Г.П. Мирошниченко, И.К. Мешковский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Санкт-Петербург
2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Г.П. Мирошниченко, И.К. Мешковский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.01, 16.04.01
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования магистратуры

Санкт-Петербург
2022

Мирошниченко Г.П., Мешковский И.К., МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ– СПб: Университет ИТМО, 2022. – 121 с.

Рецензент(ы):

Попов Игорь Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ведущий профессор") научно-образовательного центра математики, Университета ИТМО.

В пособии дано краткое введение в теорию неравновесных термодинамических процессов, что позволяет осмыслить место, занимаемое процессами диффузии и теплопроводности среди прочих процессов линейной неравновесной термодинамики. Подробно обсуждаются правила постановки граничных задач для уравнений в частных производных, смысл граничных условий. Даются основы теплопередачи на основе метода регулярных режимов. Обсуждаются основы газогидродинамики, уравнения Эйлера, Бернулли. Выводятся волновые уравнения в различных областях физики. Обсуждаются методы решений волновых уравнений. Достаточное внимание уделено стационарным прикладным задачам. Пособие снабжено справочным материалом, что дает возможность магистрантам решать прикладные задачи, сформулированные в конце каждого раздела. Учебное пособие предназначено для студентов Университета ИТМО по направлению подготовки 16.04.01 «Техническая физика», 12.04.01 «Приборостроение» и является методическим обеспечением курса «Основные уравнения математической физики».

Университет ИТМО – национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию – ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. – лидер Проекта 5–100.

Содержание

Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов Университета ИТМО по направлению подготовки 16.04.01 «Техническая физика», 12.04.01 «Приборостроение» и является методическим обеспечением курса «Основные уравнения математической физики». Пособие предназначено в качестве вспомогательного материала для проведения контактной (лекционных и практических занятий) и самостоятельной работы студентов. Конспект предназначен для предварительной подготовки к лекции по соответствующей теме, а также для самопроверки и более глубокого изучения отдельных частей курса. В конце каждой лекции приведены список вопросов для самопроверки и список задач для самостоятельного решения. Предлагаемый курс рассчитан на студентов, изучавших такие разделы высшей математики, как линейная алгебра, математический анализ, методы интегрирования, числовые ряды и ряды Фурье, дифференциальные уравнения, желающих изучить и моделировать процессы диффузии и теплопроводности, решать волновые уравнения, рассчитывать процессы теплопередачи, освоить элементы газогидродинамики. Курс состоит из краткого введения в теорию неравновесных термодинамических процессов, что позволяет осмыслить место, занимаемое процессами диффузии и теплопроводности среди прочих процессов линейной неравновесной термодинамики. Дается краткое введение в феноменологический метод Онсагера, и на этой основе получены уравнения диффузии и теплопроводности. Подробно обсуждаются правила постановки граничных задач для параболического и гиперболического уравнений в частных производных, смысл граничных условий, проблему существования и единственности решений. Достаточное место выделено для метода Фурье решения таких уравнений. Здесь подробно обсуждается проблема сходимости рядов Фурье, описывающих формальные решения граничных задач. Как правило, задачи диффузии и теплопроводности решаются численными методами, основные из которых обсуждаются. Даются основы теплопередачи на основе метода регулярных режимов. Обсуждаются основы газогидродинамики, уравнения Эйлера, Бернулли. Выводятся волновые уравнения в различных областях физики. Обсуждаются методы решений волновых уравнений. Достаточное внимание уделено стационарным прикладным задачам. Пособие снабжено справочным материалом, что дает возможность магистрантам решать прикладные задачи, сформулированные в конце каждого раздела. Изучившие данный курс приобретают компетенции, позволяющие исследователям грамотно формулировать задачу математической физики, выбирать адекватный метод решения, анализировать проблему устойчивости и сходимости выбранного численного метода. Каждая лекция сопровождается практическими задачами.

1. Вывод системы уравнений теплопроводности и диффузии из законов термодинамики

Частицы каждого элемента объема твердого тела, жидкости или газа находятся в состоянии непрерывного движения. С точки зрения классической механики фазовое пространство каждой точечной бесструктурной частицы определяется шестью переменными – тремя проекциями радиуса – вектора и тремя проекциями импульса. Ясно, что управлять и предсказывать поведение даже одного кубического сантиметра вещества, содержащего $\approx 10^{24}$ частиц, невозможно. Оказывается, для многих практических целей столь детальная информация о состоянии частиц не требуется. Управлять и контролировать поведение огромного коллектива частиц возможно, если правильно выбрать усредненные термодинамические параметры. Термодинамическое (усредненное по микродвижениям) состояние системы частиц задается точкой в термодинамическом фазовом пространстве, содержащем несколько (небольшое число) термодинамических переменных. Как показывает опыт, изолированный от внешней среды коллектив частиц с течением времени приходит в состояние термодинамического равновесия. В этом наблюдении заключается так называемое **нулевое начало термодинамики**. В состоянии статистического равновесия макроскопические термодинамические параметры хорошо определены, слабо флуктуируют, в системе отсутствуют потоки любого типа.

В термодинамике важную роль играют так называемые термодинамические квазистатические обратимые процессы. Они определяются как бесконечно медленные процессы, состоящие из бесконечной последовательности равновесных состояний. В термодинамическом фазовом пространстве состояние коллектива задается фазовой траекторией, так как фазовые параметры системы могут зависеть от времени.

1.1. Первое начало термодинамики – закон сохранения и превращения энергии

Квазистатические процессы подчиняются первому закону термодинамики – закону сохранения и превращения энергии. Термодинамическая система в общем случае взаимодействует с внешней средой. Если система не обменивается с внешней средой ни внутренней энергией, ни веществом, то такая система называется изолированной. В противном случае это открытая система. Закрытая система не может обмениваться с окружением веществом, но может обмениваться энергией. Адиабатно изолированная система не обменивается с окружением теплотой (и веществом), то есть состояние такой системы изменяется только путем изменения внешних (механических) параметров. При отсутствии адиабатической изоляции изменение внутренней энергии dU происходит за счет макроскопической работы δW и теплообмена δQ. Закон сохранения записывается в виде

$$\delta Q = dU + \delta W .$$

Здесь работа

$$\delta W = \sum_k A_k \cdot da_k ,$$

совершаемая системой в квазистатическом процессе, определяется через внешние параметры da_k, и сопряженные силы A_k. Эта формула справедлива для любых процессов при соответствующем определении внешних параметров и сил. Этот закон утверждает, что для открытой системы внутренняя энергия U (относительно начала отсчета) является функцией от точки термодинамического фазового пространства и ее полный дифференциал определяется соотношением

$$dU = \delta Q - \delta W + \sum_{j=1} \tilde{\mu}_j \cdot dN_j . \qquad (1)$$

Здесь dN_j - изменение числа частиц сорта j в системе, $\tilde{\mu}_j$ - химический потенциал частиц сорта j.

1.2. Второе начало термодинамики – существование энтропии

Важнейший закон, которому подчиняются квазистатические процессы, это ***второе начало термодинамики***. Рудольф Юлиус Клаузиус сформулировал второе начало: “Для любой равновесной или квазиравновесной, участвующей в квазистатическом процессе термодинамической системы существует однозначная функция термодинамического состояния. Это энтропия S, значение которой (относительно начала отсчета) однозначно определяется точкой в термодинамическом фазовом пространстве. Энтропия – мера необратимости процессов в изолированной системе”. Второе начало термодинамики устанавливает существование энтропии у всякой равновесной системы и ее неубывание при любых процессах в изолированных и адиабатно изолированных системах.

Внутренняя энергия системы есть функция от энтропии и внешних параметров, например, объема V. Таким образом, если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то производная энтропии по энергии для всех ее частей одинакова и постоянна. Величину, обратную производной энтропии тела S по его энергии U, называют абсолютной температурой T:

$$\left.\frac{dS}{dU}\right|_V = \frac{1}{T}.$$

Температуры тел, находящихся в равновесии друг с другом, следовательно, одинаковы: $T_1 = T_2$. Изменение энергии тела (в единицу времени) можно написать в виде

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}.$$

Так как $U = U\left(S, V\right)$, то

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dS}\frac{dS}{dt} + \frac{dU}{dV}\frac{dV}{dt} = T\frac{dS}{dt} - P\frac{dV}{dt}.$$

Из закона сохранения энергии получаем (здесь P - давление в системе):

$$\frac{\delta Q}{dt} = T\frac{dS}{dt}, \qquad \frac{\delta W}{dt} = P\frac{dV}{dt}.$$

Дифференциал энтропии в квазистационарном процессе связан с переданной теплотой по формуле

$$dS = \frac{1}{T}\cdot\delta Q. \tag{2}$$

Эти два важнейших закона позволяют рассчитать все остальные термодинамические характеристики заданной уравнениями состояния системы. Объединим эти законы, получаем основное уравнение равновесной термодинамики Гиббса

$$TdS = dU + \sum_k A_k \cdot da_k - \sum_{j=1} \tilde{\mu}_j \cdot dN_j. \tag{3}$$

1.3. Начала термодинамики для неравновесных процессов

Определяют два типа процессов – обратимые и необратимые. Процесс перехода системы из одного состояния в другое называется обратимым, если возвращение системы в исходное состояние можно осуществить без каких – либо изменений в окружающих телах (например, квазистатический процесс). В противном случае процесс необратим. Приведем примеры необратимых процессов. 1. Процесс теплопроводности при конечной разности температур необратим, так как обратный процесс связан с отнятием некоторого количества тепла и превращении отнятого тепла в работу. 2. Процесс диффузии необратим. Для обратного процесса надо сжимать диффундирующие газы, а для компенсации нагрева надо отнимать теплоту. Второе начало для необратимых процессов можно сформулировать так: для адиабатно замкнутой системы при неравновесном процессе энтропия возрастает

$dS > 0$. Основное неравенство (уравнение Гиббса) в этом случае имеет вид

$$T \cdot dS \geq dU + \sum_k A_k \cdot da_k - \sum_{j=1} \tilde{\mu}_j \cdot dN_j .$$

При адиабатном неравновесном процессе имеем $dS > 0$, а при адиабатном равновесном процессе $dS = 0$. Это возрастание есть второй закон для неравновесных адиабатных процессов. Если в системе существуют градиенты температуры или химического потенциала, то в системе имеют место необратимые потоки переноса массы, энергии. При необратимых процессах энтропия адиабатически изолированных систем увеличивается. Таким образом, всегда в адиабатически изолированных системах при ΔQ = 0 имеем $\Delta S \geq 0$. Знак равенства здесь относится к квазистатическому обратимому процессу. В силу аксиомы о существовании термодинамического равновесия, энтропия адиабатически изолированной системы стремится к максимальному значению $S_{\max}$, равному энтропии равновесного состояния.

1.4. Локально равновесная термодинамическая система

Теория неравновесных процессов основана на понятиях локального равновесия и медленных процессах. Всякое макроскопическое тело можно разделить на макроскопически малые части, то есть такие части, которые, будучи малы с макроскопической точки зрения, содержат еще достаточно много частиц. Эти части, взаимодействуя с окружающими частями среды только через поверхность, являются почти изолированными. Термодинамическое равновесие устанавливается раньше всего в такой малой части тела и потому этим малым объемам можно приписать определенные температуры, химические потенциалы и другие термодинамические величины. Таким образом, можно говорить о локальном равновесии в небольших частях тела, когда система в целом еще не находится в равновесии. Значительно медленнее происходят механические процессы во всем теле – передача давления с одного места на другое. Еще медленнее происходит установление полного термодинамического равновесия в большом объеме, а именно, диффузия, теплопроводность и т. д. Эти различия в скоростях и позволяют нам говорить о температурах, химических потенциалах отдельных частей тела, то есть описывать медленные процессы посредством понятий термодинамической теории квазистатических процессов. Термодинамическое равновесие может быть неполным, локальным. Это означает, что термодинамические параметры отдельных областей системы (или же некоторых степеней свободы частиц системы) сформировались и близки к полному равновесию, но, могут зависеть от времени и координат расположения макроскопических подобластей системы частиц.

Локальные свойства системы частиц (жидкости, газа) в точке с координатами $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z$ характеризуются полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, объемной плотностью массы $\rho(\mathbf{r},t) = \dfrac{M}{V}$, концентрацией диффундирующей примеси $c_j(\mathbf{r},t) = \dfrac{N_j}{M} \cdot m_j$. Объемная плотность массы примеси выражается через концентрацию так: $c_j(\mathbf{r},t) \cdot \rho(\mathbf{r},t)$. Локальные термодинамические свойства характеризуются удельной энтропией $s(\mathbf{r},t) = \dfrac{S}{M}$ $\left[эрг \cdot град^{-1} \cdot г^{-1} \right]$ и внутренней удельной энергией $\varepsilon(\mathbf{r},t) = \dfrac{U}{M}$ $\left[эрг \cdot г^{-1} \right]$, отнесенной к единице массы, объемной плотностью энергии $U_V(\mathbf{r},t) = \dfrac{U}{V} = \varepsilon(\mathbf{r},t) \cdot \rho(\mathbf{r},t)$, объемной плотностью энтропии $S_V(\mathbf{r},t) = \dfrac{S}{V} = s(\mathbf{r},t) \cdot \rho(\mathbf{r},t)$, удельным локальным объемом на единицу массы, $v(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{\rho(\mathbf{r},t)}$. Здесь M - полная масса системы, m_j - масса частицы сорта j. В теории локального равновесия полагают, что уравнение Гиббса (3) для квазиравновесной термодинамики остается справедливым и для элемента массы вдоль пути его центра масс. Запишем уравнение Гиббса для неоднородной двухкомпонентной системы в локальных переменных:

$$d\varepsilon = T \cdot ds - P \cdot dv + \tilde{\mu}_1 \cdot dn_1 + \tilde{\mu}_2 \cdot dn_2 .$$

Здесь $n_i = \dfrac{N_i}{M}$ $\left[г^{-1} \right]$ - число частиц сорта i на единицу массы. Выполнено условие сохранения массы $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$. Или $N_1 m_1 + N_2 m_2 = M_1 + M_2 = M$. Введем концентрацию $c = n_1 \cdot m_1 = \dfrac{M_1}{M}$. Получаем закон Гиббса для локального равновесия двухкомпонентной системы:

$$d\varepsilon = T \cdot ds - P \cdot dv + \mu \cdot dc . \tag{4}$$

Здесь $\mu = \dfrac{\tilde{\mu}_1}{m_1} - \dfrac{\tilde{\mu}_2}{m_2}$ - удельный химический потенциал. В общем случае можно показать, что это уравнение (4) справедливо, когда отклонения от равновесия „не слишком велики».

1.5. Законы сохранения и непрерывности локальных величин

Всякая экстенсивная величина B с объемной плотностью $B_V(\mathbf{r},t)=\frac{B}{V}=b(\mathbf{r},t)\cdot\rho(\mathbf{r},t)$ подчиняется закону сохранения (уравнению баланса)

$$\frac{\partial}{\partial t}B_V(\mathbf{r},t)=-div\left(\boldsymbol{I}_{B,F}(\mathbf{r},t)\right)+\sigma_B(\mathbf{r},t). \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{I}_{B,F}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{I}_{conv}(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{I}_B(\mathbf{r},t)$ - плотность полного потока величины B, σ_B - объемная плотность мощности источников величины B. Полный поток разделим на конвективную часть

$$\boldsymbol{I}_{conv}(\mathbf{r},t)=\rho\cdot b\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t).$$

и не конвективную часть $\boldsymbol{I}_B(\mathbf{r},t)$. Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ - поле скоростей среды. Закон сохранения массы (уравнение непрерывности) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)+\mathrm{div}\left(\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)=0. \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{div}(\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{A}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{A}_z$. Вспомним определение полного дифференциала функции многих переменных $B_V(\mathbf{r},t)$:

$$dB_V(\mathbf{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}B_V(\mathbf{r},t)\cdot dt+\left(\nabla B_V(\mathbf{r},t),d\boldsymbol{r}\right).$$

Здесь $\nabla=\mathbf{e}_\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_\mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}$ - оператор градиента, $d\boldsymbol{r}=dx\cdot\mathbf{e}_\mathbf{x}+dy\cdot\mathbf{e}_\mathbf{y}+dz\cdot\mathbf{e}_\mathbf{z}$. Скорость изменения поля $B_V(\mathbf{r},t)$, то есть скорость изменения величины $B_V(\mathbf{r},t)$ «вдоль траектории», равна, в силу формулы для производной сложной функции

$$\frac{dB_V(\mathbf{r},t)}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}B_V(\mathbf{r},t)+\left(\nabla B_V(\mathbf{r},t),\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right). \tag{7}$$

Если величина $B_V(\mathbf{r},t)$ не зависит явно от t (тогда говорят, что «поле $B_V(\mathbf{r})$ стационарное»), то

$$\frac{\partial}{\partial t}B_V(\mathbf{r})=0,$$

и справа в (7) остается только второе слагаемое; таким образом, оно дает скорость изменения $B_V(\mathbf{r},t)$, полученную только за счет перехода точки $M(\mathbf{r})$ вдоль траектории от одних значений $B_V(\mathbf{r},t)$ к другим (например, если B – температура, то за счет перехода из менее нагретой части пространства в более нагретую). Эта скорость изменения $B_V(\mathbf{r},t)$

называется *переносной (конвективной)*. Первое слагаемое в (7) дает скорость изменения поля $B_V(\mathbf{r},t)$ в неподвижной точке, полученную из-за нестационарности поля; эта скорость называется *локальной*. В общем случае действуют оба указанных фактора. Скорость изменения поля вдоль траектории складывается из переносной скорости и локальной скорости. Можно переписать закон сохранения массы для плотности массы $\rho(\mathbf{r},t)$ через полную производную

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)+\mathrm{div}\left(\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)+\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathrm{div}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)+$$

$$+\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t),\nabla\right)\rho(\mathbf{r},t)=\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r},t)+\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathrm{div}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)=0\quad .$$

Рассмотрим несжимаемую жидкость:

$$\frac{d\rho(\mathbf{r},t)}{dt}=0. \tag{8}$$

Отсюда для несжимаемой жидкости следует $\mathrm{div}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)=0$. Для произвольной величины B формула (5) переписывается в полной производной (7) :

$$\rho(\mathbf{r},t)\cdot\frac{d}{dt}b(\mathbf{r},t)=-div\left(\boldsymbol{I}_B(\mathbf{r},t)\right)+\sigma_B(\mathbf{r},t). \tag{9}$$

Центральную роль в неравновесной термодинамике играет так называемое уравнение баланса энтропии. Это уравнение выражает тот факт, что энтропия некоторого элемента объема изменяется со временем по двум причинам. Во-первых, она изменяется за счет наличия некоторого потока энтропии в данный элемент объема; во-вторых, вследствие наличия некоторого источника энтропии, существование которого обусловлено необратимыми явлениями внутри элемента объема. Мы всегда имеем дело именно с положительным источником энтропии, так как энтропия может только возникать, но не уничтожаться. При обратимых процессах источники энтропии отсутствуют. В этом состоит локальная формулировка второго закона термодинамики. Изменение энтропии dS можно записать как сумму двух слагаемых:

$$dS=d_iS+d_eS. \tag{10}$$

где d_eS - энтропия, поступающая в систему от окружающей среды, d_iS - энтропия, возникающая в самой системе. Второй закон термодинамики утверждает, что величина d_iS должна быть равной нулю для обратимых (или равновесных) превращений и положительной для необратимых процессов в системе: $d_iS\geq 0$. Поступающая энтропия d_eS может быть положительной, равной нулю или отрицательной в зависимости от рода взаимодействия системы с окружающей средой. Так, для адиабатически изолированной системы $d_eS=0$, так что $dS\geq 0$. Это — известная форма записи второго закона термодинамики. Для так называемых замкнутых систем, которые могут обмениваться с окружающей средой только тепловой энергией, согласно теореме Карно — Клаузиуса

$$d_e S = \frac{dQ}{T},$$

где dQ - теплота, поступающая в систему от ее окружения, а T - абсолютная температура, при которой эта теплота воспринимается системой. Для замкнутых систем второе начало имеет вид:

$$dS \ge \frac{dQ}{T}.$$

Согласно (10), скорости изменения энтропии в объеме V, занимаемом системой, связаны соотношением:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt}.$$

Введем удельные характеристики и плотности потоков, получаем:

$$\frac{dS(\mathbf{r},t)}{dt} = \int_V \frac{\partial\left(\rho(\mathbf{r},t)\cdot s(\mathbf{r},t)\right)}{\partial t}\cdot dV,$$

$$\frac{d_e S(\mathbf{r},t)}{dt} = -\int_\Sigma \boldsymbol{I}_{S,F}(\mathbf{r},t)\cdot d\Sigma,$$

$$\frac{d_i S(\mathbf{r},t)}{dt} = \int_V \sigma_S(\mathbf{r},t)\cdot dV.$$

Или, используя теорему Остроградского-Гаусса, получаем закон баланса локальной энтропии (по аналогии с общей формулой (5)):

$$\frac{\partial\left(\rho(\mathbf{r},t)\cdot s(\mathbf{r},t)\right)}{\partial t} = -\mathrm{div}\boldsymbol{I}_{S,F}(\mathbf{r},t) + \sigma_S(\mathbf{r},t),$$
$$\sigma_S(\mathbf{r},t) \ge 0,$$
$$\boldsymbol{I}_{S,F}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t) + \rho(\mathbf{r},t)\cdot s(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t).$$

Это локальное математическое выражение второго закона термодинамики. Плотность мощности источников энтропии $\sigma_S(\mathbf{r},t)$ называют производством энтропии. Или в полной производной:

$$\rho(\mathbf{r},t)\frac{ds(\mathbf{r},t)}{dt} = -\mathrm{div}\boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t) + \sigma_S(\mathbf{r},t),$$
$$\sigma_S(\mathbf{r},t) \ge 0. \tag{11}$$

В неравновесной термодинамике одна из главных задач состоит в том, чтобы связать $\sigma_S(\mathbf{r},t)$ с различными необратимыми процессами, протекающими в системе. Хотя полная система и не находится в равновесном состоянии, тем не менее, в ней существуют малые элементы массы, которые находятся в состоянии локального равновесия. Для элемента массы при движении вдоль пути его центра масс локальная удельная энтропия $s(\mathbf{r},t)$ является той же самой функцией энергии, объема, концентрации, что и в состоянии полного равновесия (4). Необратимыми мы будем называть процессы, сопровождающиеся производством энтропии в системе, то есть ее возникновением, а не перераспределением, например, диффузию, вязкость, теплопроводность, электропроводность в нормальных металлах. Необратимые процессы называют также диссипативными. Для определения нестационарных процессов (теплопроводность, диффузия) необходимо определить закон сохранения энтропии, то есть определить $\boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t)$ и $\sigma_S(\mathbf{r},t)$.

1.6. Феноменологическое дополнение законов гидродинамики и термодинамики

Свойства неравновесных необратимых процессов можно характеризовать локальными значениями термодинамических параметров. Для получения замкнутых уравнений для локальных термодинамических параметров для слабо неравновесных процессов используют феноменологический метод. Для этой цели для замыкания уравнений используют выведенные из эксперимента законы, такие, как закон теплопроводности Фурье (J.Fourier, 1822), закон диффузии Фика (A. Fick, 1855), закон Ома (G.Ohm, 1826) для электрической проводимости и другие законы. Основной закон неравновесной термодинамики – закон баланса локальной удельной энтропии $s(\mathbf{r},t)$, получают с помощью уравнения Гиббса (4), строго говоря, верного для квазиравновесных процессов:

$$T(\mathbf{r},t)\frac{d}{dt}s(\mathbf{r},t)=\frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{r},t)-\mu(\mathbf{r},t)\cdot\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)+P(\mathbf{r},t)\cdot\frac{d}{dt}v(\mathbf{r},t). \tag{12}$$

Предполагают, что это соотношение, определяющее полную производную для локальной удельной энтропии, остается справедливым и для слабо неравновесных процессов. В правую часть этого соотношения следует добавить полные производные локальных величин $\frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{r},t)$, $\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)$, $\frac{d}{dt}v(\mathbf{r},t)$, полученных с помощью соответствующих феноменологических законов сохранения. Правильность такого подхода проверяют с помощью эксперимента. Приведем эти законы сохранения.

Уравнение сохранения массы (уравнение непрерывности) мы комментировали в предыдущем разделе:

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r},t)+\rho(\mathbf{r},t)\cdot\operatorname{div}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)=0. \tag{13}$$

Перепишем этот закон в интегральном виде, проинтегрировав равенство (13) по произвольному объему V, имеющему поверхность Σ:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)dV = -\int_V \operatorname{div}\left(\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)dV.$$

Используем формулу Остроградского-Гаусса, и перепишем левую часть равенства в виде потока массы через поверхность объема:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -I_\Sigma(t),$$

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r},t)dV,$$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{conv}}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$

$$I_\Sigma(t) = \int_\Sigma \left(\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{conv}}(\mathbf{r},t),\mathbf{n}_\Sigma\right)d\Sigma.$$

Здесь обозначено: $M(t)$ - масса среды в объеме V в момент времени t, $I_\Sigma(t)$ - поток массы (скорость вытекания массы через поверхность Σ с учетом знака), $\mathbf{n}_\Sigma$ - единичный вектор нормали к поверхности, $\boldsymbol{I}_{conv}(\mathbf{r},t)$ - конвекционная плотность потока массы.

Удельный объем определяется через объемную плотность массы $v(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)^{-1}$. Отсюда

$$\frac{d}{dt}v(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r},t)^2}\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r},t).$$

Далее будем использовать закон сохранения массы (13) для несжимаемой среды (8). Имеем выражение для скорости изменения работы:

$$P\cdot\frac{d}{dt}v(\mathbf{r},t) = 0. \tag{14}$$

Получим закон сохранения удельной внутренней энергии $\varepsilon(\mathbf{r},t)$, используя гидродинамические уравнения движения среды. В случае пренебрежения внешними полями и вязкостью уравнение движения среды есть уравнение Эйлера. Оно имеет смысл уравнения Ньютона, примененного к элементу среды, в точке $M(\mathbf{r})$ в момент t:

$$\rho\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\nabla P(\mathbf{r},t). \tag{15}$$

Левая часть равенства имеет смысл произведения массы единицы объема среды, на ускорение элемента массы. Правая часть имеет смысл объемной плотности силы, действующей на элемент массы – то есть градиента давления $P(\mathbf{r},t)$. Введем обозначение полной удельной энергии среды:

$$w(\mathbf{r},t) = \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{r},t)|^2}{2} + \varepsilon(\mathbf{r},t).$$

Здесь полная энергия состоит из кинетической энергии и внутренней удельной энергии единицы объема. Полная производная от $w(\mathbf{r},t)$ равна:

$$\frac{d}{dt}w(\mathbf{r},t)=\left|\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right|\cdot\frac{d}{dt}\left|\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right|+\frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{r},t).$$

Рассмотрим уравнение Эйлера (15) при условии $\nabla P(\mathbf{r},t)=0$ (отсутствует градиент давления в среде). В этом случае полная производная удельной энергии единицы объема равна:

$$\frac{d}{dt}w(\mathbf{r},t)=\frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{r},t).$$

Закон сохранения внутренней энергии запишем феноменологически, введя, согласно закону Фурье, плотность потока тепла $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$. Получаем:

$$\rho\cdot\frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{r},t)=-\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right). \tag{16}$$

С течением времени распределение концентрации примеси в подвижной среде, вообще говоря, меняется. Изменение концентрации происходит двумя путями. Во-первых, при макроскопическом движении среды каждый данный ее участок передвигается как целое с неизменным составом. Этим путем осуществляется чисто механическое перемешивание в среде; хотя состав каждого передвигающегося участка среды не меняется, но в каждой данной неподвижной точке пространства концентрация находящейся в этом месте примеси будет со временем меняться. Такое изменение концентрации является обратимым процессом, если пренебречь процессами теплопроводности и внутреннего трения. Во-вторых, изменение состава может происходить путем молекулярного переноса веществ смеси. Выравнивание концентрации путем такого непосредственного изменения состава каждого из участков среды называют диффузией. Диффузия является процессом необратимым и представляет собой, наряду с теплопроводностью и вязкостью, один из источников диссипации энергии в жидкой смеси. Запишем закон сохранения примеси через феноменологическую плотность потока $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$:

$$\rho\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)=-\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)\right). \tag{17}$$

Закон изменения энтропии запишется с помощью формул (12), (17), (16), (14) так:

$$\rho\cdot T(\mathbf{r},t)\cdot\frac{d}{dt}s(\mathbf{r},t)=-\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)-\mu(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)\right)-\left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t),\nabla\mu(\mathbf{r},t)\right). \tag{18}$$

Запишем уравнение (18) в виде (11) и определим $\boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t)$, $\sigma_S(\mathbf{r},t)$. Получаем систему двух уравнений, в которых плотности потоков $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$ введены феноменологически и пока не определены:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d}{dt} c(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)\right), \\ \rho \cdot \dfrac{d}{dt} s(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t)\right) + \sigma_S(\mathbf{r},t). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{I}_S(\mathbf{r},t) = \frac{\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) - \mu(\mathbf{r},t) \cdot \boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)}{T(\mathbf{r},t)}, \\ \sigma_S(\mathbf{r},t) = \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t), \nabla \frac{1}{T(\mathbf{r},t)} \right) - \left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t), \nabla \frac{\mu(\mathbf{r},t)}{T(\mathbf{r},t)} \right). \end{gathered} \tag{20}$$

Встает вопрос, как непротиворечиво определить феноменологические плотности потоков $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$.

1.7. Флуктуации термодинамических величин, теория Онсагера

Онсагер в 1931 году установил соотношения взаимности для коэффициентов, выражающих феноменологические законы неравновесных процессов. По Онсагеру, выражение для $\sigma_S(\mathbf{r},t)$ должно иметь вид суммы произведений потоков и соответствующих им термодинамических сил. Таким образом, $\sigma_S(\mathbf{r},t)$ может доопределить потоки и служить основой для последовательного описания необратимых процессов. Теория Онсагера служит для описания линейных необратимых процессов, таких, которые при создании одних и тех же макроскопических внешних условий воспроизводятся в эксперименте. Такие необратимые процессы описываются с помощью локальных значений термодинамических параметров, и именно линейные эффекты являются основными в задачах диффузии, теплопроводности, вязкого течения, в теории проводимости и т.д. Так описываются известные из эксперимента соотношения, выражающие прямую пропорциональность величин стационарных «потоков» и градиентов соответствующих «координат»: законы Фурье для теплопроводности, Фика для диффузии, Ома для электрической проводимости.

Для правильного описания термодинамического эксперимента необходимо выбрать набор параметров, характеризующих неравновесное состояние системы. Этот выбор неоднозначен. Необратимые тепловые процессы в макроскопических телах происходят тогда, когда среда неоднородна по термодинамическим параметрам. То есть в среде существуют градиенты температуры, давления, концентрации смесей частиц, градиенты потенциалов, или так называемого химического сродства и других параметров. В теории Онсагера эти градиенты носят называния “сил” (или сродства, affinity) и обозначаются $X_i \ i=1...n$. Эти термодинамические “силы” вызывают необратимые процессы в среде, которые называются потоками. Это потоки частиц, тепла, зарядов, химические превращения. Эти потоки (fluxes) обозначаются $J_i \ \ i=1...n$. Согласно теории Онсагера, любая “сила” может вызвать любой поток, то есть необратимые процессы взаимосвязаны. Так, градиент концентрации вызывает диффузионный поток. Но и градиент температуры вызывает диффузию, которая в этом случае называется термодиффузией. По Онсагеру, в условиях, близких к равновесию, справедлива линейная связь “сил” и потоков:

$$J_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j \,. \tag{21}$$

Коэффициенты $L_{i,j} \ \ i,j=1...n$ называются феноменологическими коэффициентами Онсагера. Здесь на диагонали матрицы коэффициентов расположены коэффициенты теплопроводности, диффузии, электропроводности, химического сродства. Недиагональные коэффициенты описывают взаимовлияние разных “сил”. Анализ, выполненный Онсагером, показывает симметричность матрицы: $L_{i,j} = L_{j,i} \quad i,j=1...n$.

Чтобы уточнить термодинамический смысл коэффициентов $L_{i,j}$, необходимо, следуя за Онсагером, предположить, что всякое макроскопическое неравновесное состояние вблизи состояния равновесия можно рассматривать как некоторую флуктуацию термодинамических параметров. Это предположение позволяет использовать закономерности флуктуационных процессов для описания эволюции макроскопических систем при установлении в них равновесия. Теория термодинамических флуктуаций хорошо развита Эйнштейном, и ее суть состоит в следующем. Исследуя проблему устойчивости макроскопических систем, Эйнштейн предложил уравнение, определяющее вероятность образования флуктуации любого термодинамического параметра (уравнение Эйнштейна) в адиабатически изолированной системе. Это такая система, которая не обменивается ни теплом, ни частицами с внешней средой. Обозначим $a_i^{(0)} \ \ i=1...n$ равновесные значения термодинамических параметров адиабатически изолированной системы. Обозначим отклонения от термодинамического равновесия $\alpha_i = a_i - a_i^{(0)} \quad i=1...n$. По Эйнштейну, вероятность обнаружить значение отклонения, лежащего между α_i и $\alpha_i + d\alpha_i$ равна

$$p(\alpha_1,....,\alpha_n) = const \cdot \exp\left(S(\alpha_1,....,\alpha_n)\right).$$

Здесь $S(\alpha_1,...,\alpha_n)$ - безразмерная энтропия системы, рассматриваемая как функция от значений параметров $\alpha_1,...,\alpha_n$. Согласно общим принципам, при равновесных значениях параметров энтропия адиабатически изолированной системы максимальна, то есть

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(\alpha_1,...,\alpha_n)\Big|_{\alpha_1,...,\alpha_n=0} = 0, \ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} S(\alpha_1,...,\alpha_n)\Big|_{\alpha_1,...,\alpha_n=0} < 0 .$$

В первом приближении изменение энтропии вблизи состояния равновесия равно

$$S(\alpha_1,...,\alpha_n) - S_0 = \Delta S(\alpha_1,...,\alpha_n) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\alpha_i\alpha_j .$$

Здесь $g_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} S(\alpha_1,...,\alpha_n)\Big|_{\alpha_1,...,\alpha_n=0}$. Получаем:

$$p(\alpha_1,....,\alpha_n) = A \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\alpha_i\alpha_j\right).$$

Множитель A определяется условием нормировки. Определим набор *термодинамически взаимных параметров* макроскопической системы. По Эйнштейну и Онсагеру “силы” X_i, взаимные с параметрами α_j, определяются так:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(\alpha_1,...,\alpha_n) = -\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\alpha_j .$$

В состоянии равновесия энтропия максимальна, поэтому “силы” в состоянии равновесия равны нулю. С помощью формулы Онсагера получаем линейную связь потоков и термодинамических параметров:

$$J_i = -\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\alpha_j .$$

Здесь обозначено:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \cdot g_{kj} .$$

Линейная зависимость потоков и параметров является существенным упрощением, и, тем не менее, достаточным упрощением для построения теории таких процессов переноса, как диффузия, теплопроводность, вязкое трение, электропроводность и других. Параметры $\alpha_1,...,\alpha_n$ системы в неравновесных условиях являются функциями времени. В среде идет процесс релаксации к равновесному значению параметров. По Онсагеру, потоки - это производные параметров по времени:

$$J_i = \frac{d}{dt} a_i = \frac{d}{dt}\alpha_i .$$

Получаем связь теории флуктуаций, теории Онсагера и основного закона линейной неравновесной термодинамики, определяющего скорость изменения энтропии - σ_S – производство энтропии (entropy production) в адиабатной системе:

$$\sigma_S = \frac{d}{dt} S\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\alpha_j \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_j} S\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \cdot \alpha_i \cdot \frac{d}{dt}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot J_j \geq 0.$$

Здесь σ_S определяется через безразмерную энтропию $S\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ и имеет размерность $сек^{-1}$. Итак, для того, чтобы построить линейную теорию процессов переноса в конкретном эксперименте, необходимо выбрать термодинамические параметры (внешние и внутренние), характеризующие состояние данной системы $\alpha_1,...,\alpha_n$. С выбранными параметрами связан выбор и физический смысл соответствующих “сил”, потоков и коэффициентов переноса Онсагера L_{ij}. Условие положительности $\frac{d}{dt} S\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) > 0$ производства энтропии определяет знак коэффициентов и устойчивость изучаемых процессов переноса. Из теории Онзагера следуют два главных вывода. Это связь потоков и сил в виде линейного соотношения

$$J_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j \, , \tag{22}$$

и связь производства энтропии с потоками и силами

$$\sigma_S = \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot J_j \geq 0 \, . \tag{23}$$

Это универсальные связи, которые помогают доопределить выражения для потоков и сил, а также производства энтропии для конкретных термодинамических систем, зависящих от выбранных термодинамических параметров.

1.8. Диффузия, термодиффузия, теплопроводность

Для окончательного установления вида производства энтропии необходимо установить связь между коэффициентами Онсагера и эмпирическими коэффициентами процессов переноса, определяемых из опыта (коэффициенты теплопроводности, диффузии, вязкости, электропроводности и другими). Вообще говоря, определение сил и потоков неоднозначно. Но всегда можно в линейном приближении перейти от одной формы записи потоков и сил к другой. Здесь необходимо руководствоваться принципом симметрии коэффициентов Онсагера и положительности производства энтропии. Главный вывод, который следует получить из анализа формул (19) и (20), состоит в том, что потоки следует определять из поставленной задачи. А именно, потоками мы будем называть векторы плотностей потоков тепла $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$ и диффузии $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$. Если потоки выбраны, то из формул (19) и (20) следует получить выражения для сопряженных сил. Диффузионный поток вещества $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$ и тепловой поток $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$ возникают в результате наличия в среде градиентов концентрации и температуры. Каждый из этих потоков зависит, вообще говоря, от обоих указанных градиентов. Согласно формулам (19), (20), напишем $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$ и $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$ в виде линейных функций от градиентов, то есть выберем "силы" X_j, пропорциональные градиентам химического потенциала $\nabla\mu(\mathbf{r},t)$ и температуры $\nabla T(\mathbf{r},t)$. Тогда, согласно формуле (21), потоки J_i выразятся в виде линейной комбинации "сил":

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t) &= -\alpha\cdot\nabla\mu(\mathbf{r},t)-\beta\cdot\nabla T(\mathbf{r},t), \\ \boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) &= -\delta\cdot\nabla\mu(\mathbf{r},t)-\gamma\cdot\nabla T(\mathbf{r},t)+\mu(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - феноменологические коэффициенты пропорциональности. Удобно переписать формулы (19), (20), (24) через локальные концентрации $c(\mathbf{r},t)$ и температуру $T(\mathbf{r},t)$. Для этого положим, что энтропия $s(\mathbf{r},t)$ и химический потенциал $\mu(\mathbf{r},t)$ зависят от температуры, концентрации и давления. Выразим полную производную энтропии через полные производные температуры и концентрации (при постоянном давлении):

$$\frac{d}{dt}s=\left(\frac{\partial}{\partial T}s\right)\Bigg|_{c,p}\cdot\frac{d}{dt}T+\left(\frac{\partial}{\partial c}s\right)\Bigg|_{T,p}\cdot\frac{d}{dt}c=\frac{c_p}{T}\cdot\frac{d}{dt}T-\left(\frac{\partial}{\partial T}\mu\right)\Bigg|_{c,p}\cdot\frac{d}{dt}c. \tag{25}$$

Выразим градиент химического потенциала через градиенты концентрации и температуры:

$$\nabla\mu=\left(\frac{\partial}{\partial c}\mu\right)\Bigg|_{P,T}\cdot\nabla c+\left(\frac{\partial}{\partial T}\mu\right)\Bigg|_{P,c}\cdot\nabla T. \tag{26}$$

Формулы (19), (20), (24), (25), (26) переписываются так:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)=D\cdot\Delta c(\mathbf{r},t)+K_{c,T}\frac{1}{T(\mathbf{r},t)}\Delta T(\mathbf{r},t), \\ &c_p\cdot\frac{d}{dt}T(\mathbf{r},t)-K_{T,c}\cdot\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)=k\cdot\Delta T(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь введен оператор Лапласа

$$\Delta T(\mathbf{r},t)=\mathrm{div}\big(\nabla\big(T(\mathbf{r},t)\big)\big)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T(\mathbf{r},t).$$

Здесь $D\left[\frac{м^2}{сек}\right]$ - коэффициент диффузии, $k\left[\frac{эрг}{^\circ C\cdot м\cdot сек}\right]$ - коэффициент теплопроводности. Эта система уравнений определяет распределение температуры и концентрации в среде. Как следует из этой системы, нестационарные процессы теплопроводности и диффузии накладываются друг на друга. Пример наложения – диффузия и теплопроводность, вызывающие появление термодиффузии (эффект Соре, градиент температуры вызывает появление градиента концентрации, коэффициент $K_{c,T}$) и противоположный эффект – эффект Дюфора (градиент концентрации вызывает появление градиента температуры $K_{T,c}$). Для их описания можно в закон Фика (пропорциональность потока компонента смеси градиенту концентрации) и в закон Фурье (пропорциональность теплового потока градиенту температуры) добавлять соответствующие противоположные добавки градиентов. Это феноменологические законы. Расцепим нестационарные процессы. Положим $K_{c,T}=0$. Тогда из (27) получаем закон Фика

$$\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)=-D\cdot\nabla c(\mathbf{r},t),$$

и уравнение диффузии

$$\frac{d}{dt}c(\mathbf{r},t)=D\cdot\Delta c(\mathbf{r},t) \tag{28}$$

Положим $K_{T,c}=0$, тогда получаем закон Фурье

$$\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)=-k\cdot\nabla T(\mathbf{r},t),$$

и уравнение теплопроводности

$$\rho\cdot c_p\cdot\frac{d}{dt}T(\mathbf{r},t)=k\cdot\Delta T(\mathbf{r},t)\ . \tag{29}$$

Вопросы и задачи:

1. Дать определение первому и второму началам термодинамики. Объяснить понятия теплоты, внутренней энергии, работы, энтропии, равновесных процессов.
2. Сформулировать начала термодинамики для неравновесных необратимых процессов. Объяснить понятия локального равновесия, законов сохранения и непрерывности локальных величин в подвижной и неподвижной системах координат, уравнения Гиббса для локально равновесной системы.
3. Дать определение флуктуации термодинамических величин. Сформулировать основные положения теории Онзагера и соотношение взаимности коэффициентов в феноменологических законах сохранения.
4. Вывод связанных уравнений диффузии и теплопроводности. Законы Дюфора, Фурье, Соре, Фика

2. Методы решений уравнений теплопроводности и диффузии

2.1. Метод Фурье разделения переменных

Определим параметры уравнений (28), (29). Уравнение теплопроводности

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{d}{dt} T(\mathbf{r},t) = k \cdot \Delta T(\mathbf{r},t). \tag{30}$$

Параметры уравнения теплопроводности: $\kappa = \dfrac{k}{c_p \cdot \rho}$ - температуропроводность, k - теплопроводность, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ - объемная плотность массы среды, коэффициент теплоотдачи у поверхности α. Эмпирический закон Фурье для плотности потока тепла $\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)$

$$\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = -k \cdot \nabla T(\mathbf{r},t). \tag{31}$$

Размерность параметров в системе единиц МКС: $\boldsymbol{I}_Q \left[\dfrac{дж}{м^2 \cdot сек} \right]$, $\kappa \left[\dfrac{м^2}{сек} \right]$, $k \left[\dfrac{дж}{{}^\circ C \cdot м \cdot сек} \right]$, $c_p \left[\dfrac{дж}{{}^\circ C \cdot кг} \right]$, $\rho \left[\dfrac{кг}{м^3} \right]$, $\alpha \left[\dfrac{дж}{м^2 \cdot сек \cdot {}^\circ C} \right]$.

Уравнение диффузии напишем для объемной плотности массы примеси, которую обозначим $\rho(\mathbf{r},t) = \tilde{\rho} \cdot c(\mathbf{r},t)$. Здесь $\tilde{\rho}$ - объемная плотность массы растворителя, которую будем считать не зависящей от координат и времени:

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r},t) = D \cdot \Delta \rho(\mathbf{r},t). \tag{32}$$

Параметр уравнения диффузии: D - коэффициент диффузии. Эмпирический закон Фика для плотности потока массы $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)$

$$\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t) = -D \cdot \nabla \rho(\mathbf{r},t). \tag{33}$$

Размерность параметров в системе единиц МКС: $\rho(\mathbf{r},t) \left[\dfrac{кг}{м^3} \right]$, $D \left[\dfrac{м^2}{сек} \right]$ - коэффициент диффузии, $\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t) \left[\dfrac{кг}{м^2 \cdot сек} \right]$ - вектор плотности потока массы примеси.

Уравнения в частных производных диффузии и теплопроводности (32), (30) являются линейными уравнениями второго порядка. Решением уравнения с частными производными называется всякая функция, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным. Каждое из уравнений имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Математическая задача, имеющая своей целью описать физический процесс, должна удовлетворять следующим трем требованиям: решение должно существовать, решение должно быть единственным и решение должно быть устойчивым. Это значит, что малые изменения любого из параметров задачи и дополнительных условий должны вызывать соответственно малые изменения решения. Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется корректно поставленной задачей. Согласно общепринятой классификации уравнения (30), (32) принадлежат к уравнениям параболического типа.

На примере однородного (без источника тепла) уравнения теплопроводности без конвекции рассмотрим метод деления переменных (метод Фурье), используемый для построения частного решения. Будем решать задачу для слоя стационарной однородной среды, поперечные размеры которого гораздо больше толщины слоя. В этом случае можно ограничиться одномерным вариантом уравнения, где ось x координатной системы направлена ортогонально слою, а искомая температура среды будет зависеть от координаты x и времени t: $T(x,t)$. Для одномерного уравнения теплопроводности определим следующие однородные граничные условия:

1. Однородные граничные условия 1 рода – термостат на обеих границах

$$T(x,t)\big|_{x=a} = T(x,t)\big|_{x=b} = 0.$$

2. Однородные граничные условия 2 рода – закрытые теплоизолированные от внешней среды границы

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=b} = 0.$$

3. Смешанные однородные граничные условия 3 рода

$$T(x,t)\big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=b} = 0.$$

4. Однородные граничные условия 4 рода

$$\left(s_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) - h_1 \cdot T(x,t) \right)\Bigg|_{x=a} = 0$$
$$\left(s_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) + h_2 \cdot T(x,t) \right)\Bigg|_{x=b} = 0$$

Здесь a, b - левая и правая координаты поверхностей слоя, s_1, s_2, h_1, h_2 - положительные параметры.

Однородное уравнение теплопроводности без конвекции (переносная скорость $\mathbf{v}$ равна нулю) и источников имеет вид:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T(x,t) = k \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases} \tag{34}$$

Найдем множество частных решений в разделенных переменных

$$T_n(x,t) = \mathrm{X}_n(x) \cdot \mathrm{T}_n(t). \tag{35}$$

Здесь n - номер частного решения. Подставим в (34) и разделим левую и правую части на произведение $\mathrm{X}_n(x) \cdot \mathrm{T}_n(t)$, получим

$$\frac{1}{\mathrm{T}_n(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{T}_n(t) = \kappa \cdot \frac{1}{\mathrm{X}_n(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{X}_n(x).$$

Равенство функций времени и координаты возможно только в одном случае, когда эти функции равны константе λ_n:

$$\frac{1}{\mathrm{T}_n(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{T}_n(t) = -\lambda_n,$$

$$\frac{1}{\mathrm{X}_n(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{X}_n(x) = -\lambda_n.$$

Будем полагать, что параметр λ_n положительный:

$$\lambda_n \geq 0.$$

Получим систему двух уравнений в разделенных переменных:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{T}_n(t) = -\lambda_n \cdot \mathrm{T}_n(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{X}_n(x) = -\frac{\lambda_n}{\kappa} \cdot \mathrm{X}_n(x). \end{gathered} \tag{36}$$

2.1.1. Задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями 1 рода

Найдем решения координатной задачи, добавив к этой задаче однородные граничные условия 1 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{X}_n(x) = -\mu_n \cdot \mathrm{X}_n(x), \\ \mathrm{X}_n(x)\big|_{x=a} = \mathrm{X}_n(x)\big|_{x=b} = 0, \\ \lambda_n^Q = \mu_n \cdot \kappa. \end{cases} \tag{37}$$

Здесь λ_n^Q - константа деления для уравнения теплопроводности. Мы приходим к задаче о собственных значениях $-\mu_n$ одномерного оператора Лапласа. Необходимо найти такие значения параметра μ_n, при которых существуют нетривиальные (тождественно не равные нулю) решения однородного уравнения. Такие значения параметра μ_n называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями $\mathrm{X_n}(x)$ задачи (37). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма – Лиувилля. Общее решение задачи (37) имеет вид:

$$\mathrm{X_n}(x) = A \cdot \sin\left(\gamma_n \cdot (x-a)\right) + B \cdot \cos\left(\gamma_n \cdot (x-a)\right). \tag{38}$$

Эта функция является решением (37) при произвольных амплитудах A и B, и при параметре γ_n, связанном с собственным числом μ_n согласно соотношению (дисперсионное уравнение)

$$\mu_n = (\gamma_n)^2.$$

Для определения амплитуд A и B используем граничные условия. При подстановке $x = a$ в (38) получаем:

$$\mathrm{X_n}(a) = B = 0.$$

Амплитуда B определена. Подставим $x = b$, получаем:

$$\mathrm{X_n}(b) = A \cdot \sin\left(\gamma_\mathrm{n} \cdot (b-a)\right) = 0.$$

Получаем решение для параметра γ_n:

$$\gamma_\mathrm{n} = \frac{\pi \cdot n}{b-a}, \;\; n = 1,2..... .$$

Константа деления для граничных условий 1 рода имеет вид:

$$\lambda_n^Q = \kappa \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b-a}\right)^2, \;\; n = 1,2..... . \tag{39}$$

Амплитуда A не определена. Как и должно быть, решений уравнения (37) для фиксированного номера n бесконечно много, в силу однородности уравнения. Множество решений мы будем выбирать из класса квадратично интегрируемых функций на интервале $[a,b]$, для которых определим норму

$$\|\Psi\| = \sqrt{\int_a^b |\Psi(x)|^2 \, dx} < \infty,$$

и скалярное произведение

$$\left(\Psi,\Phi\right)=\int_a^b \Psi\left(x\right)^*\cdot\Phi\left(x\right)dx.$$

Как известно, множество квадратично интегрируемых функций образует векторное пространство Гильберта. Определим амплитуду A из дополнительного условия нормировки – равенства 1 нормы вектора $\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)=A\cdot\sin\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot\left(x-a\right)\right)$:

$$\int_a^b \mathrm{X}_n\left(x\right)^2 dx=1=A^2\int_a^b \sin\left(\pi\cdot n\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)^2 dx=\frac{A^2}{2}\cdot\left(b-a\right),$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{b-a}}.$$

Проверим ортогональность полученных векторов:

$$\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{b-a}\cdot\left(x-a\right)\right),\quad n=1,2..... \qquad (40)$$

Имеем:

$$\left(\mathrm{X}_\mathrm{n},\mathrm{X}_\mathrm{m}\right)=\int_a^b \mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)\cdot\mathrm{X}_\mathrm{m}\left(x\right)dx=\delta_{n,m}.$$

Здесь $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера (единичная матрица). Будем называть это множество векторов $\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)$ (40) базисом Фурье для однородных граничных условий 1 рода.

2.1.2. Задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями 2 рода

Решим задачу Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности для граничного условия 2 рода:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)=-\mu_\mathrm{n}\cdot\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right),\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)\Big|_{x=a}=\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)\Big|_{x=b}=0,\\ \lambda_n^Q=\mu_\mathrm{n}\cdot\kappa.\end{cases}$$

Общее решение имеет вид:

$$\mathrm{X}_\mathrm{n}\left(x\right)=A\cdot\sin\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot\left(x-a\right)\right)+B\cdot\cos\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot\left(x-a\right)\right),$$

$$\mu_\mathrm{n}=\left(\gamma_\mathrm{n}\right)^2.$$

Из граничных условий находим A:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)\Big|_{x=a} = \gamma_{\mathrm{n}} \cdot A = 0,$$

$$A = 0.$$

В точке $x = b$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)\Big|_{x=b} = -B \cdot \gamma_{\mathrm{n}} \cdot \sin\left(\gamma_{\mathrm{n}} \cdot (b-a)\right) = 0,$$

$$\gamma_{\mathrm{n}} = \frac{\pi \cdot n}{b-a},\ n = 0,1,2.... .$$

Константа деления для граничных условий 2 рода имеет вид:

$$\lambda_n^Q = \kappa \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b-a}\right)^2,\ n = 0,1,2..... . \tag{41}$$

Имеем набор векторов:

$$\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x) = B \cdot \cos\left(\pi \cdot n \cdot \frac{x-a}{b-a}\right),\ n = 0,1,2.... .$$

Нормируем векторы $\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)$:

$$\int_a^b \mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)^2\, dx = 1 = B^2 \int_a^b \cos\left(\pi \cdot n \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)^2 dx = \frac{B^2}{2} \cdot (b-a),$$

$$B = \sqrt{\frac{2}{b-a}},\quad n = 1,2.... ,$$

$$\int_a^b B^2 dx = 1 = B^2 \cdot (b-a),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{b-a}},\quad n = 0.$$

Базис Фурье $\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)$ для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями 2 рода имеет вид:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \cos\left(\pi \cdot n \cdot \frac{x-a}{b-a}\right),\quad n = 1,2... , \\ &\mathrm{X}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}},\quad n = 0 . \end{aligned} \tag{42}$$

Проверим ортогональность полученных векторов. Имеем:

$$(\mathrm{X}_{\mathrm{n}}, \mathrm{X}_{\mathrm{m}}) = \int_a^b \mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x) \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{m}}(x)\, dx = \delta_{n,m} .$$

2.1.3. Задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями 3 рода

Решим задачу Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности для однородных граничных условий 3 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{X_n}(x) = -\mu_\mathrm{n}\cdot\mathrm{X_n}(x), \\ \mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=a} = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=b} = 0, \\ \lambda_n^Q = \mu_\mathrm{n}\cdot\kappa. \end{cases}$$

Общее решение и в этом случае имеет вид:

$$\mathrm{X_n}(x) = A\cdot\sin\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot(x-a)\right) + B\cdot\cos\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot(x-a)\right),$$

$$\mu_\mathrm{n} = (\gamma_\mathrm{n})^2.$$

Используем граничные условия в точке $x=a$:

$$\mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=a} = B = 0.$$

Граничное условие в точке $x=b$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=b} = A\cdot\gamma_\mathrm{n}\cdot\cos\left(\gamma_\mathrm{n}\cdot(b-a)\right) = 0,$$

$$\gamma_\mathrm{n} = \frac{\pi}{b-a}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2.....$$

Константа деления для граничных условий 3 рода имеет вид:

$$\lambda_n^Q = \kappa\cdot\left(\frac{\pi}{b-a}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2,\ n = 0,1,2.... \qquad (43)$$

Имеем набор векторов:

$$\mathrm{X_n}(x) = A\cdot\sin\left(\pi\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x-a}{b-a}\right),\ n = 0,1,2..... .$$

Нормируем:

$$\int_a^b \mathrm{X_n}(x)^2\,dx = 1 = A^2\int_a^b \sin\left(\pi\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)^2 dx = \frac{A^2}{2}\cdot(b-a),\ \ n = 0,1,2....,$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{b-a}}.$$

Базис Фурье $\mathrm{X_n}(x)$ для уравнения теплопроводности с однородным граничным условием 3 рода имеет вид:

$$\mathrm{X_n}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cdot\sin\left(\pi\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)\ \ n = 0,1,2... \ . \qquad (44)$$

Полнота полученных базисов следует из соотношения:

$$\sum_n^\infty \mathrm{X_n}(x)\cdot\mathrm{X_n}(x') = \delta(x-x')\ .$$

Здесь $\delta(x-x')$ - дельта-функция Дирака.

Рассмотрим интегральный закон сохранения тепловой энергии для одномерного уравнения теплопроводности. Перепишем уравнение теплопроводности как локальный закон сохранения тепловой энергии:

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right), \quad \boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = -k \cdot \nabla T(\mathbf{r},t). \tag{45}$$

Разложим вектор плотности потока тепла по базису:

$$\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = I_x^Q(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{e}_x + I_y^Q(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{e}_y + I_z^Q(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{e}_z .$$

Положим, что температура зависит от координаты x и времени t. Вектор плотности потока направим по оси x. Тогда уравнение (45) перепишется в виде:

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} I_x^Q(x,t), \quad I_x^Q(x,t) = -k \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x,t). \tag{46}$$

Допустим, что объем имеет форму цилиндра с поперечным сечением Σ и осью вдоль оси x. Конвекция в объеме отсутствует. Интегрируем уравнение (46) по цилиндру, получим скорость изменения тепловой энергии $Q(t)$ в объеме (в интервале $[a,b]$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t) = \Sigma \cdot c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b T(x,t)\,dx = -\Sigma \cdot \int_a^b \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} I_x^Q(x,t)\,dx = -\Sigma \cdot I_x^Q(x,t)\Big|_a^b . \tag{47}$$

Здесь определена тепловая энергия на интервале $[a,b]$:

$$Q(t) = c_p \cdot \rho \cdot \int_a^b T(x,t)\,dx \cdot \Sigma .$$

Уточним смысл полученного выражения $-\Sigma \cdot I_x^Q(x,t)\Big|_a^b$. Обозначим $J_Q(\mathbf{r},t)$ - поток тепла через площадку Σ, ориентированную внешней нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, расположенной в точке $\mathbf{r}$ в момент t:

$$J_Q(\mathbf{r},t) = \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t), \mathbf{n}(\mathbf{r})\right)\cdot \Sigma . \tag{48}$$

Будем говорить, что тепло вытекает из площадки Σ, если поток положителен, или втекает в площадку Σ, если поток отрицателен. Внешняя нормаль к правому сечению цилиндра направлена по оси x:

$$\mathbf{n}(x)\Big|_{x=b} = \mathbf{e}_x .$$

Согласно (48), поток тепла через правую границу равен:

$$J_Q(x,t)\Big|_{x=b} = \left(I_x^Q(x,t)\cdot \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x\right)\Big|_{x=b} \cdot \Sigma = I_x^Q(x,t)\Big|_{x=b} \cdot \Sigma .$$

Внешняя нормаль к левому сечению цилиндра направлена против оси x:

$$\mathbf{n}(x)\Big|_{x=a} = -\mathbf{e}_x .$$

Поток тепла через левую границу равен:

$$J_Q(x,t)\Big|_{x=a} = \left(I_x^Q(x,t)\cdot \mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_x\right)\Big|_{x=a} \cdot \Sigma = -I_x^Q(x,t)\Big|_{x=a} \cdot \Sigma \ .$$

Отсюда, согласно (47), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t) = -\left(J_Q(x,t)\Big|_{x=b} + J_Q(x,t)\Big|_{x=a} \right) \ .$$

Задача Штурма-Лиувилля и базис Фурье для уравнения диффузии

По аналогии, для уравнения диффузии определим следующие однородные граничные условия:

1. Однородные граничные условия 1 рода – поглощающий экран на границах

$$\rho(x,t)\Big|_{x=a} = \rho(x,t)\Big|_{x=b} = 0 .$$

2. Однородные граничные условия 2 рода – закрытые изолированные от внешней среды границы

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\Big|_{x=b} = 0 .$$

3. Смешанные однородные граничные условия 3 рода

$$\rho(x,t)\Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\Big|_{x=b} = 0 .$$

Здесь a, b - левая и правая координаты поверхностей слоя.

Однородное уравнение диффузии без конвекции (переносная скорость $\mathbf{v}$ равна нулю) и источников имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t), \\ \rho(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases} \qquad (49)$$

Из сравнения граничных условий и уравнений следует, что задачи Штурма – Лиувилля для граничных условий 1, 2, 3 родов полностью совпадают для уравнения теплопроводности и диффузии. Следовательно, соответствующие базисы Фурье также совпадают. Единственно, надо во всех формулах сделать замену коэффициента температуропроводности κ на коэффициент диффузии D. Запишем константы деления для уравнения диффузии. Константа деления для граничных условий 1 рода имеет вид:

$$\lambda_n^D = D\cdot\left(\frac{\pi\cdot n}{b-a}\right)^2, \ \ n = 1,2..... \qquad (50)$$

Константа деления для граничных условий 2 рода имеет вид:

$$\lambda_n^D = D\cdot\left(\frac{\pi\cdot n}{b-a}\right)^2,\ \ n = 0,1,2..... \quad (51)$$

Константа деления для граничных условий 3 рода имеет вид:

$$\lambda_n^D = D\cdot\left(\frac{\pi}{b-a}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2,\ n = 0,1,2.... \quad (52)$$

Рассмотрим интегральный закон сохранения массы примеси для одномерного уравнения диффузии. Перепишем уравнение диффузии как локальный закон сохранения массы:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)\right),\\ &\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t) = -D\cdot\nabla\rho(\mathbf{r},t).\end{aligned} \quad (53)$$

Разложим вектор плотности потока тепла по базису:

$$\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t) = I_x^D(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_x + I_y^D(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_y + I_z^D(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_z.$$

Положим, что температура зависит от координаты x и времени t. Вектор плотности потока направим по оси x. Тогда уравнение (53) перепишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}I_x^D(x,t),\\ &I_x^D(x,t) = -D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t).\end{aligned} \quad (54)$$

Допустим, что объем имеет форму цилиндра с поперечным сечением Σ и осью вдоль оси x. Конвекция в объеме отсутствует. Интегрируем уравнение (54) по цилиндру, получим скорость изменения массы $M(t)$ в объеме:

$$\frac{\partial}{\partial t}M(t) = \Sigma\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b\rho(x,t)dx = -\Sigma\cdot\int_a^b\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}I_x^D(x,t)dx = -\Sigma\cdot I_x^D(x,t)\Big|_a^b. \quad (55)$$

Здесь определена масса на интервале $[a,b]$:

$$M(t) = \int_a^b\rho(x,t)dx\cdot\Sigma.$$

Уточним смысл полученного выражения $-\Sigma\cdot I_x^D(x,t)\Big|_a^b$. Обозначим $J_D(\mathbf{r},t)$ - поток массы через площадку Σ, ориентированную внешней нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, расположенной в точке $\mathbf{r}$ в момент t:

$$J_D(\mathbf{r},t) = \left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t),\mathbf{n}(\mathbf{r})\right)\cdot\Sigma.$$

Будем говорить, что масса вытекает из площадки Σ, если поток положителен, или втекает в площадку Σ, если поток отрицателен. Внешняя нормаль к правому сечению цилиндра направлена по оси x:

$$\mathbf{n}(x)\Big|_{x=b} = \mathbf{e}_x.$$

Поток массы через правую границу равен:

$$J_D\left(x,t\right)\Big|_{x=b} = \left(I_x^D\left(x,t\right)\cdot \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x\right)\Big|_{x=b} \cdot \Sigma = I_x^D\left(x,t\right)\Big|_{x=b} \cdot \Sigma \ .$$

Внешняя нормаль к левому сечению цилиндра направлена против оси x:

$$\mathbf{n}\left(x\right)\Big|_{x=a} = -\mathbf{e}_x \ .$$

Поток массы через левую границу равен:

$$J_D\left(x,t\right)\Big|_{x=a} = \left(I_x^D\left(x,t\right)\cdot \mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_x\right)\Big|_{x=a} \cdot \Sigma = -I_x^D\left(x,t\right)\Big|_{x=a} \cdot \Sigma \ .$$

Получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} M\left(t\right) = -\left(J_D\left(x,t\right)\Big|_{x=b} + J_D\left(x,t\right)\Big|_{x=a}\right) .$$

2.1.5. Нестационарные формальные ряды Фурье для решений уравнений диффузии и теплопроводности

Вернемся к разделенным временному и координатному уравнениям для уравнения теплопроводности (36) и решим временное уравнение для соответствующей константы деления λ_n^Q:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{T_n}\left(t\right) = -\lambda_n^Q \cdot \mathrm{T_n}\left(t\right).$$

Решение временного уравнения имеет вид:

$$\mathrm{T_n}\left(t\right) = C_{\mathrm{n}}\left(0\right)\cdot \exp\left(-\lambda_n^Q \cdot t\right).$$

Построим формальное общее решение для уравнения теплопроводности (34) в виде ряда Фурье по соответствующему базису, то есть в виде линейной комбинации частных решений (35):

$$T\left(x,t\right) = \sum_n \mathrm{T_n}\left(t\right)\cdot \mathrm{X_n}\left(x\right) = \sum_n C_{\mathrm{n}}\left(0\right)\cdot \exp\left(-\lambda_n^Q \cdot t\right)\cdot \mathrm{X_n}\left(x\right). \qquad (56)$$

Если формальные математические условия соблюдены (об этом будет комментарий ниже по тексту), то данный ряд можно почленно дифференцировать, интегрировать и совершать предельный переход под знаком суммы по параметрам. Если ряд можно почленно дифференцировать, то проверить, что этот ряд удовлетворяет уравнению, можно легко, так как каждое слагаемое в этом ряду удовлетворяет уравнению по построению. Точно также каждое слагаемое удовлетворяет граничным условиям. Перейдем к пределу $t \to 0$ в левой и правой части, получим соотношение:

$$T\left(x,0\right) = F\left(x\right) = \sum_n C_{\mathrm{n}}\left(0\right)\cdot \mathrm{X_n}\left(x\right).$$

В силу полноты базиса Фурье и квадратичной интегрируемости начального условия $F\left(x\right)$ получаем, что неопределенные константы $C_{\mathrm{n}}\left(0\right)$ являются коэффициентами Фурье для $F\left(x\right)$, и следовательно, находятся однозначно:

$$C_n(0) = (F, X_n) = \int_a^b F(x) \cdot X_n(x)\,dx .$$

Этим соотношением заканчивается построение частного решения задачи теплопроводности (34) для конкретного граничного условия. Здесь следует использовать формулы (39), (41), (43) для констант деления. Для построения частного решения уравнения диффузии (49) можно использовать те же формулы:

$$\rho(x,t) = \sum_n T_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_n C_n(0) \cdot \exp\left(-\lambda_n^D \cdot t\right) \cdot X_n(x),$$

$$\rho(x,0) = F(x) = \sum_n C_n(0) \cdot X_n(x).$$

Константы деления λ_n^D для уравнения диффузии записаны в формулах (50), (51), (52). Базисные векторы Фурье имеют один и тот же вид для уравнения диффузии и теплопроводности. Но их физический смысл разный. Так, каждый базисный вектор Фурье для задачи теплопроводности задает пространственную конфигурацию распределения температуры по объему тела. В случае уравнения диффузии каждый базисный вектор задает пространственное распределение концентрации диффундирующей примеси по объему. Поэтому, по аналогии с базисными векторами резонатора, эти векторы можно назвать модами (тепловыми, концентрационными) пространственных распределений. Эти моды не зависят от времени. Но решение имеет вид линейной комбинации мод, с коэффициентами линейной комбинации, экспоненциально зависящими от времени. Так как показатели экспонент λ_n не отрицательные, то эти коэффициенты линейной комбинации не возрастают с ростом времени. Поэтому показатели экспонент, имеющие размерность $сек^{-1}$, можно назвать *скоростями затухания соответствующих мод*. Естественно скорости затухания упорядочить по возрастанию. Тогда моды со старшими номерами будут затухать быстрее младших мод. Эта картина затухания описывает процесс релаксации, процесс приближения к состоянию термодинамического равновесия. Очевидно, временное и пространственное поведение системы вблизи состояния равновесия будет определяться младшими скоростями затухания и младшими модами.

Задачи и вопросы:

1. В начальный момент времени в капилляр длиной L, в точке с координатой $x = x_0$, вброшена масса примеси с объемной плотностью

$$F(x) = \mu \cdot \delta(x - x_0).$$

Построить решение уравнения диффузии для граничного условия 1 рода. Какой смысл имеет параметр μ распределения?

2. В начальный момент времени примесь с массой μ равномерно заполнила капилляр между точками x_0, x_1: $a < x_0 \le x \le x_1 < b$. Построить решение уравнения диффузии для граничных условий 1, 2, 3 рода.
3. Найти массу компонента на отрезке $\left[x_0, x_1\right]$ в условиях предыдущей задачи 2.
4. Найти общую массу компонента, вытекшую через правую границу за все время в условиях задачи 2.
5. В начальный момент времени температура $T = T_0$ была одинакова между точками x_0, x_1 слоя: $a < x_0 \le x \le x_1 < b$. Построить решение уравнения теплопроводности для граничных условий 1, 2, 3 рода.
6. Среднюю температуру на отрезке $\left[x_0, x_1\right]$ определим так:

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} T(x,t)\,dx .$$

Найти закон изменения средней температуры во времени в условиях задачи 5.
7. Найти тепловую энергию на отрезке $\left[x_0, x_1\right]$ в условиях задачи 5.
8. Найти общее количество тепла, вытекшее через правую границу за все время в условиях задачи 5.
9. Найти скорость вытекания массы примеси через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 1.
10. Найти скорость вытекания массы примеси через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 2.
11. Найти скорость вытекания тепла через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 5.
12. Найти минимальные собственные числа для однородных граничных условий первого типа уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотреть пластину толщиной $\delta = 3\ см$ из вещества: а) кирпич, в) свинец, с) пробка
13. Найти минимальные собственные числа для однородных граничных условий второго типа уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотреть слой толщиной $\delta = 3\ см$ вещества: а) гелий, в) алюминий, с) вода
14. Найти минимальные собственные числа для однородных граничных условий третьего типа уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотреть слой толщиной $\delta = 3\ см$ вещества: а) аммиак, в) чугун, с) бетон
15. Найти минимальные собственные числа уравнения диффузии для однородных граничных условий первого типа и проверить

ортогональность и нормировку собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотреть слой кристалла толщиной $\delta = 0.1\,см$ и диффундирующее вещество: а) $KCl\ -\ Ar$, в) $Ge\ -\ Li$, с) $Ge\ -\ Cu$

16. Найти минимальные собственные числа уравнения диффузии для однородных граничных условий второго типа и проверить ортогональность и нормировку собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотреть слой кристалла толщиной $\delta = 0.3\,см$ и диффундирующее вещество: а) $Si\ -\ H$, в) $InAs\ -\ In$, с) $Se\ -\ Fe$

17. Объяснить физический смысл однородных граничных условий 1, 2, 3 рода для уравнения теплопроводности и уравнения диффузии. Сформулировать условия, при выполнении которых возможно решение уравнений диффузии и теплопроводности методом разделения переменных.

2.1.6. Вопросы сходимости рядов Фурье

Построенные бесконечные ряды Фурье (56) по тригонометрическим базисам вида (44), (42), (40) представляют формальное решение задачи. Для обоснования правильности представленного решения необходима проверка путем подстановки полученного ряда в уравнение и в дополнительные условия. Математические операции, которые следует совершить над рядом Фурье, состоят в предельном переходе, дифференцировании, интегрировании бесконечного ряда почленно. В курсах по теории рядов Фурье формулируются достаточные условия для возможности выполнения перечисленных операций. Приведем здесь без доказательства соответствующие теоремы. Дадим определение основному свойству функционального ряда.

Определение 1: функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* к своей сумме $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ *сходится равномерно* на $[a,b]$ к его сумме $S(x)$. Равномерная сходимость означает, что для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon)$, что отклонение $|S(x) - S_n(x)|$ по модулю будет удовлетворять неравенству

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon,$$

сразу для всех $x \in [a,b]$ и номеров $n > N(\varepsilon)$. ●

Приведем определение *мажорантного признака Вейерштрасса* равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Определение 2: числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с положительными слагаемыми a_k называется *мажорирующим* для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на сегменте $[a,b]$, если выполнены неравенства $u_k(x) \le a_k$ для всех $x \in [a,b]$ и всех номеров $k = 1, 2......$ ●

Теорема 1: (достаточный *мажорантный признак Вейерштрасса*): если для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ существует сходящийся мажорирующий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ на $[a,b]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. ●

Равномерно сходящиеся ряды обладают важными свойствами, которые позволяют обращаться с бесконечными рядами как с обычными конечными суммами.

Теорема 2: если все слагаемые $u_k(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *непрерывны* на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно к функции $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$. ●

Непрерывность $u_k(x)$ на $[a,b]$ означает, что $\lim_{x \to c}(u_k(x)) = u_k(c)$ для всех $c \in [a,b]$. Непрерывность $S(x)$ на $[a,b]$ означает, что

$$\lim_{x \to c}(S(x)) = \lim_{x \to c}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to c}(u_k(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(c) = S(c).$$

То есть для равномерно сходящегося ряда (достаточное условие) возможна перестановка операций взятия предела и бесконечного суммирования.

Теорема 3: если ряд $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными слагаемыми $u_k(x)$ сходится равномерно (достаточное условие) на $[a,b]$, то справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx.$$

То есть ряд можно *почленно интегрировать* на произвольном отрезке $[x_0, x] \in [a,b]$, причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx$ сходится равномерно на $[a,b]$ при любом $x_0 \in [a,b]$. ●

Теорема 4: если ряд $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми слагаемыми $u_k(x)$ (то есть $\frac{d}{dx} u_k(x)$ - непрерывна) сходится на $[a,b]$, а ряд производных $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то сумма ряда $S(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и во всех точках $[a,b]$ выполнено:

$$\frac{d}{dx} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_k(x).$$

То есть ряд можно почленно дифференцировать. ●

Формальные ряды Фурье $\sum_{n} C_{\text{n}}(0) \cdot \exp(-\lambda_n \cdot t) \cdot \text{X}_{\text{n}}(x)$, изображающие решение одномерного уравнения теплопроводности или диффузии с произвольными граничными условиями, представляют собой бесконечные функциональные ряды по тригонометрическим функциям $\text{X}_{\text{n}}(x)$. Приведем теоремы, касающиеся равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Определение 3: назовем функцию $f(x)$, заданную на симметричном отрезке $x \in [-l, l]$, *гладкой порядка* m, если сама функция и ее производные до порядка m включительно $f^{(1)}(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ непрерывны в $[-l, l]$ и имеют равные значения на краях интервала

$$f(-l+0) = f(l-0),\ f^{(1)}(-l+0) = f^{(1)}(l-0), \ldots, f^{(m)}(-l+0) = f^{(m)}(l-0),$$

а $m+1$ производная может быть кусочно-непрерывна. ●

Разложим функцию $f(x)$ в общий ряд Фурье по синусам и косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\pi \frac{k}{l} x \right) + b_k \cdot \sin\left(\pi \frac{k}{l} x \right) \right), \tag{57}$$

где коэффициенты Фурье a_k, b_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\pi \frac{k}{l} x \right) dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\pi \frac{k}{l} x \right) dx.$$

Теорема 5: для функции $f(x)$ гладкости порядка m выполняется оценка коэффициентов Фурье a_k, b_k в общем разложении по синусам и косинусам:

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right).$$

Здесь $o(\psi)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем ψ. В силу этой оценки числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu} \cdot \left(|a_k| + |b_k|\right), \quad \nu = 0,1.....m$$

сходятся. ●

Следствием данной теоремы и теоремы Вейерштрасса является равномерная сходимость ряда Фурье (57) и возможность почленного дифференцирования данного ряда не менее m раз.

2.1.7. Условия равномерной сходимости ряда Фурье для решений с граничными условиями 1 рода

Применим упомянутые выше теоремы для проверки равномерной сходимости ряда Фурье, описывающего решение одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 1 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \kappa \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ T(x,t)\big|_{x=0} = T(x,t)\big|_{x=L} = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Базис Фурье на интервале $[0,L]$ для граничных условий 1 рода имеет вид:

$$\mathrm{X_n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\pi \frac{n}{L} \cdot x\right), \ n = 1,2...... .$$

Решение имеет вид:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}(0) \cdot \exp(-\lambda_n \cdot t) \cdot \mathrm{X_n}(x) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}(0) \cdot \exp(-\lambda_n \cdot t) \cdot \sin\left(\pi \frac{n}{L} \cdot x\right). \end{aligned} \tag{59}$$

Здесь $C_{\mathrm{n}}(0)$ - коэффициент Фурье начальной температуры

$$C_{\mathrm{n}}(0) = \int_0^L F(x) \cdot \mathrm{X_n}(x) dx,$$

скорости затухания мод $\lambda_n = \kappa \cdot \left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 \cdot n^2$. Формально продифференцируем ряд по времени однократно

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}(0) \cdot n^2 \cdot \exp(-\lambda_n \cdot t) \cdot \sin\left(\pi \frac{n}{L} \cdot x\right)$$

и по координате двукратно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}C_{\text{n}}(0)\cdot n^2\cdot\exp(-\lambda_n\cdot t)\cdot\sin\left(\pi\frac{n}{L}\cdot x\right).$$

Рассмотрим вопрос равномерной сходимости ряда

$$R_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{\text{n}}(0)\cdot n^2\cdot\exp(-\lambda_n\cdot t)\cdot\sin\left(\pi\frac{n}{L}\cdot x\right).$$

Применим теорему 1 Вейерштрасса и найдем мажорирующий ряд для ряда $R_2(x,t)$. Так как $\left|\exp(-\lambda_n\cdot t)\cdot\sin\left(\pi\frac{n}{L}\cdot x\right)\right|\le 1$, то мажорирующим рядом будет знакопостоянный ряд

$$R=\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_{\text{n}}(0)\right|\cdot n^2. \tag{60}$$

Из сходимости ряда R будет следовать равномерная сходимость ряда $R_2(x,t)$, и, также рядов $\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$.

Исследуем асимптотики коэффициентов $\left|C_{\text{n}}(0)\right|$ и найдем условия сходимости ряда (60). Для этой цели рассмотрим ряд Фурье функции начальных данных

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{\text{n}}(0)\cdot \mathrm{X}_{\text{n}}(x),$$

$$C_{\text{n}}(0)=\int_0^L F(x)\cdot \mathrm{X}_{\text{n}}(x)\,dx,$$

и применим теорему 5 для оценки асимптотики коэффициентов. Функция $F(x)$ определена на интервале $[0,L]$. Для того, чтобы применить теорему 5, необходимо расширить определение функции на симметричный интервал $[-L,L]$ и, при этом, сохранить асимптотики модулей коэффициентов Фурье. Это можно проделать разными способами. Здесь мы продолжим функцию $F(x)$ антисимметрично. То есть определим новую функцию $\tilde{F}(x)$ по формуле:

$$\tilde{F}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{cases}F(x), & 0\le x\le L\\ -F(-x), & -L\le x\le 0\end{cases}. \tag{61}$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет однородным граничным условиям 1 рода на интервале $[-L,L]$:

$$\tilde{F}(x)\Big|_{L}=\tilde{F}(x)\Big|_{-L}=0.$$

Найдем условия гладкости не менее $m=2$ для функции $\tilde{F}(x)$ на интервале $[-L,L]$. Первая производная на границах удовлетворяет условию гладкости (равенство на границах интервала):

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_{-L+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{L-0},$$

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_{L-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{L-0}.$$

Вторая производная на границах равна:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{-L+0}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{L-0},$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{L-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{L-0}.$$

Отсюда получаем условие гладкости не менее $m=2$:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{L}=0\ . \tag{62}$$

Непрерывность в точке $x=0$ выполнена:

$$\left.\tilde{F}(x)\right|_{-0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left.F(x)\right|_{+0}=0,$$

$$\left.\tilde{F}(x)\right|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.F(x)\right|_{+0}=0.$$

Непрерывность первой производной в точке $x=0$ выполнена:

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_{-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{+0},$$

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{+0}.$$

Проверим непрерывность второй производной:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0},$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{-0}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0}.$$

Отсюда условие гладкости $m=2$ имеет вид:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0}=0\ . \tag{63}$$

При выполнении указанных условий функция $\tilde{F}(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по базису

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot (x + L)\right),$$

удовлетворяющему граничным условиям 1 рода на интервале $[-L, L]$, в чем нетрудно убедиться. Запишем ряд Фурье для этой функции:

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n(0) \cdot \tilde{X}_n(x).$$

Сравним асимптотики коэффициентов $\tilde{C}_n(0)$ и $C_n(0)$. Коэффициенты Фурье $\tilde{C}_n(0)$ равны:

$$\tilde{C}_n(0) = \int_{-L}^{L} \tilde{F}(x) \cdot \tilde{X}_n(x) dx =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2L}} \left(\int_{-L}^{0} F(-x) \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot (x + L)\right) dx - \int_{0}^{L} F(x) \cdot \sin\left(\pi \frac{n}{2 \cdot L} \cdot (x + L)\right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot L}} \cdot \int_{0}^{L} F(x) \cdot \left(-\sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot (-x + L)\right) + \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot (x + L)\right) \right) dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 \cdot L}} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{n}{2}\right) \cdot \int_{0}^{L} F(x) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot x\right) dx .$$

Здесь коэффициенты $\tilde{C}_{2 \cdot k+1}(0)$ равны нулю. Положим $n = 2 \cdot k$, получаем

$$\tilde{C}_{2 \cdot k}(0) = (-1)^k \cdot C_k(0), \quad k = 1, 2..... .$$

Асимптотики модулей коэффициентов $\tilde{C}_{2n}(0)$ и $C_n(0)$ совпадают, а, следовательно, при выполнении условий (62) и (63) мажорирующий ряд (60) сходится, и ряд (59) является решением задачи (58).

2.1.8. Условия равномерной сходимости ряда Фурье для решений с граничными условиями 2 рода

Применим упомянутые выше теоремы для проверки равномерной сходимости ряда Фурье, описывающего решение одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 2 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \kappa \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x} T(x,t)\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial}{\partial x} T(x,t)\right|_{x=L} = 0. \end{cases} \tag{64}$$

Базис Фурье $\mathrm{X_n}(x)$ для уравнения теплопроводности с граничным условием 2 рода на интервале $[0, L]$ имеет вид:

$$\mathrm{X_n}(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\cos\left(\pi\cdot n\cdot\frac{x}{L}\right),\quad n=1,2...,$$

$$\mathrm{X_0}(x)=\frac{1}{\sqrt{L}},\quad n=0.$$

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим мажорирующий ряд

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_{\mathrm{n}}(0)\right|\cdot n^2 \qquad (65)$$

с коэффициентами

$$C_{\mathrm{n}}(0)=\int_0^L F(x)\cdot \mathrm{X_n}(x)\,dx\ .$$

Исследуем асимптотики коэффициентов $\left|C_{\mathrm{n}}(0)\right|$. Функция $F(x)$ определена на интервале $[0,L]$. Для того, чтобы применить теорему 5, необходимо расширить определение функции на симметричный интервал $[-L,L]$ и, при этом, сохранить асимптотику модулей коэффициентов Фурье. Продолжим функцию $F(x)$ четным образом и определим новую начальную функцию:

$$\tilde{F}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases}F(x), & 0\le x\le L\\ F(-x), & -L\le x\le 0\end{cases}.$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет однородным граничным условиям 2 рода на интервале $[-L,L]$:

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_L=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_L=0,$$

$$\left.\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\right|_{-L}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_L=0.$$

Найдем условия гладкости не менее $m=2$ для функции $\tilde{F}(x)$ на интервале $[-L,L]$. Значения функции на краях удовлетворяют условию гладкости:

$$\left.\tilde{F}(x)\right|_{L-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.F(x)\right|_{L-0},$$

$$\left.\tilde{F}(x)\right|_{-L+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.F(x)\right|_{L-0}.$$

Вторая производная на границах удовлетворяет условию гладкости:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{-L+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{L-0},$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{L-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{L-0}.$$

Непрерывность в точке $x=0$ выполнена:

$$\tilde{F}(x)\Big|_{-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}F(x)\Big|_{+0},$$

$$\tilde{F}(x)\Big|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}F(x)\Big|_{+0}.$$

Непрерывность первой производной в точке $x=0$ выполнена:

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\Big|_{-0}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}F(x)\Big|_{+0}=0,$$

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)\Big|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}F(x)\Big|_{+0}=0.$$

Непрерывность второй производной выполнена:

$$\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\Big|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{d^2}{dx^2}F(x)\Big|_{+0},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\Big|_{-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{d^2}{dx^2}F(x)\Big|_{+0}.$$

При выполнении указанных условий функция $\tilde{F}(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по базису Фурье $\tilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}(x)$ для граничных условий 2 рода на интервале $[-L,L]$:

$$\tilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2L}\cdot(x+L)\right),\quad n=1,2...,$$

$$\tilde{\mathrm{X}}_{0}(x)=\frac{1}{\sqrt{2L}},\quad n=0.$$

Найдем коэффициент Фурье этой функции:

$$\tilde{C}_n(0)=\int\limits_{-L}^{L}\tilde{F}(x)\cdot\tilde{X}_n(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2L}}\cdot\left(\int\limits_{-L}^{0}F(-x)\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot(x+L)\right)dx+\int\limits_{0}^{L}F(x)\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot(x+L)\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2L}}\cdot\int\limits_{0}^{L}F(x)\cdot\left(\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot(-x+L)\right)+\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot(x+L)\right)\right)dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2}\right)\cdot\int\limits_{0}^{L}F(x)\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot x\right)dx.$$

Здесь коэффициенты $\tilde{C}_{2\cdot k+1}(0)$ равны нулю. Положим $n=2\cdot k$, получаем

$$\tilde{C}_{2\cdot k}(0)=(-1)^k\cdot C_k(0),\quad k=1,2......$$

Асимптотики модулей коэффициентов $\tilde{C}_{2n}(0)$ и $C_n(0)$ совпадают, а, следовательно, мажорирующий ряд (65) сходится. Из сходимости следует, что ряд Фурье задачи (64) сходится равномерно и представляет решение этой задачи.

2.1.9. Условия равномерной сходимости ряда Фурье для решений с граничными условиями 3 рода

Применим упомянутые выше теоремы для проверки равномерной сходимости ряда Фурье, описывающего решение одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 3 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \text{к} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ T(x,t)\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=L} = 0. \end{cases} \tag{66}$$

Базис Фурье $\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x)$ для уравнения теплопроводности с граничным условием 3 рода на интервале $[0,L]$ имеет вид:

$$\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x}{L}\right) \quad n = 0,1,2... \, .$$

Покажем, что задача (66) приводится к задаче с граничными условиями 1 рода. Для этого рассмотрим новую функцию начальных данных на интервале $[0,2L]$:

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} F(x), & 0 \le x \le L \\ F(2L - x), & L \le x \le 2L \end{cases}. \tag{67}$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям 1 рода на интервале $[0,2L]$

$$\tilde{F}(x)\Big|_{+0} = \tilde{F}(x)\Big|_{2L-0} = \frac{1}{\sqrt{2}}F(x)\Big|_{+0} = 0 .$$

Функция $\tilde{F}(x)$ может быть разложена в ряд Фурье по базису

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{2 \cdot L} \cdot x\right),$$

удовлетворяющему граничным условиям 1 рода на интервале $[0,2L]$, в чем нетрудно убедиться. Для равномерной сходимости этого ряда функция $\tilde{F}(x)$ должна быть гладкой порядка $m = 2$, то есть удовлетворять дополнительным условиям вида (62) и (63). Для функции $\tilde{F}(x)$ достаточно потребовать:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{+0}=0,$$
$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{2L}=0. \tag{68}$$

Проверим выполнение этих условий:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0},$$
$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\tilde{F}(x)\right|_{2L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0}.$$

Отсюда для выполнения условий (68) требуется дополнительное условие на функцию $F(x)$:

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{+0}=0\ . \tag{69}$$

Нетрудно проверить, что функция $\tilde{F}(x)$ удовлетворяет условию непрерывности в точке $x=L$ до второй производной. Руководствуясь условиями равномерной сходимости ряда для функции, удовлетворяющей граничным условиям 1 рода, делаем вывод, что функция $\tilde{F}(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд и мажорирующий ряд для этой функции сходится. Проверим связь коэффициентов Фурье функции $\tilde{F}(x)$ по базису $\tilde{X}_n(x)$ и функции $F(x)$ по базису $\mathrm{X_n}(x)$. Коэффициенты Фурье функции $\tilde{F}(x)$ равны:

$$\tilde{C}_n(0)=\int_0^{2L}\tilde{F}(x)\cdot\tilde{X}_n(x)dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot L}}\cdot\left(\int_0^L F(x)\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot x\right)dx+\int_L^{2L}F(2L-x)\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot x\right)dx\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot L}}\cdot\int_0^L F(x)\cdot\left(\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot x\right)+\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{2\cdot L}\cdot(2L-x)\right)\right)dx.$$

Здесь коэффициенты $\tilde{C}_{2\cdot k}(0)$ равны нулю. Положим $n=2\cdot k+1$, получаем

$$\tilde{C}_{2\cdot k+1}(0)=C_k(0),\quad k=1,2.....\ .$$

Из совпадения асимптотик для модулей коэффициентов Фурье делаем вывод о равномерной сходимости ряда Фурье решения задачи (66), если начальная функция удовлетворяет дополнительному условию (69).

Задачи и вопросы:

1. Найти условия равномерной сходимости ряда Фурье для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями 3 рода

$$T(x,t)\big|_{x=L} = \frac{\partial}{\partial x} T(x,t)\bigg|_{x=0} = 0 \ .$$

2. Проверить, что функция $\tilde{F}(x)$ (67) удовлетворяет условию непрерывности в точке $x = L$ до второй производной.
3. Проверить, что функция $\tilde{F}(x)$ (61) удовлетворяет однородным граничным условиям 1 рода на интервале $[-L, L]$.

2.1.10. Уравнение диффузии с конвекцией

Поток компоненты через неподвижную поверхность, размещенную в среде, может быть по причине диффузии и по причине перемещения среды со скоростью $\mathbf{v}$ как целого называемого конвекцией. Одномерное уравнение диффузии в лабораторной системе координат с учетом конвекции имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t) - \mathrm{v} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\rho(x,t), \\ \rho(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Здесь v - компонента скорости вдоль оси x. Выполним замену функции, приводящую уравнение к уравнению диффузии без конвекции (переход в подвижную систему координат):

$$\rho(x,t) = \exp(\alpha \cdot t) \cdot \exp(\beta \cdot x) \cdot \rho_{\mathrm{v}}(x,t) .$$

Получаем:

$$\alpha = -\frac{\mathrm{v}^2}{4D}, \quad \beta = \frac{\mathrm{v}}{2D} .$$

Однородные граничные условия не изменяются в подвижной системе (проверить). Начальные данные для $\rho_{\mathrm{v}}(x,t)$ изменяются. Получаем задачу диффузии в подвижной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{v}}(x,t) = D \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\rho_{\mathrm{v}}(x,t), \\ \rho_{\mathrm{v}}(x,0) = F(x) \cdot \exp\left(-\dfrac{\mathrm{v}}{2D} \cdot x\right), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля решается аналогично предыдущему случаю. Решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, имеет вид:

$$\rho(x,t) = \exp\left(\frac{v}{2D}\cdot x\right)\cdot\sum_n C_n(0)\cdot\exp\left(-\left(\lambda_n + \frac{v^2}{4D}\right)\cdot t\right)\cdot X_n(x),$$

$$C_n(0) = \int_a^b F(x)\cdot\exp\left(-\frac{v}{2D}\cdot x\right)X_n(x)\,dx.$$

Задачи и вопросы:

1. В начальный момент времени в капилляр длиной L, в точке с координатой $x = x_0$, вброшена масса примеси с объемной плотностью

$$F(x) = \mu\cdot\delta(x - x_0).$$

Построить решение уравнения диффузии с конвекцией для граничного условия 1 рода. Какой смысл имеет параметр μ распределения?

2. В начальный момент времени примесь с массой μ равномерно заполнила капилляр между точками x_0, x_1: $a < x_0 \le x \le x_1 < b$. Построить решение уравнения диффузии с конвекцией для граничных условий 1, 2, 3 рода.

3. Найти массу компонента на отрезке $[x_0, x_1]$ в условиях предыдущей задачи 2. Исследовать зависимость массы от скорости конвекции.

4. Найти общую массу компонента, вытекшую через правую границу за все время в условиях задачи 2. Найти зависимость массы от скорости потока.

5. Найти скорость вытекания массы примеси через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 1. Найти зависимость скорости вытекания от скорости потока.

6. Дать определения плотностей диффузионного и конвекционного потоков.

2.1.11. Уравнение теплопроводности с конвекцией

Поток тепловой энергии через неподвижную поверхность, размещенную в среде, может быть по причине теплового потока и по причине перемещения среды со скоростью v как целого называемого конвекцией. Имеем уравнение теплопроводности с конвекцией:

$$\begin{cases} c_p\cdot\rho\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t) = k\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) - c_p\cdot\rho\cdot v\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Выполним замену функции, приводящую уравнение к уравнению теплопроводности без конвекции (переход в подвижную с.к.):

$$T(x,t) = \exp(\alpha \cdot t) \cdot \exp(\beta \cdot x) \cdot T_{\mathrm{v}}(x,t).$$

Получаем

$$\alpha = -\frac{\mathrm{v}^2 \cdot c_p \cdot \rho}{4k}, \quad \beta = \frac{\mathrm{v} \cdot c_p \cdot \rho}{2k}.$$

Однородные граничные условия не изменяются в подвижной системе (проверить). Начальные данные для $T_{\mathrm{v}}(x,t)$ изменяются. Получаем задачу теплопроводности в подвижной системе координат:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T_{\mathrm{v}}(x,t) = k \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T_{\mathrm{v}}(x,t), \\ T_{\mathrm{v}}(x,0) = F(x) \cdot \exp\left(-\dfrac{\mathrm{v} \cdot c_p \cdot \rho}{2k} \cdot x \right), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля решается аналогично предыдущему случаю. Решение имеет вид:

$$T(x,t) = \exp\left(\frac{\mathrm{v} \cdot c_p \cdot \rho}{2k} \cdot x \right) \cdot \sum_n C_n(0) \cdot \exp\left(-\left(\lambda_n + \frac{\mathrm{v}^2 \cdot c_p \cdot \rho}{4k} \right) \cdot t \right) \cdot \mathrm{X}_n(x),$$

$$C_n(0) = \int_a^b F(x) \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{v} \cdot c_p \cdot \rho}{2k} \cdot x \right) \cdot \mathrm{X}_n(x) dx .$$

Задачи и вопросы:

1. В начальный момент времени температура $T = T_0$ была одинакова между точками x_0, x_1 слоя: $a < x_0 \le x \le x_1 < b$. Построить решение уравнения теплопроводности с конвекцией для граничных условий 1, 2, 3 рода.

2. Среднюю температуру на отрезке $[x_0, x_1]$ определим так:

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} T(x,t) dx .$$

Найти закон изменения средней температуры во времени в условиях задачи 1. Исследовать зависимость средней температуры от скорости потока.

3. Найти тепловую энергию на отрезке $[x_0, x_1]$ в условиях задачи 1. Исследовать зависимость тепловой энергии от скорости потока.

4. Найти общее количество тепла, вытекшее через правую границу за все время в условиях задачи 1. Исследовать зависимость тепловой энергии от скорости потока.

5. Сформулировать закон сохранения тепла в объеме при наличии конвекционного потока.

2.1.12. Уравнение диффузии с источниками частиц

Введем источник частиц $f(\mathbf{r},t)$, который создает количество массы примеси в единице объема среды за секунду. Размерность источника $\frac{кг}{м^3 \cdot сек}$. Уравнение диффузии становится неоднородным:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_D(\mathbf{r},t)\right) + f(\mathbf{r},t), \\ &\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = -D\cdot\nabla\rho(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{70}$$

Уравнение диффузии с источником в одномерном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t) + f(x,t), \\ \rho(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Спроектируем искомую плотность $\rho(x,t)$ на базисный элемент Фурье $\mathrm{X}_n(x)$, удовлетворяющий необходимым граничным условиям, получим коэффициент Фурье решения:

$$C_n(t) = \int_a^b \rho(x,t)\mathrm{X}_n(x)dx.$$

Спроектируем уравнение диффузии на базисную моду $\mathrm{X}_n(x)$. Получаем неоднородное уравнение для проекции $C_n(t)$, удовлетворяющее начальным данным :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}C_n(t) = -\lambda_n\cdot C_n(t) + F_n(t), \\ &C_n(0) = \int_a^b F(x)\cdot\mathrm{X}_n(x)dx. \end{aligned} \tag{71}$$

Здесь неоднородное слагаемое является коэффициентом Фурье функции источника:

$$F_n(t) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{X}_n(x)dx.$$

При выводе уравнения (71) использовано свойство самосопряженности оператора второй производной на функциях, удовлетворяющих однородным граничным условиям 1, 2, 3 рода:

$$\int_a^b \mathrm{X}_n(x)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t)\,dx=\int_a^b \rho(x,t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{X}_n(x)\,dx\,.$$

Решение временного уравнения имеет вид:

$$C_n(t)=\exp\left(-\lambda_n^D\cdot t\right)\cdot\left(\int_0^t F_n(t')\cdot\exp\left(\lambda_n^D\cdot t'\right)dt'+C_n(0)\right).$$

Решение неоднородного уравнения диффузии, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, имеет вид:

$$\rho(x,t)=\sum_n C_n(t)\cdot \mathrm{X}_n(x)\,.$$

Закон сохранения массы при наличии источника записывается иначе. Здесь в правой части закона сохранения массы в формуле (55) следует добавить слагаемое, учитывающее массу, создаваемую источником во всем объеме за секунду $M_s(t)$:

$$M_s(t)=\Sigma\cdot\int_a^b f(x,t)\,dx\,.$$

Получаем закон сохранения массы в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}M(t)=-\left(J_D(x,t)\Big|_{x=b}+J_D(x,t)\Big|_{x=a}\right)+M_s(t)\,.$$

Масса в объеме изменяется в силу двух причин: втекания (вытекания) через границы и из-за действия источника массы.

Задачи и вопросы:

1. Доказать самосопряженность второй производной для однородных граничных условий 1, 2, 3 рода

2. В начальный момент времени в капилляр длиной L, в точке с координатой $x=x_0$, вброшена масса примеси с объемной плотностью

$$F(x)=\mu\cdot\delta(x-x_0)\,.$$

Построить решение уравнения диффузии с источником (функцию источника выбрать удобным образом) для граничного условия 1 рода. Какой смысл имеет параметр μ распределения?

3. В начальный момент времени примесь с массой μ равномерно заполнила капилляр между точками x_0, x_1: $a<x_0\le x\le x_1<b$. Построить решение уравнения диффузии с источником (функцию источника выбрать удобным образом) для граничных условий 1, 2, 3 рода.

4. Найти массу компонента на отрезке $[x_0, x_1]$ в условиях предыдущей задачи 3.

5. Найти общую массу компонента, вытекшую через правую границу за все время в условиях задачи 3.

6. Найти скорость вытекания массы примеси через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 3.

7. Найти скорость вытекания массы примеси через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 3.

2.1.13. Уравнение теплопроводности с источником тепла

Добавим в уравнение источник тепловой энергии $f(\mathbf{r},t)$, имеющий смысл объемной плотности мощности тепловой энергии с размерностью $\frac{дж}{м^3 \cdot сек}$. Неоднородное уравнение теплопроводности – закон сохранения тепловой энергии – записывается в виде:

$$\begin{aligned} &c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right) + f(\mathbf{r},t), \\ &\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = -k \cdot \nabla T(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{72}$$

Уравнение теплопроводности с источником в одномерном случае имеет вид:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T(x,t) = k \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) + f(x,t), \\ T(x,0) = F(x), \\ \textit{Однородные граничные условия}. \end{cases}$$

Уравнение решается аналогичным способом, как решалось уравнение диффузии. Решение временного уравнения имеет вид:

$$C_n(t) = \exp\left(-\lambda_n^Q \cdot t\right) \cdot \left(\int_0^t F_n(t') \cdot \exp\left(\lambda_n^Q \cdot t'\right) dt' + C_n(0) \right).$$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, имеет вид:

$$T(x,t) = \sum_n C_n(t) \cdot \mathrm{X}_n(x).$$

По аналогии с формулой (47), получаем скорость изменения тепловой энергии в объеме при наличии источника:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t) = -\left(J_Q(x,t)\Big|_{x=b} + J_Q(x,t)\Big|_{x=a} \right) + Q_s(t).$$

Здесь $Q_s(t)$ - скорость генерации тепловой энергии в объеме среды источником:

$$Q_s(t) = \Sigma \cdot \int_a^b f(x,t)\, dx.$$

Тепловая энергия в объеме изменяется в силу двух причин: втекания (вытекания) через границы и из-за действия источника тепловой энергии.

Задачи и вопросы:

1. В начальный момент времени температура $T = T_0$ была одинакова между точками x_0, x_1 слоя: $a < x_0 \le x \le x_1 < b$. Построить решение уравнения теплопроводности с источником (функцию источника выбрать удобным образом) для граничных условий 1, 2, 3 рода.

2. Среднюю температуру на отрезке $[x_0, x_1]$ определим так:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} T(x,t)\,dx.$$

Найти закон изменения средней температуры во времени в условиях задачи 1.

3. Найти тепловую энергию на отрезке $[x_0, x_1]$ в условиях задачи 1.

4. Найти общее количество тепла, вытекшее через правую границу за все время в условиях задачи 1.

5. Найти скорость вытекания тепла через края капилляра с сечением Σ в условиях задачи 1.

2.2. Теплопроводность, теплопередача, простейшие решения уравнений теплопроводности, неоднородные граничные условия

2.2.1. Простейшие решения нестационарных уравнений теплопроводности

Процесс охлаждения (нагревания) тела можно разделить во времени на две стадии: стадию неупорядоченного (иррегулярного) процесса и стадию упорядоченного (регулярного) режима. Первая из них характеризуется сильным влиянием на температурное поле $T(\mathbf{r},t)$ тела его начального состояния. С течением времени влияние начальных данных на дальнейшее изменение $T(\mathbf{r},t)$ сглаживается. Процесс изменения из иррегулярной стадии переходит в регулярную стадию. В регулярном тепловом режиме закон изменения $T(\mathbf{r},t)$ во времени приобретает простую экспоненциальную форму. Эти выводы можно непосредственно усмотреть из анализа решения уравнения теплопроводности, полученного с помощью метода Фурье, например, для изотропного тела, охлаждающегося в среде с постоянной температурой. Начиная с некоторого момента времени, температура $T(\mathbf{r},t)$ будет с удовлетворительной точностью описываться первым членом ряда Фурье. Начинающийся с этого момента времени режим охлаждения тела был назван Г. М. Кондратьевым регулярным тепловым режимом первого рода. Регулярный режим важен для инженерных расчетов.

Рассмотрим неоднородные граничные условия для уравнения теплопроводности. Граничное условие может быть задано различными способами.

1. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела в любой момент времени

$$T(\mathbf{r},t)\big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = f(\mathbf{r},t).$$

2. Граничное условие второго рода состоит в задании нормальной компоненты плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции времени, т. е.

$$\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t),\mathrm{n}(\mathbf{r})\right)\big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = f(\mathbf{r},t).$$

3. Граничное условие третьего рода характеризует закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой

$$\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t),\mathrm{n}\right)\big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha\cdot\left(T(\mathbf{r},t)\big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} - T_L(t)\right).$$

4. Граничные условия 4 рода – смешанные условия 1 и 3 типов на разных участках границы.

В этих формулах следует использовать закон Фурье

$$\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t) = -k\cdot\nabla T(\mathbf{r},t).$$

Здесь обозначено: $\mathrm{n}(\mathbf{r})$ - внешняя нормаль к поверхности в точке $\mathbf{r}$, Σ - поверхность среды, α - коэффициент теплоотдачи у поверхности, $T_L(t)$ - зависящая от времени температура среды, в которую погружено изучаемое тело.

2.2.2. Регулярный режим первого рода охлаждения неограниченной пластины

Рассмотрим нестационарный режим охлаждения слоя твердого тела (пластины) для неоднородных граничных условий 3 рода:

$$\begin{cases} k\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=a} = -\alpha\cdot\left(T_{L1} - T(x,t)\big|_{x=a}\right), \\ k\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=b} = -\alpha\cdot\left(T(x,t)\big|_{x=b} - T_{L2}\right). \end{cases} \tag{73}$$

Одномерное уравнение теплопроводности в отсутствии источников имеет вид:

$$\begin{cases} c_p\cdot\rho\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t) = k\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t), \\ T(x,0) = F(x). \end{cases}$$

Формальное решение по методу Фурье имеет вид:

$$T(x,t) = \sum_{n=1} C_n(0) \cdot \exp(-\lambda_n \cdot t) \cdot \mathrm{X}_n(x),$$

$$C_n(0) = \int_a^b F(x)\mathrm{X}_n(x)dx.$$

Здесь λ_n, $\mathrm{X}_n(x)$ - скорости затухания и собственные векторы (моды) задачи Штурма-Лиувилля, удовлетворяющие необходимым стационарным граничным условиям. При достаточно большом времени наблюдения в ряду Фурье можно оставить слагаемое с минимальной скоростью затухания λ_1. В этих условиях решение приближенно имеет вид:

$$T(x,t) \approx C_1 \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot t) \cdot \mathrm{X}_1(x),$$

$$C_1 = \int_a^b F(x)\mathrm{X}_1(x)dx.$$

Возьмем логарифм от $T(x,t)$:

$$\ln(T(x,t)) = -\lambda_1 \cdot t + \ln(C_1 \cdot \mathrm{X}_1(x)).$$

По истечении достаточного времени после начала охлаждения наступает регулярный режим 1 рода, отличительной особенностью которого является постоянство скорости изменения логарифма температуры со временем для всех точек тела:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(T(x,t)) = -\lambda_1.$$

Определим важнейшую характеристику регулярного режима - *темп охлаждения (нагревания)* - λ_1. Темп охлаждения разных точек тела одинаков. Это положение определяет регулярный режим 1 рода. Выберем две произвольные точки в слое, получаем выражение для темпа охлаждения:

$$\lambda_1 = \frac{\ln(T(x_1,t_1)) - \ln(T(x_2,t_2))}{t_2 - t_1}.$$

В стадии регулярного режима температурное поле остается при изменении времени подобным самому себе:

$$\frac{T(x_1,t_1)}{T(x_2,t_2)} = \exp(-\lambda_1 \cdot (t_2 - t_1)).$$

2.2.3. Оценки темпа охлаждения произвольного тела

Тело объемом V и площадью поверхности Σ, объемной плотностью массы ρ, удельной теплоемкостью c_p, с коэффициентом теплопроводности k, коэффициентом температуропроводности κ погружено в подвижную среду с коэффициентом теплоотдачи γ

поверхности α. Используют следующую формулу для оценки темпа охлаждения λ_1 - закон пропорциональности:

$$\lambda_1 = \Psi \cdot \frac{\alpha \cdot \Sigma}{c_p \cdot \rho \cdot V} = \Psi \cdot \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{k}{c_p \cdot \rho \cdot} \cdot \frac{\Sigma}{V} = \Psi \cdot \frac{h \cdot \kappa}{l}. \tag{74}$$

Здесь $h = \frac{\alpha}{k}$, Ψ - коэффициент пропорциональности, l - эффективный размер тела. Удобно ввести число Био:

$$Bi = K \cdot \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\Sigma}{V} = K \cdot \frac{h}{l}.$$

Число Био Bi определяется через коэффициент формы тела K. Коэффициент формы определяется через предел:

$$\lambda_1 \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} \lambda_\infty = \kappa \cdot K^{-1}.$$

Для простых тел коэффициент формы K рассчитан. Например: шар радиуса R

$$K = \left(\frac{R}{\pi}\right)^2,$$

цилиндр радиуса R и длиной L

$$K = \frac{1}{\left(2.405 \cdot R^{-1}\right)^2 + \left(\pi \cdot L^{-1}\right)^2},$$

параллелепипед со сторонами L_1, L_2, L_3

$$K = \frac{1}{\pi^2 \left(L_1^{-2} + L_2^{-2} + L_3^{-2}\right)}.$$

Получена оценочная формула для коэффициента пропорциональности Ψ:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + 1.44 \cdot Bi + Bi^2}}.$$

С помощью Ψ и числа Био получаем оценочную формулу для темпа охлаждения (нагрева) в безразмерном виде:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} = \Psi \cdot Bi.$$

2.2.4. Поиск коэффициента формы K для пластины

Найдем K - коэффициент формы тела по формуле $\lambda_\infty = \kappa \cdot K^{-1}$ для пластины, решив одномерное уравнение теплопроводности методом Фурье. Пластина толщиной L погружена в подвижную среду с температурой $T_{L1} = T_{L2} = T_L$. Получаем уравнение с неоднородными граничными условиями 3 рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \kappa \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=a} = h \cdot \left(T(x,t)\big|_{x=a} - T_L\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=b} = -h \cdot \left(T(x,t)\big|_{x=b} - T_L\right), \\ T(x,0) = F(x). \end{cases}$$

Здесь $h = \alpha \cdot k^{-1}$. Введем обозначение избыточной температуры $\Theta(x,t) = T(x,t) - T_L$. Получаем уравнение для $\Theta(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Theta(x,t) = \kappa \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta(x,t), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Theta(x,t)\Big|_{x=a} = h \cdot \Theta(x,t)\big|_{x=a}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Theta(x,t)\Big|_{x=b} = -h \cdot \Theta(x,t)\big|_{x=b}, \\ \Theta(x,0) = F(x) - T_L. \end{cases}$$

Базис Фурье находим из уравнения:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{X_n}(x) = -\lambda_n \cdot \mathrm{X_n}(x), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=a} = h \cdot \mathrm{X_n}(x)\big|_{x=a}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{X_n}(x)\Big|_{x=b} = -h \cdot \mathrm{X_n}(x)\big|_{x=b}. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\mathrm{X_n}(x) = A_n \cdot \cos(\gamma_n \cdot x) + B_n \cdot \sin(\gamma_n \cdot x).$$

Подставим граничные условия (положим $a = 0,\ b = L$):

$$\begin{cases} A_n \cdot h - B_n \cdot \gamma_n = 0, \\ A_n \cdot \left(h \cdot \cos(\gamma_n L) - \gamma_n \cdot \sin(\gamma_n L)\right) + B_n \cdot \left(\gamma_n \cdot \cos(\gamma_n L) + h \cdot \sin(\gamma_n L)\right) = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы равен:

$$\mathrm{Det}(\gamma_n) = 2 \cdot h \cdot \gamma_n \cdot \cos(\gamma_n \cdot L) + \left(h^2 - \gamma_n{}^2\right) \cdot \sin(\gamma_n \cdot L) = 0. \qquad (75)$$

Формула для константы деления переменных:

$$\lambda_n = \kappa \cdot \gamma_n{}^2.$$

Найдем минимальное значение γ_n в пределе $\alpha \to \infty$ (в данном случае $h \to \infty$). В пределе $h \to \infty$ уравнение преобразуется:

$$2 \cdot \gamma_n \cdot \cos(\gamma_n \cdot L) + h \cdot \sin(\gamma_n \cdot L) = 0.$$

При $h \to \infty$, для получения конечного результата, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sin(\gamma_n \cdot L) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0.$$

Но это условие определяет собственные числа для однородных граничных условий 1 рода (как и ожидалось, в пределе граничные условия 3 типа переходят в граничные условия 1 типа). Получаем

$$\gamma_\infty \cdot L = n \cdot \pi \quad n = 1, 2.... .$$

Получаем темп охлаждения (нагревания) в пределе $\alpha \to \infty$ из формулы $\lambda_n = \kappa \cdot \gamma_n{}^2$. Здесь надо выбрать минимальное число γ_∞ при $n = 1$:

$$\lambda_\infty = \kappa \cdot \gamma_\infty{}^2 = \kappa \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \kappa \cdot \frac{1}{K}.$$

Из этого соотношения коэффициент формы пластины имеет вид:

$$K = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2.$$

2.2.5. Теорема Г. М. Кондратьева для регулярного режима 1 рода

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности в трехмерном варианте для неоднородных граничных условий 3 рода. Тело погружено в подвижную среду с температурой T_L и коэффициентом теплоотдачи у поверхности α. Уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r}, t)\right), \\ \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r}, t), \mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha \cdot \left(T(\mathbf{r}, t)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} - T_L\right), \\ T(\mathbf{r}, 0) = F(\mathbf{r}). \end{cases}$$

Закон Фурье имеет вид:

$$\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r}, t) = -k \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t).$$

Введем избыточную температуру

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{r}, t) - T_L,$$

и перепишем уравнение теплопроводности в виде:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} \Theta(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r}, t)\right), \\ \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r}, t), \mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha \cdot \Theta(\mathbf{r}, t)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma}, \\ \Theta(\mathbf{r}, 0) = F(\mathbf{r}) - T_L. \end{cases} \tag{76}$$

Воспользуемся методом Г. М. Кондратьева, введем средние по объему и по поверхности избыточные температуры $\Theta_V(t)$ и $\Theta_\Sigma(t)$:

$$\Theta_V(t) = \frac{1}{V}\iiint_V \Theta(\mathbf{r},t)\,dV,$$

$$\Theta_\Sigma(t) = \frac{1}{\Sigma}\iint_\Sigma \Theta(\mathbf{r},t)\,d\Sigma.$$

Проинтегрируем уравнение теплопроводности (76) по объему тела:

$$\begin{aligned} c_p \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Theta_V(t) &= -\iiint_V \operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right)dV = \\ &= -\iint_\Sigma \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t),\mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} d\Sigma = -\alpha\cdot\Sigma\cdot\Theta_\Sigma(t) \end{aligned} . \tag{77}$$

Получаем, согласно преобразованиям Г.М. Кондратьева, уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_V(t) = -\frac{\alpha}{k}\cdot\frac{k}{c_p\cdot\rho}\cdot\frac{\Sigma}{V}\cdot\frac{\Theta_\Sigma(t)}{\Theta_V(t)}\cdot\Theta_V(t).$$

По идее Г.М. Кондратьева, введем коэффициент пропорциональности Ψ по формуле

$$\Psi = \frac{\Theta_\Sigma(t)}{\Theta_V(t)}.$$

Нетрудно увидеть, что для регулярного режима 1 рода коэффициент пропорциональности не зависит от времени. Получаем уравнение для регулярного режима 1 рода

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_V(t) = -\lambda_1\cdot\Theta_V(t),$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{k}\cdot\frac{k}{c_p\cdot\rho}\cdot\frac{\Sigma}{V}\cdot\Psi = h\cdot\kappa\cdot\frac{\Sigma}{V}\cdot\Psi.$$

Формула согласуется с выражением (74).

Рассмотрим теорему Г.М. Кондратьева, которая изучает регулярный режим 1 рода при разных числах Био. Вводят определение внешнего термического сопротивления

$$R_{out} = \alpha^{-1},$$

и определение внутреннего термического сопротивления

$$R_{in} = \frac{\xi}{k},$$

$$\xi = \frac{\Sigma}{V}\cdot K.$$

Тогда число Био удобно записать так :

$$Bi = \frac{\alpha}{k}\cdot\frac{\Sigma}{V}\cdot K = \frac{R_{in}}{R_{out}}.$$

1. Первое утверждение Г.М. Кондратьева. Рассмотрим режим охлаждения при $Bi \ll 1$ $\left(Bi < 0.1\right)$. Такой режим возможен, если тело с малым характерным размером (малым внутренним термическим сопротивлением

R_{in}) погружено в жидкость с большим внешним термическим сопротивлением (малым коэффициентом теплоотдачи α). В этом случае регулярный режим наступает очень быстро, температура выравнивается по объему тела и приближается к температуре поверхности. Тогда:

$$\Theta_V(t) = \frac{1}{V}\iiint_V \Theta(\mathbf{r},t)\,dV \approx \frac{1}{V}\iiint_V \Theta_C\,dV \approx \Theta_C,$$

$$\Theta_\Sigma(t) = \frac{1}{\Sigma}\iint_\Sigma \Theta(\mathbf{r},t)\,d\Sigma \approx \frac{1}{\Sigma}\iint_\Sigma \Theta_C\,d\Sigma \approx \Theta_C.$$

Коэффициент пропорциональности:

$$\Psi = \frac{\Theta_\Sigma(t)}{\Theta_V(t)} \approx \frac{\Theta_C}{\Theta_C} = 1.$$

В этом случае процесс нагрева (охлаждения) тела определяется интенсивностью теплоотдачи на поверхности пластины. Задача становится внешней.

2. Второе утверждение Г.М. Кондратьева. Рассмотрим режим охлаждения при условии, что $Bi \gg 1$ $(Bi > 100)$. Если число Bi стремится к бесконечности, то это означает, что параметр теплоотдачи поверхности гораздо больше коэффициента теплопроводности тела. Тогда внешняя поверхность тела приобретает температуру, близкую к температуре жидкости (граничное условие 3 рода приближается к граничному условию 1 рода). И в регулярном режиме в этом случае

$$\Theta_\Sigma(t) \ll \Theta_V(t),$$

$$\Psi \approx 0.$$

3. Третье утверждение Г.М. Кондратьева. Режим охлаждения $0.1 \le Bi \le 100$. В этом случае интенсивность процесса охлаждения определяется как внешним, так и внутренним термическими сопротивлениями, и коэффициент пропорциональности Ψ лежит между нулем и единицей.

Задачи и вопросы:

1. Найти количество тепла, вытекшее через границы слоя $\delta = 5\ см$, за время действия регулярного режима первого рода, для однородного граничного условия первого типа для веществ: а) мрамор, в) медь, с) углекислота. За начало режима принять момент t_1, равный $t_1 = \frac{2}{\lambda_{\min}}$. В начальный момент времени температура слоя была постоянна и равна $100\ ^\circ C$.

2. Найти количество тепла, вытекшее через границы слоя $\delta = 2\ см$, за время действия регулярного режима первого рода, для однородного граничного условия третьего типа для веществ: а) кирпич, в) медь, с)

гелий. За начало режима принять момент t_1, равный $t_1 = \dfrac{2}{\lambda_{\min}}$. В начальный момент времени температура слоя была постоянна и равна $100\ {}^\circ C$.

3. Найти массу вещества, вытекшее через границы слоя $\delta = 50\ см$, за время действия регулярного режима первого рода в процессе диффузии, для однородного граничного условия первого типа для веществ: а) аргон в гелии, в) водород в воздухе, с) кислород в азоте. За начало режима принять момент t_1, равный $t_1 = \dfrac{2}{\lambda_{\min}}$. В начальный момент времени в слое было 2 грамма диффундирующего вещества.

4. Найти количество вещества, вытекшее через границы слоя $\delta = 20\ см$, за время действия регулярного режима первого рода в процессе диффузии, для однородного граничного условия третьего типа для веществ: а) водород в метиловом спирте, в) воздух в уксусной кислоте, с) кислород в бензоле. За начало режима принять момент t_1, равный $t_1 = \dfrac{2}{\lambda_{\min}}$. В начальный момент времени в слое было 3 грамма диффундирующего вещества.

5. Пластина из стали остывает в среде с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_2 = 35\ Bm\big/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$. Определить интервал времени, в течение которого температура пластины будет отличаться от температуры окружающей среды не более чем на 1 процент. Начальная температура пластины $T_0 = 500\ {}^\circ C$, $T_L = 20\ {}^\circ C$, $\delta = 20\,мм$. Убедиться, что $Bi << 1$, в этом случае регулярный режим первого рода наступает сразу.

2.2.6. Регулярный режим второго рода

Для приближенного решения нестационарных уравнений диффузии или теплопроводности различают регулярный режим второго рода, при котором температура в любой точке тела является линейной функцией времени

$$\frac{\partial}{\partial t} T\left(x,t\right) = const .$$

Такой режим нагревания тела возможен, когда температура окружающей среды является линейной функцией времени (неоднородные граничные условия третьего рода):

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right), \\ \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t),\mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha \cdot \left(T(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} - T_L(t)\right), \\ T_L(t) = T_0 + B \cdot t, \\ T(\mathbf{r},0) = T_0. \end{cases}$$

Рассмотрим простейший режим, когда температура среды медленно меняется. Небольшое тело в условиях $Bi \ll 1$ имеет начальную температуру T_0, равную температуре окружающей среды, и с момента $t = 0$ среда нагревается линейно по времени со скоростью B. Найдем изменение температуры тела во времени. Интегрируем уравнение по объему, по аналогии с (77), и используем значение коэффициента пропорциональности $\Psi = 1$. Получаем:

$$c_p \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_V(t) = -\alpha \cdot \left(T(t) - T_0 - B \cdot t\right) \cdot \Sigma,$$

$$T(0) = T_0.$$

Решение:

$$T(t) = T_0 + B \cdot t - \frac{B}{\lambda_1}\left(1 - \exp(-\lambda_1 \cdot t)\right) = T_L(t) - \frac{B}{\lambda_1}\left(1 - \exp(-\lambda_1 \cdot t)\right),$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\Sigma}{V} \cdot \kappa .$$

Получаем темп нагревания, не зависящий от времени, если под темпом понимать:

$$\frac{-1}{T(t) - T_L(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \lambda_1 .$$

Отметим эффект инерции. При $t \to \infty$ получаем

$$T(t) = T_L(t) - \frac{B}{\lambda_1}.$$

То есть температура тела отстает от температуры среды на величину $\dfrac{B}{\lambda_1}$.

Задачи и вопросы:

1. Пластина из алюминия имеет толщину $\delta = 20\ см$ остывает в среде с коэффициентом теплообмена $\alpha = 10\ ккал\big/\left(м^2 \cdot час \cdot {}^\circ C\right)$ при условии $Bi << 1$. Найти отставание температуры тела от температуры среды. Температура среды меняется во времени с постоянной скоростью $B = 8\ {}^\circ C/час$.

2.2.7. Регулярный режим третьего рода

Здесь температура окружающей среды колеблется по периодическому закону с угловой частотой ω

$$T_L(t) = T_0 + A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Решим уравнение

$$c_p \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(t) = -\alpha \cdot \left(T(t) - T_L(t)\right) \cdot \Sigma,$$
$$T(0) = T_0.$$

Или:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t) = -\lambda_1 \cdot \left(T(t) - T_L(t)\right),$$
$$T(0) = T_0,$$
$$\lambda_1 = h \cdot \kappa \cdot \frac{\Sigma}{V}.$$

Здесь $\Psi = 1$. Решение имеет вид:

$$T(t) = \exp(-\lambda_1 \cdot t) \cdot \left(T_0 + \lambda_1 \cdot \int_0^t \exp(\lambda_1 \cdot t') \cdot T_L(t') dt' \right).$$

Интегрирование дает результат:

$$T(t) = T_0 + A \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\cos(\omega \cdot t - \varphi) - \cos(\varphi) \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot t)\right).$$

Здесь введены обозначения:

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}}, \ \sin(\varphi) = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}}.$$

В пределе $t \to \infty$ переходные процессы исчезают, появляется установившийся режим охлаждения:

$$T(t) = T_0 + A \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi). \qquad (78)$$

Получаем периодический режим с измененной амплитудой колебаний и с фазовым сдвигом. Этот режим еще называют режимом температурных волн. Периодическое нагревание среды генерирует в среде тепловые волны. Экспериментально модулируют температуру среды и в регулярном режиме измеряют температуру на поверхности, измеряют амплитуду и сдвиг фазы.

Задачи и вопросы:

1. Тонкая стеклянная пластина толщиной $L = 1\,см$ омывается водой, температура которой по закону $T_L(t) = T_0 + A \cdot \cos(\omega \cdot t)$, где $T_0 = 50\ ^\circ C$, $A = 20\ ^\circ C$, с частотой $\nu = 2 сек^{-1}$. Найти амплитуду колебаний поверхности пластины и сдвиг фаз колебаний в установившемся режиме. Проверить условие применимости формулы (78).

2.2.8. Регулярный режим с источником тепла

Добавим к уравнению теплопроводности источник тепла $W(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right) + W(\mathbf{r},t), \\ \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t), \mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha \cdot \left(T(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} - T_L\right). \end{cases}$$

Или через избыточную температуру $\Theta(\mathbf{r},t) = T(\mathbf{r},t) - T_L$:

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} \Theta(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right) + W(\mathbf{r},t), \\ \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t), \mathrm{n}\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \alpha \cdot \Theta(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma}. \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение по объему тела:

$$\begin{aligned} c_p \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Theta_V(t) &= -\iiint_V \mathrm{div}\left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t)\right) dV + \iiint_V W(\mathbf{r},t)\, dV = \\ &= -\iint_\Sigma \left(\boldsymbol{I}_Q(\mathbf{r},t), \mathrm{n}\right) d\Sigma + V \cdot c_p \cdot \rho \cdot w(t) = -\alpha \cdot \Sigma \cdot \Theta_\Sigma(t) + V \cdot c_p \cdot \rho \cdot w(t) \end{aligned}.$$

Здесь средние избыточные температуры:

$$\Theta_V(t) = \frac{1}{V}\iiint_V \Theta(\mathbf{r},t)\, dV,$$

$$\Theta_\Sigma(t) = \frac{1}{\Sigma}\iint_\Sigma \Theta(\mathbf{r},t)\, d\Sigma.$$

Получаем уравнение регулярного режима в присутствии источника при $\Psi = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_V(t) = -\lambda_1 \cdot \Theta_V(t) + w(t).$$

Здесь определен средний по объему источник тепла:

$$w(t) = \frac{1}{c_p \cdot \rho \cdot V} \cdot \iiint_V W(\mathbf{r},t)\, dV.$$

Решим уравнение с начальными данными (избыточная температура в начальный момент выше температуры среды – остывание тела):

$$\Theta_V(t)\Big|_{t=0} = \Theta_{V0} \geq 0.$$

Решение имеет вид:

$$\Theta_V(t) = \exp(-\lambda_1 \cdot t) \cdot \left(\Theta_{V0} + \int_0^t \exp(\lambda_1 \cdot t) \cdot w(t')\, dt'\right). \qquad (79)$$

В качестве примера выберем факторизованную по времени и координатам функцию источника

$$W(x,t) = W_x(x) \cdot W_t(t).$$

Допустим:

$$W_x\left(x\right)=\begin{cases} W_x^0,\ L_1\le x\le L_2 \\ 0,\ 0\le x\le L_1,\quad L_2\le x\le L \end{cases}.$$

Источник включается в момент $t=0$ и выключается в момент $t=t_0$

$$w\left(t\right)=\frac{W_x^0\cdot\Delta L}{c_p\cdot\rho\cdot L}\cdot W_t\left(t\right),$$

$$W_t\left(t\right)=\begin{cases} W_t^0,\ 0<t\le t_0 \\ 0,\quad t_0<t \end{cases}.$$

Источник отработал в интервале времени $0<t\le t_0$ и выключился. Интеграл в этом случае имеет вид ($\Delta L=L_2-L_1$):

$$\exp\left(-\lambda_1\cdot t\right)\cdot\int\limits_0^t\exp\left(\lambda_1\cdot t'\right)\cdot w\left(t'\right)dt'=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{W_x^0\cdot\Delta L}{c_p\cdot\rho\cdot L}\cdot\dfrac{W_t^0}{\lambda_1}\cdot\left(1-\exp\left(-\lambda_1\cdot t\right)\right),\ 0\le t\le t_0, \\ \dfrac{W_x^0\cdot\Delta L}{c_p\cdot\rho\cdot L}\cdot\dfrac{W_t^0}{\lambda_1}\cdot\left(1-\exp\left(-\lambda_1\cdot t_0\right)\right)\cdot\exp\left(-\lambda_1\cdot\left(t-t_0\right)\right),\ t_0\le t \end{cases}.$$

Избыточная температура выходит на промежуточный стационарный режим, при условии $\lambda_1\cdot t_0>1$:

$$\Theta_V\left(t\right)=\begin{cases} \Theta_{V0}\cdot\exp\left(-\lambda_1\cdot t\right)+\dfrac{W_x^0\cdot\Delta L}{c_p\cdot\rho\cdot L}\cdot\dfrac{W_t^0}{\lambda_1}\cdot\left(1-\exp\left(-\lambda_1\cdot t\right)\right),\ 0\le t\le t_0, \\ \dfrac{W_x^0\cdot\Delta L}{c_p\cdot\rho\cdot L}\cdot\dfrac{W_t^0}{\lambda_1}\cdot\exp\left(-\lambda_1\cdot\left(t-t_0\right)\right),\ t_0\le t. \end{cases}$$

Задачи и вопросы:

1. В медной пластине толщиной $L=1\ м$ имеется нагреватель шириной $\Delta L=10\ см$ с объемной плотностью мощности $100\ Вт\cdot м^{-3}$. Нагреватель работал в течение $10\ мин$. Пластина помещена в воду с температурой $50\,^{\circ}C$. Найти температуру пластины в момент времени $20\ мин$ от момента включения нагревателя. Проверить справедливость приближенного решения (79) для условий задачи.

2.3. Теплопроводность (диффузия) для неограниченного или полуограниченного пространства

2.3.1. Метод фундаментального решения для нестационарного уравнения теплопроводности и диффузии для неограниченного пространства

Изучим закономерности распространения тепла (или диффундирующей примеси) в открытом, без границ, свободном пространстве. Будем решать задачу Коши с заданным начальным распределением температуры в неограниченном пространстве. Неоднородное уравнение распространения с источником и начальные данные имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}U(\mathbf{r},t) = a^2 \cdot \Delta U(\mathbf{r},t) + F(\mathbf{r},t), \\ &U(\mathbf{r},t)\big|_{t=0} = \Phi(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{80}$$

Под искомой функцией $U(\mathbf{r},t)$ будем понимать температуру среды $T(\mathbf{r},t)$, если под a^2 понимать коэффициент температуропроводности κ, или концентрацию диффундирующей примеси $\rho(\mathbf{r},t)$, если под a^2 понимать коэффициент диффузии D.

Решение (80) будем искать методом трехмерного преобразования Фурье. Определим для функции $U(\mathbf{r},t)$ координатное преобразование Фурье $\tilde{U}(\omega,t)$ по формуле

$$\tilde{U}(\omega,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\cdot(\omega,\mathbf{r})\right)\cdot U(\mathbf{r},t)\,d^3r \ . \tag{81}$$

Будем предполагать требуемую сходимость интеграла Фурье от функции $U(\mathbf{r},t)$ и ее частных производных по времени и до второго порядка по координатам. Совершим преобразование Фурье левой и правой части уравнения (80). Для левой части

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\cdot(\omega,\mathbf{r})\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}U(\mathbf{r},t)\,d^3r = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}(\omega,t) \ .$$

Производную по независимой переменной выносим за пределы интеграла. Для правой части

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\cdot(\omega,\mathbf{r})\right)\cdot a^2\cdot\Delta U(\mathbf{r},t)\,d^3r = -|\omega|^2\cdot a^2\cdot\tilde{U}(\omega,t) \ .$$

Формула доказывается интегрированием по частям, в предположении необходимой сходимости интегралов и стремлении к нулю решений на бесконечности. Начальное условие на искомый образ Фурье $\tilde{U}(\omega,t)$ получаем из (81), полагая $t=0$:

$$\tilde{U}(\omega,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\cdot(\omega,\mathbf{r})\right)\cdot\Phi(\mathbf{r})d^3r=\tilde{\Phi}(\omega)\ . \tag{82}$$

Получаем уравнение для образа Фурье искомого решения задачи (80):

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}(\omega,t)=-|\omega|^2\cdot a^2\cdot\tilde{U}(\omega,t)+\tilde{F}(\omega,t),$$
$$\tilde{U}(\omega,0)=\tilde{\Phi}(\omega).$$

Решение имеет вид:

$$\tilde{U}(\omega,t)=\exp\left(-|\omega|^2\cdot a^2\cdot t\right)\cdot\tilde{\Phi}(\omega)+\int_0^t\exp\left(-|\omega|^2\cdot a^2\cdot(t-t')\right)\tilde{F}(\omega,t')dt'\ . \tag{83}$$

Выполним обратное преобразование Фурье. Первое слагаемое правой части принимает вид:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\cdot(\omega,\mathbf{r})\right)\cdot\exp\left(-|\omega|^2\cdot a^2\cdot t\right)\cdot\tilde{\Phi}(\omega)d^3\omega\equiv\Gamma(\mathbf{r},t).$$

Используем формулу (82), переставим порядок интегрирования, получим преобразованную функцию $\Gamma(\mathbf{r},t)$:

$$\Gamma_1(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\cdot\Phi(\mathbf{r}')\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\omega\cdot\exp\left(i\left(\omega,(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)-|\omega|^2\cdot a^2\cdot t\right).$$

Обозначим трехмерное ядро Пуассона:

$$G(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\omega\cdot\exp\left(i(\omega,\mathbf{r})-|\omega|^2\cdot a^2\cdot t\right)=$$
$$=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi\cdot t\cdot a^2}\right)^3}\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\cdot t\cdot a^2}\right).$$

Ядро Пуассона называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Для получения этой формулы использован табличный интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-p^2x^2\pm qx\right)dx=\exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{p}\ .$$

Перепишем функцию $\Gamma(\mathbf{r},t)$ в виде свертки ядра с функцией начальных данных

$$\Gamma_1(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\cdot\Phi(\mathbf{r}')\cdot G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)\ .$$

Выполним обратное преобразование Фурье от второго слагаемого правой части (83) и обозначим его $\Gamma_2(\mathbf{r},t)$. Аналогичные преобразования выражают $\Gamma_2(\mathbf{r},t)$ через свертку с функцией источника тепла:

$$\Gamma_2(\mathbf{r},t)=\int_0^t dt'\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^3r'\cdot F(\mathbf{r}',t')\cdot G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t').$$

Окончательно решение задачи (80) имеет вид:

$$U(\mathbf{r},t)=\Gamma_1(\mathbf{r},t)+\Gamma_2(\mathbf{r},t).$$

Задачи и вопросы:

1. Решить задачу Коши для одномерного однородного уравнения теплопроводности в бесконечном стержне с начальным распределением температуры вдоль стержня:

$$T(x,t)\Big|_{t=0}=\begin{cases}A\cdot\exp(-\alpha\cdot x), & 0\le x<\infty\\ 0 & -\infty<x<0\end{cases}.$$

Использовать фундаментальное решение и интеграл Пуассона.

2. Проверить, что решение одномерного уравнения теплопроводности равно

$$T(x,t)=\frac{Q}{c_p\cdot\rho\cdot\Sigma}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi\cdot t\cdot a^2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4\cdot t\cdot a^2}\right),$$

при условии, что в начальный момент $t=0$ в окрестности точки $x=0$ было выделено количество тепла Q. Тепло распространяется в бесконечном цилиндре с поперечным сечением Σ. Здесь x - координата вдоль оси цилиндра.

2.3.2. Тепловые волны в полуограниченной среде

В приложениях встречаются задачи теплопроводности с периодическими граничными условиями для полуограниченной среды. Так, например, стенка цилиндра подвержена периодическому нагреванию и представляет интерес распределение температуры за стенкой вне цилиндра. Поверхность Земли подвержена периодическому суточному нагреванию и охлаждению и представляет интерес распределение температуры под поверхностью в зависимости от глубины.

Рассмотрим уравнение теплопроводности в полуограниченной среде в области $x>0$, при условии, что температура не зависит от координат y,z. То есть рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности в области $x>0$ с периодичным граничным условием в точке $x=0$. Начальные условия не формулируются, так как будем искать установившееся периодическое решение задачи в условиях, когда переходные процессы затухли. Периодический тепловой процесс на границе генерирует в среде так называемые температурные волны. Поставим себе задачу найти характеристики этих тепловых волн. Итак, рассмотрим граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \kappa \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t), \\ T(x,t)\big|_{x=0} = T_a + T_0 \cdot \exp(i\omega t). \end{cases} \tag{84}$$

Решать задачу в комплексной форме удобнее, так как в силу линейности задачи мнимая и вещественная часть решения (84) также является решением (с соответствующими граничными условиями). Установившееся решение будем искать в форме

$$T(x,t) = T_a + T_0 \cdot \exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot t) \ . \tag{85}$$

Здесь комплексные коэффициенты α, β подбираются так, чтобы $T(x,t)$ удовлетворяла задаче. Подставим (85) в уравнения (84), получаем равенства:

$$\kappa \cdot \alpha^2 = \beta,$$

$$\beta = i\omega = \omega \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right).$$

Запишем параметр α в экспоненциальной форме

$$\alpha = |\alpha| \cdot \exp(i\phi) \ .$$

Получаем параметры решения:

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}},$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Извлечение квадратного корня из комплексного числа дает два значения фазы решения. Два решения (85) имеют вид:

$$T_+(x,t) = T_a + T_0 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right) \cdot \exp\left(i\left(\omega \cdot t + \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right)\right),$$

$$T_-(x,t) = T_a + T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right) \cdot \exp\left(i\left(\omega \cdot t - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right)\right) \ .$$

Очевидно решение $T_+(x,t)$ не имеет физического смысла для неограниченной среды, так как стремится к бесконечности с увеличением x. Обозначим вещественную часть решения $T_-(x,t)$:

$$T(x,t) = \mathrm{Re}\left(T_-(x,t)\right) = T_a + T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right). \tag{86}$$

Это периодическое решение удовлетворяет граничному условию

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_a + T_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Решение (86) описывает температурную волну, амплитуда которой $T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cdot x\right)$ убывает экспоненциально с увеличением координаты x. Период τ колебаний температуры определяется периодом колебаний граничных условий

$$\tau = 2\pi \cdot \omega^{-1} .$$

Волновое число определяется по формуле

$$\Lambda = 2\pi \cdot \lambda^{-1} = \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} .$$

Отсюда длина волны

$$\lambda = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} .$$

Скорость v распространения тепловой волны равна

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \omega} .$$

Отметим два свойства тепловой волны. 1. Глубина проникновения волны в среду возрастает с увеличением периода колебаний. 2. Глубина проникновения волны в среду возрастает с увеличением коэффициента температуропроводности среды.

Задачи и вопросы:

1. Найти характерную глубину проникновения тепловой волны в среду, на поверхности которой действует периодический нагрев по закону

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_a + T_0 \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

с параметрами: период $\tau = 24\, \textit{часа}$, средняя температура $T_a = 15\,^\circ C$, амплитуда $T_0 = 30\,^\circ C$. Рассмотреть три случая: а) чугун, в) дерево, с) кирпич.

2. Найти плотность теплового потока в полуограниченной среде на глубине, равной длине волны температурной волны, вызванной периодическим изменением температуры на поверхности среды по закону, данному в задаче 1. Найти максимальное значение теплового потока в этой точке. Рассмотреть три случая: а) пробка, в) медь, с) вода.

3. Найти скорость перемещения максимума теплового потока, создаваемого в полуограниченной среде колебаниями температуры на поверхности по закону

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_a + T_0 \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

(периодическое протапливание паронагревателем). Параметры нагревания: период $\tau = 24\, \textit{часа}$, средняя температура $T_a = 25\,^\circ C$, амплитуда $T_0 = 50\,^\circ C$. Среда выполнена из: а) стекло, в) алюминий, с) бетон.

4. Измерения показывают, что годовые температурные колебания имеют амплитуды колебаний, равные $11.5\,^\circ C$, на глубине $1\,м$, $6.8\,^\circ C$ на $2\,м$, $4.2\,^\circ C$ на $3\,м$, $2.6\,^\circ C$ на $4\,м$. На поверхности амплитуда колебаний $19.5\,^\circ C$. Определить коэффициент температуропроводности почвы. Определить время запаздывания максимальной температуры на глубине $4\,м$ по отношению к соответствующему моменту на поверхности.

2.4. Конечно-разностные методы решений уравнений теплопроводности и диффузии

Решим численными методами одномерное уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t) = k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) + g(x,t), \\ T(x,t)\Big|_{t=0} = \Phi(x) \qquad 0 \le x \le L, \\ \left(s_1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t) - h_1 \cdot T(x,t)\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \\ \left(s_2 \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}T(x,t) + h_2 \cdot T(x,t)\right)\Bigg|_{x=L} = 0. \end{cases} \tag{87}$$

При решении уравнений в частных производных сеточными методами получают приближенные значения искомой функции на сетке пространственных и временных узлов (сеточная функция). В случае необходимости можно построить интерполяционную формулу для приближенного представления решения между узлами. Дифференциальное уравнение на сетке заменяется на разностное. При этом возникают следующие проблемы:

1) сходится ли точное решение разностной задачи к решению дифференциальной (вопрос *сходимости*)

2) насколько сильно изменяется решение разностной задачи, если при вычислениях допускаются погрешности, и насколько сильно решение зависит от изменения начальных данных (вопрос *устойчивости*)

3) какова *погрешность аппроксимации*, то есть погрешность, вносимая при замене дифференциальной операции на разностную (вопрос *порядка аппроксимации*).

В случае линейных дифференциальных уравнений разностное уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Чтобы получить эту систему, необходимо дифференциальным операциям (производным по времени и по координатам) сопоставить соответствующую конечно-разностную схему. На конечно-разностные уравнения необходимо заменить само уравнение и граничные условия. Порядок аппроксимации рассчитывается с помощью разложения функции и ее производных в ряды Тейлора в точках сетки узлов с использованием *шаблона*. Так, если остаточное слагаемое оценивается как $O\left(h^k\right)$, где h - шаг равномерной сетки x_m по координате x , то порядок аппроксимации равен k. Найдем конечно-разностное выражение для второй производной произвольной функции $f\left(x\right)$ с порядком аппроксимации $k=2$ на шаблоне $\underset{m-1}{\circ}-\underset{m}{\bullet}-\underset{m+1}{\circ}$. Здесь под черным кружком отмечен номер узла, в котором надо вычислить производную, и эта производная должна быть выражена через значения функции на остальных узлах шаблона. Другими словами, для данного шаблона надо найти коэффициенты a_0,a_1,a_2 в выражении

$$f''\left(x_m\right)=a_0\cdot f\left(x_{m-1}\right)+a_1\cdot f\left(x_m\right)+a_2\cdot f\left(x_{m+1}\right)+O\left(h^2\right).$$

Для этого используем разложение Тейлора до третьего порядка по h

$$\begin{gathered} f\left(x_{m+1}\right)=f\left(x_m\right)+f'\left(x_m\right)\cdot h+f''\left(x_m\right)\cdot\frac{h^2}{2}+f'''\left(x_m\right)\cdot\frac{h^3}{6}+O\left(h^4\right), \\ f\left(x_{m-1}\right)=f\left(x_m\right)-f'\left(x_m\right)\cdot h+f''\left(x_m\right)\cdot\frac{h^2}{2}-f'''\left(x_m\right)\cdot\frac{h^3}{6}+O\left(h^4\right) \end{gathered}.$$

Сложим эти два уравнения, получим требуемое разложение

$$f''\left(x_m\right)=\frac{f\left(x_{m+1}\right)+f\left(x_{m-1}\right)-2\cdot f\left(x_m\right)}{h^2}+O\left(h^2\right)\ . \qquad (88)$$

Используем шаблон $\underset{0}{\bullet}-\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}$ для аппроксимации первой производной произвольной функции $f\left(x\right)$ с точностью $O\left(h^2\right)$ в *левом* граничном условии (87). Получаем:

$$f_x\left(x_0\right)=\frac{4\cdot f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)-3\cdot f\left(x_0\right)}{2\cdot h}+O\left(h^2\right)\ . \qquad (89)$$

Обозначим n - номер последнего узла координатной сетки. Используем шаблон $\underset{n-2}{\circ}-\underset{n-1}{\circ}-\underset{n}{\bullet}$ для аппроксимации первой производной произвольной функции $f\left(x\right)$ с точностью $O\left(h^2\right)$ в *правом* граничном условии (87). Получаем:

$$f_x\left(x_n\right)=\frac{3\cdot f\left(x_n\right)+f\left(x_{n-2}\right)-4\cdot f\left(x_{n-1}\right)}{2\cdot h}+O\left(h^2\right)\ . \qquad (90)$$

Введем обозначение τ - шаг равномерной сетки t_j по времени, используем шаблон $\underset{j}{\bullet}-\underset{j+1}{\circ}$ для аппроксимации первой производной по времени с порядком $k=1$:

$$\varphi_t\left(t_j\right)=\frac{\varphi\left(t_{j+1}\right)-\varphi\left(t_j\right)}{\tau}+O(\tau)\ . \tag{91}$$

Тогда задача (87) на шаблоне

$$\begin{array}{ccccc} & & n,j+1 & & \\ & & \circ & & \\ & & | & & \\ \circ & - & \bullet & - & \circ \\ n-1,j & & n,j & & n+1,j \end{array}$$

имеет порядок аппроксимации $O\left(h^2+\tau\right)$. Используя формулы (88) -(91), получаем *явное* конечно-разностное соотношение

$$T_{m,j+1}-T_{m,j}=\mu\cdot\left(T_{m+1,j}+T_{m-1,j}-2\cdot T_{m,j}\right)+\tau\cdot g_{m,j}\ , \tag{92}$$

$$s_1\cdot\frac{4\cdot T_{1,j}-T_{2,j}-3\cdot T_{0,j}}{2\cdot h}-h_1\cdot T_{0,j}=0\,,$$

$$s_2\cdot\frac{3\cdot T_{n,j}+T_{n-2,j}-4\cdot T_{n-1,j}}{2\cdot h}+h_2\cdot T_{n,j}=0\ ,$$

$$T_{m,0}=\Phi\left(x_m\right)\ .$$

Здесь $T_{m,j}=T\left(x_m,t_j\right)$, $g_{m,j}=g\left(x_m,t_j\right)$ - решение и источник тепла на пространственной и временной сетках. Существует *теорема,* связывающая между собой понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости.

- **<u>Теорема</u>**:

Если решение исходной дифференциальной задачи существует, а разностная схема устойчива и аппроксимирует решаемую задачу на данном решении с порядком k*, то разностное решение сходится к точному со скоростью* $O\left(h^k\right)$ •

Теория показывает, что *явная* схема является *условно устойчивой.* Это означает, что устойчивость разностной схемы может быть выполнена при определенном ограничении на параметр

$$\mu=\frac{k\cdot\tau}{h^2}\ .$$

Это ограничение имеет вид

$$\mu<0.5\,. \tag{93}$$

Соотношение (93) можно проверить с помощью *спектрального признака устойчивости,* для применения которого необходимо найти спектр (набор собственных чисел) разностного оператора (92). Разделим дискретные переменные в однородном разностном уравнении

$$T_{m,j+1}-T_{m,j}=\mu\cdot\left(T_{m+1,j}+T_{m-1,j}-2\cdot T_{m,j}\right). \tag{94}$$

Для этого найдем набор частных решений, имеющих вид

$$T_{m,j}=v_m\cdot w_j\,.$$

Подстановка в (94) дает систему двух разностных уравнений, связанных положительной константой разделения переменных λ

$$\begin{cases} -\lambda \cdot v_m = v_{m+1} - v_m \\ -\lambda \cdot w_j = \mu \cdot \left(w_{j+1} + w_{j-1} - 2 \cdot w_j \right) \end{cases}, \quad j = 0,1....n, \quad m = 0,1...N. \qquad (95)$$

Найдем положительные собственные числа λ из второго разностного уравнения. Решение ищем в виде

$$w_j = \gamma^j .$$

Подставим в (95), получим уравнение для параметра γ

$$\gamma^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \cdot \gamma + 1 = 0 \ . \qquad (96)$$

Решение будет устойчивым, если параметры γ по модулю будут равны 1. Будем искать γ в виде

$$\gamma = \exp\left(i \cdot \chi \right). \qquad (97)$$

Тогда из (96) получаем дисперсионное соотношение для положительных λ в виде

$$\lambda = 2 \cdot \mu \cdot \left(1 - \cos \chi \right).$$

Отсюда следует, что

$$0 \le \lambda \le 4 \cdot \mu .$$

Решение первого уравнения системы (95) ищем в виде $v_m = \delta^m$. Подставим это решение в (95), получим соотношение $\delta = 1 - \lambda$. Решение (95) будет устойчивым при увеличении m, если $\left| 1 - \lambda \right| < 1$, или

$$0 \le \lambda < 2 . \qquad (98)$$

При выполнении (97) *все* собственные числа λ будут удовлетворять (98), если выполнено соотношение (93).

Задачи и вопросы:

1. Получить численное решение задачи сеточным методом, подробно исследовать проблему устойчивости разностной схемы и точности аппроксимации и сделать вывод о сходимости численного решения и его погрешности.
2. Сравнить численное решение уравнения теплопроводности (92) с решением того же уравнения, полученным методом Фурье.

3. Волновые уравнения в различных областях физики

3.1. Волновые уравнения для электромагнитного поля

В гауссовой системе единиц система уравнений электромагнитного поля для векторов электрического поля $\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)$, магнитного поля $\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)$, вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}(\mathbf{r},t)$ и вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}(\mathbf{r},t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{rot}\big(\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)\big)=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\mathbf{r},t)+\frac{4\cdot\pi}{c}\cdot\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t),\\
&\mathbf{rot}\big(\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\big)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\mathbf{r},t),\\
&\mathrm{div}\big(\boldsymbol{B}(\mathbf{r},t)\big)=0,\\
&\mathrm{div}\big(\boldsymbol{D}(\mathbf{r},t)\big)=4\cdot\pi\cdot\rho_e(\mathbf{r},t),\\
&\boldsymbol{B}(\mathbf{r},t)=\mu\cdot\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t),\\
&\boldsymbol{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t).
\end{aligned}$$

Здесь: c - скорость света, ε,μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной среды, $\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)$ - плотность тока сторонних зарядов, $\rho_e(\mathbf{r},t)$ - объемная плотность сторонних зарядов, $\mathbf{rot}(\boldsymbol{A})=[\nabla\times\boldsymbol{A}]$. Получим закон сохранения зарядов, продифференцировав четвертое уравнение по времени

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{div}\big(\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\big)=\frac{4\cdot\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\rho_e(\mathbf{r},t). \tag{99}$$

Возьмем операцию дивергенции от первого уравнения

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\Big(\mathbf{rot}\big(\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)\big)\Big)=0=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\big(\boldsymbol{D}(\mathbf{r},t)\big)+\frac{4\cdot\pi}{c}\cdot\mathrm{div}\big(\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)\big),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\big(\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\big)+\frac{4\cdot\pi}{\varepsilon}\cdot\mathrm{div}\big(\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)\big)=0.
\end{aligned} \tag{100}$$

Из (99), (100) получаем закон сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_e(\mathbf{r},t)=-\mathrm{div}\big(\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)\big). \tag{101}$$

Свяжем $\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)$ и $\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)$ материальным уравнением – законом Ома в локальной форме

$$\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r},t)=\sigma\cdot\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\text{ю} \tag{102}$$

Здесь σ - проводимость среды. Возьмем операцию ротора от первого уравнения

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{rot}\left(\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)\right)\right)=\nabla\mathrm{div}\left(\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)\right)-\Delta\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)=$$
$$=\frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\left(\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\right)+\frac{4\cdot\pi\cdot\sigma}{c}\cdot\mathbf{rot}\left(\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)\right).$$

Используем второе уравнение системы Максвелла, получаем

$$\Delta\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)=\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)+\frac{4\cdot\pi\cdot\sigma\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t).$$

Аналогично, для вектора электрического поля

$$\Delta\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)+\frac{4\cdot\pi\cdot\sigma\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t).$$

Получаем волновые векторные уравнения в среде с нулевой проводимостью:

$$\Delta\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)=\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\mathbf{r},t),$$
$$\Delta\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t).$$

3.2. Волновые уравнения для упругой среды

В упругой среде, согласно теории упругости, различают векторное поле смещения (деформации) $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ - вектор смещения, тензор деформации $U_{i,k}$ и тензор напряжений $\sigma_{i,k}$. Здесь символы $i,k=1,2,3$ нумеруют координаты x,y,z точки среды. Дадим определение этим ключевым понятиям теории упругости. Рассмотрим две близкие точки упругой среды до деформации, с координатами $\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}$: $A(\mathbf{r})$ и $B(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})$. Здесь $\mathbf{e}_i$ - базисные векторы декартовой лабораторной системы координат вдоль осей x,y,z. В результате малой деформации точка $\mathbf{r}$ перешла в точку $\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r})$, а точка $\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}$ перешла в точку $\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})$. До деформации эти точки соединял малый вектор $\mathrm{d}\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}dx_i\cdot\mathbf{e}_i$, после деформации эти точки соединяет вектор $\mathrm{d}\mathbf{r}'=\mathrm{d}\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Разложим вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора до линейных по $\mathrm{d}\mathbf{r}$ слагаемых:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})_i=\mathbf{u}(\mathbf{r})_i+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{u}(\mathbf{r})_i\cdot dx_k .$$

Получаем:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r})_i-\mathbf{u}(\mathbf{r})_i=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{u}(\mathbf{r})_i\cdot dx_k .$$

Получаем для вектора $\mathrm{d}\mathbf{r}'$:

$$dx_i' = dx_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot dx_k .$$

Возведем в квадрат:

$$dx_i'^2 = dx_i^{\,2} + 2 \cdot dx_i \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot dx_k + \sum_{m,n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot dx_m \cdot dx_n .$$

Найдем расстояния между точками $A(\mathbf{r})$ и $B(\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r})$ до деформации $dl^2 = \sum_{k=1}^{3} dx_k^2$ и после деформации $dl'^2 = \sum_{k=1}^{3} dx_k'^2$:

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot dx_k \cdot dx_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{m,n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i \cdot dx_m \cdot dx_n .$$

Третье слагаемое правой части имеет второй порядок по вектору деформации, и, как правило, им пренебрегают в расчетах. Вводят определение тензора деформации:

$$U_{i,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{u}(\mathbf{r})_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}(\mathbf{r})_k \right). \qquad (103)$$

Получаем изменение длины элемента упругого тела при деформации

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} U_{i,k} \cdot dx_k \cdot dx_i .$$

Введем вектор силы $\mathbf{F}$, действующий на единицу объема деформированного упругого тела. В курсах по теории упругости показывается, что каждая компонента вектора силы должна иметь вид дивергенции от некоторого тензора второго ранга, то есть иметь следующий вид:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{i,k} . \qquad (104)$$

Этот тензор $\sigma_{i,k}$ называется тензором напряжений, действующих в деформированном упругом теле. Под действием упругих сил элементы объема деформируемого тела приходят в движение, а, следовательно, векторное поле деформаций становится функцией времени $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Подразумевается, что скорость точек деформируемой среды совпадает с производной по времени $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Уравнение движения Ньютона для единицы массы упругой среды записывается следующим образом:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r},t)_i = \mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{i,k} .$$

Для замыкания уравнения необходимо связать тензор напряжений с вектором деформаций. Для случая малых деформаций такая связь задается законом Гука:

$$\sigma_{i,k} = \frac{\text{E}}{1+\sigma} \cdot \left(U_{i,k} + \frac{\sigma}{1-2\cdot\sigma} \cdot \sum_{j=1}^{3} U_{j,j} \cdot \delta_{i,k} \right). \tag{105}$$

Здесь введены характеристики упругой среды: E - модуль Юнга, размерность $\left[\frac{кг}{сек^2 \cdot м}\right] = \left[\frac{ньютон}{м^2}\right] = Па$ (Паскаль - размерность давления); σ - коэффициент Пуассона; ρ - объемная плотность массы упругой среды. Подставим (105) в (104) и, используя (103), получим выражение для вектора силы $\mathbf{F}$. Уравнение движения упругой среды принимает вид:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{\text{E}}{2\cdot(1+\sigma)} \cdot \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \frac{\text{E}}{2\cdot(1+\sigma)\cdot(1-2\cdot\sigma)} \nabla \text{div}\big(\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\big). \tag{106}$$

Это волновое уравнение малых упругих колебаний среды. Рассмотрим плоскую волну, амплитуда $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ которой зависит только от координаты x и времени $t : \mathbf{u}(x,t)$. Разложим амплитуду по осям лабораторной системы координат

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}_x(x,t) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_y(x,t) \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_z(x,t) \cdot \mathbf{e}_3 .$$

Эта волна движется вдоль направления оси x, волновые фронты волны перпендикулярны оси x. Волновое уравнение распадается на два волновых уравнения: для продольной (колебания в направлении движения волнового фронта) и поперечной (колебания перпендикулярно направлению движения волнового фронта) волны:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}_x(x,t) - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_x(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}_y(x,t) - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_y(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}_z(x,t) - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_z(x,t) = 0.$$

Фазовая скорость этих волн различна:

$$c_l = \sqrt{\frac{\text{E}\cdot(1-\sigma)}{\rho\cdot(1+\sigma)\cdot(1-2\cdot\sigma)}},$$

$$c_t = \sqrt{\frac{\text{E}}{2\cdot\rho\cdot(1+\sigma)}}.$$

Продольная скорость всегда больше поперечной скорости: $c_l > \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot c_t$.

Задачи и вопросы:

1. Показать справедливость уравнения (106).

2. В однородной среде распространяются две плоские волны упругости – продольная и поперечная. На какое расстояние разойдутся фазовые плоскости волн с частотой 1 мегагерц за время 100 секунд, если в начальный момент плоскости совпадали. Материал: а. сталь, в. алюминий, с. золото.

3. В однородной среде распространяются две плоские волны упругости – продольная и поперечная. На какое расстояние разойдутся фазовые плоскости волн с частотой 10 мегагерц за время 5 минут, если в начальный момент плоскости совпадали. Материал: а. медь, в. стекло, с. резина.

3.3. Нелинейные уравнения гидродинамики, акустические звуковые волны

В гидродинамике жидкость (газ) рассматривается как сплошная среда, и для описания движения среды достаточно совместно решить пять уравнений для характеристик, зависящих от времени и точки пространства. Этими характеристиками являются: поле скоростей жидких частиц $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, объемной плотности $\rho(\mathbf{r},t)$, термодинамического давления $p(\mathbf{r},t)$. Запишем уравнения движения для так называемой идеальной жидкости. Первое уравнение – уравнение непрерывности (закон сохранения массы), которое мы комментировали ранее (6), запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)+\operatorname{div}\big(\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\big)=0. \qquad (107)$$

Здесь вектор плотности потока жидкости

$$\boldsymbol{I}(\mathbf{r},t)=\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t).$$

Второе уравнение получено Л. Эйлером, носит его имя – уравнение Эйлера, и имеет смысл уравнения Ньютона для элемента жидкости. Обозначим $d\Sigma$ - ориентированный внешней нормалью элемент поверхности выделенного объема жидкости. Сила $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, действующая на выделенный объем, равна поверхностному интегралу

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=-\oiint\limits_{\Sigma}P(\mathbf{r},t)\,d\Sigma=-\iiint\limits_{V}\nabla P(\mathbf{r},t)\cdot dV\ .$$

Здесь использована теорема Остроградского-Гаусса. Подынтегральное выражение $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)=-\nabla P(\mathbf{r},t)$ имеет смысл назвать силой, действующей на единицу объема жидкости. Запишем уравнение Ньютона для элемента массы, приходящегося на единицу объема:

$$\rho(\mathbf{r},t)\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\nabla P(\mathbf{r},t). \qquad (108)$$

Уравнение записано в движущейся системе координат. В лабораторной системе координат уравнение имеет вид уравнения Л. Эйлера идеальной жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r},t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t),\nabla)\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r},t)}\cdot\nabla P(\mathbf{r},t) + \mathbf{g}\,. \qquad (109)$$

Здесь $\mathbf{g}$ - ускорение силы тяжести. Использована формула преобразования описания движения среды от Эйлера к Лагранжу:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t),\nabla)\,.$$

Для замыкания системы уравнений добавляют уравнение состояния, например, связь плотности и давления

$$\rho = \Psi(P). \qquad (110)$$

Получаем пять уравнений гидродинамики (107) - (110).

Это упрощенная система уравнений. Здесь не учитывается внутреннее трение – вязкости жидкости. Здесь пренебрегается теплообменом между элементами жидкости и между жидкостью и внешней средой. Это означает, что движение рассматривается, как адиабатическое. То есть энтропия каждого элемента жидкости сохраняется, отсутствуют источники производства энтропии. Закон сохранения энтропии в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}s(\mathbf{r},t) = 0.$$

В частности, если $s(\mathbf{r},t) = const$, то такое движение называется изоэнтропическим.

Эффекты акустики могут быть описаны с помощью уравнений гидродинамики. Акустика интересуется малыми колебаниями среды – звуковыми волнами, и, как следствие, уравнения гидродинамики следует упростить, линеаризовать. В левой части уравнения (109) слагаемым $(\mathbf{v}(\mathbf{r},t),\nabla)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ можно пренебречь по отношению к $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, если отклонения частиц жидкости от положения равновесия при волновом движении малы, по сравнению с акустической длиной волны. Это основное условие метода линеаризации. В этом случае уравнение Эйлера упрощается:

$$\rho(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \nabla P(\mathbf{r},t) = 0. \qquad (111)$$

Левая часть этого уравнения нелинейна по неизвестным функциям $\rho(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Для линеаризации введем объемную плотность ρ_0 и давление P_0

в невозмущенной среде и малые отклонения плотности и давления в звуковой волне:

$$\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0+\rho'(\mathbf{r},t),$$

$$P(\mathbf{r},t)=P_0+p'(\mathbf{r},t).$$

Уравнение (111) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{\rho_0}\nabla p'(\mathbf{r},t)=0. \qquad (112)$$

Уравнение (107) также упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho'(\mathbf{r},t)+\rho_0\cdot\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r},t))=0. \qquad (113)$$

Линеаризуем уравнение состояния, предположив адиабатичность движения жидкости в волне. Можно положить следующую линейную связь:

$$p'(\mathbf{r},t)=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_s\cdot\rho'(\mathbf{r},t).$$

Подставим это уравнение в (113), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}p'(\mathbf{r},t)+\rho_0\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_s\cdot\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r},t))=0. \qquad (114)$$

Система уравнений (112) и (114) описывают распространение слабой звуковой волны в жидкости. Удобно ввести потенциал скорости $\varphi(\mathbf{r},t)$ по формуле

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\nabla\varphi(\mathbf{r},t). \qquad (115)$$

Из уравнения (112) получаем

$$p'(\mathbf{r},t)=-\rho_0\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t). \qquad (116)$$

Из уравнения (114) получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\mathbf{r},t)-c^2\cdot\Delta\varphi(\mathbf{r},t)=0.$$

Здесь введена скорость звука в среде

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_s}.$$

Из (115) и (116) следует, что каждая компонента скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ и давление $p'(\mathbf{r},t)$ также удовлетворяют волновому уравнению. Из (115) следует, что звуковые волны в жидкости продольны, то есть скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ частиц в волне направлена вдоль направления движения волновых фронтов волны. Для идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$p=\rho\cdot\frac{R\cdot T}{\mu}.$$

Здесь R - газовая постоянная, μ - молекулярный вес жидкости. Связь адиабатической сжимаемости $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s$ с изотермической сжимаемостью $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_T$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s = \frac{c_p}{c_V} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_T .$$

Скорость звука в идеальном газе равна

$$c = \sqrt{\frac{c_p}{c_V} \cdot \frac{R \cdot T}{\mu}} .$$

Задачи и вопросы:

1. На примере плоской звуковой волны убедиться в продольности волны.
2. Используя табличные данные, найти скорость звука в воздухе при нормальных условиях.

3.4. Волновое уравнение струны

Струна, выполненная из материала с линейной плотностью массы ρ $\left[\frac{кг}{м}\right]$, натянута с силой натяжения N $[ньютон]$ вдоль оси x. Концы струны закреплены и не движутся. Малые колебания происходят в плоскости x, y и направлены перпендикулярно оси x. Форма струны задается функцией смещения из положения равновесия $Y(x,t)$. Струна представляет собой гибкую нить, так что напряжения в любой точке x струны при ее колебаниях всегда направлены по касательной к $Y(x,t)$ в точке x. Другими словами, струна не сопротивляется изгибу. Для малых колебаний можно положить, что удлинения каждого элемента струны не изменяются при движении. Будем предполагать, что натяжение в каждой точке струны одинаково и равно N. Обозначим ϕ и $\phi + \Delta\phi$ - углы между касательными к струне и осью x в двух соседних точках x и $x + dx$. Тогда проекция сил натяжения, действующих на элемент струны, равна разности $N \cdot (\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin(\phi))$:

$$N(\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin(\phi)) \approx N\left(\frac{\partial}{\partial x}Y(x + dx, t) - \frac{\partial}{\partial x}Y(x,t)\right) \approx N\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t)dx .$$

Запишем уравнение Ньютона для единичной длины струны. Получаем однородное волновое уравнение для колебаний струны

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=N\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t).$$

Или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=V^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t). \qquad (117)$$

Здесь фазовая скорость возбуждения $V=\sqrt{\frac{N}{\rho}}\ \left[\frac{м}{сек}\right]$. К этому уравнению можно добавить в правой части функцию $f(x,t)\ \left[\frac{н}{м}\right]$, имеющую смысл источника силы, распределенной на единицу длины. Для получения единственного решения уравнения (117), необходимы дополнительные условия: начальные данные

$$Y(x,t)\big|_{t=0}=Y0(x)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\right|_{t=0}=Y1(x),$$

и граничные условия (закрепленные концы струны в точках a и b оси x)

$$Y(a,t)=Y(b,t)=0.$$

Получаем задачу колебаний закрепленной по концам струны:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=V^2\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t),\\ Y(x,t)\big|_{t=0}=Y0(x),\\ \left.\dfrac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\right|_{t=0}=Y1(x),\\ Y(a,t)=Y(b,t)=0.\end{cases} \qquad (118)$$

4. Методы решений волновых уравнений

4.1. Метод Фурье решения волнового уравнения колебаний струны

Будем искать частные решения волнового уравнения в разделенных переменных $Y_n(x,t)=\mathrm{R_n}(x)\cdot\mathrm{T_n}(t)$. Волновое уравнение в разделенных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{T_n}(t)=-\lambda_n\cdot\mathrm{T_n}(t),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{R}_n(x)=-\frac{\lambda_n}{V^2}\cdot\mathrm{R}_n(x),$$

$$\mathrm{R}_n(a) = \mathrm{R}_n(b) = 0.$$

Базис Фурье для уравнения струны получаем по аналогии с формулой (40)

$$\mathrm{R}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \sin\left(\pi \cdot n \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) \quad n = 1, 2 \ldots\ldots$$

Константа деления λ_n имеет вид

$$\lambda_n = V^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b-a}\right)^2 \quad n = 1, 2 \ldots..$$

Общее решение временного уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2} C_n(t) = -\lambda_n \cdot C_n(t),$$

$$C_n(t) = A_n \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right),.$$

$$n = 1, 2 \ldots..$$

Получаем общее решение волнового уравнения

$$Y(x,t) = \sum_{n=1} \left(A_n \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right)\right) \cdot \mathrm{R}_n(x).$$

Частное решение должно удовлетворять начальным данным. Полагая в решении $Y(x,t)$ и в производной $\frac{\partial}{\partial t} Y(x,t)$ время $t = 0$, получаем уравнения для амплитуд A_n и B_n

$$Y(x,t)\Big|_{t=0} = \sum_n A_n \cdot \mathrm{R}_n(x) = Y0(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(x,t)\Big|_{t=0} = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \cdot B_n \cdot \mathrm{R}_n(x) = Y1(x).$$

Начальные данные разложены в ряды Фурье. Из единственности разложения в ряд Фурье получаем амплитуды

$$A_n = \int_a^b Y0(x) \cdot \mathrm{R}_n(x)\, dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \int_a^b Y1(x) \cdot \mathrm{R}_n(x)\, dx.$$

Задачи и вопросы:

1. Найти решение волнового уравнения струны (118) методом Фурье для $V = 2$, $a = 0$, $b = 7$ и начальных данных

$$\begin{cases} Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y0(x) = \sin\left(\dfrac{3 \cdot \pi \cdot x}{7}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y1(x) = \sin\left(\dfrac{5 \cdot \pi \cdot x}{7}\right) \end{cases}.$$

2. Найти решение волнового уравнения струны (118) методом Фурье для $V=1,\ a=0,\ b=\pi$ и начальных данных

$$\begin{cases} Y(x,t)\big|_{t=0} = Y0(x) = \sin(2\cdot x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y1(x) = \sin(5\cdot x) \end{cases}.$$

3. Струна из алюминия длиной $L=50\ см$ из стали натянута с силой 1 ньютон. Струна закреплена по краям. Начальная скорость точек струны равна нулю. Струна оттянута от положения равновесия, согласно уравнению

$$y(x,0)=\begin{cases} 0,\ 0\le x\le 40\ см \\ 1\ см,\ \ 40\le x\le 50\ см \end{cases}.$$

Найти амплитуды колебаний 1 и 2 гармоник струны.

4. Струна из стали длиной $L=100\ см$ из стали натянута с силой 10 ньютонов. Струна закреплена по краям. Начальная скорость точек струны равна нулю. Струна оттянута от положения равновесия, согласно уравнению

$$y(x,0)=\begin{cases} 2\ см,\ 0\le x\le 10\ см \\ 0,\ \ 10\le x\le 100\ см \end{cases}.$$

Найти амплитуды колебаний 1 и 2 гармоник струны.

5. Струна из меди длиной $L=80\ см$ натянута с силой 5 ньютонов. Струна закреплена по краям. Начальные смещения точек струны равны нулю. По струне ударили так, что точкам струны сообщили начальную скорость, согласно уравнению (баллистический режим возбуждения)

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\Big|_{t=0}=\begin{cases} 3\,\dfrac{см}{сек},\ 5\le x\le 10\ см \\ 0,\ \ 0\le x\le 5\ см,\ 10\le x\le 80\ см \end{cases}.$$

Найти амплитуды колебаний 1 и 2 гармоник струны.

6. Струна из вольфрама длиной $L=150\ см$ натянута с силой 15 ньютонов. Струна закреплена по краям. Начальные смещения точек струны равны нулю. По струне ударили так, что точкам струны сообщили начальную скорость, согласно уравнению (баллистический режим возбуждения)

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\Big|_{t=0}=\begin{cases} 5\,\dfrac{см}{сек},\ 100\le x\le 110\ см \\ 0,\ \ 0\le x\le 100\ см,\ 110\le x\le 150\ см \end{cases}.$$

Найти амплитуды колебаний 1 и 2 гармоник струны.

4.2. Метод Даламбера – метод распространяющихся волн решения одномерного однородного волнового уравнения неограниченной струны

Будем решать одномерное волновое уравнение для неограниченной струны методом Даламбера с начальными данными – решать задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x,t) = V^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,t), \\ Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y1(x). \end{cases} \tag{119}$$

Введем новые – канонические переменные

$$\xi = x + V \cdot t,$$

$$\eta = x - V \cdot t.$$

Заменим переменные в первых производных

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = V \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

Заменим переменные во вторых производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2.$$

Получаем уравнение в канонических переменных:

$$V^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 Y(\xi,\eta) - V^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 Y(\xi,\eta) = 0.$$

Или:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} Y(\xi,\eta) = 0. \tag{120}$$

Допустим, функция $Y(\xi,\eta)$ является дважды дифференцируемым решением уравнения. Тогда справедливо следующее свойство этого решения:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} Y(\xi,\eta) = G(\eta).$$

Здесь $G(\eta)$ - непрерывная функция от η. Интеграл этого соотношения по переменной η имеет вид:

$$Y(\xi,\eta)=\int G(\eta)d\eta+F_2(\xi)=F_1(\eta)+F_2(\xi).$$

Очевидно, функция $F_1(\eta)+F_2(\xi)$ является общим интегралом уравнения (120), или, возвращаясь к старым переменным, имеем общий интеграл уравнения (119):

$$Y(x,t)=F_1(x-V\cdot t)+F_2(x+V\cdot t). \tag{121}$$

Функция $Y(x,t)$ - это общее решение (119). Найдем частное решение Коши, удовлетворяющее начальным данным. Положим $t=0$:

$$Y(x,t)\Big|_{t=0}=Y0(x)=F_1(x)+F_2(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\Bigg|_{t=0}=Y1(x)=V\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(F_2(x)-F_1(x)\big).$$

Интегрируем второе уравнение:

$$F_2(x)-F_1(x)=\frac{1}{V}\cdot\int_{x_0}^{x}Y1(x)dx+C.$$

Имеем решение задачи Коши:

$$Y(x,t)=\frac{Y0(x+V\cdot t)+Y0(x-V\cdot t)}{2}+\frac{1}{2\cdot V}\cdot\int_{x-V\cdot t}^{x+V\cdot t}Y1(x')dx'. \tag{122}$$

Нетрудно прямым дифференцированием проверить, что данная функция является решением задачи (119). Для этого функция $Y0(x)$ должна быть дважды дифференцируема, а функция $Y1(x)$ должна быть однократно дифференцируема. Это решение Даламбера.

Задачи и вопросы:

1. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения (119) и построить график колебаний для нескольких моментов времени. Здесь начальные данные

$$\begin{cases}Y(x,t)\Big|_{t=0}=\exp(-x)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\Bigg|_{t=0}=C\end{cases}.$$

2. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения (119) и построить график колебаний для нескольких моментов времени. Здесь начальные данные

$$\begin{cases}Y1(x)=0\\ Y0(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 0\\ -x+1, & 0<x\le 1\end{cases}\end{cases}.$$

4.3. Метод Даламбера для неоднородного волнового уравнения неограниченной струны

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение для неограниченной среды и будем решать задачу Коши с начальными данными методом Даламбера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x,t) - V^2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,t) = f(x,t), \\ Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y0(x), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y1(x). \end{cases} \tag{123}$$

Здесь неоднородное слагаемое в правой части $f(x,t)$ имеет смысл распределенной силы на единицу массы. Эта сила вынуждает колебания струны. Ищем решение в виде двух слагаемых

$$Y(x,t) = F(x,t) + W(x,t) \ . \tag{124}$$

Функция $W(x,t)$ удовлетворяет уравнению и начальным данным:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} W(x,t) - V^2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) = 0, \\ W(x,t)\Big|_{t=0} = Y0(x), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} W(x,t)\Big|_{t=0} = Y1(x). \end{cases}$$

Эта задача решена. В формуле (122) следует заменить $Y(x,t)$ на $W(x,t)$:

$$W(x,t) = \frac{Y0(x + V \cdot t) + Y0(x - V \cdot t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot V} \cdot \int_{x-V\cdot t}^{x+V\cdot t} Y1(x')\,dx' \ . \tag{125}$$

Функция $F(x,t)$ должна удовлетворять неоднородному волновому уравнению с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} F(x,t) - V^2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,t) = f(x,t), \\ F(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} F(x,t)\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{126}$$

В этом случае $Y(x,t) = F(x,t) + W(x,t)$ удовлетворяет задаче (123). Функцию $F(x,t)$ ищем в виде

$$F(x,t) = \int_0^t \Psi(x,t,\tau)\,d\tau \ .$$

Подставим $F(x,t)$ в (126) и найдем условия, которым должна удовлетворять неизвестная функция $\Psi(x,t,\tau)$ трех переменных. Первая производная по времени равна

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)=\Psi(x,t,t)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t,\tau)d\tau \ .$$

Выберем первое (начальное) условие:

$$\Psi(x,t,\tau)\Big|_{\tau=t}=0 \ .$$

Найдем вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t,\tau)\Bigg|_{\tau=t}+\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t,\tau)d\tau \ .$$

Выберем второе (начальное) условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t,\tau)\Bigg|_{\tau=t}=f(x,\tau) \ .$$

Получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(x,t)=f(x,t)+\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t,\tau)d\tau \ . \qquad (127)$$

Найдем вторую производную по координате:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t,\tau)d\tau \ . \qquad (128)$$

Из уравнения (127) вычтем уравнение (128), умноженное на V^2, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(x,t)-V^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,t)=f(x,t)+\int_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-V^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,t,\tau)d\tau \ .$$

Отсюда получаем задачу, которой должна удовлетворять функция $\Psi(x,t,\tau)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t,\tau)-V^2\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t,\tau)=0,\\ \Psi(x,t,\tau)\Big|_{\tau=t}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t,\tau)\Bigg|_{\tau=t}=f(x,\tau).\end{cases} \qquad (129)$$

Здесь момент τ имеет смысл начального момента времени. Эта однородная задача решается методом Даламбера (122). Получаем функцию $\Psi(x,t,\tau)$

$$\Psi(x,t,\tau)=\frac{1}{2\cdot V}\cdot\int_{x-V\cdot(t-\tau)}^{x+V\cdot(t-\tau)} f(x',\tau)dx'$$

Получаем решение задачи (126):

$$F\left(x,t\right)=\int\limits_0^t \Psi\left(x,t,\tau\right)d\tau=\frac{1}{2\cdot V}\cdot\int\limits_0^t\int\limits_{x-V\cdot(t-\tau)}^{x+V\cdot(t-\tau)} f\left(x',\tau\right)dx'd\tau\ . \qquad (130)$$

Из формул (124), (125), (130) получаем решение задачи (123):

$$Y\left(x,t\right)=\frac{Y0\left(x+V\cdot t\right)+Y0\left(x-V\cdot t\right)}{2}+\frac{1}{2\cdot V}\cdot\int\limits_{x-V\cdot t}^{x+V\cdot t} Y1\left(x'\right)dx'+$$

$$+\frac{1}{2\cdot V}\cdot\int\limits_0^t\int\limits_{x-V\cdot(t-\tau)}^{x+V\cdot(t-\tau)} f\left(x',\tau\right)dx'd\tau.$$

Задачи и вопросы:

1. Неограниченная покоящаяся и не возмущенная в начальный момент времени струна подвержена действию распределенной внешней силы, имеющей вид бегущей по струне волны

$$f\left(x,t\right)=A\cdot\cos\left(a\cdot x-b\cdot t\right)\ .$$

Сила вызывает возмущение волны в виде бегущей волны. Исследовать резонансные свойства струны в зависимости от параметров силы и найти скорость распространения вынужденного возмущения по струне.

2. Найти решение задачи Коши неоднородного волнового уравнения методом Даламбера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U\left(x,t\right)=3\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U\left(x,t\right)+4, \\ U\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=x^2, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=2\cdot x. \end{cases}$$

3. Найти решение задачи Коши неоднородного волнового уравнения методом Даламбера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U\left(x,t\right)=2\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U\left(x,t\right)+x\cdot t, \\ U\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

5. Стационарные задачи математической физики, методы решений

5.1. Стационарное распределение температуры в слое, тепловое сопротивление

Рассмотрим одномерный вариант уравнения теплопроводности в стационарном режиме, когда в теле температура перестает зависеть от времени, но возможны стационарные тепловые потоки, возникающие из-за взаимодействия тела с окружающей средой или из-за наличия источников тепла в теле. Положим $T = T(x)$ - температура в точках x не зависит от времени (стационарный, установившийся режим). Такой режим возможен, если граничные условия стационарны, внутренние источники тепла $f(x)\left[\dfrac{\textit{дж}}{\textit{м}^3 \cdot \textit{сек}}\right]$ не зависят от времени. Тогда уравнение распределения температуры по слою имеет вид

$$k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) + f(x) = 0 .$$

Или, при $f(x) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) = 0 .$$

Рассмотрим простой случай отсутствия источника тепла $f(x) = 0$. Общее решение стационарного уравнения имеет вид

$$T(x) = C_1 + x \cdot C_2 .$$

Для неоднородных граничных условий 1 рода:

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=a} = T_1, \\ T(x)\big|_{x=b} = T_2. \end{cases}$$

Получаем:

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{b - a}(x - a). \tag{131}$$

Положим:

$$T_2 \le T_1 .$$

Определим: *текущий температурный напор* $\Delta T(x) = T(x) - T_2$, *полный температурный напор* $\Delta T_1 = T_1 - T_2$, толщина слоя $\delta = b - a$. Получаем

$$\Theta(x) = \frac{\Delta T(x)}{\Delta T_1} = 1 - \frac{x - a}{\delta} .$$

$\Theta(x)$ - безразмерный температурный напор. Запишем закон Фурье для стационарного решения (131) (плотность потока для стационарного решения не зависит от координаты). Согласно (46):

$$I_x^Q(x) = -k \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x) = \frac{k}{\delta} \cdot \Delta T_1 = I_x^Q. \qquad (132)$$

Из формулы следует, что если плотность потока через слой задана, то температура на правой стенке слоя однозначно определяется через плотность потока и температуру на левой стенке слоя. Определим: $\frac{k}{\delta}$ - *тепловая проводимость стенки,* $\frac{\delta}{k}$ - *термическое сопротивление стенки.*

Выразим распределение температуры в стационарном режиме через плотность потока тепла:

$$T(x) = T_1 - \frac{I_x^Q}{k} \cdot (x - a).$$

Через площадку Σ, за время τ через стенку передается количество теплоты

$$Q_\tau = I_x^Q \cdot \Sigma \cdot \tau = \frac{k}{\delta} \cdot \Delta T_1 \cdot \Sigma \cdot \tau.$$

5.2. Неоднородная слоистая стенка. Неоднородные граничные условия 1 рода

Найдем распределение температуры в стационарных условиях в слоистой среде. В этом случае плотность потока через любой слой неоднородной слоистой среды одинакова. Рассмотрим стенку, состоящую из плотно прилегающих n однородных слоев с параметрами $k_i, \delta_i \;\; i = 1,2....n$. Зададим граничные условия 1 рода на левой стенке первого слоя и на $n+1$ - ой правой стенке n - ого слоя:

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=a} = T_1, \\ T(x)\big|_{x=b} = T_{n+1}. \end{cases} \qquad (133)$$

Обозначим температуры на границах слоев как $T_1, T_2, ...T_n, T_{n+1}$. Обозначим температурные напоры на каждом слое

$$\Delta T_1 = T_1 - T_2,\; \Delta T_2 = T_2 - T_3, ...\Delta T_n = T_n - T_{n+1}.$$

Найдем неизвестные температуры границ слоев $T_2, T_3....T_n$. Обозначим тепловые проводимости слоев $\frac{k_i}{\delta_i} \;\; i = 1,2....n$. В стационарных условиях по слоям идет общий тепловой поток I_x^Q. Получаем систему равенств согласно формуле (132):

$$I_x^Q=\frac{k_1}{\delta_1}\Delta T_1=\frac{k_2}{\delta_2}\Delta T_2=....=\frac{k_n}{\delta_n}\Delta T_n.$$

Или:

$$T_1-T_{n+1}=I_x^Q\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{k_j}. \quad (134)$$

Исходя из граничных условий (133), получим величину общего потока тепла:

$$I_x^Q=\left(T_1-T_{n+1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{k_j}\right)^{-1}. \quad (135)$$

Имеем полное термическое сопротивление слоистой среды:

$$\frac{\delta_\Sigma}{k_\Sigma}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{k_j}.$$

Здесь $\delta_\Sigma=b-a$ - суммарная толщина слоистой стенки. Определим эффективный коэффициент теплопроводности для слоистой среды толщины δ_Σ:

$$k_\Sigma=\frac{\delta_\Sigma}{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{k_j}}.$$

С помощью найденного теплового потока определим температуру на краях слоев:

$$T_p=T_1-\left(T_1-T_{n+1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{k_j}\right)^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\delta_j}{k_j},\ p=2,3...n+1. \quad (136)$$

Эта формула означает, что если плотность потока через слоистую среду задана, то температура на каждой стенке слоя однозначно определяется через плотность потока, температуру на левой стенке слоя и через параметры слоев. Это свойства неоднородных граничных условий первого рода.

5.3. Неоднородная слоистая стенка. Неоднородные граничные условия 3 рода

Слой (стенка) разделяет две подвижные среды (жидкость, газ). Тепловой поток в стационарных условиях передается от левой среды через стенку к правой среде. Передачу тепла из одной подвижной среды к другой через однородную многослойную твердую стенку будем называть процессом *теплопередачи*. Будем называть конвективным теплообменом перенос тепла теплопроводностью и конвекцией. Будем называть конвективной теплоотдачей передачу тепла от потока жидкости к твердому телу. Граничные условия третьего рода описывают эти процессы. Для слоя (стенки) граничные условия 3 рода имеют вид (73):

$$\begin{cases} I_x^Q = \alpha_1 \cdot \left(T_{L1} - T(x)\big|_{x=a} \right), \\ I_x^Q = \alpha_2 \cdot \left(T(x)\big|_{x=b} - T_{L2} \right). \end{cases} \tag{137}$$

Здесь: плотность теплового потока I_x^Q от жидкости с температурой T_{L1} к левой стенке с температурой $T(x)\big|_{x=a}$ и от стенки с температурой $T(x)\big|_{x=b}$ к жидкости с температурой T_{L2}. Полагаем $T_{L1} \ge T(x)\big|_{x=a}$ и $T(x)\big|_{x=b} \ge T_{L2}$, α_1 - *коэффициент теплоотдачи* левой стенки, α_2 - *коэффициент теплоотдачи* правой стенки. Стационарная плотность теплового потока внутри стенки до правого края, из формулы (132) равна:

$$I_x^Q = \frac{k}{\delta} \cdot \left(T(x)\big|_{x=a} - T(x)\big|_{x=b} \right). \tag{138}$$

В уравнениях (137) и (138) неизвестными являются температуры границ слоя. Они легко определяются:

$$T(x)\big|_{x=a} = T_1 = \frac{\alpha_2 \cdot T_{L2} + \alpha_1 \cdot \left(1 + \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k} \right) \cdot T_{L1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}},$$

$$T(x)\big|_{x=b} = T_2 = \frac{\alpha_1 \cdot T_{L1} + \alpha_2 \cdot \left(1 + \alpha_1 \cdot \frac{\delta}{k} \right) \cdot T_{L2}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}}.$$

Имеем закон сохранения потока:

$$I_x^Q = \mathrm{K} \cdot \left(T_{L1} - T_{L2} \right).$$

Здесь K - *эффективный коэффициент теплопередачи стенки*

$$\mathrm{K} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}.$$

Определим *термическое сопротивление стенки* K^{-1}. Таким образом, граничные условия 1 типа сводятся к граничным условиям 3 типа (в стационарном случае).

Задачи и вопросы:

1. Рассмотреть многослойную стенку и учесть эффективный K.
2. Найти температуры стенки при заданных температурах жидкостей
3. Найти температуру на каждом слое в стенке.

5.4. Неоднородная слоистая стенка. Неоднородные смешанные граничные условия 4 рода

Рассмотрим стационарное решение для граничных условий смешанного типа:

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=a} = T_1, \\ I_x^Q = \alpha_2 \cdot \left(T(x)\big|_{x=b} - T_{L2} \right). \end{cases} \quad (139)$$

В стационарном случае плотность потока равна

$$I_x^Q = \frac{k}{\delta}\left(T_1 - T(x)\big|_{x=b} \right). \quad (140)$$

В уравнениях (139), (140) неизвестным является температура правой стенки, которая легко определяется:

$$T(x)\big|_{x=b} = T_2 = \frac{T_1 + \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k} \cdot T_{L2}}{1 + \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}}.$$

Величину плотности потока определяем по формуле (140). Рассмотрим распределение температур в слоистой среде, состоящей из n однородных слоев в стационарном случае для граничных условий 4 рода. Граничные условия имеют вид (139), где точка b расположена на $n+1$ границе. Уравнение (140) для многослойной среды заменяется на

$$I_x^Q = \left(T_1 - T(x)\big|_{x=b} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{k_j} \right)^{-1}, \quad (141)$$

в согласии с формулой (135). Совместное решение уравнений (139), (141) дает температуру $T(x)\big|_{x=b}$ на $n+1$ границе

$$T(x)\big|_{x=b} = T_{n+1} = \frac{T_1 + \alpha_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{k_j} \cdot T_{L2}}{1 + \alpha_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{k_j}}.$$

Для *слоистой стенки* пограничная температура, согласно (136), равна

$$T_p = T_1 - I_x^Q \cdot \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\delta_j}{k_j}, \;\; p = 2,3...n+1.$$

Задачи и вопросы:

1. Изучить распределение температур на поверхностях слоев многослойной стенки в стационарном приближении для смешанных граничных условий следующего вида

$$\begin{cases} I_x^Q = \alpha_1 \cdot \left(T_{L1} - T(x)\big|_{x=a} \right) \\ T(x)\big|_{x=b} = T_2 \end{cases}.$$

2. Определить мощность потерь тепла через кирпичную стенку размером 5×3 метра, толщиной 250 мм. Температуры поверхностей стенки $T_1 = 20\ ^\circ C,\ T_2 = -30\ ^\circ C$.

3. Определить коэффициент теплопроводности материала стенки, если при тепловом напоре $\Delta T = T_1 - T_2 = 30\ ^\circ C$ и $\delta = 30\ мм$, плотность теплового потока $q = 100\ Вт/м^2$.

4. Чугунная стенка толщиной $\delta_1 = 10\ мм$ и алюминиевая стенка толщиной $\delta_3 = 20\ мм$ положены друг на друга таким образом, что между ними имеется воздушная прослойка толщиной $\delta_2 = 0.01\ мм$. Определить общее термическое сопротивление этой многослойной стенки. Сравнить с термическим сопротивлением без наличия воздушной прослойки, сделать вывод.

5. Вычислить плотность теплового потока через плоскую стенку, толщиной $\delta = 30\, мм$, с температурой поверхностей $T_1 = 100\, ^\circ C,\ T_2 = 20\, ^\circ C$. Стенка выполнена из: а) стали, в) бетона, с) кирпича.

6. Тепловой поток с плотностью $q = 20\, ккал/\left(сек \cdot м^2\right)$ проходит через стенку толщиной $\delta = 30\, мм$. Найти градиент температуры на стенке, выполненной из: а) латуни, в) кирпича, с) пробки.

7. Определить тепловую мощность, передаваемую через стенку размером 5×4 кв. метра, толщиной $\delta = 30\, мм$, с температурой поверхностей $T_1 = 100\, ^\circ C,\ T_2 = 20\, ^\circ C$, для: а) графит, в) железо, с) дерево .

8. Определить коэффициент теплопроводности материала стенки, толщиной $\delta = 10\, мм$, если температуры поверхностей равны $T_1 = 100\, ^\circ C,\ T_2 = 20\, ^\circ C$, для теплового потока: а) $q = 20\, ккал/\left(сек \cdot м^2\right)$, в) $q = 10\, Дж/\left(сек \cdot м^2\right)$, с) $q = 30\, ккал/\left(сек \cdot см^2\right)$.

9. Стены сушильной камеры выполнены из кирпича толщиной $\delta = 250\, мм$ и поролона толщиной δ. Тепловой поток через стенку равен $q = 110\, Дж/\left(сек \cdot м^2\right)$. Температура на внешней поверхности кирпича $T_1 = 110\, ^\circ C$, на внешней поверхности поролона $T_2 = 20\, ^\circ C$. Найти: а) температуру между слоями, в) толщину слоя поролона.

10. Кирпичная стенка размещена в среде с коэффициентом теплоотдачи левой поверхности $\alpha_1 = 23\ Вт/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$ и правой поверхности $\alpha_1 = 12\ Вт/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$. Температура газов с левой стороны $T_{L1} = 700^\circ C$, температура газов с правой стороны $T_{L2} = 30^\circ C$. Вычислить: а) плотность

потока тепла q через стенку, в) температуру T_1 и T_2 на поверхности стенки.

11. Стальная стенка парового котла толщиной $\delta = 12\,мм$, нагревается газами с температурой $T_{L1} = 1000^\circ C$ (коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 100\ Вт/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$) и кипящей водой $T_{L2} = 200^\circ C$ (коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 5000\ Вт/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$). Вычислить: а) плотность потока тепла q через стенку, в) температуру T_1 и T_2 на поверхности стенки.

12. Температура левой поверхности стенки из кирпича равна $T_1 = 300\ {}^\circ C$. Правая стенка омывается жидкостью с температурой $T_{L2} = 20\ {}^\circ C$ (коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = 5000\ Вт/\left(м^2 \cdot {}^\circ C\right)$). Найти толщину стенки, если плотность теплового потока равна $q = 1000\,Дж/\left(сек \cdot м^2\right)$.

5.5. Стационарная теплопроводность в ребре постоянного сечения (радиатор)

Прямоугольное ребро, представляющее собой слой толщиной h шириной b и высотой L, расположено на стенке, поддерживаемой при температуре T_W. Направим ось z перпендикулярно стенке. Размер ребра вдоль оси z обозначим L. Оси x и y расположены в плоскости стенки. Вдоль оси y размер ребра обозначим b, вдоль оси x размер ребра обозначим h. При условии $L, b \gg h$ можно положить, что стационарная температура ребра меняется только вдоль оси z. Пренебрегаем тепловым потоком через узкие грани ребра. Тепловой поток поступает от стенки в ребро и вытекает наружу через площадь ребра вдоль оси x. Коэффициент теплоотдачи через широкие грани ребра в окружающую среду обозначим α. Будем считать, что α не зависит от координат. Граничное условие на широких гранях запишем в виде

$$I_x^Q(z) = \alpha \cdot \left(T(z) - T_L\right) .$$

Здесь T_L - температура окружающей среды, $I_x^Q(z)$ - компонента плотности теплового потока вдоль оси x (перпендикулярно широким граням радиатора). Компонента $I_x^Q(z)$ зависит от координаты z, в силу зависимости температуры ребра только от координаты z. Получим дифференциальное уравнение теплопроводности ребра. Рассмотрим внутри ребра два соседних слоя, расположенных в точках z и $z + dz$. Составим уравнение теплового баланса слоя, расположенного между этими точками. Поток тепла через сечение ребра Σ, расположенное в точке с координатой z от стенки, равен

$$J_Q(z) = -I_z^Q(z) \cdot \Sigma .$$

Поток тепла через сечение ребра $\Sigma = h \cdot b$, расположенное в точке с координатой $z + dz$ от стенки равен

$$J_Q\left(z+dz\right) = I_z^Q\left(z+dz\right)\cdot\Sigma.$$

Внутри элемента объема ребра $dV = \Sigma \cdot dz$ за единицу времени выделилось тепло

$$dJ_Q\left(z\right) = \left(I_z^Q\left(z\right) - I_z^Q\left(z+dz\right)\right)\cdot\Sigma\ .$$

В условиях равновесия это тепло должно вытечь через поверхность ребра вдоль оси x через две площадки с площадью $2\cdot b\cdot dz$. Согласно граничным условиям, имеем

$$dJ_Q\left(z\right) = \alpha\cdot\left(T\left(z\right) - T_L\right)\cdot 2\cdot b\cdot dz\,.$$

Условие баланса тепла имеет вид

$$\left(I_z^Q\left(z\right) - I_z^Q\left(z+dz\right)\right)\cdot h\cdot b = \alpha\cdot\left(T\left(z\right) - T_L\right)\cdot 2\cdot b\cdot dz\,.$$

Или в пределе $dz \to 0$ получаем:

$$\frac{d}{dz} I_z^Q\left(z\right) = -\frac{\alpha}{h}\cdot\left(T\left(z\right) - T_L\right)\ .$$

Применим закон Фурье $I_z^Q\left(z\right) = -k\cdot\frac{d}{dz}T\left(z\right)$, получим уравнение теплопроводности для ребра в стационарных условиях:

$$\frac{d^2}{dz^2}T\left(z\right) = \frac{\alpha}{h\cdot k}\cdot\left(T\left(z\right) - T_L\right)\ .$$

Граничные условия естественно выбрать в виде

$$T\left(z\right)\Big|_{z=0} = T_W\,,$$

$$\frac{d}{dz}T\left(z\right)\bigg|_{z=L} = 0.$$

Нетрудно проверить, что решение задачи с данными условиями имеет вид

$$T\left(z\right) = T_L + \left(T_W - T_L\right)\cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{h\cdot k}}\cdot L\right)^{-1}\cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{h\cdot k}}\cdot\left(z - L\right)\right).$$

Задачи и вопросы:

1. Найти мощность рассеяния тепла на ребре и сравнить с мощностью рассеяния через плоскость основания ребра в отсутствии радиатора. Дать комментарий по оптимальному выбору геометрических размеров ребра.

5.6. Трехмерные стационарные уравнения тепловых, волновых и диффузионных процессов

Примером эллиптических уравнений служат однородное уравнение Лапласа

$$\mathrm{div}\left(\nabla U\left(\mathbf{r}\right)\right) = \Delta U\left(\mathbf{r}\right) = 0$$

и неоднородное уравнение Пуассона

$$\Delta U(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Эти уравнения появляются при решении стационарных задач математической физики. Стационарные уравнения теплопроводности в одномерном случае для тонкого слоя изучались выше. Здесь мы рассмотрим стационарные уравнения в пространстве большей размерности. В качестве первого примера рассмотрим закон сохранения заряда в однородной проводящей среде (101). В стационарном случае это уравнение принимает вид

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r})\right) = 0.$$

Плотность тока не зависит от времени. Используем закон Ома (102) для стационарного электрического поля $\boldsymbol{E}(\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{I}_e(\mathbf{r}) = \sigma \cdot \boldsymbol{E}(\mathbf{r}).$$

В стационарном случае поле $\boldsymbol{E}(\mathbf{r})$ безвихревое и потенциальное, то есть существует электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, с которым поле связано соотношением

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \tag{142}$$

Из этих соотношений получаем уравнение Лапласа для потенциала

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0. \tag{143}$$

Для второго примера рассмотрим два уравнения Максвелла в стационарном случае:

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{D}(\mathbf{r})\right) = 4 \cdot \pi \cdot \rho_e(\mathbf{r}),$$

$$\boldsymbol{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}(\mathbf{r}).$$

Из этих соотношений и уравнения (142) получаем уравнение Пуассона для потенциала электрического поля в однородной среде

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{4 \cdot \pi}{\varepsilon} \cdot \rho_e(\mathbf{r}). \tag{144}$$

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение теплопроводности (или диффузии) при наличии (или отсутствии источников) в трехмерном случае. Стационарные уравнения теплопроводности имеют вид (смотри (30), (72)):

$$\Delta T(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\Delta T(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k} f(\mathbf{r}).$$

Стационарные уравнения диффузии имеют вид (смотри (32), (70)):

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{D} f(\mathbf{r}).$$

Задача решений уравнений Лапласа или Пуассона формулируется так. Рассмотрим объем среды V с поверхностью Σ, ориентированной внешней (или внутренней) нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Найдем функцию $\varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (143) или Пуассона (144) и граничным условиям следующего вида:

1. Задача Дирихле (первая краевая задача)

$$\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \varphi_1(\mathbf{r}).$$

2. Задача Неймана (вторая краевая задача)

$$\left(\nabla\varphi(\mathbf{r}),\mathbf{n}(\mathbf{r})\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \varphi_2(\mathbf{r}).$$

3. Третья краевая задача

$$\left(\nabla\varphi(\mathbf{r}),\mathbf{n}(\mathbf{r})\right)\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} + \frac{\alpha}{k}\cdot\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in\Sigma} = \frac{\alpha}{k}\cdot\varphi_3(\mathbf{r}). \qquad (145)$$

5.7. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

Рассмотрим стационарный режим теплопроводности в цилиндрической стенке (полый цилиндр, труба) с внутренним радиусом r_1 и с внешним радиусом r_2. Уравнение теплопроводности в стационарных условиях, в отсутствии источников, в цилиндрической системе координат r, z, φ имеет вид:

$$\Delta T(r,z,\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T(r,z,\varphi) = 0.$$

Пренебрежем зависимостью решения от угловой переменной φ. Положим, что цилиндр имеет большую длину, в этом случае можно пренебречь зависимостью температуры от длины z. Получаем одномерную стационарную задачу с граничными условиями первого типа (задача Дирихле):

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\right)T(r) = 0, \\ T(r)\Big|_{r=r_1} = T_1, \\ T(r)\Big|_{r=r_2} = T_2. \end{cases}$$

Введем новую неизвестную функцию $U(r)$, с помощью которой можно понизить порядок дифференциального уравнения:

$$U(r) = \frac{d}{dr}T(r).$$

Получаем уравнение

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)U(r)=0.$$

Запишем уравнение в разделенных переменных

$$\frac{dU(r)}{U(r)}=-\frac{dr}{r}.$$

Получим первый интеграл уравнения

$$\ln(U(r))+\ln(r)=\ln(C_1).$$

Отсюда

$$U(r)=\frac{C_1}{r}.$$

Для температуры имеем уравнение

$$\frac{d}{dr}T(r)=\frac{C_1}{r}.$$

Разделим переменные

$$dT(r)=C_1\cdot\frac{dr}{r}.$$

Получаем общее решение

$$T(r)=C_1\cdot\ln(r)+C_2.$$

Определим произвольные постоянные C_1, C_2 из граничных условий:

$$C_1=\frac{T_1-T_2}{\ln(r_1)-\ln(r_2)},$$

$$C_2=T_1-(T_1-T_2)\cdot\frac{\ln(r_1)}{\ln(r_1)-\ln(r_2)}.$$

Решение имеет вид:

$$T(r)=T_1+\frac{T_1-T_2}{\ln(r_1)-\ln(r_2)}\cdot(\ln(r)-\ln(r_1)).$$

Найдем тепловой поток через внешнюю стенку, площадь которой $2\cdot\pi\cdot r_2\cdot L$, где L - высота цилиндра. Получаем

$$J_Q(r)=-k\cdot 2\cdot\pi\cdot r_2\cdot L\cdot\frac{\partial}{\partial r}T(r)\bigg|_{r=r_2}=k\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot L}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}\cdot(T_1-T_2).$$

Поток на единицу длины зависит от отношения радиусов и не зависит от площади внешней поверхности.

Задачи и вопросы:

1. Решить задачу Дирихле о распределении температуры в стационарных условиях для цилиндрической стенки.
2. Решить задачу Неймана о распределении температуры в стационарных условиях для цилиндрической стенки.

3. Змеевик паронагревателя выполнен из стальной трубы с соотношением диаметров $D_1/D_2 = 32/42\ мм$. Температуры внешней поверхности $T_2 = 580\ ^\circ C$, внутренней поверхности - $T_1 = 450\ ^\circ C$. Найти удельный тепловой поток на единицу длины трубы.

5.8. Передача теплоты через шаровую стенку

Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности – уравнение Лапласа – в сферических координатах r, θ, ϕ. Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta T(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) T(r, \theta, \phi) = 0.$$

Оператор градиента в сферических координатах

$$\nabla T(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \cdot \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \right) T(r, \theta, \phi).$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ - ортонормированный базис сферической системы координат. Рассмотрим полый шар с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2. Рассмотрим решение, когда температура изменяется только вдоль радиуса стенки. Получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T(r) = 0.$$

Интегрируем уравнение дважды, получаем общее решение

$$T(r) = C_2 - \frac{C_1}{r}.$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определим из граничных условий третьего рода (145). Допустим, шар заполнен жидкостью с температурой T_{L1}, и внутренняя стенка имеет коэффициент теплоотдачи α_1. Вне шара находится жидкость с температурой T_{L2} и с коэффициентом теплоотдачи α_2. Граничное условие на внутренней стенке имеет вид (здесь внешняя нормаль $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_r$):

$$-\frac{\partial}{\partial r} T(r) \Big|_{r=r_1} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot \left(T_{L1} - T(r)\big|_{r=r_1} \right).$$

Граничное условие на внешней стенке имеет вид (здесь внешняя нормаль $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_r$):

$$\frac{\partial}{\partial r} T(r) \Big|_{r=r_2} = \frac{\alpha_2}{k} \cdot \left(T_{L2} - T(r)\big|_{r=r_2} \right).$$

Получаем два уравнения для определения C_1, C_2:

$$-\frac{C_1}{r_1^2}=\frac{\alpha_1}{k}\cdot\left(T_{L1}-C_2+\frac{C_1}{r_1}\right),$$

$$\frac{C_1}{r_2^2}=\frac{\alpha_2}{k}\cdot\left(T_{L2}-C_2+\frac{C_1}{r_2}\right).$$

Получаем решение

$$C_1=\frac{1}{k}\frac{T_{L2}-T_{L1}}{\frac{1}{\alpha_1 r_1^2}+\frac{1}{\alpha_2 r_2^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)},$$

$$C_2=\frac{T_{L1}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_2 r_2^2}-\frac{1}{k\cdot r_2}\right)+T_{L2}\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1^2}+\frac{1}{k\cdot r_1}\right)}{\frac{1}{\alpha_1 r_1^2}+\frac{1}{\alpha_2 r_2^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}.$$

Найдем поток тепла через внешнюю стенку шара

$$J_Q\Big|_{r=r_2}=-k\cdot 4\pi\cdot r_2^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}T(r)\Big|_{r=r_2}=-k\cdot 4\pi\cdot r_2^2\cdot\frac{1}{r_2^2}\cdot C_1=4\pi\cdot K_B\cdot\left(T_{L1}-T_{L2}\right).$$

Здесь введено обозначение коэффициента теплопередачи шаровой стенки

$$K_B=\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1^2}+\frac{1}{\alpha_2 r_2^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right)^{-1}.$$

Задачи и вопросы:

1. Решить задачу Дирихле о распределении температуры в стационарных условиях для шаровой стенки (в радиальном приближении).
2. Решить задачу Неймана о распределении температуры в стационарных условиях для шаровой стенки (в радиальном приближении).

5.9. Теплообмен излучением

Мы рассмотрели процессы передачи тепловой энергии, такие, как теплопроводность и конвекция. Существует еще один механизм теплопередачи – передача тепла тепловым излучением. Любые нагретые тела являются источниками излучения. Они излучают переносящие энергию электромагнитные волны или, как следует из законов квантовой физики – фотоны (кванты электромагнитного излучения). Волны (фотоны) могут находиться в термодинамическом равновесии с излучающим их веществом. И в этом случае в среде возникает равновесная объемная спектральная плотность энергии излучения, зависящая от длины волны (частоты) излучения и температуры. Закон распределения объемной спектральной плотности энергии по частотам был найден Максом Планком в 1900 году (лауреатом Нобелевской премии по физике 1918 года). Закон Планка имеет вид

$$\rho_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT} \right) - 1 \right)^{-1} .$$

Или закон распределения объемной спектральной плотности энергии по длинам волн

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT} \right) - 1 \right)^{-1} .$$

Здесь частота ν и длина волны λ излучения связаны соотношением $\nu = c \cdot \lambda^{-1}$. В этих формулах $c = 3 \cdot 10^{10}$ $см \cdot сек^{-1}$ - скорость света, $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ $г \cdot см^2 \cdot сек^{-1}$ - постоянная Макса Планка, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ $эрг \cdot {}^\circ K^{-1}$ - постоянная Людвига Больцмана. Размерность $\rho_\nu(T)$ $эрг \cdot см^{-3} \cdot сек$ и $\rho_\lambda(T)$ $эрг \cdot см^{-4}$. Равновесное излучение в объеме распространяется изотропно. Введем вектор спектральной плотности потока равновесного излучения, приходящийся на единицу телесного угла

$$\boldsymbol{I}_\nu(T) = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot \boldsymbol{\eta} .$$

Здесь η - единичный вектор, показывающий направление распространения тепловой энергии. Спектральной интенсивностью излучения называют плотность потока, приходящегося на единицу телесного угла:

$$I_\nu(T) = \left| \boldsymbol{I}_\nu(T) \right| = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi} .$$

Элементом $d\Omega$ телесного угла называют отношение площадки $d\Sigma$ на сфере радиуса r к квадрату радиуса сферы. В сферической системе координат имеем равенство

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi .$$

Выделим с объеме площадку с вектором внешней нормали $\mathbf{n}$. Рассчитаем полусферную спектральную плотность потока $B_\nu^0(T)$, вытекающего с единичной площадки с нормалью $\mathbf{n}$. Для этого проинтегрируем $\boldsymbol{I}_\nu(T)$ по телесному углу (по полусфере относительно нормали):

$$B_\nu^0(T) = \int_{2\pi} \left(\boldsymbol{I}_\nu(T), \mathbf{n} \right) d\Omega = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cdot (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{n}) d\theta =$$

$$= \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4} = \pi \cdot I_\nu(T).$$

Обозначим β - угол между нормалью к площадке и вектором $\boldsymbol{\eta}$. Обозначим проекцию вектора $\boldsymbol{I}_\nu(T)$ на направление нормали

$$I_{\nu,\beta}(T) = \left(\boldsymbol{I}_\nu(T), \mathbf{n} \right) = I_\nu(T) \cdot \cos(\beta) .$$

Получаем формулу закона излучения Ламберта, справедливую для равновесного излучения Планка:

$$I_{\nu,\beta}(T) = I_{\nu,0}(T) \cdot \cos(\beta) .$$

Рассмотрим интегральный по частоте закон излучения Стефана-Больцмана. Интегральная по частоте полусферная плотность потока равна

$$B^0(T) = \int_0^\infty B_\nu^0(T)\, d\nu = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 . \tag{146}$$

Здесь константа излучения абсолютно черного тела $c_0 = 5.67\ Bm \cdot м^{-2} \cdot \left({}^\circ K\right)^{-4}$. Серое тело определяют, вводя степень черноты ε (интегральный коэффициент излучения), по формуле

$$B(T) = \varepsilon \cdot B^0(T) . \tag{147}$$

Или для спектрального коэффициента излучения

$$B_\nu(T) = \varepsilon_\nu \cdot B_\nu^0(T) .$$

Как следует из эксперимента, нагретые тела обмениваются тепловой энергией. Говорят, что между телами возможен лучистый теплообмен. Согласно закону Кирхгофа, лучистый теплообмен характеризуется следующими интегральными коэффициентами, характерными для каждого тела: A - поглощательная способность тела, R - отражательная способность тела, D - пропускательная способность тела. Коэффициенты удовлетворяют закону сохранения потока

$$A + R + D = 1 .$$

Для твердого тела можно положить:

$$D = 0 .$$

Явление лучистого теплообмена – это сложный процесс многократных обменов энергией. Рассмотрим упрощенный случай обмена энергией двух твердых тел, поверхности которых плоские и параллельные друг другу. Обменом с какими-либо третьими телами пренебрегаем. Обозначим температуры, поглощательные способности и плотности потоков, исходящие с поверхностей тел, через: T_1, A_1, B_1 и T_2, A_2, B_2. Рассмотрим следующее множество событий. Тело 1 посылает плотность потока B_1 в сторону тела 2, которое поглощает часть энергии излучения в количестве $A_2 \cdot B_1$. Второе тело отражает часть плотности потока в сторону тела 1 в количестве $(1 - A_2) \cdot B_1$. От этой доли плотности потока первое тело поглощает $A_1 \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$ и отражает $(1 - A_1) \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$. Вторая поверхность снова отражает $A_2 \cdot (1 - A_1) \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$ и поглощает $(1 - A_1) \cdot (1 - A_2)^2 \cdot B_1$ и так далее до бесконечности. Аналогичные соотношения получаются при рассмотрении процессов со второй поверхностью, в этом случае достаточно сделать замену индексов $1 \to 2$, $2 \to 1$. Найдем результирующую плотность потока B_{12}, которую первая поверхность передает второй поверхности. Для этого из плотности потока B_1 вычтем ту плотность потока, которая возвращается и снова поглощается:

$$\left(1+P+P^2....\right)\cdot\left(1-A_2\right)\cdot A_1\cdot B_1=\frac{\left(1-A_2\right)\cdot A_1}{1-P}\cdot B_1,$$

$$P=\left(1-A_1\right)\cdot\left(1-A_2\right).$$

Вычтем также плотность потока, которая поглощается первой поверхностью, из излучений второй поверхности:

$$A_1\cdot\left(1+P+P^2+....\right)\cdot B_2=\frac{A_1}{1-P}\cdot B_2\ .$$

Имеем

$$B_{12}=B_1-\frac{\left(1-A_2\right)\cdot A_1}{1-P}\cdot B_1-\frac{A_1}{1-P}\cdot B_2=\frac{A_2\cdot B_1-A_1\cdot B_2}{A_1+A_2-A_1A_2}\ . \qquad (148)$$

В условиях лучистого теплообмена поглощательная способность тела и интегральная степень черноты ε совпадают: $A_1=\varepsilon_1$, $A_2=\varepsilon_2$. Из (146), (147), (148) получаем

$$B_{12}=\varepsilon_r\cdot c_0\cdot\left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right). \qquad (149)$$

Здесь приведенная степень черноты ε_r равна

$$\varepsilon_r=\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1}.$$

Для снижения эффективности теплообмена используют экраны, размещаемые между телами. Поместим тонкостенный экран между двумя параллельными поверхностями двух тел. Для упрощения положим, что коэффициенты черноты тел и экрана одинаковые. Лучистый теплообмен 1 и 2 тела рассчитывается с помощью (149). Вследствие стационарности задачи и закона сохранения плотность потока от тела 1 к телу 2 должно совпадать с плотностью потока от 1 тела к экрану и от экрана к 2 телу. Следовательно:

$$\begin{aligned}B_{1э}&=\varepsilon_r\cdot c_0\cdot\left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right)=\\&=B_{э2}=\varepsilon_r\cdot c_0\cdot\left(\left(\frac{T_э}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right)\end{aligned}.$$

Отсюда следует, что в стационарных условиях температура экрана должна быть равна

$$\left(\frac{T_э}{100}\right)^4=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4+\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right).$$

Отсюда получаем

$$B_{1э} = B_{э2} = \frac{1}{2} \cdot B_{12} \ .$$

Итак, при наличии одного экрана плотность потока передаваемой лучистой энергии уменьшается в два раза.

Задачи и вопросы:

1. Найти формулу передачи плотности лучистого потока между двумя телами, если между телами расположены n экранов. Степени черноты тел и экранов положить одинаковыми.

2. Проверить, что отношение плотности лучистого потока тепла для системы двух тел с n одинаковыми экранами $B_э$ к плотности потока между двумя телами без экранов B_{12} равно:

$$\frac{B_э}{B_{12}} = \left(1 + n \cdot \frac{2-\varepsilon_э}{2-\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_э}\right)^{-1} \ .$$

Здесь ε, $\varepsilon_э$ - степени черноты тел и экранов.

3. Необходимо снизить лучистый теплообмен между телами в 10 раз. Какие степени черноты экранов и тел, и сколько экранов следует выбрать для решения этой задачи?

4. Для хранения льда используют деревянный ящик с крышкой, температура которой $20\,^{\circ}C$. Найти плотность лучистого теплового потока от крышки ко льду.

5. Во сколько раз изменится плотность лучистого теплового потока от крышки ко льду (задача 4), если между крышкой и льдом проложить слой: а) алюминиевой фольги, в) бумаги.

6. Между кирпичной и деревянной стенками проложили слой опилок и хлопковой ткани. Температура дерева $30\,^{\circ}C$, температура кирпича $-30\,^{\circ}C$. Найти лучистый тепловой поток от деревянной стенки к кирпичной стенке.

5.10. Метод функции источника для уравнения Лапласа

Существует интегральное представление решений граничной задачи Лапласа, которое мы запишем без доказательства. Это решение называется *основной интегральной формулой Грина:*

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial n'} U(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right] d\Sigma' \ .$$

Здесь $U(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U(\mathbf{r}) = 0$ в объеме V с поверхностью Σ, $\dfrac{\partial}{\partial n'}$ - символ производной по внешней нормали, $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Это формальное решение, так как под интегралом по поверхности стоит неизвестная функция и ее нормальная производная. Одновременно задать эти граничные данные невозможно. Но это решение можно преобразовать с помощью метода функции источника. Для этого рассмотрим произвольную гармоническую функцию $V(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ по переменным $\mathbf{r}'$ и запишем вторую формулу Грина для этих функций:

$$\iiint\limits_V \left(U(\mathbf{r}')\cdot\Delta V(\mathbf{r},\mathbf{r}')-V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\Delta U(\mathbf{r}')\right)dV'=$$
$$=\iint\limits_\Sigma \left(U(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}V(\mathbf{r},\mathbf{r}')-V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}U(\mathbf{r}')\right)d\Sigma'=0 .$$

Сложим эти две формулы, получим формулу метода функции источника:

$$U(\mathbf{r})=\iint\limits_\Sigma \left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}U(\mathbf{r}')-U(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]d\Sigma' .$$

Здесь функция источника имеет вид

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}+V(\mathbf{r},\mathbf{r}') .$$

Рассмотрим задачу Дирихле для граничных условий

$$U(\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in\Sigma}=f(\mathbf{r}') . \tag{150}$$

Выберем функцию $V(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ из условия:

$$V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in\Sigma}=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\Bigg|_{\mathbf{r}'\in\Sigma} .$$

Получаем функцию источника задачи Дирихле, удовлетворяющую граничным условиям на поверхности Σ:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in\Sigma}=0 . \tag{151}$$

Используем (150) и (151), получаем решение задачи Дирихле в явном виде в методе функции источника:

$$U(\mathbf{r})=-\iint\limits_\Sigma \left[f(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]d\Sigma' . \tag{152}$$

Итак, для получения функции источника следует решить задачу Дирихле для функции $V(\mathbf{r},\mathbf{r}')$:

$$\begin{cases}\Delta V(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0,\\ V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in\Sigma}=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\Bigg|_{\mathbf{r}'\in\Sigma}\end{cases} .$$

С помощью этого решения находим $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ и получаем решение любой задачи Дирихле по формуле (152).

Приведем пример такого решения в электростатической интерпретации. В этом случае функция источника есть потенциал в точке наблюдения $\mathbf{r}(x,y,z)$ от точечного источника, помещенного в точку

$\mathbf{r}'(x',y',z')$ внутри заземленной проводящей поверхности Σ. Такая задача в электростатике решается методом изображений. Найдем функцию источника для полупространства, граница которого есть плоскость $z'=0$. Поместим в точку с координатами $\mathbf{r}_1'(x',y',-z')$ единичный отрицательный заряд – зеркальное изображение точечного заряда $\mathbf{r}'(x',y',z')$. В точке наблюдения потенциал от этого дополнительного заряда равен $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1')}$. Выберем

$$V(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1')}\ .$$

Очевидно, уравнение Лапласа для так выбранной функции $V(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ удовлетворяется. Как следствие, функция источника равна

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1')}\ . \qquad (153)$$

Граничное условие (151) легко проверяется.

Задачи и вопросы:

1. Найти нормальную производную функции $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (153) и записать решение (152) в окончательном виде.
2. Построить функцию источника для бесконечного плоского слоя.

5.11. Стационарные уравнения гидродинамики – гидростатика, уравнение Бернулли

Запишем уравнение (109) в стационарном варианте для неподвижной жидкости

$$\nabla p(\mathbf{r})=\rho(\mathbf{r})\cdot\mathbf{g}\ . \qquad (154)$$

Это уравнение описывает механическое равновесие жидкости. При отсутствии внешних сил имеем простое решение

$$p(\mathbf{r})=const\ .$$

Пренебрегаем сжимаемостью жидкости (то есть полагаем постоянство объемной плотности $\rho(\mathbf{r})=const$), получаем стационарное решение для ускорения $\mathbf{g}=g\cdot\mathbf{e}_z$, направленного вдоль оси z:

$$p(z)=-\rho\cdot g\cdot z+const\ .$$

Полагая, что на высоте $z=h$ к внешней горизонтальной поверхности жидкости приложено однородное давление p_0, получаем решение:

$$p(z)=\rho\cdot g\cdot(h-z)+p_0\ .$$

Из (154) следует, что если жидкость равновесна в поле тяжести с ускорением, направленном по оси z, то давление и плотность может зависеть только от координаты z. В противном случае в жидкости началось бы движение элементов объема в плоскости, перпендикулярной оси z. Но так как давление и плотность в равновесии определяют температуру, то отсюда следует, что температура в равновесии должна зависеть только от координаты z.

Рассмотрим стационарное движение жидкости, которое возможно при условии постоянства скорости от времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 .$$

Удобно ввести удельное теплосодержание жидкости по формуле

$$w = \varepsilon + p \cdot v .$$

Тогда уравнение Гиббса (4) для локального равновесия системы с постоянной концентрацией $dc = 0$

$$dw = T \cdot ds + v \cdot dp .$$

Для изоэнтропического течения и для удельного объема $v = \rho^{-1}$ получаем

$$dw = \frac{1}{\rho} \cdot dp .$$

Или

$$\nabla w(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p(\mathbf{r}) .$$

Уравнение Эйлера (109) перепишется:

$$\left(\mathbf{v}(\mathbf{r}), \nabla\right)\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla w(\mathbf{r}) + \mathbf{g} .$$

Используем векторное тождество

$$\frac{1}{2}\nabla \mathrm{v}(\mathbf{r})^2 = \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{rot}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r})\right)\right] + \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}), \nabla\right)\mathbf{v}(\mathbf{r}) .$$

Запишем объемную силу тяжести через градиент потенциала притяжения:

$$\mathbf{g} = \mathrm{g} \cdot \mathbf{e}_z = -\nabla\left(\mathrm{g} \cdot z\right) .$$

Получим уравнение Эйлера для стационарного течения в поле сил тяжести

$$\left[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{rot}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r})\right)\right] = \nabla\left(\frac{\mathrm{v}(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + \mathrm{g} \cdot z\right) . \qquad (155)$$

Стационарная скорость частиц жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в разных точках объема зависит от координат. Определим линии тока жидкости, такие, что стационарный единичный вектор касательной к линии тока $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ совпадает по направлению со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в данной точке. Умножим уравнение (155) скалярно на $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, получаем

$$\left(\mathbf{s}(\mathbf{r}), \nabla\left(\frac{\mathrm{v}(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + \mathrm{g} \cdot z\right)\right) = 0 .$$

Или, на линии тока имеем постоянную величину

$$\left.\left(\frac{\mathrm{v}(\mathbf{r})^2}{2}+w(\mathbf{r})+\mathrm{g}\cdot z\right)\right|_{\mathbf{s}(\mathbf{r})}=const\ . \qquad (156)$$

Это известное уравнение Бернулли. Отметим, что левая часть уравнения постоянна на выбранной линии тока, но это постоянное значение различно на разных линиях тока. Это равенство называют первым интегралом уравнения движения или интегралом Бернулли. Если значение постоянной Бернулли $const$ известно в какой-либо точке потока, то это уравнение позволяет вычислить скорость и давление в любой другой точке на линии тока.

Задачи и вопросы:

1. Истечение жидкости из бака по трубе. Найти скорость вытекания жидкости из трубы, находящейся на высоте $h=0$, если уровень жидкости в баке находится на высоте h. Жидкость несжимаема с объемной плотностью ρ. Сечение бака гораздо больше сечения трубы. Давление атмосферное.

2. Через плотину высотой z_1 переливается жидкость по линии тока. Найти скорость жидкости на высоте $z_2<z_1$, если жидкость несжимаема с плотностью ρ. Скорость жидкости в точке 1 гораздо меньше скорости в точке 2.

3. Крыло обтекают две линии тока, начинающееся в точке с давлением p_0 и скоростью v_0 вдалеке от крыла слева. В двух точках 1 и 2 на крыле, находящихся на расстоянии h друг от друга, скорости потока равны v_1 (верх крыла) и $v_2<v_1$ (снизу крыла). Найти подъемную силу крыла, если его площадь $S=20\,м^2$. Положить $v_1=200\ м\cdot сек^{-1}$, $v_2=180\ м\cdot сек^{-1}$.

5.12. Стационарное потенциальное течение

Упростим уравнение (155), сделав предположение о потенциальности течения. В этом случае у скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ существует потенциал скорости $\Phi(\mathbf{r})$, то есть такая скалярная функция, что справедливо соотношение

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\nabla\Phi(\mathbf{r})\ . \qquad (157)$$

Из этого предположения следует, что в жидкости нет вихрей, то есть выполнено

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{v}(\mathbf{r})\right)=\mathbf{rot}\left(\nabla\Phi(\mathbf{r})\right)=0\ .$$

Получаем уравнение

$$\nabla\left(\frac{\mathrm{v}(\mathbf{r})^2}{2}+w(\mathbf{r})+\mathrm{g}\cdot z\right)=0\ .$$

Получаем условие постоянства функции во всех точках объема

$$\frac{\mathrm{v}(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + \mathrm{g}\cdot z = const \ .$$

Это уравнение, в отличие от уравнения Бернулли (156), предполагает постоянство левой части во всех точках объема. Это уравнение Бернулли для потенциального течения. Рассмотрим несжимаемую жидкость, для которой из закона сохранения (8) следуют два соотношения:

$$\begin{gathered} \mathrm{giv}\big(\mathbf{v}(\mathbf{r})\big) = 0, \\ \rho = const. \end{gathered} \tag{158}$$

Уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{\left|\nabla\Phi(\mathbf{r})\right|^2}{2} + \frac{p(\mathbf{r})}{\rho} + \mathrm{g}\cdot z = const \ .$$

Используя уравнение непрерывности (158) и определение (157), получаем уравнение Лапласа для потенциала скоростей

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 \ , \tag{159}$$

которое следует решать с заданными граничными условиями. Из этого уравнения находим потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ и с помощью (157) определяем поле скоростей стационарного потенциального течения. Уравнение Бернулли будем использовать для определения поля давлений в жидкости. Потенциальным течением можно аппроксимировать волновые движения воды, движения воздуха при распространении в нем акустических волн, непрерывное движение жидкости при обтекании твердых тел, струйные течения. Потенциальность нарушается из-за вязкости, которая провоцирует появление вихрей.

Получим поле скоростей в стационарном потенциальном потоке, движущимся на бесконечности с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})\Big|_{|\mathbf{r}|\to\infty} \to -\mathrm{v}\cdot\mathbf{e}_x$$

и обтекающим неподвижный в начале координат шар радиуса R. Решим уравнение Лапласа для потенциала (159) с граничными условиями на бесконечности

$$\nabla\Phi(\mathbf{r})\Big|_{|\mathbf{r}|\to\infty} \to -\mathrm{v}\cdot\mathbf{e}_x$$

и на поверхности шара (непроницаемость границы)

$$\big(\mathbf{n}(\mathbf{r}),\nabla\Phi(\mathbf{r})\big)\Big|_{|\mathbf{r}|=R} = 0 \ .$$

Запишем решение уравнения Лапласа (159) в виде суммы двух слагаемых

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) \ .$$

Потенциал $\Phi_2(\mathbf{r})$ удовлетворяет граничной задаче

$$\Delta\Phi_2(\mathbf{r}) = 0,$$
$$\nabla\Phi_2(\mathbf{r})\Big|_{|\mathbf{r}|\to\infty} \to -\mathrm{v}\cdot\mathbf{e}_x,$$
$$\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \nabla\Phi_2(\mathbf{r})\right)\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = -\mathrm{v}\cdot\cos(\vartheta).$$

Решением этой задачи является потенциал

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = -\mathrm{v}\cdot x\ .$$

Потенциал $\Phi_1(\mathbf{r})$ должен удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\Delta\Phi_1(\mathbf{r}) = 0,$$
$$\nabla\Phi_1(\mathbf{r})\Big|_{|\mathbf{r}|\to\infty} \to 0,$$
$$\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \nabla\Phi_1(\mathbf{r})\right)\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\Phi_1(\mathbf{r})\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = \mathrm{v}\cdot\cos(\vartheta).$$

Функция $\Phi_1(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, является гармонической функцией. Нетрудно проверить, что градиент гармонической функции также гармоничен. Известно частное решение уравнения Лапласа вне шара (потенциал точечного источника, расположенного в центре шара):

$$\Phi_p(\mathrm{r}) = \frac{1}{\mathrm{r}}\ .$$

Но тогда и производная по любой координате будет также частным решением (потенциал диполя):

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_p(\mathrm{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{r}} = -\frac{x}{\mathrm{r}^3}\ .$$

Рассмотрим решение

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = C\cdot\frac{-x}{\mathrm{r}^3}$$

и проверим удовлетворение граничным условиям. Очевидно

$$C\cdot\frac{-x}{\mathrm{r}^3}\xrightarrow[\mathrm{r}\to\infty]{}0\ .$$

Второе граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\Phi_1(\mathbf{r})\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = C\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\frac{-x}{\mathrm{r}^3}\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = C\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\frac{-\cos(\vartheta)}{\mathrm{r}^2}\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} =$$

/

$$= C\cdot\frac{2\cos(\vartheta)}{\mathrm{r}^3}\Bigg|_{|\mathbf{r}|=R} = C\cdot\frac{2\cos(\vartheta)}{\mathrm{R}^3} = \mathrm{v}\cdot\cos(\vartheta)$$

Отсюда определяем C и получаем решение:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = -\mathrm{v}\frac{R^3}{2}\cdot\frac{x}{\mathrm{r}^3} \ .$$

Итак, решение задачи имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathrm{v}\cdot x\cdot\frac{R^3+2\mathrm{r}^3}{2\mathrm{r}^3} \ .$$

Задачи и вопросы:

1. Найти распределение поля скоростей для задачи обтекания потоком неподвижного шара. Скорость потока на бесконечности $-\mathrm{v}$, радиус шара R .

2. Дано распределение поля скоростей идеальной жидкости:

$$\mathrm{v}_x = 3\cdot x,\ \mathrm{v}_y = 2\cdot y,\ \mathrm{v}_z = 4\cdot z \ .$$

Определить потенциал поля скоростей и распределение давления в потоке.

Литература

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика: Часть 1 (Серия: «Теоретическая физика», том V) М., 1976, 584 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986, 736 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. — 4-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987, 247 с.

Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Т. 1: Теория равновесных систем: Термодинамика: Учебное пособие. Изд. 2-е, сущ. перераб. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2002, 238 с.

Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Т.2: Теория разновесных систем: Статистическая физика: Учебное пособие. Изд. 2-е, сущ. перераб. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2002, 429 с.

Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Т.З: Теория неравновесных систем: Учебное пособие. Изд. 2-е, сущ. перераб. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2003, 447 с.

Климонтович Ю. Л. Статистическая физика: Учебное пособие,— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 608 с.

Новиков, И. И. Термодинамика : учебное пособие / И. И. Новиков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021, 592 с.

Шумилов, Р. Н. Проектирование систем вентиляции и отопления : учебное пособие / Р. Н. Шумилов, Ю. И. Толстова, А. Н. Бояршинова. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021, 336 с.

Карпов, К. А. Прикладная гидрогазодинамика : учебное пособие / К. А. Карпов, Р. О. Олехнович. — Санкт-Петербург : Лань, 2021, 100 с.

Черняк, В. Г. Кинетика разреженного газа : учебное пособие / В. Г. Черняк. — Санкт-Петербург : Лань, 2018, 540 с

Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики : учебное пособие / М. М. Карчевский. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021, 164 с.

И.П. Базаров. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991, 376 с.

С.Р. де Гроот. Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956, 281 с.

К.П. Гуров. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (физические основы). М.: “Наука”, 1978, 128 с.

С. Де Гроот, П. Мазур. Неравновесная термодинамика. М.: “Мир”, 1964, 456 с.

Исаченко В.П. и др. Теплопередача. М.: “Энергия”, 1975, 488 с.

Болгарский А.В. и др. Термодинамика и теплопередача. М.: “Высшая школа” 1975, 495 с.

Г.Н. Дульнев. Теория тепло – и массообмена. Учебное пособие СПб.: НИУ ИТМО, 2012, 195 с.

Г.М. Кондратьев. Регулярный тепловой режим. М.:ГИТТЛ, 1954, 408 с.

А.В. Лыков. Теория теплопроводности. М.: “Высшая школа”, 1967, 600 с.

Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.:”Энергия”, 1977, 342 с.

Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.Л.: ГЭИ, 1961, 680 с.

Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: “Высшая школа”, 1973, 360 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999, 799 с.

Кошляков Н. С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.:”Высшая школа”, 1970, 712 с.

Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.:”Наука”, 1981, 512 с.

Справочник

1 кал = 4,1868 Дж
Для свободной конвекции коэффициент теплоотдачи: воздух $5 \le \alpha \le 25$ ($Bт \cdot м^{-2} \cdot {}^{\circ}K^{-1}$), вода $20 \le \alpha \le 100$ ($Bт \cdot м^{-2} \cdot {}^{\circ}K^{-1}$). Для вынужденной конвекции коэффициент теплоотдачи: воздух $10 \le \alpha \le 200$ ($Bт \cdot м^{-2} \cdot {}^{\circ}K^{-1}$), вода $50 \le \alpha \le 10000$ ($Bт \cdot м^{-2} \cdot {}^{\circ}K^{-1}$).

Таблица 1. Тепловые свойства твердых тел

Твердое тело	Коэффициент теплопроводности k $вт/(м \cdot {}^{\circ}C)$	Коэффициент температуро-проводности κ $м^2/сек$	Удельная теплоемкость c_p $дж/(кг \cdot {}^{\circ}C)$	Объемная плотность ρ $г/см^3$
кирпич	0.5	$5.2 \cdot 10^{-7}$	750	1.8
пробка	0.047	$2.78 \cdot 10^{-7}$	1884	0.24
алюминий	220	$8.4 \cdot 10^{-5}$	920	2.7
чугун	52.3	$1.7 \cdot 10^{-5}$	550	7.0
бетон	1.75	$5.56 \cdot 10^{-7}$	880	2.3
мрамор	2.77		808	2.7
медь	401	$1.11 \cdot 10^{-4}$	380	8.9
сталь	50	$1.17 \cdot 10^{-5}$	460	7.8
вольфрам	162.8	$6.3 \cdot 10^{-5}$	125.6	19.3
поролон	0.03			
латунь	100	$3.4 \cdot 10^{-5}$	380	8.5
графит	1500			
железо	92	$2.3 \cdot 10^{-5}$	460	7.8
дерево	0.15	$8.2 \cdot 10^{-8}$	2700	0.4
свинец	35.3	$2.4 \cdot 10^{-5}$	120	11.3
асбест	0.022			0.576
стекло	0.814		837	2.71
войлок	0.058			0.33
серебро	418.7	$1.7 \cdot 10^{-4}$	251.2	10.52

Таблица 2 Тепловые свойства жидкостей

Жидкость	Коэффициент теплопроводности k $вт/(м \cdot {}^{\circ}C)$	Коэффициент температуро-проводности κ $м^2/сек$	Удельная теплоемкость c_p $дж/(кг \cdot {}^{\circ}C)$	Объемная плотность ρ $г/см^3$
вода	0.6	$0.143 \cdot 10^{-6}$	4200	1.0
керосин			2140	0.8

Таблица 3   Тепловые свойства газов.

Газ	Коэффициент теплопроводности k $вт/(м\cdot^\circ C)$	Коэффициент температуро-проводности κ $м^2/сек$	Удельная теплоемкость c_p $дж/(кг\cdot^\circ C)$	Объемная плотность ρ $кг/м^3$
углекислота	0.016	$0.83\cdot10^{-5}$	830	1.98
аммиак	0.027	$0.17\cdot10^{-4}$	2100	0.65
гелий	0.174	$1.9\cdot10^{-4}$	5200	0.18
воздух	0.025	$1.9\cdot10^{-5}$	1000	1.29
азот	0.025	$1.6\cdot10^{-5}$	1000	1.25
хлор				3.21
водород	0.186	$11\cdot10^{-5}$	14000	0.081

Таблица 4 Упругие свойства веществ

Вещества	Модуль Юнга $E\,10^{10}$ $н/м^2$	Коэффициент Пуассона
сталь	21	0.293
алюминий	7.05	0.345
золото	7.8	0.44
медь	12.98	0.343
стекло	6.0	0.2
резина	0.0002	0.47
свинец	1.62	0.441

Таблица 5 Диффузия вещества В в веществе А

Среда, где происходит процесс диффузии А	Диффундирующее вещество В	Коэффициент диффузии D $см^2/сек$
гелий	аргон	0.7
воздух	водород	0.64
азот	кислород	0.2
воздух	этиловый спирт	0.1
водород	метиловый спирт	0.5
воздух	уксусная кислота	0.11
кислород	бензол	0.18
кремний	водород	0.0094

InAs	In	$6 \cdot 10^5$
Se	Fe	10^{-5}
H_2O	HCl	$2.23 \cdot 10^{-2}$
H_2O	NH_3	$1.21 \cdot 10^{-2}$

Таблица 6. Коэффициенты излучения (степени черноты) поверхностей

Материал стенки	Степень черноты ε
Алюминиевая фольга	0.04
Бумага	0.55
Бетон	0.85
Вода	0.96
Дерево	0.91
Кирпич	0.9
Лед	0.97
Опилки	0.75
Стекло	0.92
Хлопковая ткань	0.77

Мирошниченко Георгий Петрович,
Мешковский Игорь Касьянович

Математическая физика для инженеров

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А