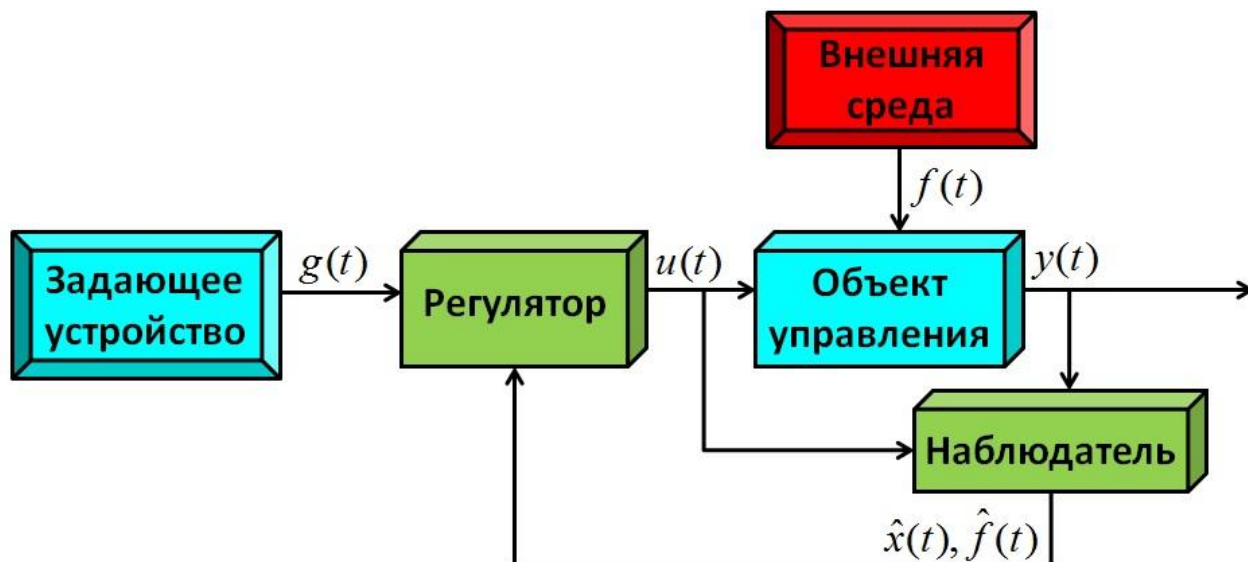


В.В. Григорьев, В.И. Бойков, А.В. Парамонов,
С.В. Быстров

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**В.В. Григорьев, В.И. Бойков, А.В. Парамонов,
С.В. Быстров**

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ
ИТМО

по направлению подготовки 15.03.06, 27.03.04
в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2021

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В.,
Проектирование регуляторов систем управления– СПб: Университет
ИТМО, 2021. – 94 с.

Рецензент(ы):

Герасимов Д.Н., канд. техн. наук, доцент факультета систем управления и
робототехники Университета ИТМО

В учебном пособии приведены алгоритмы проектирования регуляторов в
основном методами модального управления. Рассмотрены способы
построения регуляторов для решения задач стабилизации, слежения и
компенсации внешних возмущений. Отдельное внимание уделено синтезу
наблюдателей компонент вектора состояния. Настоящее пособие является
переработанным и дополненным изданием учебного пособия 2007 г.

Пособие предназначено для студентов технических университетов,
обучающихся по направлениям подготовки 15.03.06 –«Мехатроника и
робототехника», 27.03.04 –«Управление в технических системах». Пособие
может быть полезно студентам других технических направлений подготовки,
а также аспирантам, преподавателям вузов и специалистам, научная и
практическая деятельность которых связана с решением вопросов
проектирования и моделирования линейных систем управления.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и
фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в
2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013
года Университет ИТМО – участник программы повышения
конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых
научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель
Университета ИТМО – становление исследовательского университета
мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на
интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021
© Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ	9
2 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	11
2.1 Базовые концепции метода модального управления	12
2.2 Матрицы эталонной модели	22
2.2.1 Стандартные полиномы Ньютона	23
2.2.2 Стандартные полиномы Баттерворта.....	24
2.2.3 Построение желаемых характеристических полиномов.....	25
2.2.4 Способы формирования матриц эталонной модели.....	28
2.3 Синтез стабилизирующего регулятора методом модального управления..	30
2.3.1 Постановка задачи.....	30
2.3.2 Синтез стабилизирующего регулятора	31
2.4 Синтез модального управления на базе матричного уравнения Сильвестра.....	34
2.4.1 Постановка задачи.....	34
2.4.2 Синтез модального регулятора на базе уравнения типа Сильвестра .	35
2.5 Альтернативные способы построения алгоритмов управления	37
2.5.1 Алгоритмы управления на базе формул Аккермана и Басса-Гура.....	37
2.5.2 Алгоритм управления, обеспечивающий желаемую степень сходимости	38
2.5.3 Алгоритм управления, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость.....	42
2.6 Установившаяся ошибка и точность систем управления	46
2.6.1 Постановка задачи.....	49
2.6.2 Нахождение установившейся ошибки системы	50
3 СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О СОСТОЯНИИ	57
3.1 Постановка задачи наблюдения	57

3.2 Наблюдатель состояния полной размерности	58
3.3 Наблюдатель состояния пониженной размерности	61
4 СПОСОБЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ СЛЕЖЕНИЯ	66
4.1 Синтез регулятора с интегральной составляющей.....	66
4.2 Метод встроенной (внутренней) модели	69
4.3 Синтез регулятора с прямыми связями.....	72
4.4 Синтез наблюдателя состояния модели задающего воздействия.....	76
5 МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ	79
5.1 Постановка задачи.....	79
5.1.1 Синтез регулятора с интегральной составляющей.....	80
5.1.2 Метод встроенной (внутренней) модели	82
5.1.3 Синтез регулятора с прямыми связями.....	84
5.2 Постановка задачи оценки возмущений	88
5.2.1 Синтез наблюдателя расширенной размерности.....	88
5.2.2 Синтез наблюдателя пониженной размерности	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	93
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	94

ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления имеет длительную историю развития, в которой можно выделить ряд важнейших этапов и направлений. Эта теория связана с инженерной деятельностью, и ее прогресс обусловлен практическими проблемами и задачами, которые решало человечество на протяжении своего развития. Среди основных периодов в истории человечества, в рамках которых произошли качественные скачки развития теории управления, можно выделить следующие:

- ¼ индустриальная революция в Европе (третья четверть XVIII века);
- ¼ начало массовой коммуникации (конец XIX века),
- ¼ Первая и Вторая мировые войны (от 1910 г. до 1945 г.);
- ¼ эра космонавтики, электроники и компьютеров (от 1957 г. по настоящее время).

Сначала человек стремился понять свое место в пространстве и времени. Затем – приручить окружающую среду и сделать свое существование более комфортным. На следующем этапе – объединиться в глобальном обществе и найти свое место в космосе. Между индустриальной революцией в Европе и Мировыми войнами произошли важные события. А именно, теория управления начала приобретать язык записи. Этот язык – язык математики. В 1868 г Дж. Максвелл провел первый строгий математический анализ динамики систем управления. Поэтому период до 1868 г. можно назвать предысторией теории управления. Период с 1868 г. до начала 1900-х гг. можно считать начальным периодом теории управления. Период с начала 1900-х гг. до 1960 г. называют классическим. С начала 1960 г. по настоящее время длится современный период развития теории управления.

Изобретение водяных часов является важной вехой в развитии человечества. Для точного определения времени грек Ктесибий изобрел водяной регулятор, который поддерживал постоянный уровень воды в баке. Вода из этого бака с постоянной скоростью поступала во второй бак. Уровень воды во втором баке соответствовал текущему времени. Впоследствии арабские инженеры Муса Аль-Джири и Ибн аль-Саати усовершенствовали водяной регулятор и использовали его для других целей.

Во время индустриальной революции появились простые механизмы, которые помогали увеличить производительность труда рабочих на заводах, фабриках, мельницах. Тем самым развитие промышленности стимулировало изобретение и создание новых видов технических регуляторов. В этот период были изобретены паровые машины, содержащие регуляторы температуры, регуляторы давления пара, регуляторы уровня воды в котлах. Развитие систем управления с обратной связью привело к рождению математической теории управления. В этот период был разработан математический аппарат дифференциальных уравнений. Основателями этой теории являются И. Ньютон, Дж. Лейбниц, братья Бернулли, Дж. Риккати. Дж. Лагранж и В.

Гамильтон продолжили применение дифференциальных уравнений для анализа динамики механических систем. Появилась теория устойчивости динамических систем. Так, Дж. Максвелл анализировал устойчивость положения равновесия системы стабилизации скорости вращения вала паровой машины с регулятором Ватта. Его техника заключалась в линеаризации дифференциальных уравнений движения и нахождении характеристического уравнения системы. И. Раус разработал численный алгоритм для определения устойчивости положения равновесия динамической системы по корням характеристического уравнения. И. Вышнеградский в 1877 г. также анализировал устойчивость динамических систем, используя дифференциальные уравнения. В 1893 г. А. Стодола решил задачу управления работой водяной турбины, используя способ Вышнеградского. А. Гурвиц предложил свой способ определения устойчивости положения равновесия динамических объектов, опираясь на работы Дж. Максвелла и И. Рауса. В 1892 г. А. Ляпунов ввел понятие устойчивости движения динамической системы. Он предложил также методы исследования свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений. В 1892 г. британский инженер О. Хевисайд изобрел способ операторных вычислений для исследования свойств решений линейных дифференциальных уравнений. В этот же период сформировались базовые основы теории систем. Основная концепция этой теории – сложная система, имеющая вход и выход, состоит из соединения элементов (подсистем), также имеющих вход и выход.

Третий этап развития обусловлен двумя важными событиями: изобретением телефона и развитием массовых коммуникаций, а также началом мировой войны. В этот период математический анализ динамики систем управления базируется на анализе решений дифференциальных уравнений в частотной области. Этот математический аппарат был разработан рядом ученых – П.-С. де Лапласом (1749-1827), Дж. Фурье (1768-1830), А. Коши (1789-1857) и др.

Мировые войны способствовали развитию классической теории управления. В этот период совершенствовались методы управления движением механизмов, появилась теория сервомеханизмов, стохастический анализ. Были изобретены гироскоп, ПИД-регулятор, системы наведения оружия, системы управления движением реактивных снарядов. Большой вклад в развитие теории был сделан Х. Найквистом, который разработал частотный критерий устойчивости. В 1938 г. Х. Боде предложил использовать амплитудную и фазовую частотные характеристики, которые в дальнейшем получили название диаграмм Боде. Он также ввел понятие запаса устойчивости замкнутой системы, выделив запасы устойчивости по амплитуде и по фазе.

На четвертом этапе развития теории управления особое внимание уделялось исследованиям динамики нелинейных систем. В этот период были разработаны новые способы управления: релейное управление (Иваченко,

1948 г.), импульсное (прерывистое) управление (Джури, Цыпкин, 1948 г.) В 1961 г. румынский ученый В. М. Попов предложил круговой критерий для анализа устойчивости нелинейных динамических систем.

В 1960 г. в Москве была проведена первая конференция международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК). В это время началось интенсивное развитие методов модального и оптимального управления, теорий наблюдения и оценивания, теорий фильтрации и адаптивного управления. Появление в ведущих научных центрах мощных вычислительных систем и компьютеров способствовало возникновению и развитию теории цифрового управления и цифровой обработки сигналов. В настоящее время можно выделить следующие направления в развитии теории управления [10, 11, 12, 14, 15, 16, 17]:

- ¾ теория адаптивного и робастного управления;
- ¾ синтез управления методами дифференциальной геометрии;
- ¾ игровые подходы в управлении;
- ¾ теория катастроф, управления хаосом и теория фракталов;
- ¾ теория нечетких регуляторов;
- ¾ теория нейронных систем и нейронных вычислений;
- ¾ теория генетических алгоритмов;
- ¾ теория машинного обучения.

Настоящее учебное пособие посвящено основным положениям синтеза регуляторов методами модального управления и альтернативным (немодальным) подходам. Рассмотрены базовые концепции метода, способы формирования эталонных моделей с использованием стандартных характеристических полиномов Ньютона и Баттерворта. Приведены следующие способы синтеза регуляторов:

- ¾ на основе приведения к каноническому виду уравнений объекта управления и эталонной модели;
- ¾ на основе использования матричного уравнения Сильвестра;
- ¾ на основе использования формул Аккермана и Басса-Гура;
- ¾ на основе использования матричного уравнения типа Риккати.

Первые три способа рассмотрены в рамках концепции модального управления. Последний способ позволяет обеспечить в системе желаемую степень сходимости и выполнение условий качественной экспоненциальной устойчивости. Отдельно рассмотрены точностные показатели качества и методы нахождения установившейся ошибки.

Отдельно рассмотрены методы построения алгоритмов слежения за задающим воздействием и управляющих воздействий в условиях внешних возмущений. Приведены способы построения регуляторов с интегральной составляющей, регуляторов со встроенной моделью внешнего воздействия (метод внутренней модели) и регуляторов с прямыми связями (комбинированное управление).

Настоящее пособие является переработанным и дополненным изданием учебного пособия [7] (2007 г.). Уделено особое внимание проблеме обеспечения заданных показателей качества работы замкнутой системы, введены в рассмотрение алгоритмы стабилизирующего управления на основе формул Аккермана и Басса-Гура, рассмотрено использование уравнения типа Риккати для обеспечения желаемой степени сходимости динамических процессов и качественной экспоненциальной устойчивости системы управления. Добавлены сведения, касающиеся точности работы систем автоматического управления и расчета установившихся ошибок в многоканальных системах с использованием метода матричных коэффициентов ошибок.

Данное учебное пособие предполагает знание основ теории управления, линейной алгебры, интегральных и дифференциальных исчислений в пределах типовых курсов технических университетов. Пособие направлено на развитие таких компетенций студентов, как способность анализировать динамические и точностные свойства систем автоматического управления, синтезировать регуляторы для обеспечения желаемыми показателями качества работы замкнутых систем с использованием различных подходов, поддерживать заданные технические свойства систем в условиях недоступности компонент вектора состояния прямому измерению и при наличии внешних возмущений. Пособие предназначено для студентов направлений подготовки 15.03.04, 27.03.04 при изучении курсов «Теория автоматического управления», «Основы теории автоматического управления» и будет полезным при выполнении выпускной квалификационной работы. Пособие может быть использовано студентами других технических специальностей для самостоятельного изучения современных методов проектирования автоматических систем управления.

1 ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В окружающем нас мире функционирует и используется огромное количество самых разнообразных технических систем. Каждая техническая система организуется в соответствии с целью ее функционирования. Управление в системе осуществляется таким образом, чтобы была достигнута цель функционирования на основе проведенного анализа и обработки информации о текущих значениях измеряемых сигналов и известных параметров, которые характеризуют динамику процессов внутри системы и отклонения от заданных значений. Управление должно обеспечивать в системе устойчивое развитие процессов во времени и робастность (грубость) по отношению к изменяющимся условиям внешней среды, параметрам системы и возможной эволюции цели управления [13].

Современное развитие компьютерных вычислительных средств, измерительных и исполнительных устройств позволяет реализовывать сложные иерархические алгоритмы управления, включающие алгоритмы идентификации параметров объектов управления, робастные алгоритмы адаптации к изменению параметров объекта, внешних возмущающих воздействий и позволяющие эффективно достигать цели функционирования.

На рисунке 1.1 изображена обобщенная функциональная схема технической системы автоматического управления (САУ), состоящая из технического объекта (ТО) или объекта управления, которым следует управлять в соответствии с назначением его функционирования; исполнительного механизма (ИМ), изменяющего состояние x ТО для достижения цели функционирования; преобразователя информации (ПрИ), генерирующего информацию о текущем состоянии ТО; задающего устройства, определяющего в сигнальном виде g желаемое поведение ТО, а именно, значения его выходных или регулируемых переменных y ; внешней среды (BC), отражающей происхождение аддитивных и мультипликативных внешних возмущений f на систему и отдельные ее элементы. Важным функциональным элементом системы управления является регулятор, позволяющий по текущей информации о состоянии объекта и информационным сигналам о желаемом поведении в соответствии с целью функционирования ТО формировать управляющие воздействия, поступающие на исполнительный механизм и приводящие состояния объекта к желаемым значениям. В технических системах управляющие воздействия формируются на основе обработки информации об измерениях и желаемого поведения регулируемых переменных, образующих собственно регулятор.

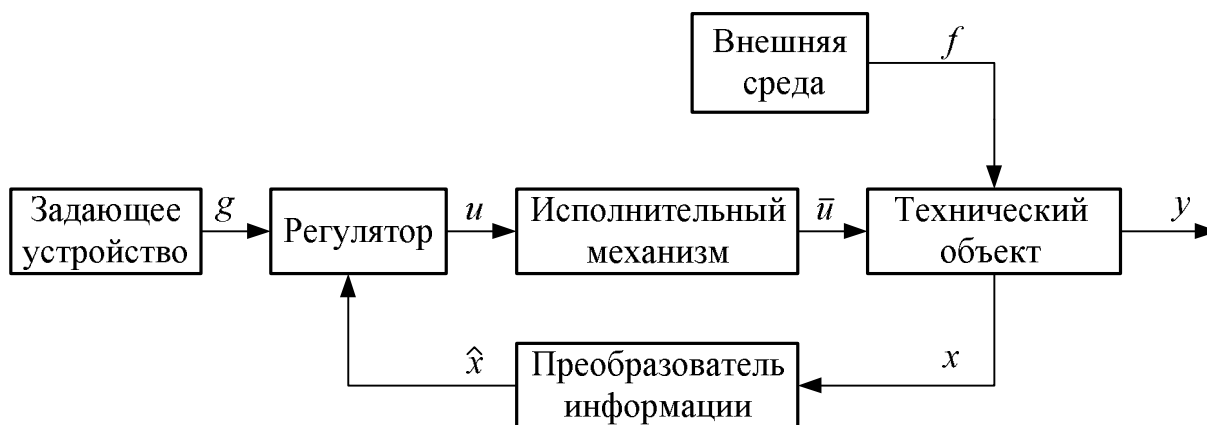


Рисунок 1.1 – Обобщенная функциональная схема системы управления

По способу реализации можно выделить аналоговые и цифровые регуляторы САУ.

Аналоговые регуляторы реализуются, как правило, на основе операционных усилителей и проектируются на базе частотных методов синтеза.

Цифровые регуляторы строятся на основе микроконтроллерной техники. Наиболее распространенные методы синтеза таких регуляторов основаны на модальном управлении, хотя в некоторых случаях могут использоваться и частотные методы.

Большинство современных систем конструируются с использованием цифровой техники, так как эта техника позволяет реализовывать алгоритм управления любой сложности, обеспечивать компактность и простоту реализации регуляторов. В то же время применение цифровых регуляторов ставит перед разработчиком ряд проблем, обусловленных динамикой и точностью работы САУ. Поэтому достаточно часто предварительно синтезируется аналоговый регулятор, который в дальнейшем реализуется цифровыми средствами. Одним из доступных средств проверки работоспособности спроектированной системы является компьютерное моделирование (например, в программной среде MATLAB [12]). На основе полученных результатов моделирования можно сделать предварительный вывод о соответствии показателей качества САУ, полученной в результате синтеза, требованиям технического задания.

В настоящем учебном пособии рассматриваются способы построения регуляторов методом модального управления для обеспечения в замкнутой системе заданных показателей качества, а также способы формирования эталонных моделей, описывающих требуемое поведение САУ.

2 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Под синтезом регуляторов линейных САУ подразумевается нахождение алгоритма и численных значений параметров формирования сигнала управления, обеспечивающего заданное качество функционирования системы. При этом предполагается, что численные показатели качества системы либо заданы прямо в техническом задании, либо вычислены на основе данных требований [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17].

Развитие аналитических методов построения регуляторов для технических САУ потребовало установления связи этих методов с показателями качества синтезируемой системы. Первоначально эти методы гарантировали асимптотическую устойчивость САУ. Последующее развитие теории позволило обеспечивать экспоненциальную устойчивость [8, 9], которая связана с оценками быстродействия и запаса устойчивости (степень устойчивости) [3, 13]. Однако выполнение условий экспоненциальной устойчивости не всегда приводит к требуемым показателям качества переходных процессов. В результате возникла необходимость введения новых локальных условий и понятий устойчивости, связанных с ужесточением ограничений на свойства системы.

Для линейных систем локальные условия вводились на области желаемого распределения корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) замкнутой системы, что позволило установить связь методов аналитического проектирования регуляторов с корневыми показателями качества. Так, подход, основанный на локализации полюсов передаточной функции линейной системы на основе прямого метода Ляпунова, позволяет расширить данный подход также на задачи анализа некоторых нестационарных и нелинейных систем с гладкими нелинейностями. Для этого вводится понятие качественной экспоненциальной устойчивости, которое является более сильным понятием, чем экспоненциальная устойчивость, благодаря введению дополнительных условий, ограничивающих скорости изменения компонент вектора состояния системы. С помощью этих дополнительных условий появляется возможность локализовать показатели качества переходных процессов. Качественно экспоненциально устойчивые системы отличаются меньшей степенью колебательности и улучшенной «плавностью» процессов, при этом сохраняется возможность оценок быстродействия и запаса устойчивости, присущих экспоненциально устойчивым системам.

При синтезе регуляторов разработчикам, как правило, необходимо решить две задачи. Первая заключается в обеспечении необходимых динамических [3] или прямых [13] показателей качества желаемой системы. К ним относятся величина перерегулирования и оценка времени переходного процесса [2, 3, 6, 7, 13, 15].

Задача может оказаться достаточно сложной с инженерной точки зрения, так как увеличение быстродействия системы обычно приводит к повышению степени колебательности переходных процессов. Использование сглаживающих фильтров, устраняющих всплески сигналов, приводит к снижению быстродействия и, соответственно, к повышению длительности переходного процесса. Поэтому разработчики САУ пытаются найти приемлемое соотношение между быстродействием (временем переходного процесса) и степенью колебательности протекающих процессов. Кроме того, при синтезе желаемых динамических показателей качества в соответствии с желаемым распределением полюсов передаточной функции не учитывается влияние нулей передаточной функции и ненулевых начальных условий на общую динамику замкнутой системы.

Вторая задача состоит в достижении требуемой точности функционирования системы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 16]. Эта задача является менее сложной, поскольку обеспечение требуемых точностных показателей можно достичь с помощью различных технических приемов. Задача достижения требуемой точности функционирования системы рассмотрена в подразделе 2.6.

2.1 Базовые концепции метода модального управления

Рассматривается объект управления в виде модели вход-состояние-выход (система дифференциальных уравнений в пространстве состояний):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (2.1)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния; $y(t)$ – l -мерный вектор выходных (регулируемых) переменных; $u(t)$ – m -мерный вектор сигнала управления; $f(t)$ – r -мерный вектор возмущений; A – матрица состояний размера $n \times n$; B – матрица входов управляющих воздействий размера $n \times m$; B_f – матрица входов возмущений размера $n \times r$; C – матрица выходов размера $l \times n$; n – порядок объекта управления; t – время.

Представленный объект управления может быть с измеряемым или неизмеряемым вектором состояния. Иными словами, с полной или с неполной информацией.

Определение 2.1. *Объект управления с полной информацией о состоянии – это объект управления, у которого все компоненты вектора состояния доступны для прямого измерения.*

В соответствии определением объект управления с полной информацией о состоянии оснащен измерительными преобразователями (датчиками),

которые позволяют непосредственно получать информацию о текущих значениях всех компонент вектора состояния $x(t)$ модели объекта.

Определение 2.2. *Объект управления с неполной информацией о состоянии – это объект управления, у которого недоступна для измерения хотя бы одна компонента вектора состояния.*

Сделаем допущение, что рассматриваемый объект управления является полностью управляемым и полностью наблюдаемым [1, 2, 3, 4, 6, 7, 15, 16, 17]. Это означает, что матрицы управляемости и наблюдаемости, вычисляемые по соответствующим формулам [1, 2, 3, 6]:

$$P_U = |B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B|, \quad (2.2)$$

$$P_Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где P_U – матрица управляемости; P_Q – матрица наблюдаемости, имеют ранги, равные порядку объекта управления, то есть $\text{rank } P_U = n$, $\text{rank } P_Q = n$.

Также сделаем допущение, что исходя из цели функционирования системы и технического задания, определен набор показателей качества ($t_{\text{п}}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование, ϵ_y – установившаяся ошибка), выполнение которого обеспечивает достижение заданной цели функционирования системы.

На основании набора *динамических* показателей качества (время переходного процесса и перерегулирование [3, 6]) может быть сформирована эталонная модель, которая определяет желаемое протекание процессов в САУ.

Определение 2.3 *Эталонная модель – это математическая модель, описывающая желаемое поведения САУ в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества.*

Эталонную модель можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma\xi(t) \\ v(t) = H\xi(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора состояния объекта управления; $v(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выходных переменных эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора управления САУ; Γ – матрица размера $n \times n$, определяющая требуемые динамические свойства системы; H – матрица выхода эталонной модели размера $m \times n$.

Параметры (или собственные числа) матрицы Γ назначают на основе желаемых динамических показателей качества замкнутой системы. Вид переходного процесса в линейных динамических системах зависит от расположения корней характеристического полинома $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ на комплексной плоскости корней, которые определяют собственные числа матрицы Γ . Параметры матрицы H выбирают произвольно при сохранении условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Замечание 2.1. *Для нахождения управляющих воздействий, обеспечивающих требуемые динамические показатели качества САУ, не всегда имеет смысл формировать матрицу Γ и эталонную модель вида (2.4). В некоторых случаях достаточно вычислить требуемые корни характеристического полинома или коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы.*

В соответствии с целями работы САУ можно выделить два режима ее функционирования: режим стабилизации и режим слежения.

Определение 2.4 *Режим стабилизации – это режим функционирования САУ, при котором осуществляется поддержание заданного постоянного значения выходной переменной САУ.*

Частным случаем режима стабилизации является режим функционирования САУ, при котором осуществляется поддержание нулевого постоянного значения выходной переменной САУ. И далее под режимом стабилизации будем подразумевать поддержание именно нулевого значения выходной переменной системы.

Если поддержание нулевого постоянного значения выходной переменной САУ требуется осуществить в условиях внешних возмущений (т.е. когда $f(t) \neq 0$), то в этом случае мы говорим о режиме *стабилизации в условиях внешних возмущений* или о режиме *компенсации внешних возмущений* [1, 3, 5, 11].

Определение 2.5 *Режим слежения – это режим функционирования САУ, при котором осуществляется изменение выходной переменной САУ в соответствии с желаемыми наблюдаемыми переменными внешней системы.*

Если в частном случае задающее воздействие представляет собой

постоянный во времени сигнал (константу), то в этом случае требуется осуществить поддержание постоянного значения выходной переменной САУ. Далее под поддержанием заданного постоянного ненулевого значения выходной переменной САУ будем подразумевать *слежение за постоянным сигналом* [3].

Теперь перейдем к описанию моделей *внешних воздействий* – модели задающего воздействия и модели возмущающего воздействия.

Модель *задающего воздействия* может быть представлена в пространстве состояний в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t) \\ g(t) = H_g \xi_g(t) \end{cases}, \quad \xi_g(0) = \xi_{g^0} \quad (2.5)$$

где $g(t)$ – k -мерный вектор задающих воздействий (эталонный сигнал); $\xi_g(t)$ – q -мерный вектор состояния модели задающего воздействия; $\xi_g(0)$ – вектор начального состояния модели задающего воздействия; Γ_g – матрица, определяющая вид задающего воздействия размера $q \times q$; H_g – матрица выхода модели задающего воздействия размера $k \times q$.

Как видно из уравнения (2.5), модель задающего воздействия представляет собой автономную динамическую систему с ненулевыми начальными условиями, заданными вектором $\xi_g(0)$.

Модель *возмущений* строится в форме, аналогичной форме модели задающего воздействия:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f(t) = \Gamma_f \xi_f(t) \\ f(t) = H_f \xi_f(t) \end{cases}, \quad \xi_f(0) = \xi_{f^0} \quad (2.6)$$

где $\xi_f(t)$ – η -мерный вектор состояния модели возмущений; $\xi_f(0)$ – вектор начального состояния модели возмущений; Γ_f – матрица, определяющая вид возмущений размера $\eta \times \eta$; H_f – матрица выхода модели возмущений размера $r \times \eta$.

Представленные модели (2.5) и (2.6) представляют собой линейные автономные системы или *генераторы внешних воздействий* [3]. В зависимости от расположения собственных чисел матриц Γ_g и Γ_f на комплексной плоскости внешние воздействия могут представлять собой следующие сигналы [3,6]:

1) экспоненциальные сигналы

$$\sum C_i \exp(\lambda_i t),$$

где λ_i – вещественные не кратные собственные числа;

2) гармонические сигналы

$$C_i e^{at} \sin(\beta t + \varphi_i),$$

где $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$ – комплексно-сопряженные не кратные собственные числа;

3) экспоненциальные сигналы с полиномиальной составляющей

$$\sum_{i=1}^{\gamma} C_i t^{i-1} \exp(\lambda t),$$

где λ – вещественный корень кратности γ ;

4) гармонические сигналы с полиномиальной составляющей

$$\sum_{i=1}^{\gamma} C_i e^{at} t^{i-1} \sin(\beta t + \varphi_i),$$

где $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$ – комплексно-сопряженные собственные числа кратности γ .

Величины C_i и φ_i определяются ненулевыми начальными условиями моделей внешних воздействий. На практике рассмотрение сигналов внешних воздействий ограничивается классами мультигармонических сигналов со сдвигом [3, 11],

$$C_0 + \sum_{i=1}^{\gamma} C_i \sin(\beta t + \varphi_i),$$

и полиномиальных сигналов не выше второго порядка [3],

$$\sum_{i=1}^3 C_i t^{i-1}.$$

В общем случае отклонение поведения САУ от желаемого по техническому заданию значения обозначается как вектор ошибок $e(t)$. В режиме стабилизации данная ошибка совпадает с вектором состояния объекта управления:

$$\begin{cases} e(t) = x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (2.7)$$

а в режиме слежения –

$$\begin{cases} e(t) = M_g \xi_g(t) - x(t) \\ \epsilon(t) = Ce(t) \end{cases}, \quad (2.8)$$

где $e(t)$ – n -мерный вектор ошибок; $\epsilon(t)$ – l -мерный вектор выходной переменной модели ошибок; $M_g \in \mathbb{R}^{n \times q}$ – матрица для согласования размерностей вектора состояния объекта управления и вектора задающего воздействия.

Пусть в соответствии с целями функционирования определен класс задающих и возмущающих воздействий, который может быть представлен в виде моделей (2.5) и (2.6) соответственно. На выходе САУ необходимо поддерживать нулевое значение или заданный закон изменения выходной переменной. Иными словами, для разных режимов необходимо обеспечить выполнение соответствующих целевых условий: для режима стабилизации необходимо обеспечить сходимость к нулю нормы вектора регулируемых переменных¹,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0,$$

для режима слежения необходимо обеспечить сходимость к нулю нормы вектора выходной переменной модели ошибок,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\| = 0.$$

Замечание 2.2 В частном случае, когда регулируемая переменная $y(t)$ и выход модели ошибок $\epsilon(t)$ представляют собой скалярные переменные, целевые условия для режима стабилизации и режима слежения могут быть сформулированы как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$$

соответственно.

Если продифференцировать по времени выражение (2.7) для режима стабилизации или выражение (2.8) для режима слежения, принимая во внимание соотношения (2.1), (2.5), то модель ошибок выводится в следующем виде:

– для режима стабилизации:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t), \quad (2.9)$$

¹ Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора или спектральную норму матрицы.

– для режима слежения:

$$\dot{e}(t) = (M_g \Gamma_g - A M_g - B_g H_g) \xi_g(t) + A e(t) - B u(t) - B_f f(t) \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9), (2.10) отличаются друг от друга только слагаемым

$$(M_g \Gamma_g - A M_g - B_g H_g) \xi_g(t),$$

поэтому решение задачи слежения можно свести к решению задачи стабилизации и сформулировать как решение задачи обеспечения нулевой установившейся ошибки для обоих режимов функционирования.

Будем полагать, что для выражений (2.9), (2.10) необходимо найти такие сигналы управления $u(t)$, которые позволят обеспечить требуемый режим функционирования и нейтрализовать влияние внешних возмущений.

Метод модального управления позволяет решить поставленную задачу управления. Данный метод основан на обеспечении в замкнутой системе требуемого набора мод.

Определение 2.6 *Мода – это часть решения линейного однородного дифференциального уравнения, выражающаяся через экспоненту, корень характеристического полинома и время.*

Для метода модального управления характерно использование статического регулятора для формирования сигналов управления.

Определение 2.7 *Статический регулятор – это регулятор, который формирует управляющий сигнал как линейную функцию всех компонент вектора состояния в виде*

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.11)$$

где K – матрица регулятора размерности $m \times n$, элементы которой определяют коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора ошибок:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix}.$$

В скалярном виде статический регулятор описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} u_1(t) = -k_{11}x_1(t) - k_{12}x_2(t) - \dots - k_{1n}x_n(t) \\ u_2(t) = -k_{21}x_1(t) - k_{22}x_2(t) - \dots - k_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ u_m(t) = -k_{m1}x_1(t) - k_{m2}x_2(t) - \dots - k_{mn}x_n(t) \end{cases}.$$

Если регулятор, формирующий сигнал управления, содержит динамические компоненты (например, устройства оценки неизмеряемых сигналов), то в этом случае он является *динамическим*.

Структурные схемы САУ с режимами стабилизации и слежения показаны на рисунках 2.1 и 2.2 соответственно.

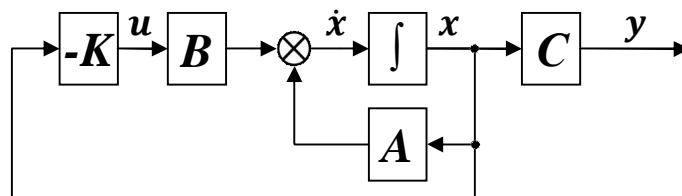


Рисунок 2.1 – Структурная схема САУ в режиме стабилизации

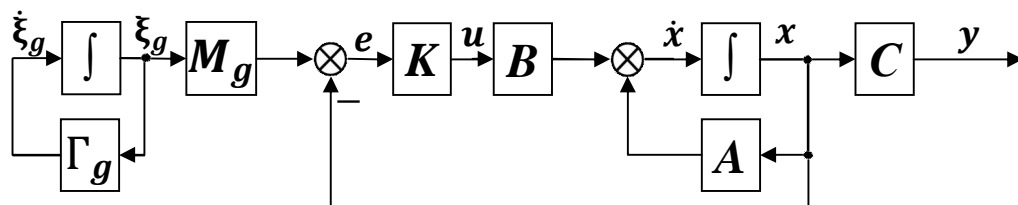


Рисунок 2.2 – Структурная схема САУ в режиме слежения

Пусть САУ функционирует в режиме стабилизации, и на объект управления не действуют внешние возмущения, то есть в уравнении (2.9) при $f(t) \equiv 0$. В этом случае модель ошибок можно переписать в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.12)$$

С помощью подстановки уравнения (2.11) в выражение (2.12) получим описание САУ или замкнутой системы в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t) = Fx(t),$$

где $F = A - BK$ – матрица описания замкнутой системы размера $n \times n$.

Тогда уравнение замкнутой системы определяется как

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.4) имеет схожий вид с системой уравнений (2.13). В результате динамика вектора состояния замкнутой системы будет совпадать с динамикой вектора состояния эталонной модели, если коэффициенты или корни характеристических полиномов матриц (или собственных чисел матриц) Γ и F будут совпадать.

Замечание 2.3 *Динамика вектора состояния замкнутой системы будет повторять динамику вектора состояния эталонной модели, если выполняется следующее соотношение:*

$$x(0) = M\xi(0),$$

где M – невырожденная матрица преобразования (подобия) размерности $n \times n$, которая может быть определена из соотношения подобия $F = M\Gamma M^{-1}$, $\xi(0)$ – начальные условия эталонной модели.

Таким образом, задача синтеза регулятора методом модального управления формулируется следующим образом: для заданного объекта управления, обладающего свойством полной управляемости, требуется найти такую матрицу линейных стационарных обратных связей K , которая обеспечивает замкнутой системе заданный набор мод (или набор собственных чисел матрицы замкнутой системы $F = A - BK$).

Замечание 2.4 *Чтобы обеспечить в замкнутой системе управления необходимый набор мод, достаточно найти такую матрицу линейных стационарных обратных связей, которая обеспечивает в замкнутой системе управления (2.13) требуемые корни или коэффициенты характеристического полинома.*

Пусть собственные числа матриц Γ и F связаны следующим соотношением:

$$\lambda_i^* = \omega_0 \lambda_i, \quad (2.14)$$

где ω_0 – положительное число; λ_i^* – собственное число матрицы Γ ; λ_i – собственное число матрицы F ; $i = \overline{1, n}$.

Если собственные числа матрицы Γ не кратные, то решение уравнения (2.4) будет иметь вид

$$\xi(t) = \exp(\Gamma t) \xi(0) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(\lambda_i^* t). \quad (2.15)$$

Аналогично, решение уравнения (2.13) будет иметь вид

$$x(t) = \exp(Ft) x(0) = \sum_{i=1}^n \bar{C}_i \exp(\lambda_i t), \quad (2.16)$$

где C_i, \bar{C}_i – коэффициенты, определяемые из начальных условий.

Для случая, когда все собственные числа матрицы Γ кратные, решение уравнения (2.4) будет иметь вид

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n C_i t^{i-1} \exp(\lambda_i^* t).$$

Подставляя уравнение (2.14) в формулу (2.15) и учитывая соотношение (2.16), выражение для решения уравнения движения эталонной модели, при допущении выполнения соотношения $C_i = \bar{C}_i$, принимает вид

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(\lambda_i^* t) = x(\omega_0 t).$$

Замечание 2.5 *Принцип подобия заключается в том, что увеличение параметра ω_0 приводит к увеличению скорости протекания процессов в системе (или уменьшению времени переходного процесса), но при этом не влияет на характер протекания этих процессов.*

Тогда быстродействие процессов, протекающих в эталонной модели, или время переходного процесса находится как

$$t_{\Pi}^* = \frac{t_{\Pi}}{\omega_o}$$

Последнее соотношение дает возможность формировать матрицы эталонной модели на основе типовых переходных характеристик, получаемых методом стандартных переходных функций. Таким образом, задачу синтеза регулятора методом модального управления можно переформулировать следующим образом: для заданного объекта управления, обладающего свойством полной управляемости, требуется найти такую матрицу линейных стационарных обратных связей, которая обеспечит замкнутую систему заданным набором динамических показателей качества (перерегулирование и время переходного процесса).

Замечание 2.6 *Следует отметить, что метод модального управления позволяет задать алгебраический спектр (набор собственных чисел) матрицы замкнутой системы, который определяет динамику вектора состояния. Также непосредственно на характер протекание процессов в системе влияют ненулевые начальные условия объекта. Поэтому в общем случае (если $C_i \neq \bar{C}_i$) не всегда удастся гарантировать обеспечение необходимых динамических показателей качества в замкнутой системе средствами модального управления.*

Вопросы для самоконтроля.

1. По какому принципу осуществляется выбор параметров эталонной модели?
2. Какие сигналы могут быть описаны в качестве выходных переменных линейных автономных генераторов?
3. Позволяет ли модальное управление в общем случае гарантировать достижение желаемых динамических показателей качества?
4. В чем состоит отличие режима слежения от режима стабилизации?

2.2 Матрицы эталонной модели

Матрицы эталонной модели могут быть определены с помощью метода стандартных характеристических полиномов [1, 3]. Стандартные полиномы обеспечивают определенное расположение корней характеристического полинома на комплексной плоскости. В качестве примеров стандартных полиномов рассматриваются полиномы Ньютона (биномиальные полиномы) и Баттерворта.

2.2.1 Стандартные полиномы Ньютона

Стандартные полиномы Ньютона имеют следующий вид [3]:

$$D^*(\lambda) = (\lambda + \omega_0)^n, \quad (2.17)$$

где n – порядок полинома.

Полиномы Ньютона до шестого порядка представлены в таблице 2.1. В соответствии с выражением (2.17) характеристический полином имеет отрицательные вещественные кратные корни (кратности n), которые равны

$$\lambda_i = -\omega_0, i = \overline{1, n}.$$

Такие корни обеспечивают в системе апериодический характер переходных процессов, поскольку мнимая часть данных корней равна нулю.

Таблица 2.1 – Полиномы Ньютона

Порядок	Стандартный полином Ньютона (биномиальный полином)
1	$\lambda + \omega_0$
2	$\lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2$
3	$\lambda^3 + 3\omega_0\lambda^2 + 3\omega_0^2\lambda + \omega_0^3$
4	$\lambda^4 + 4\omega_0\lambda^3 + 6\omega_0^2\lambda^2 + 4\omega_0^3\lambda + \omega_0^4$
5	$\lambda^5 + 5\omega_0\lambda^4 + 10\omega_0^2\lambda^3 + 10\omega_0^3\lambda^2 + 5\omega_0^4\lambda + \omega_0^5$
6	$\lambda^6 + 6\omega_0\lambda^5 + 15\omega_0^2\lambda^4 + 20\omega_0^3\lambda^3 + 15\omega_0^4\lambda^2 + 6\omega_0^5\lambda + \omega_0^6$

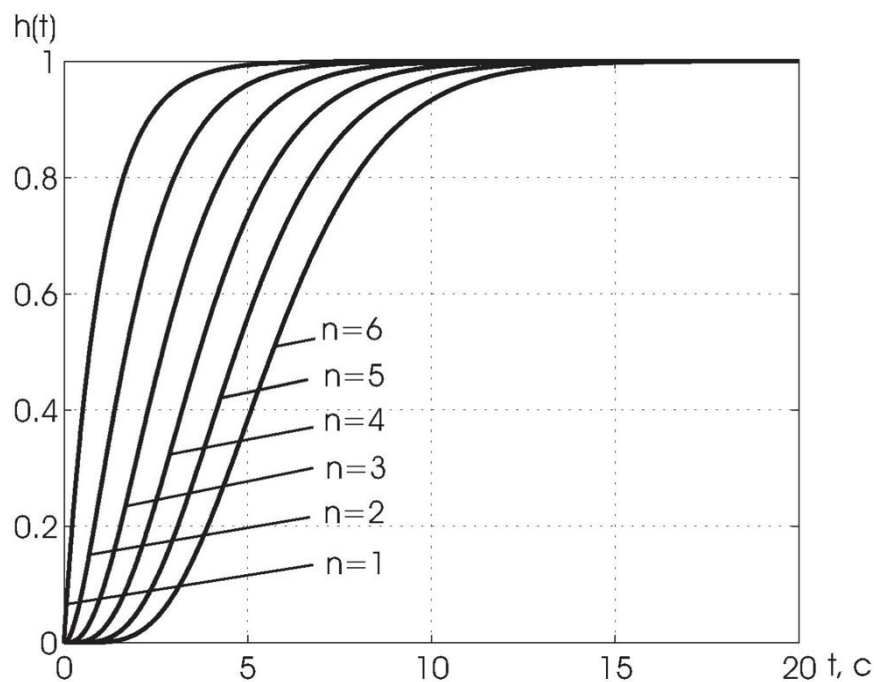


Рисунок 2.3 – Нормированные переходные характеристики полиномов Ньютона

Замечание 2.7 В реальных технических системах управления обеспечение нулевого перерегулирования не всегда целесообразно. В некоторых случаях за счет наличия небольшого перерегулирования можно достичь повышения быстродействия системы с меньшими энергетическими затратами на управление.

Для того чтобы сформировать полином Ньютона, необходимо определить значение параметра ω_0 . Это можно сделать с помощью метода стандартных переходных характеристик. Метод основан на применении нормирования переходных характеристик, которое выполняется по времени относительно параметра ω_0 . Нормированные переходные характеристики получаются путем замены значения параметра ω_0 на единицу в формулах, определяющих полином Ньютона при выбранном порядке. Графики нормированных переходных функций полиномов Ньютона показаны на рисунке 2.3.

2.2.2 Стандартные полиномы Баттерворта

В стандартном полиноме Баттерворта корни распределены равномерно в левой полуплоскости на полуокружности с радиусом ω_0 . Угол между соседними радиус-векторами корней составляет $\frac{180}{n}$, а угол между ближайшими радиус-векторами и мнимой осью равен $\frac{180}{2n}$. Поэтому корни полинома рассчитываются по формуле

$$\lambda_i^* = \omega_0 \left(\cos \left(\frac{\pi(2i-1)}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\pi(2i-1)}{n} \right) \right), i = \overline{1, n}.$$

Полином Баттерворта определяется следующим образом:

$$D^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \omega_0 \exp j \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2i-1)}{n} \right) \right).$$

Полиномы Баттерворта до шестого порядка представлены в таблице 2.2. Нормированные переходные характеристики (т.е. при $\omega_0 = 1$) для полиномов Баттерворта представлены на рисунке 2.4. Как видно из этого рисунка, перерегулирование нормированных стандартных переходных характеристик составляет менее 20%.

Таблица 2.2 – Полиномы Баттерворта

Порядок	Стандартный полином Баттерворта
1	$\lambda + \omega_0$
2	$\lambda^2 + 1.4\omega_0\lambda + \omega_0^2$
3	$\lambda^3 + 2\omega_0\lambda^2 + 2\omega_0^2\lambda + \omega_0^3$
4	$\lambda^4 + 2.6\omega_0\lambda^3 + 3.4\omega_0^2\lambda^2 + 2.6\omega_0^3\lambda + \omega_0^4$
5	$\lambda^5 + 3.24\omega_0\lambda^4 + 15.24\omega_0^2\lambda^3 + 5.24\omega_0^3\lambda^2 + 3.24\omega_0^4\lambda + \omega_0^5$
6	$\lambda^6 + 3.86\omega_0\lambda^5 + 7.46\omega_0^2\lambda^4 + 9.13\omega_0^3\lambda^3 + 7.46\omega_0^4\lambda^2 + 3.86\omega_0^5\lambda + \omega_0^6$

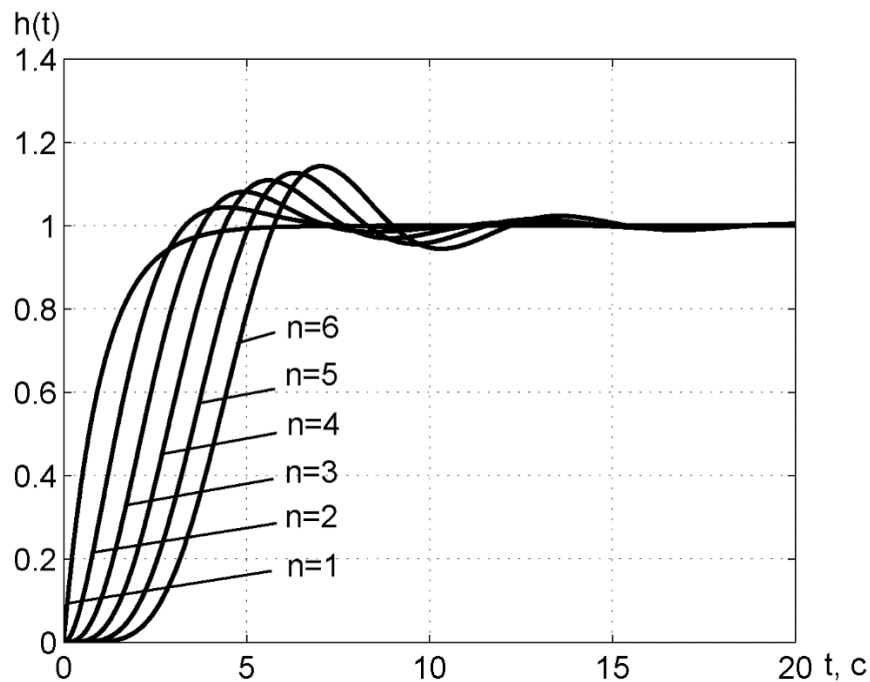


Рисунок 2.4 – Нормированные переходные характеристики полиномов Баттерворта

2.2.3 Построение желаемых характеристических полиномов

Алгоритм формирования желаемого характеристического полинома состоит из следующих шагов:

$\frac{3}{4}$ определение порядка желаемого характеристического полинома, который должен совпадать с порядком объекта управления;

$\frac{3}{4}$ выбор характеристического полинома на основе заданных в техническом задании показателей качества. Если заданное значение перерегулирования менее 5%, то выбирается полином Ньютона, если заданное перерегулирование более 5%, то выбирается полином Баттерворта;

$\frac{3}{4}$ построение нормированной переходной характеристики с помощью моделирования, то есть подача единичного ступенчатого воздействия на вход системы, которая определяется передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{D^*(\lambda)} \Big|_{\lambda=s, \omega_0=1}$$

где $D^*(\lambda)$ – полином Ньютона или Баттерворта соответствующего порядка.

^{3/4} определение времени переходного процесса t_{Π}^* по полученной нормированной переходной характеристике, то есть определение момента времени, когда переходный процесс попадает в Δ -область и больше ее не покидает, где Δ -область находится в заданных техническим заданием пределах от установившегося значения выходной переменной;

^{3/4} расчет параметра ω_0 на основе желаемого времени переходного процесса t_{Π} по формуле

^{3/4}

$$\omega_0 = \frac{t_{\Pi}^*}{t_{\Pi}}$$

^{3/4} расчет коэффициентов желаемого характеристического полинома.

В результате выполнения приведенных выше пунктов рассчитывается требуемый характеристический полином замкнутой системы.

Как уже упоминалось ранее в Замечании 2.6, на динамические показатели качества системы (время переходного процесса и перерегулирование) влияют не только коэффициентами характеристического полинома, но и ненулевые начальные условия объекта управления. Также динамические показатели качества системы определяются нулями системы (коэффициентами полинома числителя передаточной функции). Следовательно, в общем случае модальное управление не всегда позволяет гарантировать обеспечение в замкнутой системе необходимое время переходного процесса и перерегулирование. Аналитический расчет времени переходного процесса и перерегулирование для систем высокого порядка и при наличии нулей и ненулевых начальных условий может оказаться трудоемким процессом. Поэтому при расчете соответствующих показателей качества в прикладных задачах используют средства моделирования динамики, например программную среду MATLAB [1, 12, 15, 16]. В то же время корни характеристического полинома определяют непосредственно такие корневые (или косвенные) показатели качества [3, 13], как степень устойчивости и степень колебательности.

Степень устойчивости замкнутой системы определяется по корням характеристического полинома следующим образом:

$$\alpha = \min_i |Re \lambda_i^*| = -\max_i Re \lambda_i^*, \quad i = \overline{1, n},$$

что соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня характеристического полинома (см. рисунок 2.5).

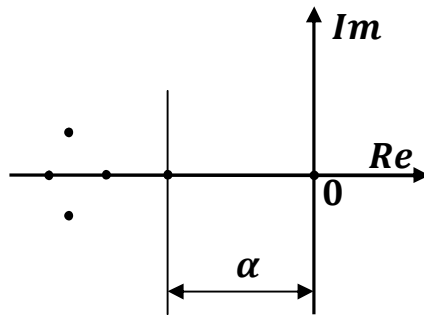


Рисунок 2.5 – Определение степени устойчивости по расположению корней на комплексной плоскости

Степень колебательности замкнутой системы может быть определена по расположению корней на комплексной плоскости следующим образом (см. рисунок 2.6):

$$\mu = \max_i \left| \frac{Im \lambda_i^*}{Re \lambda_i^*} \right| = \operatorname{tg}(\varphi_{max}), i = \overline{1, n}.$$

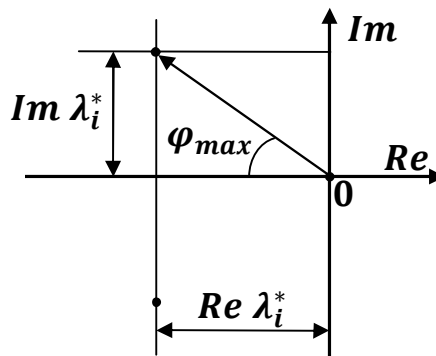


Рисунок 2.6 – Определение степени колебательности по расположению корней на комплексной плоскости

Степень устойчивости косвенно характеризует время переходного процесса, а степень колебательности – перерегулирование в системе. Поэтому, если при использовании модальных методов управления замкнутая система демонстрирует динамические показатели, которые не удовлетворяют техническому заданию, то можно выполнить следующие действия:

- ¾ для уменьшения времени переходного процесса следует увеличить степень устойчивости замкнутой системы;
- ¾ для уменьшения перерегулирования следует уменьшить степень колебательности замкнутой системы.

2.2.4 Способы формирования матриц эталонной модели

Рассмотрим объект управления в виде модели вход-состояние выход:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (2.18)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта управления; $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – выходная переменная; $u(t) \in \mathbb{R}^1$ – сигнал управления; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица состояния объекта управления; $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – матрица входа; $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ – матрица выхода.

Пусть для системы на основе заданных динамических показателей качества сформирован желаемый характеристический полином $D^*(\lambda)$ или желаемые корни характеристического полинома λ_i^* , где $i = \overline{1, n}$.

На основе рассчитанных желаемых корней характеристического полинома можно построить эталонную модель вида (2.4), которая должна обладать свойством полной наблюдаемости.

Рассмотрим способы формирования матрицы эталонной модели в виде жордановой (в частном случае диагональной) и наблюдаемой канонических формах.

При задании матриц эталонной модели на основе жордановой (или диагональной) канонической формы для желаемых корней характеристического полинома возможны следующим варианты:

$\frac{3}{4}$ желаемые корни $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ вещественные и различные; в этом случае матрицы эталонной модели формируются в виде

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \lambda_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^* \end{vmatrix}, H = |1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1|.$$

$\frac{3}{4}$ желаемые корни вещественные и одинаковые (кратные), то есть $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dots = \lambda_n^* = \lambda^*$, где λ^* – корень n -кратности; в этом случае матрицы эталонной модели формируются в виде

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \lambda^* & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^* & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^* \end{vmatrix}, H = |1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|.$$

—два желаемых корня комплексно-сопряженные корня, остальные — вещественные и различные, то есть $\lambda_1^* = \alpha^* + j\beta^*$, $\lambda_2^* = \alpha^* - j\beta^*$, где α^* — вещественная часть желаемого корня, β^* — мнимая часть желаемого корня, $\lambda_3^*, \lambda_4^*, \dots, \lambda_n^*$ — остальные желаемые вещественные и различные корни; в этом случае матрицы эталонной модели строятся в блочно-диагональном виде:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \alpha^* & \beta^* & 0 & \dots & 0 \\ -\beta^* & \alpha^* & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^* \end{vmatrix}, H = |1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1|.$$

Матрицы эталонной модели в канонической наблюдаемой форме формируются на основе желаемого характеристического полинома

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + a_{n-2}^* \lambda^{n-2} + \dots + a_2^* \lambda^2 + a_1^* \lambda + a_0^*$$

следующим образом:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0^* \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^* \end{vmatrix}, H = |0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1|.$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что понимается под термином «стандартный характеристический полином»?
2. Каким образом можно изменить косвенные показатели качества с целью уменьшения времени переходного процесса?
3. В каком случае эталонную модель целесообразно формировать на основе полинома Ньютона?
4. В каком случае эталонную модель целесообразно формировать на основе полинома Баттерворта?
5. Какие ограничения накладываются на выбор параметров матрицы H эталонной модели?

2.3 Синтез стабилизирующего регулятора методом модального управления

2.3.1 Постановка задачи

Пусть объект управления задан в виде (2.18) и является полностью управляемым.

В режиме стабилизации вектор ошибок совпадает с вектором состояния объекта управления:

$$e(t) = x(t). \quad (2.19)$$

Дифференцируя по времени уравнение (2.19) и принимая во внимание выражение объекта управления (2.18), модель ошибок можно переписать как

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}. \quad (2.20)$$

Сигнал управления сформирован в виде

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.21)$$

где K – матрица линейных стационарных обратных связей.

Путем подстановки (2.21) в (2.20), замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = Fx(t),$$

где $F = A - BK$ – матрица размера $n \times n$, характеризующая динамические свойства замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы будет равен

$$D^* = \det[\lambda I - F] = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + a_1^* \lambda + a_0^*.$$

Пусть по заданному набору показателей качества определены желаемые корни характеристического полинома $\lambda_i^*, i = \overline{1, n}$ или желаемые коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы $a_i^*, i = \overline{1, n-1}$.

Задача модального управления состоит в расчете матрицы K , которая обеспечит в замкнутой системе желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома.

2.3.2 Синтез стабилизирующего регулятора

Для относительно простого расчета искомой матрицы K без использования эталонной модели (2.4) преобразуем объект управления (2.18) к каноническому управляемому виду и введем новый вектор $z(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$z(t) = Px(t),$$

где P – невырожденная матрица преобразований размера $n \times n$.

Обратное преобразование определяется как

$$x(t) = P^{-1}z(t). \quad (2.22)$$

Подставляя выражение (2.22) в исходное уравнение объекта управления (2.18) и домножая слева левую и правую части первого уравнения системы на матрицу P , получаем модель объекта управления в преобразованном базисе:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = PAP^{-1}z(t) + PBu(t) \\ y(t) = CP^{-1}z(t) \end{cases}. \quad (2.23)$$

Пусть матрица преобразований P такова, что пара матриц A, B будет переведена в каноническую управляемую форму, тогда модель объекта управления в новом базисе принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_k z(t) + B_k u(t) \\ y(t) = C_k z(t) \end{cases}, \quad (2.24)$$

где $A_k = PAP^{-1}$ – матрица состояний в канонической управляемой форме; $B_k = PB$ – матрица входов в канонической управляемой форме; $C_k = CP^{-1}$ – матрица выхода в канонической управляемой форме.

Матрицы описания объекта управления в канонической управляемой форме имеют следующий вид:

$$A_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{vmatrix}; B_k = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (2.25)$$

$$C_k = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0],$$

где a_i – коэффициенты характеристического полинома (знаменателя передаточной функции) исходного объекта управления, ($i = 0, n - 1$); b_j – коэффициенты числителя передаточной функции объекта управления ($j = 0, m$). Коэффициенты a_i, b_j могут быть определены путем перехода от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход [3, 15, 16, 17]:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Учитывая каноническую форму модели объекта (2.24), модель ошибок (2.20) и уравнение (2.21), описание замкнутой системы приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P^{-1}A_k P x(t) + P^{-1}B_k u(t) \\ y(t) = C_k P x(t) \\ u(t) = -K_k P x(t) \end{cases}, \quad (2.26)$$

где $K_k = |k_{k1} \ k_{k2} \ \dots \ k_{kn}|$ – матрица линейных обратных связей в канонической управляемой форме.

Путем подстановки третьего уравнение в первое уравнение выражения (2.26) и упрощая его, получаем выражения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P^{-1}F_k P x(t) \\ y(t) = C_k P x(t) \end{cases},$$

где

$$F_k = A_k - B_k K_k. \quad (2.27)$$

Далее, подставляя (2.25) в (2.27), получаем матрицу описания замкнутой системы в каноническом управляемом базисе [15]:

$$F_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_{k1} & -a_1 - k_{k2} & -a_2 - k_{k2} & \dots & -a_{n-1} - k_{kn} \end{vmatrix}$$

Ее характеристический полином имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{kn})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + k_{k2})\lambda + (a_0 + k_{k1}).$$

Чтобы коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы совпадали с желаемыми, коэффициенты обратных связей выбираются из условия равенства коэффициентов характеристического полинома при соответствующих степенях λ , то есть $a_i^* = a_i + k_{k(i+1)}$ при $i = 0, n - 1$. Тогда коэффициенты матрицы K_k находятся как

$$k_{k(i+1)} = a_i^* - a_i. \quad (2.28)$$

Осуществляя обратное преобразование к исходному базису, описание замкнутой системы приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

где

$$F = P^{-1}F_kP; \quad C = C_kP.$$

Матрицу линейных стационарных связей можно пересчитать в базисе исходного описания системы:

$$K = K_kP.$$

Замечание 2.8 В соответствии с условием эквивалентности, когда матрица преобразования P невырождена, характеристический полином исходной системы и системы в канонической управляемой форме остается прежним:

$$\det[\lambda I - F] = \det[\lambda I - F_k].$$

В результате, если элементы матрицы K_k выбираются исходя из уравнения (2.28), то коэффициенты характеристического полинома САУ будут иметь заданные значения.

Вопросы для самоконтроля.

1. Почему можно считать, что в линейной системе в режиме стабилизации вектор ошибок совпадает с вектором состояния объекта управления?

2. Как вычислить характеристический полином линейной динамической системы?

3. Из чего следует, что с помощью линейной стационарной обратной связи можно обеспечить любой желаемый набор корней характеристического полинома замкнутой системы?

4. Как осуществляется переход от канонического управляемого к исходному базису динамической системы?

2.4 Синтез модального управления на базе матричного уравнения Сильвестра

2.4.1 Постановка задачи

Теперь рассмотрим способ построения регулятора с использованием эталонной модели вида (2.4). Пусть объект управления описывается в виде модели вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта управления; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор выходных переменных; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор сигналов управления; A – матрица размера $n \times n$, определяющая состояние объекта управления; B – матрица размера $n \times m$, определяющая входы управляющих воздействий; C – матрица размера $l \times n$, определяющая выходы системы.

Объект управления – полностью управляемый.

Сигнал управления формируется следующим образом:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.30)$$

где K – матрица линейных обратных связей.

В соответствии с требуемыми показателями качества определяются желаемые коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы:

$$a_0^*, a_1^*, \dots, a_{n-1}^*,$$

или желаемые корни:

$$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*.$$

Задача синтеза модального управления состоит в нахождении матрицы K , обеспечивающей в замкнутой системе желаемые корни характеристического полинома.

2.4.2 Синтез модального регулятора на базе уравнения типа Сильвестра

Как было продемонстрировано ранее, модель ошибок системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Подставляя в выражении (2.31) сигнал управления (2.30), получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

где $F = A - BK$.

Сформируем эталонную модель по типу системы (2.4), которая будет соответствовать требуемой модели замкнутой системы и описываться следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma\xi(t) \\ v(t) = H\xi(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

Характеристический полином матрицы Γ соответствует желаемому характеристическому полиному замкнутой системы:

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^*\lambda^{n-1} + \dots + a_1^*\lambda + a_0^*.$$

Матрица выхода эталонной модели H выбирается из условия полной наблюдаемости эталонной модели (2.33). Динамика вектора $\xi(t)$ определяет желаемую динамику вектора состояния объекта управления $x(t)$.

Пусть поведение вектора состояния замкнутой системы совпадает с поведением вектора состояния эталонной модели с точностью до линейного преобразования и выполняется условие подобия: $x(t) = M\xi(t)$, где M – невырожденная матрица преобразования размера $n \times n$.

Тогда искомые управляющие воздействия равны выходным переменным эталонной модели и, приравняв соотношение (2.30) и второе уравнение системы (2.33), получаем выражение

$$H\xi(t) = -KM\xi(t). \quad (2.34)$$

Теперь перепишем уравнение (2.32) с учетом условия подобия

$$-M\dot{\xi}(t) = -FM\xi(t) \quad (2.35)$$

и, домножая слева выражение (2.35) на M^{-1} , получим

$$\dot{\xi}(t) = M^{-1}FM\xi(t). \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) представляет собой описание замкнутой системы управления в новом базисе. Поскольку поведение замкнутой системы должно соответствовать эталонной модели, подставим в выражение (2.36) первое уравнение соотношения (2.33) и, учитывая выражение (2.34), выведем следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} \Gamma\xi(t) = M^{-1}FM\xi(t) \\ H\xi(t) = -KM\xi(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

Система уравнений (2.37) справедливо независимо от значений вектора $\xi(t)$, если выполняются условия

$$\begin{cases} \Gamma = M^{-1}FM \\ H = -KM \end{cases} \quad (2.38)$$

После домножения слева обеих частей первого уравнения системы (2.38) на матрицу преобразования M перепишем систему (2.38) в виде

$$\begin{cases} M\Gamma = FM \\ H = -KM \end{cases} \quad (2.39)$$

Заменяя в уравнении (2.39) матрицу F выражением $A - BK$, получаем соотношения

$$\begin{cases} M\Gamma = AM - BKM \\ H = -KM \end{cases} \quad (2.40)$$

Теперь, подставляя второе уравнение в первое системы (2.40) и определяя соотношение для матрицы линейных стационарных связей, получаем следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} BH = M\Gamma - AM \\ K = -HM^{-1} \end{cases} \quad (2.41)$$

Синтез модального регулятора заключается в решении первого алгебраического матричного уравнения Сильвестра (2.41) относительно матрицы M и вычислении матрицы K (второе уравнение выражения (2.41)).

Замечание 2.9 Для одноканальной системы уравнение Сильвестра имеет единственное решение относительно матрицы M , если выполняются следующие условия:

- $\frac{3}{4}$ объект управления полностью управляемый;
- $\frac{3}{4}$ эталонная модель полностью наблюдаема;
- $\frac{3}{4}$ характеристические полиномы матриц A и Γ не имеют одинаковых корней.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какие ограничения накладываются на матрицу Γ при синтезе модального регулятора на базе уравнения Сильвестра?
2. Каким образом следует пересчитать матрицу линейных обратных связей K , если $F = A + BK$?

2.5 Альтернативные способы построения алгоритмов управления

2.5.1 Алгоритмы управления на базе формул Аккермана и Басса-Гура

Одной из наиболее известных явных формул расчета матрицы линейной обратной связи K , применяемых для синтеза модальных регуляторов в динамических системах с одним входом и одним выходом, является формула Аккермана. Вывод формулы базируется на тождестве Гамильтона-Кэли [10, 14, 16, 17].

Пусть задан объект управления вида (2.18). При этом объект управления удовлетворяет условию полной управляемости. Сигнал управления формируется в виде (2.21).

Пусть выбран желаемый характеристический полином замкнутой системы

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + a_{n-2}^* \lambda^{n-2} + \dots + a_2^* \lambda^2 + a_1^* \lambda + a_0^*. \quad (2.42)$$

Тогда по формуле Аккермана матрица коэффициентов регулятора определяется выражением

$$K = |0 \quad \dots \quad 0 \quad 1| P_U^{-1} D^*(A), \quad (2.43)$$

где $D^*(A) = A^n + a_{n-1}^* A^{n-1} + a_{n-2}^* A^{n-2} + \dots + a_2^* A^2 + a_1^* A + a_0^*$ – матричный

полином, построенный по заданному характеристическому полиному (2.42); P_U – матрица управляемости, определяемая выражением (2.2).

Другой явной формулой расчета матрицы K является формула Басса-Гура [14]. В этом случае матрица коэффициентов регулятора K ищется в соответствии с выражением

$$K = \bar{a}A_a P_U^{-1}, \quad (2.44)$$

где $\bar{a} = |a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \dots \quad a_0^* - a_0|$ – вектор-строка разности коэффициентов желаемого и исходного характеристических полиномов, P_U – матрица управляемости, определяемая выражением (2.2). Коэффициенты исходного характеристического полинома определяются по формуле

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

$$A_a = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.10 Основным достоинствами формул Аккермана (2.43) и Басса-Гура (2.44) является их явный вид, что позволяет по известным матрицам объекта управления A и B и требуемому характеристическому полиному $D^*(\lambda)$ рассчитать матрицу K , обеспечивающую в замкнутой системе заданные показатели качества.

2.5.2 Алгоритм управления, обеспечивающий желаемую степень сходимости

Рассмотрим задачу синтеза управления с обеспечением желаемой степени сходимости (или желаемой степени устойчивости) замкнутой системы. В этом случае построение регулятора в виде линейной функции состояний объекта можно осуществить с помощью модифицированного уравнения типа Риккати.

Рассмотрим линейный непрерывный стационарный объект управления вида (2.29). Решение данной задачи заключается в построении закона управления вида

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.45)$$

где K – матрица линейных стационарных связей.

Синтез регулятора можно осуществить с помощью матричного уравнения типа Риккати вида

$$A^T P + PA - \nu K^T R K = -Q, \quad (2.46)$$

при

$$K = R^{-1} B^T P, \quad (2.47)$$

где P – симметрическая квадратная матрица; Q – симметрическая, по крайней мере, положительно полуопределенная матрица, которая определяет штрафы на вектор состояния объекта; R – квадратная строго положительно-определенная матрица, которая определяет штраф на управления; ν – параметр модификации уравнения, принимающий целые значения в пределах от 0 до 2. Если подставить (2.47) в (2.46), то будет получено квадратичное уравнение Риккати, которое относительно матрицы P имеет два решения. Выбор осуществляется в пользу того решения, в соответствии с которым матрица P будет положительно определенной.

При замыкании системы регулятором (2.45) получим следующее равенство:

$$\dot{x}(t) = Fx(t),$$

где $F = A - BK$ – матрица замкнутой системы. Следует отметить, что в этом случае система асимптотически устойчива. Чтобы это проверить, выпишем уравнение Ляпунова для замкнутой системы:

$$A^T P + PA - \nu K^T R K = -Q - (\nu - 2)K^T R K,$$

или

$$F^T P + PF = -Q - (\nu - 2)K^T R K.$$

Матрица P , относительно которой решается последнее уравнение, будет положительно определенной.

Если параметр ν выбрать равным единице ($\nu = 1$), то будет получено классическое уравнение типа Риккати, используемое в решении задачи оптимального управления [1, 5, 14, 16, 17].

Если параметр ν выбрать нулевым ($\nu = 0$), то выражение (2.46) примет

вид уравнения типа Ляпунова. В этом случае его решение относительно матрицы P будет положительно определенным тогда и только тогда, когда матрица A является гурвицевой. Иными словами, объект управления должен быть устойчивым, что является сильным ограничением в использовании данного метода.

Если значение параметра ν выбрать равным двум ($\nu = 2$), то уравнение Риккати позволяет решать задачу нахождения оптимального управления, соответствующего принципу оптимальности по принуждению [8]. В этом случае уравнение Риккати соответствует уравнению Ляпунова для замкнутой системы с синтезированным регулятором. Поэтому можно сделать вывод, что если решение уравнения Риккати будет положительно определенным, то замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Синтез регуляторов с нахождением матрицы линейных обратных связей K с помощью уравнения типа Риккати заключается в следующем:

- выбирается целое значение параметра модификации ν от 0 до 2.
- назначаются матрицы штрафов Q и R исходя из точностных требований и ограничений на управляющие воздействия;
- рассчитывается положительно определенная матрица P , которая представляет собой решение уравнения типа Риккати;
- находится матрица линейных обратных связей K по соотношению (2.47), которая определяет искомый закон управления.

Использование данной процедуры синтеза линейного закона управления ограничивается трудностью в назначении элементов матриц штрафов Q и R по состояниям и управлениям. Также существуют сложности в установлении связи значений матриц Q и R с показателями качества переходных процессов в замкнутой системе (колебательность, перерегулирование, время переходного процесса). Для преодоления указанных проблем удобно использовать понятие экспоненциально устойчивой системы.

Положение равновесия $x = 0$ называется экспоненциально устойчивым, если при любых начальных условиях $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на любых траекториях движения системы выполняется условие

$$\|x(t)\| \leq \rho e^{-\alpha t} \|x_0\|$$

или

$$\|x(t)\| < x_m(t) = \rho e^{-\alpha t} \Delta_0,$$

где $\rho > 1$ и $\alpha > 0$.

Функция $x_m(t)$, ограничивающая сверху текущее значение нормы вектора, называется мажорантой. Параметр α называется степенью сходимости, поскольку он характеризует скорость сходимости процессов к положению равновесия.

Ставится задача отыскания таких законов управления, которые в

замкнутой системе обеспечивают экспоненциальную устойчивость.

Экспоненциальная устойчивость характеризуется параметром α (степенью сходимости процессов или степенью устойчивости системы), которая связана с показателем качества процессов, характеризующим быстродействие системы через соотношение

$$t_{\text{п}} = \frac{3}{\alpha}$$

где $t_{\text{п}}$ – время переходного процесса, данное равенство имеет приемлемую точность, когда абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня не менее чем на порядок меньше абсолютных значений вещественных частей остальных корней.

Чтобы регулятор (2.45) обеспечивал экспоненциальную устойчивость с желаемой степенью сходимости α , осуществим следующую модификацию уравнения (2.46):

$$A^T P + PA - \nu K^T R K + 2\alpha P = -Q, \quad (2.48)$$

где K рассчитывается в соответствии с (2.47).

Уделим основное внимание случаю, когда значение параметра $\nu = 2$, то есть когда уравнение (2.48) представляет собой модифицированное уравнение Ляпунова.

Теперь покажем, что если найдена матрица K (2.47) на основании решения уравнения Риккати (2.48), то регулятор (2.45) обеспечивает в замкнутой системе экспоненциальную устойчивость со степенью сходимости равной α . Для этого рассчитаем производную по времени от квадратичной функции Ляпунова на всех траекториях движения системы и проверим выполнение условия экспоненциальной устойчивости:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -2\alpha V(x(t)),$$

где $V(x(t))$ – квадратичная функция Ляпунова вида

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t). \quad (2.49)$$

Если матрица P рассчитана как положительно определенное решение уравнения (2.48) при значении параметра $\nu = 2$ и с заданной степенью сходимости α , то будет выполняться условие

$$x^T(t)(A^T P + PA - 2K^T R K + 2\alpha P)x(t) = -x^T(t)Qx(t),$$

а поскольку матрица Q является, по крайней мере, положительно-полуопределенной, то будет справедливым следующее неравенство:

$$x^T(t)(A^T P + PA - 2K^T R K)x(t) \leq -2\alpha x^T(t)Px(t).$$

Таким образом, выполнение условия экспоненциальной устойчивости со степенью сходимости α подтверждено.

Замечание 2.11 Рассмотренная процедура расчета матриц линейных обратных связей K позволяет синтезировать регулятор, который обеспечивает в замкнутой системе экспоненциальную устойчивость с желаемой степенью сходимости процессов α , выбираемой исходя из требования к быстродействию системы. При этом не осуществляется строгий расчет желаемых мод в соответствии с эталонной моделью или желаемым характеристическим полиномом. Поэтому данный алгоритм синтеза не относится к классу классических модальных методов.

2.5.3 Алгоритм управления, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость

Пусть поведение динамической системы описывается уравнением движения вида

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (2.50)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния динамической системы, $F(x) \in R^n$ – нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x(0) \in R^n$ решение уравнения (2.50) существует и единственно.

Введем понятие качественной экспоненциальной устойчивости для системы, описываемой уравнением (2.50) [6].

Положение равновесия $x = 0$ непрерывной динамической системы называется качественно экспоненциально устойчивым (КЭУ) в «большом», если для любых траекторий движения системы $x(t)$ системы (2.50), исходящих из произвольных начальных условий $x(0) \in R^n$, существуют такие параметры $r > 0$, $\rho \geq 1$ и $\beta: \beta + r < 0$, что для любого момента времени $t \geq 0$ будет справедливым следующее неравенство:

$$\|x(t) - e^{\beta t}x(0)\|_v \leq \rho(e^{(\beta-r)t} - e^{\beta t})\|x(0)\|_v$$

В неравенстве $\|*\|_v$ – норма вектора (v – целое положительное число), определяемая выражением

$$\|x\|_v = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{\frac{1}{v}}.$$

Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости представлена на рисунке 2.7 для параметра $\rho = 1$. Параметр β характеризует среднее поведение траекторий и их затухание, а параметр r – разброс траекторий относительно среднего значения.

Определение качественной экспоненциальной устойчивости в «малом» может быть введено для ограниченной области, включающей начало координат с использованием аналогичного подхода.

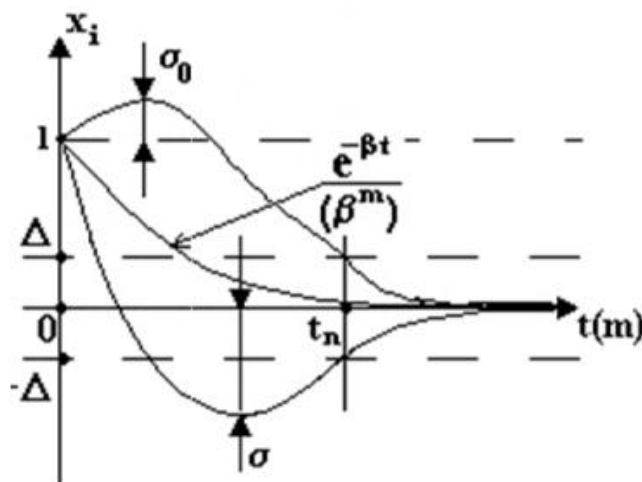


Рисунок 2.7 – Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости

Для получения достаточного условия качественной экспоненциальной устойчивости введем функцию Ляпунова как корень степени v от положительно однородной функции $V(x)$ степени v :

$$V(x) = [\bar{V}(x)]^{\frac{1}{v}}.$$

Положение равновесия $x = 0$ качественно экспоненциально устойчиво, если существует такая функция Ляпунова $V(x)$ и такие параметры $r > 0$ и β : $\beta + r < 0$, что на всех траекториях движения системы (2.50) для любого момента времени $t \geq 0$ выполняется следующее неравенство:

$$V \left[\frac{d}{dt} x(t) - \beta x(t) \right] \leq rV[x(t)]. \quad (2.51)$$

Геометрическая интерпретация неравенства показана на рисунке 2.8 для системы второго порядка $n = 2$.

Введем функцию Ляпунова вида

$$V(x) = [x^T P x]^{\frac{1}{2}},$$

где P – симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$.

Модифицированное уравнение Ляпунова может быть записано в следующем виде:

$$(F - \beta I)^T P (F - \beta I) - r^2 P = -Q, \quad (2.52)$$

где Q – положительно-полуопределенная $n \times n$ матрица.

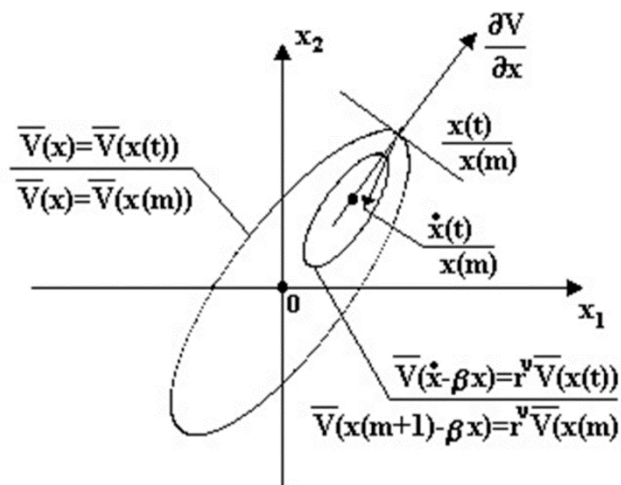


Рисунок 2.8 – Геометрическая интерпретация условий качественной экспоненциальной устойчивости

Уравнение Ляпунова (2.52) является критерием расположения собственных значений матрицы F внутри круга радиуса r с центром в точке с координатами $(\beta; j0)$ на комплексной плоскости. Для того, чтобы собственные значения матрицы F располагались в круге радиуса r с центром в точке с координатами $(\beta; j0)$ комплексной плоскости, необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для какой-либо положительно полуопределенной матрицы Q решение уравнения (2.52) относительно матрицы P было бы положительно определенным.

Пусть динамическая система описывается уравнением типа (2.50), где $F(x(t)) = Fx(t)$, F – квадратная матрица размера $n \times n$.

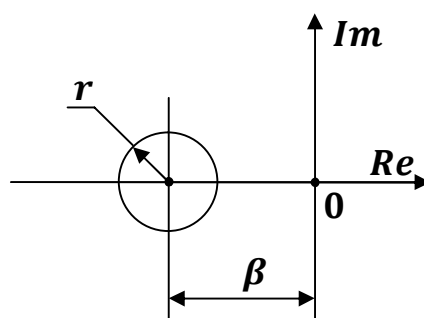


Рисунок 2.9 – Область распределения корней, определенная параметрами r и β

Если решение уравнения (2.52) есть положительно определенная матрица P и параметры r, β удовлетворяют условиям $r > 0, \beta + r < 0$, матрица $Q \geq 0$, тогда исходная непрерывная система устойчива, и корни характеристического полинома располагаются в круге радиуса r с центром в точке $(\beta; j0)$ комплексной плоскости (см. рисунок 2.9).

Использование достаточных условий КЭУ с формированием локального критерия позволяет для линейной непрерывной системы (2.29) построить закон управления вида

$$u = -Kx,$$

где K – матрица линейных обратных связей, и обеспечить в замкнутой системе качественную экспоненциальную устойчивость. Решение матричного алгебраического уравнения типа Риккати

$$\begin{cases} (A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q \\ K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) \end{cases} \quad (2.53)$$

относительно положительно определенной матрицы P с последующим вычислением матрицы K позволяет достигнуть желаемого результата.

Замечание 2.12 При синтезе системы с помощью уравнения типа Риккати (2.53) гарантируется расположение собственных чисел матрицы замкнутой системы внутри круга радиуса r с центром в точке с координатами $(\beta; j0)$ на комплексной плоскости, но не осуществляется строгий расчет желаемых мод в соответствии с эталонной моделью или желаемым характеристическим полиномом. Поэтому данный алгоритм синтеза не относится к классу классических модальных методов.

Вопросы для самоконтроля.

1. Как задать матричный полином, используемый в формуле Аккермана?
2. Почему регулятор, синтезированный по формуле Басса-Гура, можно отнести к классу модальных?
3. Записать уравнения расчета матрицы линейных стационарных обратных связей с обеспечением желаемой степени сходимости.
4. Какое положение равновесия называется качественно экспоненциально устойчивым?
5. Какую степень колебательности гарантирует регулятор, синтезированный с обеспечением качественной экспоненциальной устойчивостью?

2.6 Установившаяся ошибка и точность систем управления

В настоящем разделе рассмотрим точностные показатели качества системы, которые характеризуют установившуюся ошибку или ее граничные значения [3].

Для устойчивых систем в режиме стабилизации установившуюся ошибку можно определить как установившееся значение вектора состояния

$$\begin{cases} e_y(t) = x_y(t) \\ \epsilon_y(t) = Cx_y(t) \end{cases},$$

а в режиме слежения – как разность задающего воздействия и вектора состояния объекта:

$$\begin{cases} e_y(t) = M_g \xi_g(t) - x_y(t) \\ \epsilon_y(t) = C e_y(t) \end{cases}.$$

Рассмотрим точностные показатели качества для систем слежения с постоянным задающим воздействием (т.е. при $\xi_g = const$).

Абсолютная погрешность (абсолютная ошибка) системы управления определяется следующим образом:

$$\Delta = \|\epsilon_y\| = \|CM_g \xi_g - Cx_y\|.$$

Относительная погрешность (относительная ошибка) системы управления определяется выражением

$$\delta = \frac{\Delta}{\|CM_g \xi_g\|} = \frac{\|CM_g \xi_g - Cx_y\|}{\|CM_g \xi_g\|}.$$

В линейных системах относительная ошибка не зависит от величины входного воздействия.

При слежении за сигналом, который представляет собой функцию времени (т.е. при $\xi_g \neq const$), абсолютная и относительная погрешности определяются как

$$\Delta = \epsilon_{y \max},$$

$$\delta = \frac{\Delta}{y_{\max}^*},$$

где соответственно

$$\epsilon_{y \max} = \max_{t \in [0, t_p]} |\epsilon_y(t)|, \quad y_{\max}^* = \max_{t \in [0, t_p]} |CM_g \xi_g(t)|,$$

– максимальные абсолютные значения ошибки и задающего воздействия на интервале времени работы системы $[0, t_p]$.

Замечание 2.13 В устойчивых технических системах переменная y_{\max}^* и функция $\epsilon_{y \max}$ ограничены и определены в предположении, что время работы системы t_p не ограничено. Если по техническому заданию требуется исследовать поведение системы для неограниченных по величине входных воздействий, то необходимо рассматривать ограниченный интервал времени $[0, t_p]$.

Замечание 2.14 Для оценки показателя динамических свойств системы может использоваться интегральная квадратичная ошибка [3,7]

$$J_\epsilon = \int_0^\infty \epsilon^2(\mu) d\mu$$

и обобщенные интегральные показатели качества вида

$$J_e = \int_0^\infty \|e(\mu)\| d\mu.$$

Таким образом, точностные показатели качества системы могут быть определены по установившимся значениям переходных процессов $y_y^*(t)$ и $\epsilon_y(t)$. Поведение конкретной системы в установившемся режиме зависит от значений ее параметров, от типов входных и возмущающих воздействий, а

также от структурных особенностей системы. Последние определяются наличием или отсутствием обратных связей и порядком астатизма системы.

Определение 2.8 Установившаяся ошибка при постоянном внешнем воздействии называется статической ошибкой.

Определение 2.9 Система называется статической, если статическая ошибка отлична от нуля, и астатической, если статическая ошибка равна нулю.

Можно говорить о статической и астатической системах относительно того или иного воздействия.

Определение 2.10 Система называется статической относительно задающего воздействия (возмущения), если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) отлична от нуля, и астатической относительно задающего воздействия (возмущения), если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) равна нулю.

Рассмотрим динамическую систему в виде модели вход-выход:

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

где передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

$b_j, j = \overline{1, m}$ и $a_i, i = \overline{1, n}$ – постоянные коэффициенты, $Y(s), U(s)$ – образы Лапласа выходного и входного сигналов соответственно.

Будем полагать, что в данном случае в качестве входа $u(t)$ может выступать как задающее, так и возмущающее воздействие, а система является асимптотически устойчивой. Для статической системы (при $a_0 \neq 0$, т.е. характеристический полином не имеет нулевых корней) значение передаточной функции в точке $s = 0$ определяется как

$$W(0) = \frac{b_0}{a_0} = K_0,$$

где K_0 – статический коэффициент передачи системы, и при постоянном входном воздействии $u(t) = const$ установившееся значение выходной переменной определяется как $y_y = K_0 u$.

Рассмотрим астатическую систему, полагая, что характеристический

полином разомкнутой системы имеет k нулевых корней

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (s^{n-k} + a_{n-k-1} s^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} s + a_k)} = \frac{1}{s^k} W_k(s).$$

Число k совпадает с порядком астатизма системы. Таким образом, характерным признаком астатизма является наличие нулевых корней у характеристического полинома.

Поскольку для астатической системы значение статического коэффициента передачи не определено, то вводится в рассмотрение показатель, называемый *добротностью* системы по соответствующей производной выходной переменной. Добротность системы определяется следующим образом:

$$K_k = W_k(0) = \frac{b_0}{a_k}.$$

2.6.1 Постановка задачи

Рассматривается асимптотически устойчивая система в виде модели типа вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bg(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (2.54)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния; $y(t)$ – l -мерный вектор выходных (регулируемых) переменных; $g(t)$ – m -мерный вектор входных воздействий; A – матрица состояния размера $n \times n$; B – матрица входа размера $n \times m$; C – матрица выхода размера $l \times n$.

Сигнал $g(t)$ является выходом модели входного воздействия вида

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t) \\ g(t) = H_g \xi_g(t) \end{cases}, \quad \xi_g(0) = \xi_{g^0}. \quad (2.55)$$

где $\xi_g(t)$ – q -мерный вектор состояния модели; $\xi_g(0)$ – q -мерный вектор начального состояния модели; Γ_g – матрица, определяющая входное воздействие, размера $q \times q$; H_g – матрица выхода модели воздействия размера $m \times q$.

Ставится задача нахождения установившегося значения вектора состояния $x_y(t)$, выхода объекта $y_y(t) = Cx_y(t)$ и динамической ошибки, определяемой при $l = m$ как разность векторов входа и выхода системы

$$\epsilon_y(t) = g(t) - y_y(t).$$

2.6.2 Нахождение установившейся ошибки системы

Вектор установившихся значений состояния $x_y(t)$ при воздействии $g(t)$ будем определять как вектор размерности n , к которому сходятся все решения системы (2.54) при любых начальных условиях $x(0)$.

Поскольку установившееся значение вектора состояния $x_y(t)$ должно удовлетворять системе (2.54), то путем подстановки $x_y(t)$ в (2.54) и вычитанием полученного уравнения из исходного можно вывести:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_y(t) = A(x(t) - x_y(t)).$$

Вектор $x_y(t)$ будем искать в виде выражения

$$x_y(t) = M_g(t)\xi_g(t) \tag{2.56}$$

где матрица $M_g(t)$ имеет размер $n \times q$. После подстановки (2.55) в (2.54) и принимая во внимание (2.56), получаем выражение

$$(\dot{M}_g(t) + M_g(t)\Gamma_g)\xi_g(t) = (AM_g(t) + BH_g)\xi_g(t),$$

которое справедливо для произвольного вектора $\xi_g(t)$. Таким образом, будет выполняться следующее уравнение

$$\dot{M}_g(t) = AM_g(t) + BH_g - M_g(t)\Gamma_g. \tag{2.57}$$

Решение уравнения (2.57) определяется выражением

$$M_g(t) = \exp(At) M_g(0) \exp(-\Gamma_g t) + \int_0^t \exp(A\tau) BH_g \exp(-\Gamma_g \tau) d\tau,$$

где $M_g(0)$ – матрица начальных значений $M_g(t)$. На бесконечном интервале времени $[0, \infty)$ $M_g(t)$ стремится к стационарному значению

$$M_g = \int_0^{\infty} \exp(A\tau) B H_g \exp(-\Gamma_g \tau) d\tau, \quad (2.58)$$

если интеграл в правой части равенства существует. В результате на бесконечном интервале $M_g(t)$ удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$A M_g + B H_g - M_g \Gamma_g = 0. \quad (2.59)$$

Для установления связи вектора $x_y(t)$ с вектором входных воздействий $g(t)$ и его производными подставим разложение экспоненты в степенной ряд

$$\exp(-\Gamma_g \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma_g^i (-\tau)^i}{i!}$$

в выражение (2.58), получим

$$M_g = \int_0^{\infty} \exp(A\tau) B H_g \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma_g^i (-\tau)^i}{i!} d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(A\tau) \frac{(-\tau)^i}{i!} d\tau B H_g \Gamma_g^i. \quad (2.60)$$

Введем обозначение

$$D_i = \frac{1}{i!} \int_0^{\infty} \exp(A\tau) (-\tau)^i d\tau$$

и перепишем (2.60) в виде

$$M_g = \sum_{i=0}^{\infty} D_i B H_g \Gamma_g^i. \quad (2.61)$$

где матрицы D_i могут быть вычислены с помощью рекуррентной процедуры $D_{i+1} = A^{-1} D_i$. Начальное значение матрицы определяется как

$$D_0 = \int_0^{\infty} \exp(A\tau) d\tau = -A^{-1},$$

которое существует в силу отрицательности вещественных частей собственных чисел матрицы A . Подставляя (2.61) в (2.56) и принимая во внимание, что из (2.55) следует

$$g^{(i)}(t) = H_g \Gamma_g^i \xi_g(t),$$

где i -я производная воздействия, получим

$$x_y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i B g^{(i)}(t) \quad (2.62)$$

Если $g^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) – линейно-независимые функции и вектор $\xi_g(t)$ бесконечномерный, то уравнение (2.62) позволяет задать разложение вектора $x_y(t)$ по производным воздействия $g(t)$ и вывести соотношения для установившихся значений векторов состояния и выхода соответственно:

$$x_y(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} B g^{(i)}(t), \quad y_y(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} C A^{-(i+1)} B g^{(i)}(t).$$

Установившиеся значения вектора ошибки для систем с равным числом входов и выходов определяются выражением

$$\epsilon_y(t) = g(t) - y_y(t) = (I + C A^{-1} B) g(t) + \sum_{i=1}^{\infty} C A^{-(i+1)} B g^{(i)}(t). \quad (2.63)$$

Из (2.63) следует разложение по матричным коэффициентам ошибок, которые определяются выражениями

$$E_0 = I + C A^{-1} B, \quad \frac{1}{i!} E_i = C A^{-(i+1)} B, \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Если матрица $E_0 = 0$, а $E_i \neq 0$ при $i \geq 1$, то система обладает астатизмом первого порядка по всем входам. Если $E_0 = E_1 = 0$, а $E_i \neq 0$ при $i \geq 2$, порядок астатизма системы по всем входам равен двум. Более высокие порядки астатизма системы по входам вводятся аналогичным образом.

Установившаяся ошибка по j -му выходу ($j = \overline{1, l}$) от p -го входа ($p = \overline{1, l}$) может быть выражена через соответствующие коэффициенты ошибок соотношением

$$E_0(j, p) = 1 + C_j A^{-1} B_p, \quad \frac{1}{i!} E_i(j, l) = C_j A^{-(i+1)} B_p, \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

где C_j – j -я строка матрицы C , а B_p – p -й столбец матрицы B .

Астатизм ν порядка j -го выхода системы по отношению к i -му входу определяется выполнением условия

$$\begin{cases} E_i(j, p) = 0 \text{ при } i < \nu, \\ E_i(j, p) \neq 0 \text{ при } i \geq \nu. \end{cases}$$

Если $g(t)$ является возмущением ($l = m$), то вектор установившихся значений ошибки определяется как

$$\epsilon_y(t) = -y_y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C A^{-(i+1)} B g^{(i)}(t).$$

Понятия астатизма и коэффициенты ошибок для выходной величины $y_y(t)$ относительно возмущающего воздействия $g(t)$ вводятся аналогичным образом.

Представленная общая методика расчета установившихся значений $x_y(t)$, $y_y(t)$ и $\epsilon_y(t)$ многоканальной системы основана на решении матричных уравнений (2.57) или (2.59) и информации о расчетах бесконечного числа производных вектора входа $g(t)$. Если размерность вектора $\xi_g(t)$ конечна и равна q , то производные высших порядков сигнала $g(t)$, по крайней мере начиная с $(q + 1)$ -го порядка, являются линейно-независимыми функциями. Тогда установившиеся значения векторов $x_y(t)$, $y_y(t)$ и $\epsilon_y(t)$ могут быть представлены в виде конечных рядов.

Пусть входные сигналы $g(t)$ генерируются системой (2.55), где

$$\Gamma_g = \begin{vmatrix} \Gamma_{g1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_{g2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma_{gN} \end{vmatrix},$$

$\Gamma_{gi} (i = \overline{1, N})$ – блочные матрицы вида

$$\Gamma_{gi} = \begin{vmatrix} 0 & I_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_l & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_l \\ -\gamma_0 I_l & -\gamma_1 I_l & -\gamma_2 I_l & \dots & -\gamma_{q_i-1} I_l \end{vmatrix},$$

I_l – единичная матрица размера $l \times l$, $\gamma_i (i = \overline{0, q_i - 1})$ – постоянные коэффициенты. Размер матрицы Γ_g определяется размерностью вектора $\xi_g(t)$. Матрица $H_g = |h_0 \ h_1 \ \dots|$ составлена из блоков размера $l \times q_i l$ вида $h_i = |I_l \ 0 \ 0 \ \dots \ 0|$, число столбцов которой также соответствует размерности вектора $\xi_g(t)$.

Представим вектор $\xi_g(t)$ в следующем виде:

$$\xi_g^T(t) = |\xi_{g0}(t) \ \xi_{g1}(t) \ \dots \ \xi_{gi}(t) \ \dots|,$$

где $\xi_{gi}(t)$ – вектор размерности q_i , который состоит из сигнала $g_i(t)$ размерности l и его линейно-независимых производных, формируемых i -й системой уравнений:

$$\xi_{gi}^T(t) = |g_i(t) \ \dot{g}_i(t) \ \dots \ g_i^{(q_i-1)}(t)|.$$

Выбор структуры матриц Γ_g и H_g обусловлен тем, чтобы сигнал $g(t)$ можно представить в виде ряда

$$g(t) = \sum_{i=0}^N g_i(t).$$

Установившееся значение вектора состояния системы (2.54) рассчитаем в виде (2.56), где матрица преобразования M_g имеет вид

$$M_g = |M_{g0} \ M_{g1} \ M_{g2} \ \dots|,$$

M_{gi} – матрицы размера $n \times q_i l$. Используя уравнение (2.59) и принимая во внимание структуру матриц Γ_g , M_g , H_g , запишем

$$M_{gi} \Gamma_{gi} - A M_{gi} = B h_i. \quad (2.64)$$

Для нахождения алгоритма решения уравнения выделим в каждой матрице M_{gi} блоки: $M_{gi} = |m_{g0} \ m_{g1} \ \dots \ m_{gq_i-1}|$. Теперь перепишем (2.64) в виде рекуррентных соотношений для вычисления элементов m_{gj} ($j = \overline{0, q_i - 1}$) матрицы преобразования M_g :

$$\begin{aligned} m_{gq_i-2} &= (A + \gamma_{q_i-1}I)m_{gq_i-1}, \\ m_{gq_i-3} &= (A^2 + \gamma_{q_i-1}I + \gamma_{q_i-2}I)m_{gq_i-1}, \\ &\dots \\ m_{g0} &= (A^{q_i-1} + \gamma_{q_i-1}A^{q_i-2} + \dots + \gamma_1I)m_{gq_i-1} \\ m_{gq_i-1} &= -D_{q_i}^{-1}B, \end{aligned}$$

где $D_{q_i} = A^{q_i} + \gamma_{q_i-1}A^{q_i-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I$. В результате установившиеся значения вектора состояния $x_y(t)$ системы (2.54), возбуждаемой лишь i -й компонентой генератора входа (2.55), можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{yi}(t) &= -D_{q_i}^{-1}((A^{q_i-1} + \gamma_{q_i-1}A^{q_i-2} + \dots + \gamma_1I)Bg(t) + \\ &+ (A^{q_i-2} + \dots + \gamma_2I)B\dot{g}(t) + \dots + (A + \gamma_{q_i-1}I)Bg^{(q_i-2)}(t) + Bg^{(q_i-1)}(t)). \end{aligned}$$

Приведенные рекуррентные соотношения позволяют вычислить матрицу M_g в выражении (2.56) для бесконечного интервала установления и определить $y_y(t) = Cx_y(t)$ и $\epsilon_y(t) = g(t) - y_y(t)$. Тогда можно рассчитать установившиеся значения ошибки системы (2.54), возбуждаемой сигналом, который представляет собой линейную комбинацию конечного или бесконечного числа гармонических составляющих. Модели системы и воздействий остаются прежними, а матрицы Γ_{gi} и h_i в (2.55) имеют вид

$$\Gamma_{gi} = \begin{vmatrix} 0 & I_l \\ -\omega_i^2 I_l & 0 \end{vmatrix}, \quad h_i = |I_l \ 0_{l \times l}|, \quad (2.65)$$

где ω – частоты гармоник компонент $g_i(t)$ сигнала

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(t).$$

Используя (2.56) с учетом (2.65) и принимая во внимание вычисление матрицы преобразования M_g , получаем установившиеся значения вектора состояния системы (2.54)

$$x_y(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} (A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} (AB g_i(t) + B \dot{g}_i(t))$$

и соответствующие установившиеся значения векторов ошибки и выходов:

$$\epsilon_y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left((I + C(A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} AB) g_i(t) + C(A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} B \dot{g}_i(t) \right), \quad (2.66)$$

$$y_y(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} C(A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} (AB g_i(t) + B \dot{g}_i(t)). \quad (2.67)$$

Теперь найдем установившиеся значения j -го выхода относительно p -го входа предполагая, что каждая i -я составляющая входа содержит компоненты

$$g_{ik}(t) = \begin{cases} 0, & k \neq p, \\ \sin \omega_i t, & k = p, \end{cases}$$

Это может быть обеспечено за счет выбора соответствующих значений начальных условий $\xi_{g_i}(0)$ для системы (2.55). В соответствии с (2.67) можно вывести

$$y_{yj}(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} \left(C_j (A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} AB_p \sin \omega_i t + \omega_i C_j (A^2 + \omega_i^2 I)^{-1} B_p \cos \omega_i t \right).$$

где C_j – j -я строка матрицы C , а B_p – p -й столбец матрицы B .

Приведенный метод определения установившихся ошибок в многоканальных линейных системах автоматического управления позволяет аналитически выразить исследуемые сигналы системы через компоненты входного воздействия, что особенно важно при синтезе САУ при заданной точности слежения.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какие показатели качества относятся к точностным?
2. Каким образом определяется порядок астатизма системы?
3. Каким образом определяется добротность системы?

3 СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О СОСТОЯНИИ

В ряде случаев при построении систем управления техническими системами не всегда доступны прямому измерению все составляющие вектора состояния объекта управления. Это может быть обусловлено конструктивными особенностями технической системы [3].

В основе классической теории управления лежат методы синтеза систем управления по измерениям выходной переменной, когда сам объект описан в виде модели вход-выход [2]. Современная теория управления изначально базировалась на методах управления по состоянию. Чтобы синтезировать регулятор, позволяющий сформировать сигнал управления, используя в качестве измеряемых сигналов только выходную переменную, в САУ вводится дополнительный компонент, который генерирует оценку неизмеряемых составляющих вектора состояния объекта управления. Динамическая система, оценивающая недоступный прямому измерению вектор состояния объекта, называют наблюдателем. Соответственно, регулятор, формирующий сигнал управления с использованием наблюдателя, является динамическим [1, 3, 5, 16, 17].

В настоящем разделе будут представлены методы построения наблюдателей вектора состояния объекта полной и пониженной размерности.

3.1 Постановка задачи наблюдения

Рассмотрим объект управления с неполной информацией, который описывается в пространстве состояния системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (3.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор состояния объекта управления; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор измеряемых выходных переменных; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор сигналов управления; A – матрица состояния размера $n \times n$; B – матрица входа размера $n \times m$; C – матрица выхода размера $l \times n$. Число состояний больше числа выходных переменных, т.е. $l < n$.

Пусть вектор состояния $x(t)$ не доступен прямым измерениям. В этом случае использовать статический регулятор (2.11) не представляется возможным. Возникает необходимость в синтезе наблюдателя вектора состояния объекта.

Сделаем допущение, что объект управления (3.1) является полностью наблюдаемым, то есть ранг матрицы наблюдаемости (2.3) будет равен порядку объекта управления.

Определение 3.1 *Наблюдатель – это динамическая система, которая по текущей информации об измеряемых выходных переменных и сигналах управления формирует оценки компонент вектора состояния объекта управления.*

В результате оценивания формируется вектор оценки состояния $x(t)$, который обозначается как $\hat{x}(t)$.

Определение 3.2 *Вектор оценки – это вектор-функция, которая с течением времени стремится к оцениваемому вектору состояния объекта управления, то есть*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0.$$

Регулятор формирует сигнал управления в виде

$$u(t) = -K\hat{x}(t),$$

где K – матрица линейных обратных связей, $\hat{x}(t)$ – n -мерный вектор оценки состояния объекта управления.

Синтез наблюдателя будем осуществлять на базе идеологии модального управления. Для определения требуемых динамических свойств наблюдателя определим эталонную модель в виде системы

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \Gamma_n \xi_n(t) \\ v_n(t) = H_n \xi_n(t) \end{cases}$$

В результате будет синтезирован наблюдатель полной или пониженной размерности. Наблюдатель полной размерности формирует оценки всех компонент вектора состояния независимо от наличия измеряемых компонент вектора состояния объекта управления. Наблюдатель пониженной размерности формирует оценки только тех компонент вектора состояния, которые не измеряются при помощи имеющихся измерительных средств.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каково назначение наблюдателя состояния?
2. Каким условиям должен удовлетворять объект управления, чтобы построения наблюдателя было осуществимо?

3.2 Наблюдатель состояния полной размерности

Наблюдатель состояния полной размерности описывается в пространстве

состояний следующей системой уравнений [1, 3, 5, 16, 17]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}, \quad (3.2)$$

где $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния наблюдателя, размерность которого совпадает с размерностью вектора состояния объекта управления; L – матрица обратных связей наблюдателя размера $n \times l$.

Пусть объект управления функционирует в режиме стабилизации. Как было показано ранее, при таком режиме функционирования модель ошибок может быть описана системой уравнений (2.31).

Чтобы исследовать свойства наблюдателя полной размерности и определить условия его существования, введем в рассмотрение вектор невязки $\tilde{x}(t)$, который характеризует отклонение вектора состояния наблюдателя $\hat{x}(t)$ от вектора состояния модели ошибок (ошибка наблюдения) в следующем виде:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (3.3)$$

При дифференцировании (3.3) по времени получим следующее выражение:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t). \quad (3.4)$$

После подстановки первых уравнений систем (3.1), (3.2) в (3.4), производная по времени вектора невязки имеет вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - L(y(t) - \hat{y}(t)) - Bu(t), \quad (3.5)$$

или

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(y(t) - \hat{y}(t)). \quad (3.6)$$

Подставляя вторые уравнения систем (3.1), (3.2) в (3.6), получаем

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(Cx(t) - C\hat{x}(t)). \quad (3.7)$$

После подстановки (3.3) в (3.7), получим выражение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F_H \tilde{x}(t) \quad (3.8)$$

где

$$F_H = A - LC.$$

Вектор невязки $\tilde{x}(t)$ будет стремиться к нулю, и, следовательно, динамическая система будет являться наблюдателем состояния, если матрица F_H гурвицева, то есть все собственные числа этой матрицы имеют отрицательные вещественные части.

Принимая во внимание принцип дуальности для свойств управляемости и наблюдаемости [3], задача синтеза наблюдателя полной размерности L сводится к решению матричного уравнения типа Сильвестра относительно матрицы M_H вида

$$M_H \Gamma_H - A^T M_H = C^T H_H$$

с последующим расчетом матрицы L

$$L = -M_H^{-T} H_H^T.$$

Таким образом, синтез наблюдателя полной размерности заключается в расчете матрицы входов L , которая обеспечивает требуемые собственные числа для матрицы F_H . Структурная схема САУ в режиме стабилизации с наблюдателем полной размерности представлена на рисунке 3.1.

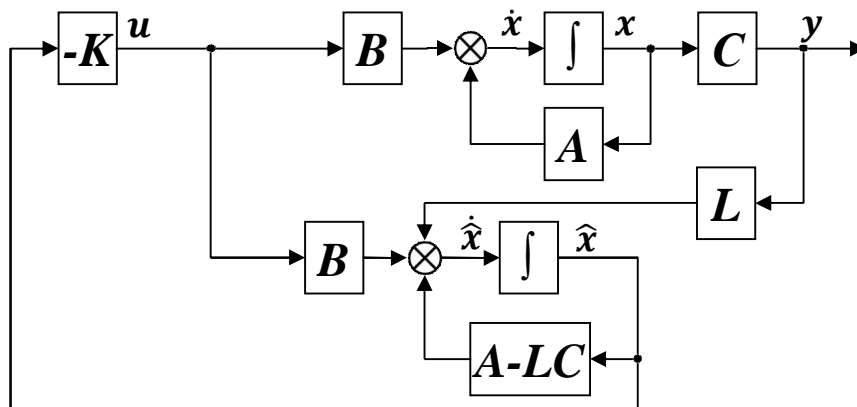


Рисунок 3.1 – Структурная схема САУ в режиме стабилизации с наблюдателем полной размерности

Замечание 3.1 Задача синтеза наблюдателя полной размерности разрешима

при условии, что объект управления обладает свойством полной наблюдаемости.

Вопросы для самоконтроля.

1. Записать выражения, описывающие наблюдатель состояния полной размерности.
2. Как вычислить порядок системы в режиме стабилизации с наблюдателем полной размерности.
3. Каким образом следует рассчитать матрицу L , если $F_H = A - LC$?

3.3 Наблюдатель состояния пониженной размерности

В том случае, если l составляющих вектора состояния ($l < n$) непосредственно измеряются, есть возможность построить наблюдатель состояния пониженной размерности [1, 3, 5, 16, 17].

Наблюдатель состояния пониженной размерности (или пониженного порядка) описывается в пространстве состояния следующим уравнением:

$$\dot{\hat{z}}(t) = F_H \hat{z}(t) + Gy(t) + M_H Bu(t), \quad (3.9)$$

где $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^{n-l}$ – вектор состояния наблюдателя; F_H – матрица состояния наблюдателя размера $(n-l) \times (n-l)$; G – матрица входов наблюдателя размера $(n-l) \times l$; M – матрица преобразования размера $(n-l) \times n$. Пара F_H, G полностью управляема.

Чтобы исследовать свойства наблюдателя, представим вектор состояния объекта управления в виде двух составляющих. Первая составляющая вектора состояния состоит из измеряемых переменных $y(t)$. Вторая составляющая содержит неизмеряемые компоненты $z(t)$ вектора состояния объекта управления, то есть

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, y(t) \in \mathbb{R}^l, z(t) \in \mathbb{R}^{n-l}.$$

Линейное преобразование, позволяющее выделить из вектора состояния исходного объекта вектор неизмеряемых переменных $z(t)$, осуществляется следующим образом:

$$z(t) = M_H x(t). \quad (3.10)$$

Синтезируемый наблюдатель должен генерировать оценку неизмеряемых

переменных, то есть должно выполняться следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - \hat{z}(t)) = 0. \quad (3.11)$$

Введем в рассмотрение вектор невязки:

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t) = M_H x(t) - \hat{z}(t). \quad (3.12)$$

Теперь продифференцируем по времени выражение (3.12)

$$\dot{\tilde{z}}(t) = M_H \dot{x}(t) - \dot{\hat{z}}(t) \quad (3.13)$$

и перепишем формулу (3.13) с учетом первого уравнения системы (3.1) и формулы (3.9):

$$\dot{\tilde{z}}(t) = M_H A x(t) + M_H B u(t) - F_H \hat{z}(t) - G y(t) - M_H B u(t). \quad (3.14)$$

Путем подстановки второго уравнения системы (3.1) в (3.14) выведем выражение

$$\dot{\tilde{z}}(t) = M_H A x(t) - F_H \hat{z}(t) - G C x(t), \quad (3.15)$$

или

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (M_H A - G C) x(t) - F_H \hat{z}(t). \quad (3.16)$$

Пусть матрицы описания объекта управления A, C и матрицы описания наблюдателя F_H, G удовлетворяют следующему соотношению:

$$M_H A - G C = F_H M_H. \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) позволяет сформировать уравнение типа Сильвестра вида

$$M_H A - F_H M_H = G C, \quad (3.18)$$

которое необходимо решить относительно матрицы M_H .

Принимая во внимание (3.17), перепишем выражение (3.16) следующим образом:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = F_H M_H x(t) - F_H \hat{z}(t), \quad (3.19)$$

или

$$\dot{\tilde{z}}(t) = F_H (M_H x(t) - \hat{z}(t)). \quad (3.20)$$

Учитывая выражение (3.12), модель невязки (3.20) можно представить как

$$\dot{\tilde{z}}(t) = F_H \tilde{z}(t). \quad (3.21)$$

Так как получившееся уравнение автономно, то при ненулевых начальных условиях вектор невязки будет сходиться к нулю, если матрица F_H – гурвицева. В этом случае будет выполняться следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) - \hat{z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (M_H x(t) - \hat{z}(t)) = 0. \quad (3.22)$$

Принимая во внимание приведенные выше обозначения, выражение (3.22) можем переписать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \begin{array}{c} y(t) \\ M_H x(t) \end{array} \right| - \left| \hat{z}(t) \right| \right) = 0. \quad (3.23)$$

С учетом второго уравнения системы (3.1), соотношение (3.23) запишем в следующей форме:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \begin{array}{c} C \\ M_H \end{array} \right| x(t) - \left| \hat{z}(t) \right| \right) = 0. \quad (3.24)$$

Теперь введем обозначение составной матрицы

$$N = \left| \begin{array}{c} C \\ M_H \end{array} \right|$$

и перепишем выражение (3.24) в следующем виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - N^{-1} \begin{vmatrix} y(t) \\ \hat{z}(t) \end{vmatrix} \right) = 0 \quad (3.25)$$

Таким образом, оценка вектора состояния объекта управления определяется по формуле

$$\hat{x}(t) = N^{-1} \begin{vmatrix} y(t) \\ \hat{z}(t) \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Формирование оценки вектора состояния в виде (3.26) позволяет реализовать сигнал управления с использованием динамического регулятора.

Тогда динамическая система с уравнением (3.9) будет выполнять функции наблюдателя, если выполняются следующие условия:

- ¾ матрица F_H является гурвицевой;
- ¾ матрицы описания наблюдателя и объекта управления удовлетворяют векторно-матричному уравнению (3.18), которое имеет единственное решение относительно матрицы M_H ;
- ¾ составная матрица N является невырожденной, т.е. имеет обратную матрицу.

Замечание 3.2 Составная матрица N имеет обратную матрицу при выполнении следующих условий:

- а) объект управления является полностью наблюдаемым;
- б) наблюдатель (т.е. пара матриц F_H, G) является полностью управляемым;
- в) собственные числа матриц A, F_H не совпадают.

В результате синтез наблюдателя пониженной размерности заключается в расчете устойчивой матрицы F_H на основе желаемых показателей качества и нахождении матриц G, M_H, N . Структурная схема САУ в режиме стабилизации с наблюдателем пониженной размерности представлена на рисунке 3.2.

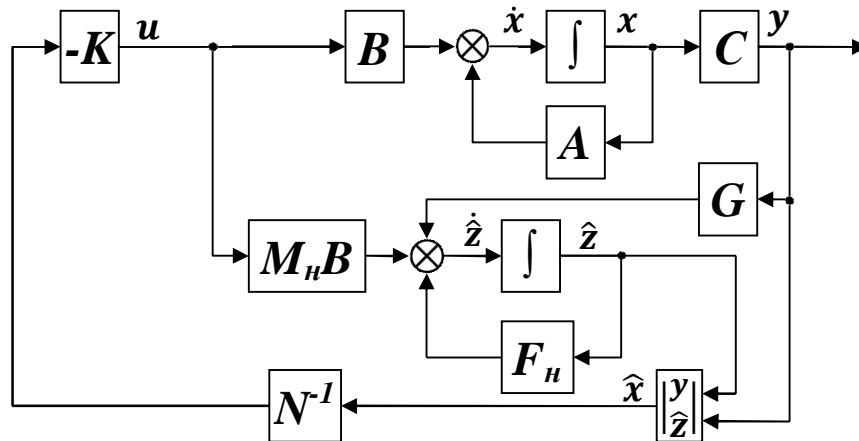


Рисунок 3.2 – Структурная схема САУ в режиме стабилизации с наблюдателем пониженной размерности

Вопросы для самоконтроля.

1. Как рассчитать порядок системы в режиме стабилизации с наблюдателем пониженной размерности.
2. В каких случаях невозможно синтезировать наблюдатель пониженной размерности?

4 СПОСОБЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ СЛЕЖЕНИЯ

Для решения задачи слежения с обеспечением желаемых показателей качества рассмотрим три способа.

Первый способ заключается во введении в алгоритм управления дополнительной интегрирующей связи, которая повышает порядок астатизма и точность работы САУ. [3]. Такой способ управления называется управлением с интегральной составляющей.

Второй способ заключается в применении модели внешнего воздействия при синтезе закона управления, что позволяет обеспечить нулевую ошибку слежения. Такой способ управления называют методом встроенной (внутренней) модели [11, 17].

Третий способ заключается во введении дополнительных прямых связей по задающему воздействию при построении закона управления, которые также позволяют свести ошибку слежения к нулю. Такой способ управления называют методом комбинированного управления или управлением с прямыми связями [3].

4.1 Синтез регулятора с интегральной составляющей

Пусть объект управления описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (4.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта управления; $y(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор выходных переменных; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор сигналов управления; A – матрица состояния объекта управления размера $n \times n$; B – матрица входа размера $n \times m$; C – матрица выхода размера $k \times n$.

Пусть математическая модель задающего воздействия $g(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t) \\ g(t) = H_g \xi_g(t) \end{cases}, \quad \xi_g(0) = \xi_{g0}. \quad (4.2)$$

где $\xi_g(t)$ – q -мерный вектор состояния модели; $\xi_g(0)$ – q -мерный вектор начального состояния модели; $g(t)$ – вектор задающих воздействий, размерность k которого совпадает с размерностью выходной переменной объекта управления; Γ_g – матрица, определяющая вид задающих воздействий, размера $q \times q$; H_g – матрица выхода модели размера $k \times q$.

Пусть замкнутая система работает в режиме слежения по выходу и стабилизации по состоянию. В этом случае модель ошибки формируется как

$$\begin{cases} e(t) = x(t) \\ \epsilon(t) = g(t) - y(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Если порядок астатизма объекта управления меньше, чем порядок астатизма модели задающего воздействия, то использование статического регулятора в замкнутой системе приводит в лучшем случае к появлению постоянной установившейся ошибки. В худшем случае ошибка слежения в замкнутой системе стремится к бесконечности. Поэтому для устранения ошибки слежения можно использовать динамический регулятор с дополнительной интегральной составляющей.

Определение 4.1 *Обобщенный пропорционально-интегральный (ОПИ) регулятор – это регулятор с интегральной составляющей, который в общем случае имеет вид*

$$u(t) = -Kx(t) + K_I \int_0^t \epsilon(\mu) d\mu,$$

где K – матрица линейных обратных связей; K_I – коэффициенты интегральной составляющей регулятора [15, 16, 17].

Замечание 4.1 *Пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор) – это регулятор, который в общем случае имеет вид*

$$u(t) = -Kx(t) + K_I \int_0^t e(\mu) d\mu,$$

где K – матрица линейных обратных связей; K_I – матрица коэффициентов интегральной составляющей регулятора [3, 15, 16, 17]. В отличие от ОПИ-регулятора, представленного Определением 4.1, в ПИ-регуляторе сигнал ошибки $e(t)$ в пропорциональной и интегральной составляющих один и тот же.

На рисунке 4.1 показана структурная схема системы управления с обобщенным ПИ-регулятором. На основе этой структурной схемы введем в рассмотрение дополнительный вектор состояния e_u размерности $k \times 1$, динамика которого описывается уравнением

$$\dot{e}_u(t) = \epsilon(t); e_u(0) = 0.$$

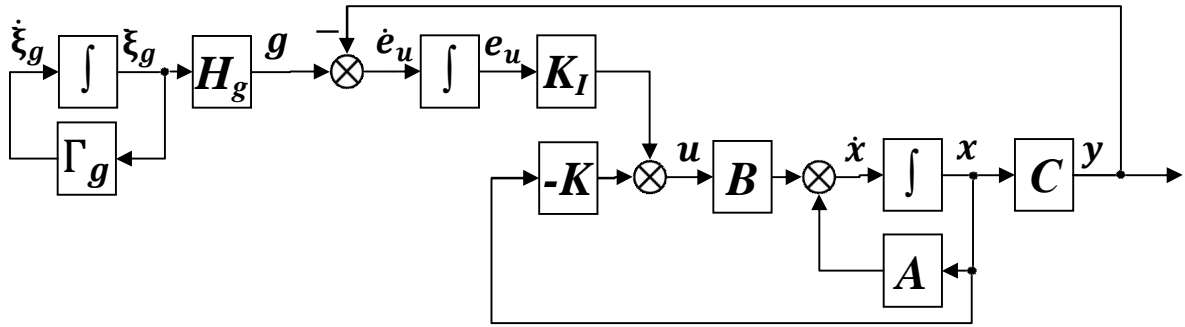


Рисунок 4.1 – Структура САУ в режиме слежения с ОПИ-регулятором

Принимая во внимание выражение (4.3), построим расширенную модель ошибок следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{e}_u(t) = g(t) - Cx(t) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Вводя обозначения

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e_u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

уравнение (4.4) можно переписать как

$$\dot{\bar{e}}(t) = \bar{A}\bar{e}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{G}g(t). \quad (4.5)$$

На основе желаемых показателей качества построим эталонную модель для расширенной модели ошибок в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\Gamma}\bar{\xi}(t) \\ \bar{v}(t) = \bar{H}\bar{\xi}(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\bar{\xi}(t)$ – $(n+k)$ -мерный вектор состояния эталонной модели; $\bar{v}(t)$ – $(m+k)$ -мерный вектор эталонного управляющего воздействия; $\bar{\Gamma}$ – матрица желаемых динамических свойств размера $(n+k) \times (n+k)$; \bar{H} – матрица выхода эталонной модели размера $k \times (n+k)$, которая находится на основе выполнения условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Решая уравнение типа Сильвестра

$$\begin{cases} \overline{B} \overline{H} = \overline{M} \overline{\Gamma} - \overline{A} \overline{M} \\ \overline{K} = -\overline{H} \overline{M}^{-1} \end{cases} \quad (4.7)$$

относительно матрицы \overline{M} размера $(n + k) \times (n + k)$, находим расширенную матрицу линейных обратных связей \overline{K} размера $m \times (n + k)$. Матрица \overline{K} состоит из коэффициентов интегральной составляющей ОПИ-регулятора K_I и коэффициентов линейных стационарных обратных связей K :

$$\overline{K} = |K_I \quad K|.$$

Размер матрицы K_I , состоящей из коэффициентов интегральной составляющей ОПИ-регулятора, равен $m \times k$, а размер матрицы линейных стационарных обратных связей K равен $m \times n$.

Таким образом, для синтеза регулятора методом модального управления необходимо построить расширенную модель ошибок и выполнить пункты, которые аналогичны используемым при синтезе алгоритмов управления, рассмотренным в разделе 2.

Замечание 4.2 Для одноканальной системы уравнение (4.7) будет иметь единственное решение в том случае, если объект управления обладает свойством полной управляемости, а эталонная модель – свойством полной наблюдаемости.

Замечание 4.3 С помощью ОПИ-регулятора выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\| = 0$ можно обеспечить только в случае слежения за постоянным сигналом. Слежение за линейно-нарастающим сигналом обеспечивается с некоторой установившейся ошибкой, при слежении за гармоническим сигналом ошибка будет также иметь гармонический характер.

Вопросы для самоконтроля.

1. В каких случаях невозможно обеспечить нулевую ошибку слежения с использованием ОПИ-регулятора?
2. Чему равен порядок замкнутой САУ с ОПИ-регулятором?

4.2 Метод встроенной (внутренней) модели

Рассмотрим объект управления, динамика которого описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; y – скалярная выходная переменная; $u(t)$ – скалярный сигнал управления; A – матрица состояния объекта управления размера $n \times n$; B – матрица входа размера $n \times 1$; C – матрица выхода размера $1 \times n$.

Сделаем допущение, что объект управления является полностью управляемым. Математическая модель внешних задающих воздействий определена в виде линейной автономной системы следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t) \\ g(t) = H_g \xi_g(t) \end{cases}, \quad \xi_g(0) = \xi_{g0}, \quad (4.8)$$

где $\xi_g(t) \in \mathbb{R}^q$ – вектор состояния модели внешних воздействий; $\xi_g(0)$ – q -мерный вектор начальных условий модели задающего воздействия; $g(t)$ – скалярное задающее воздействие; Γ_g – матрица, определяющая типы задающих воздействий, размера $q \times q$; H_g – матрица выхода модели задающих воздействия размера $1 \times q$.

Если матрица Γ_g известна, то в структуру регулятора можно ввести встроенную модель задающего воздействия, которая определяется следующим образом [11, 17]:

$$\begin{cases} \dot{e}_\xi(t) = \Gamma_g e_\xi(t) + G_e \epsilon(t) \\ \epsilon(t) = g(t) - y(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

где $e_\xi(t)$ – q -мерный вектор состояния встроенной модели внешних воздействий; G_e – матрица входа размера $q \times 1$, образующая с матрицей Γ_g полностью управляемую пару.

Присоединяя к модели объекта модель (4.9), получаем модель ошибок расширенной размерности в виде

$$\begin{cases} \dot{e}_\xi(t) = \Gamma_g e_\xi(t) - G_e C x(t) + G_e g(t) \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \end{cases}. \quad (4.10)$$

Вводя расширенный вектор ошибок

$$\bar{e}(t) = \begin{vmatrix} e_\xi(t) \\ x(t) \end{vmatrix},$$

получим модель ошибок увеличенной размерности в виде

$$\dot{\bar{e}}(t) = \bar{A}\bar{e}(t) + \bar{B}u(t) + Gg(t), \quad (4.11)$$

где

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \Gamma_g & -G_e C \\ 0 & A \end{vmatrix}, \bar{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ B \end{vmatrix}, G = \begin{vmatrix} G_e \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Исходя из желаемых показателей качества, сформируем эталонную модель желаемого поведения замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\Gamma}\bar{\xi}(t) \\ \bar{v}(t) = \bar{H}\bar{\xi}(t) \end{cases}. \quad (4.12)$$

Тогда, решая уравнение типа Сильвестра вида

$$\begin{cases} \bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} = \bar{B}\bar{H} \\ \bar{K} = -\bar{H}\bar{M}^{-1} \end{cases} \quad (4.13)$$

относительно матрицы \bar{M} , можно определить расширенную матрицу линейных обратных связей \bar{K} . В результате управляющее воздействие формируется в виде

$$u(t) = -\bar{K}\bar{e}(t).$$

Следует отметить, что расширенная матрица линейных обратных связей \bar{K} позволяет получить заданный характеристический полином замкнутой системы в том случае, если пара матриц расширенной системы \bar{A}, \bar{B} полностью управляема.

Замечание 4.4 *Расширенная система является полностью управляемой, если:*

- $\frac{3}{4}$ объект управления является полностью управляемым;
- $\frac{3}{4}$ пара Γ_g, G_e является полностью управляемой;
- $\frac{3}{4}$ эталонная модель (4.12) является полностью наблюдаемой.

Таким образом, для синтеза регулятора методом модального управления необходимо построить расширенную модель ошибок и выполнить те же пункты, которые применялись для синтеза алгоритмов управления исходной модели ошибок. Структурная схема САУ с встроенной моделью в режиме слежения представлена на рисунке 4.2.

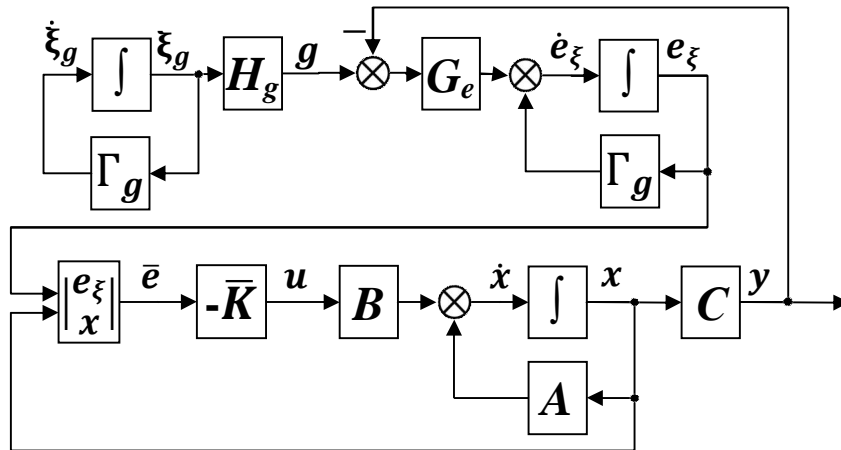


Рисунок 4.2 – Структура САУ с встроенной моделью в режиме слежения

Замечание 4.5 Регулятор на основе метода встроенной модели позволяет обеспечить выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\| = 0$, используя только параметры матрицы Γ_g модели задающего воздействия (4.8). Ненулевые начальные условия, параметры матрицы H_g и измерения сигнала $\xi_g(t)$ для расчета регулятора не требуются.

Вопросы для самоконтроля.

1. Записать выражения, которые определяют синтез регулятора на базе метода встроенной модели.
2. Чему равен порядок замкнутой САУ с регулятором, синтезированным на базе метода встроенной модели?

4.3 Синтез регулятора с прямыми связями

Пусть объект управления обладает свойством полной управляемости и описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}.$$

Из цели функционирования объекта управления его режим определен как режим слежения. Класс задающих воздействий, который должна обрабатывать замкнутая система, описывается линейной автономной системой типа (4.8):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t) \\ g(t) = H_g \xi_g(t) \end{cases}, \quad \xi_g(0) = \xi_{g0}.$$

Если матрицы Γ_g и H_g известны, а сигнал $\xi_g(t)$ доступен прямым

измерениям, то для обеспечения слежения можно построить регулятор с прямыми связями [3].

Построим модель ошибки слежения по состоянию через соотношение подобия по первому уравнению системы (2.8):

$$e(t) = M_g \xi_g(t) - x(t),$$

где матрицы M_g и L_g вычисляются путем решения двух векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} BL_g = M_g \Gamma_g - AM_g \\ H_g = CM_g \end{cases} \quad (4.14)$$

Тогда модель ошибок можно переписать как

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) - Bu(t) + BL_g \xi_g(t) \\ \epsilon(t) = Ce(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

На основе желаемых показателей качества построим эталонную модель в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t) \\ v(t) = H \xi(t) \end{cases}, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Задача синтеза регулятора заключается в формировании такого закона управления, который в замкнутой системе обеспечит нулевую установившуюся ошибку слежения на заданный класс задающих воздействий.

Как уже упоминалось ранее, поскольку матрицы Γ_g и H_g известны, а сигнал $\xi_g(t)$ доступен прямым измерениям, то для решения данной задачи выберем закон управления следующего вида:

$$u(t) = Ke(t) + L_g \xi_g(t), \quad (4.16)$$

где матрица K находится из решения уравнений

$$\begin{cases} BH = M\Gamma - AM \\ K = -HM^{-1} \end{cases} \quad (4.17)$$

Дополнительное слагаемое $L_g \xi_g$ в выражении (4.16) введено для устранения влияния задающего воздействия на установившуюся ошибку.

Посредством подстановки (4.16) в систему (4.15), перепишем модель

ошибок в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) - BKe(t) - BL_g\xi_g(t) + BL_g\xi_g(t) \\ \epsilon(t) = Ce(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

или

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) - BKe(t) \\ \epsilon(t) = Ce(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

В результате получена автономная система, и с учетом обозначения

$$F = A - BK$$

перепишем уравнение (4.19) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Fe(t) \\ \epsilon(t) = Ce(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

Как видно из выражения (4.20), посредством соответствующего выбора параметров матрицы K можно получить желаемые корни характеристического полинома замкнутой системы. В результате обеспечиваются желаемые динамические показатели качества, и замкнутая система обрабатывает заданный класс задающих воздействий с нулевой установившейся ошибкой.

Замечание 4.6 При отклонении коэффициентов матрицы L_g от рассчитанных по формуле (4.14) ошибка слежения будет принимать ненулевое значение, и условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\| = 0$ выполняться не будет.

Таким образом, задача синтеза регуляторов с прямыми связями решается в два этапа. На первом этапе рассчитываются параметры матрицы прямых связей по задающему воздействию L_g из уравнения (4.14). На втором этапе вычисляются параметры матрицы линейных обратных связей K из системы уравнений (4.17). Структурная схема САУ с прямыми связями в режиме слежения показана на рисунке 4.3.

Рассмотрим альтернативный порядок синтеза регулятора.
Регулятор может быть построен в виде

$$u(t) = -Kx(t) + L_g\xi_g(t).$$

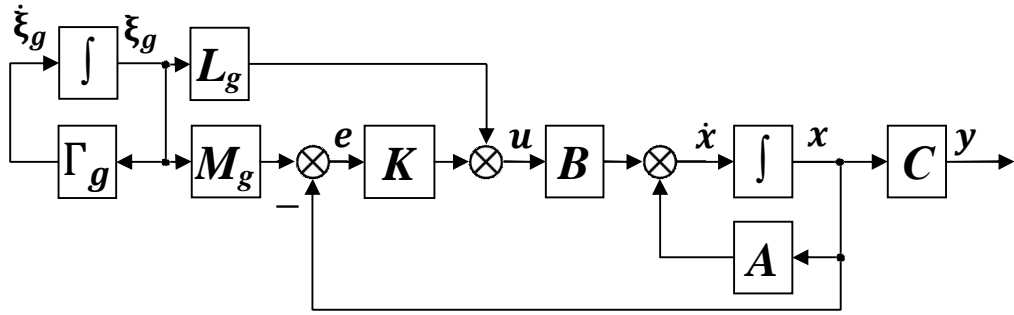


Рисунок 4.3 – Структура САУ с прямыми связями в режиме слежения

Матрица K находится из условия (14), а матрица L_g из решения системы матричных уравнений

$$\begin{cases} BL_g = M_g \Gamma_g - (A - BK)M_g \\ H_g = CM_g \end{cases} .$$

При этом система управления в режиме слежения будет иметь структуру, представленную на рисунке 4.4.

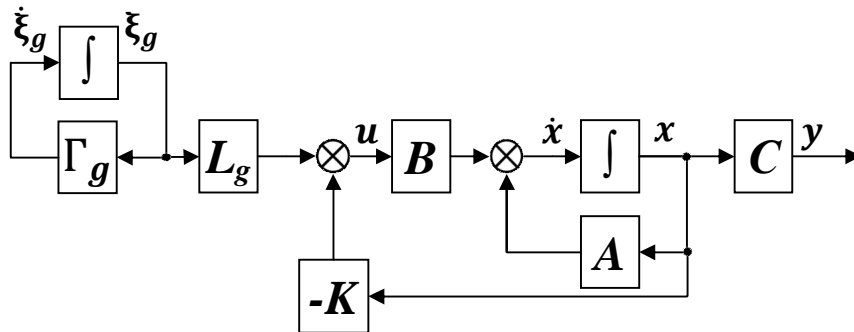


Рисунок 4.4 – Структура САУ в режиме компенсации с прямыми связями (альтернативная схема)

Замечание 4.7 Для выполнения целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\| = 0$ с помощью регулятора с прямыми связями требуется информация о параметрах матриц Γ_g и H_g и измерения сигнала $\xi_g(t)$ модели задающего воздействия (4.8).

Вопросы для самоконтроля.

1. Какие составляющие регулятора с прямыми связями непосредственно обеспечивают слежение за сигналом задания и стабилизацию замкнутой системы?
2. Чему равен порядок замкнутой системы с регулятором с прямыми связями?

4.4 Синтез наблюдателя состояния модели задающего воздействия

В некоторых случаях системы автоматического управления должны осуществлять слежение за сигналом задания, параметры модели которого известны, но вектор состояния недоступен прямым измерениям. Тогда можно построить наблюдатель переменных состояния задающего воздействия [11].

Пусть модель задающего воздействия описывается в пространстве состояний моделью (4.2). Необходимо синтезировать наблюдатель, формирующий оценку вектора состояния модели сигнала задания $\xi_g(t)$, который обозначим как $\hat{\xi}_g(t)$, и обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\xi}_g(t) - \xi_g(t)\| = 0.$$

Если вектор состояния наблюдателя будет повторять поведение вектора состояния модели задающего воздействия с точностью до линейного преобразования, то будет выполняться условие подобия

$$\bar{\xi}_g(t) = \bar{M}_g \hat{\xi}_g(t), \quad (4.21)$$

где \bar{M}_g – неособая матрица преобразования размера $q \times q$, $\hat{\xi}_g(t)$ – вектор оценок состояния модели задающего воздействия, $\bar{\xi}_g(t)$ – вектор состояния наблюдателя сигнала задания вида

$$\dot{\bar{\xi}}_g(t) = \bar{G} \bar{\xi}_g(t) + \bar{L} g(t), \quad (4.22)$$

где \bar{G} – произвольная гурвицева матрица размера $q \times q$, \bar{L} – матрица входа модели размера $q \times k$, которая определяется из условия полной управляемости пары (\bar{G}, \bar{L}) .

С учетом (4.2), (4.21) и (4.22) справедливо соотношение

$$\dot{\bar{\xi}}_g(t) = \bar{M}_g \Gamma_g \hat{\xi}_g(t) = \bar{G} \bar{M}_g \hat{\xi}_g(t) + \bar{L} H_g \xi_g(t)$$

где матрица \bar{M}_g является решением матричного уравнения типа Сильвестра вида

$$\bar{M}_g \Gamma_g - \bar{G} \bar{M}_g = \bar{L} H_g. \quad (4.23)$$

Тогда оценку вектора состояния модели задающего воздействия можно вывести следующим образом:

$$\hat{\xi}_g(t) = \bar{M}_g^{-1} \bar{\xi}_g(t). \quad (4.24)$$

Проанализируем ошибку (невязку) наблюдения

$$\tilde{\xi}_g(t) = \hat{\xi}_g(t) - \xi_g(t)$$

путем ее дифференцирования, принимая во внимание (4.2) и (4.22):

$$\dot{\tilde{\xi}}_g(t) = \bar{M}_g^{-1} \bar{G} \bar{\xi}_g(t) + \bar{M}_g^{-1} \bar{L} H_g \xi_g(t) - \Gamma_g \xi_g(t). \quad (4.25)$$

Теперь распишем (4.25) с учетом (4.21) и (4.23):

$$\dot{\tilde{\xi}}_g(t) = \bar{M}_g^{-1} \left(\bar{G} \bar{M}_g \tilde{\xi}_g(t) + (\bar{M}_g \Gamma_g - \bar{G} \bar{M}_g) \xi_g(t) \right) - \Gamma_g \xi_g(t),$$

и получим

$$\dot{\tilde{\xi}}_g(t) = \bar{M}_g^{-1} \bar{G} \bar{M}_g \tilde{\xi}_g(t).$$

Таким образом, синтез наблюдателя состояния модели задающих воздействий сводится к расчету матрицы \bar{G} , на основе желаемых показателей качества наблюдателя (4.22), и нахождении матрицы преобразования \bar{M}_g для формирования окончательной оценки (4.24). Структурная схема САУ в режиме слежения с прямыми связями и с наблюдателем задающих воздействий представлена на рисунке 4.5.

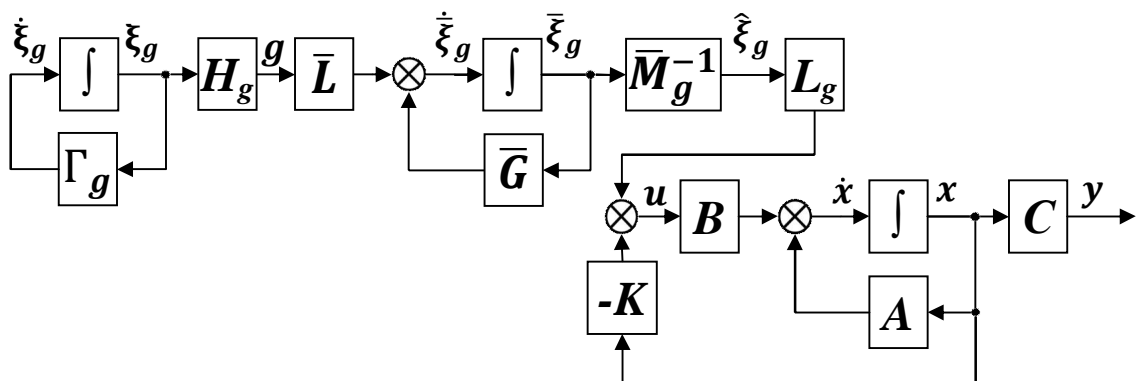


Рисунок 4.5 – Структура САУ в режиме слежения с прямыми связями и с

наблюдателем задающих воздействий

Вопросы для самоконтроля.

1. Каким образом выбираются матрицы наблюдателя состояния модели задающего воздействия \bar{G} и \bar{L} ?
2. Потребуется ли построение наблюдателя состояния модели задающего воздействия в условиях неизмеримости сигнала $\xi_g(t)$, если для решения задачи слежения используется регулятор на базе метода встроенной модели?

5 МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается задача синтеза регуляторов для объектов, подверженных влиянию внешних возмущений. Результат действия внешних возмущений необходимо скомпенсировать [3, 11] с использованием методов, рассмотренных в предыдущих разделах. Представлены подходы с применением регулятора с интегральной составляющей, метода встроенной (внутренней) модели и регулятора с прямыми связями (комбинированный регулятор). Отдельно рассмотрены методы синтеза наблюдателей возмущения.

5.1 Постановка задачи

Пусть задан возмущенный объект управления следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (5.1)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния объекта управления; $y(t)$ – l -мерный вектор выходных переменных; $f(t)$ – r -мерный вектор возмущающих воздействий; $u(t)$ – m -мерный вектор сигналов управления; A – матрица, определяющая свойства объекта управления и имеющая размер $n \times n$; B – матрица входа для управляющих воздействий размера $n \times m$; B_f – матрица входа возмущающих воздействий размера $n \times r$; C – матрица выхода размера $l \times n$.

На объект действует внешнее возмущение, модель которого задается в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f(t) = \Gamma_f \xi_f(t) \\ f(t) = H_f \xi_f(t) \end{cases}, \quad \xi_f(0) = \xi_{f^0}, \quad (5.2)$$

где $\xi_f(t)$ – η -мерный вектор состояния модели возмущающего воздействия; $\xi_f(0)$ – η -мерный вектор начального состояния модели возмущающего воздействия; Γ_f – матрица, определяющая вид возмущающего воздействия размера $\eta \times \eta$; H_f – матрица выхода модели возмущающего воздействия размера $r \times \eta$.

Требуется синтезировать регулятор состояния, обеспечивающий в замкнутой системе заданные показатели качества с учетом влияния внешнего возмущения.

5.1.1 Синтез регулятора с интегральной составляющей

В случае, когда порядок астатизма объекта управления меньше порядка модели возмущающего воздействия, использование статического регулятора в замкнутой системе приводит к возникновению установившейся ошибки, которая в худшем случае может неограниченно увеличиваться. Для устранения такой ошибки можно использовать регулятор с дополнительной интегральной составляющей (или ОПИ-регулятор), который имеет следующий вид:

$$u(t) = -Kx(t) - K_I \int_0^t y(\mu) d\mu,$$

где K – матрица линейных обратных связей; K_I – матрица коэффициентов интегральной составляющей регулятора.

Расширенную модель системы с ОПИ-регулятором зададим уравнениями

$$\begin{cases} \dot{y}_e(t) = Cx(t) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t) \end{cases} \quad (5.3)$$

Вводя обозначения

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} y_e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix},$$

уравнение (5.3) преобразуем к виду:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) - \bar{B}u(t) + \bar{B}_f f(t). \quad (5.4)$$

На основе требуемых показателей качества эталонная модель для расширенной модели ошибок формируем как

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\Gamma} \bar{\xi}(t) \\ \bar{v}(t) = \bar{H} \bar{\xi}(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

где $\bar{\xi}(t) \in \mathbb{R}^{n+l}$ – вектор состояния эталонной модели; $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор эталонного управляющего воздействия; $\bar{\Gamma} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$ – матрица, определяющая требуемые динамические свойства; \bar{H} – матрица выхода, которая находится на основе выполнения условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \overline{B} \overline{H} = \overline{M} \overline{\Gamma} - \overline{A} \overline{M} \\ \overline{K} = -\overline{H} \overline{M}^{-1} \end{cases} \quad (5.6)$$

относительно матрицы \overline{M} , имеющей размер $(n + l) \times (n + l)$, находим расширенную матрицу линейных обратных связей \overline{K} размера $m \times (n + l)$. Матрица \overline{K} содержит коэффициенты интегральной составляющей астатического регулятора K_I и коэффициенты линейных стационарных обратных связей K , то есть

$$\overline{K} = |K_I \quad K|.$$

Размер матрицы K_I равен $m \times l$, а размер матрицы линейных стационарных обратных связей $K - m \times n$.

Таким образом, для синтеза регулятора методом модального управления в рассматриваемом случае необходимо построить расширенную модель ошибок и выполнить те же процедуры, которые были использованы для синтеза алгоритмов управления, рассмотренных в предыдущем разделе. Структурная схема САУ с ОПИ-регулятором представлена на рисунке 5.1.

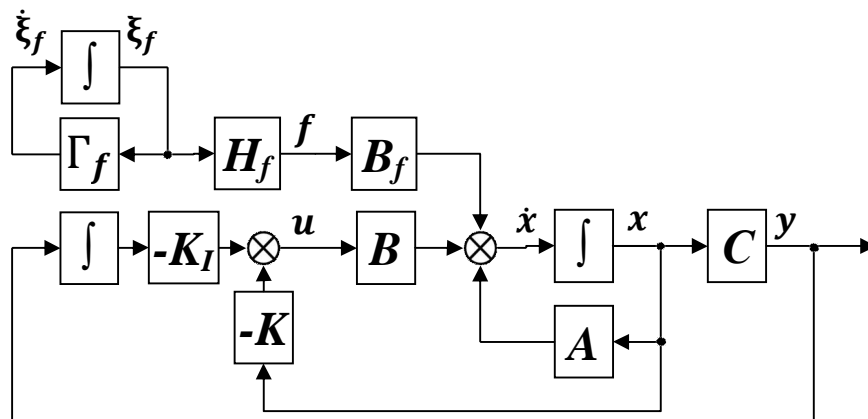


Рисунок 5.1 – Структура САУ с ОПИ-регулятором

Замечание 5.1 Уравнение (5.6) имеет единственное решение в том случае, если объект управления является одноканальным и обладает свойством полной управляемости, а эталонная модель – свойством полной наблюдаемости.

Замечание 5.2 С помощью ОПИ-регулятора выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$ возможно обеспечить только в случае компенсации постоянного сигнала. Компенсация линейно-нарастающего возмущения обеспечивается с некоторой установившейся ошибкой, при управлении в

условиях гармонических возмущений регулируемая переменная будет также иметь гармонический характер.

5.1.2 Метод встроенной (внутренней) модели

Если матрица Γ_g известна, то встроенная модель внешнего воздействия в структуру регулятора определяется следующим образом [11]:

$$\dot{x}_\xi(t) = \Gamma_f x_\xi(t) + Gy(t), \quad (5.7)$$

где $x_\xi(t)$ – η -мерный вектор состояния встроенной модели внешних воздействий; G – матрица входа модели размера $\eta \times l$, которая определяется из условия полной управляемости пары (Γ_f, G) .

Введем в рассмотрение расширенную модель объекта управления в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_\xi(t) = \Gamma_f x_\xi(t) + GCx(t) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t) \end{cases} \quad (5.8)$$

Вектор состояния расширенной модели составим из векторов состояния возмущающего воздействия и объекта управления

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_\xi(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta+l}.$$

В результате получим уравнения расширенной модели в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{B}_f f(t), \quad (5.9)$$

где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma_f & GC \\ 0 & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix}.$$

На основе желаемых показателей качества системы сформируем расширенную эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\Gamma}\bar{\xi}(t) \\ \bar{v}(t) = \bar{H}\bar{\xi}(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

где $\bar{\xi}(t) \in \mathbb{R}^{n+\eta}$ – вектор состояния эталонной модели; $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор эталонного управляющего воздействия; $\bar{\Gamma} \in \mathbb{R}^{(n+\eta) \times (n+\eta)}$ – матрица, определяющая требуемые динамические свойства системы; \bar{H} – матрица выхода эталонной модели, которая находится на основе выполнения условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} = \bar{B}\bar{H} \\ \bar{K} = -\bar{H}\bar{M}^{-1} \end{cases} \quad (5.11)$$

относительно матрицы \bar{M} , находим расширенную матрицу линейных обратных связей \bar{K} , которая обеспечивает заданный характеристический полином в замкнутой системе в том случае, если матрицы описания расширенной системы \bar{A}, \bar{B} образуют полностью управляемую пару.

Сигнал управления формируется в виде

$$u(t) = -\bar{K}\bar{x}(t).$$

Замечание 5.3 Расширенная система является полностью управляемой, если:

- ¾ объект управления является полностью управляемым;
- ¾ пара Γ_f, G является полностью управляемой;
- ¾ эталонная модель (5.10) является полностью наблюдаемой.

Таким образом, для регулятора методом модального управления в рассмотренном случае необходимо построить расширенную модель системы и выполнить те же этапы, которые использовались для синтеза алгоритмов управления в предыдущем разделе. Структурная схема САУ с встроенной моделью представлена на рисунке 5.2.

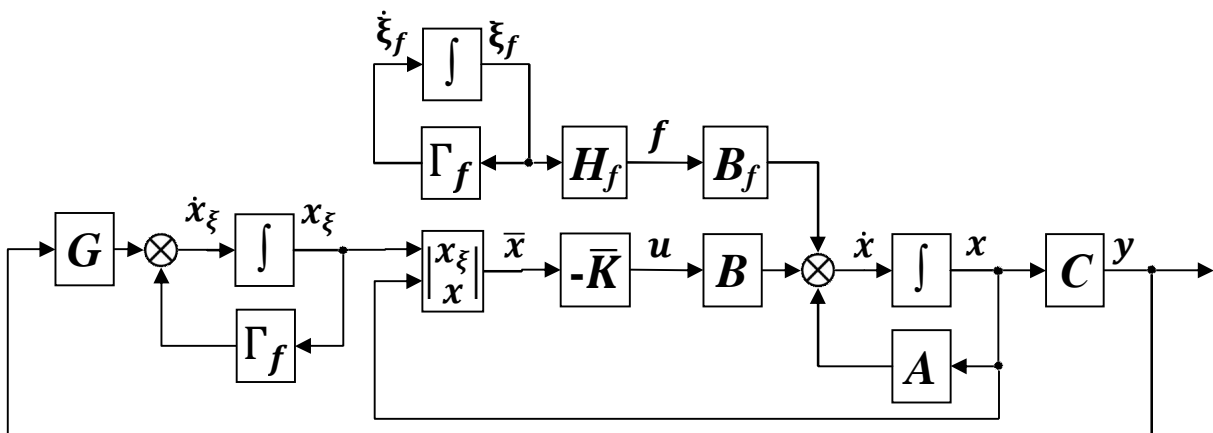


Рисунок 5.2 – Структура САУ с встроенной моделью

Замечание 5.4 Регулятор на основе метода встроенной модели позволяет обеспечить выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$, используя только параметры матрицы Γ_f модели возмущающего воздействия (4.2). Ненулевые начальные условия, параметры матрицы H_f и измерения сигнала $\xi_f(t)$ для расчета регулятора не требуются. При расчете регулятора также не используются параметры матрицы входа возмущающих воздействий B_f .

5.1.3 Синтез регулятора с прямыми связями

В случае, когда матрицы Γ_f и H_f известны, а сигнал $\xi_f(t)$ доступен прямым измерениям, для решения задачи компенсации влияния возмущения можно использовать регулятор с прямыми связями.

Определим модель ошибки компенсации влияния возмущения, используя соотношение подобия:

$$x_e(t) = M_f \xi_f(t) - x(t), \quad (5.12)$$

Тогда ошибка компенсации возмущения по выходу будет иметь вид

$$y_e(t) = C M_f \xi_f(t) - y(t).$$

Запишем уравнение состояния объекта управления в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f H_f \xi_f(t). \quad (5.13)$$

Дифференцируя (5.12) с учетом (5.13), получим

$$\dot{x}_e(t) = M_f \Gamma_f \xi_f(t) - A(M_f \xi_f(t) - x_e(t)) - Bu(t) - B_f H_f \xi_f(t)$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + (M_f \Gamma_f - AM_f) \xi_f(t) - Bu(t) - B_f H_f \xi_f(t) \\ y_e(t) = C M_f \xi_f(t) - y(t) \end{cases},$$

где матрицы M_f и L_f рассчитываются из совместного решения двух векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} BL_f + B_f H_f = M_f \Gamma_f - AM_f \\ CM_f = 0 \end{cases}.$$

Тогда модель ошибок будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + BL_f \xi_f(t) - Bu(t) \\ y_e(t) = CM_f \xi_f(t) - y(t) \end{cases}. \quad (5.14)$$

На основе желаемых показателей качества построим эталонную модель в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t) \\ v(t) = H \xi(t) \end{cases}, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Задача синтеза регулятора состоит в нахождении такого управляющего воздействия, которое в замкнутой системе обеспечивает нулевую установившуюся ошибку при заданном классе возмущающих воздействий.

Для решения данной задачи управляющее воздействие построим в виде

$$u(t) = Kx_e(t) + L_f \xi_f(t). \quad (5.15)$$

Матрицу линейных обратных связей K найдем из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} BH = M\Gamma - AM \\ K = -HM^{-1} \end{cases} \quad (5.16)$$

За счет этого обеспечиваются требуемые показатели качества замкнутой системы управления. Дополнительное слагаемое $L_f \xi_f(t)$ в выражении (5.15) введено для компенсации влияния возмущающего воздействия на установившуюся ошибку системы.

После подстановки (5.15) в (5.14), модель ошибок примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = (A - BK)x_e(t) \\ y_e(t) = CM_f \xi_f(t) - y(t) \end{cases}. \quad (5.17)$$

Вводя обозначение

$$F = A - BK,$$

нетрудно видеть, что уравнения (5.17) являются автономными:

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = Fx_e(t) \\ y_e(t) = Cx_e(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

Как следует из автономности уравнений (5.18), устойчивость системы гарантирует сходимость к нулю всех компонент вектора ошибок $x_e(t)$. Обеспечивая соответствующим выбором матрицы линейных обратных связей K требуемых корней характеристического полинома замкнутой системы, достигается желаемая динамика процессов регулирования. Другими словами, замкнутая система полностью компенсирует заданный класс возмущающих воздействий, и при этом обеспечиваются требуемые динамические показатели качества. Структурная схема САУ с прямыми связями представлена на рисунке 5.3.

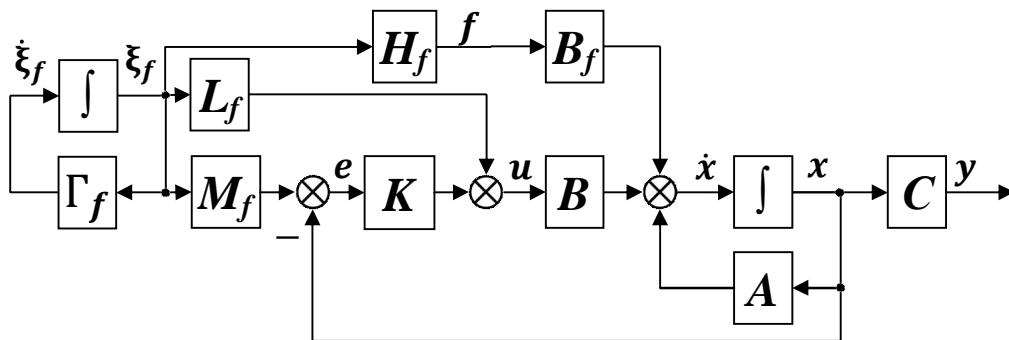


Рисунок 5.3 – Структура САУ с прямыми связями

Возможен альтернативный порядок синтеза регулятора. В этом случае управляющее воздействие формируем в виде

$$u(t) = -Kx(t) + L_f \xi_f(t).$$

Матрицу K находим из уравнений (5.16), а матрицу L_f – из решения системы матричных уравнений

$$\begin{cases} BL_f + B_f H_f = M_f \Gamma_f - (A - BK)M_f \\ CM_f = 0 \end{cases} .$$

Структурная схема системы управления с компенсацией возмущения будет иметь вид, показанный на рисунке 5.4.

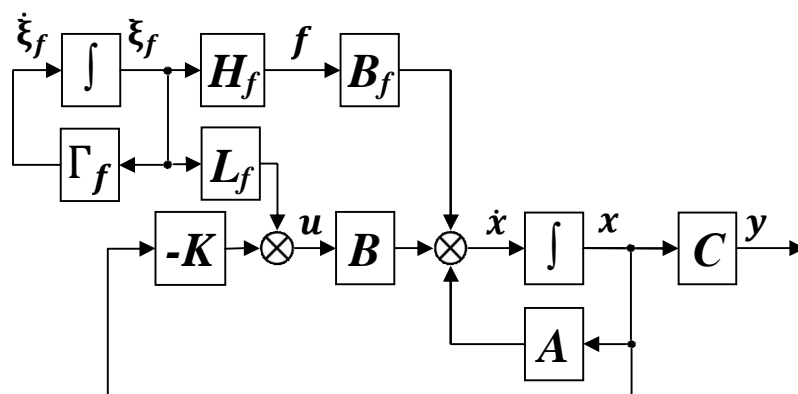


Рисунок 5.4 – Структурная схема САУ с прямыми связями по возмущению (альтернативная схема)

Замечание 5.5 Изменение коэффициентов матрицы L_f приводит к нарушению условия автономности модели ошибок и возникновению ненулевых установившихся значений ошибок компенсации.

Замечание 5.6 Для заданного класса возмущений регулятор с прямыми связями всегда обеспечивает сходимость регулируемой переменной $y(t)$ объекта к нулю за счет выполнения условия $CM_f = 0$. Сходимость к нулю вектора состояний $x(t)$ объекта может быть обеспечено лишь в частном случае, когда выполняется условие $VL_f + V_fH_f = 0$, иными словами, когда матрицы V и V_f линейно зависимы (существует такой скаляр k , что выполняется условие $V = kV_f$).

Замечание 5.7 Для выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$ с помощью регулятора с прямыми связями требуется информация о параметрах матриц Γ_f и H_f и измерения сигнала $\xi_f(t)$ модели возмущающего воздействия (5.2).

Вопросы для самоконтроля.

1. Записать выражения, которые определяют синтез ОПИ-регулятора.
2. Какая информация (параметры, сигналы) о модели внешнего возмущения используется при синтезе регулятора на базе метода встроенной модели?
3. Какая информация (параметры, сигналы) о модели внешнего возмущения используется при синтезе регулятора с прямыми связями?
4. Как упростится синтез регулятора с прямыми связями, если исходный объект управления полностью удовлетворяет требуемым динамическим показателям качества?

5.2 Постановка задачи оценки возмущений

В большинстве случаев системы автоматического управления функционируют в условиях влияния внешних возмущений, которые могут быть недоступны прямым измерениям. Для решения задачи оценки возмущения используются наблюдатели расширенного и редуцированного (пониженного) порядка. Расширенный наблюдатель используется в тех случаях, когда требуется оценить переменные состояния объекта управления и переменные состояния модели внешнего возмущения. Редуцированный наблюдатель предназначен для оценки только переменных состояния модели возмущения, когда вектор состояния объекта управления доступен прямым измерениям.

Рассмотрим объект управления, подверженный влиянию внешней среды, который описывается в пространстве состояний уравнениями (5.1). При этом будем считать, что объект управления удовлетворяет условию полной наблюдаемости.

Модель возмущающего воздействия зададим в пространстве состояний в виде (5.2). Необходимо синтезировать наблюдатель, который по измерениям входа и выхода объекта управления формирует оценку вектора состояния возмущения $\hat{\xi}_f(t)$, обеспечивая выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_f(t) - \hat{\xi}_f(t)\| = 0.$$

5.2.1 Синтез наблюдателя расширенной размерности

В случае, когда компоненты вектора состояния объекта управления не доступны прямому измерению, необходимо решать задачу одновременной оценки вектора состояния объекта управления (5.1) и внешнего возмущения (5.2) с помощью наблюдателя расширенной размерности [1, 3, 11].

Для решения задачи сформируем модель расширенной системы, которая включает в себя модель объекта управления (5.1) и модель возмущения (5.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \bar{A}x_f(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}x_f(t) \end{cases}, \quad (5.19)$$

где расширенный вектор состояния и составные матрицы имеют вид

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} \xi_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma_f & 0 \\ B_f H_f & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \bar{C} = [0 \quad C].$$

Тогда наблюдатель расширенной размерности может быть описан следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f(t) = \bar{A}\hat{x}_f(t) + \bar{L}(y(t) - \hat{y}(t)) + \bar{B}u(t) \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}_f(t) \end{cases}, \quad (5.20)$$

где $\hat{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_f(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+\eta}$ – вектор состояния наблюдателя, \bar{L} – матрица входа наблюдателя размера $((n + \eta) \times l)$.

Введем в рассмотрение вектор невязки $\tilde{x}_f(t)$, который характеризует отклонение вектора состояния наблюдателя $\hat{x}_f(t)$ от вектора состояния расширенной модели, в виде

$$\tilde{x}_f(t) = x_f(t) - \hat{x}_f(t). \quad (5.21)$$

Продифференцируем по времени $\tilde{x}_f(t)$ с учетом выражений (5.19) и (5.20):

$$\dot{\tilde{x}}_f(t) = \bar{A}x_f(t) + \bar{B}u(t) - \bar{A}\hat{x}_f(t) - \bar{L}(\bar{C}x_f(t) - \bar{C}\hat{x}_f(t)) - \bar{B}u(t).$$

С учетом выражения (5.21), производная вектора невязки по времени приобретает вид

$$\dot{\tilde{x}}_f(t) = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\tilde{x}_f(t). \quad (5.22)$$

На основе желаемых показателей качества сформируем расширенную эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}_H(t) = \bar{\Gamma}_H \bar{\xi}_H(t) \\ \bar{v}_H(t) = \bar{H}_H \bar{\xi}_H(t) \end{cases}. \quad (5.23)$$

где $\bar{\xi}_H(t) \in \mathbb{R}^{n+\eta}$ – вектор состояния эталонной модели; $\bar{v}_H(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор эталонного управляющего воздействия; $\bar{\Gamma}_H \in$ – матрица размера $(n + \eta) \times (n + \eta)$, определяющая требуемые динамические свойства наблюдателя; \bar{H}_H – матрица выхода эталонной модели размера $l \times (n + \eta)$, которую выберем из условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Учитывая принцип дуальности свойств управляемости и наблюдаемости, задача вычисления матрицы \bar{L} сводится к решению матричного уравнения типа Сильвестра вида

$$\bar{M}_H \bar{\Gamma}_H - \bar{A}^T \bar{M}_H = \bar{C}^T \bar{H}_H$$

$$\bar{L}^T = -\bar{H}_H \bar{M}_H^{-1}.$$

Уравнения решаются относительно матрицы \bar{M}_H . Далее вычисляется матрица входов \bar{L} наблюдателя расширенной размерности.

Вводя обозначение матрицы описания наблюдателя

$$\bar{F}_H = \bar{A} - \bar{L}\bar{C}$$

и упрощая соотношение (5.22), получаем выражение

$$\dot{\tilde{x}}_f(t) = \bar{F}_H \tilde{x}_f(t).$$

Вектор невязки $\tilde{x}_f(t)$ будет стремиться к нулю, если матрица \bar{F}_H является гурвицевой, то есть все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, задача синтеза наблюдателя расширенной размерности заключается в нахождении матрицы входов \bar{L} , которая обеспечивает желаемые собственные числа матрицы \bar{F}_H . Структурная схема САУ в режиме компенсации возмущения с прямыми связями и расширенным наблюдателем представлена на рисунке 5.5.

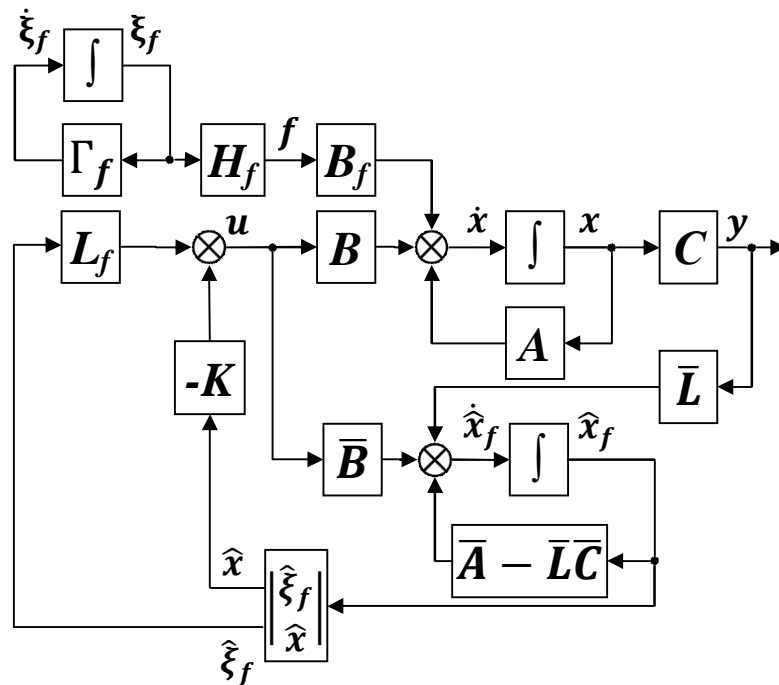


Рисунок 5.5 – Структурная схема САУ с расширенным наблюдателем и прямыми связями в режиме компенсации возмущения

Замечание 5.5 Задача синтеза наблюдателя расширенной размерности

разрешима при условии, что объект управления и модель возмущения являются полностью наблюдаемыми.

5.2.2 Синтез наблюдателя пониженной размерности

Если вектор состояния объекта управления доступен прямому измерению, то в этом случае целесообразно сформировать оценку переменных состояния модели внешнего возмущения с помощью наблюдателя возмущения пониженной размерности [1, 3, 11].

Наблюдатель возмущения пониженной размерности описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_f(t) = \hat{z}(t) + L\bar{C}x(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) = F_H\hat{z}(t) + (F_H L\bar{C} - L\bar{C}A)x(t) - L\bar{C}Bu(t) \end{cases} \quad (5.24)$$

где $\hat{z}(t)$ – η -мерный вектор состояния вспомогательного фильтра, то есть $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^\eta$; матрицы F_H – $\eta \times \eta$, L – $\eta \times r$, \bar{C} – $r \times n$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_H &= \Gamma_f - LH_f, \\ \bar{C}B_f &= I. \end{aligned}$$

На основе желаемых показателей качества наблюдателя сформируем эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_H(t) = \Gamma_H \xi_H(t) \\ v_H(t) = H_H \xi_H(t) \end{cases} \quad (5.25)$$

Нахождение матрицы L сводится к решению матричного уравнения типа Сильвестра

$$\begin{aligned} M_H \Gamma_H - \Gamma_f^T M_H &= H_f^T H_H \\ L^T &= -H_H M_H^{-1}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор невязки

$$\tilde{\xi}_f(t) = \xi_f(t) - \hat{\xi}_f(t)$$

и продифференцируем с учетом (5.2) и (5.24)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_f(t) = & \Gamma_f \tilde{\xi}_f(t) - F_H \hat{z}(t) - (F_H L \bar{C} - L \bar{C} A)x(t) + L \bar{C} B u(t) \\ & - L \bar{C} (A x(t) + B u(t) + B_f H_f \tilde{\xi}_f(t)). \end{aligned}$$

В результате получаем выражение

$$\dot{\tilde{\xi}}_f(t) = F_H \tilde{\xi}_f(t).$$

Вектор невязки $\tilde{\xi}_f(t)$ будет стремиться к нулю в том случае, если матрица F_H является гурвицевой.

В результате, задача синтеза наблюдателя возмущения пониженной размерности сводится к вычислению матриц L, \bar{C} и нахождению желаемой матрицы F_H на основе заданных показателей качества. Структурная схема САУ с наблюдателем пониженной размерности и с прямыми связями в режиме компенсации возмущения показана на рисунке 5.6.

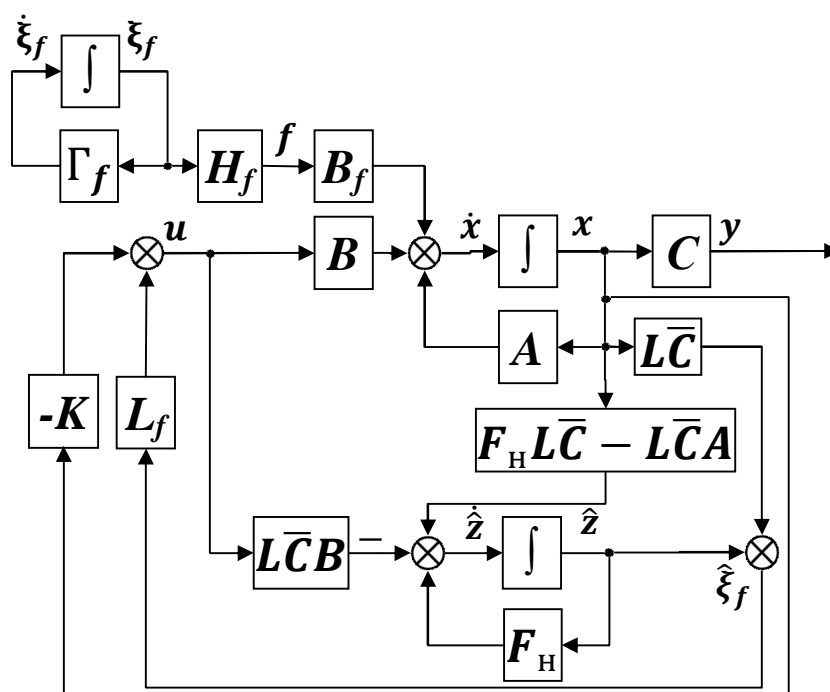


Рисунок 5.6 – Структура САУ с наблюдателем пониженной размерности и с прямыми связями в режиме компенсации возмущения

Вопросы для самоконтроля.

1. Чему равен порядок замкнутой системы с регулятором с прямыми связями и с расширенным наблюдателем в режиме компенсации возмущения.
2. При выполнении каких условий возможно применение наблюдателя пониженной размерности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены способы решения задач стабилизации, слежения, наблюдения состояния и компенсации возмущений для класса линейных стационарных непрерывных систем управления методами модального синтеза, а также с обеспечением желаемой степени сходимости и качественной экспоненциальной устойчивости.

В первой главе представлена обобщенная схема линейной непрерывной системы автоматического управления и перечислены основные ее компоненты.

Вторая глава посвящена базовым положениям теории модального управления. Рассмотрены способы формирования эталонных моделей поведения системы на основе стандартных полиномов Ньютона и Баттерворта. Рассмотрены схемы модального стабилизирующего управления на основе приведения объекта управления и эталонной модели к каноническому виду, матричного уравнения Сильвестра и формул Аккермана и Басса-Гура. Отдельно рассмотрена задача стабилизации с обеспечением желаемой степени сходимости и качественной экспоненциальной устойчивости с использованием матричного уравнения типа Риккати. Представлены точностные показатели качества и методы расчета установившейся ошибки.

В третьей главе приведены способы построения наблюдателей для объектов с неизмеряемым состоянием. Рассмотрены схемы наблюдателей полной и пониженной размерности.

Четвертая глава посвящена решению задачи отработки системой задающего воздействия (задача слежения). Приведены три различные схемы реализации систем слежения на базе модального управления: на основе регулятора с интегральной составляющей, на основе метода встроенной (внутренней) модели, на основе регулятора с прямыми связями (комбинированный регулятор).

В пятой главе рассмотрена задача стабилизации системы в условиях действия внешних возмущений, или задача компенсации возмущения. Приведены три схемы реализации систем, представленных в предыдущей главе и обеспечивающих стабилизацию системы или полной компенсацию внешнего возмущающего воздействия. Отдельно рассмотрен синтез расширенного и редуцированного наблюдателей возмущения.

Рассмотренные в настоящем учебном пособии методы управления, процедуры формирования эталонных моделей и процедуры синтеза управляющих воздействий позволяют обеспечить желаемое поведение замкнутых САУ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб: Наука, 1999. – 467 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2003. – 752 с.
3. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.
4. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983. – 245 с.
5. Душин С.Е., Зотов Н.С., Имаев Д.Х. и др. Теория автоматического управления / под ред. Яковлева В.Б. – М: Высшая школа, 2003.
6. Григорьев В.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Анализ систем автоматического управления. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. – 122с.
7. Григорьев В.В., Журавлева Н.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Синтез систем автоматического управления методом модального управления. – С-Пб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 108 с.
8. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1978. – 247 с.
9. Рябова А.В., Тертычный-Даури В.Ю. Элементы теории устойчивости. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 208 с.
10. Ушаков А.В., Вундер (Полинова) Н.А. Современная теория управления. Дополнительные главы: Учебное пособие для университетов – СПб.: Университет ИТМО, 2015. – 182 с.
11. Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А. Адаптивное управление возмущенными системами. Учебное пособие – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 126 с.
12. Кудинов Ю.И., Пащенко Ф.Ф. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB – SIMULINK). 3 изд. СПб.: Лань, 2019. – 312 с.
13. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы: учебник и практикум для вузов – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 311 с.
14. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 666 с.
15. Golnaraghi F., Kuo B.C., Automatic Control Systems (10th Edition), – New York: McGraw-Hill Education; 2017. – 1160 p.
16. Ogata K., Modern Control Engineering (5th Edition). – Boston: Prentice Hall, 2010. – 905 p.
17. Dorf R.C. and R.H. Bishop, Modern Control Systems (13th Edition). – Boston: Pearson, 2016. – 1106 p.

Григорьев Валерий Владимирович
Бойков Владимир Иванович
Парамонов Алексей Владимирович
Быстров Сергей Владимирович

Проектирование регуляторов систем управления

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А