УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Морозова, Е.В. Милованович, М. Базаг

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Санкт-Петербург
2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Морозова, Е.В. Милованович, М. Базаг

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
Пособие предназначено для осуществления довузовской (школьной) подготовки и успешной сдачи ЕГЭ абитуриентами по направлениям подготовки бакалавриата 09.03.01, 10.03.01, 12.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01., 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01., 19.03.02, 19.03.03, 38.03.01, 38.03.02, 38.03.05., 45.03.04

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2022

Морозова А.В., Милованович Е.В., Базаг М. Основы тригонометрии– СПб: Университет ИТМО, 2022. – 35 с.

Рецензент(ы):
Черницкий А.А., кандидат физ-мат. наук, доцент, доцент, Санкт-Петербургский государственный Химико- фармацевтический университет. Кафедра высшей математики;

Учебное пособие по тригонометрии предназначено для отечественных и иностранных абитуриентов и студентов 1-2 курса, изучающих высшую математику в рамках бакалавриата и специалитета. В пособии приведены основные тригонометрические формулы и разбор базовых задач.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию – ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. – лидер Проекта 5–100.

Содержание

§ 1. Тригонометрическая функция числового аргумента 6
1.1. Угол и его измерение 6
1.2. Определения тригонометрических функций числового аргумента 8
1.3. Построение угла по значению тригонометрической функции 10
1.4. Тригонометрические тождества 12
1.5. Значения тригонометрических функций некоторых углов 13
§ 2. Графики и свойства тригонометрических функций 16
2.1. Функция y = sin x 16
2.2. Функция y = cos x 18
2.3. Функция y = tg x 19
2.4. Функция y =ctg x 20
§ 3 Теоремы сложения и следствия из них 21
3.1. Формулы сложения 21
3.2. Формулы приведения 23
3.3. Формулы двойного и половинного аргумента 24
3.4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение 26
§ 4. Обратные тригонометрические функции 29
4.1. Функция y = arcsin x 29
4.2. Функция y = arccos x 30
4.3. Функция y = arctg x 31
4.4. Функция y = arcctg x 32
§5. Тригонометрические уравнения и неравенства 34
5.1. Простейшие тригонометрические уравнения 34
5.2. Простейшие тригонометрические неравенства 37

§ 1. Тригонометрическая функция числового аргумента

1.1. Угол и его измерение

Всякий угол можно получить вращением в плоскости луча (OA) вокруг точки O. Пусть O – вершина угла, OA – начальное положение луча, OA_1 – конечное положение луча.

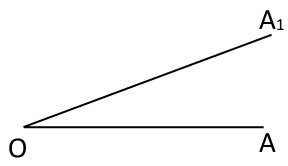

Рис. 1

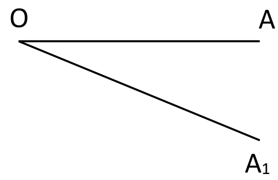

Рис. 2

Луч (OA) в плоскости может вращаться в двух направлениях: против часовой стрелки (рис. 1), или по часовой стрелке (рис. 2).

Угол, образованный вращением луча по часовой стрелке, считается положительным: $\alpha > 0$ (рис. 1). Угол, образованный вращением луча по часовой стрелке, считается отрицательным: $\beta < 0$ (рис. 2). Таким образом, при вращении луча (OA) в плоскости вокруг точки O получаются углы различной величины.

Углы измеряются в **градусах**. Градусом 1^0 называется $^1\!/_{360}$ часть полного угла. Для любого действительного числа $t \in R$ существует и притом только один угол, градусная мера которого равна t^0.

$1^0 = 60'$ (минут), $1' = 60''$ (секунд). В вычислительной практике минуты и секунды часто записывают в виде десятичных долей градуса. Например, $14^0 25' 36'' = 14,426666...$

Углы измеряют также в **радианах**. Один радиан – это центральный угол, которому соответствует дуга, равная радиусу окружности.

Длина окружности равна $2\pi \cdot r$, где r – радиус окружности, $\pi \approx 3,14$. Следовательно, полный угол содержит 360^0 или 2π радиан.

Пишут: $360^0 = 2\pi$ рад или $1^0 = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$рад $\approx 0,0175$рад.

Для любого действительного числа $t \in R$ существует, и притом только один, угол, радианная мера которого равна t радиан. Любое действительное число $t \in R$ можно записать в виде: $t = t_0 + 2\pi \cdot k$, где $0 \le t_0 \le 2\pi,\ k \in Z$.

Пусть некоторый угол равен α^0 и его радианная мера – t радиан. Так как $\frac{360^0}{\alpha^0} = \frac{2\pi}{t}$, то верны формулы перехода от одной меры измерения к другой:

$$\alpha^0 = \frac{180^0 \cdot t}{\pi}\ \text{рад}, \tag{1}$$

$$t_{\text{рад}} = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}. \tag{2}$$

Пример 1. Дано $\alpha = 60^0$. Найти величину угла в радианах.

Решение. По формуле (2) получаем: $t_{\text{рад}} = \frac{\pi \cdot 60^0}{180^0} = \frac{\pi}{3}$ рад.

Ответ: $t = \frac{\pi}{3}$рад.

Пример 2. Дано $t = 0{,}7$ рад. Найти величину угла в градусах.

Решение. По формуле (1) получаем: $\alpha^0 = \frac{180^0 \cdot 0{,}7}{\pi} \approx 40^0$.

Ответ: $\alpha \approx 40^0$.

Пример 3. Представить $t = \frac{17\pi}{4}$ в виде: $t = t_0 + 2\pi \cdot k$.

Решение. $t = {}^{17\pi}\!/_4 \Rightarrow t = {}^{16\pi}\!/_4 + {}^{\pi}\!/_4 = {}^{\pi}\!/_4 + 2 \cdot 2\pi$; $t_0 = {}^{\pi}\!/_4$; $k = 2$.

Ответ: $\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$.

Пример 4. Представить $t = -{}^{11}\!/_2\,\pi$ в виде: $t = t_0 + 2\pi \cdot k$.

Решение. $-\frac{11}{2}\pi = -\frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$; $k = -3$.

Ответ: $-\frac{11}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi$.

Покажем соответствие градусной и радианной меры некоторых углов.

Таблица 1

α^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
t рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π

1.2. Определения тригонометрических функций числового аргумента

В прямоугольной системе координат рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 3). Такая окружность называется единичной или **тригонометрической** окружностью.

Точка $P_0(1;0)$ единичной окружности соответствует начальному положению луча $[OP_0]$ и называется **начальной точкой**. Каждому повороту начальной точки P_0 на угол t радиан соответствует одна и только одна точка единичной окружности P_t с координатами x_t и y_t.

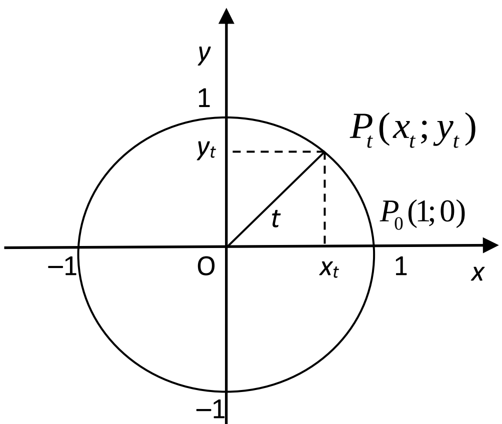

Рис. 3

Таким образом, устанавливается соответствие между точками числовой прямой (множеством действительных чисел *R*) и точками единичной окружности. Обратное не однозначно: каждой точке окружности P_t соответствует бесконечно много углов, представимых формулой: $t = t_0 + 2\pi k$, где $0 \le t_0 \le 2\pi$ и $k \in Z$. То есть каждой точке окружности соответствует бесконечно много точек прямой, расстояние между которыми кратно 2π.

Синус числа t – это ордината точки P_t, $\sin t = y_t$ (рис. 3). Ось ординат называют осью синусов. Значение $\sin t$ определено для любого t. Так как $|y_t| \le 1$, то $\sin t \in [-1;1]$.

Косинус числа t – абсцисса точки P_t, $\cos t = x_t$ (рис. 3). Ось абсцисс называют осью косинусов. Значение $\cos t$ определено для любого t. Так как $|x_t| \le 1$, то $\cos t \in [-1;1]$.

Тангенс числа t – отношение ординаты точки P_t к абсциссе. $\operatorname{tg} t = y_t / x_t$. Прямую $x = 1$ называют осью тангенсов (рис. 4), так как $y_m = y_m / 1 = = y_t / x_t = \operatorname{tg} t$. Отношение y_t / x_t не определен для $x_t = 0$, значит, $\operatorname{tg} t$ определен для всех $t \ne \pi/2 + k\pi,\ k \in Z$. Множество значений $\operatorname{tg} t$ есть R.

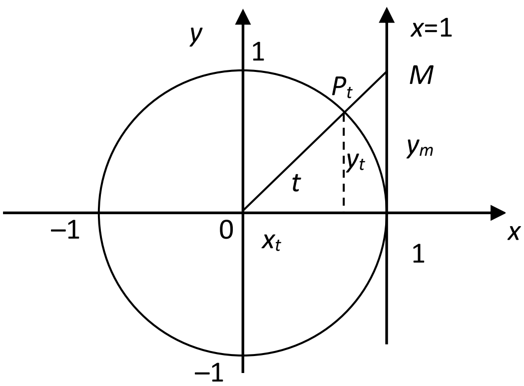

Рис. 4

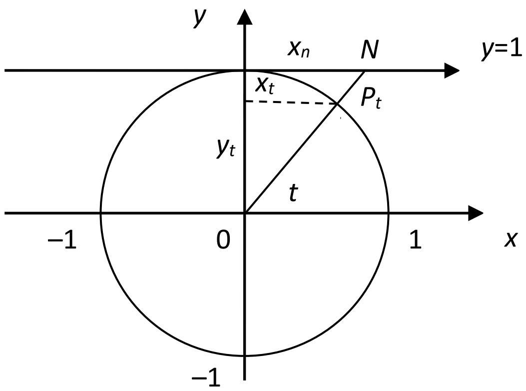

Рис. 5

Котангенс числа t – отношение абсциссы P_t к ее ординате. $\operatorname{ctg} t = x_t / y_t$. Прямую $y = 1$ называют осью котангенсов (рис. 5), так как $x_n = x_n / 1$ $= = x_t / y_t = \operatorname{ctg} t$. Отношение x_t / y_t не определено для $y_t = 0$, значит, $\operatorname{ctg} t$ определен для всех $t \ne k\pi$, $k \in Z$. Значения $\operatorname{ctg} t$ лежат в R.

Секанс числа t – это величина, обратная абсциссе точки P_t. $\sec t = 1 / x_t$. Это отношение не определено для $x_t = 0$, значит, $\sec t$ определен для всех $t \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Множество значений $\sec t$ есть $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Косеканс числа t – величина, обратная ординате точки P_t. $\operatorname{cosec} t = {}^{1}\!/_{y_t}$. Это отношение не определено для $y_t = 0$, значит функция $\operatorname{cosec} t$ определена для всех $t \neq k\pi$, $\kappa \in Z$. Множество значений $\operatorname{cosec} t$ есть $]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$.

1.3. Построение угла по значению тригонометрической функции

Если известно значение тригонометрической функции, то можно построить соответствующие углы. Рассмотрим это на примерах.

Пример 5. Построить угол α, если $\sin\alpha = m$, $|m| \leq 1$.

Решение. Рассмотрим единичную тригонометрическую окружность (рис. 6) и на оси синусов (ось *OY*) построим точку *M* (0; *m*). Через точку *M* проведем прямую, параллельную оси *OX*. Точкам пересечения этой прямой с единичной окружностью P_1 и P_2 соответствуют углы α_1 и α_2, синус которых равен m. При этом $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$.

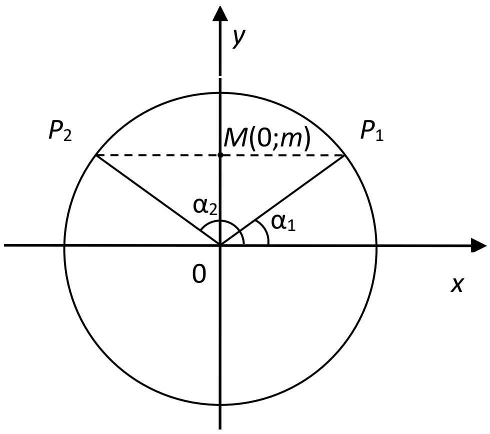

Рис. 6

Пример 6. Построить угол α, если $\cos\alpha = m$, $|m| \leq 1$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 7) и на оси косинусов построим точку *M*(*m*;0). Через точку *M* проведем прямую, параллельную оси *OY*. Точкам пересечения этой прямой с единичной окружностью P_1 и P_2 соответствуют углы α_1 и α_2, косинус которых равен m. При этом $\alpha_2 = -\alpha_1$.

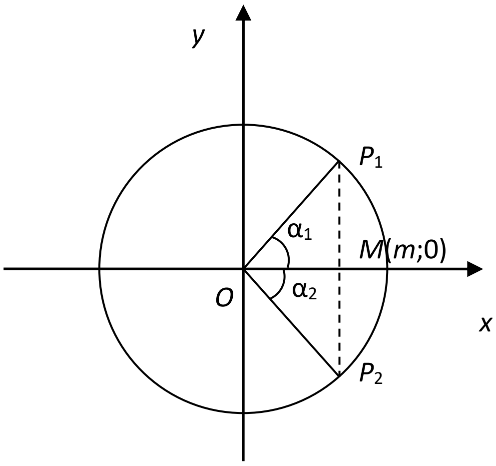

Рис. 7

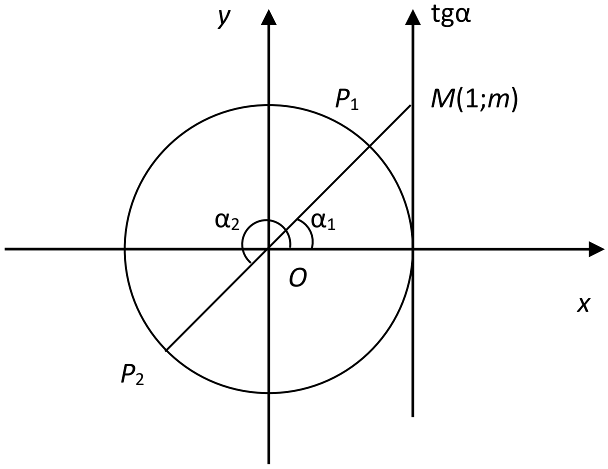

Рис. 8

Пример 7. Построить угол α, если $\mathrm{tg}\alpha = m$, $m \in R$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 8) и на оси тангенсов (x = 1) построим точку M (1; m). Через точки O и M проведем прямую. Точкам пересечения этой прямой с единичной окружностью P_1 и P_2 соответствуют углы α_1 и α_2, тангенс которых равен m. При этом $\alpha_2 = \pi + \alpha_1$.

Пример 8. Построить угол α, если $\mathrm{ctg}\alpha = m$, $m \in R$

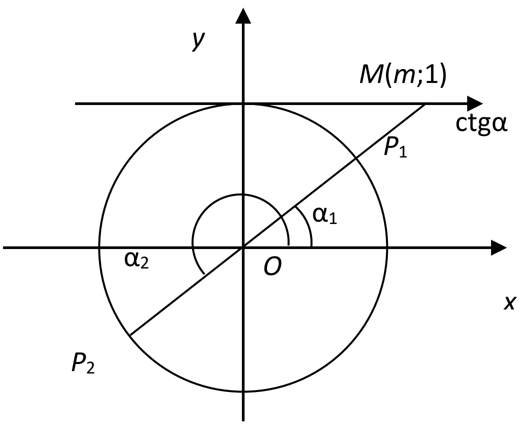

Рис. 9

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 9) и на оси котангенсов (y = 1) построим точку M (m; 1) Через точки O и M проведем прямую. Точкам пересечения этой прямой с единичной окружностью P_1 и P_2 соответствуют углы α_1 и α_2, котангенс которых равен m. При этом $\alpha_2 = \pi + \alpha_1$.

Итак, можно построить углы, лежащие в интервале от 0 до 2π, по заданным значениям тригонометрических функций.

1.4. Тригонометрические тождества

Найдем зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Пусть P_t – произвольная точка единичной окружности (рис. 3). Тогда по определению тригонометрических функций имеем $\sin t = y_t$, $\cos t = x_t$. По теореме Пифагора получим: $y_t^2 + x_t^2 = 1$ или **основное тригонометрическое тождество**:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \text{ где } t \in R. \tag{3}$$

Из определения тригонометрических функций получим равенства:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y_t}{x_t} = \frac{\sin t}{\cos t},\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{x_t}{y_t} = \frac{\cos t}{\sin t},\ t \neq k\pi,\ k \in Z. \tag{5}$$

$$\sec t = \frac{1}{x_t} = \frac{1}{\cos t},\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \tag{6}$$

$$\operatorname{cosec} t = \frac{1}{y_t} = \frac{1}{\sin t},\ t \neq k\pi,\ k \in Z. \tag{7}$$

Если обе части равенства (3) разделить на $\sin^2 t$, то получим:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t},\ t \neq k\pi,\ k \in Z. \tag{8}$$

А если разделить на $\cos^2 t$, то получим:

$$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t},\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \tag{9}$$

Если умножить равенство (4) на равенство (5), то получим:

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1,\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \tag{10}$$

Из формулы (3) получим: $\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$, поэтому:

$$\mathrm{tg}t=\frac{\sin t}{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}\,;\ \mathrm{ctg}t=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^{-1} t}. \tag{11}$$

Из формулы (3) получим $\sin t=\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$, поэтому:

$$\mathrm{tg}t=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\quad \mathrm{ctg}t=\frac{\cos t}{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}. \tag{12}$$

Из тождеств (8), (4) и (6) найдем выражения косинуса, синуса и котангенса через тангенс:

$$\cos t=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}},\ \sin t=\frac{\mathrm{tg}t}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}},\ \mathrm{ctg}\,t=\frac{1}{\mathrm{tg}\,t}. \tag{13}$$

Аналогично находятся выражения тригонометрических функций через котангенс:

$$\cos t=\frac{\mathrm{ctg}\,t}{\pm\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2 t}},\ \sin t=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t}},\ \mathrm{tg}\,t=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,t}. \tag{14}$$

Пример 9. По заданному значению $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $(\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi)$ найти значения других тригонометрических функций: $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$.

Решение. Так как угол $\alpha\in\left]\pi/2;\pi\right[$, то $\cos\alpha\le 0$. Из формулы (3) получим $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-9/25}=-\sqrt{16/25}=-4/5$. Следовательно, согласно (4) и (5) имеем: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3/5}{4/5}=-\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{-3/4}=-\frac{4}{3}$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

1.5. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Найдем значения тригонометрических функций основных углов, лежащих от 0 до 2π. Для этого будем использовать единичную окружность.

Если $t=0$, то точка P_0 находится на оси OX и ее координаты $x_0=1$, $y_0=0$. Следовательно, $\sin 0=0$, $\cos 0=1$, $\operatorname{tg}0=0$, $\operatorname{ctg}0$ – не существует.

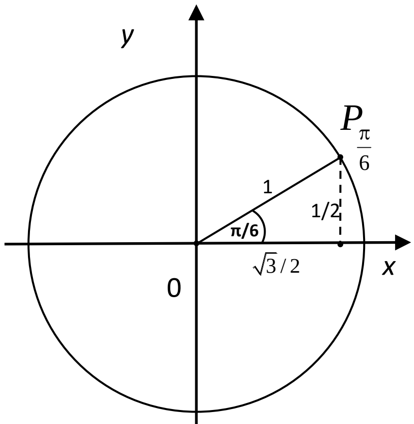

Рис. 10

Если $t=\dfrac{\pi}{6}$, у точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ координаты $y_{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}$, $x_{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ (рис. 10).

Если $t=\dfrac{\pi}{4}$, то точка $P_{\frac{\pi}{4}}$ имеет координаты: $x_{\frac{\pi}{4}}=y_{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}/2$. Следовательно, $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}=1$ (рис. 11).

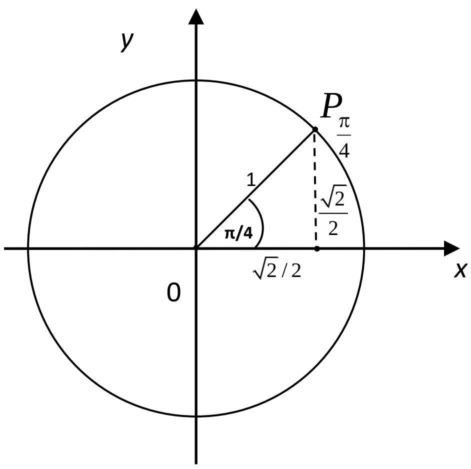

Рис. 11

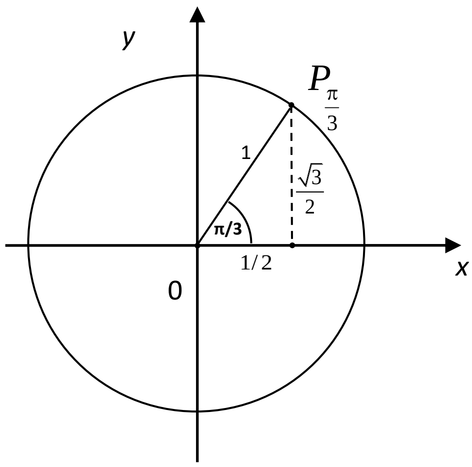

Рис. 12

Если $t=\dfrac{\pi}{3}$, то у точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ координаты $x_{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}$, $y_{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (рис. 12).

Если $t=\frac{\pi}{2}$, то точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ находится на оси OY и ее координаты $x_{\frac{\pi}{2}}=0$, $y_{\frac{\pi}{2}}=1$. Следовательно, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ – не определен, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=0$.

Если $t=\pi$, то точка P_{π} находится на оси OX и ее координаты $x_{\pi}=-1$, $y_{\pi}=0$. Следовательно, $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, $\mathrm{tg}\pi=0$, $\mathrm{ctg}\pi$ – не определен.

Если $t=\frac{3\pi}{2}$, то точка $P_{\frac{3\pi}{2}}$ лежит на оси OY и $x_{\frac{3\pi}{2}}=0$, $y_{\frac{3\pi}{2}}=-1$. Следовательно, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$ – не определен, $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}=0$.

Если $t=2\pi$, то точка $P_{2\pi}$ совпадает с точкой P_0. Следовательно, $\sin 2\pi=\sin 0=0$, $\cos 2\pi=\cos 0=1$, $\mathrm{tg}2\pi=\mathrm{tg}0=0$, $\mathrm{ctg}2\pi$ – не определен.

Значения тригонометрических функций основных углов приведены в таблице 2.

Таблица 2

α функция	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

Слова и словосочетания

вращение	синус
градус	косинус
радиан	тангенс

центральный угол

дуга

тригонометрическая функция

единичная окружность

луч

окружность

плоскость

координата

абсцисса

котангенс

секанс

косеканс

тригонометрическая окружность

угол

величина угла (мера угла)

точка

ось координат

ордината

Контрольные вопросы

1. Что такое градус?
2. Что такое радиан?
3. Какая окружность называется тригонометрической?
4. Что такое синус, косинус, тангенс, котангенс угла?
5. Какие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента вы знаете?

§ 2. Графики и свойства тригонометрических функций

2.1. Функция $y = \sin x$

Построим график функции $y = \sin x$ и рассмотрим ее свойства. Для построения графика будем использовать тригонометрическую окружность. График функции $y = \sin x$ называется **синусоидой** (рис. 13).

Множество значений переменной *x*, где функция определена – это **область определения функции** *y=f(x)*, обозначают $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$. Множество значений функции *y*, которые принимает функция – это **множество значений функции** *y=f(x)*, обозначают $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

Функция четная, если выполняется равенство для любых *x* из области определения функции: $f(-x) = f(x)$.

Функция нечетная, если выполняется равенство для любых *x* из области определения функции: *f(-x) = -f(x)*.

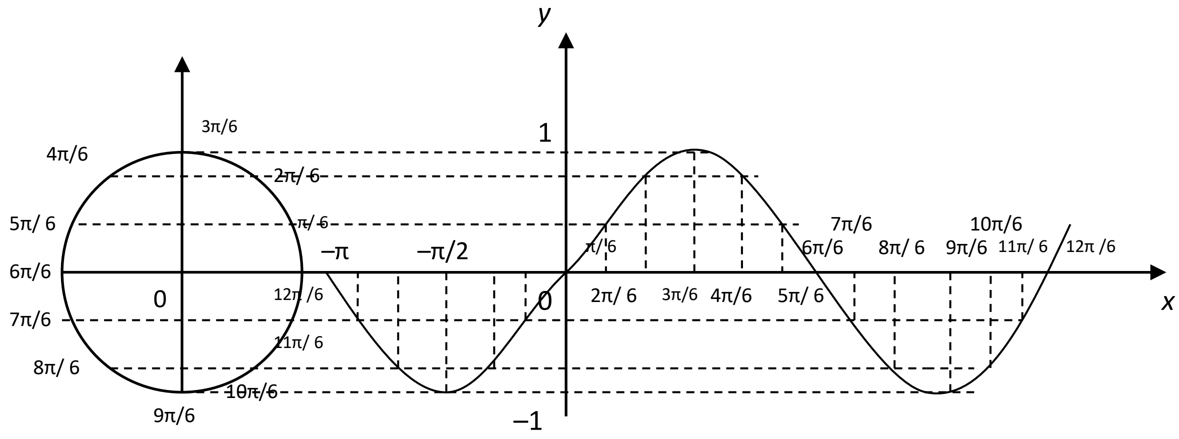

Рис. 13

Свойства функции $y = \sin x$:

1. $D(\sin x) = R$. $E(\sin x) = [-1;1]$, т. е. $|\sin x| \le 1$.
2. Корни функции: $\sin x = 0$ при $x = k\pi,\ k \in Z$.
3. Интервалы возрастания и убывания:

   функция $y = \sin x$ возрастает при $x \in \left]-\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi\right[, k \in Z$;

   функция $y = \sin x$ убывает при $x \in \left]\pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi\right[, k \in Z$.

4. Функция $y = \sin x$ нечетная, т. к. $\sin(-x) = -\sin x$.
5. Функция $y = \sin x$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$, т. к. $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$.
6. Интервалы знакопостоянства функции $y = \sin x$:

   $y > 0$, если $x \in \left]2k\pi; \pi + 2k\pi\right[, k \in Z$;

   $y < 0$, если $x \in \left]-\pi + 2k\pi; 2k\pi\right[, k \in Z$.

2.2. Функция *y* = cos *x*

Построим график функции $y = \cos x$ и рассмотрим ее свойства. Для построения графика будем использовать тригонометрическую окружность. График функции $y = \cos x$ называется **косинусоидой** (рис. 14).

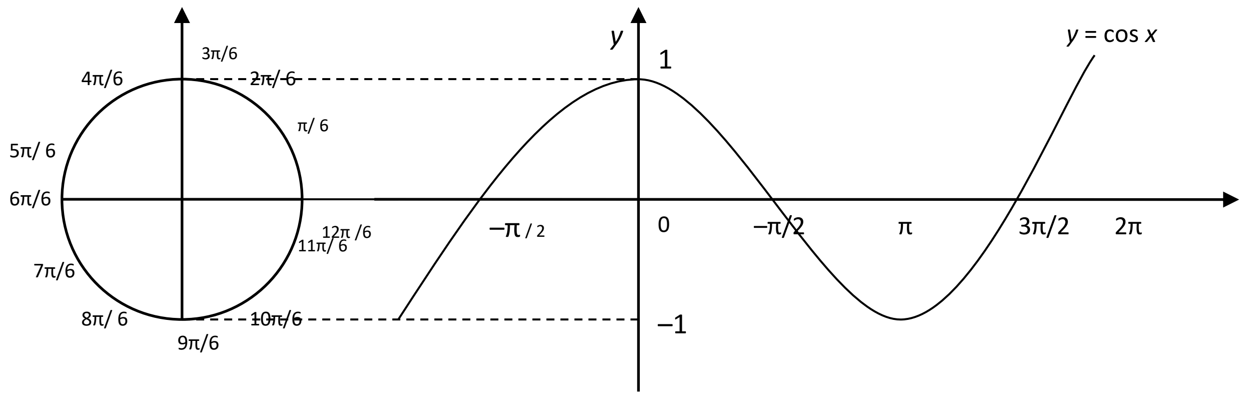

Рис. 14

Свойства функции $y = \cos x$:

1. $D(\cos x) = R$. $E(\cos x) = [-1;1]$, т.е. $|\cos x| \le 1$.
2. Корни функции: $\cos x = 0$ при $x \in \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.
3. Интервалы возрастания и убывания:

   функция $y = \cos x$ возрастает при $x \in]\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[, k \in Z$;

   функция $y = \cos x$ убывает при $x \in]2k\pi; \pi + 2k\pi[, k \in Z$.
4. Функция $y = \cos x$ четная, т. к. $\cos(-x) = \cos(x)$.
5. Функция $y = \cos x$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$, т. к. $\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$.
6. Интервалы знакопостоянства функции $y = \cos x$:

   $y > 0$, если $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in Z$;

   $y < 0$, если $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in Z$.

2.3. Функция $y = \text{tg}\, x$

Построим график функции $y = \text{tg}x$ и рассмотрим ее свойства. Для построения графика будем использовать тригонометрическую окружность. График функции $y = \text{tg}x$ называется **тангенсоидой** (рис. 15).

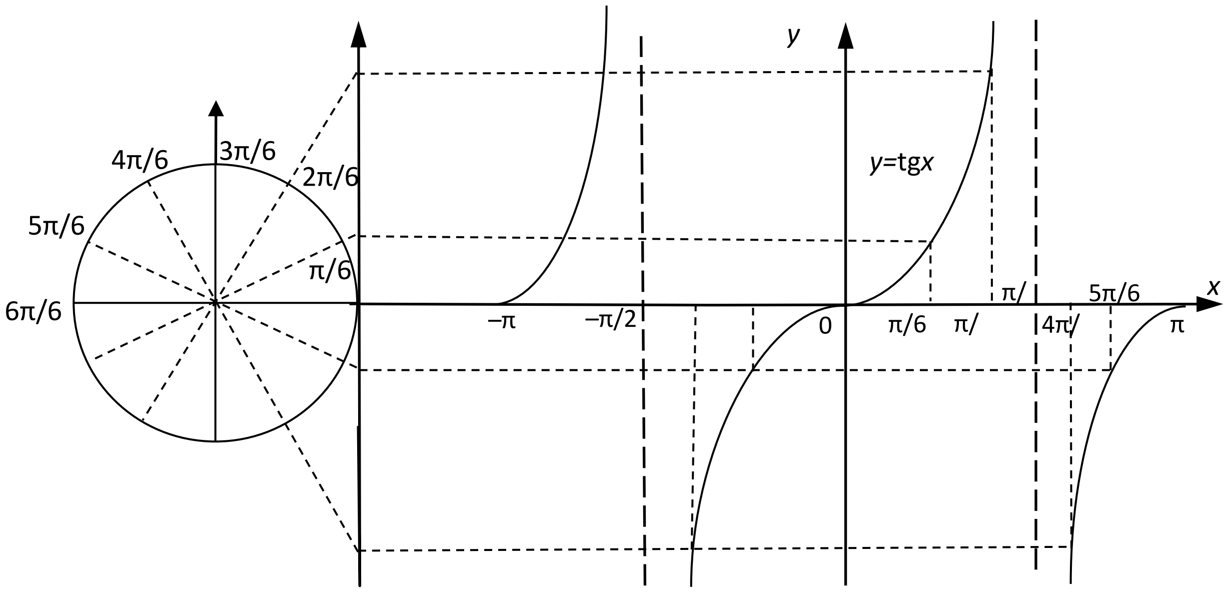

Рис. 15

Свойства функции $y = \text{tg}x$:

1. $D(\text{tg}x) = R \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in Z\}$. $E(\text{tg}x) = R$.
2. Корни функции: $\text{tg}x = 0$ при $x = k\pi, k \in Z$.
3. Функция $y = \text{tg}x$ возрастает при $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in Z$.
4. Функция $y = \text{tg}x$ нечетная, т. к. $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$.
5. Функция $y = \text{tg}x$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. к. $\text{tg}(x - \pi) = \text{tg}x = \text{tg}(x + \pi)$.
6. Интервалы знакопостоянства функции $y = \text{tg}x$:

$y > 0$, если $x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in Z$;

$y < 0$ если $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right[, k \in Z$.

2.4. Функция *y* =ctg *x*

Построим график функции $y = \mathrm{ctg}x$ и рассмотрим ее свойства. Для построения графика будем использовать тригонометрическую окружность. График функции $y = \mathrm{ctg}x$ называется **котангенсоидой** (рис. 16).

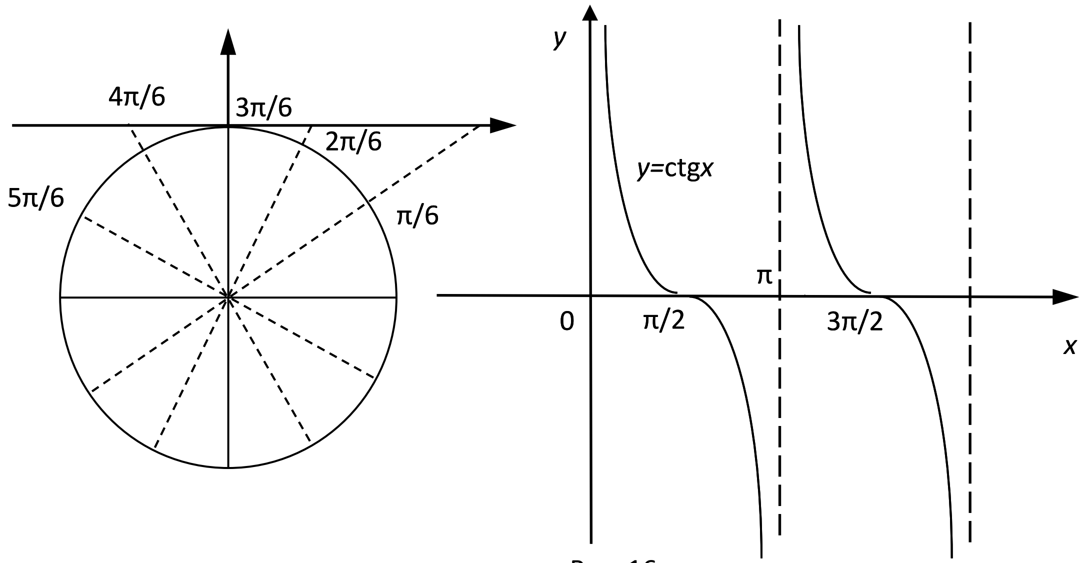

Рис. 16

Свойства функции $y = \mathrm{ctg}x$:

1. $D(\mathrm{ctg}x) = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$. $E(\mathrm{ctg}x) = R$.
2. Корни функции: $\mathrm{ctg}x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.
3. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ убывает при $x \in \left]k\pi; \pi + k\pi\right[, k \in Z$.
4. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ нечетная, т. к. $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x)$.
5. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. к. $\mathrm{ctg}(x - \pi) = \mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}(x + \pi)$.
6. Интервалы знакопостоянства функции $y = \mathrm{ctg}x$:

   $y > 0$, если $x \in \left]k\pi; \pi/2 + k\pi\right[, k \in Z$;

   $y < 0$, если $x \in \left]-\pi/2 + k\pi; k\pi\right[, k \in Z$.

Слова и словосочетания

период	косинусоида
периодическая функция	тангенсоида
синусоида	котангенсоида

Контрольные вопросы

1. Какие свойства имеет функция $y = \sin x$?
2. Какие свойства имеет функция $y = \cos x$?
3. Какие свойства имеет функция $y = \mathrm{tg}x$?
4. Какие свойства имеет функция $y = \mathrm{ctg}x$?

§ 3 Теоремы сложения и следствия из них

3.1. Формулы сложения

Формулы сложения – это формулы, которые выражают тригонометрические функции суммы двух углов через значения тригонометрических функций этих углов.

Теорема 1. Для любых значений α и β верны следующие формулы:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta, \tag{15}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть P_α и P_β – точки единичной окружности, которые соответствуют углам α и β (рис. 17). Их координаты $x_\alpha = \cos\alpha$, $y_\alpha = \sin\alpha$, $x_\beta = \cos\beta$, $y_\beta = \sin\beta$.

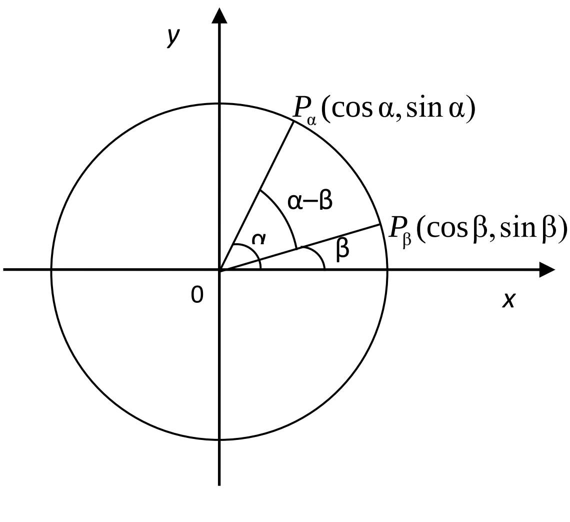

Рис. 17

По определению скалярного произведения векторов получим: $\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

По свойству скалярного произведения:

$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta = = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\beta$.

Из этих двух равенств получаем формулу косинуса разности (15): $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\beta$.

Заменив β на $-\beta$ в формуле (15), найдем: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left[\alpha - (-\beta)\right] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$, используя свойства четности, нечетности функций получим формулу косинуса суммы: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$. Теорема доказана.

Если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то используя формулу (15), можно получить равенства: $\cos\alpha = \sin\beta$ и $\cos\beta = \sin\alpha$. То есть для любого значения α верны формулы дополнительных аргументов:

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha); \; \sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha). \tag{17}$$

Теорема 2. Для любых значений α и β верны следующие формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta, \tag{18}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta. \tag{19}$$

Доказательство. Синус суммы $\alpha + \beta$ равен косинусу дополнительного до $\frac{\pi}{2}$ аргумента: $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$. Следовательно, $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta\right] = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin\beta$, т.е. верна формула синуса суммы (18): $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Заменим в (18) β на $-\beta$: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$, т. е. верна формула синуса разности (19): $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для всех значений α и β, при которых существуют $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ верна следующая формула тангенса суммы:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Если существуют $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$, то $\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$. Разделив числитель и знаменатель правой части на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, получим формулу (20).

Если существуют $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, то, заменив β на $-\beta$ в формуле (20), получим формулу тангенса разности:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}. \tag{21}$$

3.2. Формулы приведения

Формулы приведения выражают тригонометрические функции от аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через функции от аргумента α. Все формулы приведения для косинуса и синуса являются следствиями формул сложения. Для тангенса и котангенса используем их выражение через синус и косинус.

Пример 10. Получить формулы приведения для аргумента $\frac{3\pi}{2}-\alpha$.

Решение. По формуле синуса разности (19): $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ = $=\sin{}^{3\pi}\!/\!_{2}\cdot\cos\alpha-\cos{}^{3\pi}\!/\!_{2}\cdot\sin\alpha$ = $-1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha$. По формуле (15): $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ = $\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\alpha=$ $=0\cdot\cos\alpha+(-1)\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha$.

Для $\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ формулу тангенса разности применять нельзя, т. к. $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$ не существует, поэтому выразим сначала тангенс через синус и косинус:

$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{\sin(3\pi/2-\alpha)}{\cos(3\pi/2-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$. Аналогично действуем и для котангенса:

$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{\cos(3\pi/2-\alpha)}{\sin(3\pi/2-\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\sin(3\pi/2-\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(3\pi/2-\alpha)=-\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(3\pi/2-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(3\pi/2-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$.

Для получения формул приведения можно использовать правило:

- если угол α откладывается от оси абсцисс (для углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$), то название приводимой функции сохраняется;
- если угол α откладывается от оси ординат (для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$), то название приводимой функции меняется на кофункцию (синус на косинус, и наоборот);
- знак перед полученной функцией совпадает со знаком приводимой функции, если считать, что $0<\alpha<\pi/2$

Все формулы приведения даны в таблице 3.

Таблица 3

Углы / функции	I четверть		II четверть		III четверть		IV четверть	
	$2\pi+\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

3.3. Формулы двойного и половинного аргумента

Если в формулах сложения (16), (18), (20) положить $\beta=\alpha$, то получаются формулы двойного аргумента 2α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha ,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha , \qquad (22)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} .$$

Используя формулы двойного аргумента и тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, можно выразить $\cos 2\alpha$ через $\sin\alpha$ или через $\cos\alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Из полученных равенств выводятся формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} , \qquad (23)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} . \qquad (24)$$

Чтобы получить <u>формулы половинного аргумента</u> $\alpha/2$, выразим тригонометрические функции угла $\alpha/2$ через функции угла α.

Положим в формулах (23) и (24) $\alpha = x/2$ или $2\alpha = x$, тогда получим формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} ;$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} ;$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x/2}{\cos x/2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} .$$

Выбор знаков «+» или «–» в формулах половинного аргумента зависит от того, в какой четверти находится угол $x/2$.

Можно получить другие формулы для $\operatorname{tg} x/2$:

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x/2}{\cos x/2}\cdot\frac{\cos x/2}{\cos x/2}=\frac{2\sin x/2\cdot\cos x/2}{2\cos^2 x/2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Все тригонометрические функции выражаются рационально через тангенс половинного аргумента $\operatorname{tg}\alpha/2$. Формулы, которые показывают это выражение, называют <u>универсальной подстановкой</u>.

Пример 11. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha/2$.

Решение. Для того чтобы найти требуемое выражение, используем формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество.

$$\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha/2}}{\dfrac{\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}+\dfrac{\cos^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{\operatorname{tg}^2\alpha/2+1}.$$

$$\cos\alpha=\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2=\frac{\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2}{\sin^2\alpha/2+\cos^2\alpha/2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}{2\operatorname{tg}\alpha/2}.$$

Ответ: $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{\operatorname{tg}^2\alpha/2+1}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}{2\operatorname{tg}\alpha/2}$.

3.4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение

По формулам (18), (19) имеем: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Сложим эти равенства получим: $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$. Следовательно,

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (25)$$

По формулам (15), (16) имеем: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Если сложить эти равенства, то получим: $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Если вычтем эти равенства, то получим: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (26)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]. \qquad (27)$$

Формулы (25), (26), (27) – это <u>формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму</u>.

Пусть $\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{x+y}{2},\\ \beta=\dfrac{x-y}{2}.\end{cases}$ Подставив в (25) значения *x* и *y*, получим:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (28)$$

Заменим в (28) y на $-y$, получим:

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}. \qquad (29)$$

Подставим в (26) значения *x* и *y*:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (30)$$

Подставив (27) значения *x* и *y*, получим: $\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}(\cos y-\cos x)$.

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (31)$$

Получим формулы для $\mathrm{tg}x\pm\mathrm{tg}y$.

$$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}, \qquad (32)$$

$$\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}. \qquad (33)$$

Формулы (28)–(33) называют формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 12. Преобразовать $\sin 3\alpha-\sin 5\alpha$ в произведение.
Решение. Используя формулу (29), получим:

$$\sin 3\alpha-\sin 5\alpha=2\sin\frac{3\alpha-5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha+5\alpha}{2}=2\sin(-\alpha)\cdot\cos 4\alpha=-2\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha.$$

Ответ: $\sin 3\alpha-\sin 5\alpha=-2\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha$

Пример 13. Преобразовать $\cos^2 x\cdot\cos 3x$ в сумму.
Решение. По формуле понижения степени для косинуса имеем равенство $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, тогда получим цепочку равенств: $\cos^2 x\cdot\cos 3x$ =

$$\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 2x\cdot\cos 3x)=\frac{1}{2}[\cos 3x+\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x)]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\cos 3x+\tfrac{1}{4}\cos x+\tfrac{1}{4}\cos 5x.$$

Ответ: $\cos^2 x\cdot\cos 3x=\tfrac{1}{2}\cos 3x+\tfrac{1}{4}\cos x+\tfrac{1}{4}\cos 5x.$

Слова и словосочетания

кофункция	формулы сложения
формулы двойного аргумента	формулы понижения степени
формулы половинного аргумента	универсальная подстановка
формулы дополнительных аргументов	формулы приведения

формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Контрольные вопросы

1. Чему равен косинус суммы и разности двух углов?
2. Чему равен синус суммы и разности двух углов?
3. Чему равен тангенс суммы и разности двух углов?
4. Какие формулы называют формулами приведения?
5. По какому правилу получают формулы приведения?
6. Чему равны синус, косинус, тангенс половинного угла?

§ 4. Обратные тригонометрические функции

Функции, обратные $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}x$, $y=\text{ctg}x$ на соответствующих интервалах, называют обратными тригонометрическими функциями.

4.1. Функция *y* = arcsin *x*

Рассмотрим функцию $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$. На этом отрезке она монотонно возрастает и принимает все значения из $[-1;1]$.

Поэтому функция $y=\sin x$ на $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$ имеет обратную функцию.

Эту функцию обозначают $y=\arcsin x$ (читают: игрек равен арксинус икс).

Отобразим график функции $y=\sin x$ $(-\pi/2 \le x \le \pi/2)$ симметрично относительно прямой $y=x$. В результате получим график обратной функции $y=\arcsin x$ (рис. 18).

Арксинусом числа x, $x\in[-1;1]$, называется угол из отрезка $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$, синус которого равен x.

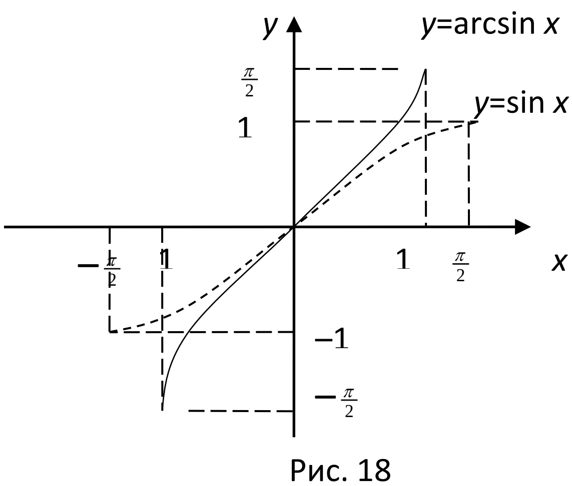

Рис. 18

$$y=\arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\left[-\pi/2;\pi/2\right], \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Свойства функции $y=\arcsin x$:

1. $D(\arcsin x)=\left[-1;+1\right]$.
2. $E(\arcsin x)=\left[-\pi/2;\pi/2\right]$.
3. Корни функции $y=\arcsin x$: $\arcsin x=0$ при $x=0$.
4. Функция $\arcsin x$ на отрезке $\left[-1;1\right]$ возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$.
5. Функция $y=\arcsin x$ – нечетная функция, так как $\arcsin(-x)=-\arcsin x$. *Доказательство.* По определению арксинуса имеем: $-\pi/2\le\arcsin x\le\pi/2$. Так как функция $y=\sin x$ – нечетная, то $\sin(-\arcsin x)=-\sin\arcsin x=-x$. По определению арксинуса имеем: $\sin(\arcsin(-x))=-x$. Итак, $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ имеют одинаковое значение синуса, оба принадлежат отрезку $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$, и поэтому равны, т.е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

4.2. Функция y = arccos x

Рассмотрим функцию $y=\cos x$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$. На этом отрезке функция $y=\cos x$ убывает и принимает все значения из отрезка $\left[-1;1\right]$.

Поэтому функция $y=\cos x$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$ имеет обратную функцию.

Эту функцию обозначают $y=\arccos x$ (игрек равен арккосинус икс).

Отобразим график функции $y=\cos x$, $x\in\left[0;\pi\right]$, симметрично относительно прямой $y=x$, получим график функции $y=\arccos x$ (рис. 19).

Арккосинус числа x, $x\in\left[0;\pi\right]$, – это угол из отрезка $\left[0;\pi\right]$, косинус которого равен x.

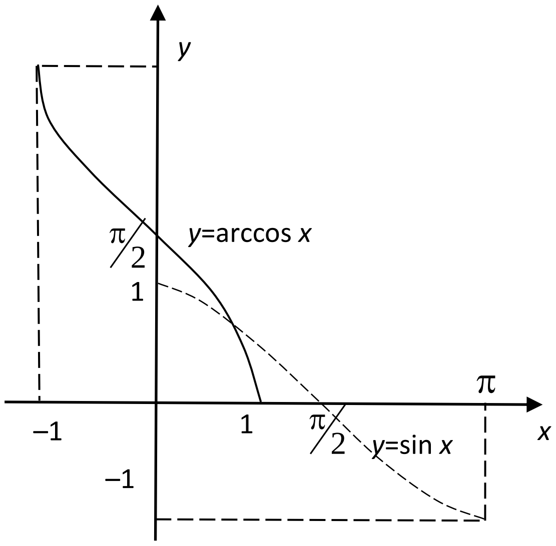

Рис. 19

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0; \pi], \\ \cos y = x. \end{cases}$$

Свойства функции $y = \arccos x$:

1. $D(\arccos x) = [-1;1]$.
2. $E(\arccos x) = [0;\pi]$.
3. Корни функции $y = \arccos x$: $\arccos x = 0$ при $x = 1$.
4. Функция $y = \arccos x$ на отрезке $[-1;1]$ убывает от π до 0.
5. Свойств четности и нечетности функция $y = \arccos x$ не имеет.

Верно равенство: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Пример 14. Упростить выражение $\cos(\arcsin x)$, при $-1 \le x \le 1$.

Решение. Пусть $y = \arcsin x$, тогда $y = \sin x$ и $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, а $\sin y = \sin(\arcsin x) = x$. Чтобы найти $\cos y$, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. Но $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. На этом отрезке косинус принимает только положительные значения.

Таким образом, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, где $-1 \le x \le 1$.

Ответ: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, где $-1 \le x \le 1$.

4.3. Функция *y* = arctg *x*

Рассмотрим функцию $y = \mathrm{tg} x$ на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. На этом интервале функция $y = \mathrm{tg} x$ возрастает и принимает все значения из R. Поэтому функция $y = \mathrm{tg} x$ на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ имеет обратную функцию. Эту обратную функцию обозначают $y = \mathrm{arctg}\, x$ (читают: игрек равен арктангенс икс).

Отобразим график функции $y = \text{tg}x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, симметрично относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \text{arctg}\, x$ (рис. 20).

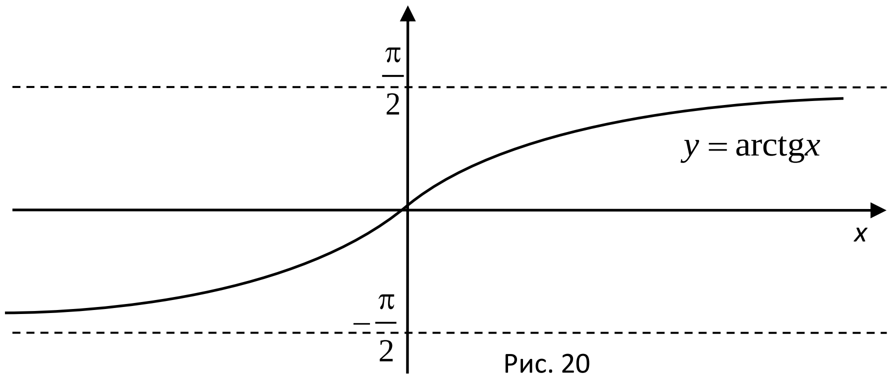

Рис. 20

Арктангенс числа x $(x \in R)$ – это угол из интервала $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, тангенс которого равен x.

$$y = \text{arctg}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \\ \text{tg}\, y = x. \end{cases}$$

Свойства функции $y = \text{arctg}\, x$:

1. $D(\text{arctg}x) = R$.
2. $E(\text{arctg}x) = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
3. Корни функции $y = \text{arctg}\, x$: $arctg\, x = 0$ при $x = 0$
4. Функция $y = \text{arctg}\, x$ возрастает на всей области определения, то есть от $-\pi/2$ до $\pi/2$.
5. Функция $y = \text{arctg}\, x$ – нечетная, так как $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}\, x$.

4.4. Функция *y* = arcctg *x*

Рассмотрим функцию $y = \text{ctg}x$ на интервале $]0;\pi[$. На этом интервале функция $y = \text{ctg}x$ убывает и принимает все значения из R. Поэтому функция

$y = \mathrm{ctg}x$ на интервале $]0;\pi[$ имеет обратную функцию. Эту обратную функцию обозначают $y = \mathrm{arcctg}\, x$ (читают: игрек равен арккотангенс икс).

Отобразим график функции $y = \mathrm{ctg}x$ ($x \in]0;\pi[$) симметрично относите6льно прямой $y = x$, получим график функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ (рис. 21).

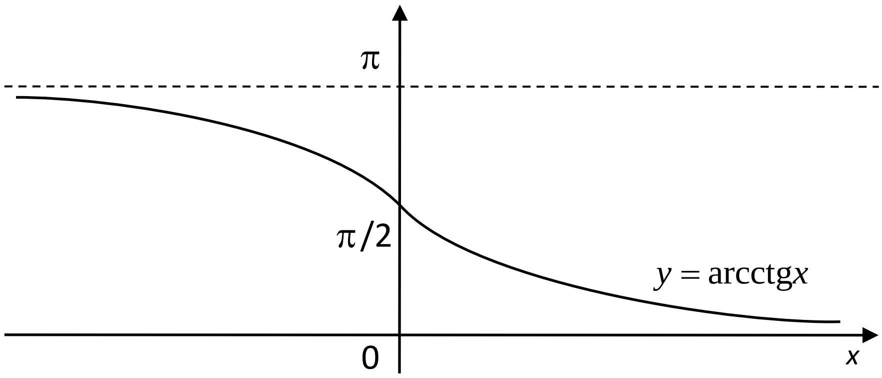

Рис. 21

Арккотангенс числа x ($x \in R$) – это угол из интервала $]0;\pi[$, котангенс которого равен x.

$$y = \mathrm{arcctg}x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0;\pi[, \\ \mathrm{ctg}y = x. \end{cases}$$

Свойства функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$:

1. $D(\mathrm{arcctg}x) = R$.
2. $E(\mathrm{arcctg}x) =]0;\pi[$.
3. Корней нет.
4. Функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$ на множестве R убывает от π до 0.
5. Свойств четности и нечетности не имеет. Имеет место равенство: $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x$ (докажите самостоятельно).

Слова и словосочетания

обратные тригонометрические функции арксинус арккосинус арктангенс

арккотангенс

Контрольные вопросы

1. Что такое арксинус числа x $(x \in [-1;1])$?
2. Как строят график функции $y = \arcsin x$, и какие она имеет свойства?
3. Что такое арккосинус числа x $(x \in [-1;1])$?
4. Как строят график функции $y = \arccos x$, и какие она имеет свойства?
5. Что такое арктангенс числа x $(x \in R)$?
6. Что такое арккотангенс числа x $(x \in R)$?
7. Как строят графики функций $y = \mathrm{arctg}x$ и $y = \mathrm{arcctg}x$?
8. Какие свойства имеют функции $y = \mathrm{arctg}x$ и $y = \mathrm{arcctg}x$?

§5. Тригонометрические уравнения и неравенства

Уравнения называются **тригонометрическими**, если переменная величина находится в уравнении под знаком тригонометрической функции. Неравенства называются **тригонометрическими**, если переменная величина находится в неравенстве под знаком тригонометрической функции.

5.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$ называются **простейшими.** Рассмотрим решения этих уравнений в общем виде.

***Решение уравнения* sin *x* = *a*.** При $|a| \le 1$ решим уравнение графически, используя тригонометрическую окружность (рис. 22). Так как ось абсцисс называется осью косинусов, ось ординат – синусов, то будем их так называть уже и в системе координат. Построим прямую $y = a$, и найдем точки пересечения прямой и числовой окружности на промежутке $\left[-\pi/2; 3\pi/2\right]$, длина которого равна 2π.

Корень x_1, который принадлежит отрезку $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$, есть $\arcsin a$. Корень x_2, который принадлежит отрезку $\left[\pi/2;3\pi/2\right]$, можно выразить через x_1, так $x_2=\pi-x_1$ или $x_2=\pi-\arcsin a$. Множество всех корней уравнения $\sin x=a$ состоит из двух подмножеств, элементы которых представимы следующим образом:
$$x_1=\arcsin a+2k\pi,\ k\in Z,$$
$$x_2=\pi-\arcsin\alpha+2k\pi=-\arcsin\alpha+(2k+1)\pi,\ k\in Z.$$

Объединим эти два подмножества, и получим множество всех решений уравнения $\sin x=a$: $X=(-1)^n\cdot\arcsin a+n\pi,\ n\in Z$.

Частные случаи:

1) при $a=0$ уравнение $\sin x=0$ имеет решение: $X=k\pi,\ k\in Z$;

2) при $a=1$ уравнение $\sin x=1$ имеет решение: $X=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$;

3) при $a=-1$ уравнение $\sin x=-1$ имеет решение: $X=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$;

4) при $|a|>1$ уравнение не имеет корней.

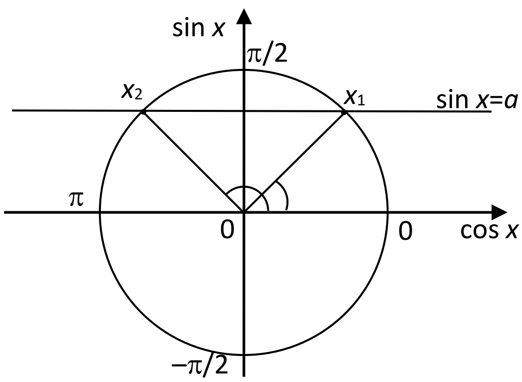

Рис. 22

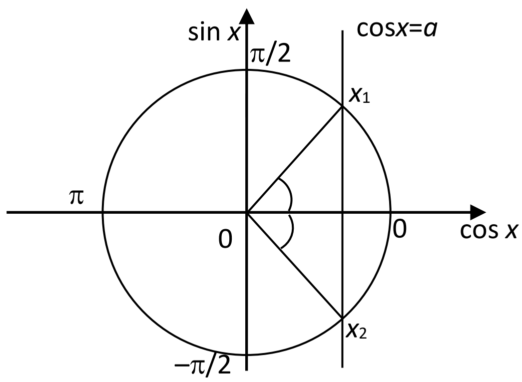

Рис. 23

***Решение уравнения* cos x = a.** Построим прямую $x=a$, и найдем точки пересечения с окружностью на промежутке $[-\pi;\pi]$, длина которого 2π.

Корень x_1, который принадлежит промежутку $[0;\pi]$, есть $\arccos a$. Корень x_2, который принадлежит промежутку $\left[-\pi/2,0\right]$, можно выразить через x_1 так:

$x_2 = -x_1$ или $x_2 = -\arccos a$ (рис. 23). Получим множество всех корней уравнения $\cos x = a$: $X = \pm\arccos a + 2k\pi,\ k \in Z$.

Частные случаи:

1) при $a = 0$ уравнение $\cos x = 0$ имеет решение: $X = \pi/2 + k\pi,\ k \in Z$;

2) при $a = 1$ уравнение $\cos x = 1$ имеет решение: $X = 2k\pi,\ k \in Z$;

3) при $a = -1$ уравнение $\cos x = -1$ имеем решение: $X = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$ или $X = (2k+1)\pi,\ k \in Z$;

4) при $|a| > 1$ уравнение не имеет корней.

***Решение уравнения* tg x = a.** Уравнение $\mathrm{tg} x = a$ имеет корни при всех действительных значениях a, $a \in R$, решим его графически, используя тригонометрическую окружность (рис. 24). Отложим на оси тангенсов точку *a*, проведем прямую через нее и начало координат, найдем точки пересечения этой прямой и числовой окружности на промежутке $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$.

Корень x, который принадлежит этому промежутку, есть $\mathrm{arctg}\, a$. Получим множество всех корней уравнения: $X = \mathrm{arctg}\, a + k\pi,\ k \in Z$.

При $a = 0$ уравнение $\mathrm{tg} x = 0$ имеет решение: $x = k\pi,\ k \in Z$.

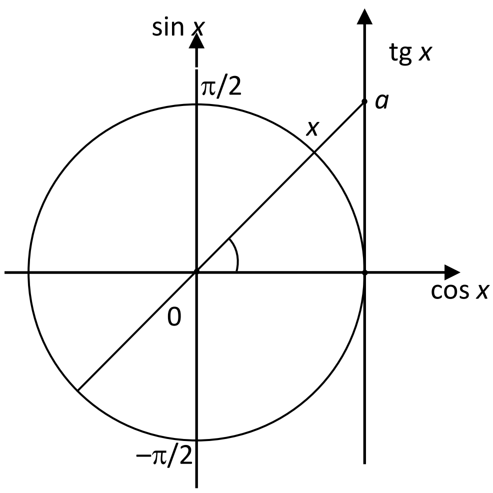

Рис. 24

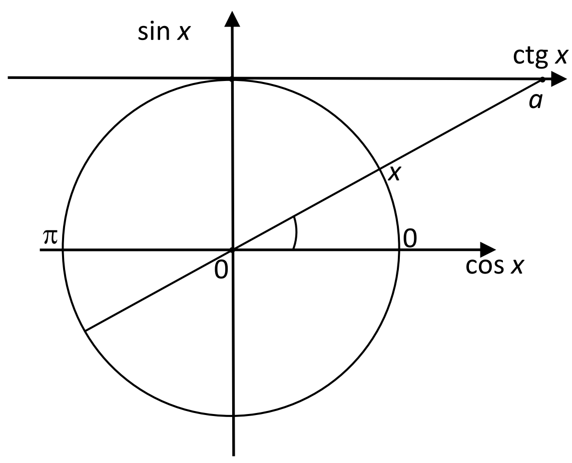

Рис. 25

***Решение уравнения* ctg x = a.** Уравнение $\mathrm{ctg} x = a$ имеет корни при всех действительных значениях a, $a \in R$. Отложим на оси котангенсов точку *a*, проведем прямую через нее и начало координат, найдем точки пересечения этой прямой и числовой окружности на промежутке $]0;\pi[$ (рис. 25).

Корень x, который принадлежит этому промежутку, есть $\operatorname{arcctg} a$. Получим множество всех корней уравнения: $X = \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in Z$.

При $a = 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ имеет решение: $x = \pi/2 + k\pi,\ k \in Z$.

Если левая часть уравнения имеет более сложный вид, то уравнение приводится к простейшему с помощью тождественных преобразований.

Пример 15. Решить уравнение: $\sin x \cdot \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x$.
Решение. Преобразуем произведения $\sin x \cdot \cos 5x$ и $\sin 9x \cdot \cos 3x$ в сумму. $\sin 6x - \sin 4x = \sin 6x + \sin 12x \Rightarrow \sin 12x + \sin 4x = 0$. Преобразуем сумму синусов в произведение: $2\sin 8x \cdot \cos 4x = 0$. Уравнение распадается на два простейших: $\sin 8x = 0$ или $\cos 4x = 0 \Rightarrow 8x = k\pi,\ k \in Z$, или $4x = \pi/2 + n\pi,\ n \in Z$.

Ответ: $x_1 = k\dfrac{\pi}{8}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{8} + n\dfrac{\pi}{4},\ n,\ k \in Z$.

5.2. Простейшие тригонометрические неравенства

Неравенства вида $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (или с другими знаками неравенства) называются **простейшими.** Рассмотрим решение таких неравенств на примерах. Если левая часть неравенства имеет более сложный вид, то неравенство приводится к простейшему с помощью тождественных преобразований.

Пример 16. Решить неравенство: $\sin x > \dfrac{1}{2}$.

Решение. Найдем решение неравенства $\sin x > \dfrac{1}{2}$ на интервале $]0;\ \pi[$. По рис. 26 видно, что $\sin x > 1/2$, если $x \in \left]\pi/6; 5\pi/6\right[$. По свойству периодичности при $x \in R$ решением являются интервалы $\left]\pi/6 + 2k\pi; 5\pi/6 + 2k\pi\right[,\ k \in Z$.

Ответ: $\left]\pi/6 + 2k\pi; 5\pi/6 + 2k\pi\right[,\ k \in Z$.

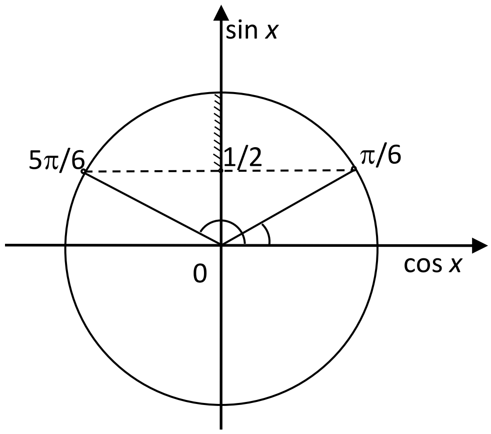

Рис. 26

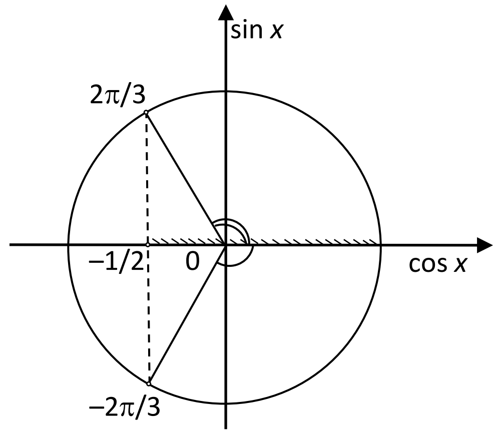

Рис. 27

Пример 17. Решить неравенство $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Решение. Решим неравенство графически на тригонометрической окружности. Найдем решение неравенства на интервале $]-\pi;\pi[$. Из рис. 27 видно, что $\cos x > -\frac{1}{2}$ при $x \in \left]-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$. По свойству периодичности функции $\cos x$ при $x \in R$ решением неравенства являются интервалы $\left]-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[$, $k \in Z$.

Ответ. $\left]-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[$, $k \in Z$.

Пример 18. Решить неравенство $\mathrm{tg}x \geq 1$.

Решение. Решение неравенства в интервале $\left]-\pi/2;\pi/2\right[$ показано на рис. 28, его можно записать в виде $x \in \left[\pi/4;\pi/2\right[$. По свойству периодичности решением неравенства являются интервалы $\left[\pi/4+k\pi;\pi/2+k\pi\right[$, $k \in Z$.

Ответ: $\left[\pi/4+k\pi;\pi/2+k\pi\right[$, $k \in Z$.

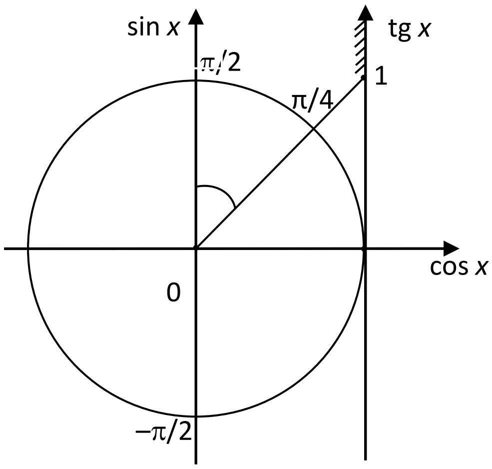

Рис. 28

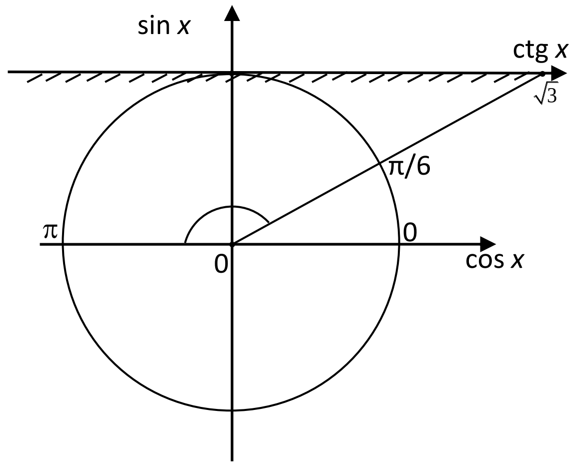

Рис. 29

Пример 19. Решить неравенство $\mathrm{ctg}x \le \sqrt{3}$.

Решение. Решение неравенства в $]0;\pi[$ (рис. 29) можно записать в виде $x \in \left[\pi/6;\pi\right[$. По свойству периодичности решение: $\left[\pi/6 + k\pi;\pi + k\pi\right[$, $k \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi;\pi + k\pi\right[$, $k \in Z$.

Слова и словосочетания

тригонометрическое уравнение

простейшее тригонометрическое уравнение

линейное тригонометрическое уравнение

тригонометрическое неравенство

Контрольные вопросы

1. Какие тригонометрические уравнения называют простейшими?
2. Какое решение имеют уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$?
3. Какое решение имеют уравнения $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$?
4. Что такое тригонометрическое неравенство?

Морозова Анжелика Владимировна
Милованович Екатерина Воиславовна
Базаг Мохамед

Основы тригонометрии

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А