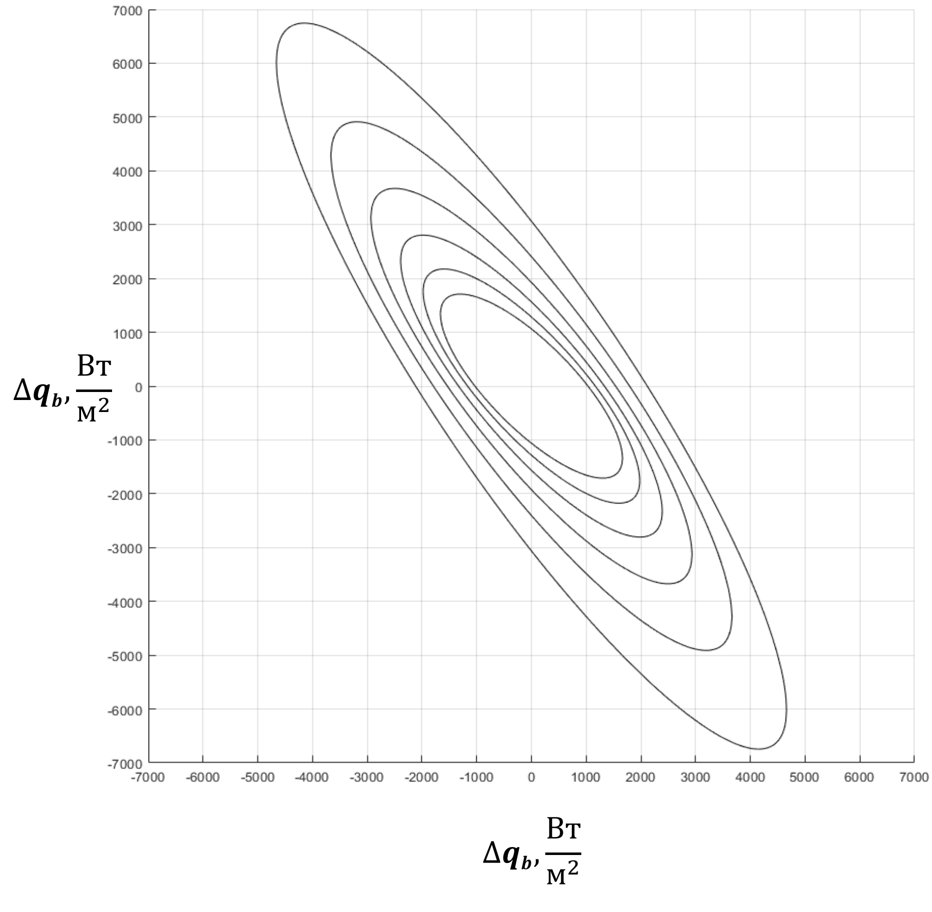
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Н.В. Пилипенко, Ю.П. Заричняк,
П.А. Колодийчук

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ



Санкт-Петербург
2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Н.В. Пилипенко, Ю.П. Заричняк,
П.А. Колодийчук**

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению 16.04.03 – Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения в качестве учебного пособия для реализации основных образовательных программ высшего образования магистратуры.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2021

Пилипенко Н.В., Заричняк Ю.П., Колодийчук П.А. Восстановление граничных условий теплообмена неоднородных тел путем решения обратных задач теплопроводности. Учебное пособие – СПб: Университет ИТМО, 2021: – 69 стр.

Рецензент(ы):
Цветков Олег Борисович, доктор технических наук, профессор, доцент (квалификационная категория «ординарный доцент») факультета энергетики и экотехнологий, Университета ИТМО.

Изложен метод восстановления граничных условий теплообмена неоднородных тел, рассмотрена дифференциально-разностная модель (ДРМ) процесса теплопереноса, представляющая собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектора состояния. Установлен вид матриц обратных связей, управления и измерения, входящих в ДРМ. При параметрической идентификации проводится минимизация невязки между модельными и экспериментальными значениями параметров с использованием рекуррентного линейного цифрового фильтра Калмана. Оценена неопределенность восстановления параметров на основе матрицы Грам. Приведены результаты модельных экспериментов.

Учебное пособие разработано в соответствии с программой дисциплины «Специальные разделы теории теплообмена» Федерального образовательного стандарта Министерства высшего образования и науки РФ для магистров по направлению подготовки 16.04.03 – Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения, совместной с Казахским национальным университетом им. аль-Фараби образовательной программы «Информационные технологии в теплофизике».

Учебное пособие охватывает наиболее важные разделы дисциплины, связанные с восстановлением нестационарных условий теплообмена сложных неоднородных систем тел в зависимости от внешних энергетических воздействий.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию – ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. – лидер Проекта 5–100.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных условных обозначений

ГУ — граничное условие;
ДРМ — дифференциально-разностная модель;
ММТ — математическая модель теплопереноса;
МНК — метод наименьших квадратов;
ОЗТ — обратная задача теплопроводности;
ПЗТ — прямая задача теплопроводности;
ПК — программный комплекс;
ПТП — приемник (преобразователь) теплового потока;
СДИ — совместный доверительный интервал;
СДО — совместная доверительная область;
СОДУ — система обыкновенных дифференциальных уравнений;
ТФХ — теплофизические характеристики;
ФК — фильтр Калмана;
ЧЭ — чувствительный элемент.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы теплообмена играют важную роль при проектировании различных объектов и технологических процессов, а порой являются определяющими при создании новой техники разработке технологий. При этом, как правило, необходимо использование системного подхода, составной частью которого является как математическое, так и физическое моделирование процессов переноса тепла в различных средах и конструкциях. Несмотря на то, что современный уровень теории теплообмена позволяет решать многие сложные задачи, тем не менее, ряд нестационарных, быстро меняющихся во времени процессов требует решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Поскольку указанные задачи являются некорректно-поставленными задачами математической физики, их решение связано с большой неопределенностью получаемых результатов.

В предполагаемой учебного пособия рассмотрен метод восстановления граничных условий теплообмена при воздействии окружающей среды на объект исследования путем решения обратных задач теплопроводности. При этом указаны границы применения рассматриваемого подхода, установлены и исследованы неопределенности, полученные в результате решения конкретных задач, сформированы вопросы и задачи для магистрантов, позволяющие лучше усвоить современный уровень исследований в указанной области и в результате осуществлять публикацию полученных результатов в высокорейтинговых журналах. Настоящее пособие также используется при выполнении НИР № 620150 Университета ИТМО «Повышение эффективности энергетических систем путем использования аккумуляторов тепловой энергии».

В ходе чтения курса «Специальные разделы теории теплообмена» и «Энерго- и ресурсосберегающие технологии» преподаватель выдает каждому студенту индивидуальную тему исследовательской работы, цель которой получить динамические характеристики и совместные доверительные области преобразователя нестационарного теплового потока (ПТП). Защита работы происходит в форме доклада с изложением процедуры выполнения задания. Для доклада отводится 8–10 минут. Доклад должен содержать изложение последовательности основных этапов выполнения работы и может быть дополнен ответами на вопросы по теме работы. Доклад служит для оценки степени самостоятельности выполнения работы.

1 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЛ

1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При исследованиях процесса теплообмена тел с окружающей средой или изменения температуры тела под влиянием внутренних источников возникает, как правило, необходимость решения двух задач, а именно, прямой (ПЗТ) и обратной (ОЗТ) задачи теплопроводности. В прямой задаче необходимо определить распределение температур во всем теле. При этом могут рассматриваться стационарный и нестационарный (меняющийся во времени) случай. В обратных задачах при анализе динамических процессов теплообмена закон изменения теплового потока или температуры поверхности должен быть определен по результатам измерений температуры внутри твердого тела или на поверхности в случае решения псевдообратной задачи теплопроводности.

В настоящее время в литературе [1] приведены решения многих важных для практики прямых задач для тел правильной формы – пластины, цилиндра, шара – при различных граничных условиях (ГУ) теплообмена. Как известно, при ГУ первого рода задана температура; второго – тепловой поток; третьего – теплообмен происходит по закону Ньютона-Рихмана.

Решение обратной задачи получить значительно сложнее, чем прямой. Это связано, прежде всего, с тем, что изменение температуры, меняющейся во времени, внутри тела всегда содержат неопределенности, и поэтому в данном учебном пособии под обратной задачей теплопроводности (ОЗТ) будем понимать задачу **оценивания** временной зависимости теплового потока на исследуемой поверхности по данным измерений нестационарной температуры в одной или нескольких точках внутри твердого тела.

Алгоритмы решения ОЗТ различаются в зависимости от того, какую задачу необходимо решить – модельную или экспериментальную.

При решении модельной задачи вначале задаются граничные условия (значениями теплового потока), а затем решается прямая задача, в результате чего определяется температура в различных точках исследуемого тела. Далее предполагаются допустимые среднеквадратические отклонения, возникающие при экспериментальном измерении температуры с помощью различных преобразователей. Полученные значения температуры используются для восстановления искомого теплового потока. Таким образом, на графике будут два значения

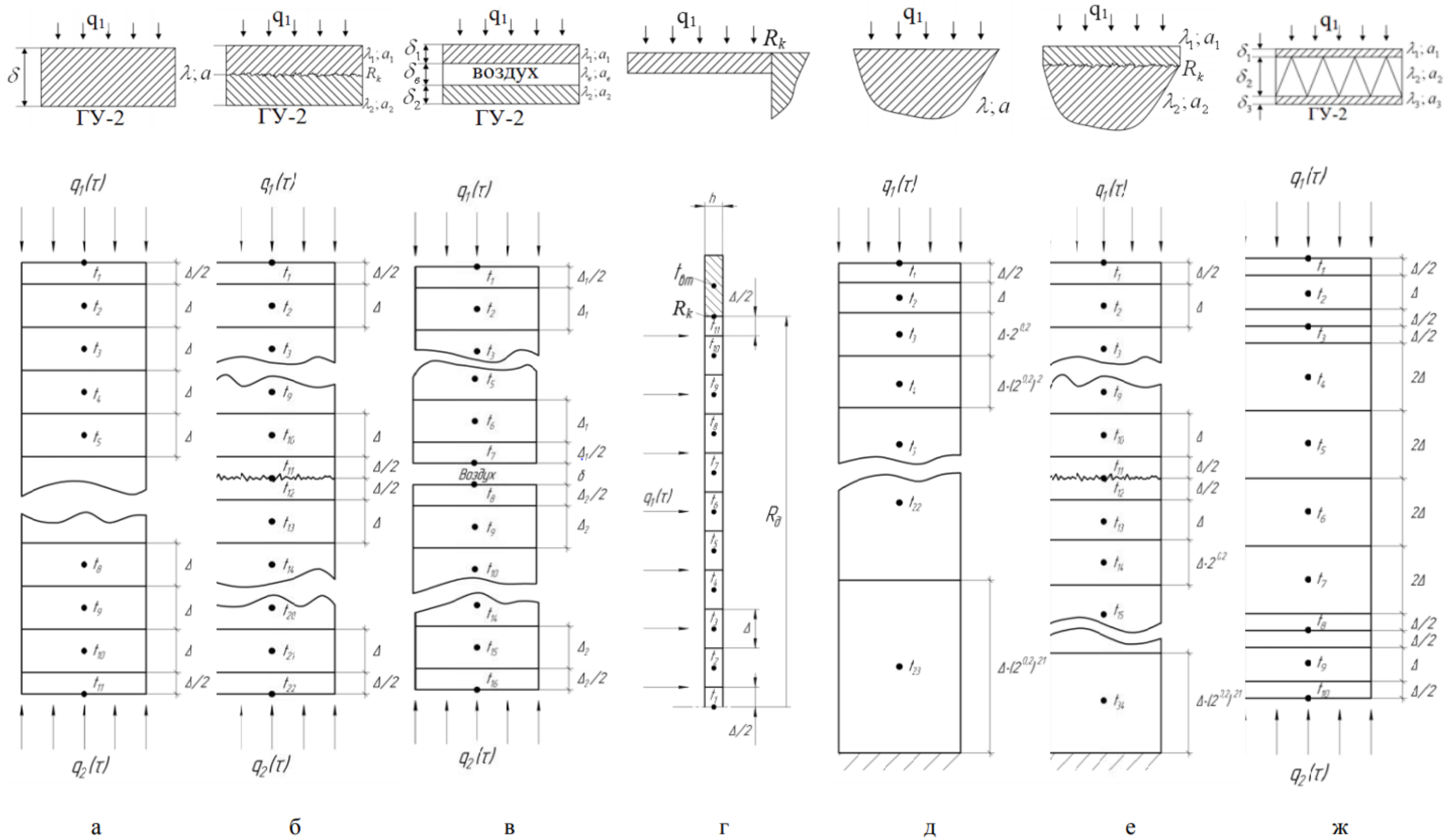


Рисунок 1.1 − Тепловые схемы и топологии ДРМ некоторых распространенных одномерных ПТП: а) однородный ПТП; б) двухсоставной неоднородный ПТП с контактным тепловым сопротивлением Rк; в) комбинированный ПТП с воздушной прослойкой; г) ПТП типа тонкого диска; д) однородный ПТП типа полуограниченного тела; е) однородный ПТП на полуограниченном теле с контактным тепловым сопротивлением Rк; ж) батарейный ПТП

потока – заданного и восстановленного по значениям температуры с учетом среднеквадратического отклонения.

Восстановление потока можно получать различными методами. В данном учебном пособии рассматривается метод параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в исследуемом теле.

При проведении экспериментальных исследований, в которых нестационарная температура $t(\tau)$ тела измеряется в различные моменты времени, нестационарный тепловой поток $q(\tau)$ восстанавливается непосредственно сразу после получения значения температуры $t(\tau)$ из числового файла.

Для измерения температуры $t(\tau)$ или восстановления теплового потока $q(\tau)$ используются различного типа преобразователи (ПТП), которые размещаются на поверхности исследуемого объекта.

Предполагается, что магистранты будут решать поставленные индивидуальные задачи, используя оба алгоритма.

Тепловые схемы и топологии ДРМ некоторых распространенных разновидностей ПТП приведены на рисунке 1.1.

1.2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Контактные методы измерения температуры различных объектов основаны на том, что чувствительные элементы измерителя температуры находятся в условиях термодинамического равновесия с исследуемым объектом. Только в таком состоянии температура чувствительного элемента равна температуре объекта в исследуемой зоне. Несоблюдение исходного принципа контактной термометрии, характерное для реальных условий измерений, приводит к возникновению методической неопределенности [2, 3].

Измерительный преобразователь температуры (ИПТ) (как бы физически миниатюрен он ни был) является чужеродным телом, в той или иной степени возмущающим ранее существовавшее поле температуры исследуемого объекта. Учесть это возмущение в общем случае можно после изучения всего комплекса явлений теплообмена, происходивших до и после монтажа измерителя на исследуемом объекте. Определение неопределенности измерения температуры является, таким образом, частью общей проблемы исследования теплообмена системы тел, находящихся в контакте с окружающими телами и средами.

Формулировке задачи теплообмена предшествует качественный анализ, имеющий целью: а) выяснение исходного теплового состояния исследуемого объекта; б) разработку тепловой и математической модели измерителя температуры в соответствии с предполагаемыми условиями его размещения на объекте; в) выявление и учет тепловых воздействий (режимных факторов), определяющих возникновение методической неопределенности [4].

Ниже приводится анализ методических неопределенностей измерения нестационарной температуры поверхности массивных тел с помощью различных контактных преобразователей температуры. Под массивным телом, как это показано в литературе [2, 3] (глава 10), обычно понимают тело, распространение температуры в котором описывается моделью "полупространства". При этом рассматриваются два метода восстановления действительной температуры объекта с использованием:

а) преобразования Лапласа, которое приводит к операционному методу интегрирования дифференциальных уравнений;

б) дифференциально-разностных моделей теплопереноса в системе тел «термопреобразователь – объект исследования», которые приводят к численно-аналитическому методу вычислений.

Кратко остановимся на особенностях каждого метода.

1.3 РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Анализ систематических неопределенностей измерения нестационарной температуры может быть сделан на основе двух задач: а) теплообмена исследуемого тела с окружающей его средой; б) теплообмена системы ИПТ – тело с той же средой. Их схемы изображены на рисунке 1.2.

При постановке задачи предполагается, что поверхности тела и системы ИПТ – тело подвержены воздействиям внешнего теплового потока $q(\tau)$ и температуры $t_c(\tau)$ внешней среды. Коэффициенты теплоотдачи между средой и телом, средой и наружной поверхностью ИПТ соответственно равны α_0 и $\alpha_э$. Степени черноты поверхности тела и ИПТ по отношению к потоку внешнего излучения $q(\tau)$ составляют A_0 и $A_э$. Теплофизические свойства тела и ИПТ характеризуются значениями теплопроводности, температуропроводности, удельной теплоемкости, плотности λ_0, α_0, c_0, γ_0, $\lambda_э$, $\alpha_э$, $c_э$, $\gamma_э$ соответственно. Начальное распределение температуры в объекте и системе ИПТ – объект равномерно, начальная температура принимается равной нулю или выбирается в качестве уровня отсчета температуры.

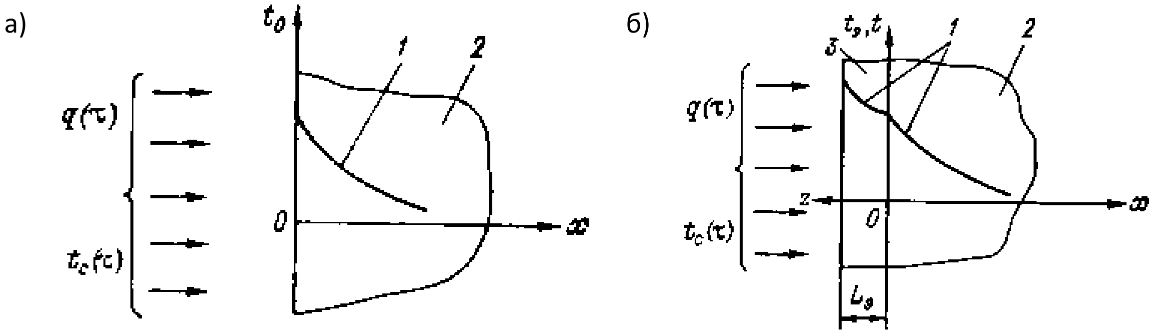


Рисунок 1.2 – Типы задач анализа систематических неопределенностей измерения нестационарной температуры: а) – теплообмен тела с окружающей средой; б) – теплообмен системы ИПТ-тело с окружающей средой; 1 – динамика температуры по глубине, 2 – исследуемое тело.

Температурное поле в свободном теле и системе ИПТ – тело характеризуется зависимостями $t_0(x,\tau)$, $t_э(z,\tau)$ и $t(x,\tau)$. Взаимосвязь между действительной температурой $t_0(x,\tau)$ поверхности тела и показаниями ИПТ $t_э(z,\tau)$ может быть установлена после раздельного решения задач теплопроводности свободного тела и системы ИПТ – тело. Итоговые результаты решения для лапласовских изображений $T_0(0,s)$ и $T_э(Z,s)$ температуры $t_0(x,\tau)$ и $t_э(z,\tau)$ имеют следующий вид [2, 3]:

$$t_0(0,s) = Y_0(s)Z_0(s) = Y_0(s)\left[t_c(s) + \frac{A_0}{\alpha_0}Q(s)\right]; \quad (1)$$

$$Y_0(s) = \frac{1}{1+\frac{\lambda_0}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{\alpha_0}}} = \frac{1}{1+\frac{\eta}{\xi_0}\beta_э}; \quad (2)$$

$$t_э(Z,s) = Y_э(s)Z_э(s) = Y_э(s)\left[t_c(s) + \frac{A_э}{\alpha_э}Q(s)\right]; \quad (3)$$

$$Y_э(Z,s) = \frac{\left(1+\frac{\eta}{\xi_0}\beta_э\right)Ch(\beta_э Z)+\eta Sh(\beta_э Z)}{\left[1+\eta\left(\frac{1}{\xi_э}+\frac{1}{\xi_к}\right)\beta_э\right]Ch\beta_э+\left(\eta+\frac{1}{\xi_э}\beta_э+\frac{\eta}{\xi_э\xi_к}\beta_э^2\right)Sh\beta_э}. \quad (4)$$

В выражениях (1)-(4) $t_c(s)$ и $Q(s)$ есть изображения внешних воздействий $t_c(\tau)$ и $q(\tau)$. Передаточные функции $Y_0(s)$ и $Y_э(s)$ содержат следующие комплексы:

$$\eta = \frac{b_0}{b_э} = \sqrt{\frac{\lambda_0 c_0 \gamma_0}{\lambda_э c_э \gamma_э}};\ \beta_э = K_э\sqrt{s};\ K_э = \frac{L_э}{\sqrt{a_э}}; \qquad (5)$$

$$\xi_0 = {}^{\alpha_0 L_э}/_{\lambda_э};\ \xi_э = {}^{\alpha_э L_э}/_{\lambda_э};\ \xi_k = {}^{\alpha_k L_э}/_{\lambda_э};\ Z = {}^{z}/_{L_э}. \qquad (6)$$

Выражения (1)-(6) служат основой для определения последующего сравнения действительной $t_0(0,\tau)$ и измеренной $t_э(z,\tau)$ температуры при заданных воздействиях $t_c(\tau)$ и $q(\tau)$, что и позволяет оценивать методические неопределенности измерения температуры [2, 3].

1.4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИНЫ

Получение дифференциально-разностных моделей проиллюстрируем на примере простейшей модели ПТП, изображенной на рисунке 1.3 и представляющей собой бесконечную пластину с линейным размером δ.

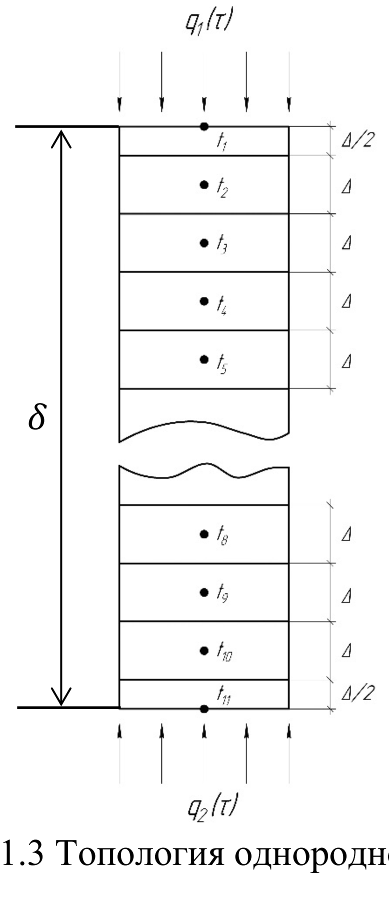


Рисунок 1.3 Топология однородного ПТП.

Разобьем ПТП на n элементарных участков-блоков размером Δ. Средние температуры этих блоков $t_1, t_2, \ldots, t_n$ отнесенные к их центрам, составляют $(n \times 1)$-мерный вектор состояния $\vec{T}(\tau) = [t_1]_{i=1}^{n}$. При этом размеры граничных блоков установим равными $\Delta/2$, а их средние температуры t_1, t_n отнесем к торцевым поверхностям. Такое разбиение принято по нескольким причинам. Толщины блоков не могут быть слишком большими, так как температуры, отнесенные к их центрам, считаются их среднеобъемными температурами, и при большой толщине блока растет неопределенность решения. С другой стороны, уменьшение толщины блоков приводит к малым перепадам температуры по толщине блока, возрастанию количества уравнений в ДРМ и увеличению неопределенности измерений. Первый и последний блоки имеют толщину $\Delta/2$.

Составим систему уравнений теплового баланса для пластины:

$$\begin{cases} q_1(\tau)S = C\dfrac{dt_1}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_1 - t_2), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_1 - t_2) = C\dfrac{dt_2}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_2 - t_3), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_2 - t_3) = C\dfrac{dt_3}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_3 - t_4), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_3 - t_4) = C\dfrac{dt_4}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_4 - t_5), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_4 - t_5) = C\dfrac{dt_5}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_5 - t_6), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_5 - t_6) = C\dfrac{dt_6}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_6 - t_7), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_6 - t_7) = C\dfrac{dt_7}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_7 - t_8), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_7 - t_8) = C\dfrac{dt_8}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_8 - t_9), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_8 - t_9) = C\dfrac{dt_9}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_9 - t_{10}), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_9 - t_{10}) = C\dfrac{dt_{10}}{d\tau} + \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_{10} - t_{11}), \\ \dfrac{\lambda S}{\Delta}(t_{10} - t_{11}) = C\dfrac{dt_{11}}{d\tau}. \end{cases} \quad 7)$$

На основе полученной системы выразим $\dfrac{dt_i}{d\tau}$:

$$\frac{dt_1}{d\tau} = \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_2 - \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_1 + \frac{2}{c_1\rho_1\Delta_1} q(\tau) ,$$

$$\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_1 - \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_2 + \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_3 ,$$

………………………………………………………………………………

$$\frac{dt_i}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_{i-1} - \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_i + \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_{i+1} ,$$

………………………………………………………………………………

$$\frac{dt_{10}}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_9 - \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_{10} + \frac{a_1}{\Delta_1^2} t_{11} ,$$

$$\frac{dt_{11}}{d\tau} = \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_{10} - \frac{2a_1}{\Delta_1^2} t_{11},$$

где λ_i – теплопроводность, Вт/м·К,
c_i – удельная теплоемкость, Дж/кг·К,
ρ_i – плотность, кг/м^3,
Δ_i – толщина блока, м,
i=1 – материал ИПТ,
i=2 – материал полупространства.

Во многих практических случаях используется тепловая модель, представляющая собой массивное полуограниченное тело с расположенным на нем преобразователем температуры. Рассмотрим методику получения ДРМ для указанной системы тел.

1.5 РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ

При учете **зависимости теплофизических характеристик (ТФХ) от температуры** будем относить удельную теплоемкость c_i и теплопроводность λ_i к температурам блоков t_i, а коэффициент теплопроводности между соседними блоками определять по формуле

$$\lambda_{i,i\pm1}=\frac{1}{2}\left[\lambda\left(t_i\right)+\lambda\left(t_{i\pm1}\right)\right]=\lambda\left(\frac{t_i+t_{i\pm1}}{2}\right).$$

Тогда после преобразований уравнение теплового баланса для *i*-го блока имеет вид

$$\frac{dt_i}{d\tau}=\dot{t}_i=b_{i-1}t_{i-1}-b_it_i+b_{i+1}t_{i+1}, \tag{8}$$

где $b_{i-1}=\frac{\lambda_{i,i-1}}{c_i\rho\Delta^2}$, $b_i=\frac{\lambda\left(t_i\right)+\frac{1}{2}\left[\lambda\left(t_{i-1}\right)+\lambda\left(t_{i+1}\right)\right]}{c_i\rho\Delta^2}$, $b_{i+1}=\frac{\lambda_{i,i+1}}{c_i\rho\Delta^2}$, $i=2,3,4,\ldots,n-1$.

Для первого граничного блока ($i=1$) с граничными условиями 2-го рода (ГУ-2) на рабочем торце уравнение теплового баланса принимает следующий вид

$$\dot{t}_1=-2b_1^*t_1+2b_2^*t_2+2d_1q_1(\tau), \tag{9}$$

где $b_1^*=b_2^*=\frac{\lambda\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{c_1\rho_1\Delta^2}$, $d_1=\frac{1}{c_1\rho_1\Delta}$.

Подстановкой $q(\tau)=\alpha(t_{cp}-t_1)$ в уравнении (7) можно перейти к **граничным условиям третьего рода (ГУ-3)**, задавая температуру среды t_{cp} и коэффициент теплоотдачи α. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\dot{t}_1=-2(b_1^*+\alpha d_1)t_1+2b_2^*t_2+2\alpha d_1\cdot t_{cp}. \tag{10}$$

Для граничного тыльного блока $i=n$ уравнения соответствуют виду (1.2) или (1.3).

В уравнения (8) и (9) могут быть введены **граничные условия лучистого теплообмена** рабочей поверхности ПТП с окружающей средой.

В простейшем случае, уравнение (8) принимает вид

$$\dot{t}_1=2b_1^*t_2-2b_2^*t_1+2d_1\varepsilon C_0 10^{-8}[T_{cp}^4-(t_1+273)^4]. \tag{11}$$

В случае **постоянства ТФХ** материала (λ=*const,* c =*const*)

$d_1 = d = \dfrac{1}{c\rho\Delta} = const$ и $b_i = b = \dfrac{a}{\Delta^2} = const$ уравнения (7), (8) и (9) принимают вид

$$\dot{t}_i = bt_{i-1} - 2bt_i + bt_{i+1}, \tag{12}$$

$$\dot{t}_1 = 2bt_2 - 2bt_1 + 2dq_1(\tau), \tag{13}$$

$$\dot{t}_1 = -2b\left(1 + \alpha\frac{\Delta}{\lambda}\right)t_1 - 2bt_2 + 2\alpha dt_{cp}. \tag{14}$$

Дифференциально-разностная модель (ДРМ) с условиями теплообмена 2-ого рода на поверхностях граничных блоков состоит из двух уравнений типа (14) и $(n-2)$ уравнений типа (13). Она может быть представлена в форме следующей **линейной стационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)**:

$$\frac{d}{d\ t}\vec{T}(\tau) = F\vec{T}(\tau) + G\vec{U}(\tau), \tag{15}$$

где векторы состояния $\vec{T}(\tau)$ и управления $\vec{U}(\tau)$, матрицы обратных связей F и управления G имеют следующий вид:

$$\underset{(n\times 1)}{\vec{T}(\tau)} = \begin{vmatrix} t_1(\tau) \\ \vdots \\ t_n(\tau) \end{vmatrix}, \qquad \underset{(2\times 1)}{\vec{U}(\tau)} = \begin{vmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{vmatrix}, \qquad \underset{(n\times 2)}{G} = \begin{vmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 2d \end{vmatrix},$$

$$\underset{(n\times n)}{F} = \begin{vmatrix} -2b & 2b & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ b & -2b & b & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -2b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 2b & -2b \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где $b = \dfrac{\lambda}{c\rho\Delta^2}$ и $d = \dfrac{1}{c\rho\Delta}$.

Для того же ПТП, но с условиями теплообмена 3-го рода ($\alpha_i(\tau)$ и $T_{cp_i}(\tau)$ при $i = 1{,}2$) на поверхностях граничных блоков ДРМ (15) отличается следующим видом вектора управления $U(\tau)$ и матрицы обратных связей $F(\tau)$:

$$\vec{U}(\tau)=\left|\alpha_1(\tau)t_{cp_1}(\tau) \quad \alpha_2(\tau)t_{cp_2}(\tau)\right|^{\mathrm{T}},$$

$$F(\tau)=\begin{vmatrix} -2b\left[1+\alpha_1(\tau)\dfrac{\Delta}{\lambda}\right] & 2b & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ b & -2b & b & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -2b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 2b & -2b\left[1+\alpha_2(\tau)\dfrac{\Delta}{\lambda}\right] \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Таким образом, линейная стационарная ДРМ при зависящих от времени граничных условиях 3-го рода становится **нестационарной**.

Дифференциально-разностная модель (15) обладает важной особенностью, а именно, её стандартная для общей теории динамических объектов и систем форма позволяет использовать её для анализа динамических свойств различных типов преобразователей. В частности, пакеты программ MATLAB, SIMULINK позволяют без особых трудностей установить такие динамические характеристики преобразователей, как переходная, импульсная, амплитудо- и фазочастотная, а также установить вид передаточной функции. Последнее имеет практический интерес, в особенности в системах автоматического регулирования. Подчеркнем ещё раз, что положения, изложенные выше, справедливы для всех известных нам преобразователей температуры и теплового потока.

1.6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИНЫ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

На поверхности полуограниченного тела находится ранее представленная пластина. Её ДРМ и принцип разбиения остаются без изменений. Тело разбивается на 23 блока, первый имеет толщину $\Delta_2/2$, второй - Δ_2, а толщина следующих увеличивается в геометрической прогрессии так, что размер следующего блока равен $\Delta_{i+1}=\Delta_i 2^m$, где m = 0.2, то есть толщина каждого последующего блока больше предыдущего в 1.15 раз.

Составим систему уравнений теплового баланса для полупространства и ПТП:

$$q(\tau)S = C_1\frac{dt_1}{d\tau} + \frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_1 - t_2), C_1 = c_1\rho_1 S\frac{\Delta_1}{2},$$

$$\frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_1 - t_2) = C_2\frac{dt_2}{d\tau} + \frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_2 - t_3), C_2 = c_1\rho_1 S\Delta_1,$$

………………………………………………………………………

$$\frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_{i-1} - t_i) = C_i\frac{dt_i}{d\tau} + \frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_i - t_{i+1}), C_i = c_1\rho_1 S\Delta_1,$$

………………………………………………………………………

$$\frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_9 - t_{10}) = C_{10}\frac{dt_{10}}{d\tau} + \frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_{10} - t_{11}), C_{10} = c_1\rho_1 S\Delta_1,$$

$$\frac{\lambda_1 S}{\Delta_1}(t_{10} - t_{11}) = \left(\frac{c_1\rho_1 S\Delta_1}{2} + \frac{c_2\rho_2 S\Delta_2}{2}\right)\frac{dt_{11}}{d\tau} + \frac{\lambda_2 S}{\Delta_2}(t_{11} - t_{12}),$$

$$\frac{\lambda_2 S}{\Delta_2}(t_{11} - t_{12}) = C_{12}\frac{dt_{12}}{d\tau} + \frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}(1 + 2^{0.2})}(t_{12} - t_{13}), C_{12} = c_2\rho_2 S\Delta_2,$$

$$\frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}(1 + 2^{0.2})}(t_{12} - t_{13}) = C_{13}\frac{dt_{13}}{d\tau} + \frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}2^{0.2}(1 + 2^{0.2})}(t_{13} - t_{14}),$$
$$C_{13} = 2^{0.2}c_2\rho_2 S\Delta_2,$$

………………………………………………………………………

$$\frac{\lambda S}{\frac{\Delta}{2}(2^{0.2})^{i-13}(1 + 2^{0.2})}(t_{i-1} - t_i) = C_i\frac{dt_i}{d\tau} + \frac{\lambda S}{\frac{\Delta}{2}(2^{0.2})^{i-12}(1 + 2^{0.2})}(t_i - t_{i+1}),$$
$$C_i = (2^{0.2})^{i-12}c_2\rho_2 S\Delta_2,$$

………………………………………………………………………

....

$$\frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}(2^{0.2})^{19}(1+2^{0.2})}(t_{31}-t_{32}) = C_{32}\frac{dt_{32}}{d\tau} + \frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}(2^{0.2})^{20}(1+2^{0.2})}(t_{32}-t_{33}),$$

$$C_{32} = (2^{0.2})^{20} c_2 \rho_2 S \Delta_2 \,,$$

$$\frac{\lambda_2 S}{\frac{\Delta_2}{2}(2^{0.2})^{20}(1+2^{0.2})}(t_{32}-t_{33}) = C_{33}\frac{dt_{33}}{d\tau}, \quad C_{33} = (2^{0.2})^{21} c_2 \rho_2 S \Delta_2 \,.$$

Выразим $\frac{dt_i}{d\tau}$:

$$\frac{dt_1}{d\tau} = \frac{2a}{\Delta_1^2}t_2 - \frac{2a}{\Delta_1^2}t_1 + \frac{2}{c_1\rho_1\Delta_1}q(\tau)\,,$$

$$\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2}t_1 - \frac{2a_1}{\Delta_1^2}t_2 + \frac{a}{\Delta_1^2}t_3\,,$$

....

$$\frac{dt_i}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2}t_{i-1} - \frac{2a_1}{\Delta_1^2}t_i + \frac{a}{\Delta_1^2}t_{i+1}\,,$$

....

$$\frac{dt_{10}}{d\tau} = \frac{a_1}{\Delta_1^2}t_9 - \frac{2a_1}{\Delta_1^2}t_{10} + \frac{a}{\Delta_1^2}t_{11}\,,$$

$$\frac{dt_{11}}{d\tau} = \frac{2a_1}{\Delta_1^2}t_{10} - \left(\frac{2a_1}{\Delta_1^2} + \frac{2}{c_1\rho_1\Delta_1}\right)t_{11} + \frac{2}{c_1\rho_1\Delta_1}t_{12}$$

$$\frac{dt_{12}}{d\tau} = \frac{2}{c_2\rho_2\Delta_2}t_{11} - \left(\frac{2}{c_2\rho_2\Delta_2} + \frac{2a_2}{\Delta_2^2}\right)t_{12} + \frac{2a_2}{\Delta_2^2}t_{13}\,,$$

$$\frac{dt_{13}}{d\tau} = \frac{a_2}{\Delta_2^2}t_{12} - \frac{a_2}{\Delta_2^2}\left(1 + \frac{2}{1+2^{0.2}}\right)t_{13} + \frac{a_2}{\Delta_2^2\left(\frac{1+2^{0.2}}{2}\right)}t_{14}\,,$$

$$\frac{dt_{14}}{d\tau}=\frac{a_2}{2^{0.2}\left(1+\frac{2^{0.2}}{2}\right)\Delta_2^2}t_{13}-\frac{a_2}{\Delta_2^2\left(1+\frac{2^{0.2}}{2}\right)}\left(1+\frac{2}{1+2^{0.2}}\right)t_{14}+$$
$$+\frac{a_2}{(2^{0.2})^2\left(1+\frac{2^{0.2}}{2}\right)\Delta_2^2}t_{15}\,,$$

……………………………………………………………………………

$$\frac{dt_i}{d\tau}=\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{-24+2i}(1+2^{0.2})}t_{i-1}-\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{-25+2i}}t_i+$$
$$+\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{-25+2i}\,(1+2^{0.2})}t_{i+1}\,,$$

……………………………………………………………………………

$$\frac{dt_{33}}{d\tau}=\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{39}(1+2^{0.2})}t_{32}-\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{40}}t_{33}+\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{40}\,(1+2^{0.2})}t_{34}\,,$$

$$\frac{dt_{34}}{d\tau}=\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{41}(1+2^{0.2})}t_{33}-\frac{a_2}{\frac{\Delta_2^2}{2}(2^{0.2})^{41}(1+2^{0.2})}t_{34}\,,$$

где $a_i=\frac{\lambda_i}{c_i\rho_i}$ – температуропроводность i-го материала.

В последние годы активно разрабатываются численные методы решения прямых задач теплопроводности с использованием ДРМ на основе методов пространства состояний и переходной матрицы состояния $\Phi(\tau,\tau_0)$. Рассмотрим их подробнее.

1.7 РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ И ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ

Для линейной ДРМ (1.9) общее решение с использованием метода пространства состояний и переходной матрицы [5] имеет вид

$$\frac{dT}{d\tau} = \Phi(\tau,\tau_0)\cdot\vec{T}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau}\Phi(\tau,\theta)\cdot G(\theta)\cdot\vec{U}(\theta)d\theta, \qquad (18)$$

а решение однородного уравнения

$$\frac{dT}{d\tau} = F\vec{T}(\tau), \qquad (19)$$

полученное из (1.12), имеет вид

$$\frac{dT}{d\tau} = \Phi(\tau,\tau_0)\cdot\vec{T}(\tau_0), \qquad (20)$$

где $\Phi(\tau,\tau_0) = \exp(F(\tau-\tau_0))$ – переходная $(n\times n)$-матрица состояния (матрица Коши) системы (1.9); τ_0 – начальный момент времени.

Переходная матрица $\Phi(\tau,\tau_0)$ позволяет по значению вектора состояния $\vec{T}(\tau_0)$ в момент времени τ_0 получать его значения $\vec{T}(\tau)$ в последующие моменты времени τ, образуя пространство состояния объекта, описываемого уравнением (15). На значительных интервалах времени $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ она характеризует внутренние связи в объекте и является наиболее информативной его динамической характеристикой.

Для получения численных решений (18) и (20) введем дискретное время $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = 1,2,..,N$ и установим соответствующее ему малое значение шага по времени $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$. При выборе $\Delta\tau$ необходимо учитывать ограничение на величину $\Delta\tau$, исходя из условий устойчивости решения $F_0 = \frac{a\tau}{\Delta^2} \le 0.5$, что было неоднократно подтверждено нами на практике.

Для **стационарных** линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений переходная матрица $\Phi(\tau_{k+1},\tau_k) = \Phi = const$ и определяется следующим бесконечным рядом:

$$\Phi = I + F\Delta\tau + \frac{1}{2!}F^2\Delta\tau^2 + \ldots + \frac{1}{m!}F^m\Delta\tau^m + \ldots, \tag{21}$$

где I – единичная матрица.

При малых $\Delta\tau$ ряд (21) отличается быстрой сходимостью.

С помощью переходной матрицы Φ решение (18) может быть представлено в виде

$$\vec{T}_{k+1} = \Phi \cdot \vec{T}_k + \frac{1}{2}(I + \Phi) \cdot G\vec{U}_k \Delta\tau, \tag{22}$$

где $\vec{T}_k = \vec{T}(\tau_k)$, $\vec{T}_{k+1} = \vec{T}(\tau_{k+1})$ и $\vec{U}_k = \vec{U}(\tau_k)$, а решение однородного уравнения (1.16) – в виде

$$\vec{T}_{k+1} = \Phi\vec{T}_k .$$

Для **нестационарных** линейных СОДУ матрица обратных связей $F(\tau)$ зависит от времени. Переходная матрица $\Phi_{k+1,k}$ от состояния $\vec{T}_k$ к состоянию $\vec{T}_{k+1}$ должна вычисляться для каждого расчетного шага по формуле, аналогичной (21):

$$\Phi_{k+1,k} = I + F_{k+1}\Delta\tau + \frac{1}{2!}F_{k+1}^2\Delta\tau^2 + \ldots + \frac{1}{m!}F_{k+1}^m\Delta\tau^m + \ldots, \tag{23}$$

где $F_{k+1} = F(\tau_{k+1})$, а решение нестационарной линейной СОДУ (15) в соответствии с (22) имеет вид

$$\vec{T}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \cdot \vec{T}_k + \frac{1}{2}(I + \Phi_{k+1,k}) \cdot G\vec{U}_k \cdot \Delta\tau . \tag{24}$$

Таким образом, для нестационарных линейных ДРМ ПТП переходная матрица $\Phi_{k+1,k}$ должна рассчитываться на каждом временном шаге $\Delta\tau$ при условии его малости. Заметим, что выполнение этого условия обеспечивает быструю сходимость ряда (23).

Недостатком **численного** метода решения прямых задач теплопроводности (ПЗТ) по сравнению с аналитическими является его конкретный числовой вид и недостаточная информация для анализа неопределенности восстанавливаемых параметров. Нами разработан и внедрен в практику измерений [5] численно-алгоритмический метод решения ПЗТ и получения динамических характеристик различных известных нам ПТП **с единых позиций**, а именно на основе математического аппарата теории пространства состояний. Важным достоинством такого подхода является доступность его программной реализации в пакетах MATLAB, SIMULINK, VISSIM и др., а также наглядность и возможность анализа полученных результатов.

Кратко остановимся на особенностях численно-алгоритмического метода решения задачи [5] и определения переходной матрицы $\Phi(\tau,\tau_0)$, которая в данном случае имеет вид

$$\Phi(\tau,\tau_0)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(\tau,\tau_0) & \cdot & \varphi_{1n}(\tau,\tau_0)\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_{n1}(\tau,\tau_0) & \cdot & \varphi_{nn}(\tau,\tau_0)\end{vmatrix}. \tag{25}$$

Элемент $\varphi_{ij}(\tau,\tau_0)$ представляет собой переходный процесс по температуре i-го блока ПТП от единичного начального условия по температуре j-го блока, протекающий в свободной системе (19) при нулевых начальных условиях по температурам остальных блоков.

В практических расчетах используется дискретная форма переходной матрицы в следующем виде:

$$\Phi_k=\begin{vmatrix}\varphi_{11,k} & \cdot & \varphi_{1n,k}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_{n1,k} & \cdot & \varphi_{nn,k}\end{vmatrix}, \tag{26}$$

где $\Phi_k=\Phi(\tau_k,\tau_0)=\Phi(k\Delta\tau,0)$, а $\varphi_{ij}(\tau,\tau_0)=\varphi_{ij}(\tau_k,\tau_0)=\varphi_{ij}(k\Delta\tau,0)=\varphi_{ij,k}$.

Для вычисления Φ_k используется следующий способ [5]: если для момента времени $\tau_0=0(k=0)$ установить единичное начальное t_{j0} условие для j-ой составляющей вектора состояния $\vec{T}_0$, а все остальные положить равными 0, то полученные в результате решения свободной системы (19) значения $t_i(i=1,2,..,n)$ вектора $\vec{T}_k$ будут j-м столбцом матрицы Φ_k. Если подобную операцию выполнить n раз $(j=1,2,..,n)$, то будут получены все n столбцов матрицы Φ_k.

На рисунках 1.4-1.14 в качестве примера показан вид переходной матрицы Ф, по которому можно оценить влияние изменения температуры любого блока на все остальные при выбранном материале ПТП (никель) и его размере – $2\cdot10^{-3}$м. Показаны результаты для 11 блоков. Нами были получены значения матрицы Ф для 34 блоков для случая ПТП, расположенного на полупространстве теле.

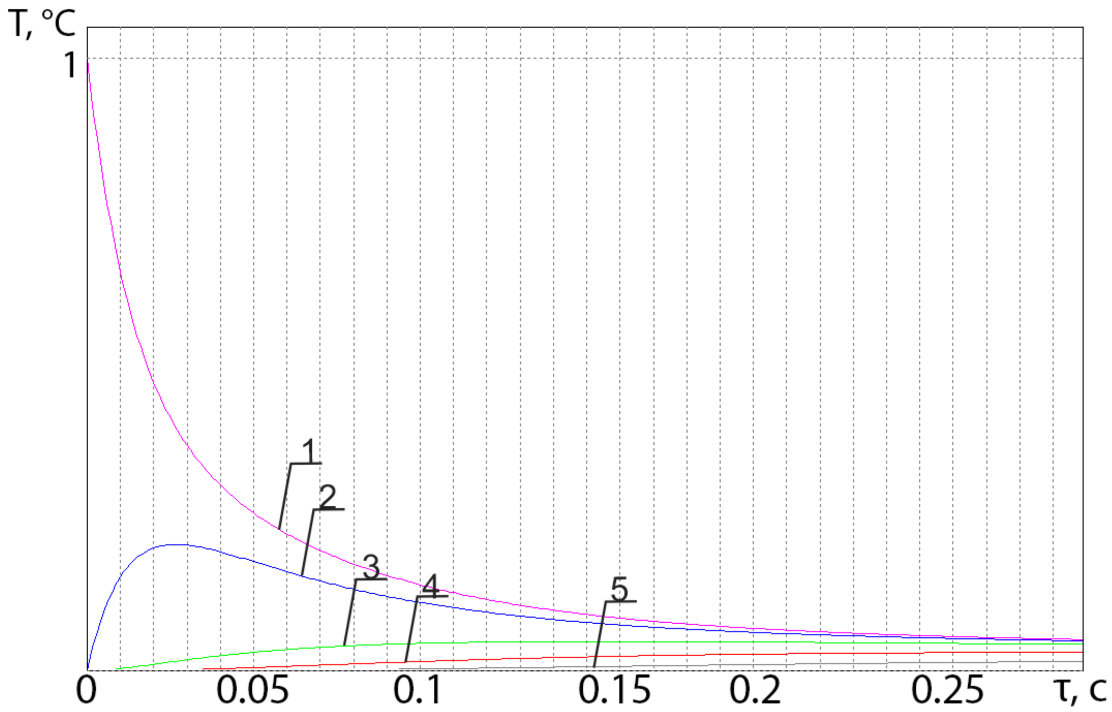


Рисунок 1.4 – Расчетная температура блоков 1, 2, 3, 4 и 5 при заданной температуре (1°С) на первом блоке

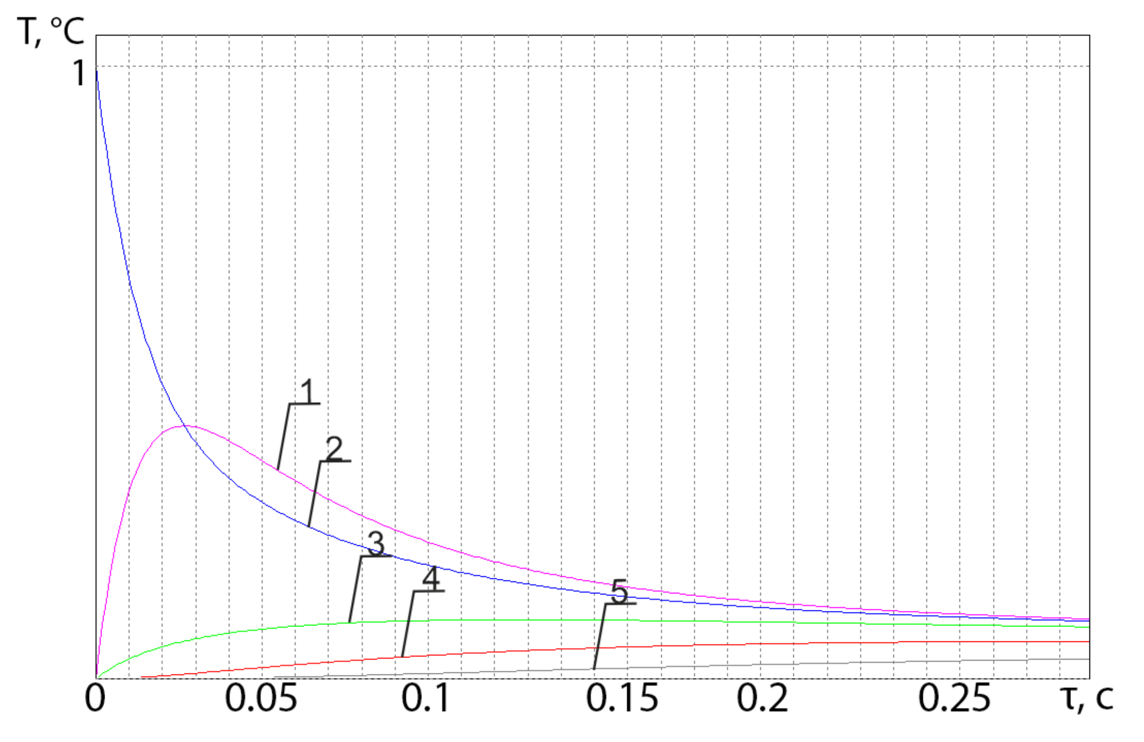


Рисунок 1.5 - Расчетная температура блоков 1, 2, 3, 4 и 5 при заданной температуре (1°С) на втором блоке

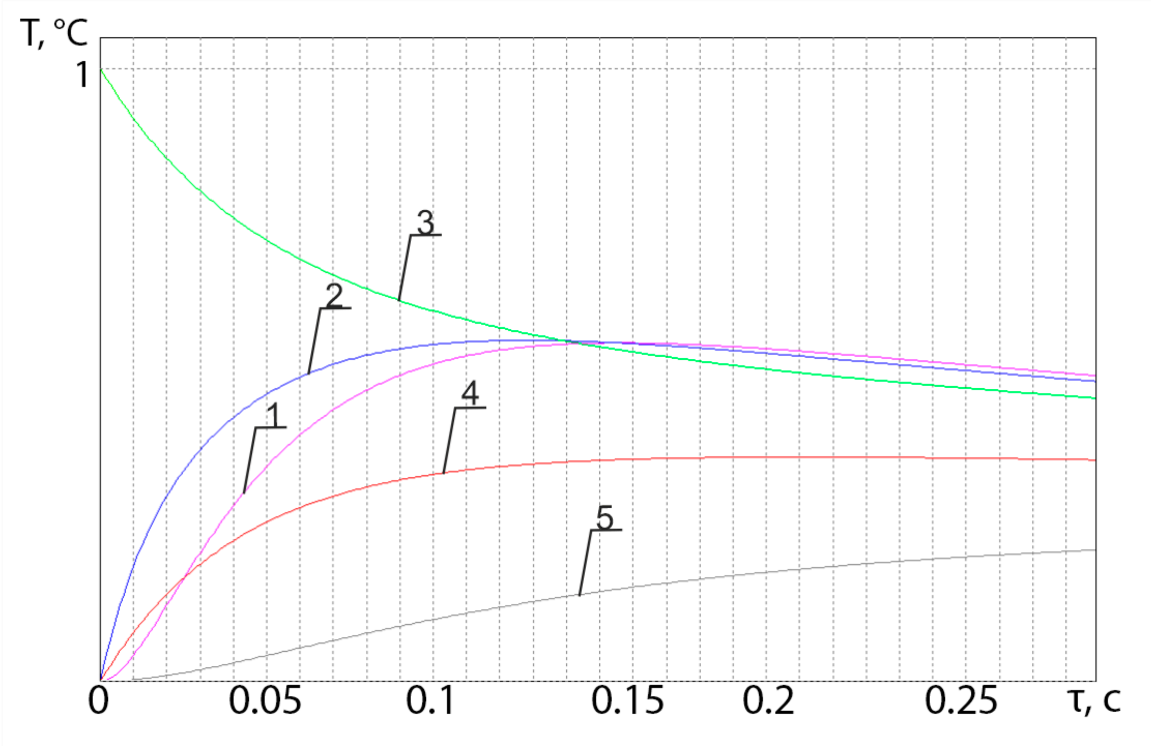


Рисунок 1.6 - Расчетная температура блоков 1, 2, 3, 4 и 5 при заданной температуре (1°C) на третьем блоке

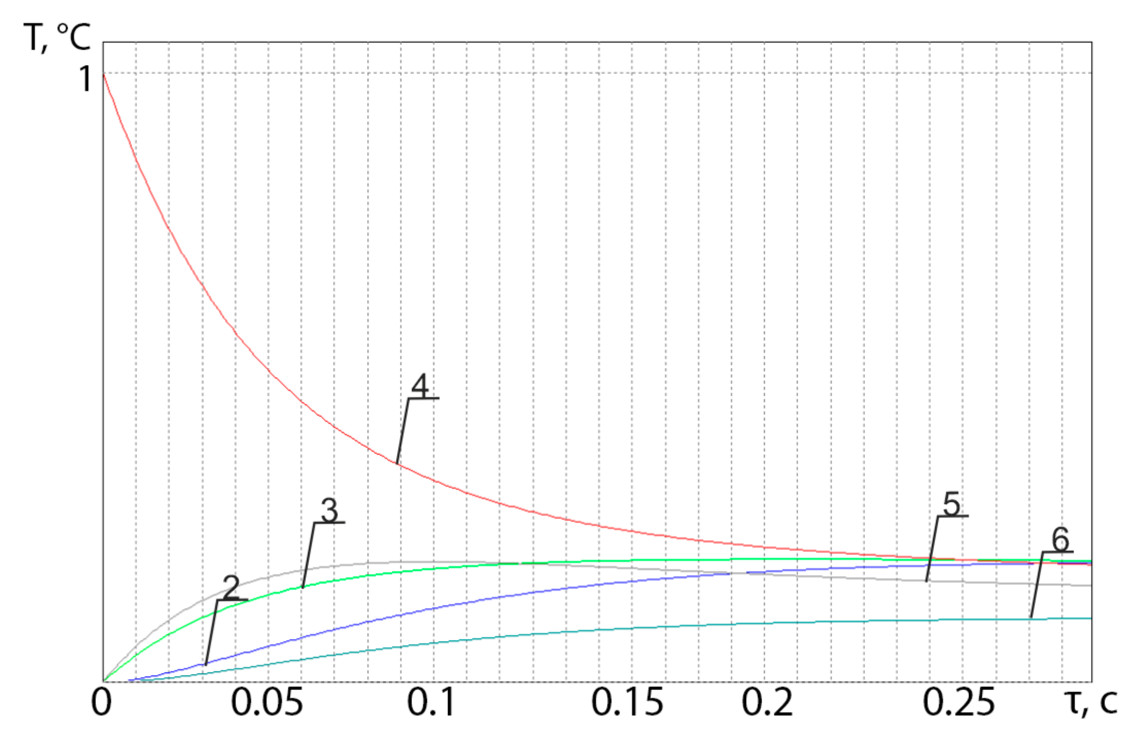


Рисунок 1.7 - Расчетная температура блоков 2, 3, 4, 5 и 6 при заданной температуре (1°C) на четвертом блоке

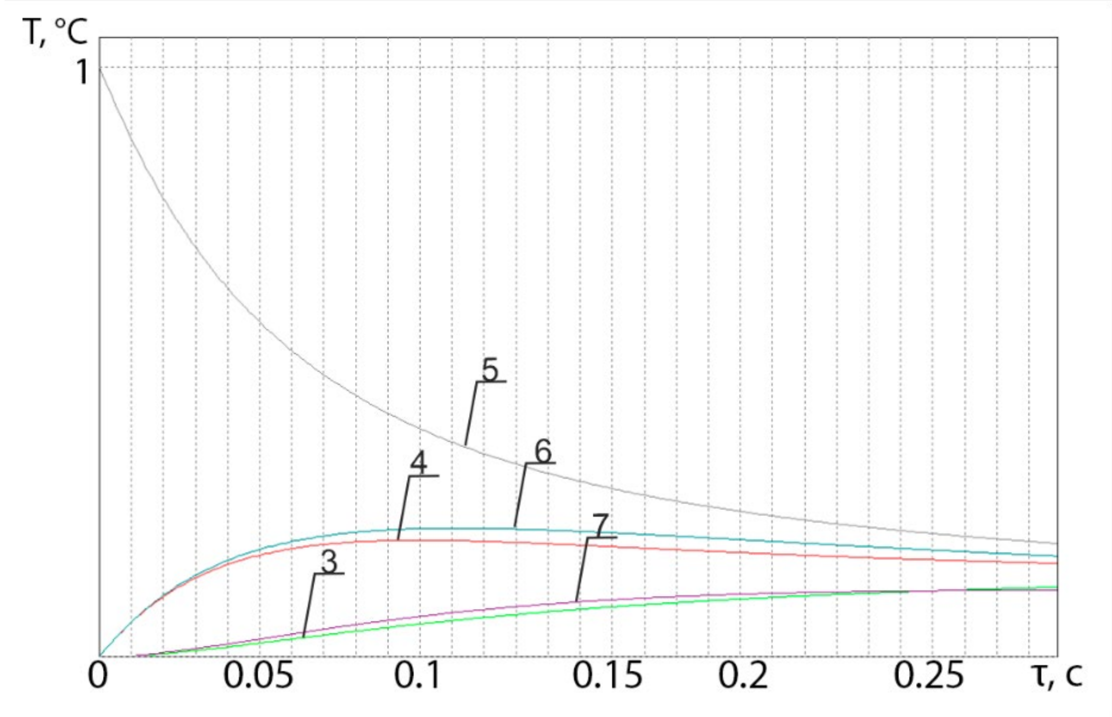


Рисунок 1.8 - Расчетная температура блоков 3, 4, 5, 6 и 7 при заданной температуре (1°С) на пятом блоке

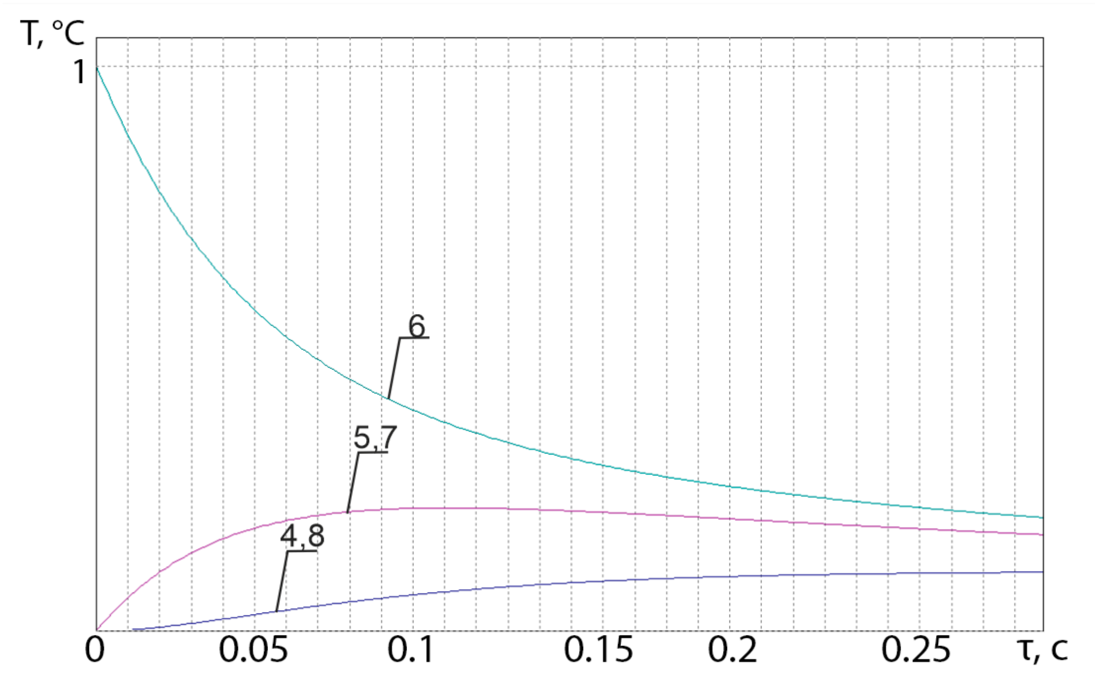


Рисунок 1.9 - Расчетная температура блоков 4, 5, 6, 7 и 8 при заданной температуре (1°С) на шестом блоке

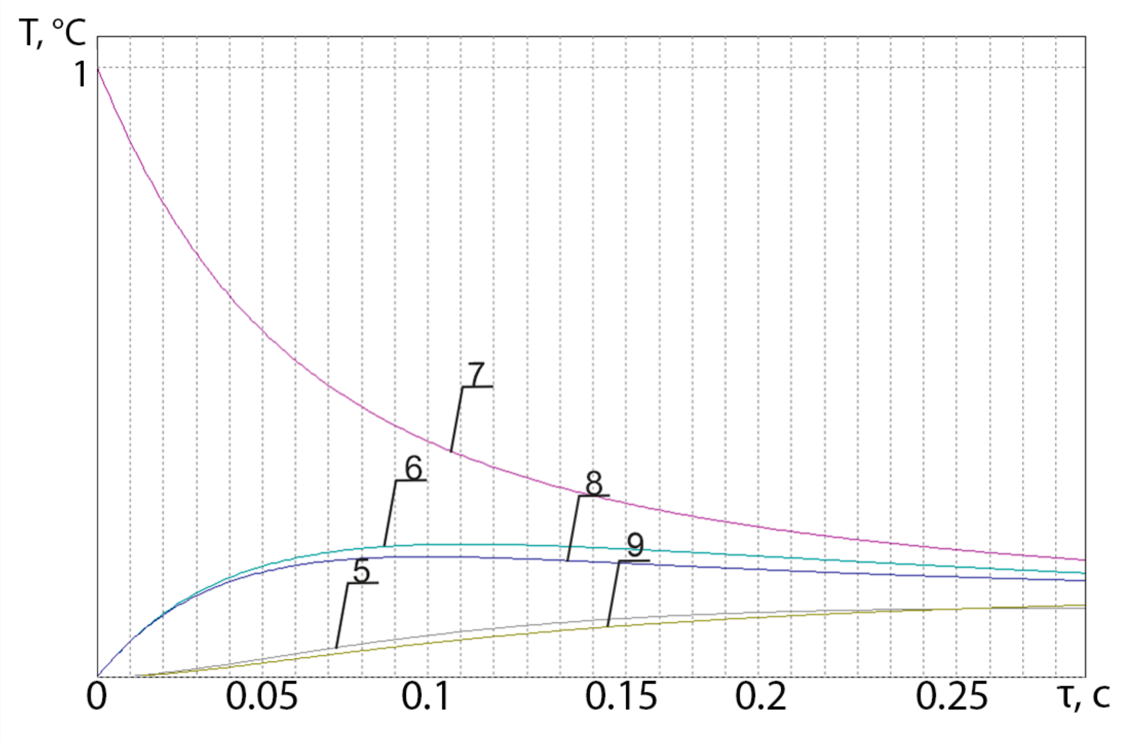


Рисунок 1.10 - Расчетная температура блоков 5, 6, 7, 8 и 9 при заданной температуре (1°С) на седьмом блоке

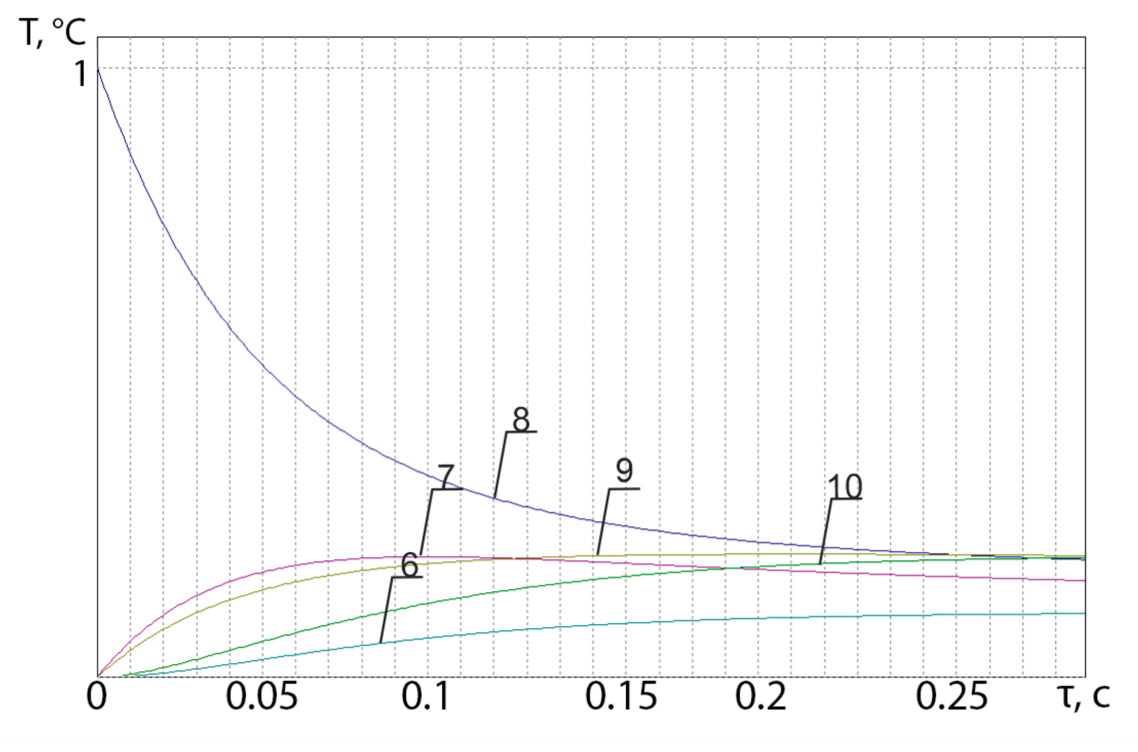


Рисунок 1.11 - Расчетная температура блоков 6, 7, 8, 9 и 10 при заданной температуре (1°С) на восьмом блоке

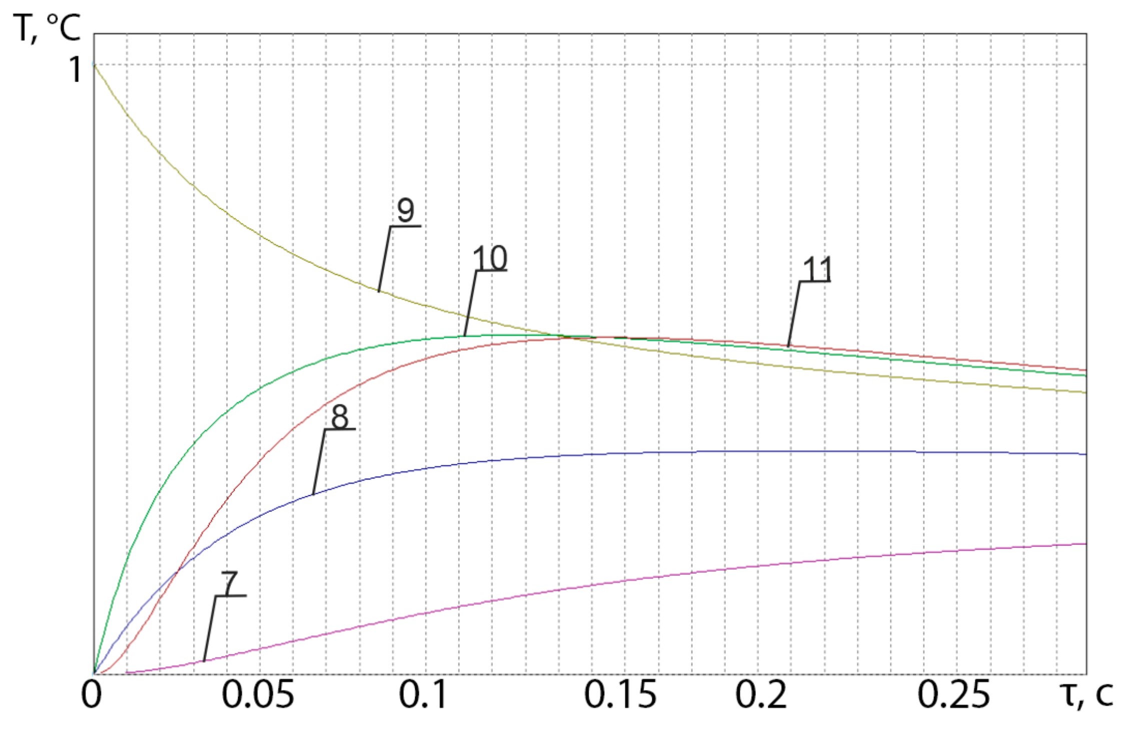


Рисунок 1.12 - Расчетная температура блоков 7, 8, 9, 10 и 11 при заданной температуре (1°С) на девятом блоке

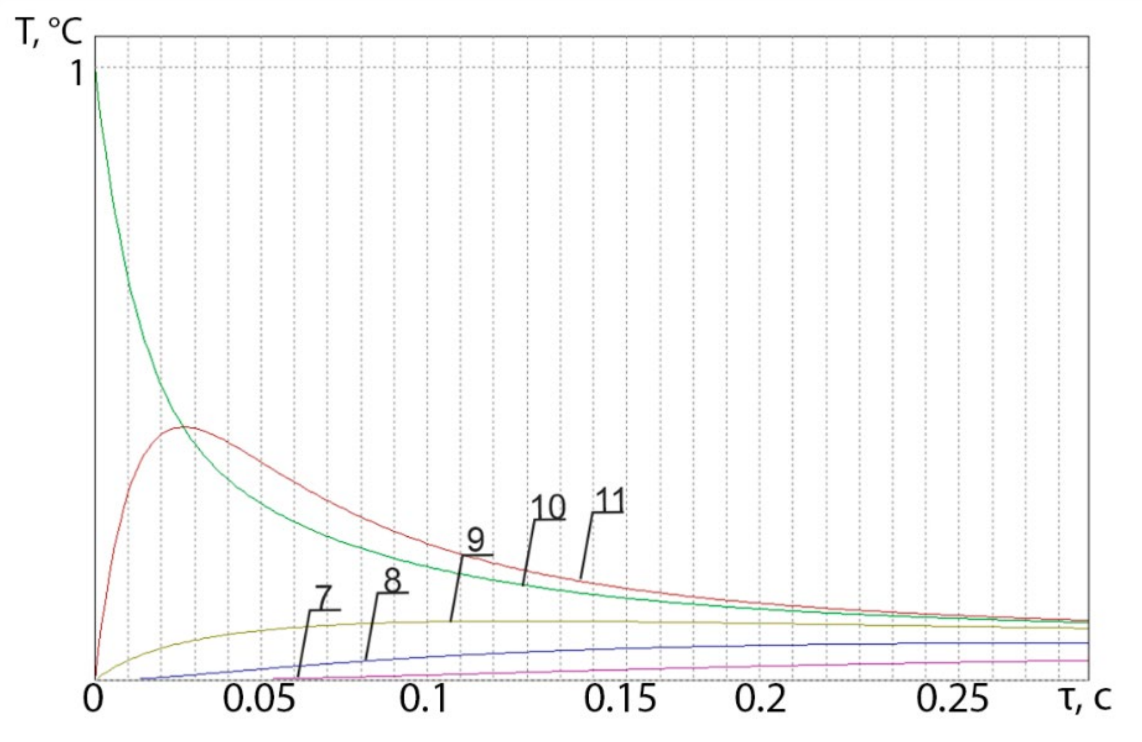


Рисунок 1.13 - Расчетная температура блоков 7, 8, 9, 10 и 11 при заданной температуре (1°С) на десятом блоке

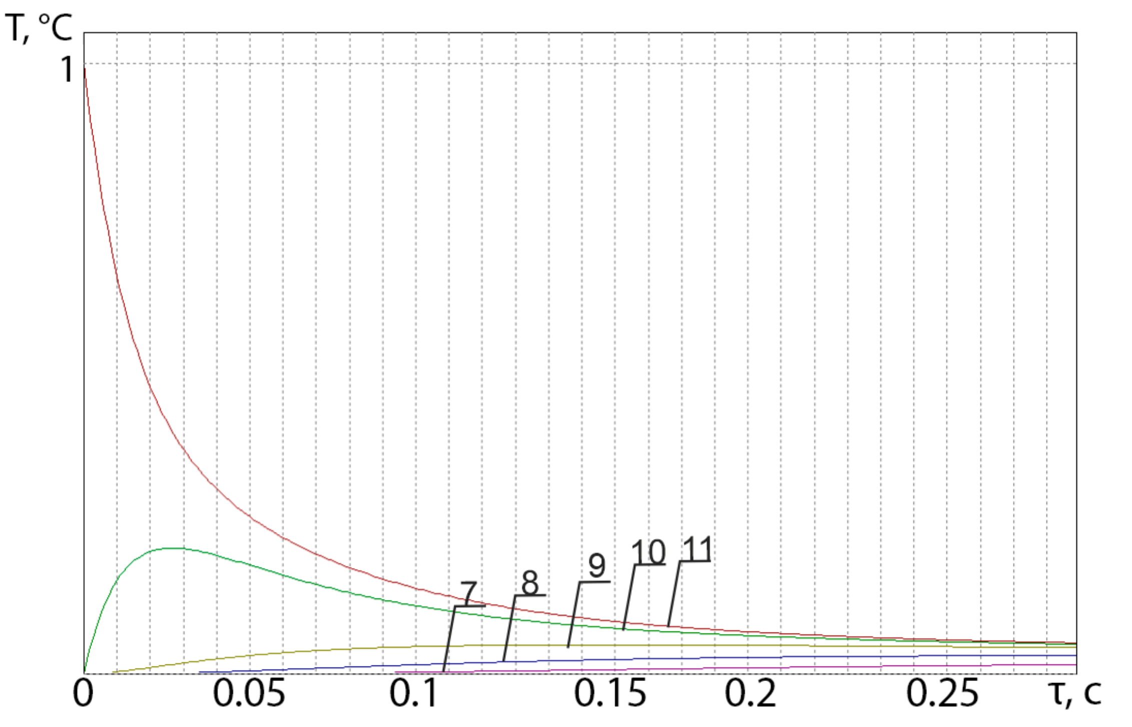


Рисунок 1.14 - Расчетная температура блоков 7, 8, 9, 10 и 11 при заданной температуре (1°С) на одиннадцатом блоке

1.8 РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

В отличие от прямых задач, целью которых является установление причинно-следственных связей, обратные задачи восстанавливают причинные характеристики по известной информации о температурном поле. Можно выделить следующий круг практических задач, в которых решение ОЗТ играет определяющую роль:

1) определение температуры поверхности тела по измеренным температурам внутри тела;

2) измерение поверхностной плотности теплового потока;

3) определение коэффициента теплоотдачи на поверхности исследуемого тела;

4) определение теплофизических характеристик материалов.

Во всех случаях искомые параметры необходимо восстановить по измеренным температурам в одной или нескольких точках исследуемого тела.

В соответствии с указанными практическими задачами можно выделить следующие виды ОЗТ по признаку искомой причинной характеристики [6]:

1) ретроспективные, целью которых является нахождения распределения температуры в предыдущие моменты времени;

2) граничные ОЗТ состоят в определении граничных условий (или их составляющих) – таких как поверхностная плотность теплового потока, коэффициент теплоотдачи, температура среды, температура поверхности исследуемого тела;

3) коэффициентные ОЗТ определяют коэффициенты уравнения теплопроводности, то есть теплофизических характеристик исследуемых объектов – теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности, а также их зависимости от температуры;

4) геометрические ОЗТ устанавливают геометрические характеристики исследуемых объектов;

5) комбинированные ОЗТ, при решении которых совместно определяются разные типы параметров.

Граничные и коэффициентные ОЗТ относятся к некорректно поставленным задачам, что обычно обусловлено нарушением условия устойчивости решения для них (малым изменениям вектора измерений $\vec{y}$ могут соответствовать большие изменения вектора неизвестных $\vec{x}$). Такая неустойчивость вызвана постановкой ОЗТ, в которых по измеренным температурам в нескольких точках на поверхности тела и внутри него определяется поверхностная плотность теплового потока, коэффициент теплоотдачи, теплофизические характеристики исследуемого тела, и связана с демпфированием (когда нестационарное изменение температуры во внутренних точках значительно отличается от изменения температуры на поверхности) и запаздыванием (различием времени отклонения температуры в разных точка тела) [7].

В решении ОЗТ можно выделить два основных метода [8]: функциональной оптимизации и параметрической идентификации. В первом случае метод сводится к минимизации функционала невязки $\Phi[x(\tau)]$ [9]. При параметрической идентификации искомая величина $x(\tau)$ представляется в виде обобщенного полинома, неизвестные коэффициенты которого определяются с помощью математической модели и результатов измерений:

$$x(\tau) = \sum_{j=1}^{r} q_j \varphi_j(\tau), \tag{27}$$

где $\varphi_j(\tau)$ – система базисных функций, q_j – неизвестные коэффициенты, составляющий $(r \times 1)$ вектор искомых параметров

$$\vec{Q} = |x_1 x_2 \cdots x_r|^T. \tag{28}$$

В отличие от функциональной оптимизации параметрическая идентификация дает приближенное решение в виде оптимальных оценок $\hat{\vec{Q}}$ вектора искомых параметров, при этом функция невязки $\Phi(\vec{Q})$ минимизируется по $\vec{Q}$, что дает уменьшение количества искомых величин на 1-2 порядка.

В качестве базисных функций $\varphi_j(\tau)$ могут быть использованы различные аппроксимирующие функции – кусочно-линейные, кусочно-постоянные, ряды Фурье, интерполяционные многочлены Лагранжа, сплайны и другие. Благодаря высокой вычислительной эффективности широкое применение нашли В-сплайны первого порядка [10].

При параметрической идентификации температурное поле исследуемого объекта представляется $(n \times 1)$ вектором состояния $\vec{T}(\tau)$. Измеренные температуры $t_i(\tau)$ образуют $(m \times 1)$ вектор измерений $\vec{Y}(\tau)$, которые в общем случае может также содержать $(m \times 1)$ вектор случайных погрешностей измерений $\vec{\varepsilon}(\tau)$:

$$\vec{Y} = H\vec{T} + \vec{\varepsilon}, \tag{29}$$

где H – $(m \times n)$ матрица измерений.

В случае дискретного времени $\tau_k = k \cdot \Delta\tau, k = 0,1,\dots,N$ уравнение (1.22) примет вид

$$\vec{Y}_k = H\vec{T}_k + \vec{\varepsilon}_k, \tag{30}$$

где $\vec{Y}_k = \vec{Y}_k(\tau_k), \vec{T}_k = \vec{T}_k(\tau_k), \vec{\varepsilon}_k = \vec{\varepsilon}_k(\tau_k), k = 0,1,\dots,N.$

В этом случае параметрическая идентификация заключается в нахождении оптимальных оценок $\hat{\vec{Q}}$ вектора искомых параметров $\vec{Q}$, которые дадут минимум функции невязки $\Phi(\vec{Q})$ между измеренными $\vec{Y}_k$ и рассчитанными по ММТ $\hat{\vec{Y}}_k(\vec{Q})$ [11]. Квадратичная функция невязки обобщенного метода наименьших квадратов имеет следующий вид [12]:

$$\Phi(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^{r} \left[\vec{Y}_k - \hat{\vec{Y}}_k(\vec{Q})\right]^T \cdot R^{-1} \left[\vec{Y}_k - \hat{\vec{Y}}_k(\vec{Q})\right], \tag{31}$$

где R – ковариационная матрица $(m \times m)$ случайных погрешностей $\vec{\varepsilon}_k$.

Перечисленные ранее методы минимизации функции невязки используются как в функциональной оптимизации, так и в параметрической идентификации, но в большинстве своем представляют собой одношаговые итерационные методы, базирующиеся на анализе всего массива данных о процессе, что является достаточно сложным для рассматриваемых нами ниже практических задач. В связи с этим в данной работе для минимизации функции невязки (31) выбран многошаговый рекуррентный алгоритм цифрового фильтра Калмана (ФК).

1.9 МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ПО ИСКОМЫМ ПАРАМЕТРАМ

Изначально данный метод был разработан для определения оптимальных оценок вектора состояния [13]. Алгоритм заключается в последовательном определении оптимальных оценок $\hat{\vec{X}}_{k+1}$ вектора состояния $\vec{X}_{k+1}$ размерности $(n \times 1)$, а также ковариационной $(n \times n)$ матрицы P_{k+1} ошибок оценок вектора состояния по их предыдущим значениям $\hat{\vec{X}}_k$, вектора измерений $\vec{Y}_{k+1}$ и вектора управления $\vec{U}_k$.

В дальнейшем метод параметрической идентификации на основе фильтра Калмана нашел широкое применение для решения граничной ОЗТ. В качестве исходной математической модели использовалась ДРМ, а искомый тепловой поток аппроксимировался B-сплайнами. В качестве примера приведем B-сплайны первого порядка [34,35]:

$$q(\tau) = \sum_{i=1}^{r} q_i Sp_j^1(\tau), \tag{32}$$

где $\xi_i = \tau/\Delta - i + 1; \Delta$ – участок сплайн-аппроксимации $(z = 1,2, \dots, r - 1)$. Коэффициенты q_i составляют вектор искомых параметров $\vec{Q} = |q_1\ q_2 \dots\ q_r|^T$.

В качестве алгоритма минимизации функции невязки (31) используется ФК по искомым параметрам, который выглядит следующим образом [11, 12]:

$$K_{k+1} = P_k H_k^T [H_k P_k H_k^T + R]^{-1}, \tag{33}$$

$$\vec{Q}_{k+1} = \vec{Q}_k + K_{k+1}[\vec{Y}_{k+1} + \vec{Y}_{k+1}(\vec{Q}_k)], \tag{34}$$

$$P_{k+1} = P_k + K_{k+1} H_k P_k, \tag{35}$$

где K_{k+1} – весовая матрица;
P_k и P_{k+1} – ковариационные матрицы ошибок оценок вектора параметров для моментов времени k и $(k+1)$ соответственно;
H_k – матрица чувствительности измеряемой температуры к изменению искомых параметров, рассчитанная с использованием $\hat{\vec{Q}}_k$.

При численном моделировании процесса теплообмена предполагается, что теплопроводность λ, плотность ρ, удельная теплоемкость c материала исследуемого тела, а также коэффициенты теплообмена поверхностей тела с окружающей средой не зависят от температуры, то есть задача является линейной.

Фильтра Калмана (ФК) для каждого измерения выдает не только саму оценку искомого параметра, но и ковариационную матрицу ошибок, характеризующую точность этой оценки.

Матрица чувствительности H_k выглядит следующим образом:

$$H_k = \left.\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{Q}}\right|_{\vec{Q}=\vec{Q}_k} = \begin{vmatrix} U_{11k} & U_{12k} & \cdots & U_{1rk} \\ U_{21k} & U_{22k} & \cdots & U_{2rk} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ U_{m1k} & U_{m2k} & \cdots & U_{mrk} \end{vmatrix}, \tag{36}$$

где U_{ijk} – коэффициенты чувствительности.

В общем случае, в том числе и для нелинейных ОЗТ, значения U_{ijk} могут быть определены путем численного дифференцирования с использованием k-той оценки вектора параметров $\vec{Q}_k$ [7] по формуле

$$U_{ijk} = \frac{y_i(\hat{q}_{1k}, \dots, \hat{q}_{jk} + \Delta\hat{q}_{jk}, \dots, \Delta\hat{q}_{rk}) - y_i(\vec{Q}_k)}{\Delta\hat{q}_{jk}}, \tag{37}$$

Начальные оценки $\vec{Q}_0$ задаются произвольно и, возможно, с существенными неточностями, которые определяют диагональную ковариационную матрицу ошибок начальных оценок P_0. В качестве ее диагональных элементов используются оценки дисперсий, соответствующие априорной информации о начальных оценках $\vec{Q}_0$. В процессе вычислений вектор $\vec{Q}_k$ постепенно уточняется, и, начиная с некоторого момента времени, оценки $\hat{\vec{Q}}_k$ сходятся к истинным значениям искомого вектора параметров $\vec{Q}_k$.

Ковариационная матрица ошибок оценок P является характеристикой точности и имеет следующий вид [7]:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Диагональные элементы P_{ii} матрицы P представляют собой дисперсии оценок параметров, а остальные элементы – соответствующие взаимокорреляции между оценками параметров. Таким образом, элементы P_{ij} определяют точность оценок параметров и зависят от всего комплекса факторов, воздействующих на проведение теплофизического эксперимента – вида теплоизмерительной системы, вида вектора измерений, качества получаемой информации, дисперсии шума σ^2, формы температурного воздействия, участка измерений и их количества.

В случае выбора начальных оценок $\hat{q}_{j0}$ такими, чтобы они входили в интервалы $\pm\Delta q_{j0}$, с доверительной вероятностью 0,95 величины P_{ij} определяются выражением $P_{jj} = \sigma^2_{\hat{q}_{j0}} = \frac{4}{9}\Delta^2 q_{j0}$.

Форма ковариационной матрицы ошибок позволяет отделить влияние характеристик шума в измерениях и числа измерений от влияния структуры самой модели на точность получаемых оценок.

Искомый тепловой поток $q(\tau)$, температура среды $t_c(\tau)$ или коэффициент теплоотдачи на поверхности тела $\alpha(\tau)$ представляется в виде обобщенного полинома, неизвестные коэффициенты которого определяются с помощью математической модели и результатов измерений [11]:

$$q(\tau) = \sum_{j=1}^{r} q_j \varphi_j(\tau), \tag{39}$$

где q_j – неизвестные постоянные параметры, которые должны быть определены в результате решения ОЗТ $(i = 1,2, \dots, r)$;
$\varphi_j(\tau)$ – система базисных функций.

В данном случае в качестве базисных функций используются кусочно-полиномиальные функции, введенные Шенбергом в 1946 г. и названные им в честь Биркгофа В-сплайнами, имеющие следующее известное представление [10]:

$$Sp_k^e(\tau) = (k+1)\sum_{s=e}^{e+k+1} \frac{(e-\tau)^k}{(e-x_e)(e-x_{e+1})\cdot \dots \cdot (e-x_{s+k+1})}, \qquad (40)$$

где e – порядок В-сплайна.

В работе [10] предложена более удобная для вычислений на ЭВМ форма представления В-сплайна:

$$Sp_j^1(\tau) = \begin{cases} 1 - |\xi_i| \text{ при } |\xi_i| \le 1 \\ 0 \text{ при } |\xi_i| > 1 \end{cases}, \qquad (41)$$

где $\xi_i = \tau/\Delta - i + 1$ – безразмерный аргумент базовой сплайн-функции 1-го порядка;
Δ – участок сплайн-аппроксимации.

Формула (41) не позволяет дать единую форму записи для В-сплайна любого порядка, но ее применение позволяет не вычислять значение В-сплайна за пределами участка аппроксимации, а сразу присваивать ему значение нуля, что значительно сокращает машинное время, необходимое для вычислений.

Вектор искомых параметров для участка Δ_z сплайн-аппроксимации в таком случае будет иметь вид

$$\vec{Q} = |q_{az}\ q_{bz}|. \qquad (42)$$

При параметрической идентификации модели исследуемого тела мы получаем оптимальные оценки $\hat{\vec{Q}}$ вектора искомых параметров $\vec{Q}$, а также ковариационную матрицу ошибок P оценок на каждом участке Δ_z сплайн-аппроксимации последовательно от момента времени $(k = 1,2, \dots, l)$ до $k + 1$. Исходными данными являются:

1) известные оценки $\hat{\vec{Q}}_k$ и ковариационная матрица P_k ошибок оценок для момента времени k;

2) ДРМ исследуемого тела для расчета модельного вектора

измерений $\hat{\vec{Q}}_{k+1}(\vec{Q}_k)$ по заданным оценкам $\hat{\vec{Q}}$;

3) значения вектора измерений $\vec{Y}_{k+1}$.

На основании полученных оценок $\hat{\vec{Q}}_{k+1}$, ковариационной матрицы P_{k+1}, значений вектора $\vec{Y}_{k+2}$ определяются $\hat{\vec{Q}}_{k+2}$, P_{k+2} на следующем участке Δ_{z+1}.

В представленном в формулах (1.27)-(1.29) алгоритме матрица H_k определяется выражением

$$H_k = \left.\frac{\partial \vec{Y}_{k+1}}{\partial \vec{Q}_z}\right|_{\vec{Q}_z=\vec{Q}_{z,k}} = \left.\begin{vmatrix} U_{1q_a,k+1} & U_{1q_b,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ U_{mq_a,k+1} & U_{mq_b,k+1} \end{vmatrix}\right|_{\vec{Q}_z=\vec{Q}_{z,k}}, \tag{43}$$

где $U_{jq_i,k+1}$ – значения функций чувствительности i-го измерения $y_i(\vec{Q}_z)$ к искомым параметрам q_a, q_b в момент $k+1$, которые равны:

$$U_{1q_a(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\vec{Q})}{\partial q_a}\right|_{\vec{Q}_z=\vec{Q}_k}, U_{1q_b(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\vec{Q})}{\partial q_b}\right|_{\vec{Q}_z=\vec{Q}_k} \tag{44}$$

и рассчитываются по i-той оценке $\hat{\vec{Q}}_k$ на основе решения уравнения теплопереноса (1.9). Функции чувствительности могут быть вычислены по формулам

$$U_{1q_a(k+1)} = \frac{y_i(\hat{q}_{a_k} \pm \Delta\hat{q}_{a_k}, \Delta\hat{q}_{b_k}) - y_{i(k+1)}(\hat{q}_{a_k}, \hat{q}_{b_k})}{\Delta\hat{q}_a},$$

$$\tag{45}$$

$$U_{1q_b(k+1)} = \frac{y_i(\hat{q}_{a_k}, \Delta\hat{q}_{b_k} \pm \Delta\hat{q}_{b_k}) - y_{i(k+1)}(\hat{q}_{a_k}, \hat{q}_{b_k})}{\Delta\hat{q}_b}.$$

Перейдем к алгоритму решения ОЗТ с использованием фильтра Калмана.

1.10 АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОЗТ

Для решения задачи с помощью фильтра Калмана (1.27)-(1.29) необходимы следующие вводные данные:

1) теплофизические и геометрические характеристики исследуемого тела, входящие в его ДРМ;

2) интервал дискретизации времени $\Delta\tau$;

3) начальные условия $\vec{T}_0 = \vec{T}(k = 0)$;

4) начальные оценки $\hat{\vec{Q}}_0$;

5) ковариационная матрица P_0;

Схема алгоритма решения задачи представлена на рисунке 1.15.

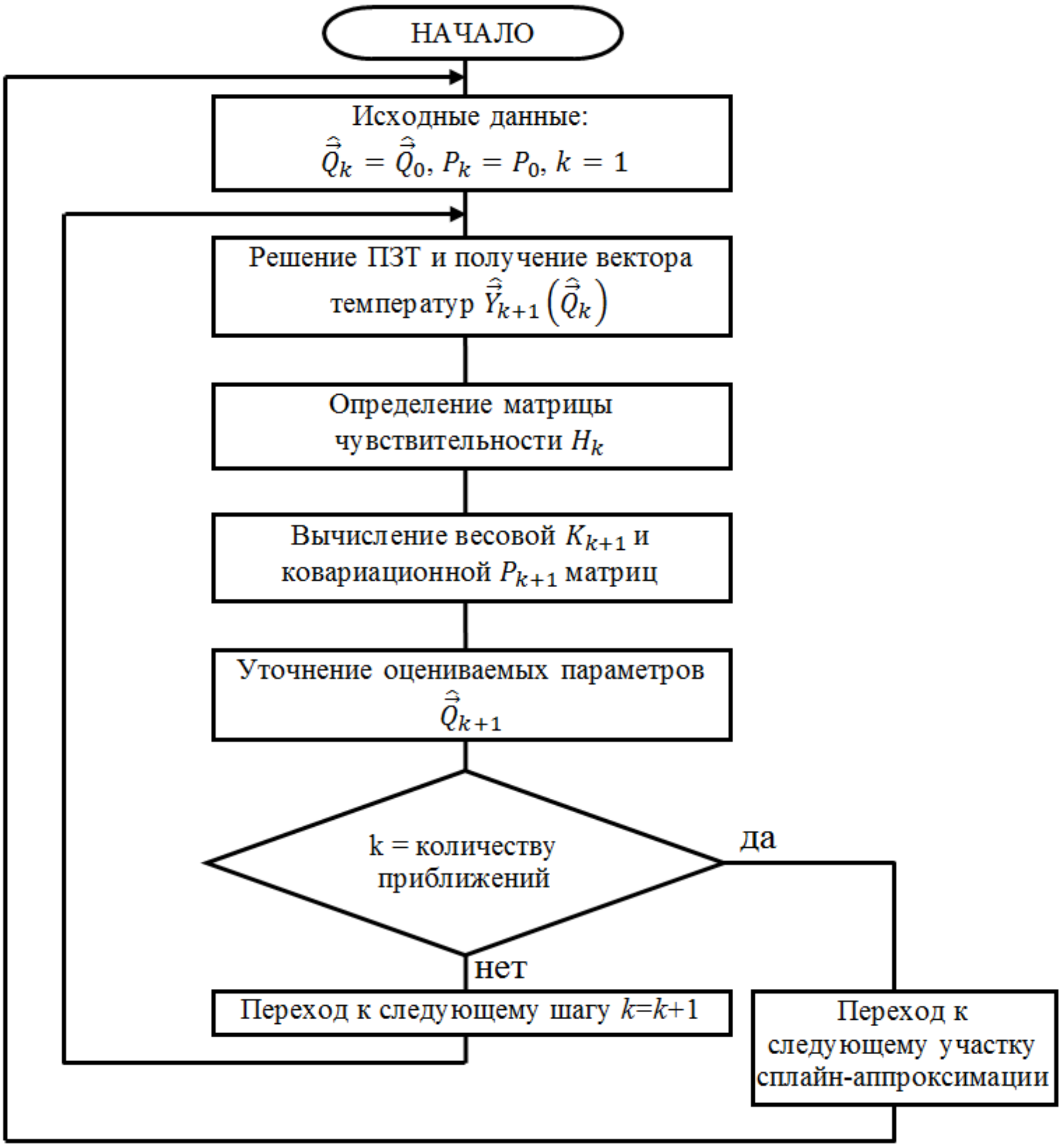


Рисунок 1.15 – Алгоритм решения обратных задач теплопроводности.

Как указывалось ранее, ОЗТ является некорректно поставленной задачей теплофизики и связана с неопределенностью полученных решений. Представляет интерес оценить значение совместных доверительных областей и совместных доверительных интервалов восстанавливаемых параметров, в частности, нестационарного теплового потока.

1.11 КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА ОШИБОК ОЦЕНОК ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСКОМЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Необходимо установить доверительную область восстановленного теплового потока $q(\tau)$.

В [11] были предложены и исследованы общие для различных ПТП метод и стратегия восстановления $q(\tau)$ путем параметрической идентификации ДРМ ПТП. Параметризация выполняется путем кусочно-линейной В-сплайн-аппроксимации q(τ), а в качестве стратегии идентификации выбрано последовательное оценивание (2×1) -вектора искомых параметров по значениям (m×1) – вектора измерений.

$$Q_z = \left| q_{a,z} \; q_{b,z} \right|^T. \tag{46}$$

Для случая, когда количество искомых параметров $r = 2$, справедливы следующие зависимости для оптимальных оценок $\hat{Q}_l$ и ковариационной матрицы ее ошибок $P(\hat{Q}_l)$ (2× 2) [14]:

$$\hat{Q}_l = P(\hat{Q}_l) \cdot \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial Q} \right)_{\hat{Q}_l}^T \cdot Y_k = P(\hat{Q}_l) \cdot \sum_{k=1}^{l} H_k^T \cdot Y, \tag{47}$$

$$P(\hat{Q}_l) = \left(\sum_{k=1}^{l} H_k^T R^{-1} H_k \right)^{-1} \tag{48}$$

.

Ковариационная матрица $P(\hat{Q}_l)$ (38) является характеристикой точности оценок $\hat{Q}_l$. В рассматриваемом случае, когда $r = 2$, она имеет вид

$$P(\hat{Q}_l) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

При выполнении изложенных в [15] и [16] допущений в части характеристик случайных погрешностей измерений температур [7, 14] в ПТП их ковариационная матрица R имеет вид

$$R = E[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_k^T] = \sigma^2 \cdot I, \quad (50)$$

где I(m×m) – единичная матрица.

Тогда формула (47) в соответствии с выражением (48) для матрицы H_k функции чувствительности в рассматриваемом случае преобразуется к виду

$$P(\hat{Q}_l) = \sigma^2 \cdot A_l, \quad (51)$$

где A_l – матрица Грама функции чувствительности ПТП.

$$A_l = \sum_{k=1}^{l} H_k^T H_k = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} U_{m1k}^2 & \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} U_{m1k} \cdot U_{m2k} \\ \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} U_{m2k} \cdot U_{m1k} & \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} U_{m2k}^2 \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Введем понятие характеристической ковариационной матрицы $\overline{P_l}$ [11], которая является обращенной матрицей Грама и имеет вид

$$\overline{P_l} = A_l^{-1} = \begin{vmatrix} \overline{p}_{11} & \overline{p}_{12} \\ \overline{p}_{21} & \overline{p}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix}. \quad (53)$$

Тогда выражение (51) для $P(\hat{Q}_l)$ примет вид

$$P(\hat{Q}_l) = \sigma^2 \cdot A_l^{-1} = \sigma^2 \cdot \overline{P_l}. \quad (54)$$

Из (52) и (54) следует соотношение

$$P(\hat{Q}_l)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\overline{P_l}^{-1} = \frac{A_j}{\sigma^2}, \quad (55)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Для представления формы совместной доверительной области проведем математический анализ взаимосвязи совместных доверительных интервалов нескольких измерений.

1.12 ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОВМЕСТНОЙ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПТП

В пространстве параметров q_j СДО имеет вид гиперэллипсоида рассеивания [16, 17, 18]. Пусть определены оценки $\hat{Q}_l$ вектора искомых параметров Q и на их основании по формуле (52) рассчитана матрица Грама A_l, которая имеет вид

$$A_l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{56}$$

Распределение двух несвязанных величин принято считать распределением Пирсона (распределение хи-квадрат) [19]:

$$\begin{matrix} B = \chi^2_{1-\alpha} \\ \alpha = 0.95 \end{matrix} \Rightarrow B = 5.911, \tag{57}$$

где χ - квантиль распределения при доверительной вероятности α.

Доверительные интервалы определяются по следующим формулам [11]:

$$\Delta q_a = \pm\sigma\cdot\sqrt{\frac{a_{22}\cdot B}{|A|}}; \Delta q_b = \pm\sigma\cdot\sqrt{\frac{a_{11}\cdot B}{|A|}}. \tag{58}$$

Таким образом, получим следующее уравнение кривой второго порядка (эллипса) в координатах $\Delta q_a = q_a - \hat{q}_{a,l}$ и $\Delta q_b = q_b - \hat{q}_{b,l}$ [11]:

$$a_{11}\cdot(\Delta q_a)^2 + 2a_{12}(\Delta q_a)\cdot(\Delta q_b) + a_{22}\cdot(\Delta q_b)^2 = B. \tag{59}$$

Далее необходимо преобразовать уравнение из неявного вида в явный. Выразим из (1.55) Δq_b:

$$\Delta q_b = \frac{-a_{12}\Delta q_a \pm \sqrt{a_{12}^2\Delta q_a^2 - a_{22}(a_{11}\Delta q_a^2 - B)}}{a_{22}}. \tag{60}$$

Для иллюстрации физического смысла ширины доверительного интервала изобразим доверительный коридор восстановления нестационарного теплового потока. На рисунке 1.16 показан характер изменения в ходе эксперимента температуры $t(\tau)$ и теплового потока $q(\tau)$, восстановленного по разработанной авторами программе «Heat Identification» [20] с использованием ФК, а также отмечены доверительные интервалы значения нестационарного восстановленного теплового потока Δq_i, где i – номер измерения. Таким образом, ширина доверительного интервала – это длина математического интервала, в который с заданной вероятностью попадет оценка нестационарного восстановленного теплового потока.

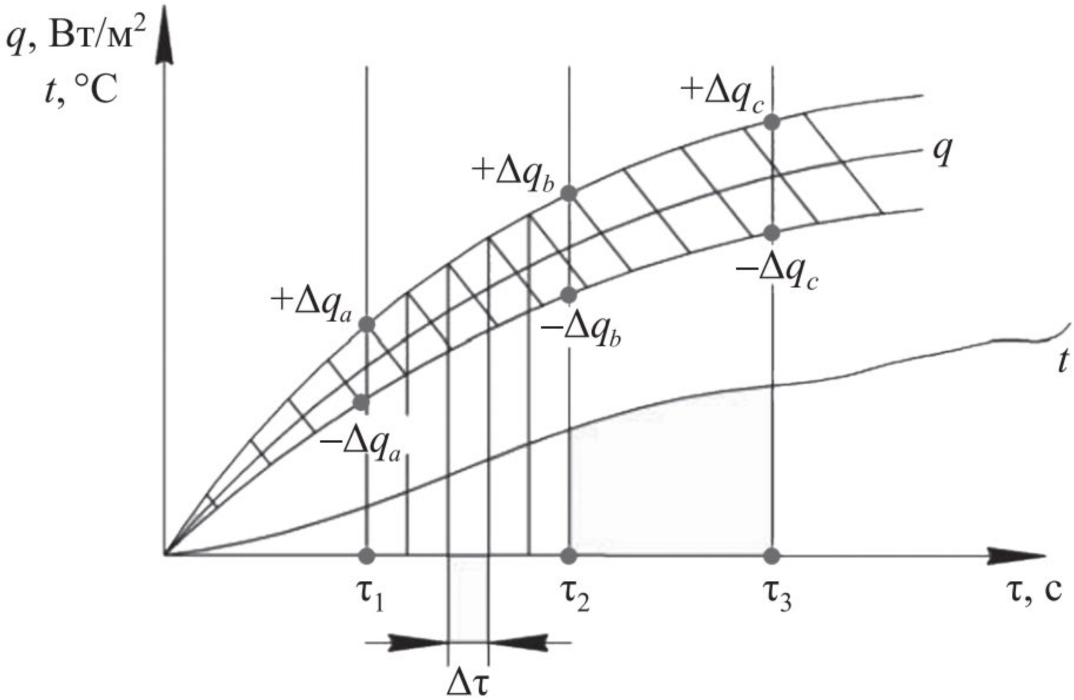


Рисунок 1.16 – Доверительный коридор восстановленного нестационарного теплового потока

В дальнейшем воспользуемся программным пакетом MatLab для построения графика. Ниже представлен код вычисления значений доверительных интервалов при восстановлении теплового потока.

```
clc
close all
clear all
% Освобождение памяти от переменных, очистка командной строки
a1=1.27267E-06;
a12=7.83343E-07;
a2=6.07446E-07;
% Члены матрицы Грама
B=5.699;
% Значение распределения Пирсона
x1=5000;
% Границы отрисовки графика
x=-x1:x1/500:x1;
y=(-a12*x+(a12.^2*x.^2-a2*(a1*x.^2-B)).^0.5)/a2;
y1=(-a12*x-(a12.^2*x.^2-a2*(a1*x.^2-B)).^0.5)/a2;
```

```
createfigure(x, y, y1)

function createfigure(x1, y, y1)
figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
axes1 = axes('Parent',figure1);
hold(axes1,'on');
plot(x1,y,'DisplayName','x','Color',[0 0 0]);
plot(x1,y1,'DisplayName','x','Color',[0 0 0]);
ylabel({'dqb, Вт/м2'});
xlabel({'dqa, Вт/м2'});
title({'dqb=f(?qa)'});
box(axes1,'on');
grid(axes1,'on');
annotation(figure1,'line',[0.517708333333333 0.518229166666667],...
    [0.918260869565217 0.100869565217391],'LineWidth',1);
annotation(figure1,'line',[0.130729166666667 0.904166666666667],...
    [0.516521739130435 0.516521739130435],'LineWidth',1);
end
```

Отметим, что пользователю необходимо лишь менять строки 5-7, 9 и 11.

Получаемый в итоге график представлен на рисунке 1.17.

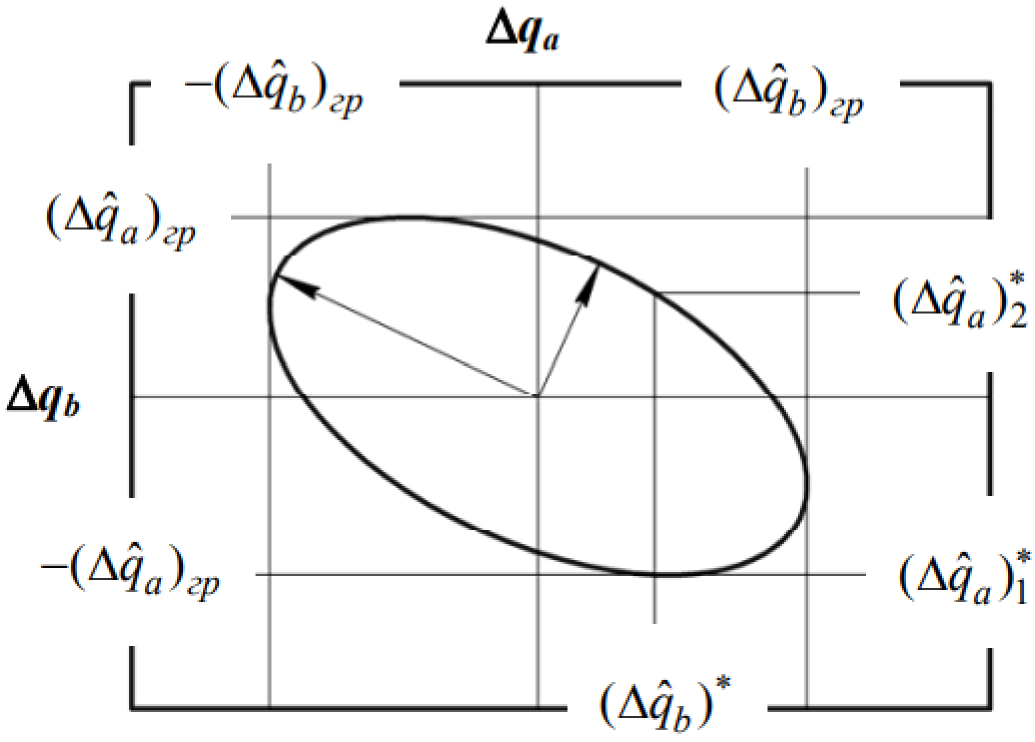


Рисунок 1.17 – Совместная доверительная область в осях Δq_a и Δq_b

Контрольные вопросы к разделу 1.

1. Дайте определение прямой и обратной задачи теплопроводности.
2. Что значит некорректно поставленная задача математической физики?
3. В чем отличие алгоритмов решения обратных модельных и натурных задач теплопроводности?
4. Что понимают под дифференциально-разностной моделью процесса теплопереноса?
5. Какой физический смысл имеют составляющие уравнения дифференциально-разностной модели?
6. В чем заключается задача оценивания восстановления теплового потока?
7. Что понимают под параметризацией обратной задачи теплопроводности?
8. Что значит параметрическая идентификация ОЗТ?
9. Какую роль играет фильтр Калмана при решении ОЗТ?
10. Что характеризует переходная матрица Ф при решении прямых задач теплопроводности?
11. Перечислите виды ОЗТ по признаку искомой величины.
12. Что характеризует вектор состояния при решении ОЗТ?
13. Дайте характеристику функции чувствительности при решении ОЗТ и методику её определения.
14. Что характеризует ковариационная матрица при решении ОЗТ?

2 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА

В первом разделе рассмотрены теоретические основы восстановления граничных условий теплообмена тел путем решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Показано, что для решения задачи используется перспективный метод параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей (ДРМ) теплопереноса в однородных телах. Для практической реализации метода используются различного типа преобразователи теплового потока. Результаты исследований, опубликованные в высокорейтинговых изданиях, показывают, что независимо от типа, вида преобразователя используется общий подход при решении задачи параметрической идентификации ДРМ теплопереноса в системе одномерных тел. При этом тела могут иметь различные теплофизические характеристики, условия теплового контакта, внутри них могут быть источники внутренних тепловыделений и другие условия проведения исследований. В разделе приведены алгоритмы программ с использованием пакетов MATLAB, VISSUM, SIMULINK и др.

В данном разделе рассмотрены практические особенности реализации метода параметрической идентификации ДРМ теплопереноса для восстановления граничных условий систем тел с применением преобразователя в виде пластины, расположенной на поверхности полуограниченного тела. Выбор именно такой модели обоснован тем, что большая часть задач связана с восстановлением нестационарных тепловых потоков при различных энергетических воздействиях окружающей среды. В качестве примера можно рассмотреть наши работы по восстановлению тепловых потоков на поверхности объектов в аэродинамических ударных трубах, граничные условия лопаток турбин летательных аппаратов, теплообмен в высокотемпературных дисперсных системах и др.

Ниже рассмотрен пример выполнения индивидуального задания магистрантами второго года обучения по курсу «Специальные разделы теории теплообмена».

Отметим, что индивидуальность задачи заключается не в изменении варианта, а тем, что постановка задачи, условия теплообмена и практическая значимость существенно отличают задания друг от друга. Единым остается метод реализации, а именно, параметрическая идентификация индивидуальной дифференциально-разностной модели теплообмена.

2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Техническое задание:

- разработать дифференциально-разностную модель теплопереноса в системе тел, а именно - преобразователя нестационарного теплового потока, расположенного на полупространстве;
- определить величину совместного доверительного интервала и построить совместную доверительную область восстанавливаемого теплового потока для случаев монтажа чувствительного элемента на различной глубине исследуемого тела;
- установить вид динамических характеристик и передаточной функции;
- установить влияние среднеквадратичной погрешности на неопределенность восстановления нестационарного теплового потока;
- построить доверительный коридор восстановленного нестационарного теплового потока, плотность которого меняется по гармоническому закону;
- выполнить индивидуальное задание.

Исходные данные

Таблица 1 – Теплофизические характеристики исследуемых тел

Теплофизические свойства		Параметры потока:	Параметры доверительного интервала:	Геометрические параметры ИПТ:
ИПТ	Сталь			
λ_1 = 0,35 Вт/м·К c_1 = 1400 Дж/кг·К ρ_1 = 1900 кг/м^3	λ_2 = 40 Вт/м·К c_2 = 500 Дж/кг·К ρ_2 = 7800 кг/м^3	q_a=1·10^4 Вт/м^2 q_b=2·10^4 Вт/м^2 τ=5 с	B=5.911 σ=1°C $\Delta\tau$ = 1 с	b = 0,5·10^{-3} м b_1 = 2,5·10^{-5} м

2.2 РАЗРАБОТКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Решение проводится с помощью программы «Heat Identification», разработанной на кафедре. Её внешний вид изображен на рисунке 2.1.

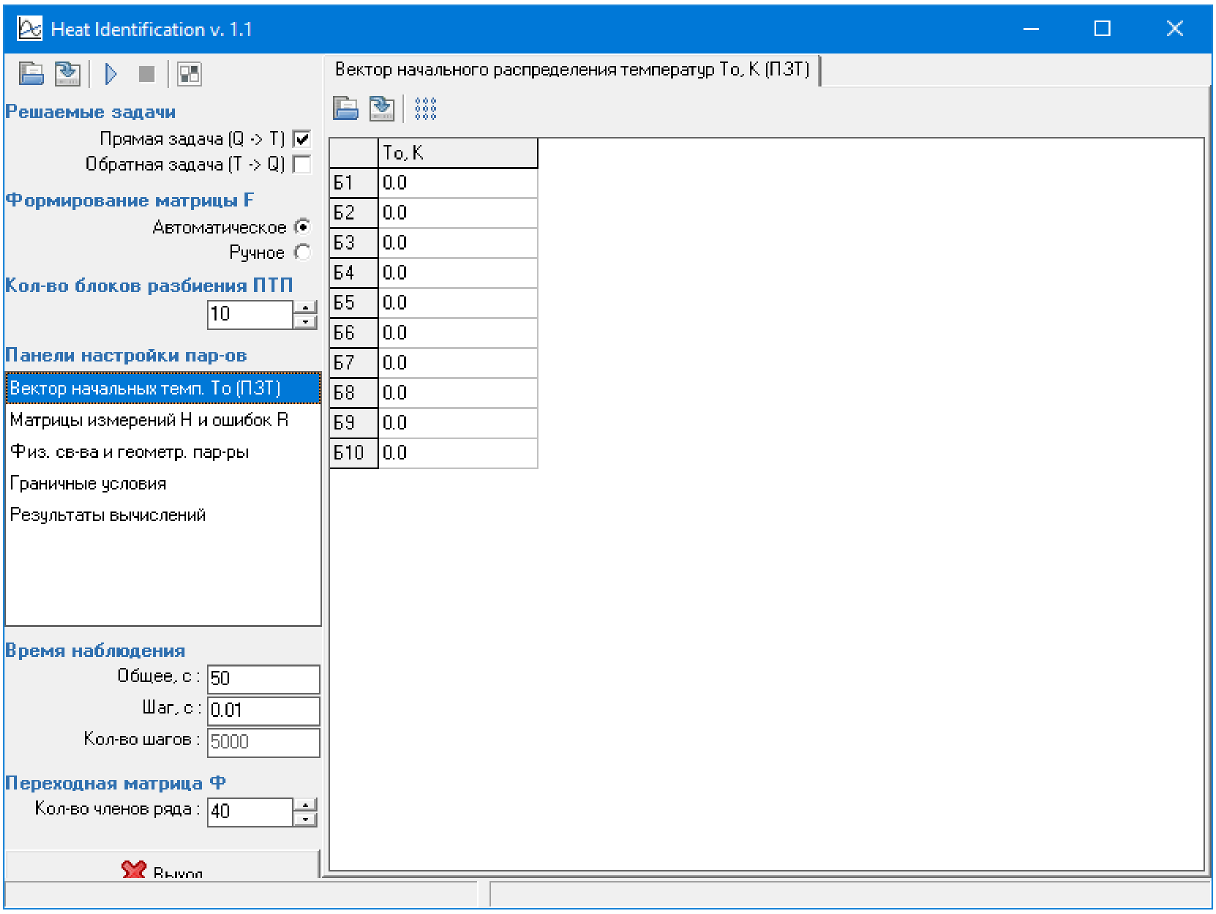


Рисунок 2.1 – Начальное окно программы

Перед работой необходимо настроить программу. Следует включить оба типа решаемой задачи, ручное формирование матрицы F, установить необходимое количество блоков (в рассматриваемом случае 33), а общее время решения 5 секунд. Остальные настройки оставить по умолчанию.

В разделе 1 показан путь получения ДРМ и приведен аналитический вид её составляющих (16). Для рассматриваемого случая численные значения параметров $\vec{T}(\tau)$ и G будут иметь вид

$$\underset{(33\times1)}{\vec{T}(\tau)} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underset{(33\times2)}{G} = \begin{vmatrix} 0.015038 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0.015038 \end{vmatrix}$$

Матрица обратных связей составляется из системы уравнений теплового баланса, аналогичной той, которая была представлена в п.1.6. Каждое уравнение такой системы имеет вид

$$\frac{dt_i}{d\tau} = a_i t_{i-1} + b_i t_i + c_i t_{i+1}$$

где a_i, b_i, c_i – коэффициенты, описывающие теплофизические свойства предыдущего, текущего и следующего блока соответственно, i – номер текущего блока. Коэффициент b_i всегда отрицательный.

Таким образом, задача пользователя состоит в составлении матрицы F. На главной диагонали расположены коэффициенты b, ниже a и выше c:

$$\underset{(i\times i)}{F} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_i & b_i \end{vmatrix}$$

Количество строчек и столбцов матрицы обратных связей равен количеству блоков системы, и в нашем случае их 33. В связи с этим матрица F для предложенного ПТП представлена ниже частями:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-105	105	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	52,6	-105	52,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,0	52,6	-105	52,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	0,0	0,0	52,6	-105	52,6	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,0	52,6	-105	52,6	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	0,0	52,6	-105	52,6	0,0	0,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	52,6	-105	52,6	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	52,6	-105	52,6
9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	52,6	-105
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	52,6

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	52,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	-105	52,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
11	15,3	-453	438	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
12	0,0	256	-495	238	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
13	0,0	0,0	207	-388	180	0,0	0,0	0,0	0,0
14	0,0	0,0	0,0	157	-294	137	0,0	0,0	0,0
15	0,0	0,0	0,0	0,0	119	-223	103	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	90,4	-169	78,7	0,0
17	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	68,5	-128	59,7
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	51,9	-97,2
19	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	39,4

	19	20	21	22	23	24	25	26	27
18	45,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
19	-73,6	34,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
20	29,8	-55,8	26,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
21	0,0	22,6	-42,3	19,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
22	0,0	0,0	17,1	-32,1	14,9	0,0	0,0	0,0	0,0
23	0,0	0,0	0,0	13,0	-24,3	11,3	0,0	0,0	0,0
24	0,0	0,0	0,0	0,0	9,8	-18,4	8,6	0,0	0,0
25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,5	-14,0	6,5	0,0
26	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5,7	-10,6	4,9
27	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4,3	-8,0
28	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,2

	28	29	30	31	32	33
27	3,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
28	-6,1	2,8	0,0	0,0	0,0	0,0
29	2,5	-4,6	2,1	0,0	0,0	0,0
30	0,0	1,9	-3,5	1,6	0,0	0,0
31	0,0	0,0	1,4	-2,6	1,2	0,0
32	0,0	0,0	0,0	1,1	-2,0	0,9
33	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8	-0,8

Полученные матрицы переносится в программу в разделы «Вектор начальных темп. То(ПЗТ)» для $\vec{T}(\tau)$ и «Матрица обратных связей F» для F и G.

Вектор управления $\vec{U}(\tau)$ задается путем установки граничных условий в интерфейсе программы, который изображен на рисунке 2.2. Для этого следует перейти в раздел «Граничные условия», нажать на клавишу редактирования потока на верхнем блоке, выбрать B-сплайны 1-го порядка и заполнить таблицу, определив форму поступающего потока.

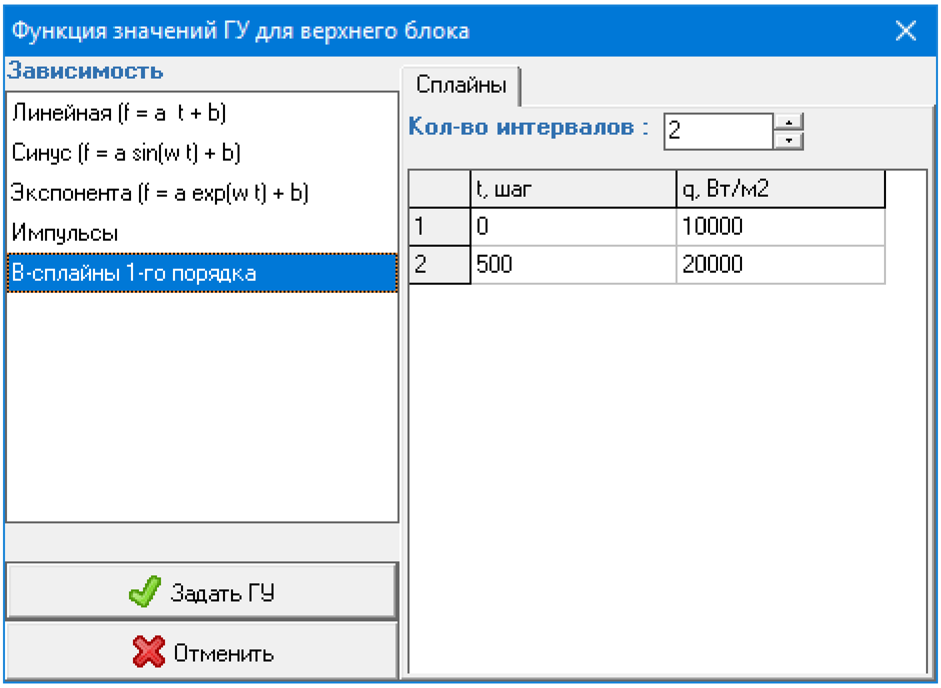


Рисунок 2.2 – Настройка граничных условий

Настройка Heat Identification на этом завершена, дальнейшие изменения будут зависеть от типа решаемой задачи её условий.

2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВМЕСТНОГО ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА И СОВМЕСТНОЙ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Согласно заданию, необходимо определить величину совместного доверительного интервала и график совместной доверительной области. Для этого воспользуемся методом, изложенным в п.1.12.

В разделе «Матрица измерений H и ошибок R» заполним обе матрицы. Измерение температуры происходит на первом блоке. Тогда матрица измерений H будет равна

$$\underset{(1\times 33)}{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

На рисунке 2.3 приведен вид программы в режиме ввода матрицы измерений для первой задачи.

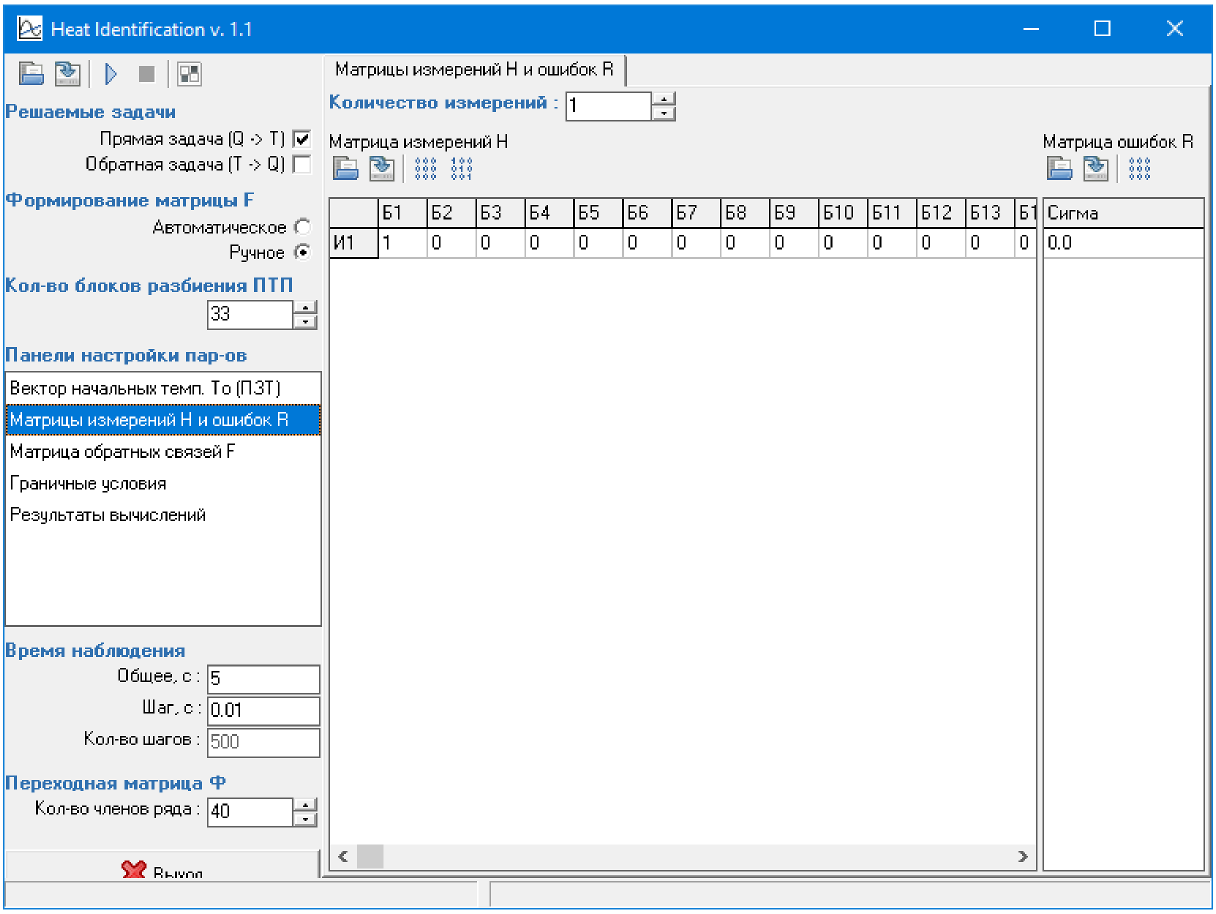


Рисунок 2.3 – Ввод матрицы измерений.

Отметим, что для решения не требуется решать ОЗТ, поэтому эту настройку можно отключить в настройках программы. Кроме того, вычисление матрицы Грама функции чувствительности по формуле (56) требует высокой точности, поэтому перед началом необходимо увеличить точность вывода результата, в частности, температуры. Для этого необходимо нажать на кнопку «Настройки программы» сверху и увеличить количество разрядов для температуры. Пример изображен на рисунке 2.4.

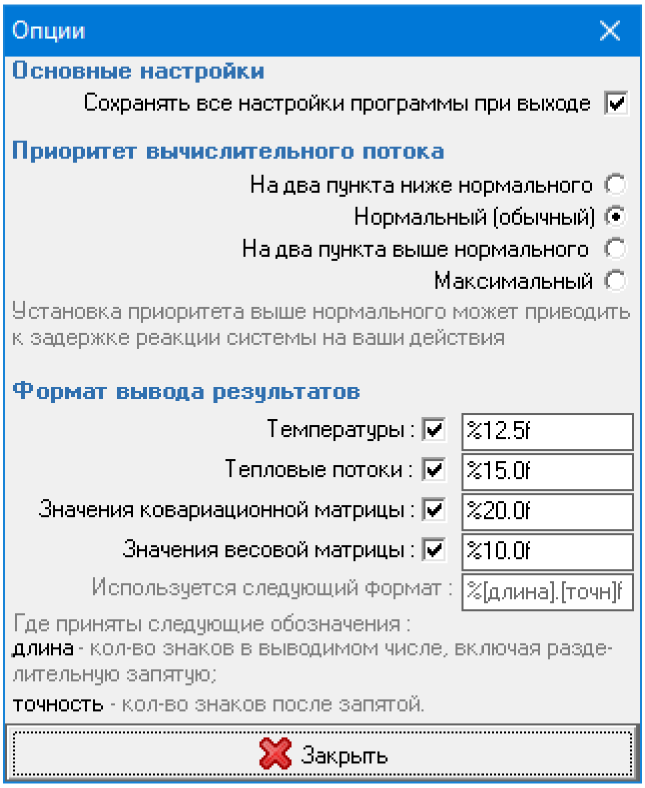


Рисунок 2.4 – Увеличение точности представления решения

Запустим решение и дождемся выполнения задачи. В окне результатов на рисунке 2.5 получаем следующий график:

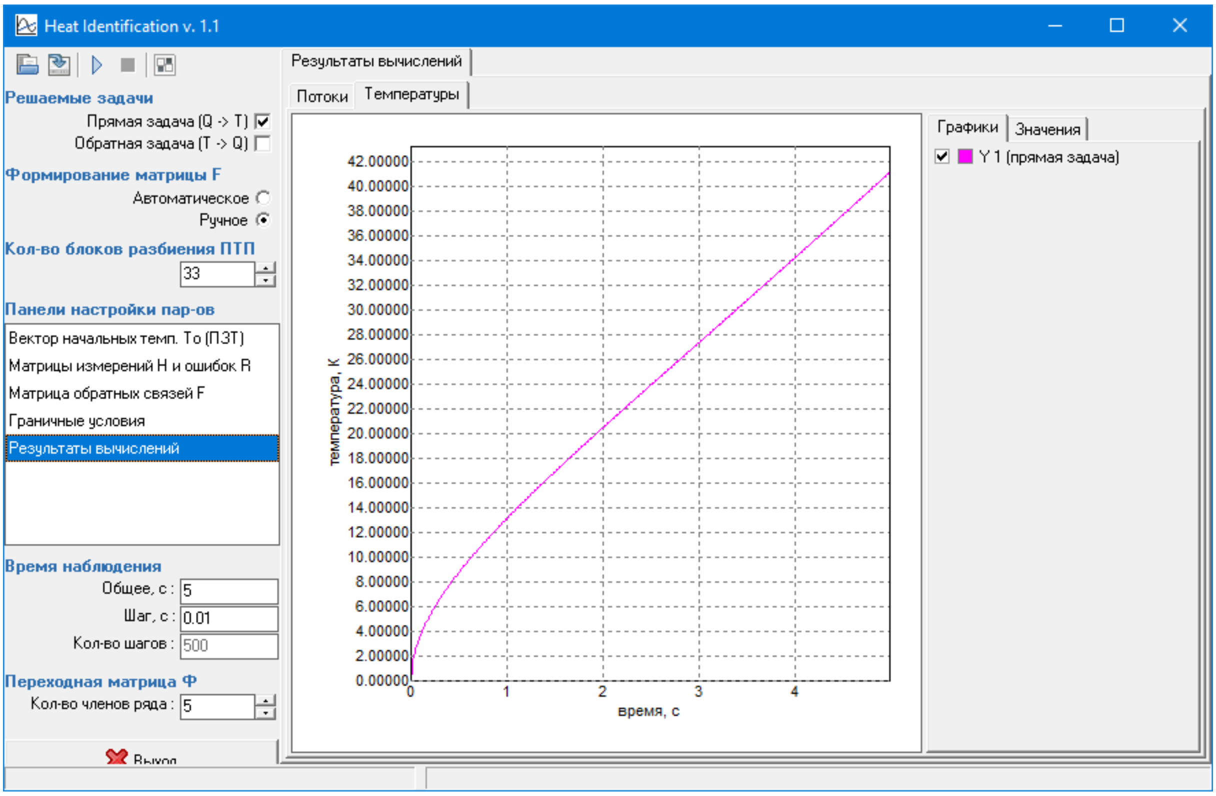


Рисунок 2.5 – Результат решения прямой задачи теплопроводности

Запишем полученные значения в моменты времени $\tau = \{1; 2; 3; 4; 5\}$:

Таблица 2 – Значения температуры первого блока при воздействии номинального теплового потока на поверхность ПТП

τ, с	1	2	3	4	5
T, °C	13,065807	20,399867	27,268682	34,128328	41,120788

Для определения функции чувствительности исследуемого тела рассмотрим два случая: в первом зададим приращение значения q_a на 1%, во втором – q_b 1%. Для этого при определении граничных условий увеличим значения сплайнов сначала на нулевом шаге, затем на 500-ом. Таким образом, получатся два расчета:

Таблица 3 – Значения температуры первого блока при воздействии измененного теплового потока на поверхность ПТП

τ, с	1	2	3	4	5
t_{qa}, °C	13,16615	20,51774	27,38405	34,22918	41,19841
t_{qb}, °C	13,09612	20,48599	27,426	34,36876	41,45437

Определяем функции чувствительности (45):

Таблица 4 – Значения функции чувствительности ПТП

τ, с	1	2	3	4	5
U_{q1}, м²°С/Вт	1,003470E-03	1,178730E-03	1,153690E-03	1,008490E-03	7,762500E-04
U_{q2}, м²°С/Вт	1,515550E-04	4,306250E-04	7,865900E-04	1,202170E-03	1,667915E-03

Находим коэффициенты матрицы Грама и её определитель (56):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{5} (U_{q_a k})^2; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{5} (U_{q_b k})^2; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{5} (U_{q_a k}) \cdot (U_{q_b k});$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.347 & 4.074 \\ 4.074 & 5.0543 \end{vmatrix} * 10^{-6} = 1{,}04256 * 10^{-11};$$

Определяем доверительные интервалы (58):

$$\Delta q_a = \pm\sigma\cdot\sqrt{\frac{a_{22}\cdot B}{|A|}} = 1704.23\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};\ \Delta q_b = \pm\sigma\cdot\sqrt{\frac{a_{11}\cdot B}{|A|}} = 1752.88\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\ ;$$

Для рассмотрения СДО были использованы хорошо изученные методы канонического анализа эллипсов. Удовлетворяющий вид уравнения эллипса приведен далее (60):

$$\Delta q_b = \frac{-a_{12}\Delta q_a \pm \sqrt{a_{12}^2\Delta q_a^2 - a_{22}(a_{11}\Delta q_a^2 - B)}}{a_{22}}$$

Построим график уравнения $\Delta q_b = f(\Delta q_a)$ на рисунке 2.6:

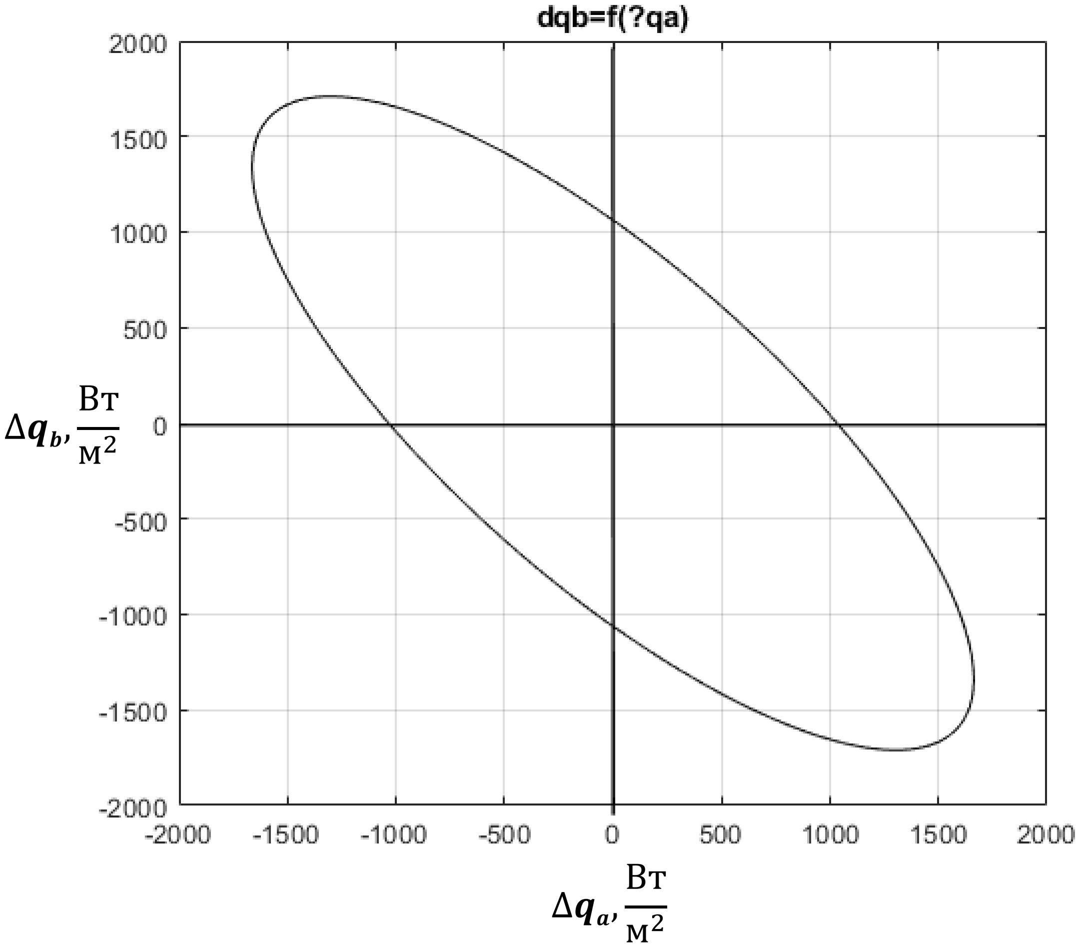


Рисунок 2.6 – Вид совместной доверительной области ПТП

Приведенная совместная доверительная область имеет следующий физический смысл.

Оценка поступающего на ПТП теплового потока попадет в приведенную выше доверительную область с вероятностью α=95% при среднеквадратическом отклонении измеряемой температуры 1°С.

Для оценки зависимости совместной доверительной области от глубины залегания чувствительного элемента проведем тот же анализ для следующей матрицы измерений H:

$$\underset{(6\times33)}{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

В таком виде матрица измерений означает, что в ПТП находятся 6 ИПТ на расстоянии $h = |12.5\ 100\ 200\ 300\ 400\ 487{,}5|$ мкм от внешней поверхности.

В окне результатов на рисунке 2.7 программа отображает график зависимости восстановленной по потоку температуры от времени наблюдения.

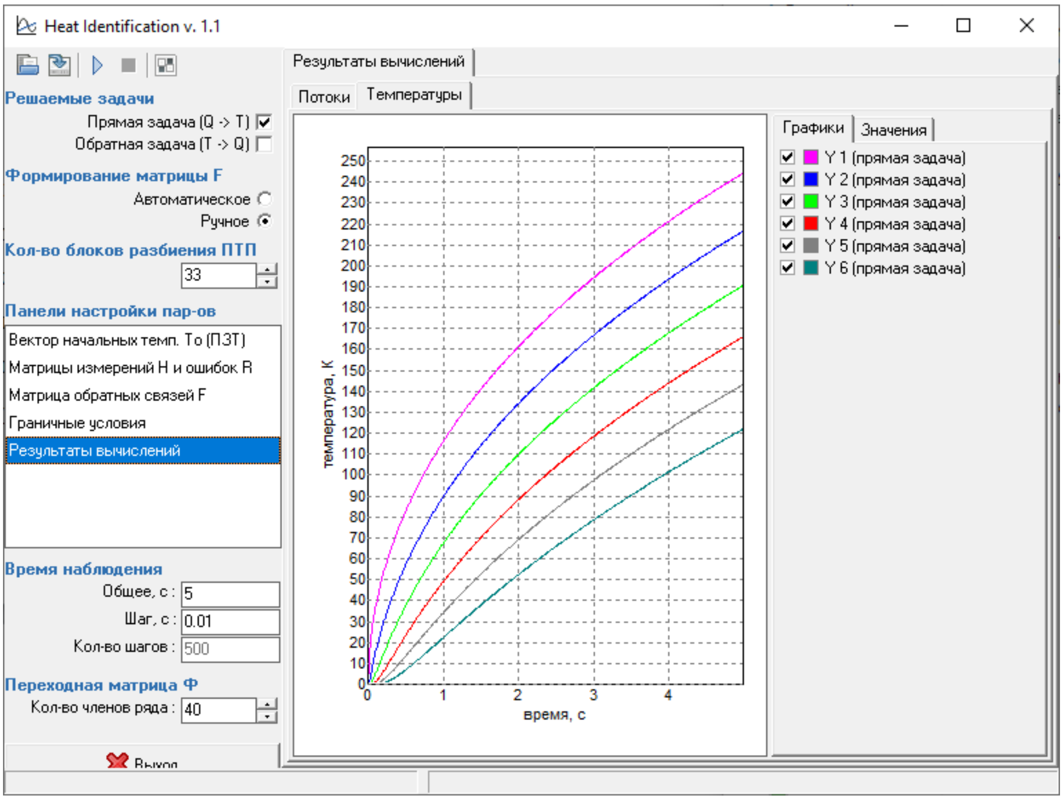


Рисунок 2.7 – Результаты решения прямой задачи теплопроводности для случая нескольких чувствительных элементов

По полученным данным определим параметры совместного доверительного интервала. Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Зависимость ширины доверительного интервала от глубины залегания чувствительного элемента

Глубина чувствительного элемента $\boldsymbol{h}$, мкм	Δq_a, Вт/м^2	Δq_b, Вт/м^2
12.5	1752	1704
100	2230	2028
200	2875	2449
300	3766	3005
400	5034	3753
487.5	6914	4777

Как и ожидалось, с увеличением глубины залегания чувствительного элемента ширина доверительного интервала увеличивается. Проведем регрессивный анализ для определения предела ширины доверительного интервала.

Для удобства представим полученные данные графически на рисунке 2.8.

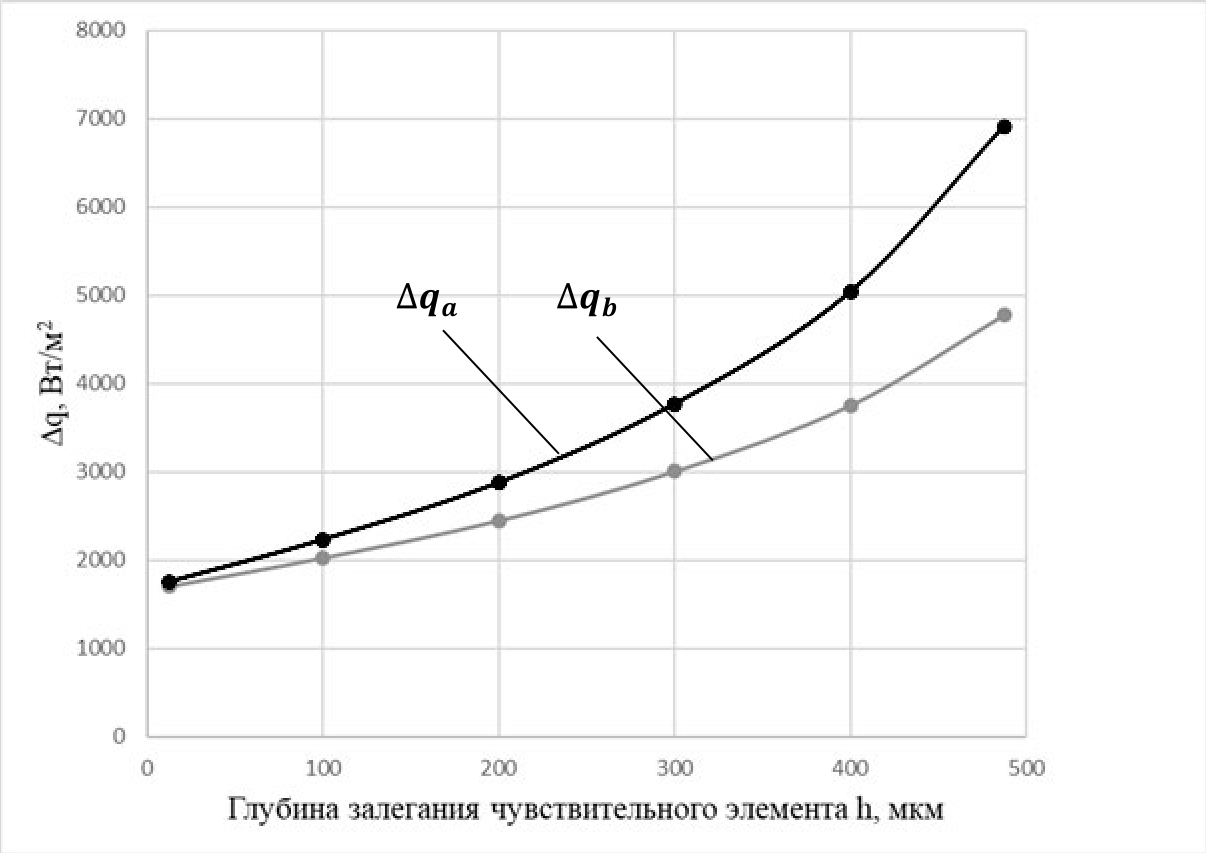


Рисунок 2.8 – Зависимость ширины доверительного интервала от глубины залегания чувствительного элемента

Используя встроенные в Microsoft Office Excel инструменты регрессивного анализа, получим следующие полиноминальные уравнения:

$\Delta q_a = 4 \cdot 10^{-10} h^5 - 4.4 \cdot 10^{-7} h^4 + 1.8 \cdot 10^{-4} h^3 - 2.6 \cdot 10^{-2} h^2 + 6.8h + 1671$

$\Delta q_b = 2.2 \cdot 10^{-10} h^5 - 2.3 \cdot 10^{-7} h^4 + 1 \cdot 10^{-4} h^3 - 1.5 \cdot 10^{-2} h^2 + 4.5h + 1650$

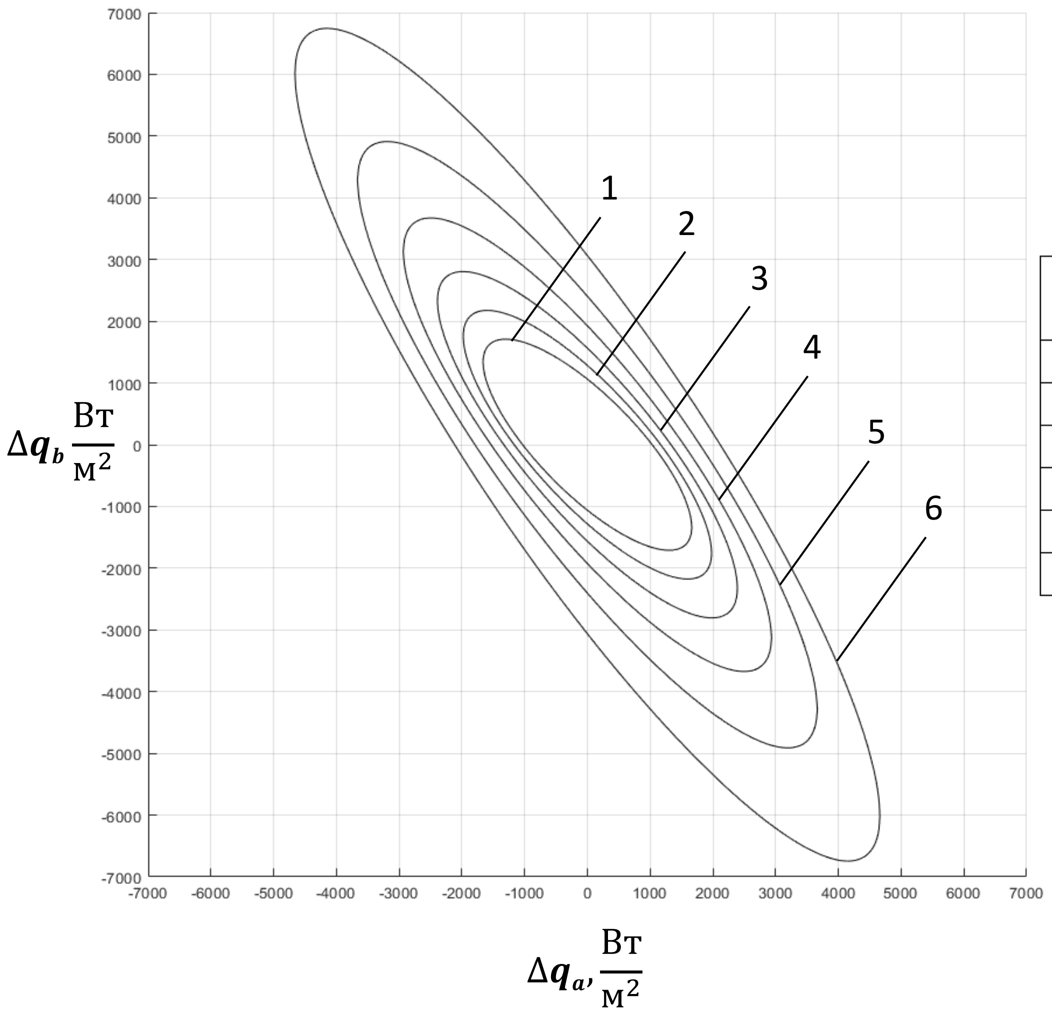
Для обоих уравнений коэффициент доверительной аппроксимации $R^2 > 0.99995$.

Таким образом, предел для ширины доверительно интервала:

$\lim_{h \to 0} \Delta q_a = 1671$

$\lim_{h \to 0} \Delta q_b = 1650$

Составим график совместной доверительной области нескольких датчиков с помощью программы MatLab на рисунке 2.9.



№	h, мкм
1	12,5
2	100
3	200
4	300
5	400
6	487,5

Рисунок 2.9 – Сравнение форм и размеров совместных доверительных областей в зависимости от глубины залегания чувствительного элемента

2.4 РАСЧЕТ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Расчет передаточной функции был проведен в программе, написанной в среде MatLab. В качестве входных параметров используются приведенные ранее матрицы, характеризующие ДРМ. Код программы для получений значений динамических характеристик приведен далее:

```
G= %в виду большого размера матрица управления не приведена
F= %в виду большого размера матрица обратных связей не
приведена
H=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0];
A=F;
B=G;
C=H;
```

```
D=[0 0]; %до этого момента в память программы вводятся
описанные раннее матрицы
[b,a]=ss2tf(A,B,C,D,1); %создание передаточной функции в
матричном виде
W=tf(b,a); %перевод передаточной функции из матричного в
полиномный вид
[sysb, g]=balreal(W); % возврат сбалансированной реализации
модели
в пространстве состояний
rsys = modred(sysb,g<1e-4,'matchdc'); %понижение порядка
полинома
rsys = tf(rsys) %в результате прошлой команды передаточная
функция снова стала матричной, переведем её обратно в
полиномный вид
figure
step(W, 100); %отображение переходной характеристики
grid on
figure
bode(W, {0.001, 1000000}) %отображение логарифмической
амплитудно-фазовой частотной характеристики
grid on
figure
impulse(W) %отображение импульсной характеристики
grid on
```

Согласно заданию, необходимо получить динамические характеристики. Они приведены ниже вместе с кратким описанием их физического смысла:

- **Передаточная функция**

Порядок функции соответствует количеству блоков, и в данной ситуации он был бы равен 33. Такой высокий порядок функции означает высокую её точность, однако эта точность чрезмерна. Поэтому была использована функция modred, сокращающая количество членов полинома. Таким образом, для предложенной схемы передаточная функция имеет следующий вид:

$$W = \frac{4.022 * 10^{-5}S^2 + 3.014 * 10^{-4}S + 3.311 * 10^{-13}}{S^2 + 1.247S - 2.441 * 10^{-6}}$$

- **Переходная характеристика**

Реакция исследуемого объекта на единичное ступенчатое воздействие. В частности, по ней можно судить, как быстро тело нагревается под воздействием теплового излучения. Для предложенной схемы переходная характеристика имеет вид, изображенный на рисунке 2.10.

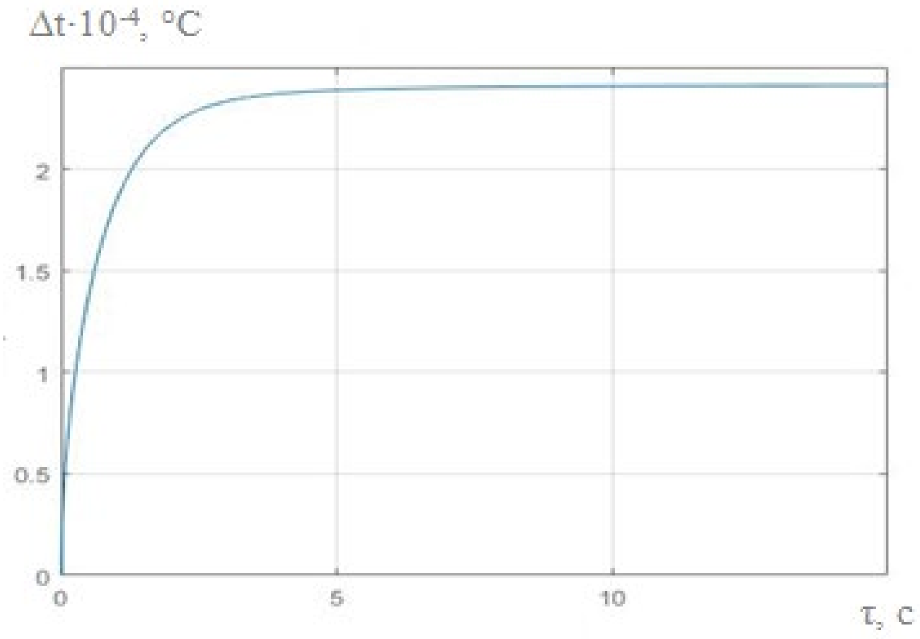


Рисунок 2.10 – Переходная характеристика ПТП

- **Импульсная характеристика**

Реакция исследуемого объекта на единичное импульсное воздействие. Под импульсным воздействием подразумевают бесконечно короткое и бесконечно большое воздействие. По этой характеристике можно судить о том, как быстро тепловая волна проходит вглубь объекта. Таким образом, для предложенной схемы переходная характеристика имеет следующий вид, изображенный на рисунке 2.11.

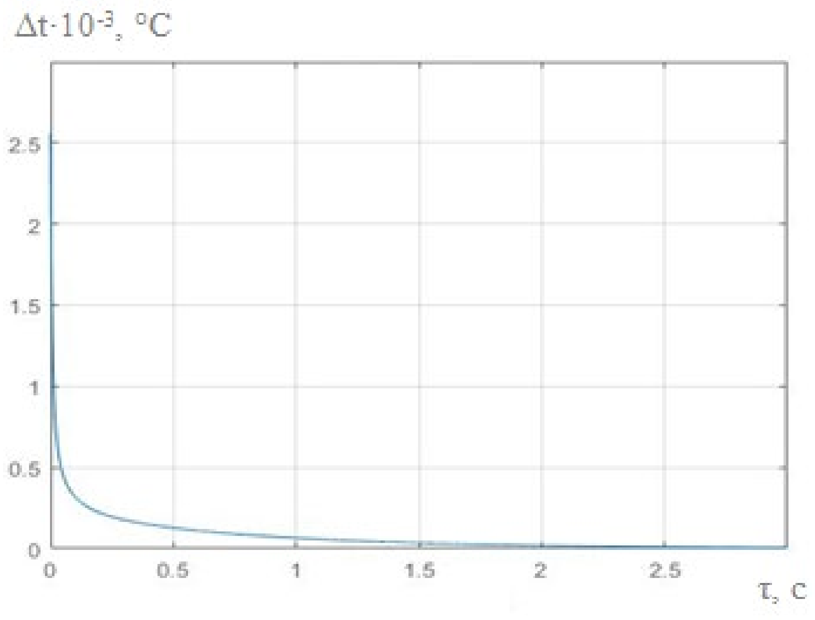


Рисунок 2.11 – Импульсная характеристика ПТП

- **ЛАФЧХ**

Логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика описывает фазовый сдвиг и отношение амплитуд между входным воздействием и выходным сигналом. По ней можно судить о том, как быстро тепловое воздействие преобразуется в тепловую волну и достигает чувствительного элемента ПТП. Для предложенной схемы ЛАФЧХ имеет вид, изображенный на рисунке 2.12.

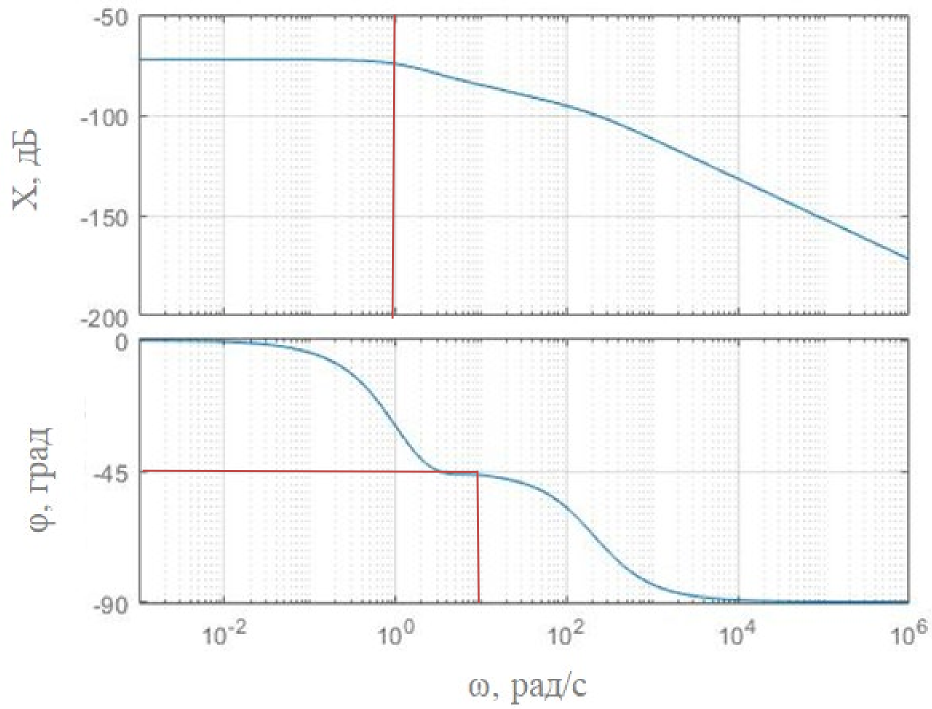


Рисунок 2.12 – Логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика ПТП

По динамическим характеристикам можно сделать следующие выводы:

- переходный процесс в ПТП длится около 5 с, после чего устанавливается стационарное состояние;

- импульсная характеристика показывает, что через 3 с ПТП возвращается в исходное состояние;

- ЛАФЧХ показывают, что при частоте 5-10 рад/с выходной сигнал сдвигается по фазе относительно входного на 45°, а при частоте 1000 рад/с – на 90°. Входной сигнал ослабляется на 70 дБ на низких частотах. При частоте выше 1 рад/с наблюдается ещё большее постоянное ослабление сигнала.

2.5 ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Проанализируем влияние неопределенности измерения температуры на первом блоке на восстановление нестационарного теплового потока.

Решение будет проведено три раза для разных величин ошибок измерения температуры: 0.2, 0.5, 1.0. Для наглядности восстанавливаемый поток принят гармоническим.

Запустим решение задачи. Занимаемое время зависит от мощности компьютера и может продлиться вплоть до нескольких минут. После решения программа выдает график восстановленного и реального нестационарного теплового потока. Приведем результаты вычислений для каждого значения среднеквадратичного отклонения измерений температуры, изобразив их на серии рисунков 2.13-2.15.

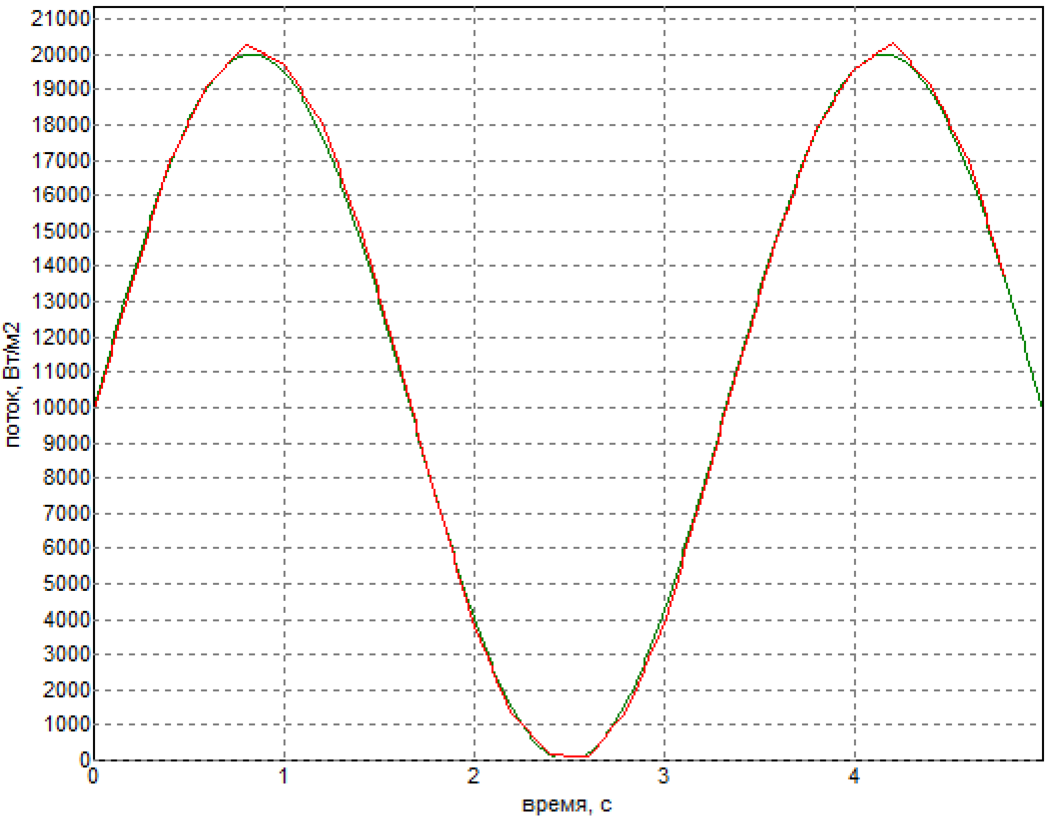


Рисунок 2.13 – Восстановление нестационарного теплового потока при ошибке измерений $\sigma = 0.2$ °C.

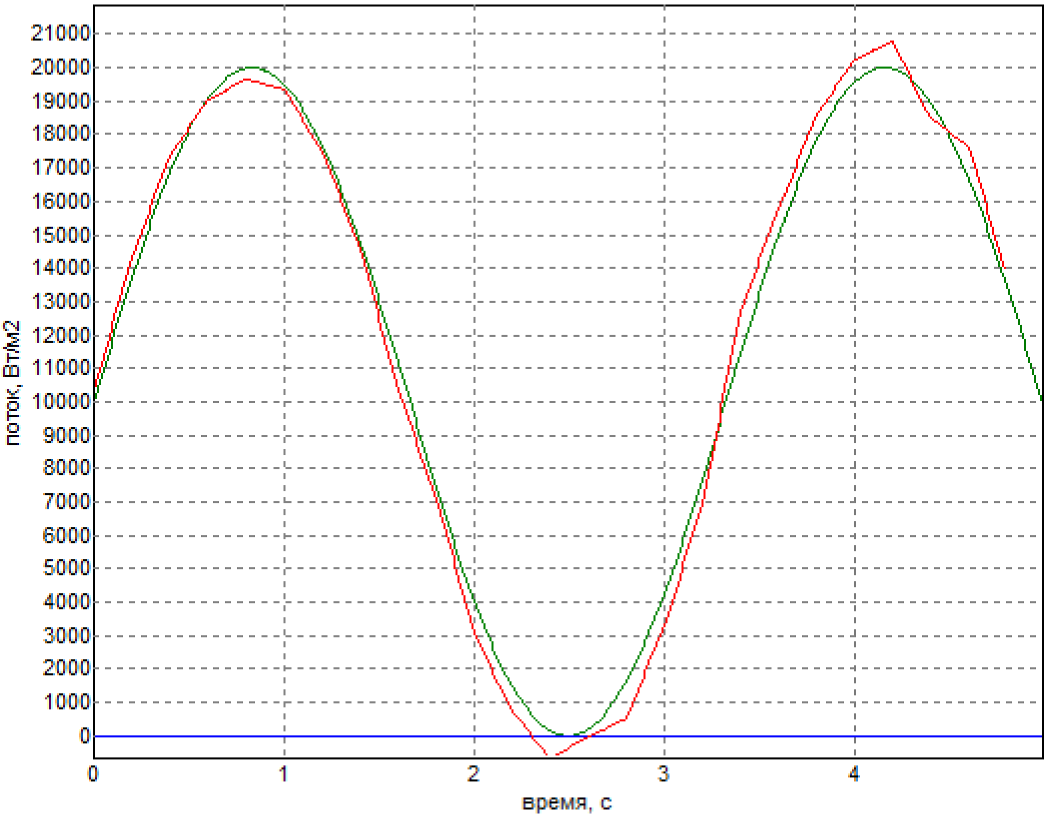


Рисунок 2.14 – Восстановление нестационарного теплового потока при ошибке измерений $\sigma = 0.5$ °C.

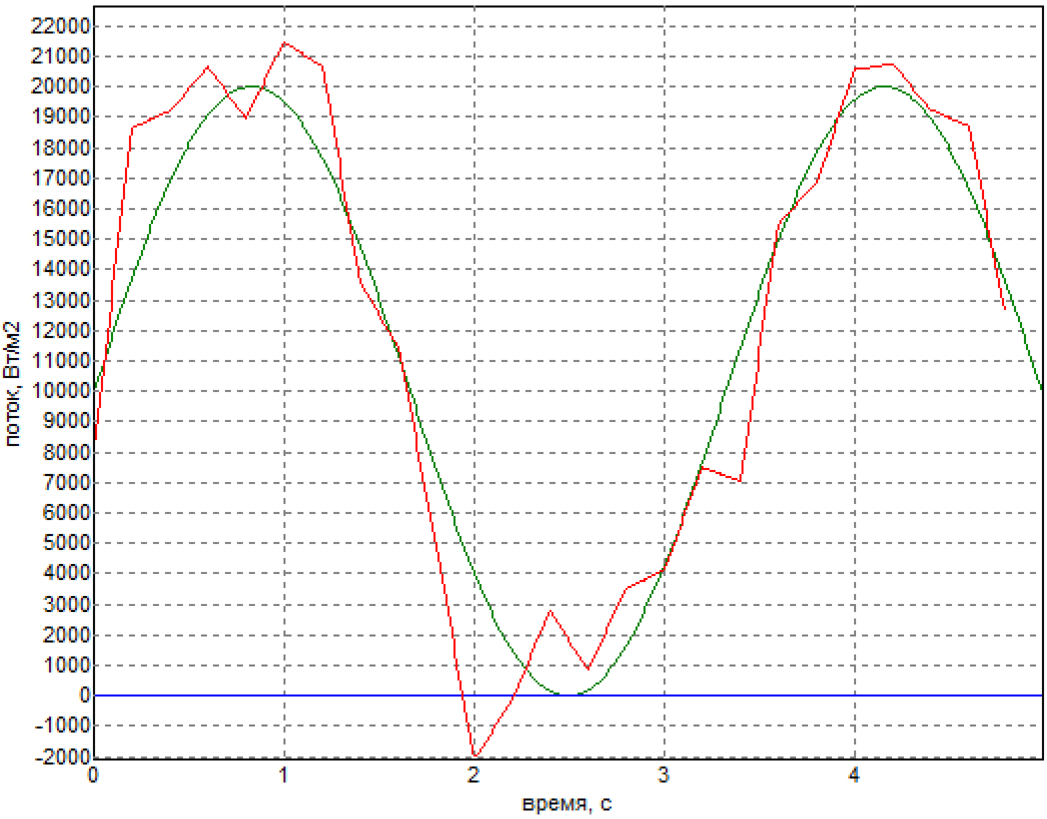


Рисунок 2.15 – Восстановление нестационарного теплового потока при ошибке измерений $\sigma = 1$ °C.

Как видно из графиков, наличие шумов в измерениях весьма существенно влияет на неопределенность измерения температуры на восстановления потока.

2.6 ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ КОРИДОР ВОССТАНОВЛЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ПЛОТНОСТЬ КОТОРОГО МЕНЯЕТСЯ ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

Представляет интерес изобразить доверительный коридор для восстановленного нестационарного потока, меняющегося нелинейно.

Построим совместные доверительные интервалы (СДИ) для 10 участков сплайн-аппроксимации на 1 периоде восстановленного теплового потока при σ = 0.1 °С.

В пункте 2.3 мы строили только для 1 участка, теперь те же самые действия проделываем для 10 участков. Задаем в качестве граничного условия поток, меняющийся по гармоничному закону с угловой частотой $\omega = 2$ рад/с. Решение обратной задачи приведено на рисунке 2.16.

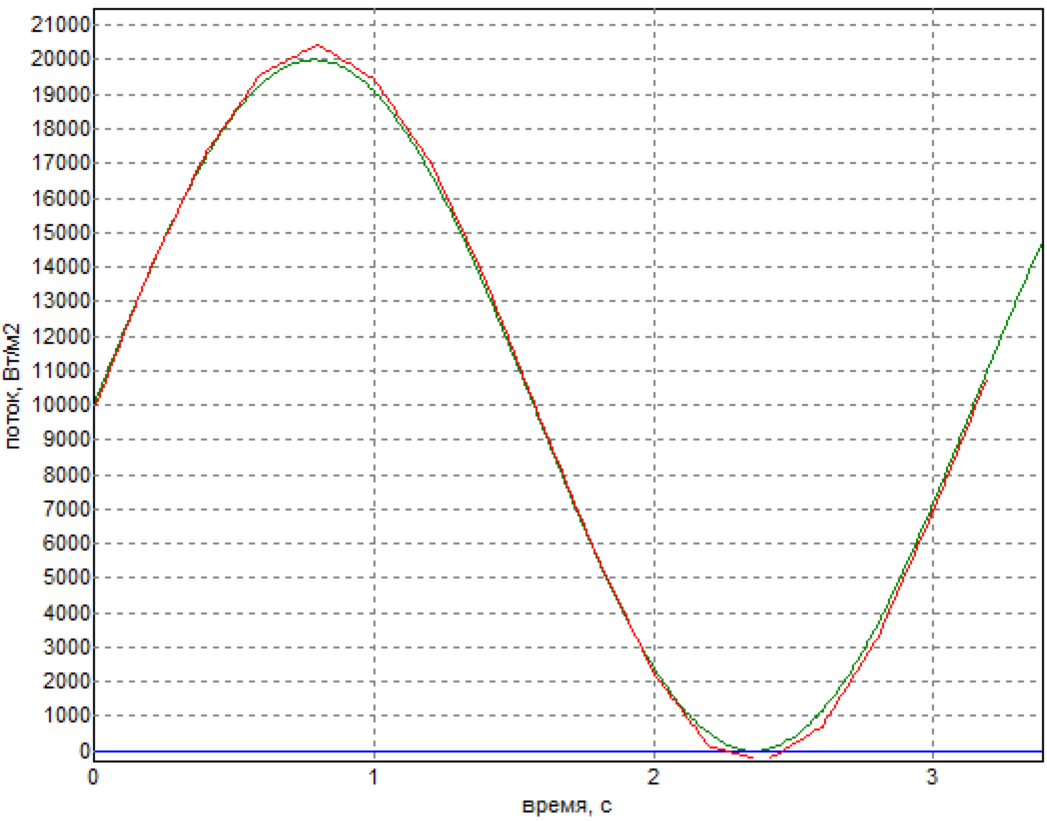


Рисунок 2.16 – Восстановление нестационарного теплового потока при ошибке измерений $\sigma = 0.1$ °C

Значения q_a и q_b восстановленного потока на границах 10 интервалов сплайн-аппроксимации приведены на таблице 6.

Таблица 6 – Начальные и конечные значения восстановленного теплового потока на каждом участке сплайн-аппроксимации.

№ Интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_a*10^4, Вт/м^2	0,989	1,725	1,945	2,03	1,94	1,718	0,222	0,0215	0,009	0,086
$q_b * 10^4$, Вт/м^2	1,725	1,945	2,03	1,94	1,718	0,222	0,0215	0,009	0,086	0,989

Определим значения ширины доверительного интервала Δq_a и Δq_b восстановленного потока на границах каждого интервала сплайн-аппроксимации в таблице 7.

Таблица 7 – Значения ширины доверительного интервала восстановленного теплового потока на каждом участке сплайн-аппроксимации.

№ Интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δq_a, Вт/м^2	61,85	172,2	166,8	165,8	185,5	373,4	23,6	2,2	49,6	48,9
Δq_b, Вт/м^2	125,1	160,4	151,5	114,6	109,7	12,7	5,5	41,6	38,5	114,3

Построим графическое представление СДИ на рисунке 2.17, масштаб не соблюден для наглядного отображения границ доверительных интервалов.

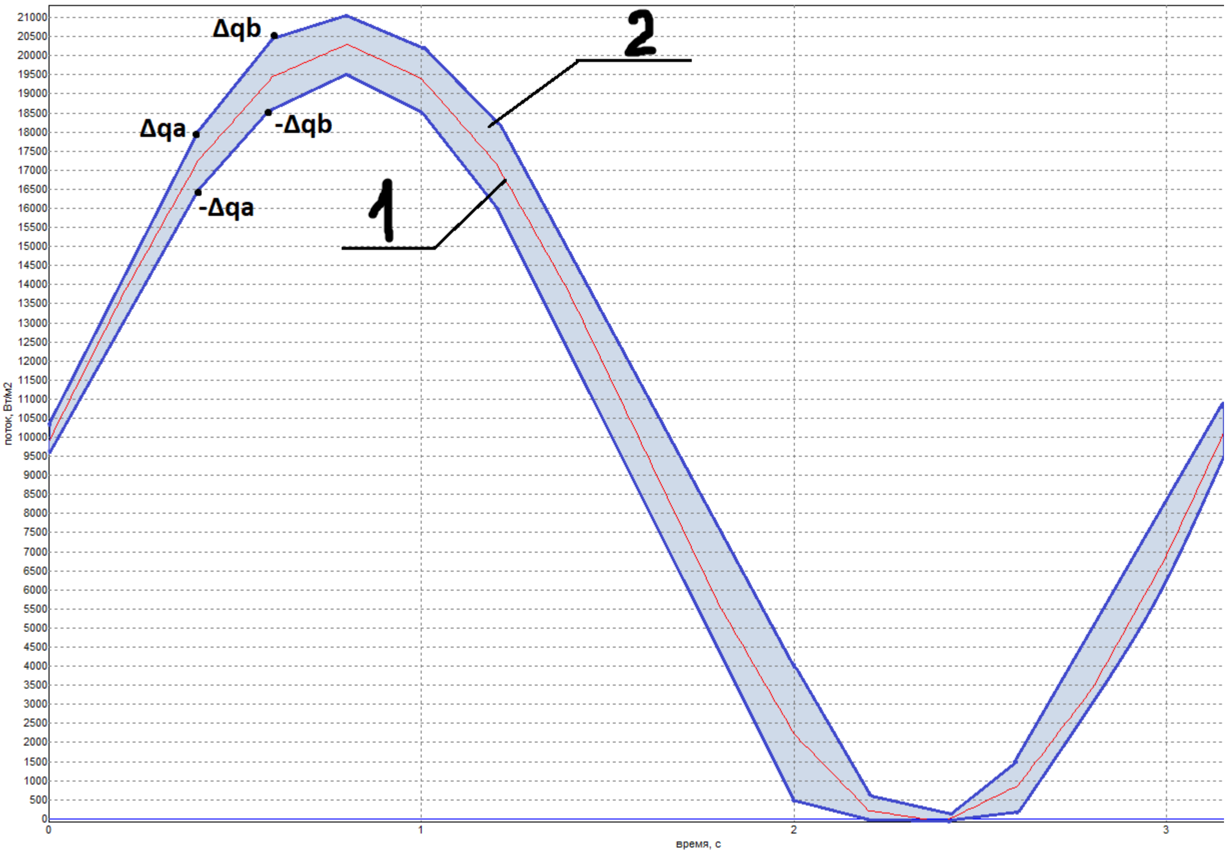


Рисунок 2.17 – Доверительный коридор для предложенного ПТП:
1 – восстановленный поток; 2 – границы доверительных интервалов

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Какие вам известны методы и устройства для восстановления нестационарных тепловых потоков?
2. Назовите динамические характеристики преобразователя нестационарного теплового потока.
3. Что характеризует амплитудо- и фазочастотные характеристики преобразователей нестационарного теплового потока?
4. Что характеризует передаточная функция при динамических измерениях?
5. Что характеризует совместная доверительная область при восстановлении граничных условий теплообмена?
6. Что характеризует совместный доверительный интервал при восстановлении нестационарного теплового потока?
7. Каково влияние точек измерения температуры на результаты восстановления нестационарного теплового потока?
8. Что необходимо знать при восстановлении граничных условий с помощью однородного ПТП?
9. Что такое полуограниченного тело в теплофизическом эксперименте?
10. От каких параметров зависит неопределенность восстановления искомых величин при решении ОЗТ?
11. Фильтр Калмана. Области его применения и его роль в теплофизическом эксперименте.
12. В чем различие между погрешностью и неопределенностью при восстановлении искомых величин?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1966. 600 с.

2. Ярышев Н.А. Теоретическое основы измерения нестационарных температур. Л.: Энергоиздат. Ленинградское отделение, 1990. 256 с.

3. Ярышев Н.А. Научная школа и школа жизни. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. 296 с.

4. Кондратьев Г.М., Дульнев Г.Н., Платунов Е.С., Ярышев Н.А. Прикладная физика. Теплообмен в приборостроении. СПб: СПбГУ ИТМО, 2003. 560 с.

5. Pilipenko N.V. Parametric Identification of Differential-Difference Models of Heat Transfer in One-Dimensional Bodies Based on Kalman Filter Algorithms / N.V. Pilipenko, Y.P. Zarichnyak, A. Khalyavin, V. Ivanov, I. Nikolaev // International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, FarEastCon 2020, 2020.

6. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

7. Бек Д., Бакуэлл Б., Сент-Клер Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М: Мир, 1989. 312 с.

8. Алифанов О.М., Вабищевич В.В., Михайлов. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. М.: Логос, 2001. 400 с.

9. Самарский А.А., Вабищевич А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2009. 480 с.

10. Мацевитый Ю.М., Бут Е.Н. Сплайн-идентификация теплофизических процессов. Киев: Наукова Думка, 2010. 235 с.

11. Пилипенко Н.В. Методы и приборы нестационарной теплометрии на основе решения обратных задач теплопроводностей. СПб: Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2011.

12. Симбирский Д.Ф. Температурная дианостика двигателей. Киев: Техника, 1976. 208 с.

13. Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 168 с.

14. Симбирский Д.Ф. Метрология косвенных измерений. Л: Измерительная техника, 1983.

15. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Методы тории чувствительности в автоматическом управлении. Л: Энергия, 1971. 260 с.

16. Химельблау Д.Т. Анализ процессов статистическими методами. М: Мир, 1973. 957 с.

17. Симбирский Д.Ф., Олейник А.В., Епифанов С.В. Метрологические аспекты обратных задач теплопроводности // Тезисы докладов Минского межд. Форума, 1988. с. 25-27.

18. Симбирский Д.Ф., Олейник А.В., Макаренко Г.В. Планирование и оценка погрешности косвенных измерений. Л. 1989.

19. Худсон Д. Статистика для физиков. М: Мир, 1970.

20. Пилипенко Н.В. Восстановление нестационарных тепловых потоков на основе решения обратных задач теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Приборостроение, Т. 60, No. 6, 2017. с. 538-544.

21. Пилипенко Н.В. Приборы и методы нестационарной теплометрии. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет информационных технололгий, механики и оптики, 2016.

Пилипенко Николай Васильевич
Заричняк Юрий Петрович
Колодийчук Павел Андреевич

Восстановление граничных условий теплообмена неоднородных тел путём решения обратных задач теплопроводности

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А