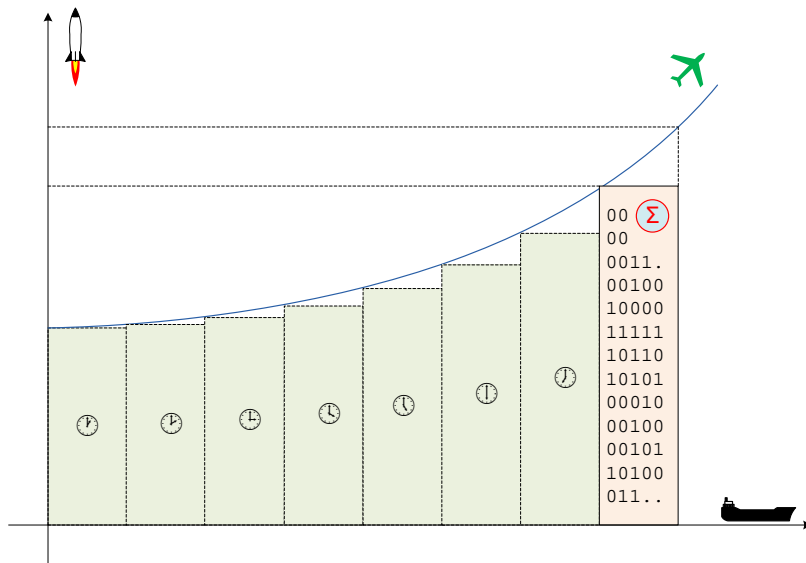


ИТМО

А.В. Лопарев

ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ



Санкт-Петербург
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Лопарев
ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ
ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ
ИНФОРМАЦИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 24.03.02 Системы управления движением и
навигация

в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2023

Лопарев А.В., Основы цифровой обработки сигналов и ее применение в задачах обработки навигационной информации– СПб: Университет ИТМО, 2023. – 64 с.

Рецензент(ы):

Литвиненко Юлия Александровна, кандидат технических наук, , доцент (квалификационная категория "доцент практики") факультета систем управления и робототехники, Университета ИТМО.

В пособии рассматриваются методы цифровой обработки сигналов, использующиеся при построении алгоритмического обеспечения навигационных комплексов и систем. Приведены общие сведения о цифровых системах обработки информации и управления, используемых методах описания цифровых сигналов и систем и подходах к их анализу и синтезу. Основное внимание уделено методам исследования импульсных линеаризованных моделей; в то же время в пособии рассмотрены вопросы построения систем с учетом нелинейных эффектов, обусловленных квантованием по уровню. Пособие содержит 5 разделов, по каждому из которых приведен перечень контрольных вопросов и задание для самостоятельной работы с использованием пакета Matlab. В приложениях приведены примеры выполнения заданий.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' is slightly taller than the other letters.

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2023
© Лопарев А.В., 2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	6
1.1. Сущность цифровой обработки. Виды квантования	6
1.2. Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразования. Шумы квантования в АЦП и ЦАП	7
1.3. Достоинства и недостатки цифровых систем.....	9
1.4. Спектр дискретного сигнала	10
1.5. Задание для самостоятельной работы	13
1.6. Контрольные вопросы.....	14
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	15
2.1. Разностные уравнения и их решение	15
2.2. Z-преобразование.....	17
2.3. Основные теоремы и свойства z-преобразования.....	18
2.4. Нахождение оригинала по z-преобразованию	20
2.5. Передаточные функции и импульсные характеристики цифровых фильтров.....	22
2.6. Задание для самостоятельной работы	24
2.7. Контрольные вопросы.....	26
3. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	27
3.1. Частотные характеристики цифровых фильтров.....	27
3.2. Использование псевдочастоты.....	28
3.3. Устойчивость цифровых фильтров	29
3.4. Задание для самостоятельной работы	30
3.5. Контрольные вопросы.....	32
4. ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	33
4.1. Прямая форма реализации. Каноническая схема фильтра	33
4.2. Транспонированные формы реализации цифровых фильтров	35
4.3. Последовательная и параллельная формы реализации цифровых фильтров.....	37
4.4. Задание для самостоятельной работы	38
4.5. Контрольные вопросы.....	40
5. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	41
5.1. Подходы, использующиеся при синтезе цифровых фильтров.....	41

5.2. Цифровое интегрирование	42
5.3. Цифровое дифференцирование.....	46
5.4. Задание для самостоятельной работы	51
5.5. Контрольные вопросы.....	52
ЛИТЕРАТУРА	53
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Текст m-файла к заданию 1.5	54
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Пример выполнения задания 3.4	56
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Текст m-файла к заданию 4.4	59
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Текст m-файла к заданию 5.4	61

ВВЕДЕНИЕ

Методы цифровой обработки сигналов (ЦОС) широко используются при решении задач навигации аэрокосмических и морских объектов как на уровне построения информационно-измерительных систем, так и в задачах комплексной обработки информации. Они применяются и в алгоритмах, функционирующих в реальном времени для решения задач позиционирования объекта и управления им, и при так называемой камеральной обработке, когда требуется обработать массивы полученных во время движения данных для картографирования местности, составления баз данных по геофизическим полям и т.п.

В настоящем пособии излагаются фундаментальные положения ЦОС, в нем отсутствуют разделы, касающиеся более сложных вопросов, таких как стохастическая обработка данных, построение адаптивных фильтров, спектральный анализ, двумерная обработка сигналов, построение цифровых систем управления и т.п. Подобные вопросы рассматриваются в рамках других дисциплин подготовки бакалавров и магистров; для более детального их изучения рекомендуется воспользоваться специальной литературой, в том числе приведенной в библиографическом списке.

Пособие содержит 5 разделов, по каждому из которых приведены перечень контрольных вопросов и задание для самостоятельной работы с использованием пакета Matlab. При изложении теоретического материала основное внимание уделено методам исследования импульсных линеаризованных моделей, характеризующихся наличием элементов, квантующих сигналы по времени. Эффекты, обусловленные квантованием по уровню и трудно поддающиеся теоретическому описанию, изучаются главным образом при выполнении практических заданий посредством компьютерного моделирования. В приложениях приведены примеры выполнения заданий, позволяющие обучающемуся существенно упростить формирование и отладку программных кодов и сосредоточить основное внимание на особенностях применения того или иного алгоритма.

Представленный материал опирается на компетенции, полученные в ходе изучения дисциплин «Дискретная математика», «Теория автоматического управления», «Математические основы теории оценивания».

1. ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

1.1. Сущность цифровой обработки. Виды квантования

Сущность цифровой обработки заключается в том, что исходный аналоговый сигнал (как правило, напряжение или угол) преобразуется в последовательность чисел, которая затем подвергается математическим преобразованиям в цифровом вычислителе. Преобразованный цифровой сигнал (последовательность чисел) при необходимости может быть преобразован обратно в физический сигнал.

Последовательность чисел при цифровой обработке определена только в дискретные моменты времени и не может полностью соответствовать аналоговому сигналу. Числа, составляющие последовательность, называются отсчетами сигнала. Как правило, отсчеты берутся через равные промежутки времени T , называемые интервалом дискретизации, или периодом дискретности. Величина, обратная периоду дискретности, называется частотой дискретизации. Соответствующая ей круговая частота определяется как $\omega_d = 2\pi/T$. Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется квантованием по времени, или дискретизацией, а результат такого преобразования – дискретным сигналом.

При обработке сигнала в вычислителе его отсчеты представляются в виде двоичных чисел, имеющих ограниченное число разрядов. Вследствие этого неизбежно происходит округление сигнала, или квантование по уровню. Дискретный сигнал, квантованный по уровню, называют цифровым сигналом. Процессы квантования по времени и по уровню поясняет рис. 1. Здесь и далее в квадратных скобках будем указывать целочисленный аргумент.

Заметим, что квантование по уровню, в отличие от квантования по времени, – операция нелинейная. В связи с этим системы цифровой обработки сигналов (цифровые системы) являются принципиально нелинейными. Однако в ряде случаев эффекты, связанные с квантованием по уровню, не являются существенными. В этих случаях можно ограничиться рассмотрением линеаризованных (импульсных) систем, поведение которых приближенно соответствует поведению соответствующих им цифровых систем. В дальнейшем при анализе цифровых фильтров основное внимание будет уделяться именно квантованию по времени, пренебрегая процессами квантования по уровню, если это не оговорено особо.

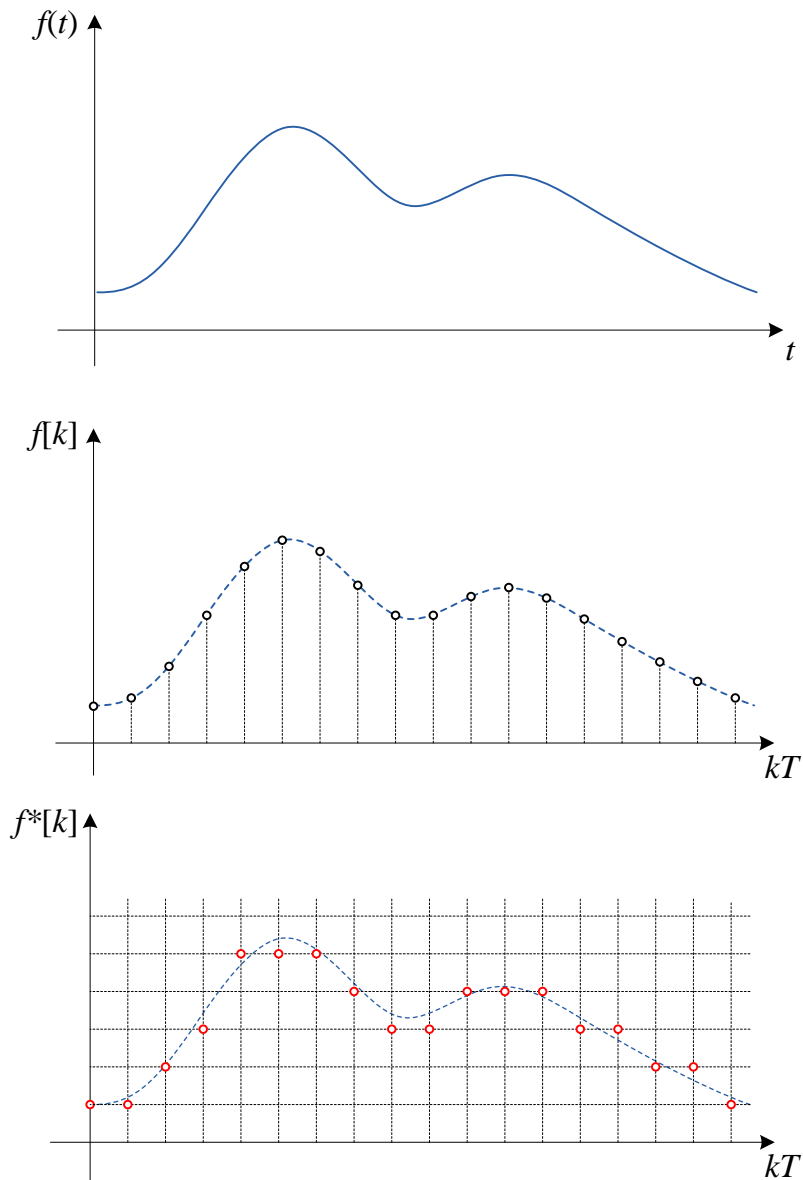


Рис. 1. Аналоговый $f(t)$, дискретный $f[k]$ и цифровой $f^*[k]$ сигналы

1.2. Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразования. Шумы квантования в АЦП и ЦАП

Обобщенная структурная схема цифровой системы приведена на рис. 2. На вход поступает аналоговый сигнал $f(t)$. Его дискретизация и квантование по уровню осуществляются в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). Выходным сигналом АЦП является последовательность чисел $f^*[k]$, поступающая в цифровой вычислитель (ЦВ). Вычислитель реализует различные математические операции над входной последовательностью, при этом ранее полученные отсчеты и результаты вычислений могут сохраняться в памяти для использова-

ния в последующих вычислениях. Результатом вычислений является новая последовательность чисел $y^*[k]$, по этой последовательности (при необходимости) с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) формируется выходной аналоговый сигнал $u(t)$. В цифровых системах управления этот сигнал поступает на исполнительные устройства, изменяя тем самым состояние $x(t)$ объекта управления (ОУ).

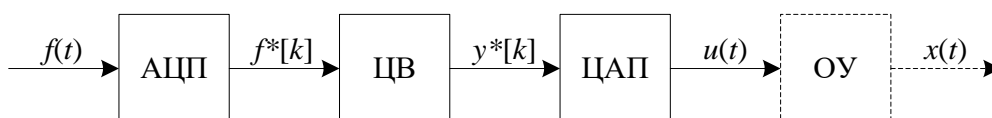


Рис. 2. Структурная схема цифровой системы

АЦП и ЦАП имеют статические характеристики ступенчатого (релейного) вида. Если принять, что изменение входного сигнала за период дискретности превышает единицу младшего разряда преобразователя, то можно пренебречь влиянием ступенчатости характеристики и линеаризовать ее, проведя некоторую «среднюю» прямую. Для примера на рис. 3 изображена статическая характеристика АЦП, где по оси абсцисс отложено непрерывное значение входного сигнала f , а по оси ординат – его цифровое представление f^* , получаемое на выходе преобразователя.

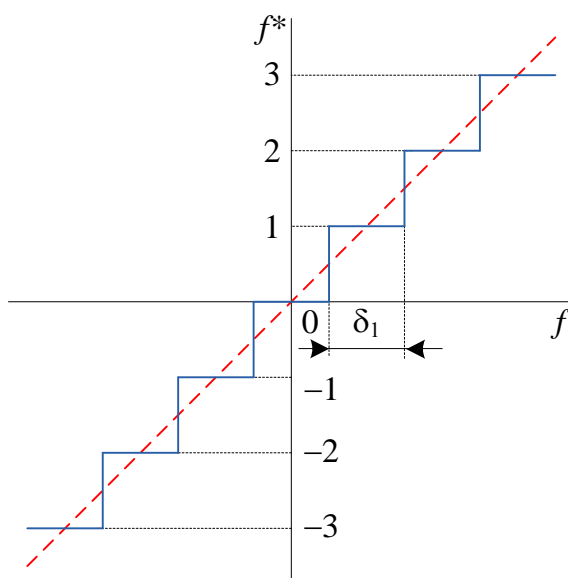


Рис. 3. Статическая характеристика АЦП

Для линеаризованной характеристики, показанной на рис. 3 штриховой линией, можно ввести коэффициент передачи АЦП $k_1 = 1/\delta_1$, как тангенс угла наклона этой линии. Здесь δ_1 – цена младшего разряда АЦП. Максимальное значение ошибки округления составляет здесь $0,5\delta_1$. Если считать, что все значения ошибки округления от $-0,5\delta_1$ до $+0,5\delta_1$ равновероятны, то есть ошибка распределена по равномерному закону, то ее дисперсия составит $\sigma_{va}^2 = \delta_1^2/12$. Кроме того, зачастую вводится предположение о независимости ошибок округления в каждом такте опроса преобразователя, то есть для ошибок квантования используется модель дискретного белого шума с корреляционной функцией $R_{va}[k] = \sigma_{va}^2 \delta_0[k]$, где

$$\delta_0[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

– единичная импульсная функция.

Аналогично может быть учтено квантование в ЦАП [1]. Здесь коэффициент передачи будет равен цене младшего разряда преобразователя.

1.3. Достоинства и недостатки цифровых систем

Основные преимущества цифровой техники по отношению к аналоговой сводятся к следующему:

- параметры систем имеют высокую стабильность;
- упрощаются процедуры настройки и регулировки;
- повышается надежность и отказоустойчивость;
- повышается помехозащищенность;
- повышается чувствительность;
- существует возможность реализации практически любых алгоритмов обработки сигналов, в том числе нелинейных и нестационарных;
- улучшаются массо-габаритные показатели, снижается стоимость.

Следует, однако, иметь в виду, что дополнительные преобразования сигналов в цифровых системах приводят к определенным нежелательным последствиям, определяющим недостатки цифровых систем:

- вводятся особые элементы систем – АЦП и ЦАП, усложняется печатный монтаж на платах, увеличивается количество проводников;
- квантование по уровню приводит к потере точности;

– конечная длительность преобразований и вычислений приводит к задержке в получении выходного сигнала; в частности, в системах управления это может привести к потере устойчивости.

1.4. Спектр дискретного сигнала

Временная реализация сигнала несет в себе большое количество информации, которая для невооруженного глаза незаметна. Часть этой информации может приходиться на слабые компоненты, величина которых зачастую недостаточна для их выявления непосредственно по реализации. Тем не менее, подобные слабые компоненты могут быть важны при описании, например, гидроакустических или радиолокационных сигналов. Для их обнаружения и изучения часто на практике применяют частотный, или спектральный, анализ. Спектральный анализ эквивалентен преобразованию сигнала из временной области в частотную. Для такого перехода традиционно используется преобразование Фурье:

$$S_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1)$$

где $f(t)$ – непрерывный сигнал, $S_H(\omega)$ – его спектр. В том же случае, когда сигнал $f(t)$ представлен своими дискретными отсчетами $f[k] = f(kT)$, спектральную функцию находят в виде

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\omega kT}, \quad (2)$$

где T – период дискретности. Следует отметить, что спектр дискретного сигнала имеет размерность, совпадающую с размерностью сигнала, в то время как размерность спектра непрерывного сигнала равна размерности сигнала, умноженной на секунду.

Определения спектров непрерывного и дискретного сигналов становятся эквивалентными друг другу, если дискретному сигналу сопоставляется последовательность δ -функций с весами, равными отсчетам дискретного сигнала:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \delta(t - kT). \quad (3)$$

Тогда спектр непрерывной функции $s(t)$ будет совпадать с (2).

В силу того, что значения δ -функции отличны от нуля только в дискретные моменты времени, кратные T , выражение (3) можно переписать в несколько ином виде:

$$s(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Второй множитель представляет собой периодическую по времени функцию с периодом T . Разложив эту функцию в ряд Фурье, получим [2]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t},$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. Исходя из этого может быть записано выражение, устанавливающее взаимосвязь спектров дискретизированного и порождающего его непрерывного сигнала:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_n)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_H\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right).$$

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала представляет собой бесконечную сумму копий спектра исходного непрерывного сигнала, смещенных друг относительно друга на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$ (рис. 4). При этом, несмотря на то, что один и тот же дискретный сигнал может быть порожден сколь угодно многими непрерывными функциями, суммирование копий спектров этих функций всегда даст одинаковый результат.

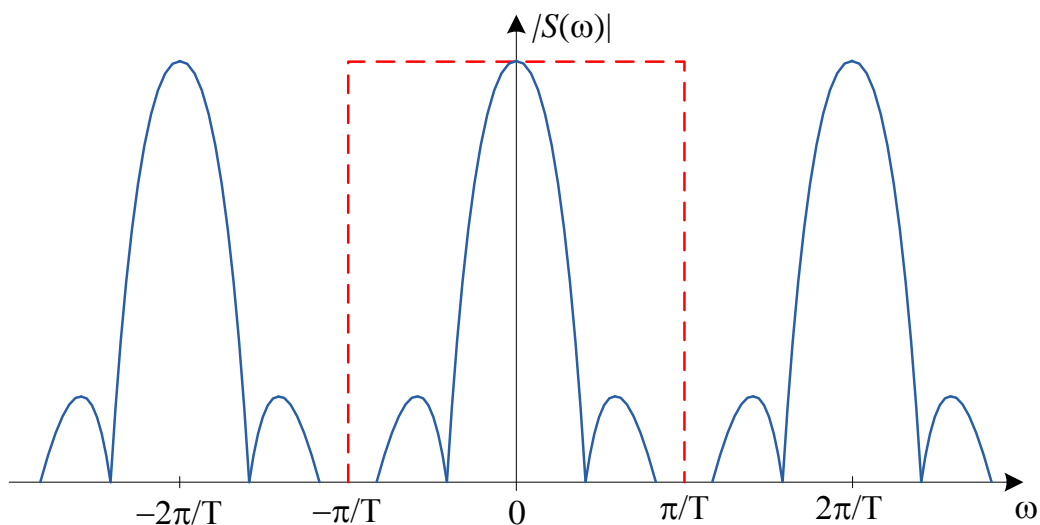


Рис. 4. Амплитудный спектр дискретизированного сигнала

Рис. 4 демонстрирует и способ восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам. Для этого необходимо пропустить дискретный сигнал через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза, равной половине частоты дискретизации, называемой также частотой Найквиста. АЧХ такого фильтра показана на рис. 4 штриховой линией. Его частотная передаточная функция с учетом размерностей спектров может быть записана как

$$W(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \pi/T, \\ 0, & |\omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что точное восстановление сигнала возможно, если смещенные копии спектра не перекрываются. Из рис. 4 видно, что для этого необходимо, чтобы частота дискретизации как минимум в два раза превышала верхнюю граничную частоту в спектре сигнала.

Исходя из вышесказанного, сформулируем *теорему Котельникова*: любой сигнал $x(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения ω_B , может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами $x[k]$, взятыми с интервалом $T \leq \pi/\omega_B$.

Заметим, что сигналы с ограниченным по частоте спектром имеют важное свойство – они имеют бесконечную длительность. Следовательно, для восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам необходимым условием является бесконечное время наблюдения.

Для получения алгоритма восстановления непрерывного сигнала определим весовую функцию фильтра (4) как обратное преобразование Фурье:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \pi \frac{t}{T}}{\pi \frac{t}{T}}.$$

Восстановленный сигнал может быть получен сверткой сигнала $s(t)$ и весовой функции $w(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) w(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) \delta(\tau - kT) d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] w(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \frac{\sin \pi \frac{t - kT}{T}}{\pi \frac{t - kT}{T}}. \end{aligned}$$

1.5. Задание для самостоятельной работы

С использованием Matlab проанализируйте результаты работы алгоритма восстановления непрерывного гармонического сигнала, наблюдаемого на ограниченном интервале времени, в зависимости от частоты сигнала. Частоту сигнала следует задавать таким образом, чтобы она была:

- меньше частоты Найквиста;
- больше частоты Найквиста;
- примерно равна (с точностью до одного знака после запятой) частоте Найквиста.

Число периодов наблюдаемого сигнала (N_1 , N_2) и значение периода дискретности задаются в соответствии с вариантом задания (табл. 1). Пример выполнения задания приведен в Приложении 1.

Табл. 1. Варианты заданий

Вар.	T , с	N_1	N_2
1	0,01	4	10
2	0,02	5	15
3	0,04	4	10
4	0,05	5	15
5	0,1	4	10
6	0,2	5	15
7	0,3	4	10
8	0,4	5	15
9	0,5	4	10
10	1	5	15

Отчет о выполненной работе должен содержать:

- исходные данные;
- основные формульные зависимости, использованные при выполнении работы;
- формы сигналов и их спектры;
- выводы по работе, поясняющие различия исходного и восстановленного сигналов и их спектров.

1.6. Контрольные вопросы

1. Какие виды квантования имеют место в цифровых системах? Какой из видов квантования нарушает линейность системы автоматического управления, а какой – нет? Почему?
2. Что называется отсчетом сигнала? Что такое период дискретности?
3. Что такое цена младшего разряда преобразователя? Как эта величина связана с коэффициентом передачи преобразователя?
4. Перечислите достоинства и недостатки цифровых систем.
5. Дайте определения спектров непрерывного и дискретного сигналов. Какой непрерывный сигнал следует сопоставить дискретному, чтобы эти определения были эквивалентны?
6. Как взаимосвязаны спектры дискретизированного и исходного непрерывного сигналов? Каким свойством обладает спектр дискретного сигнала?
7. Поясните процедуру восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам.
8. Поясните, почему сигнал с неограниченным по частоте спектром восстанавливается точнее, если перед дискретизацией пропустить его через фильтр нижних частот.
9. Почему для точного восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам необходимо бесконечное время наблюдения?
10. Сформулируйте теорему Котельникова.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

2.1. Разностные уравнения и их решение

Формирование непрерывной функции $f(t)$ из дискретной последовательности $f[k]$ не может быть выполнено однозначно, так как функции $f[k]$ может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций. Поэтому построение математических моделей дискретных систем не может быть основано на аппарате дифференциальных уравнений, традиционно применяющемся при исследовании непрерывных систем.

Аналогом первой производной непрерывной функции является первая прямая разность

$$\Delta f[k] = f[k + 1] - f[k]$$

либо первая обратная разность

$$\nabla f[k] = f[k] - f[k - 1].$$

Прямая разность определяется в момент времени $t = kT$ по будущему значению $f[k + 1]$. Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно. Обратная разность определяется для момента времени $t = kT$ по прошлому значению $f[k - 1]$.

Аналогом второй производной непрерывной функции служат вторые разности: прямая

$$\Delta^2 f[k] = \Delta f[k + 1] - \Delta f[k] = f[k + 2] - 2f[k + 1] + f[k]$$

и обратная

$$\nabla^2 f[k] = \nabla f[k] - \nabla f[k - 1] = f[k] - 2f[k - 1] + f[k - 2].$$

Могут определяться и высшие прямая и обратная разности. Для вычисления разностей порядка m можно использовать рекуррентные соотношения

$$\Delta^m f[k] = \Delta^{m-1} f[k + 1] - \Delta^{m-1} f[k],$$

$$\nabla^m f[k] = \nabla^{m-1} f[k] - \nabla^{m-1} f[k - 1].$$

Можно отметить следующее. Если дискретная последовательность определена только для неотрицательных значений аргумента, т.е. $f[k] \equiv 0$ при $k < 0$, то в точке $k = 0$ любая обратная m -я разность равна

$$\nabla^m f[0] = f[0].$$

В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать разностные уравнения (уравнения в конечных разностях). При использовании обратных разностей неоднородные разностные линейные уравнения имеют вид $\alpha_0 \nabla^m y[k] + \alpha_1 \nabla^{m-1} y[k] + \dots + \alpha_m y[k] = \beta_0 \nabla^m f[k] + \beta_1 \nabla^{m-1} f[k] + \dots + \beta_m f[k]$, (5) где $f[k]$ – заданная, а $y[k]$ – искомая дискретные последовательности. При $f[k] \equiv 0$ уравнение (5) становится однородным разностным уравнением.

При переходе от конечных разностей к отсчетам сигналов разностное уравнение может быть записано в другом виде:

$$a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_m y[k-m] = b_0 f[k] + b_1 f[k-1] + \dots + b_m f[k-m]. \quad (6)$$

При этом $a_0 \neq 0$.

Наконец, если выразить $y[k]$ через остальные отсчеты заданной и искомой последовательностей, получим разностное уравнение в виде рекуррентного соотношения

$$y[k] = \frac{1}{a_0} (-a_1 y[k-1] - \dots - a_m y[k-m] + b_0 f[k] + b_1 f[k-1] + \dots + b_m f[k-m]).$$

Последняя форма записи разностного уравнения используется при программировании цифровых вычислителей.

Как и для линейных дифференциальных уравнений, сумма общего решения неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Применительно к дискретным системам, первая из этих составляющих описывает свободное движение (собственные колебания), вторая – вынужденное движение (вынужденные колебания).

Получим условие затухания собственных колебаний, т.е. условие устойчивости линейной системы. Для этого запишем в явном виде общее решение однородного линейного разностного уравнения. Можно показать (например, непосредственной подстановкой в левую часть уравнения), что общее решение однородного уравнения может быть записано как

$$y[k] = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_m z_m^k, \quad (7)$$

где $C_i, i = 1, \dots, m$ – произвольные постоянные, а z_i – корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (8)$$

которые для простоты будем считать некратными. Из (7) следует, что для выполнения условия $y[k] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (8) удовлетворяли условию

$$|z_i| < 1, i = 1, \dots, m,$$

т.е. располагались бы внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат на комплексной плоскости.

Заметим, что если среди корней характеристического уравнения найдутся кратные, то условие устойчивости не изменится, однако вид общего решения однородного уравнения несколько усложнится.

2.2. Z-преобразование

Как известно, при анализе непрерывных сигналов и систем зачастую осуществляется переход от функций времени к их изображениям, получаемым посредством преобразования Лапласа. Для дискретных последовательностей вводится в рассмотрение дискретное преобразование Лапласа в соответствии с формулой

$$F_d(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] e^{-pkT}.$$

Если теперь ввести новое обозначение $z = e^{pT}$, получим

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}.$$

Последнее соотношение определяет z-преобразование, широко используемое при анализе дискретных систем. В табл. 2 приведены изображения некоторых дискретных последовательностей, а также производящих функций времени $f(t)$ и их изображений по Лапласу $F_d(p)$.

Табл. 2. Преобразования Лапласа и z-преобразования

$f(t)$	$f[k]$	$F_{\mathcal{L}}(p)$	$F(z)$
-	$\delta_0[k]$	-	1
$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}[k]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT} = d^k, d = e^{-\alpha T}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{z}{z - d}$
t	kT	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

2.3. Основные теоремы и свойства z-преобразования

1. Свойство линейности

Это свойство заключается в том, что изображение линейных комбинаций дискретных последовательностей равно той же линейной комбинации их изображений. Пусть дискретная последовательность определяется выражением

$$f[k] = \sum_{i=0}^m C_i f_i[k].$$

Тогда для ее изображения с очевидностью можно записать

$$F(z) = \sum_{i=0}^m C_i F_i(z),$$

где $F_i(z) = \mathcal{Z}\{f_i[k]\}$.

2. Теорема запаздывания

Рассмотрим дискретную последовательность $f[k-1]$, смещенную вправо (запаздывающую) на один такт относительно последовательности $f[k]$. Ее изображение будет иметь вид

$$\mathcal{Z}\{f[k-1]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k-1]z^{-k} = \sum_{l=-1}^{\infty} f[l]z^{-l-1} = f[-1] + z^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} f[l]z^{-l} = f[-1] + z^{-1}F(z).$$

(9)

Если $f[-1] = 0$, то формула (9) упрощается:

$$\mathcal{Z}\{f[k-1]\} = z^{-1}F(z).$$

Предполагая, что исходная последовательность $f[k]$ равна нулю при всех отрицательных значениях аргумента, формулу (9) можно обобщить на произвольное количество тактов запаздывания m :

$$\mathcal{Z}\{f[k-m]\} = z^{-m}F(z).$$

3. Теорема упреждения

Если сдвиг последовательности $f[k]$ происходит влево (упреждение), то аналогично случаю запаздывания можно показать, что

$$\mathcal{Z}\{f[k+m]\} = z^m \left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f[k]z^{-k} \right). \quad (10)$$

Второе слагаемое в правой части (10) обращается в нуль, если $f[k] = 0$ при $k = 0, \dots, m-1$.

4. Изображения разностей

Для первой обратной разности, учитывая свойство линейности и теорему запаздывания, можно записать

$$\mathcal{Z}\{\nabla f[k]\} = \mathcal{Z}\{f[k] - f[k-1]\} = F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z}F(z). \quad (11)$$

Здесь полагается, что $f[-1] = 0$. Если для всех отрицательных аргументов значения дискретной последовательности равны нулю, то формула (11) легко обобщается на случай m -й разности:

$$\mathcal{Z}\{\nabla^m f[k]\} = \left(\frac{z-1}{z} \right)^m F(z).$$

Аналогично для m -й прямой разности

$$\mathcal{Z}\{\Delta^m f[k]\} = (z-1)^m F(z)$$

при $f[0] = f[1] = \dots = f[m-1] = 0$.

5. Теорема о конечном значении последовательности

По аналогии с выражением для конечного значения непрерывной функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF_{\pi}(p) \quad (12)$$

можно установить справедливость соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (13)$$

Заметим, что выражение (12) справедливо, если все особые точки функции $F_{\text{л}}(p)$ расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости, а выражение (13) справедливо, если все особые точки функции $F(z)$ находятся внутри круга единичного радиуса.

6. Теорема о начальном значении последовательности

Для начальных значений непрерывной функции и дискретной последовательности также можно установить взаимосвязь с их изображениями по Лапласу и по переменной z соответственно:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF_{\text{л}}(p),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

7. Свертка решетчатых функций

Если $\mathcal{Z}\{f_1[k]\} = F_1(z)$, $\mathcal{Z}\{f_2[k]\} = F_2(z)$, то можно показать, что

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^k f_1[m]f_2[k-m]\right\} = F_1(z)F_2(z).$$

Эта формула аналогична выражению для свертки двух непрерывных функций.

2.4. Нахождение оригинала по z -преобразованию

Формула обращения z -преобразования в общем виде может быть записана следующим образом:

$$f[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)z^{k-1} dz,$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему все особые точки функции $F(z)$.

На практике расчеты по данной формуле сопряжены с определенными трудностями, поэтому при нахождении оригиналов используют таблицы z -преобразований либо другие методы обращения. Рассмотрим далее два из них.

1. Разложение на простые дроби

Пусть изображение $F(z)$ представляет собой отношение двух многочленов, причем степень числителя не превышает степень знаменателя m и числитель имеет нулевой корень:

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{zB_0(z)}{A(z)}.$$

Для определенности будет также считать, что корни знаменателя z_i простые. Тогда изображение можно представить в виде суммы

$$F(z) = z \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{z - z_i} = \sum_{i=1}^m \frac{C_i z}{z - z_i},$$

где C_i – коэффициенты разложения, которые могут быть найдены, например, методом неопределенных коэффициентов либо через вычеты функции $B_0(z)/A(z)$.

Используя свойство линейности и таблицу z -преобразований, получим

$$f[k] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^k.$$

Теперь предположим, что изображение $F(z)$ не имеет нулевого корня числителя, но степень числителя меньше степени знаменателя. Из теоремы о начальном значении следует, что в этом случае $f[0] = 0$. Числитель и знаменатель $F(z)$ можно умножить на z и по аналогии с предыдущим случаем получить:

$$F(z) = \frac{zB(z)}{zA(z)} = z^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{C'_i z}{z - z_i},$$

где C_i – коэффициенты разложения функции $F(z)$. Тогда, принимая во внимание теорему запаздывания, имеем

$$f[k] = \sum_{i=1}^m C'_i z_i^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

2. Разложение в ряд Лорана

Из определения z -преобразования следует, что

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} = f[0] + f[1] z^{-1} + f[2] z^{-2} + \dots$$

Разложив любым способом изображение $F(z)$ в ряд Лорана (ряд по убывающим степеням z), имеем

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

Наиболее удобным способом разложения в такой ряд дробно-рациональных функций является деление числителя на знаменатель «в столбик». Далее, сравнивая два ряда между собой, легко установить, что $c_0 = f[0]$, $c_1 = f[1], \dots, c_k = f[k], \dots$

Разложение в ряд Лорана используется при нахождении численного решения задачи обращения z -преобразования с использованием средств вычислительной техники.

2.5. Передаточные функции и импульсные характеристики цифровых фильтров

Рассмотрим разностное уравнение вида (6). Если ввести предположение, что значения $y[k]$ равны нулю при $k < 0$ и, кроме того, функция $f[k]$ приложена в момент времени $k = 0$, то переход к изображениям дает

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})F(z).$$

Изображение искомой последовательности $y[k]$ можно представить в виде

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m} F(z) = D(z)F(z).$$

Здесь введена дискретная передаточная функция $D(z)$, которая, как и в случае непрерывных функций, есть отношение двух изображений (выходной и входной последовательностей) при нулевых начальных условиях. Дискретная передаточная функция может быть записана только для линейных фильтров или систем, поэтому применительно к цифровым фильтрам она имеет смысл только в том случае, когда эффектами квантования по уровню можно пренебречь.

Далее, если это не оговорено особо, будем полагать $a_0 = 1$. К этому случаю легко свести выражение для дискретной передаточной функции, поделив числитель и знаменатель на a_0 .

Импульсной характеристикой линейного фильтра $w^*[k]$ называется его реакция на единичную импульсную функцию $\delta_0[k]$. Для физически реализуемой системы сигнал на выходе не может появиться раньше, чем сигнал на входе, поэтому $w^*[k] = 0$ при $k < 0$.

Пусть на вход цифрового фильтра поступает последовательность $f[k]$, равная нулю при $k < 0$. Ее можно представить как сумму одиночных импульсов высотой $f[m]$, поступающих в моменты $m = 0, 1, \dots, k$:

$$f[k] = \sum_{m=0}^k f[m] \delta_0[k-m].$$

С учетом линейности фильтра выходная последовательность может быть представлена как сумма реакций на эти импульсы в виде линейной комбинации

$$y[k] = \sum_{m=0}^k f[m]w^*[k-m] = \sum_{m=0}^k w^*[m]f[k-m], k \geq 0. \quad (14)$$

В этой формуле значения $w^*[k]$ представляют собой весовые коэффициенты, с которыми суммируются значения входной последовательности. Поэтому последовательность $w^*[k]$ называется также весовой функцией цифрового фильтра. Поскольку правая часть (14) представляет собой свертку двух последовательностей, отсюда следует, что передаточная функция и импульсная характеристика связаны между собой z -преобразованием:

$$D(z) = \mathcal{Z}\{w^*[k]\}.$$

По виду импульсной характеристики (передаточной функции) цифровые фильтры делятся на два класса: нерекурсивные фильтры, или фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры), и рекурсивные фильтры, или фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры).

Для нерекурсивных фильтров выполняется условие $a_i = 0, i = 1, \dots, m$, т.е. передаточная функция фактически не имеет знаменателя:

$$D(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m},$$

в таких фильтрах отсутствует обратная связь, а импульсная характеристика имеет конечное число отсчетов, отличных от нуля:

$$w^*[k] = \begin{cases} b_k, & k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Вследствие отсутствия обратных связей любой нерекурсивный фильтр является устойчивым – при отсутствии сигнала на его входе ($f[k] = 0$) выходной сигнал будет отличен от нуля в течение не более m тактов. Простота анализа и реализации КИХ-фильтров привели к их широкому использованию на практике. Однако для получения частотных характеристик желаемого вида зачастую необходимы нерекурсивные фильтры высокого порядка – до нескольких сотен и даже тысяч.

В рекурсивных фильтрах хотя бы один из коэффициентов $a_i, i = 1, \dots, m$ отличен от нуля. Это приводит к появлению обратных связей и бесконечной по длительности импульсной характеристики. По этой же причине рекурсивные фильтры могут быть неустойчивыми. Однако наличие обратных связей позво-

ляет получать желаемые частотные характеристики с использованием БИХ-фильтров невысокого порядка.

Для перехода от БИХ-фильтра к КИХ-фильтру со схожими свойствами можно осуществить деление «в столбик» числителя на знаменатель передаточной функции, оставляя конечное число членов полученного ряда.

2.6. Задание для самостоятельной работы

При обработке навигационных измерений зачастую возникает проблема сглаживания сигнала с датчика с целью подавления высокочастотных шумов. С использованием пакета Matlab Simulink проанализируйте различные алгоритмы сглаживания дискретных последовательностей:

- с использованием линейного БИХ-фильтра (аналога апериодического звена первого порядка), описываемого разностным уравнением

$$y[k] = dy[k - 1] + (1 - d)f[k],$$

где d – коэффициент сглаживания;

- с использованием линейного КИХ-фильтра (алгоритма скользящего среднего с равными весами), описываемого разностным уравнением

$$y[k] = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f[k - i],$$

где m – количество отсчетов входного сигнала, использующихся при осреднении (для реализации такого фильтра можно воспользоваться блоком *Discrete Filter*, задав в окне *Numerator*: $1/m * \text{ones}(1, m)$; в окне *Denominator*: $[1]$);

- с использованием нелинейного фильтра с ограничением на производную выходного сигнала:

$$y[k] = y[k - 1] + \text{sat}(f[k] - y[k - 1], \Delta y_m),$$

где $\text{sat}(x, x_m)$ – функция насыщения (в Matlab Simulink реализуется блоком *Saturation* из библиотеки *Discontinuities*):

$$\text{sat}(x, x_m) = \begin{cases} x, & |x| \leq x_m, \\ x_m, & x > x_m, \\ -x_m, & x < -x_m; \end{cases}$$

Δy_m – пороговое значение приращения выходной последовательности.

Предполагается, что входной сигнал представляет собой сумму «полезной» гармонической составляющей с амплитудой a_1 и периодом T_1 и помехи одного из двух видов:

- гармонической с амплитудой a_2 и периодом T_2 ;
- импульсной с амплитудой a_2 , периодом T_2 и длительностью импульсов τ_2 .

Параметры составляющих входного сигнала указаны в табл. 2. Начальные фазы составляющих считаются нулевыми.

Табл. 3. Варианты заданий

Вар.	a_1	$T_1, \text{с}$	a_2	$T_2, \text{с}$	$\tau_2, \text{с}$	$T, \text{с}$
1	5	60	1	1	0,1	0,1
2	5	30	0,5	2	0,1	0,1
3	5	60	0,5	3	0,2	0,1
4	5	30	1	4	0,2	0,2
5	5	60	1	5	0,4	0,2
6	10	30	3	6	0,5	0,5
7	10	60	2	7	0,5	0,5
8	10	30	2	8	1	0,5
9	10	60	2	9	1	0,25
10	10	60	3	10	2	0,25

Параметры алгоритмов $d, m, \Delta u_m$ следует выбирать таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить приемлемую точность воспроизведения низкочастотной составляющей с минимальной задержкой, а с другой – максимально подавить высокочастотный сигнал.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

- исходные данные;
- модель в пакете Matlab Simulink;
- разностные уравнения исследуемых фильтров;
- рекомендуемые значения коэффициентов;
- графики, иллюстрирующие результаты работы. Для каждого из фильтров должны быть построены реализации «полезного» и выходного сигналов;

– выводы по работе – рекомендации по использованию того или иного алгоритма и выбору его параметра. При этом могут быть предложены и другие способы сглаживания.

2.7. Контрольные вопросы

1. Что такое разностное уравнение? Запишите в общем виде разностное уравнение линейной системы.

2. Запишите необходимое и достаточное условие устойчивости решения линейного разностного уравнения. Что такое характеристическое уравнение?

3. Дайте определение z -преобразования. Как оно связано с преобразованием Лапласа?

4. Сформулируйте теорему запаздывания.

5. Сформулируйте теоремы о начальном и конечном значениях дискретной последовательности.

6. Что такое свертка дискретных последовательностей? Как связано изображение свертки с изображениями исходных последовательностей?

7. Перечислите способы нахождения обратного z -преобразования.

8. Что такое передаточная функция и импульсная характеристика цифрового фильтра? Как они связаны между собой?

9. Какие фильтры называются нерекурсивными? Как они называются иначе? В чем их достоинства по сравнению с рекурсивными?

10. Какие фильтры называются рекурсивными? Как они называются иначе? В чем их достоинства по сравнению с нерекурсивными?

3. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

3.1. Частотные характеристики цифровых фильтров

Пусть входная последовательность цифрового фильтра имеет вид

$$f[k] = a_1 \sin \omega k T, \quad k \geq 0, \quad (15)$$

где a_1 – амплитуда, ω – круговая частота. Заметим, что в отличие от непрерывной гармонической функции, амплитуда a_1 не обязательно является тем максимальным значением, которого могут достигать те или иные члены последовательности. Амплитуда является лишь верхней границей, но не обязательно максимумом этих членов. Отметим также, что последовательность (15) не изменится, если заменить частоту ω частотой $\omega + 2\pi n/T$, где n – целое число. Отсюда следует, что меняя частоту синусоидальной последовательности от нуля до $2\pi/T$, можно охватить весь диапазон возможных частот.

Синусоидальная последовательность может быть заменена символической записью последовательности комплексных чисел [1]

$$f[k] \doteq a_1 e^{j\omega k T}. \quad (16)$$

Как и в случае непрерывных систем, символическость записи заключается в том, что на самом деле $f[k]$ равно мнимой части указанного выражения в правой части (16).

В установившемся режиме выходная последовательность фильтра $y[k]$ с учетом его линейности также будет представлять собой гармонический сигнал частоты ω , но с некоторой другой амплитудой a_2 и смещением по фазе ψ :

$$y[k] = a_2 \sin(\omega k T + \psi) \doteq a_2 e^{j(\omega k T + \psi)}.$$

Принимая во внимание соотношение (14), устремив в нем верхний предел суммирования к бесконечности (что соответствует установившемуся режиму), запишем

$$a_2 e^{j(\omega k T + \psi)} = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} w^*[m] e^{j\omega(k-m)T}.$$

Отсюда

$$\frac{a_2}{a_1} e^{j\psi} = \sum_{m=0}^{\infty} w^*[m] e^{-j\omega m T} = D(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = D(e^{j\omega T}).$$

Функция $D(e^{j\omega T})$ называется частотной передаточной функцией цифрового фильтра. Отношение амплитуд выходной и входной последовательности

(амплитудно-частотная характеристика – АЧХ) равно модулю частотной передаточной функции:

$$\frac{a_2}{a_1} = |D(e^{j\omega T})|,$$

а разность фаз (фазо-частотная характеристика – ФЧХ) – ее аргументу:

$$\psi = \arg D(e^{j\omega T}).$$

Очевидно, частотные характеристики являются периодическими функциями частоты с периодом $2\pi/T$. Учитывая также четность АЧХ и нечетность ФЧХ, можно констатировать, что для анализа поведения цифрового фильтра достаточно исследовать частотный диапазон от нуля до π/T .

3.2. Использование псевдочастоты

Построение частотных характеристик в функции круговой частоты ω в ряде случаев оказывается малоудобным вследствие трансцендентности получаемых выражений и периодичности характеристик. Альтернативным вариантом может служить переход от частоты к так называемой псевдочастоте на основе билинейного преобразования. Введем комплексную величину w , связанную с z соотношениями:

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Сделав подстановку $z = e^{j\omega T}$, получим

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\bar{\lambda},$$

где $\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ представляет собой так называемую относительную (безразмерную) псевдочастоту. Удобно ввести в рассмотрение абсолютную псевдочастоту

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

При малых частотах $\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$ и псевдочастота $\lambda \approx \omega$. Поэтому при выполнении условия $\omega < 1/T$ можно в расчетах заменить псевдочастоту действительной круговой частотой, что может быть использовано, в частности, при расчетах реакции фильтра на медленно меняющиеся входные сигналы. Кроме

того, нетрудно видеть, что замена псевдочастоты на обычную круговую частоту эквивалентно подстановке

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (17)$$

которую можно использовать при переходе от непрерывных фильтров к цифровым. Метод построения цифровых фильтров, основанный на соотношении (17), называется аппроксимацией Тастина.

Отметим, что при изменении частоты в пределах от $-\pi/T$ до π/T псевдочастота пробегает все значения от минус до плюс бесконечности, а комплексная величина w движется по мнимой оси от $-j\infty$ до $+j\infty$. Внутренняя часть круга единичного радиуса, как будет показано далее, отображается при этом на левую полуплоскость. Это оказывается удобным при исследовании вопросов устойчивости цифровых фильтров.

Таким образом, в результате замены

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}$$

может быть получена частотная передаточная функция цифрового фильтра по псевдочастоте:

$$D^*(j\lambda) = D\left(\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}\right).$$

Построение частотных характеристик по псевдочастоте удобно осуществлять в логарифмическом масштабе, применяя далее известные из теории непрерывных систем методы их исследования [1].

3.3. Устойчивость цифровых фильтров

Как и для непрерывных систем, устойчивость цифровых линейризованных фильтров определяется полюсами дискретной передаточной функции $D(z)$. Ее знаменатель представляет собой характеристический полином. Как было показано в разделе 2, затухание собственных колебаний (асимптотическая устойчивость фильтра) имеет место в том и только в том случае, когда все корни характеристического уравнения расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Отличие необходимого и достаточного условия устойчивости от аналогичного условия для непрерывных систем, казалось бы, существенно затрудня-

ет анализ устойчивости цифровых фильтров. Однако использование билинейного преобразования позволяет свести задачу анализа устойчивости к привычной постановке. В самом деле, пусть корень характеристического полинома имеет вид $z_i = \frac{1+w_i}{1-w_i}$, где комплексное число w_i представим в общем виде

$w_i = a + jb$. После подстановки получим

$$z_i = \frac{1+a+jb}{1-a-jb}.$$

Из условия $|z_i| < 1$ следует, что

$$|1+a+jb|^2 < |1-a-jb|^2,$$

что равносильно неравенству $a < 0$. Таким образом, если от переменной z перейти к переменной w , то условие устойчивости будет состоять в том, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, т.е. располагались бы в левой полуплоскости комплексной плоскости. Это условие идентично условию устойчивости непрерывных систем, что позволяет при анализе цифровых систем использовать все известные критерии устойчивости.

Замечание. Все вышесказанное справедливо применительно к линеаризованным цифровым фильтрам (системам), в которых не учитываются эффекты, связанные с квантованием по уровню. В то же время эти эффекты, имеющие нелинейный характер, могут приводить к возникновению автоколебаний (предельных циклов), когда при отсутствии входного сигнала выходная последовательность теоретически устойчивого фильтра не стремится к нулю, а совершает незатухающие колебания либо сходится к некоторому ненулевому установившемуся значению (в последнем случае период предельного цикла считается равным 1 такту). Анализ предельных циклов, как правило, осуществляют методом гармонической линеаризации либо посредством моделирования [1, 2].

3.4. Задание для самостоятельной работы

Определите, при каких значениях параметра a фильтр, заданный передаточной функцией $D(z)$ в соответствии с табл. 4, устойчив.

Выберите значение параметра a из области устойчивости и найдите установившееся значение выходной последовательности при подаче на вход фильтра указанного в табл. 4 воздействия $f[k]$.

Определите значения выходной последовательности $y[0], \dots, y[4]$. С использованием Matlab проверьте корректность расчетов.

Пример выполнения задания приведен в Приложении 2.

Табл. 4. Варианты заданий

Вар.	$D(z)$	$f[k]$
1	$\frac{z^2 - 1}{z^3 + z^2 + az + 0,5}$	$k \cdot 1[k]$
2	$\frac{z^2 - 1}{z^3 - z^2 + az + 0,5}$	$k \cdot 1[k]$
3	$\frac{z^2 - 1}{z^3 + z^2 + az - 0,5}$	$k \cdot 1[k]$
4	$\frac{z^2 - 1}{z^3 - z^2 + az - 0,5}$	$k \cdot 1[k]$
5	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 + az^2 + z + 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$
6	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 + az^2 + z - 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$
7	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 + z^2 + az + 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$
8	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 - z^2 + az + 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$
9	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 + z^2 + az - 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$
10	$\frac{(z - 1)^2}{z^3 - z^2 + az - 0,5}$	$k^2 \cdot 1[k]$

3.5. Контрольные вопросы

1. Как определить выходную последовательность дискретного линейного фильтра, зная входную последовательность и весовую функцию фильтра? Как видоизменяется данное выражение в установившемся режиме?
2. Как по дискретной передаточной функции фильтра рассчитать его АЧХ и ФЧХ?
3. Почему при анализе АЧХ и ФЧХ цифровых фильтров достаточно рассматривать их на интервале частот от нуля до π/T ?
4. Что такое относительная и абсолютная псевдочастота? Какие размерности они имеют?
5. Какой вид имеют частотные передаточные функции линеаризованных цифровых фильтров по псевдочастоте? Почему такой вид удобен для их анализа?
6. В чем заключается аппроксимация Тастина? Близость каких характеристик она обеспечивает?
7. Как по передаточной функции дискретного фильтра записать характеристическое уравнение?
8. Какое преобразование следует выполнить при анализе устойчивости линеаризованного цифрового фильтра, заданного его передаточной функцией, с использованием алгебраических критериев устойчивости?
9. Что такое предельные циклы? Какова природа их возникновения в цифровых системах?
10. Приведите примеры устойчивых и неустойчивых дискретных фильтров.

4. ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

До сих пор, рассматривая характеристики цифровых фильтров, мы считали их точно известными. Однако при практической реализации фильтров почти неизбежно возникает проблема округления коэффициентов. При использовании сигнальных процессоров это связано с поддерживаемыми ими форматами представления чисел (с фиксированной или плавающей точкой), при создании программ обработки на ЭВМ – со стремлением повысить быстродействие. Из-за округления коэффициентов характеристики фильтра претерпевают искажения, величина которых зависит не только от погрешности представления коэффициентов, но и от исходных параметров фильтра и формы его построения.

4.1. Прямая форма реализации. Каноническая схема фильтра

Рассмотрим уравнение линейного фильтра, представленное в виде рекуррентного соотношения

$$y[k] = -a_1 y[k-1] - \dots - a_m y[k-m] + b_0 f[k] + b_1 f[k-1] + \dots + b_m f[k-m].$$

Структурная схема, реализующая такой алгоритм, показана на рис. 5. Некоторое количество отсчетов входной и выходной последовательностей хранится в ячейках памяти, представленных элементами задержки с передаточной функцией z^{-1} . Эти отсчеты умножаются на соответствующие коэффициенты a_i , b_i и суммируются, формируя текущий отсчет выходной последовательности. Такая схема называется прямой формой реализации рекурсивного фильтра и не является единственно возможной.

Если на рис. 5 разделить цепочку сумматоров на две, нетрудно получить реализацию фильтра в виде последовательно соединенных фильтров, один из которых является нерекурсивным, а второй, наоборот, чисто рекурсивным. Так как выходной сигнал линейной системы не меняется при перестановке последовательно соединенных элементов, можно поменять местами рекурсивную и нерекурсивную части. Далее можно заметить, что в обе линии задержки подается один и тот же сигнал, поэтому они будут содержать одинаковые наборы отсчетов. Это позволяет объединить линии задержки. Полученная в результате схема (рис. 6) называется канонической формой реализации рекурсивного фильтра.

Достоинством канонической схемы является сокращение числа элементов памяти (реализуется одна линия задержки вместо двух). Однако в то же

время величины отсчетов, хранящихся в линии задержки, могут существенно превышать амплитуды входного и выходного сигналов. Это приводит к необходимости увеличивать разрядность элементов задержки по сравнению с разрядностью представления чисел входной и выходной последовательностей [2]. При прямой реализации в линии задержки поступают непосредственно отсчеты входной и выходной последовательностей, что позволяет избежать данного нежелательного эффекта. Однако результаты суммирований все же требуется получать с повышенной разрядностью.

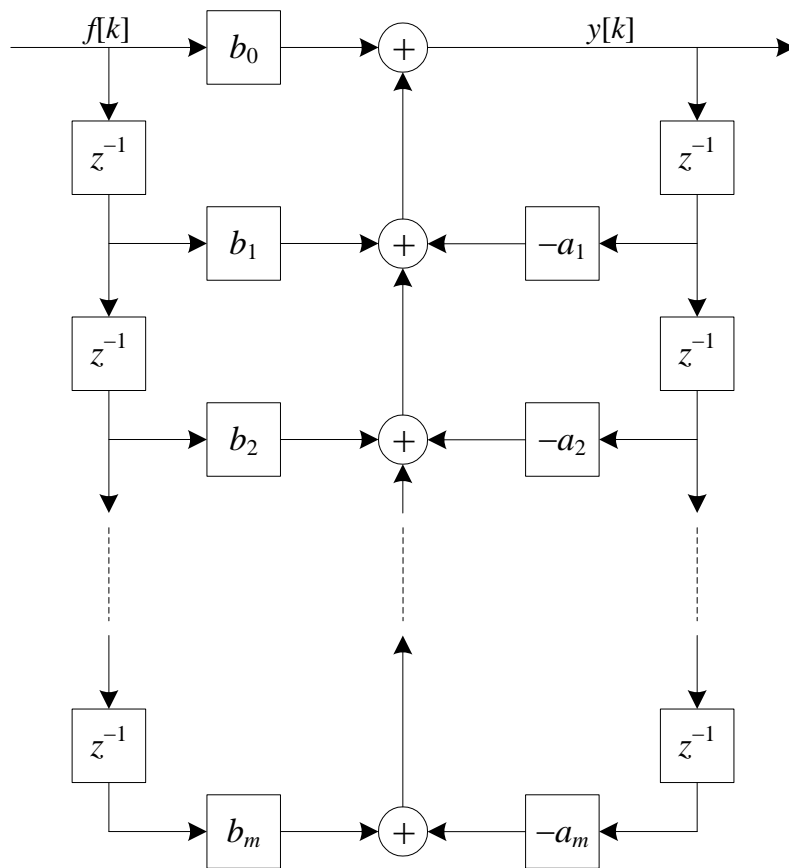


Рис. 5. Прямая реализация рекурсивного линейного фильтра

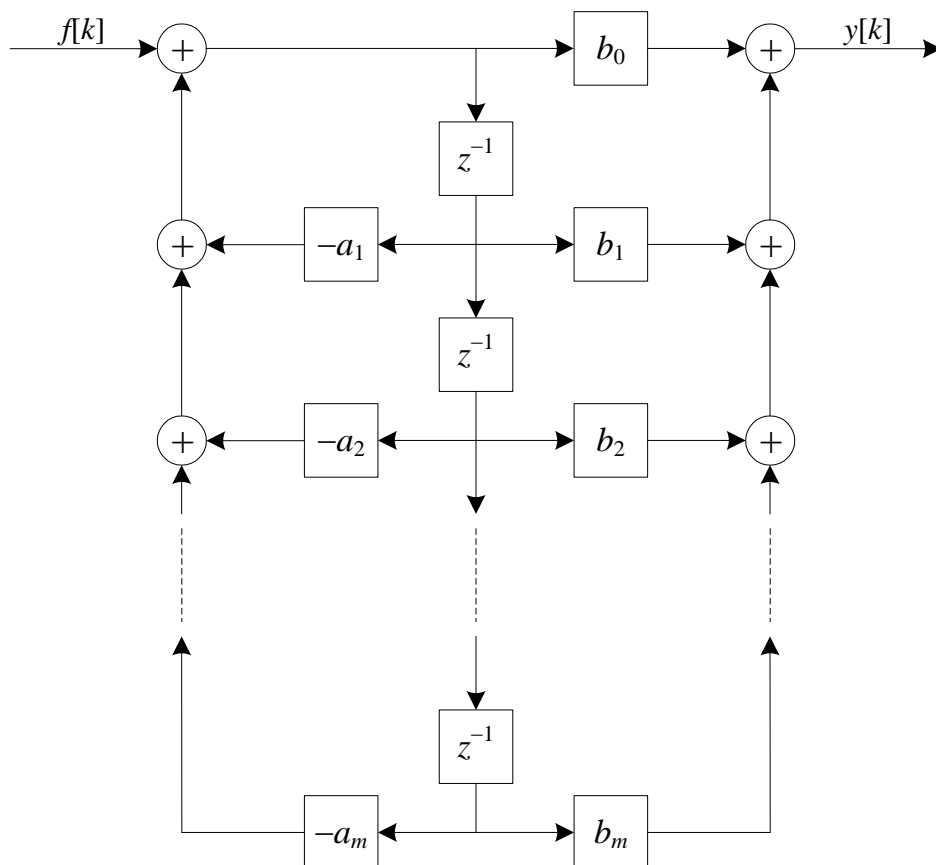


Рис. 6. Каноническая схема фильтра

4.2. Транспонированные формы реализации цифровых фильтров

Перенесем в схеме на рис. 6 элементы задержки в цепочки сумматоров. Нетрудно убедиться, что такая перестановка не повлияет на конечный результат вычислений в линейном фильтре. Полученная структура, показанная на рис. 7, называется транспонированной формой I.

Если применить аналогичное преобразование схемы на рис. 5, получится еще один вариант транспонированной реализации фильтра – транспонированная форма II (рис. 8). В отличие от предыдущей схемы, здесь используется сокращенное количество элементов памяти.

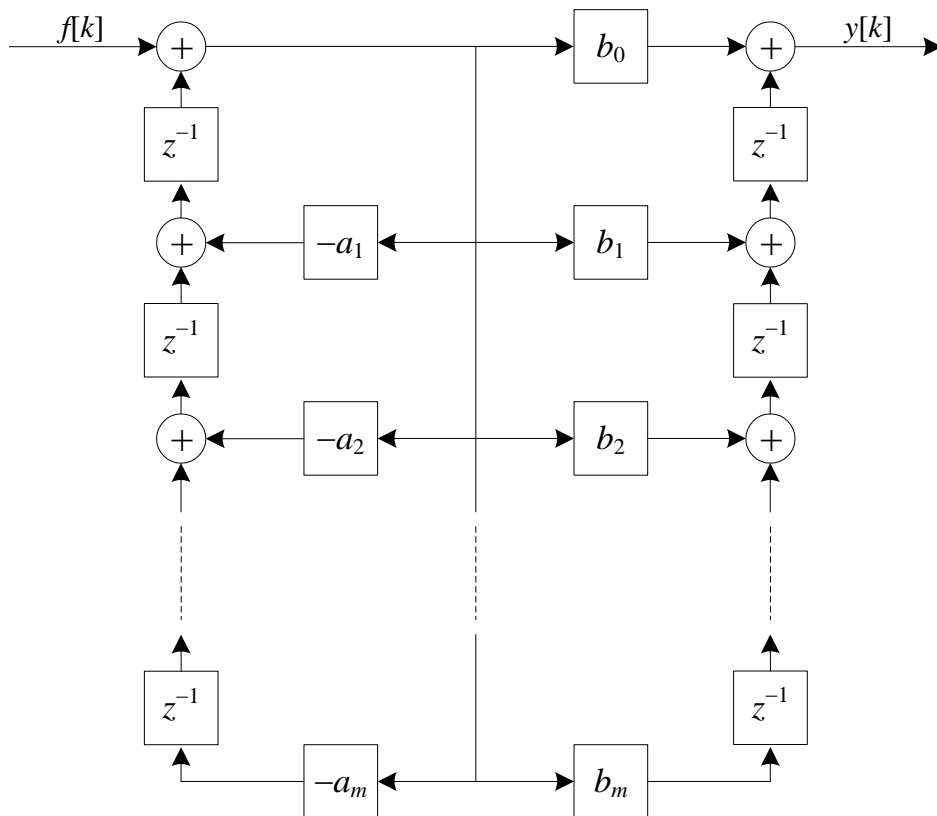


Рис. 7. Транспонированная форма I

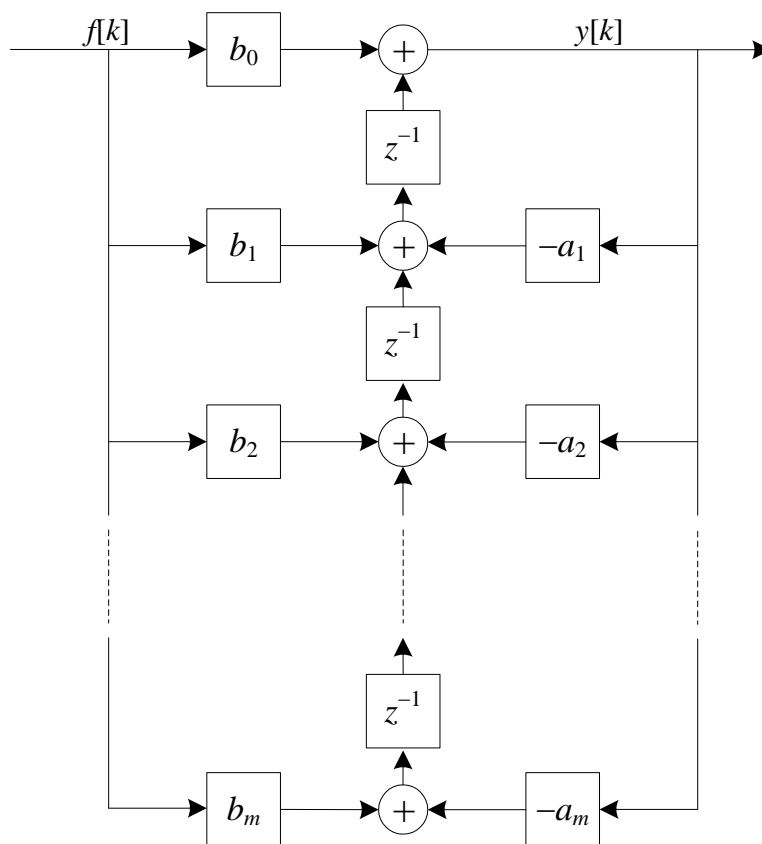


Рис. 8. Транспонированная форма II

Транспонированные схемы позволяют эффективно распараллелить вычисления: здесь можно одновременно выполнять все операции умножения и далее одновременно все операции сложения (кроме первого, формирующего данные для блоков умножения), поскольку входы сумматоров являются независимыми (не используют результаты других сложений). Однако недостаток, присущий канонической форме, здесь усугубляется тем, что каждый элемент задержки хранит свои индивидуальные данные, которые могут существенно отличаться как от значений входной и выходной последовательностей, так и друг от друга.

Кроме того, все описанные выше варианты построения фильтров обладают общим недостатком: они чувствительны к округлению коэффициентов разностных уравнений. Наиболее серьезно округление сказывается на характеристиках БИХ-фильтров, поскольку коэффициенты знаменателя передаточной функции связаны здесь с импульсной и частотной характеристиками нелинейно. Как правило, наибольшие искажения характеристик происходят в тех случаях, когда АЧХ фильтра имеет крутой наклон в переходной зоне между полосой пропускания и полосой заграждения [2].

4.3. Последовательная и параллельная формы реализации цифровых фильтров

Для ослабления нежелательных эффектов, связанных с округлением коэффициентов разностных уравнений, используют представление цифровых фильтров в последовательной и параллельной формах. Для представления фильтра в последовательной форме числитель и знаменатель передаточной функции раскладывают на простые множители:

$$D(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m} = b_0 \frac{(z + \gamma_1) \dots (z + \gamma_m)}{(z + \zeta_1) \dots (z + \zeta_m)} = b_0 \frac{(1 + \gamma_1 z^{-1}) \dots (1 + \gamma_m z^{-1})}{(1 + \zeta_1 z^{-1}) \dots (1 + \zeta_m z^{-1})}.$$

Структурная схема получаемой последовательной (каскадной) реализации фильтра представлена на рис. 9.

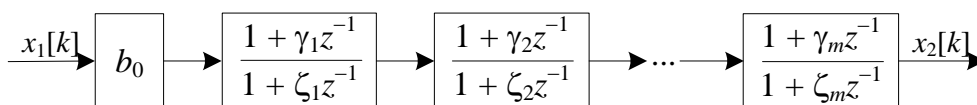


Рис. 9. Последовательная форма реализации цифрового фильтра

В случае представления фильтра в параллельной форме его передаточная функция представляется в виде суммы простейших дробей:

$$D(z) = b_0 + \frac{\lambda_1}{z + \zeta_1} + \dots + \frac{\lambda_m}{z + \zeta_m} = b_0 + \frac{\lambda_1 z^{-1}}{1 + \zeta_1 z^{-1}} + \dots + \frac{\lambda_m z^{-1}}{1 + \zeta_m z^{-1}}.$$

Структурная схема параллельной реализации представлена на рис. 10.

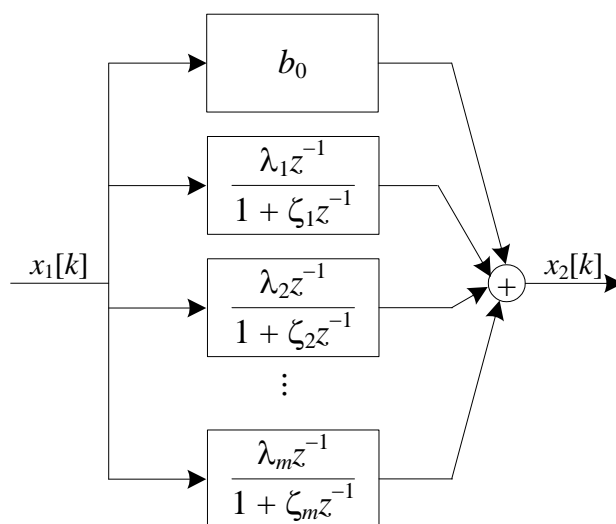


Рис. 10. Параллельная форма реализации цифрового фильтра

Трудности представления фильтров в последовательной и параллельной формах заключаются в том, что полюса (или нули) передаточной функции могут оказаться комплексными. По этой причине при каскадной реализации фильтров их делят на секции второго порядка. При этом пары комплексно сопряженных нулей и полюсов объединяются и образуют каскады второго порядка [1, 2].

4.4. Задание для самостоятельной работы

На примере фильтра с передаточной функцией $D(z)$, указанной в табл. 4, проанализируйте эффекты квантования по уровню. Для этого:

- постройте АЧХ фильтра с заданными коэффициентами; АЧХ фильтра с округленными коэффициентами, реализованного в прямой форме; АЧХ фильтра с округленными коэффициентами, реализованного в последовательной форме, считая N число двоичных разрядов, используемых при хранении дробной части коэффициентов разностных уравнений (в формате с фиксированной запятой); сопоставьте полученные характеристики;

Табл. 4. Варианты заданий

Вар.	$D(z)$	N
1	$\frac{0,045 + 0,035z^{-1} + 0,106z^{-2} + 0,071z^{-3} + 0,106z^{-4} + 0,035z^{-5} + 0,045z^{-6}}{1 - 2,421z^{-1} + 4,062z^{-2} - 4,107z^{-3} + 2,952z^{-4} - 1,308z^{-5} + 0,319z^{-6}}$	5
2	$\frac{0,045 + 0,05z^{-1} + 0,09z^{-2} + 0,09z^{-3} + 0,05z^{-4} + 0,045z^{-5}}{1 - 2,164z^{-1} + 3,162z^{-2} - 2,675z^{-3} + 1,464z^{-4} - 0,415z^{-5}}$	5
3	$\frac{0,081 + 0,044z^{-1} + 0,125z^{-2} + 0,125z^{-3} + 0,044z^{-4} + 0,081z^{-5}}{1 - 2,02z^{-1} + 3,03z^{-2} - 2,52z^{-3} + 1,42z^{-4} - 0,41z^{-5}}$	6
4	$\frac{0,1 - 0,494z^{-1} + 1,104z^{-2} - 1,418z^{-3} + 1,104z^{-4} - 0,494z^{-5} + 0,1z^{-6}}{1 - 2,37z^{-1} + 4,2z^{-2} - 4,3z^{-3} + 3,3z^{-4} - 1,5z^{-5} + 0,41z^{-6}}$	6
5	$\frac{0,354 + 1,771z^{-1} + 3,542z^{-2} + 3,542z^{-3} + 1,771z^{-4} + 0,354z^{-5}}{1 + 2,975z^{-1} + 3,806z^{-2} + 2,545z^{-3} + 0,881z^{-4} + 0,125z^{-5}}$	6
6	$\frac{0,148 + 0,886z^{-1} + 2,216z^{-2} + 2,955z^{-3} + 2,216z^{-4} + 0,886z^{-5} + 0,148z^{-6}}{1 + 2,38z^{-1} + 2,91z^{-2} + 2,05z^{-3} + 0,88z^{-4} + 0,21z^{-5} + 0,02z^{-6}}$	6
7	$\frac{0,269 + 1,345z^{-1} + 2,689z^{-2} + 2,689z^{-3} + 1,345z^{-4} + 0,269z^{-5}}{1 + 2,474z^{-1} + 2,811z^{-2} + 1,704z^{-3} + 0,544z^{-4} + 0,072z^{-5}}$	5
8	$\frac{0,104 - 0,118z^{-1} + 0,104z^{-2} + 0,104z^{-3} - 0,118z^{-4} + 0,104z^{-5}}{1 - 3,045z^{-1} + 4,855z^{-2} - 4,388z^{-3} + 2,329z^{-4} - 0,57z^{-5}}$	6
9	$\frac{0,068 - 0,144z^{-1} + 0,089z^{-2} + 0,089z^{-3} - 0,144z^{-4} + 0,068z^{-5}}{1 - 3,98z^{-1} + 6,95z^{-2} - 6,5z^{-3} + 3,25z^{-4} - 0,69z^{-5}}$	6
10	$\frac{0,022 + 0,023z^{-1} + 0,056z^{-2} + 0,046z^{-3} + 0,056z^{-4} + 0,023z^{-5} + 0,022z^{-6}}{1 - 2,81z^{-1} + 4,911z^{-2} - 5,365z^{-3} + 4,028z^{-4} - 1,905z^{-5} + 0,492z^{-6}}$	6

– постройте графики импульсных характеристик исходного фильтра и фильтра с округлением результатов промежуточных вычислений, считая N число двоичных разрядов, используемых при хранении дробной части результатов промежуточных вычислений. Определите амплитуду и период предельного цикла.

Пример выполнения задания приведен в Приложении 3.

Измените коэффициенты числителя передаточной функции фильтра так, чтобы его реализация в последовательной форме не давала существенных преимуществ по сравнению с прямой формой.

4.5. Контрольные вопросы

1. Какие формы реализации цифровых фильтров Вы знаете?
2. В чем преимущество транспонированных схем цифровых фильтров?
3. Каким общим недостатком обладают фильтры, реализующие операции непосредственно над коэффициентами разностных уравнений?
4. Почему ошибки, вызванные эффектами квантования, для рекурсивных фильтров более существенны, чем для нерекурсивных?
5. В каком случае ошибки, вызванные округлением коэффициентов разностного уравнения, реализуемого в цифровом фильтре, приводят к наибольшим искажениям частотных характеристик?
6. Какие формы реализации цифровых фильтров позволяют существенно уменьшить ошибки, вызванные округлением коэффициентов разностного уравнения? Почему?
7. Почему при реализации цифровых фильтров по схеме последовательного или параллельного программирования их, как правило, представляют в виде соединения секций второго порядка?
8. Передаточная функция цифрового фильтра имеет вид $D(z) = \frac{1}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$. Изобразите реализацию фильтра в канонической форме.
9. Как определить цену младшего разряда фильтра, использующего формат с фиксированной запятой?
10. Чему равен минимально возможный период предельного цикла в цифровом фильтре?

5. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

5.1. Подходы, использующиеся при синтезе цифровых фильтров

Под синтезом, или проектированием, цифрового линейного фильтра понимают выбор его передаточной функции, такой, при которой характеристики получающегося фильтра удовлетворяют заданным требованиям. Строго говоря, в задачу проектирования входит и выбор структуры фильтра, т.е. форма его реализации, с учетом конечной точности вычислений. Это особенно актуально при реализации фильтров на специализированных интегральных схемах и сигнальных процессорах. Тем не менее, в рамках данного раздела остановимся на выборе передаточной функции либо, что по сути то же самое, выборе коэффициентов разностных уравнений. Методы синтеза цифровых фильтров можно классифицировать по следующим признакам:

- по типу получаемого фильтра:
 - а) методы синтеза нерекурсивных фильтров;
 - б) методы синтеза рекурсивных фильтров;
- по наличию непрерывного прототипа:
 - а) методы аппроксимации непрерывных фильтров;
 - б) прямые методы синтеза.

При синтезе цифрового фильтра по непрерывному прототипу необходимо осуществить аппроксимацию рациональной функции комплексного аргумента $p = j\omega$ рациональной функцией комплексного аргумента $z = e^{j\omega T}$. Один из эффективных методов ее решения заключается в подстановке $p = g(z)$, где $g(z)$ – дробно-рациональная функция, порядок которой зависит от допустимого отклонения АЧХ цифрового фильтра от АЧХ аналогового прототипа. Как правило, функция $g(z)$ выбирается в соответствии с одним из методов численного интегрирования, когда фактически осуществляется аппроксимация $1/p \cong 1/g(z)$. Более подробно о методах численного интегрирования пойдет речь в следующем подразделе.

Еще одним распространенным методом дискретной аппроксимации является метод инвариантной импульсной характеристики. Он позволяет синтезировать рекурсивный дискретный фильтр путем дискретизации импульсной характеристики непрерывного прототипа. Поскольку передаточная функция непрерывного фильтра представляет собой преобразование Лапласа от импуль-

ной характеристики, а дискретная передаточная функция – z -преобразование от импульсной характеристики, применение данного метода дает $D(z) = \mathcal{Z}\{W(p)\}$. Такая запись означает цепочку следующих преобразований:

$$W(p) \xrightarrow{e^s} w(t) \rightarrow w[k] \xrightarrow{z} D(z).$$

При использовании прямых методов синтеза непрерывный прототип не используется. Исходными данными для синтеза служат какие-либо параметры фильтра (например, желаемый вид АЧХ). Прямые методы можно разделить на две категории:

- оптимальные методы, в которых минимизируется заданный функционал качества;

- субоптимальные методы, не дающие в точности оптимального решения, но позволяющие значительно упростить вычисления по сравнению с оптимальными методами. Как правило, эти методы используют специфику решаемой задачи, например дробно-рациональный вид передаточной функции рекурсивного фильтра или экспоненциальный вид отдельных слагаемых его импульсной характеристики.

Применительно к задачам обработки навигационной информации широко используются методы статистической оптимизации. При этом традиционно применяются методы оптимального и субоптимального оценивания, под которыми в общем случае понимают процесс выделения полезного сигнала при наличии искажений (шумов, помех). При оптимизации могут решаться различные по своему содержанию задачи, в том числе задачи фильтрации, сглаживания, экстраполяции (прогноза). Использование результатов также имеет свою специфику и может быть связано с решением задач управления, комплексирования и других. Методам статистической обработки данных посвящено множество литературы (см., например, [1, 3, 4]), их детальное изучение выходит за рамки данного пособия.

5.2. Цифровое интегрирование

Как было сказано выше, методы численного, или цифрового, интегрирования, широко используются при дискретной аппроксимации непрерывных алгоритмов обработки информации.

Пусть $f(t)$ и $y(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы интегратора. Если известно значение $y[k-1] = y((k-1)T)$, то

$$y[k] = y[k-1] + \int_{(k-1)T}^{kT} f(t) dt \approx y[k-1] + \varphi(y[k-1], y[k-2], \dots, f[k], f[k-1], \dots),$$

где $\varphi(\cdot)$ – некоторый алгоритм преобразования, реализующий один из методов численного интегрирования.

При использовании метода Эйлера, который называют также методом прямых разностей или методом левых прямоугольников (рис. 11), имеем

$$y[k] = y[k-1] + Tf[k-1],$$

или

$$D(z) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{z-1}.$$

Таким образом, аппроксимация по методу Эйлера сводится к замене $p = \frac{z-1}{T}$. Учитывая выражение для изображения прямой разности, устанавливаем, что такая аппроксимация фактически эквивалентна приближению $\dot{x}(t) \approx \Delta x[k]/T$, то есть отношение бесконечно малых приращений заменяется на отношение конечных приращений сигнала $x(t)$ и временного аргумента.

Аналогично можно построить правило замены для метода обратных разностей, или правых прямоугольников (рис. 12). В этом случае разностное уравнение и дискретная передаточная функция интегратора соответственно имеют вид

$$y[k] = y[k-1] + Tf[k],$$

$$D(z) = \frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{Tz}{z-1}.$$

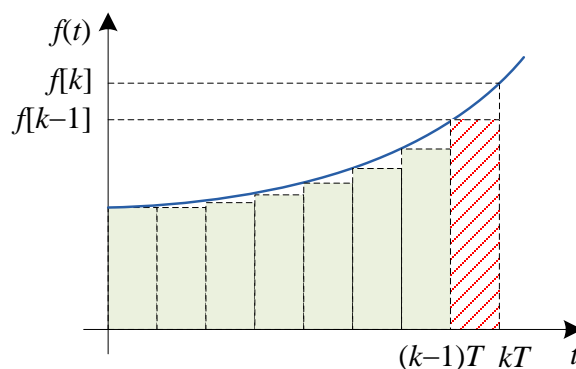


Рис. 11. Иллюстрация метода Эйлера

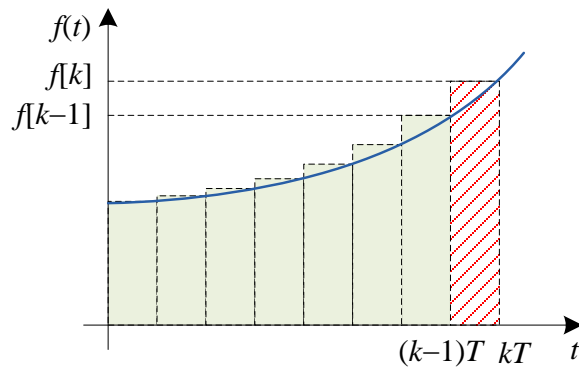


Рис. 12. Иллюстрация метода обратных разностей

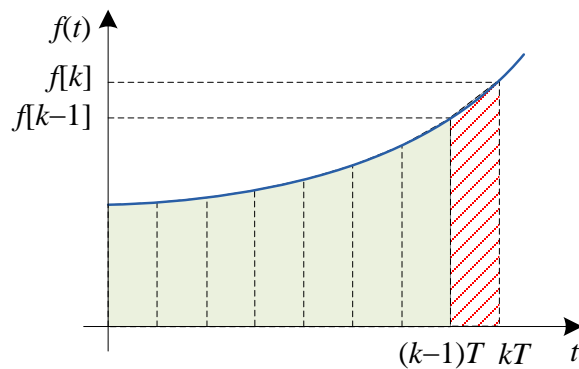


Рис. 13. Иллюстрация метода трапеций

Отсюда следует, что аппроксимация по методу обратных разностей сводится к замене $p = \frac{z-1}{Tz}$, то есть здесь используется приближение $\dot{x}(t) \approx \nabla x[k]/T$.

При интегрировании монотонно изменяющихся функций более точные результаты дает метод трапеций (рис. 13), для которого

$$y[k] = y[k-1] + \frac{T}{2}(f[k] + f[k-1]),$$

$$D(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}.$$

Здесь используется замена $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, соответствующая аппроксимации

Тастина, о которой упоминалось в разделе 3. Таким образом, аппроксимация Тастина фактически сводится к интегрированию по методу трапеций. Можно сказать, что в этом случае используется приближение $\lambda \approx \omega$.

Для повышения точности аппроксимации можно использовать более сложные методы, такие как метод Симпсона, сводящийся к замене

$$p = \frac{3}{T} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4z + 1},$$

и метод Уэддля, один из вариантов которого сводится к замене

$$p = \frac{140}{41T} \frac{z^6 - 1}{z^6 + 5z^5 + z^4 + 6z^3 + z^2 + 5z + 1}.$$

Однако при этом порядок цифрового фильтра будет выше, чем порядок непрерывного фильтра. Кроме того, при реализации интегрирующих фильтров методами Симпсона и Уэддля приходится увеличивать период съема информации (соответственно в 2 и в 6 раз) во избежание незатухающих колебаний в выходном сигнале, обусловленных наличием полюсов у передаточной функции интегратора на единичной окружности (помимо $z_1 = 1$).

Можно показать, что все рассмотренные преобразования искажают частотные характеристики фильтров по отношению к непрерывному прототипу. Так, например, в случае преобразования Тастина частотная характеристика цифрового фильтра на частоте ω совпадает с частотной характеристикой непрерывного фильтра на частоте λ , отличающейся от ω . Несовпадение частотных характеристик может быть нежелательно, например, если надо дискретизировать полосовой или режекторный фильтр, поскольку полученный цифровой фильтр будет иметь другую рабочую частоту. В этом случае используется модифицированное преобразование Тастина с частотной коррекцией

$$p = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg} \frac{\omega_0 T}{2}} \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Нетрудно убедиться, что оно не дает искажений АЧХ на частоте ω_0 , хотя искажения на остальных частотах остаются.

Рассмотрим далее вопрос о сохранении устойчивости дискретизируемого фильтра.

При использовании метода Эйлера полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ (область устойчивости непрерывных систем) отображается на полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$. Эта область перекрывает единичный круг (область устойчивости дискретных систем), поэтому устойчивому непрерывному фильтру может соответствовать неустойчивый дискретный фильтр. Так, например, при дискретизации методом Эйлера апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p + \alpha}$$

получим

$$D(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + \alpha} = \frac{T}{z-1 + \alpha T}.$$

При $\alpha T > 2$ дискретный фильтр становится неустойчивым, хотя непрерывный аналог устойчив при любых $\alpha > 0$.

При использовании метода обратных разностей полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ отображается во внутреннюю часть круга $|z - 0,5| < 0,5$. Эта область находится внутри единичного круга, поэтому устойчивость фильтра всегда сохраняется, и даже неустойчивый фильтр после дискретизации может стать устойчивым. Так, для рассмотренного выше апериодического звена получим

$$D(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz} + \alpha} = \frac{Tz}{(1 + \alpha T)z - 1}.$$

При $\alpha T < -2$ дискретный фильтр будет устойчивым, несмотря на неустойчивость непрерывного аналога.

Преобразование Тастина, как это следует из раздела 3, отображает полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ на внутреннюю часть единичного круга, то есть в этом случае как устойчивость, так и неустойчивость фильтра всегда сохраняются.

5.3. Цифровое дифференцирование

При решении задач выработки угловой или линейной скорости объекта в ряде случаев приходится формировать такие сигналы путем численного дифференцирования данных, полученных от датчиков углов и средств обсервации. Это может быть вполне оправдано, когда первичная информация характеризуется высокой точностью, а погрешность измерений содержит преимущественно низкочастотные составляющие. В то же время наличие шумов квантования неизбежно искажает результат дифференцирования.

При синтезе дифференцирующих фильтров может быть решена задача оптимизации (например, стохастической) с целью получения первой и более высоких обратных разностей, которые представляют собой аналоги производных непрерывного сигнала. Однако такое приближение не всегда гарантирует приемлемую степень точности дифференцирования исходного непрерывного

сигнала. Фактически должна решаться задача нахождения отсчетов производной непрерывного сигнала при наличии отсчетов самого сигнала и учете помех, вносимых квантованием по уровню. Если при этом исходить из желаемого непрерывного алгоритма обработки в виде $W(p) = p$, то с учетом зависимости

$$p = j\omega = j \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\lambda T}{2},$$

раскладывая арктангенс в ряд Тейлора, получим желаемую передаточную функцию дифференцирующего фильтра по псевдочастоте:

$$D_0^*(j\lambda) = \frac{2}{T} \left(\frac{j\lambda T}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{j\lambda T}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{j\lambda T}{2} \right)^5 + \dots \right).$$

Однако такой алгоритм приводит к неустойчивой программе, поскольку после замены

$$j\lambda = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

получим лежащие на единичной окружности полюса $z_i = -1$, наличие которых порождает незатухающие колебания в выходном сигнале фильтра. По этой же причине синтез дифференцирующего фильтра не может быть выполнен рассмотренными выше методами аппроксимации, основанными на численном интегрировании.

Устойчивость алгоритма может быть обеспечена при использовании КИХ-фильтров, получающихся посредством разложения в ряд натурального логарифма в соответствии с соотношением $p = \frac{1}{T} \ln z$, вытекающим из зависимости $z = e^{pT}$. В этом случае желаемый дискретный алгоритм обработки может быть представлен в виде

$$D_0(z) = \frac{1}{T} \ln z = \frac{1}{T} \left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2} (1 - z^{-1})^2 + \frac{1}{3} (1 - z^{-1})^3 + \dots \right). \quad (18)$$

Заметим, что область сходимости данного ряда $|1 - z^{-1}| < 1$, что после подстановки $z = e^{j\omega T}$ дает $\omega T < \pi/6$. Таким образом, указанный подход применим только для дифференцирования сигналов, не содержащих в своем спектре составляющих на частотах $\pi/6T$ и выше. Кроме того, в любом случае следует ограничивать число членов полученного ряда, поскольку учет каждого дополнительного отсчета ведет к возрастанию ошибок, вызванных шумами квантования.

Выражению (18) соответствует алгоритм вычисления производной в виде

$$y[k] = \dot{f}(t) \Big|_{t=kT} = \frac{1}{T} \left(\nabla f[k] + \frac{1}{2} \nabla^2 f[k] + \frac{1}{3} \nabla^3 f[k] + \dots \right). \quad (19)$$

Ограничиваясь m слагаемыми и раскрывая выражения для обратных разностей, получим

$$y[k] = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^m b_i f[k-i], \quad b_i = (-1)^i \sum_{\ell=1}^m \frac{C_\ell^i}{\ell}, \quad (20)$$

где C_ℓ^i – биномиальные коэффициенты, причем $C_\ell^i = 0$, если $i > \ell$. Выбор числа m может осуществляться исходя из требования минимизации результирующей ошибки дифференцирования. При этом должны быть заданы характеристики исходного сигнала и шумов квантования по уровню.

Большими возможностями при решении практических задач обладает подход, основанный на полиномиальном представлении исходного дифференцируемого сигнала. В этом случае задача сводится к стандартной задаче оценивания коэффициентов полинома, а выражение для производной легко формируется аналитически. В самом деле, если принять

$$f(t) = \sum_{i=0}^n C_i (t - t_0)^i + v(t),$$

где n – порядок полинома, C_i – искомые коэффициенты, t_0 – некоторый начальный момент времени, задаваемый, вообще говоря, произвольно, $v(t)$ – ошибка аппроксимации, то, пренебрегая ошибками аппроксимации, можно записать выражение для оценки производной в виде

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{C}_i i (t - t_0)^{i-1},$$

причем оно может быть использовано как в дискретные, так и в любые другие промежуточные моменты времени. Важно отметить, что попутно может быть решена задача экстраполяции (прогноза) как самих значений функции, так и ее производной.

Оценки \hat{C}_i могут быть найдены, например, методом наименьших квадратов (МНК) [4], где в качестве измерений выступают полученные в дискретные моменты времени на ограниченном временном интервале значения $f[k]$.

В качестве примера рассмотрим решение данной задачи при аппроксимации функции $f(t)$ полиномом второго порядка. В этом случае измерения можно представить в виде

$$\begin{aligned}
f_1 &= f[k-m+1] = C_0 + C_1((k-m+1)T - t_0) + C_2((k-m+1)T - t_0)^2 + v_1, \\
f_2 &= f[k-m+2] = C_0 + C_1((k-m+2)T - t_0) + C_2((k-m+2)T - t_0)^2 + v_2, \\
&\dots, \\
f_m &= f[k] = C_0 + C_1(kT - t_0) + C_2(kT - t_0)^2 + v_m.
\end{aligned}$$

Здесь v_i – ошибка аппроксимации в $(k-m+i)$ -й момент времени. Число измерений m должно превышать порядок аппроксимирующего полинома (в данном случае $m > 2$). Начальный момент времени удобно выбрать равным $t_0 = (k-m+1)T$. Тогда

$$\begin{aligned}
f_1 &= C_0 + v_1, \\
f_2 &= C_0 + C_1T + C_2T^2 + v_2, \\
&\dots, \\
f_m &= C_0 + C_1(m-1)T + C_2(m-1)^2T^2 + v_m,
\end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}\mathbf{C} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m)^T$, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m)^T$, $\mathbf{C} = (C_0 \ C_1 \ C_2)^T$,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & (m-1)T & (m-1)^2T^2 \end{pmatrix}.$$

Оценка МНК отыскивается по формуле

$$\hat{\mathbf{C}} = (\hat{C}_0 \ \hat{C}_1 \ \hat{C}_2)^T = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{f}.$$

Конкретизируя вид матрицы \mathbf{H} , можно получить

$$\begin{aligned}
\hat{C}_0 &= \frac{9}{m} \sum_{i=1}^m f_i - \frac{6(6m+7)}{m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m if_i + \frac{30}{m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m i^2 f_i, \\
\hat{C}_1 &= \frac{1}{T} \left(-\frac{6(6m-7)}{(m-2)(m-1)m} \sum_{i=1}^m f_i + \frac{12(16m^2-19)}{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m if_i - \right. \\
&\quad \left. - \frac{180}{(m-2)m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m i^2 f_i \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_2 &= \frac{1}{T^2} \left(\frac{30}{(m-2)(m-1)m} \sum_{i=1}^m f_i - \frac{180}{(m-2)(m-1)m(m+2)} \sum_{i=1}^m i f_i + \right. \\
&\quad \left. + \frac{180}{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m i^2 f_i \right); \\
y[k] = \hat{f}(t) \Big|_{t=kT} &= \hat{C}_1 + 2(m-1)T\hat{C}_2 = \frac{6}{T} \left(\frac{4m-3}{(m-2)(m-1)m} \sum_{i=1}^m f_i - \right. \\
&\quad \left. - \frac{28m^2-22}{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m i f_i + \frac{30}{(m-2)m(m+1)(m+2)} \sum_{i=1}^m i^2 f_i \right). \quad (21)
\end{aligned}$$

В заключении рассмотрим решение задачи численного дифференцирования без учета требования получения производной в реальном времени. Очевидно, что, как и в случае восстановления сигнала по дискретным отсчетам, задача дифференцирования теоретически может быть решена абсолютно точно при условии, что исходный сигнал удовлетворяет условиям теоремы Котельникова. Тогда, по аналогии с выкладками, приведенными в разделе 1, запишем частотную передаточную функцию идеального дифференцирующего фильтра в виде

$$W(j\omega) = \begin{cases} j\omega T, & |\omega| \leq \pi/T, \\ 0, & |\omega| > \pi/T, \end{cases}$$

и определим весовую функцию:

$$\begin{aligned}
w[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega kT} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} j\omega e^{j\omega kT} d\omega = -\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \omega \sin \omega kT d\omega = \\
&= \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \frac{(-1)^k}{kT}, & k \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Выходной сигнал фильтра может быть получен по формуле свертки дискретных последовательностей:

$$\begin{aligned}
y[k] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m] f[k-m] = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (f[k+m] - f[k-m]) = \\
&= \frac{1}{T} \left(f[k+1] - f[k-1] - \frac{1}{2} (f[k+2] - f[k-2]) + \frac{1}{3} (f[k+3] - f[k-3]) - \dots \right). \quad (22)
\end{aligned}$$

В отличие от выражений (19)-(21), здесь используются предыдущие и последующие отсчеты входного сигнала, в то время как от текущего значения дифференцируемой функции результат не зависит.

Поскольку полученный ряд содержит бесконечное число слагаемых, на практике осуществить дифференцирование можно лишь приближенно. В то же время простое усечение импульсной характеристики во времени приводит к заметным искажениям частотных характеристик при приближении к частоте Найквиста [2]. Для уменьшения этих искажений при синтезе дифференцирующих фильтров производят оптимизацию только в рабочей полосе частот, верхняя граница которой должна располагаться левее частоты Найквиста. При этом в окрестности частоты Найквиста АЧХ может принимать произвольные значения.

5.4. Задание для самостоятельной работы

С использованием Matlab сопоставьте результаты работы дифференцирующих КИХ-фильтров, реализующих алгоритмы (20) и (21) при дифференцировании гармонического сигнала с единичной амплитудой и периодом T_c . Исходные данные задаются в соответствии с табл. 6. Порядок фильтра следует выбирать исходя из минимизации ошибок дифференцирования.

Табл. 6. Варианты заданий

Вар.	T_c , с	T , с	δ_1
1	1	0,05	0,01
2	2	0,1	0,01
3	3	0,1	0,02
4	4	0,1	0,03
5	5	0,2	0,01
6	6	0,2	0,02
7	7	0,2	0,03
8	8	0,5	0,02
9	9	0,5	0,01
10	10	0,5	0,02

Пример реализации алгоритма (21) приведен в Приложении 1. При реализации алгоритма (20) можно воспользоваться соотношением (19) с ограниченным числом членов ряда.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

- исходные данные;
- основные формульные зависимости, использованные при выполнении работы;
- текст m-файла;
- реализации выходных сигналов дифференцирующих фильтров и графики аналитически полученных производных входного сигнала;
- выводы по работе – рекомендации по использованию того или иного алгоритма и выбору его порядка.

5.5. Контрольные вопросы

1. Какие подходы используют при дискретной аппроксимации непрерывного фильтра?
2. Перечислите известные Вам методы численного интегрирования.
3. Какой метод интегрирования реализует аппроксимация Тастина? Приводит ли она к увеличению порядка фильтра?
4. В чем состоит аппроксимация Тастина с частотной коррекцией? Где она применяется?
5. В чем недостаток подходов, основанных на дискретной аппроксимации непрерывных аналогов? Как можно преодолеть этот недостаток?
6. Является ли фильтр, интегрирующий по формуле Симпсона, устойчивым? Почему?
7. Приведите примеры задач, сводящихся к проблеме численного дифференцирования.
8. Перечислите известные Вам подходы к синтезу дифференцирующих фильтров.
9. В каком случае возможно безошибочное вычисление производной сигнала, заданного своими дискретными отсчетами?
10. К какому нежелательному эффекту приводит увеличение порядка дифференцирующего КИХ-фильтра?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976. – 575 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 756 с.
3. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: Учеб. пособие; СПбГМТУ. – СПб.: 2006. – 161 с.
4. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1: Введение в теорию оценивания. – СПб: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор». – 2009. – 496 с.
5. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Simulink. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 425 с.

Текст m-файла к заданию 1.5

```

clear; close all;

% Параметры сигнала
TCont = 0.01; % шаг непрерывной функции, с
T = 0.25;     % период дискретизации, с
N = 4;       % число периодов сигнала
w = 10;      % круговая частота, 1/с

Tc = 2*pi/w; % период сигнала
xmin = -Tc;  % начальное значение оси X для графика
xmax = Tc*(N+1); % конечное значение оси X для графика

t= xmin:TCont:xmax; % время для восстановленного сигнала
td = xmin:T:xmax;   % точки дискретного сигнала

% Исходный сигнал
y = sin(w*t).*rectpuls(t-Tc*N/2,Tc*N);
% Дискретизированный сигнал
yd = sin(w*td).*rectpuls(td-Tc*N/2,Tc*N);

% Восстановление исходного сигнала
dt1 = td/T;
d=[dt1' yd'];
yr = pulstran(t/T,d,'sinc');

% Построение реализаций
figure;
plot(td,yd,'o',t,yr,t,y,':');
hold on;
axis([xmin xmax -1 1]);
legend('discrete','restored','original');
xlabel('t [c]');
ylabel('y(t)');

```

```

% Построение спектра исходного сигнала
figure;
fy = abs(fft(y))*TCont;
npoints = length(y);
n1 = floor(npoints*2*TCont/Tc);
freq1 = 2*w/n1*(-n1:n1);
for i = 1:n1
    sy(i) = fy(npoints-n1+i);
    sy(i+n1+1) = fy(i+1);
end;
sy(n1+1) = fy(1);
subplot(2,1,1);
plot (freq1,sy,'r');
xlabel('w[1/c]');
ylabel('S(w)');
title('Spectrum of original signal');

% Построение спектра восстановленного сигнала
fr = abs(fft(yr))*TCont;
n2 = floor(npoints*2*TCont/Tc);
freq2 = 2*w/n2*(-n2:n2);
for i = 1:n2
    sr(i) = fr(npoints-n2+i);
    sr(i+n2+1) = fr(i+1);
end;
sr(n2+1) = fr(1);
subplot(2,1,2);
plot (freq2,sr,'g');
title('Spectrum of restored signal');
xlabel('w[1/c]');
ylabel('S(w)');

```


Пример выполнения задания 3.4

Пусть $D(z) = \frac{z^2}{z^3 + a}$, $f[k] = \mathbf{1}[k]$.

Используя билинейное преобразование, найдем

$$D\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + a} = \frac{(1+w)^2(1-w)}{(1+w)^3 + a(1-w)^3}.$$

Преобразуем знаменатель, сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях w . Это удобно сделать, например, с использованием аппарата символьных вычислений Matlab:

```
>> syms a w
>> collect((1+w)^3+a*(1-w)^3,w)

ans =

(1 - a)*w^3 + (3*a + 3)*w^2 + (3 - 3*a)*w + a + 1
```

В соответствии с критерием Гурвица область устойчивости определяется решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 1 - a > 0, \\ 3a + 3 > 0, \\ 3 - 3a > 0, \\ a + 1 > 0, \\ (3a + 3)(3 - 3a) > (1 - a)(a + 1). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить: $-1 < a < 1$.

Пусть $a = 0,5$. Тогда $D(z) = \frac{z^2}{z^3 + 0,5}$.

Используя теорему о конечном значении, найдем установившееся значение выходной последовательности:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y[k] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) D(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2}{z^3+0,5} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2}{z^3+0,5} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z^3+0,5} = \frac{1}{1+0,5} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Используя теорему запаздывания, перейдем от изображений к оригиналам:

$$D(z) = \frac{z^2}{z^3+0,5} = \frac{z^{-1}}{1+0,5z^{-3}} = \frac{Y(z)}{F(z)};$$

$$Y(z) + 0,5z^{-3}Y(z) = z^{-1}F(z).$$

$$y[k] + 0,5y[k-3] = f[k-1],$$

или в рекуррентной форме:

$$y[k] = -0,5y[k-3] + f[k-1].$$

С учетом нулевых начальных условий последовательно получим:

$$y[0] = -0,5y[-3] + f[-1] = -0,5 \cdot 0 + 0 = 0,$$

$$y[1] = -0,5y[-2] + f[0] = -0,5 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$y[2] = -0,5y[-1] + f[1] = -0,5 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$y[3] = -0,5y[0] + f[2] = -0,5 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$y[4] = -0,5y[1] + f[3] = -0,5 \cdot 1 + 1 = 0,5.$$

Для проверки корректности вычислений может быть использована простейшая модель Matlab Simulink, показанная на рис. 14.

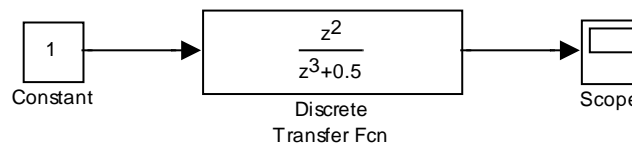


Рис. 14. Модель для проверки расчетов.

В блоках *Constant* и *Discrete Transfer Fcn* задается единичный период дискретности. Для задания линейно нарастающего сигнала можно воспользоваться блоком *Ramp* (с единичным наклоном: $Slope = 1$); для задания квадратично нарастающего сигнала – последовательным соединением блоков *Ramp* ($Slope = 2$) и *Integrator*.

На рис. 15. приведен переходный процесс, полученный для рассматриваемого примера. Видно, что результаты моделирования согласуются с расчетными данными.

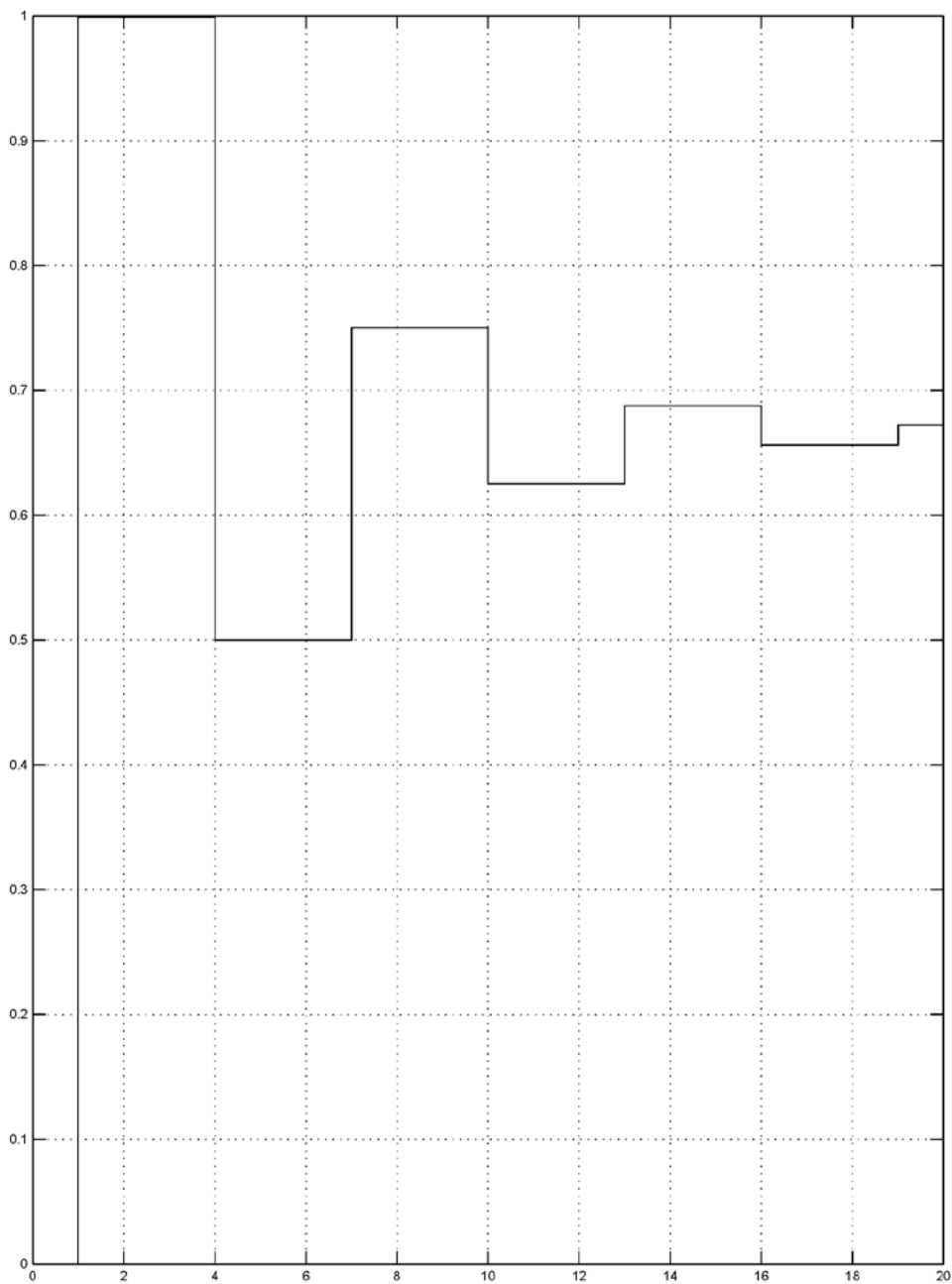


Рис. 15. Переходный процесс, полученный в блоке *Scope*

Текст m-файла к заданию 4.4

```

clear; close all;

b = [0.1 -0.11 0]; %коэффициенты числителя
a = [1 -1.55 0.75]; %коэффициенты знаменателя
N = 5; %число двоичных разрядов

am = size(a);
bm = size(b);
nmax = 2^N;

%квантование коэффициентов
bq = round(b*nmax)/nmax;
aq = round(a*nmax)/nmax;

%последовательное программирование
sos = tf2sos(b,a);
sosq = round(sos*nmax)/nmax;
[bsosq, asosq] = sos2tf(sosq);

%построение АЧХ
[h, f] = freqz(b,a);
hq = freqz(bq,aq);
hsosq = freqz(bsosq,asosq);
figure;
plot(f/pi,abs(h), 'r', f/pi,abs(hq), f/pi,abs(hsosq), 'g-.');
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');
legend('original','quantized, direct form','quantized,
second-order sections form');

%Расчет импульсных характеристик
plottime=100;
x2(plottime)=0;
x21(plottime)=0;

```

```

%импульсная характеристика фильтра без округления
%результатов вычислений
for k=1:plottime
    if k<=bm(2)
        x21(k) = b(k);
    end;
    for i=2:am(2)
        if k>i-1
            x2k(i) = x21(k-i+1);
        else x2k(i) = 0;
        end;
        x21(k) = x21(k) - a(i)*x2k(i);
    end;
end;

%импульсная характеристика фильтра с округлением
%результатов вычислений
for k=1:plottime
    if k<=bm(2)
        x2(k) = round(b(k)*nmax)/nmax;
    end;
    for i=2:am(2)
        if k>i-1
            x2k(i) = x2(k-i+1);
        else x2k(i) = 0;
        end;
        x2(k) = x2(k) - round(a(i)*x2k(i)*nmax)/nmax;
    end;
end;

figure;
plot(x21, 'r--')
hold on;
plot(x2);
xlabel('Time');
ylabel('Impulse response');
legend('original', 'quantized');

```

Текст m-файла к заданию 5.4

```

clear; close all;

TCont = 0.001;    % шаг непрерывной функции, с
T = 0.2;         % период дискретизации, с
Tc = 6;         % период сигнала, с
m = 5;         % порядок фильтра
d1 = 0.01;      % цена младшего разряда АЦП

w = 2*pi/Tc;    % круговая частота

t = 0:TCont:3*Tc; % время для восстановленного сигнала
td = 0:T:3*Tc;  % точки дискретного сигнала
N = length(td);

% Вид исходной функции
f = sin(w*t);
% Вид дискретной функции
fd = d1*round(sin(w*td)/d1);

% Вычисление производной
yd = zeros(1,N);
for k = 1:N
    if k < m
        ff = [zeros(1,m-k) fd(1:k)];
    else
        ff = fd(k-m+1:k);
    end;
    s1 = sum(ff);
    s2 = (1:m)*ff';
    s3 = (1:m).^2*ff';
    yd(k) = 6/T*((4*m - 3)/(m-2)/(m-1)/m*s1 - (28*m^2 -
22)/(m-2)/(m-1)/m/(m+1)/(m+2)*s2 + 30/(m-
2)/m/(m+1)/(m+2)*s3);
end;

```

```
yi = w*cos(w*t);  
  
% Построение графика производной  
figure;  
plot(td,yd, '.',t,yi,'r--','MarkerSize',15);  
xlabel('t, с');  
ylabel('df/dt');
```

Лопарев Алексей Валерьевич

Основы цифровой обработки сигналов и ее применение в задачах обработки навигационной информации

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А