вентилей и процессоров

Один из важных атрибутов человеческого мышления, не учитываемый в классической булевой логике, – нечеткость и неполнота внутренних представлений об «объективных» событиях внешнего мира, противоречивость и недоопределенность целей и критериев. Неудача героической попытки полной аксиоматизации математики, отрыва её от физики и превращения в «чистую» науку, предпринятой во второй половине XIX века, привела (многих, но отнюдь не всех) к осознанию необходимости учета в математической модели свойств реального мира, возрождению тезиса о физической обоснованности математики. В нашем курсе мы уделим внимание двум направлениям, в рамках которых предпринимаются попытки моделирования атрибутов, присущих человеческому способу рассуждений и принятия решений: теории нечетких множеств как основания нечетких логик и квантовым, включая квантово-подобные, методам. Изложение мы начнем с рассмотрения алгебраических оснований, понимая логику как алгебру логики.

8.1. Алгебраические основания

8.1.1. Основные определения

Примем, что алгебры (логики) событий во внешнем мире и их внутренних репрезентаций различны. Поскольку рассуждения реализуются посредством обработки мозгом внутренних репрезентаций внешних событий, т.е. картин нейронной активности коры головного мозга (нейронных ансамблей), активированных воспринимаемой извне информацией или воспоминаниями, то рассмотрим алгебру последних. Здесь мы будем опираться на результаты экспериментальных исследований сотрудников лаборатории зрительного восприятия института физиологии РАН им. И.П. Павлова, согласно которым нейронные структуры зрительной коры человека и высших животных реализуют преобразование Фурье, причем двукратное, т.е. согласованную фильтрацию [1-4]. Но подойдем к алгебре фурье-дуальных операций последовательно, начав с общих определений и используемого аппарата.

Определение 8.1. Определим алгебру как модель $\langle \Omega(X), D, \odot, \oplus, O, U \rangle$, где $\Omega(X)$ – множество элементов модели, \odot, \oplus – определяющие модель операции (абстрактные умножение и сложение), соответственно, D – оператор, задающий дуальность определяющих модель операций в форме законов де Моргана, O и U – специальные константы, представляющие наименьший и наибольший элементы из $\Omega(X)$. Примем, что $[O, U]$ – решетка, на которой существует не определенная пока операция $<$, задающая порядок. Далее, в зависимости от контекста, будем без особых оговорок использовать для обозначения определяющих модель операций умножения и сложения \odot, \oplus также и символы \wedge, \vee , принятые в логике

(«конъюнкция» и «дизъюнкция», соответственно), т.е. нотацию $\langle \Omega(X), D, \wedge, \vee, O, U \rangle$ как равноправную.

Определение 8.2. Множество элементов модели определим следующим образом, обобщающим определение нечеткого подмножества [5,6] на случай комплекснозначной области значений:

$$\Omega(X) = \{ \mu | \mu : X \rightarrow \mathbb{C} \}, \quad (8.1)$$

где μ – функция принадлежности элемента множества, X – универсальное множество, элементы которого обозначим x , \mathbb{C} – множество комплексных чисел, где подмножество действительных чисел $\mathbb{R} \subseteq [0,1]$. Определенные таким образом подмножества как элементы модели будем обозначать прописными буквами, а элементы множеств – строчными. Соответственно, если специальные константы O и U определены не как подмножества $O(x)$ и $U(x)$, но как элементы, то будем обозначать их строчными буквами o и u .

Определение 8.3. Определим унарную операцию D , задающую дуальность определяющих модель операций, посредством следующего набора аксиом:

$$D: [O, U] \rightarrow [O, U], \quad (8.2)$$

$$D(O) = U \quad (8.3)$$

$$D(U) = O$$

$$\forall A, B \in \Omega(X); A \geq B \Leftrightarrow D(A) \leq D(B). \quad (8.4)$$

Если

$$\forall A \in [O, U]; D(D(A)) = A, \quad (8.5)$$

то D – инволюция.

Определение 8.4. Определим коммутативную, ассоциативную и монотонную бинарную операцию $V: [O, U]^2 \rightarrow [O, U]$ с нейтральным элементом E (как и ранее, прописная буква означает, что элемент модели $E(x)$ – подмножество X , а строчная e – элемент множества), т.е.

$$\forall A \in [O, U]; V(A, E) = V(E, A) = A \quad (8.6)$$

Тогда, если $E = U$, то V , определим как обобщенную операцию абстрактного умножения $V = \odot$ или конъюнкции $V = \wedge$; если $E = O$, то V – обобщенная операция абстрактного сложения $V = \oplus$ или дизъюнкции $V = \vee$. Данное определение, как и введенное выше определение 8.3, обобщает поэлементно определяемые операции на операции над операндами в целом. Поскольку операнды выше мы определили (8.1) как подмножества или функции, то в этом случае эти операции – операторы.

Соответственно, законы де Моргана для обобщенных таким образом операций примут вид

$$\forall A, B \in \Omega(X); \begin{cases} D(A \oplus B) = D(A) \odot D(B) \\ D(A \odot B) = D(A) \oplus D(B) \end{cases}. \quad (8.7)$$

Если D – инволюция (7.5), то законы де Моргана принимают вид

$$\forall A, B \in \Omega(X); \begin{cases} A \oplus B = D(D(A) \odot D(B)) \\ A \odot B = D(D(A) \oplus D(B)) \end{cases}. \quad (8.8)$$

Определение 8.5. Определим логику как модель $\langle \Omega(X), D, \odot, \oplus, O, U, T \rangle$, где T – истинностное отображение, определяемое как отображение из множества высказываний P на решетку значений истинности L $T: P \rightarrow L$. Если $L = \{0,1\}$, логика строгая, если $L = [0,1]$, то логика многозначная, а если $L = \Omega(X)$, то логика нечеткозначимая.

8.1.2. Иллюстрация 1: приближение геометрической оптики

В оптике бинарные операции реализуются при прохождении света через транспарант: волна представляет один операнд, а на транспаранте зарегистрирован второй. Из определения пропускания имеем в качестве операции абстрактного умножения алгебраическое произведение \cdot .

Для конструктивного определения операции абстрактного сложения нам необходимо конструктивно определить операцию D , задающую дуальность (или наоборот). Поскольку второй операнд должен быть представлен транспарантом, то рассмотрим классическую операцию негативной фоторегистрации: пусть имеется негативная регистрирующая среда, экспозиционная характеристика которой, т.е. зависимость пропускания от экспозиции $\tau(Exps)$ удовлетворяет набору аксиом (8.2 – 8.4) в следующей форме:

$$\tau(Exps): [0,1] \rightarrow [0,1], \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \tau(0) &= 1 \\ \tau(1) &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\forall a, b \in [0,1]; a \geq b \Leftrightarrow \tau(a) \leq \tau(b). \quad (8.11)$$

Строго говоря, в левых частях (8.9) и (8.10) должен быть интервал экспозиций $[Exps_{min}, Exps_{max}]$, но для простоты и без потери общности мы приняли, что экспозиции нормированы на максимальное $Exps_{max}$ и минимальное $Exps_{min}$ значения рабочего участка динамического диапазона.

Аксиомы (8.9 – 8.11) в логике определяют операцию отрицания N , т.е. экспозиционная характеристика негативной регистрирующей среды реализует логическую операцию отрицания $\forall a \in [0,1]: \tau(a) = N(a)$. Тогда закон де Моргана (8.7) дает нам конструктивное определение операции сложения (дизъюнкции)

$$\forall a, b \in [0,1]; a \oplus b = N^{-1}[N(a) \cdot N(b)], \quad (8.12)$$

где N^{-1} – операция, обратная отрицанию. Но физически мы имеем лишь саму операцию отрицания $\tau(a) = N(a)$, реализация обратной операции физически, как правило затруднена, хотя и это иногда и возможно аналитически. Если экспозиционную характеристику можно принять линейной, т.е. $\tau(a) = N(a) = 1 - a$, то она удовлетворяет определению инволюции $\tau(\tau(a)) = N(N(a)) = 1 - (1 - a) = a$, имеем операцию сложения

$$a \oplus b = 1 - [(1 - a) \cdot (1 - b)] = a + b - ab = \hat{a+b}, \quad (8.13)$$

т.е. алгебраическую сумму и вероятностную логику. Если экспозиционная характеристика регистрирующей среды нелинейна, то дизъюнкция будет уже не алгебраической суммой и логика не вероятностная, а какая-то иная.

Эта алгебра реализуется оптической схемой, приведенной на рис. 8.1. В этой схеме и логике имеет место поточечное соответствие между операндами и результатом, а по определению 8.5 – это многозначная логика.

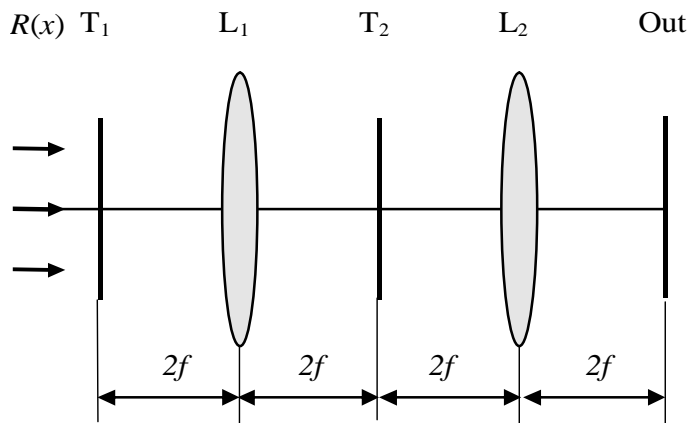


Рис. 8.1. Схема дизъюнкции в приближении геометрической оптики. $R(x)$ – плоский волновой фронт, T_1, T_2 – транспаранты, представляющие отрицания операндов, L_1, L_2 – проецирующие линзы, Out – выходная плоскость, в которую помещена негативная регистрирующая среда

8.1.3. Связь меры на алгебре с операцией, задающей дуальность

Важный инструмент познания мира – измерение. Измеримость модели означает наличие в ней меры. При этом мера должна быть не произвольной, не такой, какая нам нравится или нам удобна, а адекватной модели. Например, классическая вероятность по Колмогорову – аддитивная мера на алгебре событий. Она удобна, к ней все привыкли, она математически хорошо разработана, но оказалось, что она неадекватна квантовому миру и была разработана квантовая теория вероятности [7-9], а затем и обобщающая их некоммутативная теория вероятности.

Рассмотрим вопрос определения меры на алгебре, следуя подходу, предложенному в [10]. Определим меру как положительную неубывающую оценку g на решетке $[O, U]$ следующим набором аксиом:

$$g:[O,U] \rightarrow \mathbb{R}^+ , \quad (8.14)$$

$$\begin{cases} g(O) = 0 \\ g(U) = G \end{cases} , \quad (8.15)$$

$$\forall A, B \in [O, U]: A \geq B \Leftrightarrow g(A) \geq g(B) , \quad (8.16)$$

$$\forall A, B \in [O, U]: g(A \odot B) \bullet g(A \oplus B) \Leftrightarrow g(A) \bullet g(B) , \quad (8.17)$$

где \bullet – абстрактная, не определенная пока операция. Если \bullet – арифметическое сложение $+$, то имеем аддитивную меру. Вопрос определения меры, таким образом, сводится к вопросу определения этой операции \bullet . Для этого введем понятие аддитивного генератора φ операции, определив его следующим образом:

$$\varphi: [O, U] \rightarrow [0, +\infty) , \quad (8.18)$$

$$\begin{cases} \varphi(O) = 0 \\ \varphi(U) = \Phi \end{cases} , \quad (8.19)$$

$$\forall A, B \in [O, U]: A \geq B \Leftrightarrow \varphi(A) \geq \varphi(B) , \quad (8.20)$$

$$\forall A, B \in [O, U]: \varphi(A \bullet B) = \varphi(A) + \varphi(B) . \quad (8.21)$$

Тогда операция \bullet определяется таким образом:

$$A \bullet B = \varphi^* [\varphi(A) + \varphi(B)] , \quad (8.22)$$

где φ^* – псевдоинверсный образ генератора, определяемый через инверсный φ^{-1} следующим образом:

$$A \in [0, \varphi(U)] \Rightarrow \varphi^*(A) = \varphi^{-1}(A) \quad (8.23)$$

$$A \geq \varphi(U) \Rightarrow \varphi^*(A) = U$$

Допустим, что для каждого элемента алгебры имеется дополнение в смысле операции \oplus , т.е. для дополнения актуален закон исключенного третьего

$$\forall A \in [O, U]: A \oplus \bar{A} = U . \quad (8.24)$$

Примем, что в алгебре выполняется также закон непротиворечивости, т.е. из (8.24) следует

$$\forall A \in [O, U]: A \odot \bar{A} = O . \quad (8.25)$$

Здесь отметим, что если речь идет о физически реализуемой алгебре, т.е. об алгебре, порождаемой реальным физическим устройством или процессом, то требование на совместное выполнение законов непротиворечивости и исключенного третьего часто может быть снято в силу физической несовместности результатов операций умножения и сложения. Например, в схеме рис.8.1 мы не можем одновременно получить результат и сложения, и умножения. Тогда (8.17) примет вид

$$g(A \oplus \bar{A}) = g(A) \bullet g(\bar{A}) = g(U) = G .$$

Для большей наглядности абстрактных построений привяжем их к физической реальности – к рассмотренной выше алгебре, порождаемой процессом негативной фоторегистрации и реализующей её схеме (рис.8.1). В этом случае с учетом нормировки в рабочий диапазон $O=0$ и $G=1$, т.е.

$$g(A) \bullet g(\bar{A}) = 1 .$$

Обозначим $g(A) = A$ и $g(\bar{A}) = N(A)$. Очевидно, что $N(A)$ – это монотонно невозрастающая функция с граничными условиями

$$\begin{cases} N(0) = 1 \\ N(1) = 0 \end{cases} ,$$

т.е. функция, удовлетворяющая аксиоматическому определению операции отрицания как частному случаю операции, задающей дуальность. Тогда

$$\varphi(g(A) \bullet g(\bar{A})) = \varphi(g(A)) + \varphi(g(\bar{A})) = \varphi(G) = \Phi$$

$$\varphi(A \bullet N(A)) = \varphi(A) + \varphi(N(A)) = \varphi(1) = 1$$

Отсюда следуют два важных вывода.

1. Мера на алгебре порождается операцией, задающей дуальность определяющих модель операций, в нашем случае – операцией отрицания

$$N(A) = \varphi^*(1 - \varphi(A)). \quad (8.26)$$

Эти операции имеют один и тот же аддитивный генератор, но операция, задающая дуальность, для нас первична в том смысле, что определяется физической реальностью, поэтому с физической точки зрения именно она задает аддитивный генератор (другое дело, что для того, чтобы найти аналитическое выражение для аддитивного генератора, надо решить обратную задачу, а это задача в общем случае далеко не тривиальная).

2. Мера аддитивна только тогда, когда операция, задающая дуальность, линейна (а последняя линейна только если она имеет линейный генератор).

8.1.4. Анализ алгебры многозначной логики

Применим этот аппарат к физически обоснованной многозначной логике, построенной нами в разделе 8.1.2. Пусть аддитивный генератор линейен, т.е. $\varphi(A) = A$. Тогда имеем линейное отрицание

$$N(A) = \varphi^*(1 - \varphi(A)) = 1 - A. \quad (8.27)$$

Соответственно, линейный генератор дает нам арифметическое сложение как операцию, определяющую меру – получаем аддитивную меру, т.е. классическую вероятность:

$$\begin{aligned} g(A) \bullet g(B) &= g(A) + g(B) \\ g(A \wedge B) + g(A \vee B) &= g(A) + g(B) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Проверим, выполняется ли в этой алгебре сделанное выше допущение о наличии дополнения в смысле операции абстрактного сложения

(дизъюнкции), здесь – алгебраического суммирования $\hat{+}$. Должно выполняться определение дополнительного элемента

$$\forall A \in [0,1]; A \hat{+} \bar{A} = A + \bar{A} - A \cdot \bar{A} = 1, \quad (8.29)$$

но нетрудно видеть, что $\forall A \in [0,1]: \bar{\bar{A}} = \frac{1-A}{1-A} = 1$, т.е. имеем элемент,

который по определению есть аннигилятор относительно операции сложения и, что важно, булевый элемент. Дополнение есть только для $A=0$, т.е. для другого булевого элемента.

Проверим теперь операцию отрицания в части выполнения законов исключенного третьего и непротиворечивости. Закон исключенного третьего,

$$\forall A \in [0,1]; A \hat{+} N(A) = A + (1-A) - A(1-A) = 1, \quad (8.30)$$

как можно видеть, имеет силу только для булевых элементов $A=0$ и $A=1$.

Закон непротиворечивости

$$\forall A \in [0,1]; A \cdot N(A) = A(1-A) = 0 \quad (8.31)$$

также выполняется только для булевых элементов модели $A=0$ и $A=1$.

Таким образом, в многозначной логике нет дополнения – отрицание, часто называемое дополнением, таковым не является, и не выполняются законы непротиворечивости и исключенного третьего.

8.1.5. Алгебра, порождаемая приближением дифракционной оптики – алгебра фурье-дуальных операций

Зададимся вопросом – какая из операций, специфичных для дифракционной оптики, удовлетворяет аксиоматическому определению операции, задающей дуальность (8.2) – (8.5)? Наш курс мы начали с изучения преобразования Фурье – подходит ли оно на эту роль?

Аксиомы ограниченности (8.3) соответствуют свойству преобразования Фурье

$$\begin{cases} F(\delta(x_0)) = R(v) \cdot \exp(j2\pi vx_0) \\ F(R(v) \cdot \exp(j2\pi vx_0)) = \delta(x_0) \end{cases}, \quad (8.32)$$

где δ -функция описывает точечный источник, а R – плоский волновой фронт. Отсюда имеем

$$\begin{cases} \delta = O \\ R = U \end{cases}. \quad (8.33)$$

Рассмотрим актуальность аксиомы монотонности (8.4). Начнём для наглядности с простейшего примера – функции Гаусса $g(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2x_0^2}\right)$, здесь x_0 – параметр, задающий полуширину функции по уровню 0.606 её максимального значения. Фурье-образ функции Гаусса $F(g(x)) = G(v)$

$$G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2x_0^2}\right) \cdot \exp(-j2\pi vx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2x_0^2} + j2\pi vx\right)\right) dx.$$

Дополним подэкспоненциальное выражение выше до квадрата суммы:

$$\left(-\left(\frac{x^2}{2x_0^2} + j2\pi vx\right)\right) = \left[-\left(\left(\frac{x^2}{2x_0^2} + j2\pi vx + z^2\right) - z^2\right)\right] = \left[-\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}x_0} + z\right)^2 - z^2\right)\right],$$

где $z = j2\pi vx_0 / \sqrt{2}$. Введем новую переменную $y = \frac{x}{\sqrt{2}x_0} + z$ и получим

$$G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(2\pi vx_0)^2}{2}\right) \exp(-y^2) dy = \sqrt{2}x_0 \exp\left[\frac{-(2\pi vx_0)^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy.$$

Последний интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}$. Таким образом, фурье-образ

функции Гаусса – тоже функция Гаусса [11]

$$G(v) = \sqrt{2\pi}x_0 \exp\left[\frac{-(2\pi vx_0)^2}{2}\right] = \sqrt{2\pi}x_0 \exp\left[\frac{-v^2}{2v_0^2}\right], \quad (8.34)$$

где параметры функции и её фурье-спектра связаны следующим образом

$$v_0 = \frac{1}{2\pi x_0}. \quad (8.35)$$

Именно последнее выражение (7.35) и интересует нас как частный случай аксиомы монотонного невозрастания (8.4).

Достаточно очевидно из определения преобразования Фурье (тема 1), что аксиома монотонности (8.4) правомочна для любой унимодальной функции и её фурье-образа – аналитическое выражение, связывающее полуширину функции и её спектр амплитуд, будет отличаться от (8.35), но обратная зависимость будет иметь место. Но изображение, как и картина распределения нейронной активности, – не унимодальная функция, но мультимодальная, а для мультимодальной функции применить наш подход «в лоб» нельзя.

Для решения этой проблемы вспомним, что фурье-образ даже действительной функции – функция комплексная, в спектре $F(v)$ можно выделить спектр амплитуд $F_{Ampl}(v) = \sqrt{(\operatorname{Re}(F(v)))^2 + (\operatorname{Im}(F(v)))^2}$ и спектр

фаз $F_{Phase}(v) = \arctg \frac{\operatorname{Im}(F(v))}{\operatorname{Re}(F(v))}$. Первый представляет разрешение

изображения, условно говоря, размер его элементов разрешения, а последний отвечает за «растаскивание» элементов разрешения по пространственной координате – если сделать спектр фаз постоянным, то

все элементы разрешения соберутся вместе в точке с координатой, определяемой значением постоянного спектра фаз, и получим унимодальное распределение. Таким образом, для изображения как мультимодального распределения аксиома монотонности связывает полуширину спектра амплитуд с размером его элемента разрешения.

Но работать с элементом разрешения практически не очень удобно. Поэтому используем другой подход – корреляционный, основанный на том, что функция корреляции связана со спектром мощности преобразованием Фурье (1.14). Тогда аксиома монотонности (8.4) связывает полуширины спектра мощности (или амплитуд) и глобального максимума автокорреляционной функции (ГМ АКФ) в следующей форме:

$$\forall A(x), B(x) \in \Omega(X):$$

$$F_{\alpha}(A(x)) \geq F_{\alpha}(B(x)) \Leftrightarrow (A(x) \otimes A(x))_{\beta} \leq (B(x) \otimes B(x))_{\beta}, \quad (8.36)$$

где α и β – уровни измерения полуширины. Можно видеть, что (8.36) задает порядок (корреляционный) на решетке элементов модели $[O, U]$:

$$\forall A(x), B(x) \in \Omega(X); A(x) \succ B(x) \Leftrightarrow (A(x) \otimes A(x))_{\beta} \geq (B(x) \otimes B(x))_{\beta}. \quad (8.37)$$

Более того, радиус ГМ АКФ может использоваться и как мера на алгебре, поскольку удовлетворяет аксиоматическому определению меры (8.14) – (8.17).

В качестве операции **абстрактного умножения** примем, как и ранее, физически реализуемое алгебраическое произведение. Тогда закон де Моргана дает нам свертку как **абстрактное сложение**, фурье-дуальное алгебраическому произведению – видим, что прямая теорема свертки есть ни что иное, как частный случай закона де Моргана.

Проверим, действительно ли свертка удовлетворяет аксиоматическому определению сложения (определение 8.4). Согласно определению 8.4 нейтральный по сложению элемент – $E(x)=O(x)$, здесь, согласно (8.33) $O(x)=\delta(x_0)$, а согласно фильтрующему свойству дельта-функции, её свертка с любой функцией дает эту же функцию, смещенную в соответствии со смещением дельта-функции x_0 :

$$\forall f(x): f(x) * \delta(x_0) = f(x + x_0).$$

Конструктивно определим операцию вычитания на алгебре. Аксиоматически операция вычитания определяется как сложение с аддитивно противоположным элементом

$$A(x) \ominus B(x) = A(x) \oplus B(-x).$$

Если операнды комплекснозначимые, то должны быть изменены знаки и обоих аргументов – по действительной и мнимой осям. Тогда имеем

$$A(x) \oplus B(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) B^*(\Delta - (-x)) dx \Big|_{z = \Delta + x} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(z - \Delta) B^*(z) dz = Corr_{AB}(-\Delta)$$
(8.38)

т.е. операция корреляции в алгебре фурье-дуальных операций имеет смысл вычитания. Проверим это на простейшем примере:

$$\forall A(x) \in [O, U]; A(x) \otimes A(x) = \delta(-\Delta) = O(-\Delta).$$

Всё верно, так как ГМ АКФ – не что иное, как дифракционно-ограниченное изображение точечного опорного источника, т.е. наименьший, он же – аддитивно-нейтральный элемент алгебры.

8.1.6. Реализация алгебры фурье-дуальных операций - построение последовательности элементов модели методом голографии Фурье.

Пусть в схеме рис.8.2.а голограмма записывается с эталона $A_1(x)$ с опорным источником $\delta(x_0)$. Предъявление во входной плоскости эталона $A_1(x)$ даст в +1 и -1 порядках дифракции, соответственно:

$$A_1(x) \oplus A_1(x) = A_1(x) * A_1(x) = A_2(x - x_0)$$

$$A_1(x) \ominus A_1(x) = A_1(x) \otimes A_1(x) = A_{1-1}(x_0 - x) = \delta(x_0),$$
(8.39)

здесь мы для простоты в результате вычитания ограничились только областью ГМ АКФ.

При предъявлении во входной плоскости опорного источника $\delta(x_0)$

$$A_1(x) \oplus \delta(x_0) = A_1(x)$$

$$\delta(x_0) \ominus A_1(x) = A_1(2x_0 - x)$$
(8.40)

т.е. δ -функция действительно удовлетворяет аксиоме аддитивного нуля.

Многократное применение обращения волнового фронта в плоскостях входной и корреляций (сверток), дает последовательность элементов модели как с положительным индексом, так и с отрицательным:

$$A_n(x) \oplus A_1(x) = A_1(x) * A_1(x) = A_n(x - nx_0)$$

$$A_n(x) \ominus A_1(x) = A_n(x) \otimes A_1(x) = A_{n-1}(x_0 - nx)$$
(8.41)

т.е. схема фурье-голографии и, в частности, широко распространенная архитектура оптической НС «голографический коррелятор в линейном резонаторе» корректно относительно операций сложения и вычитания реализуют ось элементов модели, полностью соответствуя первоначально предложенным для натурального числового ряда аксиомам Пеано. Эталонное изображение, с которого записана голограмма, выступает в качестве первого (ненулевого) элемента модели. Аксиома индукции при этом ограничена информационной емкостью системы и (в зависимости от выбранной схемы) угловой инвариантностью голограммы. На рис.8.2 схематически изображена реализация оси элементов модели.

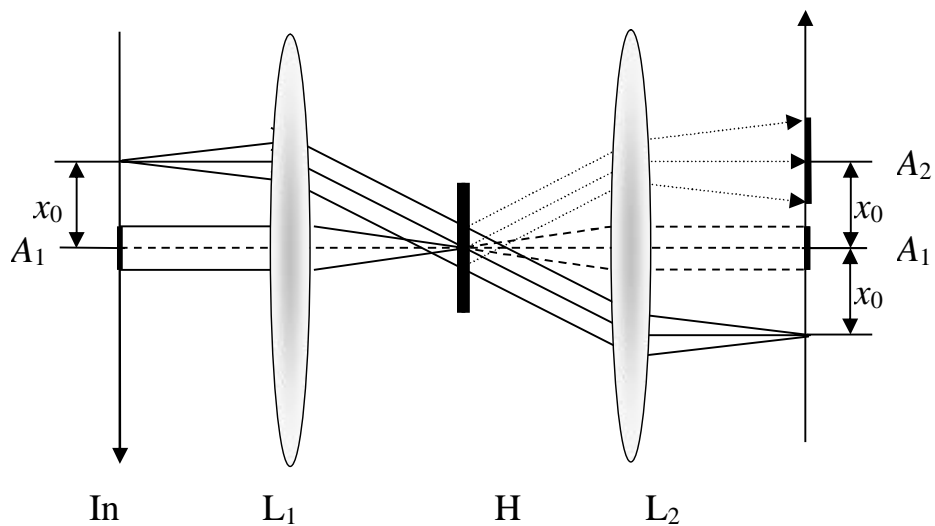


Рис.7.2.а. Реализация нулевого δ , первого и второго элементов модели

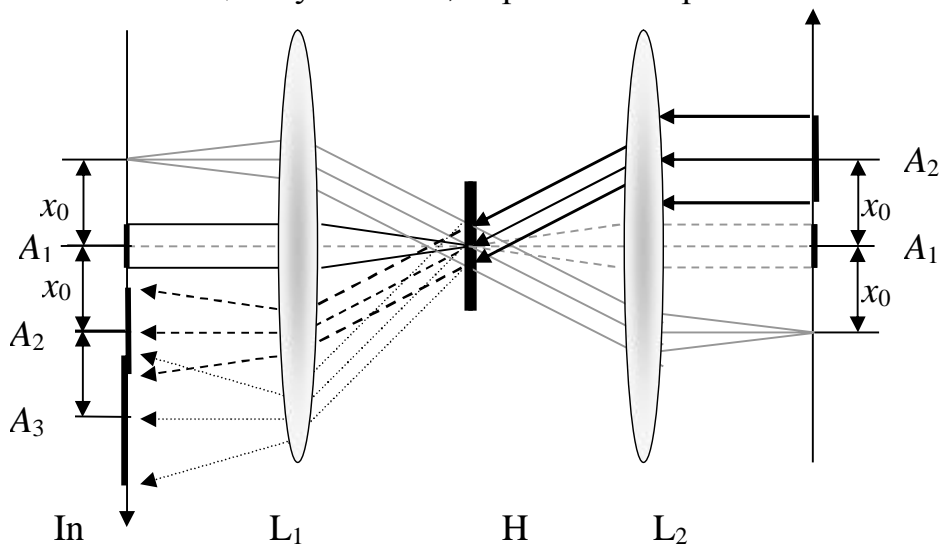


Рис.7.2.б. Реализация первого, второго и третьего элементов модели при обращении волнового фронта в плоскости С

Литература к разделу 8.1.

1. Глезер В.Д. О роли пространственно-частотного анализа, примитивов и межполушарной асимметрии в опознании зрительных образов // Физиология человека. 2000. Т. 26. №5. С. 145-150.
2. Глезер В.Д. Согласованная фильтрация в зрительной системе // Оптический журнал. 1999. Т.66. № 10. С. 10 – 14.
3. Алексеенко, С.В. Архитектура связей в зрительной коре и зрительное опознавание // Оптический журнал. 1999. – Т. 66, № 10. – С. 52-54.
4. Krasilnikov N.N. , Krasilnikova O.I. Matched Spatial Filtering Object Images in the Human Visual System // In: Proceedings of the 2019 WECONF. – St.Petersburg: St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; IEEE. – 2019. DOI: 10.1109/WECONF.2019.8840630
5. Заде Л., Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений // Математика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1976, вып.3.

6. *Аверкин А.Н. и др.*, под ред. Д.А.Поспелова, Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта – М.: Наука, 1986.

7. *И. фон Нейман* Математические основы квантовой механики. Пер. с нем. 1932. – М.: Наука, 1964. – 367 С.

9. *Холево А.С.* Квантовая вероятность и квантовая статистика // Итоги науки и техн. Сер.: Совр. пробл. мат. Фунд. напр. 1991. – Т.83. – С. 5-132.

9. *Хренников А.Ю.* Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. – М.: Физматлит., 2003.– 208 с. – ISBN 5-94052-060-7

10. *Трильяс Э., Альсина К., Вальверде А.* Нужны ли в теории нечетких множеств операции MAX, MIN и 1-j? // В кн. "Нечеткие множества и теория возможностей" под ред. Р.Р. Ягера. - М.: 1986. – С. 199-228.

11. *Мирошников М.М.* Теоретические основы оптико-электронных приборов. – Л.: Машиностроение, 1977. – 600 с.

8.2. Нечеткая логика

8.2.1. Основные понятия и определения теории нечетких множеств

Выше, в определении 8.2, мы задали элементы модели посредством (8.1), упомянув, что этим мы фактически определили их как нечеткие множества (НМ). Ниже дадим краткие сведения из теории НМ (ТНМ), играющей роль математического фундамента нечетких логик [1,2].

Определение 8.2.1 НМ $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$ этих элементов x этому НМ или, поскольку функция принадлежности $\mu_A(x)$ – исчерпывающая характеристика НМ, непосредственно функцией $\mu_A(x)$

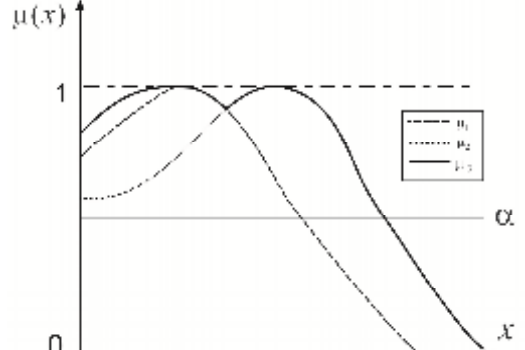
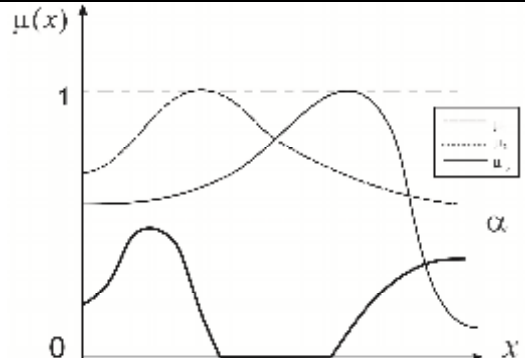
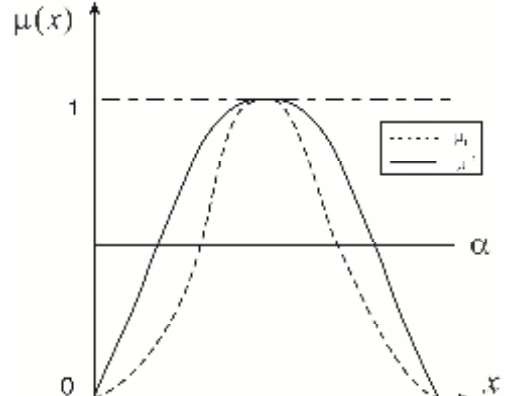
$$\mu: X \rightarrow [0,1].$$

Операции над НМ из класса всех НМ $\Omega(X) = \{\mu | \mu: X \rightarrow [0,1]\}$, как следует из определения 8.2.1., определяются над функциями принадлежности и могут вводиться разными способами. Ниже, в Табл.8.1, приведены некоторые из операций, ставших уже классическими в ТНМ.

Табл.8.1. Некоторые операции над нечеткими множествами

Название	Запись	Связка	Графическое представление
Дополнение (на самом деле это – псевдодополнение)	$\mu_3(x) =$ $\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$ $\forall x \in X$	НЕ	

Пересечение I – MIN	$\mu_3(x) = (\mu_1(x) \wedge \mu_2(x)) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	И	
Объединение I – MAX	$\mu_3(x) = (\mu_1(x) \vee \mu_2(x)) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	ИЛИ (ЛИБО ... , ЛИБО)	
Пересечение II – ограниченное произведение	$\mu_3(x) = (\mu_1(x) \wedge \mu_2(x)) = \max\{0, \mu_1(x) + \mu_2(x) - 1\}$ $\forall x \in X$	И	
Объединение II – ограниченная сумма	$\mu_3(x) = (\mu_1(x) \vee \mu_2(x)) = \min\{1, \mu_1(x) + \mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	ИЛИ	
Пересечение III – алгебраическое произведение	$\mu_3(x) = (\mu_1(x) \cdot \mu_2(x)) = \mu_1(x) \cdot \mu_2(x)$ $\forall x \in X$	И	

Объединение III алгебраическая сумма	$\mu_3(x) = \mu_1(x) \vee \mu_2(x) =$ $= \mu_1(x) + \mu_2(x) -$ $- \mu_1(x)\mu_2(x)$ $\forall x \in X$	ИЛИ	
Разность	$\mu_3(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x) =$ $= \max\{0, \mu_1(x) - \mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$		
Концентрирование	$\mu_3(x) = \mu^2(x)$ $\forall x \in X$	Очень	

Приведем основные понятия ТНМ [2]:

Определение 8.2.2 (Нормальность) НМ A нормально, если верхняя граница его функции принадлежности равна единице, т.е. $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$.

Если $\sup_{x \in X} \mu_A(x) < 1$, то НМ называется субнормальным.

Определение 8.2.3. НМ пусто, если $\mu_A(x) = 0; \forall x \in X$.

Определение 8.2.4. Множеством уровня α (α -срезом) называется четкое подмножество универсального множества X , определяемое

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}; \alpha \in [0, 1]$$

Определение 8.2.5. Саппорт НМ определяется как множество уровня 0.

Определение 8.2.6. НМ A называется выпуклым тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары точек x, y из X выполняется условие

$$\forall \lambda \in [0, 1]; \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)).$$

8.2.2. Понятие логико-лингвистического моделирования (ЛЛМ)

Определение 8.2.6. Прочитируем предложенное Л.Заде [1] определение лингвистической переменной (ЛП) как набора $\langle Y, T_m(Y), X, G, M \rangle$, где Y – название ЛП, $T_m(Y)$ – терм-множество, X – универсальное множество, G – синтаксическое правило, порождающее термы множества $T_m(Y)$, M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению Y ставит в соответствие его смысл $M(Y)$, причем $M(Y)$ обозначает нечеткое подмножество множества X .

Нетрудно видеть, что адекватная схеме голографии Фурье алгебра есть алгебра нечеткозначимой логики, множество элементов модели есть решетка нечетких множеств. Соответственно, метод ЛЛМ Заде может быть реализован на этой алгебре и методом голографии Фурье при представлении смысла входных ЛП посредством НЧ. Однако обратим внимание, что модель не запрещает представление смысла ЛП любым изображением A и не накладывает ограничений, обычно накладываемых на множества, представляющие смысл ЛП (нормальность, унимодальность и выпуклость). Но в рамках такого подхода возникает проблема интерпретации. Интерпретация смысла, представленного унимодальным множеством очевидна, но интерпретация смысла, представленного многомодальным множеством ведет к ... неоднозначности.

Для наглядности изложения предложенного подхода к решению проблемы интерпретации рассмотрим его на примере реализации композиционного правила вывода «Обобщенный Modus Ponens», связывающего набор входных ЛП с одной выходной ЛП (заключением). Используем классический пример вывода «Если яблоко большое и красное, то оно хорошее». Традиционный подход предполагает представление значения смысла ЛП нечеткими числами (рис.8.3.)

Проблема интерпретации может быть разделена на две:

1. Интерпретация смыслов входных ЛП, представленных в соответствии с требованием на биологическую мотивированность в виде изображений – аналогов ПВР, которые обозначим A_{in} ;

2. Интерпретация смысла логического заключения A_{Out} .

Примем достаточно очевидное с практической точки зрения условие, что заключение, формируемое системой A_{Out} , должно удовлетворять требованиям к НЧ, в первую очередь – требованию на унимодальность.

Рассмотрим для наглядности следующий условный пример, связывающий четыре входных ЛП (цвет, размер, свежесть и вкус) и одну выходную – качество:

Если яблоко красное, большое, сочное и вкусное, то оно хорошее.

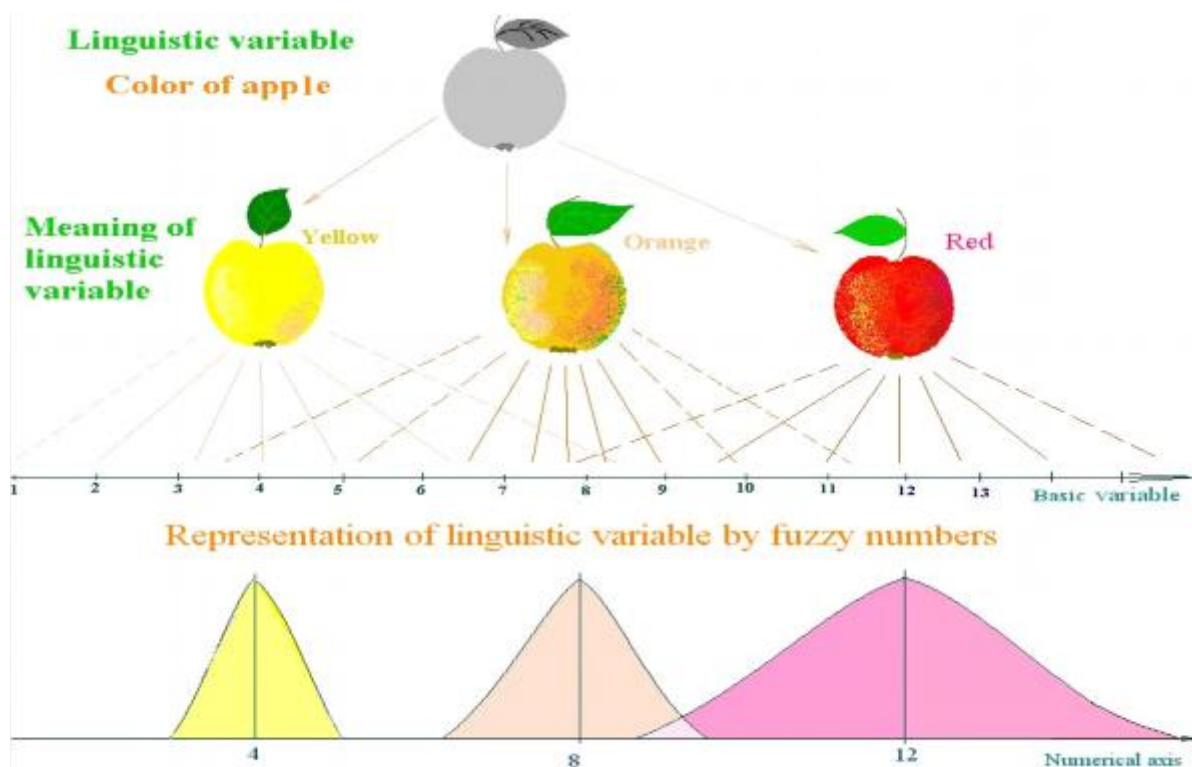


Рис.8.3. Представление значений смысла ЛП посредством НЧ.

Эталонные значения входных ЛП представим реализацией фрактального броуновского движения (ФБД) размерностью 1024×1024 со значением параметра Хёрста $H=0.1$. Эталонное значение выходной ЛП «хорошее» представлено НЧ 4. Каждой ЛП присвоим свою область изображения, размер которой определялся экспертом в соответствии с субъективной оценкой важности соответствующей ЛП. Текущее значение каждой ЛП задается, согласно, (8.36) и (8.37), изменением параметра спектра амплитуд в этой области.

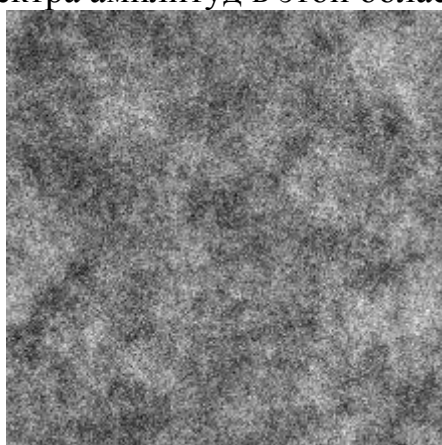


Рис.8.5.а. Эталонное изображение

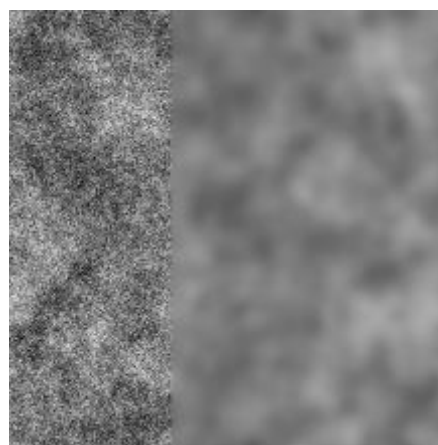


Рис.8.5.б. Изображение, представляющее две ЛП

Изображение, использованное для записи голограммы, представляет набор значений входных ЛП, который, по мнению эксперта, соответствует значению выходной ЛП «самое плохое яблоко» (A_1). Оно получено из

эталонного изображения применением операции «увеличение резкости» (рис.8.5.а.). Применением этих операций к отдельным фрагментам получены еще три паттерна, представляющие, по мнению эксперта, различные образцы качества яблок (рис.8.5.б.).

С изображения A_1 в схеме рис.8.1. записаны три голограммы, отличающиеся условиями экспозиции. На рис.8.6. приведены сечения дифракционной эффективности этих голограмм. На рис.8.7. приведены значения ширины откликов по уровню 0.5, полученных от каждой из голограмм в +1 порядке дифракции схемы рис.8.1. Таким образом, шкала значений ширины откликов по уровню 0.5 есть выходная шкала.

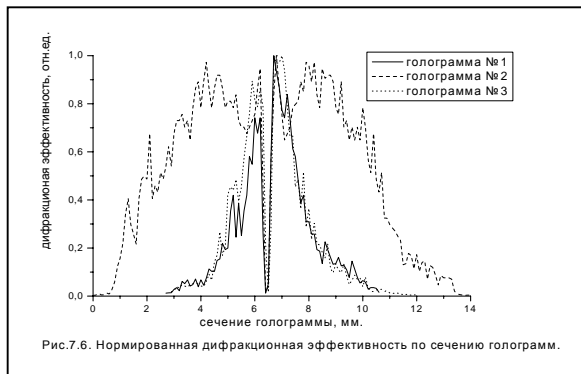


Рис.8.6. Сечения дифракционных эффективностей трех голограмм.

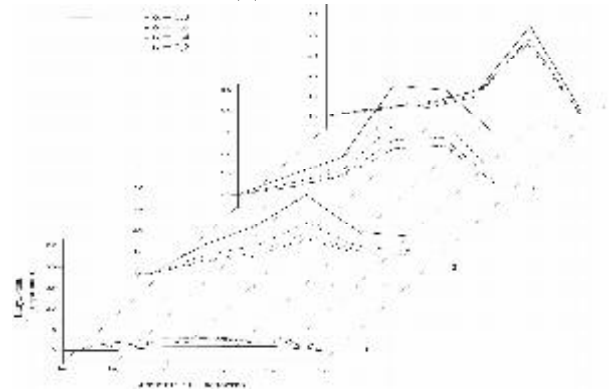


Рис.8.7. Градуировочные кривые для трех голограмм

Из рис.8.7. видно, что каждая голограмма формирует свою зависимость между выходной метрической шкалой (ось Y) и одинаковым для всех голограмм набором значений входных ЛП, условно размещенных по оси X. Таким образом, выбор условий записи голограмм позволяет реализовать принцип субъективности градуировки лингвистических шкал. Действительно, в рамках использованного примера два эксперта совершенно по-разному могут оценить качество одного и того же яблока, даже соглашаясь в оценке текущих значений каждой из описывающих его ЛП.

Обратим внимание, что эти кривые иллюстрируют свойство логики, аналогичное человеческому – «слишком спелое» яблоко воспринимается уже как переспелое, его оценка снижается. Иногда снижается очень резко: переспелое яблоко – это испортившееся яблоко.

Литература к Теме 8.2.

1. *Заде Л.*, Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений // Математика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1976. – вып.3.
2. *Аверкин А.Н.* и др., под ред. Д.А. Поспелова, Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта – М.: Наука, 1986.

Вопросы для самопроверки по теме 8

1. Что такое нечеткое множество? Как его можно определить математически?
2. Что такое функция принадлежности – принадлежность чего чему она описывает?
3. Как соотносятся классическое и нечеткое множество – эти понятия противоречат друг другу, исключают друг друга или одно обобщает другое?
4. Какие операции над нечеткими множествами изначально предложил Л.Заде? Как они соответствуют операциям классической теории множеств?
5. Какие виды логик Вы знаете?
6. Как соотносятся классическая и нечеткая логики – эти понятия противоречат друг другу, исключают друг друга или одно обобщает другое?
7. Что такое истинностное отображение? Как с его помощью можно классифицировать логики?
8. Что такое лингвистическая переменная по Л. Заде?
9. Что такое терм-множество?
10. Как Л. Заде предложил представлять смысл значения лингвистической переменной?
11. Что такое нечеткое число, как его определить?
12. Что такое алгебра логики?
13. Дайте аксиоматическое определение операции абстрактного сложения.
14. Дайте аксиоматическое определение операции абстрактного умножения.
15. Что такое дуальность определяющих модель операций?
16. Дайте аксиоматическое определение операции, задающей дуальность определяющих модель операций.
17. Как свойство дуальности определяющих модель операций позволяет расширить когнитивные возможности?
18. Как в абстрактной алгебре определяется операция вычитания (абстрактного)?
19. Какая операция задает меру на алгебре?
20. Что такое аддитивный генератор операции?
21. Адекватна ли аддитивная мера алгебре с нелинейной операцией, задающей дуальность определяющих модель операций? Обоснуйте ответ.

Тема 9. Квантовые модели обработки информации и их реализация методом голографии Фурье

9.1. Квантовая логика и квантовая вероятность: общие замечания

Становление квантовой физики сопровождалось вынужденным и зачастую достаточно кардинальным пересмотром ряда классических понятий, постулатов и теорий, считавшихся до того незыблемыми. В частности, оказалось, что квантовому миру неадекватны ни булева логика, ни классическая (колмогоровская) теория вероятностей – пришлось разработать модели, называемые в настоящее время квантовой логикой [1] и квантовой вероятностью [2].

Состояние квантовой системы S описывается вектором в гильбертовом пространстве H , её свойства A, B, \dots – замкнутыми подпространствами A, B, \dots представляющими соответствующее свойство. Измерение свойства A в категориях «да – нет», т.е. наличия или отсутствия свойства, математически описывается отображением, ортогонально проецирующим вектор текущего состояния системы на подпространство A . Поэтому говорят также, что каждое свойство A представлено своим проектором (проекционным оператором) \hat{A} – самосопряженным оператором, проецирующим вектор состояния системы на подпространство A .

Поскольку наша задача – найти соответствия между квантовыми моделями и оптическими технологиями, то нам придется параллельно использовать разные формализмы.

Свойство A мы будем описывать:

- подпространством A , в котором представлено (описано) свойство;
- проекционным оператором \hat{A} , проецирующим вектор состояния системы на это подпространство;
- вектором \mathbf{A} ;
- полем комплексных амплитуд (образом, изображением) $A(x)$, для того, чтобы не загромождать выражения, там, где это возможно без потери корректности, будем представлять образ функцией одного аргумента.

В общем случае операторы не коммутируют, т.е. их коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$. Это важно, поскольку в квантовой логике [1] логические операции формализованы последовательным проецированием вектора состояния системы на подпространства, в которых представлены соответствующие операнды, и результат операции зависит от последовательности применения операторов.

В классической теории вероятности Колмогоров определил вероятность как аддитивную меру на алгебре событий [3]. В квантовой механике вероятность, согласно правилу Борна [4], определяется как скалярное произведение амплитуд вероятности:

$$\text{Pr}_\psi(B_{x,y}) = \psi(x, y)\psi^*(x, y), \quad (9.1)$$

где ψ – волновая функция частицы или амплитуда вероятности [4], астериск – символ комплексного сопряжения. Здесь для нас важно, что определение (9– .1) математически строго эквивалентно определению мощности (интенсивности), используемому в оптике. Таким образом, вероятность и мощность (интенсивность) как квадратичные меры строго эквивалентны.

С течением времени выяснилось, что эти модели адекватно описывают не только квантовый мир, но в ряде случаев и мир макросистем разной физической природы. В частности, оказалось, что они дают адекватное описание ряда феноменов, демонстрируемых такими макросистемами, как человеческий интеллект и социум. Именно такие феномены, часто называемые квантовыми или, что более корректно, квантово-подобными, мы и используем здесь для наглядности нашего рассмотрения.

9.2. Квантовые модели обработки информации: квантовая логика и её реализация методом голографии Фурье, нарушение классического закона вероятности для конъюнкции независимых событий

Для наглядности рассмотрим феномен на примере «Проблемы Линды», экспериментально обнаруженной А. Тверски и Д. Канеманом [5] в ходе экспериментальных исследований суждений в условиях неопределенности. Аналогичные результаты были получены затем и другими авторами: все они уверенно показали отклонение от «правильного», каким он на тот момент представлялся, результата рассуждений.

Суть феномена в том, что его участникам рассказывали о вымышленной персоне: «Линде – 31 год, она одинокая, откровенная и очень яркая, специализировалась в философии. В студенческие годы глубоко интересовалась вопросами дискриминации и социальной справедливости, участвовала в антиядерных демонстрациях», затем задавали вопрос – кем, по мнению респондента, является Линда? Предлагался список готовых ответов, из них нас в рамках обсуждаемого феномена интересуют только три, а именно:

1. активной феминисткой (F);
2. кассиром в банке (T);
3. активной феминисткой, работающей кассиром в банке ($F\&T$).

По результатам статистической обработки результатов вероятности этих ответов выстроились в порядке $\Pr(F) > \Pr(F\&T) > \Pr(T)$. Ответ №3 формально описывается как конъюнкция вариантов 1 и 2. Поскольку F и T независимы, то, согласно классической формуле вероятности произведения независимых событий [4]

$$\Pr(F \wedge T) = \Pr(F) \cdot \Pr(T) , \quad (9.2)$$

их совместная вероятность должна быть ниже, чем вероятности каждого из них по отдельности. Вместе с тем порядок $\Pr(F\&T) > \Pr(T)$, рассматриваемый для независимых событий в рамках классического подхода как грубая логическая ошибка, правомочен в квантовой логике, в

которой процедура логического вывода описывается последовательным проецированием вектора текущего состояния системы на подпространства, в которых описаны эталоны (Рис.9.1). Это дало основания применить квантовую логику к описанию гипотетического формального механизма феномена, т.е. без обращения к его физической или иной сути, [6, 7].

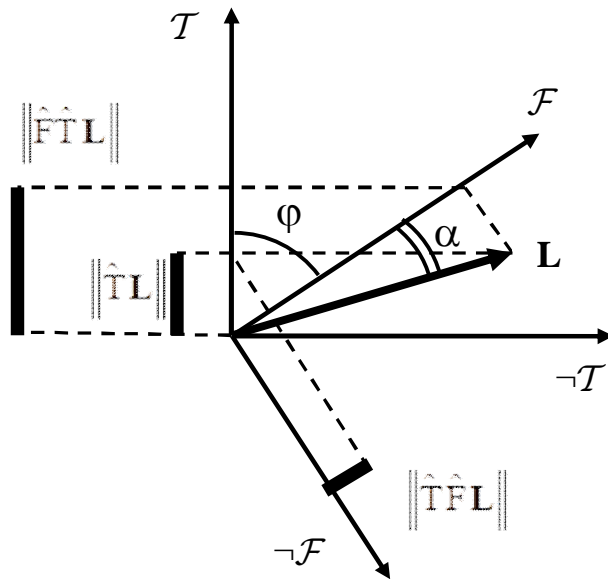


Рис.9.1. Принципиальная схема конъюнкции применительно к феномену «Линда» как последовательных проецирований вектора состояния L на подпространства F и T , представленные для простоты соответствующими осями; оси $\neg F$ и $\neg T$ представляют отрицание как ортодополнение

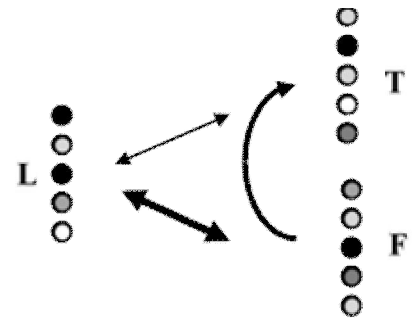


Рис.9.2. Сетевая модель феномена «Линда»: толщины линий между образами L , F и T соответствуют силе связей, возникающих при предъявлении системе, обученной эталонными образами F и T , образа L , дуга – связь F и T , не заданная явно при обучении

Представим входной образ «Линда» вектором L . В квантовой логике операции формализованы оператором проецирования, в нашем примере – вектора состояния системы L на подпространства F и T пространства состояний системы. Поскольку события F и T независимы, то вектор L проецируется на F и T последовательно, а результат зависит от порядка проецирования, что и демонстрирует рис.9.1: если вначале вектор L проецируется на более вероятное подпространство F , а уже затем вектор, описывающий состояние в F , на T , то вероятность ответа «Кассир» выше, чем если L проецируется сразу на подпространство T .

Рис.9.1 наглядно иллюстрирует результат того, что в квантовой логике операторы не коммутируют: мера суждения (конъюнкции) зависит от порядка проецирования вектора L , описывающего состояние системы по восприятию рассказа. Определим коммутатор для случая, представленного на рис.8.1. Пусть $\varphi = \angle FT$ и $\alpha = \angle LF$. Тогда коммутатор операторов

$$\begin{aligned} [\hat{F}, \hat{T}] &= \hat{F}\hat{T} - \hat{T}\hat{F} = \hat{F}\hat{T} - \hat{T}\hat{F} = \cos(\alpha + \varphi) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= \cos(\varphi) [\cos(\alpha + \varphi) - \cos(\alpha)] \neq 0 \end{aligned}$$

для любого $\varphi \neq 90^\circ$, т.е. для любых неортогональных подпространств – любых неортогональных образов в памяти.

Но некоммутативность сама по себе еще не квантовость, а каких-либо именно квантовых механизмов, стоящих за формальным квантово-логическим описанием [6,7], на сегодня однозначно не показано [8]. Поэтому, исходя из принципа минимальной простоты и достаточности объяснения (бритвы Оккама), целесообразен поиск реальных, т.е. биологически и физически обоснованных, классических механизмов феномена, что позволяет избежать обращения к фундаментальной проблеме интерпретации квантовой физики [9].

Представим реализацию этого механизма в виде сетевой модели, данной на рис.9.2. Каждый из образов $L(x)$, $F(x)$ и $T(x)$ описывает состояние некоторого образа: $L(x)$ описывает текущее состояние системы по восприятию информации (рассказа) о Линде, $F(x)$ и $T(x)$ – ранее запомненную информацию о соответствующих образах, которая хранится в сетевых связях: описываемых в подпространствах F и T матриц весов связей в нейросетях, голограмм в оптике и т.п.. Независимость $F(x)$ и $T(x)$ означает отсутствие связи между этими образами при обучении системы – каждый из них независимо от другого записан на своей голограмме.

Из рис.9.2 видно, что для реализации последовательного проецирования вектора состояния \mathbf{L} на подпространства F и T в первую очередь необходим механизм самостоятельного формирования сетью связи $F(x)$ и $T(x)$, показанной на рис.9.2 дуговой стрелкой. Затем эта связь должны быть использована для проецирования на подпространство F из T вектора, описывающего результат проекции \mathbf{L} на F. Искомая связь может быть создана известным механизмом формирования комбинационных частот, работающим и при нелинейной записи голограмм [10].

Определение (9.1) формально строго соответствует определению интенсивности в волновой физике, волновая функция $\psi(x,y)$ описывает поле комплексных амплитуд. Таки образом, мощность (интенсивность) математически строго эквивалентна вероятности как квадратичной мере.

Рассмотрим запись двух тонких, т.е. обладающих свойством угловой инвариантности, наложенных голограмм Фурье в $4f$ схеме с пространственным разнесением внеосевых точечных опорных источников согласно рис.9.3. Во избежание излишнего загромождения по возможности используем описание образов как функций только одной переменной x .

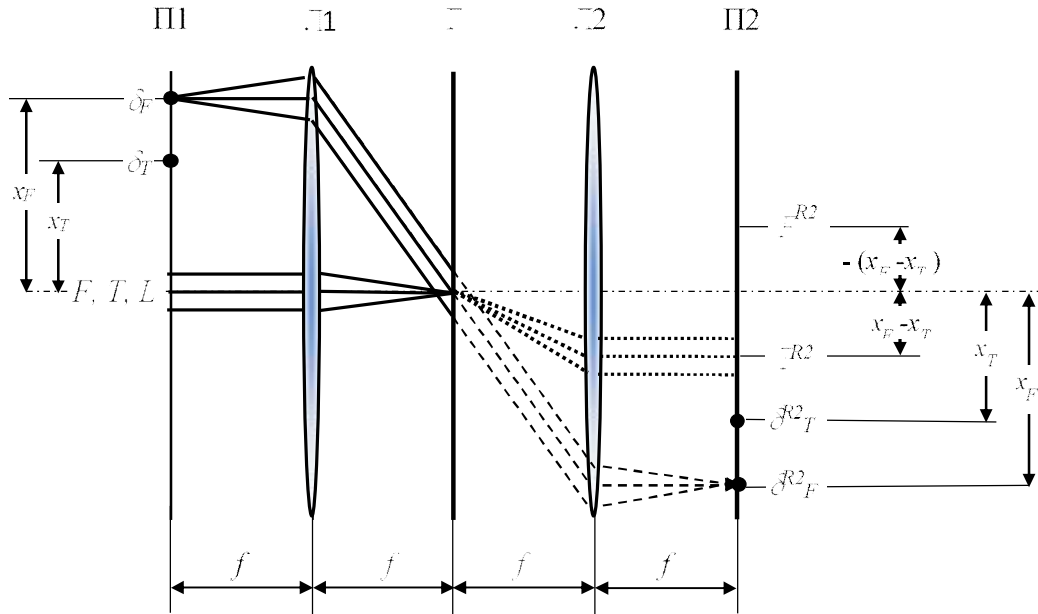


Рис.9.3. $4f$ схема голографии Фурье для двух наложенных голограмм: $F(x)$ и $T(x)$ – эталонные образы «Феминистка» и «Кассир», $L(x)$ – образ «Линда», предъявляемый записанной мультиплексной голограмме, δ_F и δ_T – внеосевые точечные источники, смещенные на x_F и x_T относительно главной оптической оси, соответственно, П1 – плоскость образов, Л1, Л2 – первая и вторая фурье-преобразующие линзы с фокусными расстояниями f , Г – плоскость голограммы, П2 – плоскость откликов голограммы. Штриховыми линиями дан ход лучей, дифрагировавших на наложенной голограмме «Феминистка» и восстанавливающих в плоскости П2 изображение опорного источника δ_F^{R2} , пунктирными – ход лучей, дифрагировавших на субголограмме, возникшей вследствие квадратичной нелинейности, и восстанавливающих образ «Кассир» $T^{R2}(x)$; во избежание излишнего загромождения ход лучей для наложенной голограммы «Кассир», восстанавливающей изображение источника δ_T^{R2} , не показан

При записи наложенных голограмм по схеме рис.9.3 в фурье-плоскости Г – задней фокальной плоскости первой фурье-преобразующей линзы Л1 формируются подлежащие записи на ГРС распределения интенсивностей:

$$I_F(v) \propto [R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x))] \cdot [R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x))]^*$$

$$I_T(v) \propto [R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x))] \cdot [R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x))]^* \quad , \quad (9.3)$$

где $v = \frac{\zeta}{\lambda f}$ – пространственная частота, ζ – пространственная

координата в фурье-плоскости Г, R_F и R_T – амплитуды плоских волновых фронтов, пропорциональные амплитудам точечных опорных источников, описываемых дельта-функциями $\delta_F(x)$ и $\delta_T(x)$, x_F и x_T – их координаты.

Примем, что нелинейная экспозиционная характеристика голографической регистрирующей среды (ЭХ ГРС) может быть представлена степенным рядом, ограничимся первыми двумя членами: линейным и квадратичным. Если формирование нелинейности ЭХ ГРС происходит после записи всех наложенных голограмм, то правомочно представление передаточной функции (для амплитудных ГРС – зависимости амплитудного пропускания от пространственной частоты) мультиплексной голограммы в следующем виде:

$$H(v) = \eta_1 \left\{ \left[R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x)) \right] \cdot \left[R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x)) \right]^* + \right. \\ \left. + \left[R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x)) \right] \cdot \left[R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x)) \right]^* \right\} + \\ + \eta_2 \left\{ \left[R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x)) \right] \cdot \left[R_F \cdot \exp(j\omega x_F) + F(F(x)) \right]^* + \right. \\ \left. + \left[R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x)) \right] \cdot \left[R_T \cdot \exp(j\omega x_T) + F(T(x)) \right]^* \right\}^2, \quad (9.4)$$

где η_1 и η_2 – коэффициенты при линейном и квадратичном членах разложения, зависящие от свойств ГРС. Далее для краткости компоненты (9.4), описываемые линейным членом, будем называть линейной голограммой (как частный случай линейной системы). Нас интересует квадратичный член. Его разложение (громоздкие выкладки опустим) дает, кроме прочих, также и два слагаемых, описывающих показанную на рис.9.2 дугой искомую связь между не связанными при записи голограммы (9.2) опорными источниками $\delta_F(x)$ и $\delta_T(x)$ и, при наличии угловой инвариантности, эталонными образами $F(x)$ и $T(x)$

$$H_{FT}(v) = \eta_2 \cdot \left\{ F^*(F(x)) \cdot F(T(x)) \cdot R_F \cdot R_T \cdot \exp(j\omega(x_F - x_T)) + \right. \\ \left. + F(F(x)) \cdot F^*(T(x)) \cdot R_F \cdot R_T \cdot \exp(-j\omega(x_F - x_T)) \right\}. \quad (9.5)$$

Выражение (9.5) описывает новую голограмму в составе мультиплексной голограммы (9.4), не записанную, но возникшую самостоятельно вследствие квадратичной нелинейности ЭХ ГРС; чтобы отличать её от наложенных голограмм, назовем её субголограммой. Именно эта субголограмма, возникшая в системе совершенно самостоятельно, без какого бы то ни было нашего участия, и связывает независимые подпространства F и T, в которых представлены ранее запомненные образы «феминистка» и «кассир». Эта связь представлена членами $\exp(j\omega(x_F - x_T))$ и $\exp(-j\omega(x_F - x_T))$, описывающими дифракционные решетки с пространственной частотой, соответствующей угловому расстоянию между опорными пучками при записи образов F и T

$$v^{(2)} = \frac{(x_F - x_T)}{\lambda f},$$

где цифра 2 в скобках в верхнем индексе указывает на степень нелинейности ЭХ ГРС.

Нас интересует образ, восстановленный схемой рис.8.3., работающей как голографическая ассоциативная память. Для этого в плоскость П2 помещается устройство обращения волнового фронта (фазо-сопрягающее зеркало), и тогда в плоскости П1 в обратном ходе лучей от плоскости П2 на главной оптической оси восстанавливается образ, содержащий оба образа: F и T . Аналитическое описание процедуры формирования этого образа в силу его громоздкости опустим, оно дано в [11], а здесь приведем только окончательный результат.

Оценим изменение отношения интенсивностей образов «Кассир» и «Феминистка» в итоговом образе вследствие действия субголограммы (8.5) относительно их отношения, обеспечиваемого линейной мультиплексной голограммой. Эта оценка имеет вид

$$V = \left(\frac{1 + c \cdot r_\eta \cdot R_F^2 \cdot R_T \cdot \langle T(x), F(x) \rangle}{1 + \frac{1}{c} r_\eta \cdot R_T^2 \cdot R_F \cdot \langle T(x), F(x) \rangle} \right)^2, \quad (9.6)$$

где $r_\eta = \frac{\eta_2^2}{\eta_1}$, $c = \frac{\langle L(x), F(x) \rangle}{\langle L(x), T(x) \rangle} > 1$, угловые скобки – символ скалярного

произведения. Поскольку по условиям эксперимента k много больше 1, то $V > 1$ и растет с ростом c . Иными словами, чем сильнее корреляция образа бедной Линды с несчастной феминисткой, тем сильнее в итоговом образе выделяется образ «Кассир» относительно образа «Феминистка».

Таким образом, имеем вполне классический механизм квантово-подобного феномена нарушения классического закона конъюнкции независимых событий. Этот механизм не требует обращений к квантовой механике ни на уровне формального математического описания, ни на уровне физической сути, т.е. физики явлений и механизмов. Отметим, что этот результат соотносится со взглядом на квантовую вероятность как на расширение классической вероятности введением в формулу полной вероятности интерференционного члена [12, 13]. Этот подход определяет взгляд на этот феномен как не на квантовый, а на квантово-подобный [14].

9.3. Квантовые модели обработки информации: квантовая вероятность и нарушение классического закона вероятности дизъюнкции несовместных событий

Данный феномен относится к задаче принятия решений как выбору альтернатив. Традиционно эта задача анализируется на примере модельных ситуаций, формализованных в теории игр. Для наглядности рассмотрим её на примере некооперативной игры «Дилемма заключенного».

Игра моделирует ситуацию, когда два злоумышленника А и В допрашиваются в полиции по отдельности, у каждого есть выбор: C (cooperate) – молчать или D (defect) – предать. C и D составляют полный набор альтернатив. Повлиять на решение подельника игрок не может.

Выигрыши/проигрыши зависят от ситуации:

$C^A C^B$ – оба молчат и получают небольшие сроки;

$C^A D^B$ – предавший В получает свободу, а молчащий А – по максимуму;

$D^A C^B$ – по аналогии с предыдущим;

$D^A D^B$ (оба игрока предают друг друга) – оба получают средние между CC и CD (DC) сроки.

Парето-оптимален (максимум общей пользы) [15] вариант $C^A C^B$, но в реальности наблюдается [16–21] равновесие Нэша [22] DD – оба предают.

В экспериментах [16–21] игроку В предлагалось принять решение в трех возможных ситуациях:

– ему известно, что игрок А принял решение C^A ;

– ему известно, что игрок А принял решение D^A ;

– решение другого игрока ему неизвестно.

Статистическая обработка экспериментальных результатов дала порядок вероятностей решения игрока В «предать» (D^B) в зависимости от ситуации:

$$\Pr(D^B | D^A) > \Pr(D^B | C^A) > \Pr(D^B). \quad (9.7)$$

Значения вероятностей в разных исследованиях, как и в разных играх, несколько отличались, но всегда наблюдался один и тот же порядок (8.7).

Проблема здесь виделась в том, что в классической теории вероятности [3], согласно формуле полной (безусловной) вероятности для дизъюнкции несовместных событий

$$\Pr(D^B) = \Pr(D^B | D^A) \Pr(D^A) + \Pr(D^B | C^A) \Pr(C^A), \quad (9.8)$$

полная вероятность $\Pr(D^B)$ должна принадлежать интервалу условных: $[\Pr(D^B | D^A), \Pr(D^B | C^A)]$.

В работах [16–21], как и других, авторы принимали экспериментально полученные значения условных вероятностей как факт и искали причины выхода экспериментально полученной полной вероятности $\Pr(D^B)$ из задаваемого формулой (8,8) интервала вероятностей условных. В [23] как обязательный для учета в модели атрибут процесса принятия решения человеком отмечен когнитивный диссонанс, а для «Дилеммы заключенного» – принятие решения на первых шагах его редуцирования, так как в полиции времени на раздумья не дают. Авторы [23] утверждают также, что хотя когнитивный диссонанс и может моделироваться марковским процессом, только квантово-механический формализм позволяет моделировать нарушение (9.7) формулы полной вероятности.

Для решения задачи изменим взгляд на проблему – примем первый и последний члены в (9.7) как данность и найдем реальный механизм, обеспечивающий попадание условной вероятности $\Pr(D^B | C^A)$ в границы диапазона $[\Pr(D^B | D^A), \Pr(D^B)]$.

Обратим внимание, что условие C^A противоречит оцениваемой альтернативе D^B , а для оценок $\Pr(D^B|D^A)$ и $\Pr(D^B)$ такого противоречия нет. Это означает, что оценкам $\Pr(D^B|D^A)$ и $\Pr(D^B)$ адекватна монотонная логика, в которой новая информация не меняет правило логического вывода – логику принятия решения можно представить правилом «Modus Ponens»: «предать – выгодно», или, что логически эквивалентно, «молчать – невыгодно». Формирование оценки $\Pr(D^B|C^A)$ описывается уже немонотонной логикой, в которой новая информация – условие C^A (подельник молчит) – противоречит ранее усвоенному правилу «предать – выгодно». В нашей игре это логика с исключением, её правило: «предать – выгодно, если подельник не предал».

В теме 7 мы изучили, что монотонная логика в классе нечетко-значимых порождается $4f$ схемой голографии Фурье. Нужна логика с исключением, её порождает $6f$ схема голографии Фурье, данная на рис.9.4.

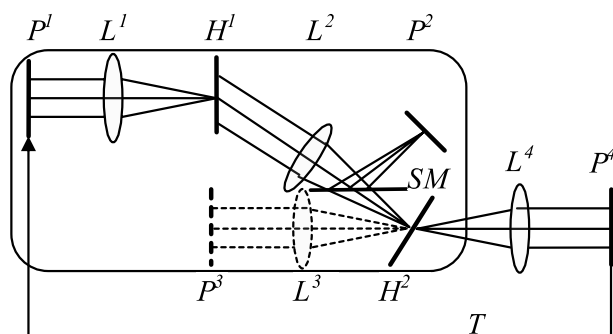


Рис.9.4. $6f$ схема голографии Фурье кольцевой архитектуры, порождающая логику с исключением: L^1, L^2, L^3, L^4 – фурье-преобразующие линзы; H^1 и H^2 – голограммы, хранящие правила монотонной логики и исключения, соответственно; P^1, P^2, P^3 , – плоскости: входная, корреляций (логического вывода) и эталона для записи голограммы исключения H^2 , соответственно; светоделитель SM формирует две идентичные плоскости P^2 : для вывода отклика и записи голограммы исключения H^2 , T – замыкание резонатора $P^4 \rightarrow P^1$; рамкой выделена $4f$ схема

Кольцевая архитектура, схемы рис.9.4 позволяет реализовать на логике с исключением атрибуты данной игры – когнитивный диссонанс и его редуцирование [24]. Кольцевая архитектура соответствует нейрофизиологической концепции кольца восприятия – повторного входа возбуждения в нейронные структуры после оценки в долговременной памяти субъективной значимости сенсорного стимула [25–27].

Логика игры связывает две лингвистические переменные (см. тему 8): «вариант решения» и «оценка решения», её можно представить отображением из бинарной шкалы «вариант решения» на шкалу оценок:

$$\{C, D\} \rightarrow \{L, H\} \quad (9.9)$$

где L – низкая оценка (невыгодно), H – высокая (выгодно). В общем случае шкалы могут быть не бинарными, так как человек использует

непрерывные шкалы с нечетко определенными оценками, но само решение, принимаемое на основании оценок его вариантов, для подачи на исполнительные органы должно быть четким. Для этого вводится операция дефаззификации, сопоставляющая нечеткой оценке четкое решение. Дефаззификация реализуется измерением выбранной характеристики нечеткого множества, представляющего оценку – его меры; мера выбирается и «под задачу», и «под «железо»».

Биологически мотивированный подход предполагает представление информации в системе аналогами картин нейронной активности коры головного мозга – нейронных ансамблей, активирующихся при восприятии или вспоминании информации. В схеме рис.9.4. значения переменной «решение»: «предать» D и «молчать» C – представлены полями комплексных амплитуд $D(x,y)$ и $C(x,y)$ в плоскости P^1 , а значения переменной «оценка решения»: «выгодно» H и «невыгодно» L – полями $H(\zeta,\eta)$ и $L(\zeta,\eta)$ в плоскости P^2 .

Поля, репрезентирующие разные значения одной лингвистической переменной, должны иметь как определенную степень общности (переменная одна), так и отличий. Примем, что название переменной кодирует общий для всех значений спектр фаз поля, а разные значения представляют спектры амплитуд.

Примем одну модель спектра амплитуд для всех значений переменной и будем различать их параметром v_α – частотой по уровню α от максимума. Таким образом, порядок значений лингвистической переменной задается в пространстве Фурье, и из (9.9) следуют возможные его варианты как связи значения лингвистической переменной и параметра спектра амплитуд поля, репрезентирующего данное значение:

$$\begin{aligned} D \succ C &\Leftrightarrow v_\alpha^D \geq v_\alpha^C \\ H \succ L &\Leftrightarrow v_\alpha^H \geq v_\alpha^L \end{aligned} \quad (9.10)$$

где \succ – символ отношения предпочтения, и инверсный порядок

$$\begin{aligned} D \succ C &\Leftrightarrow v_\alpha^D \leq v_\alpha^C \\ H \succ L &\Leftrightarrow v_\alpha^H \leq v_\alpha^L, \end{aligned} \quad (9.11)$$

а также их линейные комбинации.

На голограмме H^1 записано «негативное» правило «молчать (не предать) – невыгодно», т.е. пара $C \rightarrow L$

$$.H^1(v_x, v_y) = \Lambda^1(F^*(C(x, y))) \quad (9.12)$$

Исключение представлено связкой $H \rightarrow F(C)$ – голограмма исключения H^2 записывается откликом $4f$ схемы на поле, представляющее в плоскости P^1 «предать», и фурье-образом поля, представляющего в плоскости P^3 решение «молчать»:

$$H^2(\zeta, \eta) = \Lambda^2\left(\left(\text{Out}_0^{2(D,C)}(\zeta, \eta)\right)^* F(C(x, y))\right). \quad (9.13)$$

В качестве меры, математически эквивалентной вероятности, используется радиус отклика, т.е. радиус корреляции: $r^D \equiv \Pr(D)$, $r^{D|C} \equiv \Pr(D|C)$, $r^{C|D} \equiv \Pr(C|D)$.

На нулевой итерации в плоскости P^2 формируется отклик $4f$ схемы голографии Фурье – оценка по правилу монотонной логики поступившего на вход варианта решения.

Затем поступает информация о решении подельника – она в качестве условия записывается на голограмме (8.13), и на первой круговой итерации в плоскости P^2 формируется отклик $6f$ схемы голографии Фурье – оценка по правилу логики с исключением решения подельника.

На второй круговой итерации в плоскости P^2 формируется отклик $6f$ схемы голографии Фурье – оценка по правилу логики с исключением варианта собственного решения.

На рис.9.5. показаны зависимости величины отношения условной и безусловной оценок Ω

$$\Omega(V) = \frac{r^D}{r_2^{D|C}} = \frac{\Pr(D)}{\Pr(D|C)} \quad (9.14)$$

от V – меры различения альтернатив «молчать» и «предать» игроком (лицом, принимающим решение – ЛПР).

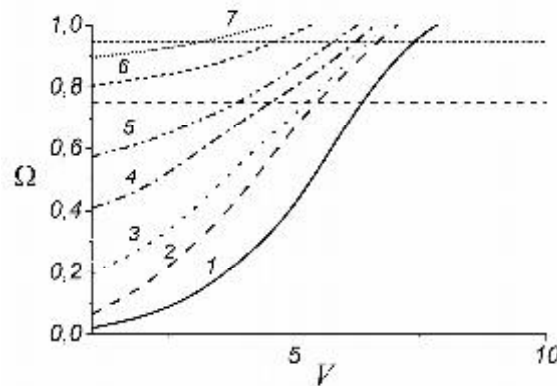


Рис.9.5. Зависимости отношения Ω от меры различения альтернатив V для ряда радиусов АКФ составного образа, хранимого голограммами H^1 и H^2 : 1 – $r^{ACF}=4.5$ пкс., 2 – $r=8.5$ пкс., 3 – $r^{ACF}=9$ пкс., 4 – $r^{ACF}=13$ пкс., 5 – $r^{ACF}=16$ пкс., 6 – $r^{ACF}=23$ пкс., 7 – $r^{ACF}=30$ пкс.; горизонтальными линиями показан диапазон экспериментально наблюдавшихся значений Ω [17–21]

Согласно классической теории вероятностей, должно иметь силу

$$\Omega(V) > 1 \quad (9.15)$$

но на рис.9.5. в определенном диапазоне V этот закон нарушается, и полученная зависимость $\Omega(V)$ соответствует экспериментальной [16–21].

Таким образом, мы получили реализацию феномена нарушения классической формулы полной вероятности для дизъюнкции несовместных событий посредством вполне классического механизма,

также, как и ранее, в разделе 9.1, не требующего обращения к квантовой механике ни на уровне формализма, ни на уровне физических явлений.

Эти результаты показывают возможность создания голографических симуляторов квантовых моделей обработки информации и вычислений в том случае, если эти модели предполагают ансамблевую обработку. Достоинства классических симуляторов – они свободны от ряда технических проблем, связанных с реализацией именно квантовых механизмов. В первую очередь следует упомянуть проблему декогеренции, для решения которой квантовая система должна изолироваться от окружающей среды.

Литература к теме 8

1. *Garrett Birkhoff, John Von Neumann* The Logic of Quantum Mechanics // Journal Annals of Mathematics. 1936, Vol.37. №4. P. 823. <https://doi.org/10.2307/1968621>
2. *Холево А.С.* Квантовая вероятность и квантовая статистика // Итоги науки и техники Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ. 1991. Т. 83, с. 5–132.
3. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып.8. М.: Мир, 1965. 260 с.
5. *Tversky A., Kahneman D.* Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment // Psychological Review. 1983. V. 90. Issue 4. P. 293–315. DOI: 10.1037/0033-295X.90.4.293
6. *Busemeyer, J.R., Pothos, E.M., Franco, R., Trueblood, J.S.* A quantum theoretical explanation for probability judgment “errors” // Psychological Review 2011. V.118. №2. P.193–218. doi: 10.1037/a0022542
7. *Trueblood J.S., Pothos, E.M. and Busemeyer J.R.* Quantum probability theory as a common framework for reasoning and similarity // Frontiers in Psychology, 11 April 2014 DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00322
8. *Жёлтиков А.М.* Критика квантового разума: измерение, сознание, отложенный выбор и утраченная когерентность // УФН. 2018. Т. 188. № 10. С. 1119–1128. DOI: 10.3367/UFNr.2017.06.038155
9. *Гриб А.А.* К вопросу об интерпретации квантовой физики // УФН. 2013. Т. 183. №12. С. 1337–1352. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312d.1337
10. *Орлов В.В.* О решетках, возникающих при нелинейной записи наложенных голограмм // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. №. 24. С. 77–81.
11. *Павлов А.В., Орлов В.В.* Моделирование механизмов квантовой логики методом наложенных голограмм Фурье, основанным на нелинейности экспозиционных характеристик голографических регистрирующих сред // Квантовая электроника. 2019. Т. 49. № . С. 246–252.
12. *Хренников А.Ю.* Формула полной вероятности с интерференционным членом // Теория вероятн. и её применения. 2006. Т.51 №3. С.518–536.

13. *Хренников А.Ю.* Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. М.: Физматлит, 2003. 208с.
14. *Khrennikov A.* Quantum-like modeling of cognition // *Frontiers in Physics*. 2015. 3: 77. DOI: 10.3389/fphy.2015.00077
15. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 144 с. – ISBN 5-9221-0274-5. http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/nogin_p02.html
16. *A. Tversky, D. Kahneman* Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment // *Psychological Review*. – 1983. – Vol.90. – №4. — P. 293-315. DOI: 10.1037/0033-295X.90.4.293
17. *Tversky A, Shafir E.* The disjunction effect in choice under uncertainty // *Psychological Science*. – 1992. – Vol. 3, №5. – P.305-309; DOI: 10.1111/j.1467-9280.1992.tb00678.x
18. *Crosson R.* The disjunction effect and reason-based choice in games *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. 1999. – Vol.80. – P.118-133. DOI:10.1006/obhd.1999.2846
19. *S. Li, J. Taplin* Examining whether there is a disjunction effect in Prisoner’s Dilemma games // *China Journal of Psychology*. – 2002. – Vol.44. – P. 25-46. <http://hdl.handle.net/2440/3240>
20. *J. R. Busemeyer, M. Matthew, Z. A. Wang* Quantum game theory explanation of disjunction effects // *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Cognition Science Society*, eds.: R. Sun, N. Miyake Mahwah, NJ: Erlbaum. – 2006. – P. 131-135.
21. *E. Hristova, M. Grinberg* Disjunction effect in prisoner’s dilemma: evidences from an eye-tracking study // *Proc. of the 30th Ann. Conf. of the Cognition Science Society*. Washington, DC. – 2008. – P. 1225-1230.
22. *Nash, J.F.* Non-Cooperative Games // *Annals of Mathematics*. – 1951. – Vol.54, № 2. – P.286-295. DOI: 10.2307/1969529
23. *J. S. Trueblood, E. M. Pothos, J. R. Busemeyer* Quantum probability theory as a common framework for reasoning and similarity // *Frontiers in Psychology*, 11 April 2014; DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00322
24. *Павлов АВ* Логика с исключением на алгебре фурье-дуальных операций: нейросетевой механизм редуцирования когнитивного диссонанса // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2014. – Т. 89, № 1. – С. 17-25. – URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_21398429_53828256.pdf
25. *Edelman G.M.* The remembered present. A biological theory of consciousness – New York: Basics Books, 1989. – 346 p.
26. *Иваницкий, А.М.* Мозговая основа субъективных переживаний: гипотеза информационного синтеза // *Журнал высшей нервной деятельности*. – 1996.– Т.46, № 2. – с. 241-252.
27. *Ivanitskii, A.M.* Information synthesis in key parts of the cerebral cortex as the basis of subjective experience // *Neuroscience and Behavioral Physiology*. – 1997. –Vol. 27. – p.414–426. DOI: 10.1007/BF02462943

Вопросы для самопроверки по теме 9

1. Что такое гильбертово пространство?
2. Что такое волновая функция?
3. Как определил вероятность Колмогоров?
4. Как правило Борна определяет вероятность?
5. Какая характеристика электромагнитного поля математически строго эквивалентна вероятности, определяемой по правилу Борна?
6. Как математически описывается измерение в квантовой механике? Что происходит с волновой функцией при измерении?
7. Что такое коммутатор операторов?
8. Приведите примеры некоммутирующих и коммутирующих операторов из обычной жизни.
9. В чём основные отличия квантовой вероятности от классической (колмогоровской)?
10. Если адекватное реальности описание системы дает математический аппарат некоммутативной теории вероятности, то означает ли это, что система обязательно квантовая?
11. Как описывается логический вывод в квантовой логике?
12. В чем заключается «проблема Линды» с точки зрения классической логики и теории вероятности?
13. Какое свойство реальных систем позволяет связать два независимых образа – два образа, которым система обучается независимо и в разное время?
14. Приведите пример нарушения классического закона полной вероятности для дизъюнкции несовместных событий.

Павлов Александр Владимирович

Квантовые и оптические методы обработки информации и
вычислений
Т.2.

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

Компьютерная верстка

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 40 экз.

Отпечатано на ризографе

А.В. Павлов

А.В. Павлов

Н.Ф. Гусарова

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А