ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Санкт-Петербург
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01., 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2023

Попов А.И., Попов И.Ю., Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление – СПб: Университет ИТМО, 2023. – 173 с.

Рецензент:
Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория “ординарный профессор”) института “Высшая инженерно-техническая школа”, Университета ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. В пособии рассмотрены следующие темы: “Множества и отображения”, “Комплексные числа”, “Полиномы”, “Пределы”, “Дифференциальное исчисление функций одной переменной”.

Содержание

Введение **6**

Глава 1. Множества и отображения **8**

1.1 Множества 8

1.2 Операции над множествами 9

1.3 Свойства операций над множествами 11

1.4 Логическая символика 12

1.5 Функции 14

Глава 2. Комплексные числа **16**

2.1 История возникновения комплексных чисел 16

2.2 Основные понятия. Алгебраическая форма записи комплексного числа 23

2.3 Вычитание и деление комплексных чисел 27

2.4 Тригонометрическая форма записи комплексного числа . . 29

2.5 Действия с комплексными числами в тригонометрической форме 31

2.6 Показательная форма записи комплексного числа 33

2.7 Функции комплексной переменной 34

2.8 Логарифмирование 36

Глава 3. Полиномы **38**

3.1 Основные понятия. Действия с полиномами 38

3.2 Полиномы с вещественными коэффициентами 42

3.3 Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами 44

Глава 4. Пределы **46**

4.1 Предел последовательности 46

4.2 Арифметические операции над последовательностями и их пределы . . . 52
4.3 Монотонная последовательность . . . 55
4.4 Число e . . . 57
4.5 Критерий Коши сходимости последовательности . . . 59
4.6 Подпоследовательности . . . 61
4.7 Предел функции . . . 64
4.8 Сведение предела функции к пределу последовательности 67
4.9 Первый замечательный предел . . . 72
4.10 Второй замечательный предел . . . 73
4.11 Классификация бесконечно малых . . . 75
4.12 Непрерывные функции . . . 78
4.13 Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке (на отрезке) . . . 88
4.14 Равномерная непрерывность . . . 91
4.15 Принцип сжимающих отображений . . . 96

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной 102

5.1 Производная . . . 102
5.2 Правила дифференцирования . . . 105
5.3 Производные основных элементарных функций . . . 110
5.4 Производные высших порядков . . . 112
5.5 Формула Лейбница . . . 114
5.6 Дифференциал . . . 116
5.7 Дифференциалы высших порядков . . . 120
5.8 Дифференцирование функций, заданных параметрически 121
5.9 Французские теоремы: Ферма, Дарбу, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя . . . 122
5.10 Формула Тейлора . . . 134

5.11 Формулы Маклорена для основных элементарных функций 141
5.12 Исследование функций. Возрастание и убывание функции 143
5.13 Экстремумы функции 145
5.14 Выпуклость графика функции 154
5.15 Асимптоты кривых 158
5.16 Общая схема исследования функции 162

Контрольные вопросы **168**

Введение

> Современным математикам вообще трудно читать своих предшественников, которые писали: “Петя вымыл руки” там, где просто следовало сказать: “Существует $t_1 < 0$, такое, что образ Петя(t_1) точки t_1 при естественном отображении $t \to$ Петя(t) принадлежит множеству грязноруких и такое t_2 из полуинтервала $(t_1, 0]$, что образ точки t_2 при том же отображении принадлежит дополнению к множеству, о котором шла речь при рассмотрении точки t_1”
>
> В. И. Арнольд о разнице стилей изложения математики. Цитирование по книге [1]

По сравнению с геометрией и алгеброй, возраст которых исчисляется тысячелетиями, математический анализ – наука молодая, ей нет еще и четырехсот лет. Однако важность этого раздела математики трудно переоценить. Появление математического анализа, или, как тогда говорили, исчисления бесконечно малых, глобально изменило способы описания явлений природы. Начиная с этого момента, господствующим при описании процессов или эффектов стал “непрерывный подход”, когда основными инструментами являются производные, интегралы, дифференциальные уравнения. Даже появление в начале двадцатого века квантовой механики, которой дискретность присуща по природе, не разрушило главенство непрерывного подхода. Бурное развитие компьютеров и, соответственно, вычислительных методов усилило позиции “дискретного подхода”, но все равно, в большинстве случаев дискретный анализ является лишь способом приближенно получить результаты, которые должен давать непрерывный подход (приближенные решения дифференциальных уравнений, приближенные значения интегралов и так далее).

Настоящее учебное пособие посвящено изложению начал математического анализа, а именно, дифференциальному исчислению. При этом подробно рассматривается и необходимая для этого база из теории пределов, комплексных чисел, полиномов. Мы следуем современной схеме изложения математического анализа, стараясь при этом избегать ненужных усложнений, о которых, в частности, говорил блестящий советский математик В. И. Арнольд (смотри эпиграф). По нашему мнению, такой подход поможет читателю лучше почувствовать красоту математического анализа и полюбить эту стройную, изящную, хотя и не простую науку. А если любишь, то любые трудности преодолимы.

Глава 1. Множества и отображения

1.1 Множества

Совокупность объектов можно рассматривать как некоторый новый объект. Этот новый объект называется множеством. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Например, можно говорить о множестве студентов в аудитории, о множестве песчинок на пляже, о множестве вершин многоугольника или о множестве крокодилов в реке Нева. Отметим, что последнее из перечисленных множеств не содержит ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Указанные примеры обладают тем свойством, что в каждом из них соответствующее множество состоит из определенного числа элементов, которое можно оценить или ограничить. Такие множества мы будем называть конечными.

В математике часто приходится иметь дело с совокупностями, состоящими не из конечного числа объектов. Простейшими примерами служат множество всех натуральных чисел $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и множество всех точек отрезка. Такие множества мы будем называть бесконечными.

Как правило, мы будем обозначать множества большими буквами $A,\ B,\ C,\ \ldots$, а их элементы – малыми буквами $a,\ b,\ c,\ \ldots$
Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что a есть элемент множества A. Запись $a \notin A$, или $a \overline{\in} A$ (либо $A \overline{\ni} a$), означает, что a не есть элемент множества A.

Введем обозначения для некоторых числовых множеств.

1. Натуральные числа $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ образуют множество $\mathbb{N}$; если n принадлежит множеству $\mathbb{N}$, то ему принадлежит и $n+1$.

2. Буквой $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел:

$$\mathbb{Z} = \{x:\ x \in \mathbb{N},\ \text{или}\ -x \in \mathbb{N},\ \text{или}\ x = 0\}.$$

3. Рациональные числа ($\mathbb{Q}$) – это несократимые дроби вида $\frac{p}{q}$, где p и

q — целые числа, $q \neq 0$. Рациональные числа можно представить как периодические десятичные дроби.

Например: $\frac{5}{11} = 0,\underbrace{4545454545454545454545.....}_{\text{цифры повторяются периодически}}$

Либо: $\frac{1}{2} = 0,5\underline{0000...}$

4. Иррациональные числа $\mathbb{I}$ - это непериодические десятичные дроби.

Например: $\sqrt{2} = 1,\underbrace{4142135623730950488016887242097.....}_{\text{цифры не повторяются периодически}}$

5. Вещественные числа $\mathbb{R}$ – это совокупность множеств рациональных ($\mathbb{Q}$) и иррациональных чисел ($\mathbb{I}$).

1.2 Операции над множествами

Множества могут находиться в определенных *отношениях*, и над ними можно производить некоторые *операции*.

1. Равенство множеств

Два множества M_1 и M_2 называются *равными* ($M_1 = M_2$), в том и только в том случае, если они содержат одни и те же элементы, то есть если каждый элемент множества M_1 принадлежит и M_2, а каждый элемент множества M_2 принадлежит и M_1.

2. Включение одного множества в другое

Множество M_1 *входит* в множество M_2 ($M_1 \subset M_2$), когда выполняется следующее условие: если $x \in M_1$, то и $x \in M_2$. В этом случае M_1 называется подмножеством множества M_2. Проиллюстрируем это отношение на примере множеств на плоскости.

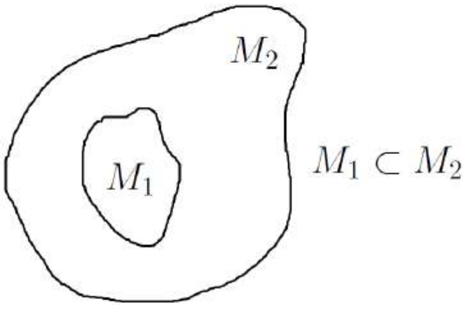


Рис. 1: Множество M_1 является частью M_2

3. Пересечение множеств

Пересечение двух множеств M_1 и M_2 есть множество

$$M_1 \cap M_2 = \{x : \ x \in M_1 \text{ и } x \in M_2\},$$

то есть множество всех элементов, принадлежащих как M_1, так и M_2. Если таких элементов нет, то $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

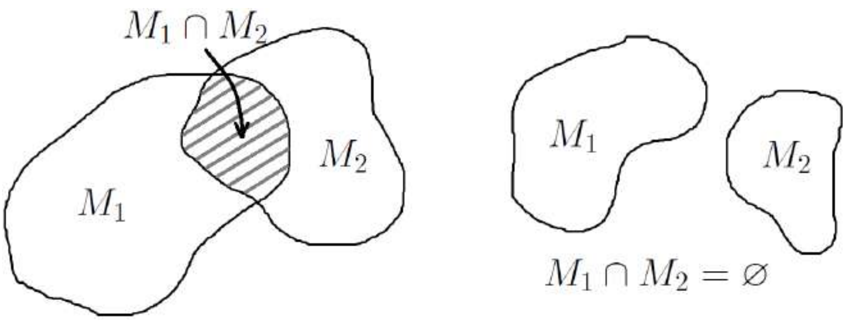


Рис. 2: Пересечение множеств M_1 и M_2

4. Объединение множеств

Объединение двух множеств M_1 и M_2 есть множество

$$M_1 \cup M_2 = \{x : \ x \in M_1 \text{ или } x \in M_2\}.$$

Таким образом, речь идет о множестве всех элементов, принадлежащих хотя бы одному их двух данных множеств (в него входят и те элементы, которые принадлежат им обоим).

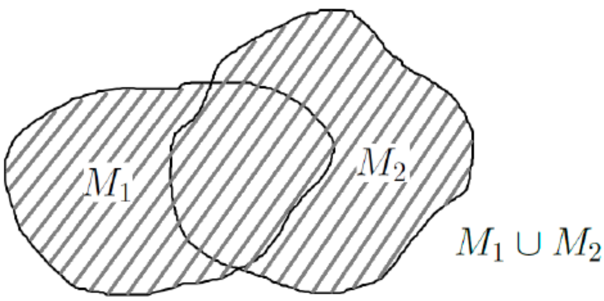


Рис. 3: Объединение множеств M_1 и M_2

5. Разность множеств

Разность множеств M_1 и M_2 есть множество

$$M_1 \setminus M_2 = \{x : \ x \in M_1 \text{ и } x \notin M_2.\}$$

Разность может оказаться пустой, если $M_1 \subset M_2$.

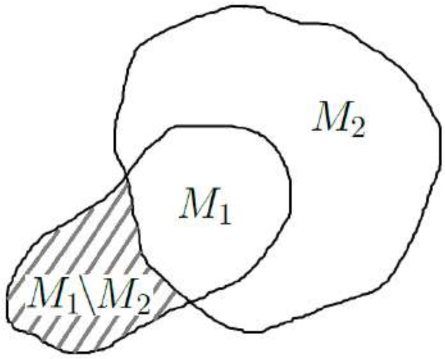


Рис. 4: Разность множеств M_1 и M_2

1.3 Свойства операций над множествами

Операции над множествами обладают свойствами, аналогичными свойствам арифметических действий. Перечислим их.

1. Ассоциативность объединения множеств

$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup M_2 \cup M_3.$$

2. Ассоциативность пересечения множеств

$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3.$$

3. Коммутативность объединения множеств

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

4. Коммутативность пересечения множеств

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1.$$

5. Первый дистрибутивный закон (Дистрибутивность пересече-

ния множеств относительно объединения)

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Доказательство:
Сначала мы докажем включение одного множества в другое:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \subset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3), \tag{1.1}$$

а затем – обратное включение:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \supset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3), \tag{1.2}$$

что и будет означать равенство множеств.
Докажем прямое включение (1.1). Если $x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$, то $x \in M_1$ и одновременно x принадлежит хотя бы одному из множеств M_2 или M_3. Следовательно, $x \in M_1$ и $x \in M_2$ или $x \in M_1$ и $x \in M_3$, то есть $x \in M_1 \cap M_2$ или $x \in M_1 \cap M_3$. Значит, действительно, $x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.

Теперь докажем обратное включение (1.2).
Если $x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$, то $x \in M_1 \cap M_2$ или $x \in M_1 \cap M_3$. Значит, $x \in M_1$ и $x \in M_2$ или $x \in M_1$ и $x \in M_3$. Таким образом, $x \in M_1$ и $x \in M_2 \cup M_3$, то есть $x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$.

■

6. Второй дистрибутивный закон (Дистрибутивность объединения множеств относительно пересечения)

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).$$

Доказывается аналогично.

1.4 Логическая символика

При формулировании математических рассуждений целесообразно использовать символьную запись. Введем соответствующие обозначения и кванторы.

1. Квантор всеобщности

Обозначается символом $\forall$, читается как: "для любого ...", "для каждого...", "для всех..." или "каждый...", "любой...", "все...".

2. Квантор существования

Обозначается символом $\exists$, читается как: "существует..." или "найдётся..."

Например, с помощью символьной записи можно упростить название пьесы А. Н. Островского:

$\forall$ мудрец $\exists$ простота. ("На всякого мудреца довольно простоты").

Символы, обеспечивающие связь между утверждениями

Если нас интересует не содержание некоторого утверждения, а его взаимосвязь с другими утверждениями, то мы можем обозначить это утверждение одной буквой, например, α.

3. Следствие

Символ $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: из утверждения α следует утверждение β.

4. Эквивалентность

Символ $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: утверждения α и β эквивалентны.

5. Отрицание

Запись $\overline{\alpha}$ (либо $\neg\alpha$) означает "не α," то есть отрицание утверждения α.

Замечание

Построим утверждения, содержащие несколько кванторов. Например, запись $\forall\ x \in E:\ \alpha$ означает: "для любого элемента x из множества E выполнено утверждение α." Запись $\exists\ y \in F:\ \beta$ означает: "существует элемент y из множества F, для которого выполнено утверждение β."

Построение отрицания для утверждения

Построим отрицание утверждения $\forall\ x \in E:\ \alpha$ (для любого $x \in E$ имеет место свойство α). Если высказанное утверждение не имеет места, то, следовательно, свойство α имеет место не для каждого $x \in E$. Значит существует элемент $x \in E$, для которого свойство α не имеет места:

$$\overline{\forall\, x \in E:\ \alpha} \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in E:\ \overline{\alpha}.$$

Построим отрицание утверждения $\exists\, y \in E:\ \beta$ (существует $y \in E$, обладающий свойством β). Если это утверждение неверно, то указанного $y \in E$ не существует, то есть для любого $y \in E$ свойство β не выполнено:

$$\overline{\exists\, y \in E:\ \beta} \;\Leftrightarrow\; \forall\, y \in E:\ \overline{\beta}.$$

Таким образом, черта над знаком $\forall$ или $\exists$ превращает его, соответственно, в знак $\exists$ или $\forall$ и переносится на свойство, стоящее, после двоеточия.

1.5 Функции

Рассмотрим множество X, состоящее из элементов x, и множество Y, состоящее из элементов y. Пусть каким-то способом f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$. Тогда соответствие $x \to y$ (или $y = f(x)$) называется функцией с областью определения X и областью значений Y:

$$Y = f(X) = \{f(x):\ x \in X\}.$$

При этом x называется независимой переменной (или аргументом) функции $f(x)$; y называется зависимой переменной (или значением) функции. Функция f также называется отображением множества X на множество Y. Соответственно, Y есть образ X при отображении f.

Заметим, что в определении функции любому значению $x \in X$ отвечает единственное значение $y \in Y$. Обратное, вообще говоря, неверно. Некоторым значениям функции y может отвечать несколько значений аргумента x.

Определение

Сужением функции f на множество $N \subset X$ называется функция $f\big|_N$, определенная следующим образом:

$$f\big|_N(x) = f(x), \quad \text{где } x \in N.$$

Определение

Две функции f и g на множестве M равны: $f = g$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in M$ имеет место равенство $f(x) = g(x)$.

Глава 2. Комплексные числа

2.1 История возникновения комплексных чисел

В современной математике комплексное число является одним из фундаментальнейших понятий, находящее применение и в “чистой науке”, и в прикладных областях. Понятно, что так было далеко не всегда.

В далекие времена, когда даже обычные отрицательные числа казались странным и сомнительным нововведением, необходимость расширения на них операции извлечения квадратного корня была вовсе неочевидной. Тем не менее, в середине XVI века математик Рафаэль Бомбелли вводит комплексные (в данном случае точнее сказать, мнимые) числа в оборот. Посмотрим, в чем была суть затруднений, доведших в итоге солидного итальянца до подобных крайностей.

Рис. 5: Рафаэль Бомбелли (итал. Rafael Bombelli, 1526–1572)

Существует распространенное заблуждение, что комплексные числа потребовались для того, чтобы решать квадратные уравнения. На самом деле, это совершенно не так: задача поиска корней квадратного уравнения никоим образом введение комплексных чисел не мотивирует.

Убедимся в этом. Всякое квадратное уравнение можно представить в виде: $x^2 = kx + b$. Геометрически, это означает, что мы хотим найти точки пересечения некоторой прямой $y = kx + b$ и параболы $y = x^2$. Проиллюстрируем это на рисунке.

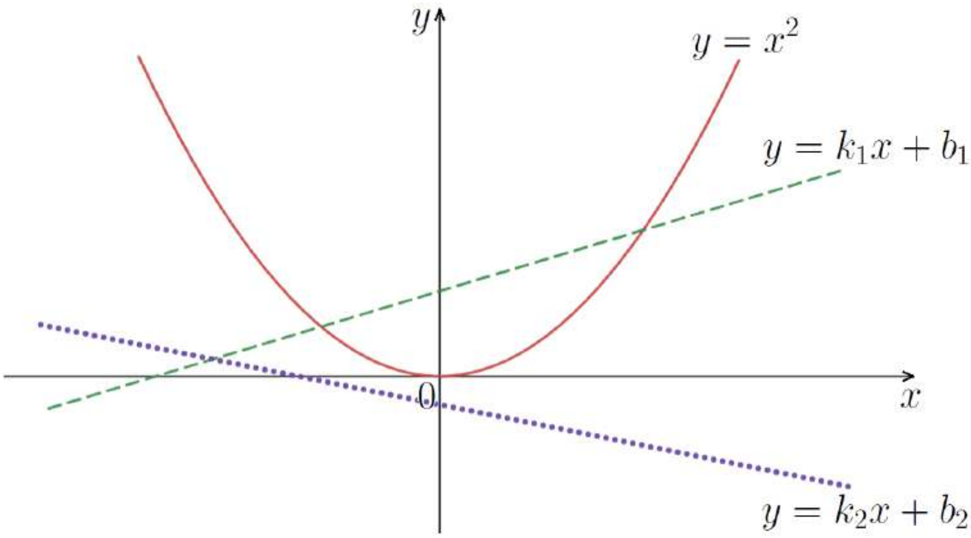


Рис. 6: Нахождение точек пересечения прямой $y = kx + b$ и параболы $y = x^2$.

Как известно, корни квадратного уравнения (в указанных выше обозначениях) находятся по следующей формуле: $x_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + b}$.

Оказываются возможными 3 варианта:

1. Подкоренное выражение положительно.

2. Подкоренное выражение равно нулю.

3. Подкоренное выражение отрицательно.

В первом случае имеются 2 различных корня, во втором – два совпадающих, в третьем – уравнение “не решается”. Все эти случаи имеют вполне наглядную геометрическую интерпретацию:

1. Прямая пересекает параболу (зеленая пунктирная прямая на рисунке).

2. Прямая касается параболы.

3. Прямая не имеет с параболой общих точек (фиолетовая точечно-пунктирная прямая на рисунке).

Ситуация проста, логична, непротиворечива. Пытаться извлекать квадратный корень из отрицательного числа нет совершенно никаких оснований. Никто и не пытался.

Обстановка существенно изменилась, когда пытливая математическая мысль добралась до кубических уравнений. Чуть менее очевидно, что используя некоторую несложную подстановку, всякое кубическое уравнение можно свести к виду: $x^3 = kx + b$. С геометрической точки зрения ситуация похожа на предыдущую: мы ищем точку пересечения прямой и кубической параболы. Взгляните на картинку:

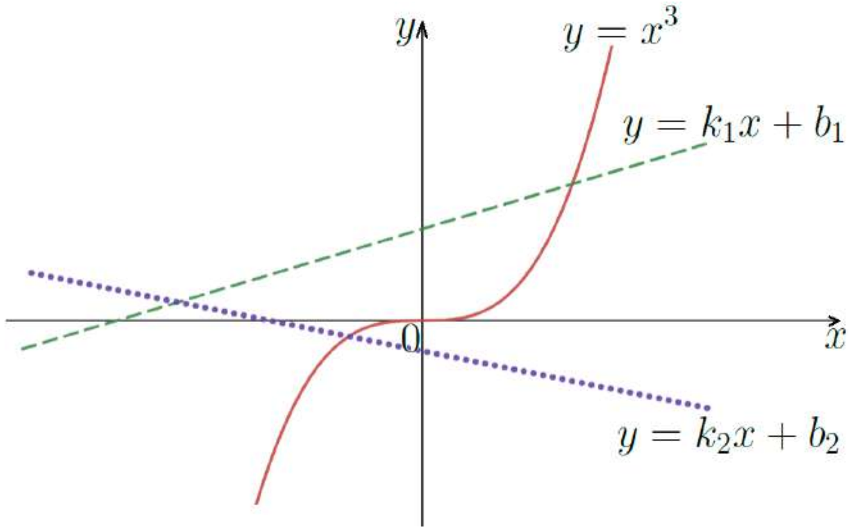


Рис. 7: Нахождение точек пересечения прямой $y = kx + b$ и параболы $y = x^3$.

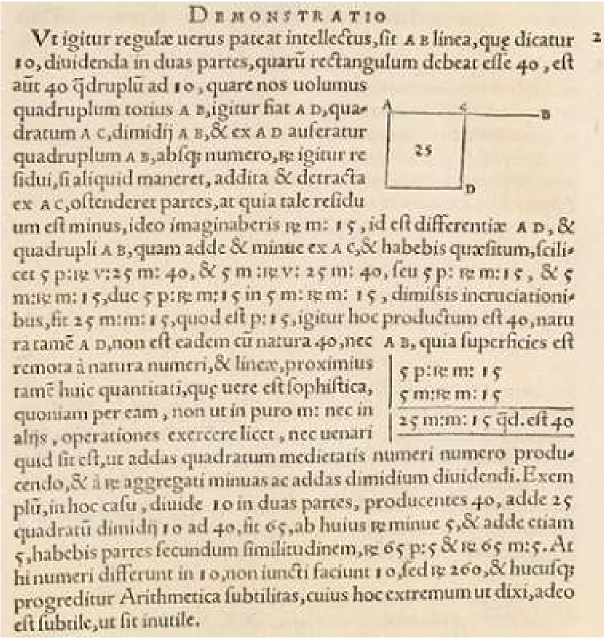
Существенное отличие от случая квадратного уравнения в том, что какую бы прямую мы ни взяли, она всегда пересечет параболу. То есть, уже из чисто геометрических соображений, кубическое уравнение всегда имеет хотя бы одно решение. Найти его можно, воспользовавшись формулой Кардано:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\Phi}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\Phi}}, \tag{2.1}$$

где

$$\Phi = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{3}\right)^3. \tag{2.2}$$

История появления формулы Кардано достаточно любопытна.



DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, ſit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarũ rectangulum debeat eſſe 40, eſt aũt 40 q̃druplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, abſq; numero, ℞ igitur reſidui, ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C, oſtenderet partes, at quia tale reſiduum eſt minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæſitum, ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſsis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod eſt p: 15, igitur hoc productum eſt 40, natura tamẽ A D, non eſt eadem cũ natura 40, nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamẽ huic quantitati, quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ, in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes ſecundum ſimilitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, ſed ℞ 260, & hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo eſt ſubtile, ut ſit inutile.

Рис. 8: Фрагмент статьи: решение кубических уравнений (формула Кардано)

В XVI веке в Европе были популярны азартные игры между математиками наподобие современных математических боев. Игроки должны были решить на скорость предложенные уравнения. Кто первый справлялся с задачей, выигрывал соревнование. В связи с этим придуманные приемы решения уравнений математики очень ценили и держали в секрете.

В 1534 году итальянский математик Никколо Тарталья получил вызов на состязание учёных от ученика профессора из Болоньи Сципиона дель Ферро — Антонио Фиоре. Готовясь к поединку, Тарталья за несколько дней нашёл способ решения уравнения третьей степени. Решив за два часа все предложенные ему задачи, он убедительно выиграл соревнование.

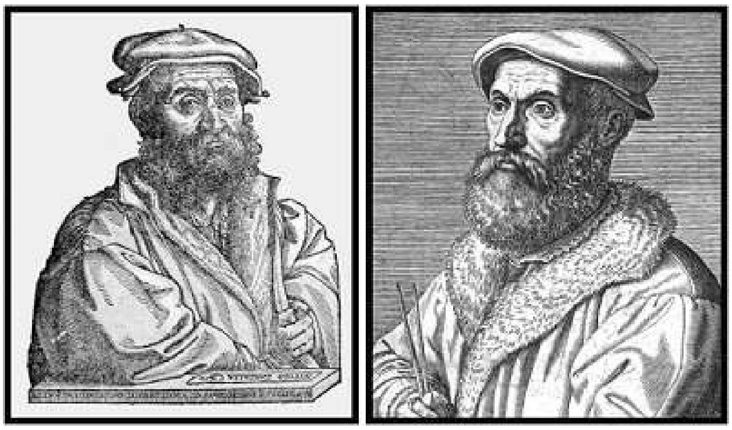


Рис. 9: Слева: Никколо Тарталья (итал. Niccolo Tartaglia, 1499—1557). Справа: Сципион дель Ферро (итал. Scipione del Ferro, 1465–1526)

Рис. 10: Математический диспут между Никколо Тарталья и Антонио Фиоре

По словам Тартальи, он самостоятельно открыл общий алгоритм решения кубических уравнений, несколько ранее найденный. Сципионом дель Ферро. В 1539 году Тарталья передал описание этого метода Джероламо Кардано, который поклялся не публиковать его без разрешения Тартальи. Несмотря на обещание, в 1545 году Кардано опубликовал этот алгоритм в работе “Великое искусство, или об алгебраических правилах”, и по этой причине метод вошёл в историю математики как “формула Кардано”.

Рис. 11: Джероламо Кардано (лат. Hieronymus Cardanus, 1501–1576)

Вопрос о том, действительно ли Тарталья независимо открыл метод дель Ферро, неоднократно обсуждался. Высказывалось предположение, что на самом деле Тарталья каким-то образом получил доступ к записям дель Ферро. В качестве косвенных доказательств этой гипотезы историки ссылались на то, что других серьёзных математических достижений у Тартальи не было. Однако прямых свидетельств в пользу указанного предположения найти не удалось.

Формула Кардано, без преувеличения, есть великое достижение математики начала-середины XVI века. Но есть у неё один нюанс. Возьмем классический пример, который рассматривал еще Рафаэль Бомбелли: $x^3 = 15x + 4$. Отсюда, $\Phi = -121$, соответственно,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{2.3}$$

Мы зашли в тупик. При том, что решение у уравнения, безусловно, есть.

Идея Рафаэля Бомбелли заключалась в следующем: давайте сделаем вид, что корень из отрицательного числа – это некоторое число. Мы, конечно, знаем, что таких чисел нет, но тем не менее, давайте представим, что оно существует и его, как обычные числа, можно складывать с другими, умножать, возводить в степень и так далее.

Используя подобный подход, Бомбелли установил, в частности, что:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$

и

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Давайте проверим:

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 =$$

$$= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}.$$

Заметим, в выкладках никаких предположений о свойствах квадратных корней из отрицательных чисел не предполагалось, кроме упомянутого выше допущения, что они ведут себя как “обычные” числа.

Подставляя значения кубических корней в формулу (2.3), получаем:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Это правильный ответ, который элементарно проверяется прямой подстановкой. Это был настоящий прорыв. Прорыв в комплексную плоскость.

Тем не менее подобные выкладки выглядят как некоторая магия, математический фокус. Отношение к ним, как к некоему трюку, сохранялось среди математиков еще очень долго. Собственно, придуманное Рене Декартом для корней из отрицательных чисел название “мнимые числа” вполне отражает отношение математиков тех времен к таким развлечениям. Однако, время шло, “трюк” применялся с неизменным успехом, авторитет “мнимых чисел” в глазах математического общества рос, сдерживаемый, однако, неудобством их использования.

Лишь получение Леонардом Эйлером (кстати, это именно он ввел ныне общеупотребительное обозначение i для мнимой единицы) знаменитой формулы

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

открыло комплексным числам дорогу в самые различные области математики и ее приложений. Но это уже совсем другая история.

Рис. 12: Слева: Рене Декарт (фр. Rene Descartes, 1596–1650). Справа: Леонард Эйлер (нем. Leonhard Euler, 1707–1783)

2.2 Основные понятия. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Определение

Комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных чисел, для которых определены следующие действия и отношения:

I. $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда: $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$;

II. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

III. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;

IV. Пара $(a, 0)$ отождествляется с вещественным числом a и обозначается как взаимно однозначное соответствие элементов: $(a, 0) \leftrightarrow a$.

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Для проверки корректности определения надо проверить согласованность пунктов I-III с правилами действий для вещественных чисел по IV.

Согласование пунктов I и IV. $(a, 0) = (c, 0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 0 = 0 \end{cases}$;

Пункты II и IV. $a + c \ \leftrightarrow \ (a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \ \leftrightarrow \ a + c$;

Пункты III и IV. $ac \ \leftrightarrow \ (a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0) \ \leftrightarrow \ ac$.

Определение

Элементы пары (a, b), обозначающей комплексное число z, имеют специальные названия:

$a = Re\ z$ – вещественная часть комплексного числа;

$b = Im\ z$ – мнимая часть комплексного числа.

Свойства действий с комплексными числами

1) $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$ – ассоциативность относительно сложения.

<u>Доказательство:</u>

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f) =$$

$= (a,b) + (c+e, d+f) = (a,b) + ((c,d) + (e,f)).$ ■

2) $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$ – коммутативность относительно сложения.

Доказательство:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b).$$ ■

3) Существование нулевого элемента.

Доказательство:

Нулевой элемент – это такой элемент, прибавление которого к любому комплексному числу не меняет последнего. Число $(0,0)$ является нулевым элементом: $(a,b) + (0,0) = (a,b)$. ■

Замечание

Нулевой элемент $(0,0)$ в множестве комплексных чисел соответствует вещественному числу 0.

4) Для любого комплексного числа существует противоположный элемент.

Доказательство:

Противоположный элемент к данному – это такой элемент, сумма с которым дает нулевой элемент $(0,0)$. Элемент $(-a,-b)$ является противоположным для (a,b) : $\quad (a,b) + (-a,-b) = (0,0)$. ■

5) $((a,b)\cdot(c,d))(e,f) = (a,b)((c,d)\cdot(e,f))$ – ассоциативность относительно операции умножения.

Доказательство:

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) =$$

$$= (a(ce-df) - b(cf+de), a(cf+de) + b(ce-df)) =$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ac - bd, ad + bc)(e, f) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f).$$

$\blacksquare$

6) $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$ – коммутативность относительно операции умножения.

Доказательство:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b). \quad \blacksquare$$

7) $((a, b) + (c, d))(e, f) = (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f)$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Доказательство:

$$((a, b)+(c, d))(e, f) = (a+c, b+d)\cdot(e, f) = ((a+c)e-(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e) =$$

$$= (ae+ce-bf-df, af+cf+be+de) = (ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+be) =$$

$$= (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f). \quad \blacksquare$$

8) Существование единичного элемента.

Доказательство:

Единичный элемент – это такой элемент, умножение на который любого комплексного числа не меняет последнего. Число $(1, 0)$ является единичным элементом:

$$(a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b). \quad \blacksquare$$

9) Для любого ненулевого элемента существует обратный.

Доказательство:

Пусть $(a, b) \neq (0, 0)$. Обратный элемент к (a, b) – это такой элемент, умножение (a, b) на который дает единичный элемент. Покажем, что комплексное число $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ является обратным к (a, b) :

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(a\frac{a}{a^2+b^2}-b\frac{-b}{a^2+b^2},\ a\frac{-b}{a^2+b^2}+b\frac{a}{a^2+b^2}\right)=$$
$$=(1,0).$$ ■

Определение

Множество элементов, для которых определены операции сложения и умножения, обладающие свойствами 1 – 9, называется полем.

Таким образом, проверив свойства действий с комплексными числами, мы доказали теорему:

Теорема 1 (об алгебраической классификации множества комплексных чисел)

Множество комплексных чисел образует поле.

Определение

Число $(a,-b)$ называется комплексно сопряженным к числу (a,b). Операция комплексного сопряжения обозначается следующим образом:

$$\overline{(a,b)}=(a,-b).$$

Произведение комплексно сопряженных чисел есть вещественное число:

$$(a,b)(a,-b)=(a^2+b^2,0)=a^2+b^2.$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

Для выполнения арифметических операций с комплексными числами оказывается удобным использовать алгебраическую форму записи, введя специальный символ i (так называемую мнимую единицу) для обозначения элемента $(0,1)$:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi,\quad \text{где } i=(0,1). \tag{2.4}$$

Заметим, что:

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1. \tag{2.5}$$

Замечание

При алгебраической форме записи комплексных чисел с ними можно обращаться как с вещественными, учитывая правило: $i^2 = -1$. Отметим, что мнимая единица i является чисто комплексным числом и на вещественной оси она отсутствует.

2.3 Вычитание и деление комплексных чисел

Мы доказали, что комплексные числа образуют поле. В любом поле помимо операций сложения и умножения существуют также операции вычитания и деления.

Теорема 2 (о вычитании комплексных чисел)

Пусть α и β – комплексные числа. Тогда существует единственное комплексное число x такое, что $\alpha + x = \beta$, а именно: $x = (-\alpha) + \beta$.

<u>Доказательство:</u>

Убедимся, что число $x = (-\alpha) + \beta$ удовлетворяет уравнению $\alpha + x = \beta$:

$$\alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0 + \beta = \beta.$$

Таким образом, мы доказали существование нужного элемента.

Проверим единственность. Пусть x является решением уравнения:

$\alpha + x = \beta$. Тогда оно будет иметь вид:

$$x = (-\alpha) + \alpha + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + \beta.$$

$\blacksquare$

Замечание

Число $x = (-\alpha) + \beta$ есть разность $\beta - \alpha$.

Теорема 3 (о делении комплексных чисел)

Пусть α и β – комплексные числа, причём $\alpha \neq 0$. Тогда существует единственное комплексное число x такое, что $\alpha x = \beta$, а именно:

$x = \alpha^{-1}\beta$. Символом α^{-1} обозначен элемент, обратный к α.

<u>Доказательство:</u>

Существование. Убедимся, что число $x = \alpha^{-1}\beta$ удовлетворяет уравнению $\alpha x = \beta$:

$$\alpha x = \alpha(\alpha^{-1}\beta) = (\alpha\alpha^{-1})\beta = \beta.$$

Проверим единственность. Пусть x является решением уравнения: $\alpha x = \beta$. Тогда оно будет иметь вид:

$$x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1}\alpha)x = \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}\beta.$$

■

Замечание

Число $\alpha^{-1}\beta$ есть частное от деления β на α: $\frac{\beta}{\alpha}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$. Возьмем комплексное сопряжение от $z_1 + z_2$:

$$\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

■

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2) + i\,(a_1 \cdot (-b_2) + a_2(-b_1)) =$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \overline{z_1 \cdot z_2}.$$

■

3) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (обобщение свойства 2).

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Доказательство:

Сведем доказательство формулы к тождеству путем эквивалентных преобразований:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow \Big/ \text{по свойству } 2 \Big/ \Leftrightarrow \overline{\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_1} \text{ (верно).}$$

■

2.4 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Любой паре вещественных чисел можно поставить в соответствие точку на плоскости. Значит любое комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить точкой на плоскости, отложив по оси абсцисс вещественную часть x, а по оси ординат – мнимую часть y комплексного числа. Ось OX назовем вещественной осью, а ось OY – мнимой осью комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Поставим комплексному числу z в соответствие радиус-вектор $\vec{r}$ с началом в начале координат и концом в точке (x, y).

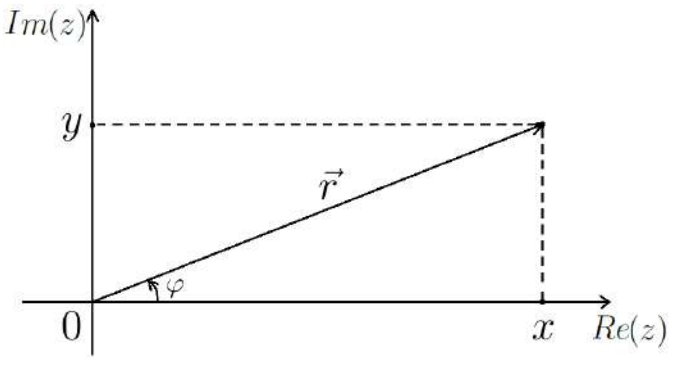


Рис. 13: Изображение числа $z = x + iy$ на комплексной плоскости

Сложение (вычитание) комплексных чисел означает сложение (вычитание) соответствующих радиус-векторов. А вот другие действия в алгебраической форме делать неудобно. Введем тригонометрическую форму записи. Для этого определим модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$:
$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа. Заметим, что модуль комплексного числа совпадает с длиной радиус-вектора r.

Аргументом φ комплексного числа z назовем угол между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором $\vec{r}$, отсчитываемый в положительном направлении против часовой стрелки. Заметим, что в начале координат $(0, 0)$ аргумент φ не определен и тригонометрическую форму ввести нельзя. При $x \neq 0$ для аргумента справедлива следующая формула: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Аргумент определяется неоднозначно. Добавление полного оборота 2π не меняет положения радиус-вектора $\vec{r}$. В связи с этим выделяют главное значение аргумента $arg\ z$, лежащее в полуинтервале $[0, 2\pi)$:
$0 \leq arg\ z < 2\pi$ и полное значение аргумента:

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Запишем комплексное число z в алгебраической форме:

$$z = x + yi,$$

и представим x и y через модуль r и аргумент φ числа z:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.6}$$

есть запись комплексного числа z в тригонометрической форме.

2.5 Действия с комплексными числами в тригонометрической форме

1. Умножение.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2.7}$$

Как видим, при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы – складываются.

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{2.8}$$

Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы – вычитаются.

Свойство

Если в сумме, разности, произведении, частном или их комбинации заменить все комплексные числа на их сопряжённые, то и результат действий заменится на сопряжённый.

3. Возведение в степень

Пусть n – натуральное число. Тогда из формулы (2.7) умножения комплексных чисел нетрудно получить формулу для возведения числа в степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \tag{2.9}$$

4. Извлечение корня n-ой степени

Пусть n – натуральное число.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi). \tag{2.10}$$

Найдем ρ и ψ. Возведем обе части формулы (2.10) в степень n:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)).$$

Равенство комплексных чисел означает, что их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} r = \rho^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Остсюда:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{2.11}$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ ,\ldots,\ n-1$. Здесь $\sqrt[n]{r}$ означает арифметический корень из положительного вещественного числа r.

Пример

Найдем все значения $\sqrt[3]{1}$.

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1, \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Изобразим значения $\sqrt[3]{1}$ на комплексной плоскости:

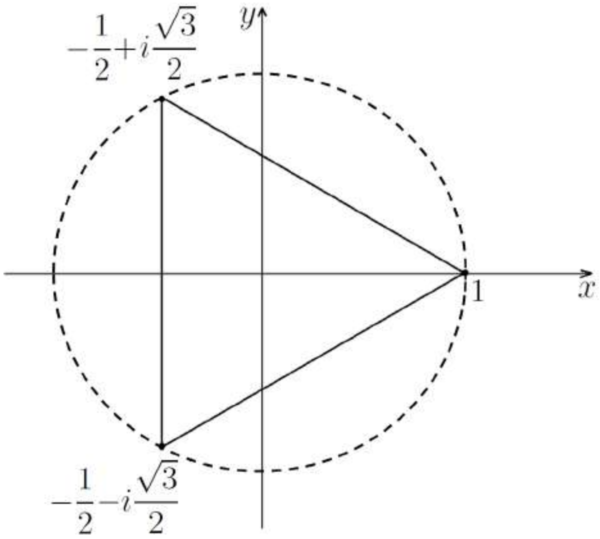


Рис. 14: Корни $\sqrt[3]{1}$ на комплексной плоскости

Все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ (в данном случае на единичной окружности) с центром в точке 0 и являются вершинами правильного n-угольника.

2.6 Показательная форма записи комплексного числа

В 1740 году Леонард Эйлер в книге "Введение в анализ бесконечно малых" предложил ввести экспоненту с мнимым показателем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

При помощи формулы Эйлера нетрудно выразить обычные тригонометрические функции sin и cos через введенную экспоненту $e^{i\varphi}$. Действительно,

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Сложив эти два уравнения, получим формулу для $\cos\varphi$:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{2.14}$$

Вычитая из (2.12) формулу (2.13), получим выражение для $\sin\varphi$:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi \;\Leftrightarrow\; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{2.15}$$

Используя формулу (2.12), можно преобразовать тригонометрическую форму записи комплексного числа в показательную:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (2.16)$$

Несмотря на то, что определение экспоненты с мнимым показателем (2.12) содержит только sin и cos, введенная таким образом функция обладает всеми свойствами показательной. Проверим свойства показательной функции:

1) Умножение.

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2) =$$

$$= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

То есть получили обычное свойство сложения показателей экспонент при их перемножении.

2) Возведение в степень.

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi}.$$

3) Деление.

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

2.7 Функции комплексной переменной

При помощи формулы Эйлера можно определить элементарные функции на комплексной плоскости.

1. Показательная функция комплексного аргумента.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2.17)$$

2. Тригонометрические функции комплексного аргумента.

Поскольку показательная функция комплексного аргумента уже определена в формуле (2.17), мы можем определить тригонометрические функции на комплексной плоскости по формулам Эйлера (2.15), (2.14):

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \quad \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (2.18)$$

Нетрудно убедиться, что для $\sin z$ и $\cos z$ будут верны обычные тригонометрические формулы:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 \quad \text{и так далее.}$$

Замечание

Синус и косинус комплексного аргумента введены таким образом, что если аргумент z вещественный: $z = \varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, то $\sin z$ и $\cos z$ переходят в обычные вещественные $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ по формулам Эйлера (2.15) и (2.14).

3. Гиперболические функции комплексного аргумента

Гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс:

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}, \quad \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z}.$$

Свойства:

$$\mathrm{sh} z = \frac{1}{i} \sin(iz),$$

$$\mathrm{ch} z = \cos(iz),$$

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1,$$

$$\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh} z_1 \mathrm{ch} z_2 + \mathrm{ch} z_1 \mathrm{sh} z_2,$$

$$\mathrm{ch}(z_1 + z_2) = \mathrm{ch} z_1 \mathrm{ch} z_2 + \mathrm{sh} z_1 \mathrm{sh} z_2,$$

$$\mathrm{sh2z} = 2\mathrm{sh} z \mathrm{ch} z,$$

$$\mathrm{ch2z} = \mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z,$$

$$\mathrm{th} 2z = \frac{2\mathrm{th} z}{1 + \mathrm{th}^2 z}.$$

2.8 Логарифмирование

Определение

Натуральным логарифмом комплексного числа z называется степень w, в которую надо возвести число e, чтобы получить z, то есть выполнено: $e^w = z$.

Обозначение: $w = \ln z$.

Утверждение

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 z_2). \tag{2.19}$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть $w_1 = \ln z_1$ и $w_2 = \ln z_2$, тогда $z_1 = e^{w_1}, \quad z_2 = e^{w_2}$. Следовательно, $z_1 z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2} = e^{w_1+w_2}$. Логарифмируя обе части уравнения, получаем искомую формулу.

■

Представим комплексное число z в показательной форме $z = |z|e^{iarg\ z}$ и возьмем от него логарифм:

$$\ln z = \ln\left(|z|e^{iarg\ z}\right) = \Big/\text{формула (2.19)}\Big/ = \ln|z| + \ln e^{iarg\ z} = \ln|z| + iarg\, z. \tag{2.20}$$

В формуле (2.20) вместо главного значения аргумента $arg\ z$ можно брать полное значение аргумента $Arg\ z$. Поэтому каждое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество логарифмов. Таким образом, логарифм есть бесконечнозначная функция: ее вещественная часть определяется однозначно, а мнимая – с точностью до слагаемого, кратного 2π. Для того чтобы отличать многозначную функцию от ее однозначной ветви, будем обозначать её специальным символом:

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln\ |z| + iArg\ z = \ln\ |z| + i(\varphi + 2\pi k). \tag{2.21}$$

Замечание

Ветвью многозначной функции будем называть однозначную функцию, которая получается из многозначной при фиксированном выборе аргумента.

Итак, мы получили две различных функции: главное значение логарифма $\ln\ z$, определяемое формулой (2.20), и полное значение логарифма $\mathrm{Ln}\ z$, определяемое формулой (2.21).

Комплексная степень комплексного числа

Возведение в комплексную степень комплексного числа – это обобщение операции возведения в степень для комплексных чисел.

Определение

Пусть z_1 и z_2 – два комплексных числа. При помощи логарифма можно определить $z_1^{z_2}$:

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \mathrm{Ln} z_1} \qquad \text{– многозначная функция.} \tag{2.22}$$

Примеры

1) $i^i = e^{i\mathrm{Ln}i} = \Big/ \mathrm{Ln}i = \ln|i| + iArg\, i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Big/ =$
$= e^{i^2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$.

2) $\sqrt[i]{i} = i^{\frac{1}{i}} = i^{-i} = e^{-i\mathrm{Ln}\ i} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$.

Замечание

При операциях с комплексными числами может возникнуть следующий парадокс:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Ошибка заключается в неправильном выборе значений корней. При проведении операций с многозначными функциями следует внимательно следить за выбором аргумента (то есть соответствующей ветви функции). Правильная формула будет такой:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{e^{i\pi}}\sqrt{e^{i\pi}} = \sqrt{e^{2\pi i}} = e^{\pi i} = -1.$$

Изменение ветви функции в парадоксе произошло при замене $e^{2\pi i}$ на $e^{0 \cdot i} = 1$.

Глава 3. Полиномы

3.1 Основные понятия. Действия с полиномами

Определение

Полиномом (многочленом) степени n называется функция

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z, \quad \text{где } z \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0. \tag{3.1}$$

Для работы с полиномами полезно уметь раскладывать их на множители. Выделить множитель можно с помощью операции деления полинома на этот множитель. Однако, в отличие от операций сложения и умножения, деление может вывести функцию из множества полиномов. То есть операция деления в множестве полиномов, вообще говоря, не определена. Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Деление полиномов

Пусть $\varphi(z)$ – полином степени $m \leq n$. Тогда $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \varphi(z) \cdot Q(z) + R(z), \tag{3.2}$$

где $Q(z)$ – полином степени $\leq n - m$ (частное от деления $f(z)$ на $\varphi(z)$), $R(z)$ – полином степени $< m$ (остаток от деления $f(z)$ на $\varphi(z)$).

Частное и остаток можно находить по правилу деления полиномов в столбик аналогично делению чисел. Например:

$$\frac{z^4 + 3z^2 + z + 2}{z^2 + 1} = z^2 + 2 + \frac{z}{z^2 + 1}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^4 & +3z^2 & +z & +2 & z^2+1 \\ \cline{5-5}
z^4 & +z^2 & & & z^2+2 \\ \cline{1-3}
 & 2z^2 & +z & +2 & \\
 & 2z^2 & & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & z & &
\end{array}$$

Определение

Значения z, при которых $f(z) = 0$, называются корнями полинома.

Попробуем выделить из полинома множитель $z - a$. Разделим $f(z)$ на $\varphi(z) = z - a$. Тогда по формуле (3.2) частное $Q(z)$ будет полиномом $(n-1)$-ой степени со старшим коэффициентом a_0, остаток R – полиномом нулевой степени, то есть постоянным числом:

$$f(z) = (z - a)Q(z) + R. \tag{3.3}$$

Подставим в эту формулу $z = a$ и получим:

$$R = f(a). \tag{3.4}$$

Таким образом, мы доказали теорему Безу:

Теорема 1 (Теорема Безу)

Остаток, получаемый при делении полинома на $(z - a)$, равен значению полинома в точке a.

Следствие

Для того чтобы полином делился на $(z - a)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число $z = a$ было корнем полинома.

Доказательство:

Необходимость. Если полином делится на $(z - a)$, то остаток R от деления равен нулю. Значит по теореме Безу $R = f(a) = 0$, то есть a – корень полинома.

Достаточность. Если a – корень полинома $f(z)$, то $f(a) = 0$. Следовательно, по теореме Безу, остаток $R = f(a) = 0$.

■

Итак, если a – корень полинома $f(z)$, то полином представим в виде:

$$f(z) = (z - a)Q(z). \tag{3.5}$$

Для отыскания остальных корней нужно решать уравнение $(n - 1)$-ой степени $Q(z) = 0$.

Рис. 15: Слева: Этьен Безу (фр. Etienne Bezout, 1730–1783). По центру: титульный лист оригинальной работы Э. Безу: “Курс по математике”. Справа: страницы из труда (разбор примера)

Теорема 2 (Основная теорема алгебры)

Любой полином степени ≥ 1 имеет по крайней мере один корень (комплексный).

Теорема доказывается в курсе “Теория функций комплексной переменной”.

Теорема 3 (о количестве корней полинома)

Полином n-ой степени не может иметь более n комплексных корней.

Доказательство:

Пусть z_1 – корень. Тогда по формуле (3.5) получим:

$$f(z) = (z - z_1)(a_0 z^{n-1} + (a_1 + a_0 z_1) z^{n-2} + \ldots).$$

По основной теореме алгебры частное тоже имеет корень. Обозначим его за z_2 и воспользуемся формулой (3.5) снова:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2)(z^{n-2} + \ldots),$$

и так далее:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n). \tag{3.6}$$

Таким образом, полином разложился на множители. Заметим, что у него ровно n корней с учетом кратности. ■

Следствие 1

Если известно, что некоторый полином степени $\leq n$ имеет более n различных корней, то все коэффициенты и свободные члены полинома равны нулю.

Доказательство:

Вынесем из полинома множители, соответствующие n корням. Тогда он примет вид (3.6). Обращение полинома в ноль еще в одной точке означает, что коэффициент $a_0 = 0$, то есть полином равен нулю тождественно.

■

Следствие 2

Если значения двух полиномов степени $\leq n$ совпадают более чем при n различных значениях z, то эти полиномы тождественно равны.

Доказательство:

Если $f_1(z) = f_2(z)$, то z – корень полинома $f_1(z) - f_2(z)$. Таким образом, у полинома $f_1(z) - f_2(z)$ более n корней. Значит по следствию 1 он тождественно равен нулю, то есть $f_1(z) \equiv f_2(z)$. ■

Теорема 4 (Единственность разложения полинома на множители)

Разложение полинома на множители единственно.

Доказательство:

От противного. Пусть есть два разложения:

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n) = f(z) = b_0(z - z_1')(z - z_2') \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n').$$

При $z = z_1$ левая часть уравнения обращается в нуль, а значит и правая часть равна нулю. Следовательно, среди чисел z_k' есть $z_k' = z_1$ (пусть для определенности $z_1' = z_1$). Сократим левую и правую части равенства на

$(z - z_1)$:

$$a_0(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n) = b_0(z - z_2') \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n'). \tag{3.7}$$

Отметим, что равенство (3.7) справедливо при всех z кроме $z = z_1$ (так как мы поделили уравнение на $(z - z_1)$.) А нам бы хотелось получить тождественное равенство (то есть во всех точках). Но поскольку точек, где выполнено равенство бесконечно много (все точки комплексной плоскости кроме одной: $z = z_1$), то по следствию 2 полиномы равны тождественно.

Повторим операцию для $z = z_2$ и так далее, пока не дойдем до равенства констант: $a_0 = b_0$. То есть разложения полиномов на множители совпали. ■

Соберём в разложении на множители полинома
$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n)$ одинаковые множители:

$$f(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_m)^{k_m},$$

где корни $z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_m$ различны и $k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_m = n$. Степень k_s множителя $(z - z_s)^{k_s}$ определяет кратность корня z_s.

Определение

Корень $z = a$ полинома $f(z)$ имеет кратность k, если $f(z)$ делится на $(z - a)^k$ и не делится на $(z - a)^{k+1}$.

3.2 Полиномы с вещественными коэффициентами

Пусть коэффициенты полинома

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{3.8}$$

есть вещественные числа. Предположим также, что комплексное число $z = a + ib$ (где $b \neq 0$) – корень полинома кратности k, то есть:

$$f(z) = (z - (a + ib))^k \varphi(z), \tag{3.9}$$

где $\varphi(z)$ – полином степени $n-k$ (для которого $a+ib$ не является корнем).

Замечание

Если z является переменной величиной, то будем обозначать ее как: $z = x + iy$, в то время как $a + ib$ – это одно из значений переменной z. Возьмем комплексное сопряжение от полинома $f(z)$ в формуле (3.8):

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ \dots \ + a_n} = \overline{a_0} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ \dots \ + \overline{a_n} =$$

$$\Big/ \text{поскольку } a_0, \ a_1, \ \dots, \ a_n \text{ – вещественные числа } \Big/$$

$$= a_0 \overline{z}^n + a_1 \overline{z}^{n-1} + \ \dots \ + a_n = f(\overline{z}). \tag{3.10}$$

Так как по предположению $z = a + ib$ является корнем полинома, то выполнено:

$$f(a+ib) = 0 = \overline{f(a+ib)} = \Big/ \text{формула (3.10)} \Big/ = f(\overline{a+ib}) = f(a-ib).$$

Следовательно, $a - ib$ – тоже корень полинома $f(z)$, а значит и $\varphi(z)$ (по формуле (3.9)). В итоге из полинома $f(z)$ будет вынесено два множителя, произведение которых есть полином с вещественными коэффициентами:

$$(z - (a+ib))(z - (a-ib)) = (z-a)^2 + b^2.$$

Таким образом,

$$f(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ – полином с вещественными коэффициентами (по правилу деления полиномов в столбик коэффициенты частного получаются с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, при которых из вещественных чисел комплексные появиться не могут).

Для полинома $f_1(z)$ число $z = a+ib$ будет корнем кратности $k-1$. Из него также можно вынести пару сомножителей: $(z-(a+ib))(z-(a-ib))$. И так далее повторяем процедуру k раз. Следовательно, мы нашли корень $a - ib$ кратности не меньше k. Но больше k кратности быть не может, так как в этом случае кратность корня $a + ib$ тоже станет большей, что противоречит исходным предположениям. Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5 (о комплексной сопряженности корней)

Если полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + ib$, то он имеет и сопряжённый корень $a - ib$ той же кратности.

Следствие

Полином с вещественными коэффициентами раскладывается на вещественные множители:

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

где $x_1,\ \ldots,\ x_r$ – вещественные корни. Множитель второй степени происходит из пар комплексно сопряжённых корней кратности $l_1,\ \ldots,\ l_t$.

3.3 Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами

Разложим полином на множители:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) =$$

$$= a_0(z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \ldots + (-1)^kS_kz^{n-k} + \ldots + (-1)^nS_n),$$

где S_k – сумма всевозможных произведений из чисел z_s по k сомножителей в каждом. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0},\quad S_2 = \frac{a_2}{a_0},\ \ldots\ldots,\ S_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

то есть доказали теорему Виета:

Рис. 16: Слева: Франсуа Виет (фр. Fransois Viete, 1540–1603). По центру: титульный лист оригинальной работы Ф. Виета: “Математика”. Справа: страницы из труда (теорема)

Теорема 6 (Теорема Виета)

Пусть $z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots z_n$ – корни полинома $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$. Тогда имеет место соотношение:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \ \ldots\ldots \ + z_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_1 \cdot z_n + z_2 \cdot z_3 + \ldots + z_2 \cdot z_n + \ \ldots\ldots \ + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Глава 4. Пределы

4.1 Предел последовательности

Определение

Если любому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$.

Примеры последовательностей

Натуральный ряд $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots, n,\ \ldots\ldots$ представляет собой последовательность. При этом члены натурального ряда совпадают со своими номерами. Естественным обобщением натурального ряда является арифметическая прогрессия, то есть последовательность вида:

$$x_1 = a,\ x_2 = a + d,\ x_3 = a + 2d,\ \ldots\ldots, x_n = a + (n-1)d,\ \ldots\ldots$$

Геометрическая прогрессия – это последовательность вида:

$$x_1 = a,\ x_2 = aq,\ x_3 = aq^2,\ \ldots\ldots, x_n = aq^{n-1},\ \ldots\ldots$$

Определение

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что: $\forall n > N$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$. Символьная запись этого определения такова:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ (или } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a) \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0:\ \forall n > N:\ |x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Замечание

Не умаляя общности определения (4.1), можно считать N натуральным числом, поскольку если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполнено для некоторого вещественного N, то найдется и натуральное число $\widetilde{N}$ (например, $\widetilde{N} = [N] + 1$) такое, что $\forall n > \widetilde{N}$ будет выполнено: $|x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому далее, где это удобно, будем выбирать N натуральным числом.

Пример

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. В соответствии с определением предела нам следует для любого заданного $\varepsilon > 0$ показать, что все члены последовательности с достаточно большими номерами удалены от 0 не более чем на ε, то есть выполнено неравенство:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Решим неравенство:

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; /\text{так как } n > 0/ \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < \sqrt{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, если выбрать $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то для всех $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = N$ будет выполнено неравенство (4.2), что и требуется в определении предела.

Математическое понятие предела вполне соответствует пределу в обыденном смысле. А именно, утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что с ростом номера члены последовательности $\{x_n\}$ сгущаются и неограниченно приближаются к точке a. Для рассмотренного примера это показано на рисунке:

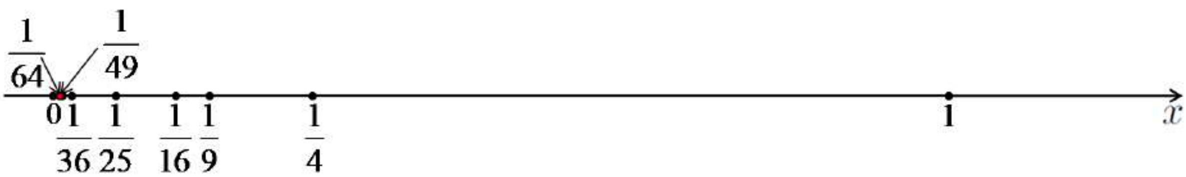


Рис. 17: Последовательность $\{\frac{1}{n^2}\}$

Определение

Последовательность, имеющая пределом нуль, называется бесконечно малой.

Теорема 1 (об определении предела на языке бесконечно малых)

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы разность $\alpha_n = x_n - a$ была бесконечно малой.

Доказательство:

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\;\exists N > 0:\; \forall n > N:\; |\alpha_n - 0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

С другой стороны:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\;\exists N > 0:\; \forall n > N:\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

Очевидно, что эти утверждения эквивалентны.

■

Теорема 2 (о сгущении последовательности к предельному значению)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a > p$ $(a < q)$, то и все значения x_n, начиная с некоторого номера, тоже будут $> p$ $(< q)$.

Доказательство:

Пусть $a > p$. Выберем ε такое, что: $0 < \varepsilon < a - p$. Тогда по определению предела существует N такое, что для любого $n > N$ выполнено:

$$|x_n - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \;\Rightarrow\; x_n > a - \varepsilon > p,$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается для $a < q$.

■

Следствие 1

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$ (< 0), то, начиная с некоторого номера, будет выполнено: $x_n > 0$ (< 0).

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует число $M > 0$ такое, что все члены последовательности по модулю не превосходят $M:\; |x_n| \le M$.

Следствие 2

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Доказательство:

Выберем число $M' > |a| \ \Leftrightarrow \ -M' < a < M'$. В теореме 2 положим $p = -M'$, $q = M'$. Тогда существует натуральное число N такое, что для любого $n > N$:

$$p < x_n < q \ \Leftrightarrow \ -M' < x_n < M' \ \Leftrightarrow \ |x_n| < M'.$$

Таким образом, все члены последовательности с номерами, большими, чем N, ограничены числом M'. Оставшихся членов последовательности – конечное число: $x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_N$.

Выберем $M = \max\{|x_1|,\ |x_2|,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ |x_N|,\ M'\}$. Тогда для любого n будет выполнено: $|x_n| \le M$.

■

Замечание

Следствие 2 нельзя обратить: не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Например:

$$x_n = (-1)^n.$$

Теорема 3 (о единственности предела)

Последовательность не может иметь двух пределов.

Доказательство:

Будем доказывать от противного. Пусть есть два предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a < b$. Тогда найдется такое число r, что: $a < r < b$.

Так как $x_n \to a$ и $a < r \underset{\text{по теореме 2}}{\Rightarrow}$ существует число N' такое, что для любого $n > N'$: $x_n < r$.

Так как $x_n \to b$ и $b > r \underset{\text{по теореме 2}}{\Rightarrow}$ существует число N'' такое, что для любого $n > N''$: $x_n > r$. Выберем $N = \max\{N',\ N''\}$. Тогда при $n > N$ будут одновременно выполнены оба неравенства: $x_n > r$ и $x_n < r$. Противоречие. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\forall E > 0 \;\; \exists N : \; \forall n > N : \; |x_n| > E. \tag{4.3}$$

Определение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \; (x_n \to +\infty), \; \text{если} \forall E > 0 \;\; \exists N : \; \forall n > N : \; x_n > E. \tag{4.4}$$

Определение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \; (x_n \to -\infty), \; \text{если } \forall E > 0 \;\; \exists N : \; \forall n > N : \; x_n < -E. \tag{4.5}$$

Теорема 4 (о связи бесконечно больших и бесконечно малых)

Если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то $\{\alpha_n\} : \; \alpha_n = \frac{1}{x_n}$ – бесконечно малая.

<u>Доказательство:</u>

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $E = \frac{1}{\varepsilon}$. Поскольку $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то $\exists N : \; \forall \; n > N : \; |x_n| > E = \frac{1}{\varepsilon} \; \Leftrightarrow \; |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая.

$\blacksquare$

То же самое рассуждение приводит и к обратной теореме:

Теорема 5 (о связи бесконечно малых и бесконечно больших)

Если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая, то $\{\alpha_n\} : \; \alpha_n = \frac{1}{x_n}$ – бесконечно большая.

Теорема 6 (предельный переход в неравенстве)

Пусть для любого n выполнено: $x_n \geq y_n$. Предположим также, что существуют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \; \lim_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда $a \geq b$.

<u>Доказательство:</u>

Будем доказывать от противного. Пусть $a < b$. Тогда найдется r такое, что: $a < r < b$. Значит по теореме 2 существует N' такое, что при $n > N'$ выполнено: $x_n < r$. С другой стороны, по теореме 2 существует N'' такое, что при $n > N''$ выполнено: $y_n > r$. Выберем $N = \max\{N', N''\}$. Тогда при $n > N$ будут выполнены оба неравенства: $x_n < r$ и $y_n > r$. Следовательно, $x_n < y_n$, что противоречит условию теоремы.

■

Замечание

Если для членов последовательности выполнено строгое неравенство: $x_n > y_n$, то для членов последовательности выполнено лишь следующее: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
Например: $\frac{1}{n} > \frac{1}{(n+1)^2}$. Однако, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Теорема 7 (правило двух милиционеров)

Пусть для любого n выполнено: $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\{y_n\}$ имеет предел a : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

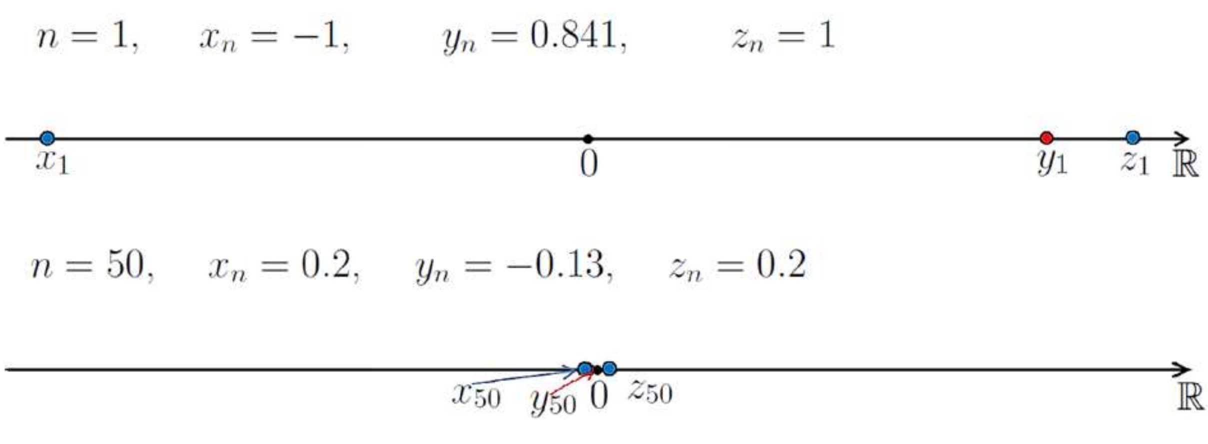


Рис. 18: Правило двух милиционеров для последовательности $x_n = -\frac{1}{n}$, $z_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$

Доказательство:

Пусть $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N' : \forall n > N' : a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.
С другой стороны:

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \;\Rightarrow\; \exists N'' :\; \forall n > N'' :\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$
Выберем $N = \max\{N',\; N''\}$. Тогда для $n > N$ будут выполнены все неравенства: $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon \;\Rightarrow\; a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; |y_n - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

■

4.2 Арифметические операции над последовательностями и их пределы

Лемма 1

Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то их сумма $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – тоже бесконечно малая.

Доказательство:

Пусть $\varepsilon > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \;\Rightarrow\; \exists N' :\; \forall n > N' :\; |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$
$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \;\Rightarrow\; \exists N'' :\; \forall n > N'' :\; |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Пусть $N = \max\{N',\; N''\}$. Тогда для $n > N$ будет выполнено:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$, то есть последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая.

■

Лемма 2

Если последовательность $\{x_n\}$ – ограниченная, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ – бесконечно малая.

Доказательство:

Поскольку $\{x_n\}$ – ограничена, то существует число $M > 0 :$
$\forall n :\; |x_n| \le M$. С другой стороны, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists N :\; \forall n > N :\; |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Значит $|x_n\alpha_n| = |x_n||\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$, то есть последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ – бесконечно малая.

■

Теорема 8 (о сумме (разности) пределов)

Пусть существуют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда существует предел суммы (разности) этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b. \tag{4.6}$$

Доказательство:

По теореме 1 последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде: $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые. Значит $x_n \pm y_n = a \pm b + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n).}_{\text{бесконечно малая}}$ Отсюда по теореме 1: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

■

Теорема 9 (о произведении пределов)

Пусть существуют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда существует предел произведения этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab. \tag{4.7}$$

Доказательство:

По теореме 1 последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде: $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые. Значит

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)}_{\text{бесконечно малая}}.$$

Отсюда по теореме 1: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$. ■

Замечание

Теоремы 8 и 9 верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Теорема 10 (об отношении пределов)

Пусть существуют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. Тогда существует предел отношения этих последовательностей, равный отношению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}. \tag{4.8}$$

Доказательство:

Так как $b \neq 0$, то найдется число $r > 0:\ |b| > r > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b| > r$. Тогда по теореме 2 $\exists N:\ \forall n > N:\ |y_n| > r > 0$. Будем далее рассматривать только такие $n > N$.

По теореме 1 последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде: $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые. Значит

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b(b+\beta_n)}}_{\text{ограничена}} \underbrace{(b\alpha_n - a\beta_n)}_{\text{бесконечно малая}}.$$

$$\Big/ \left|\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right| = \left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|r} \text{ – ограничена некоторым числом} \Big/$$

Следовательно, по лемме 2 последовательность $\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\}$ – бесконечно малая, а значит по теореме 1 будет выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

■

В теоремах $8 - 10$ предполагается существование конечных пределов x_n и y_n. Если это не так, то может возникнуть неопределённость, когда в общем виде ничего сказать нельзя: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Пример раскрытия неопределенности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = /[\infty-\infty]/ = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Определение

Число a есть супремум (точная (наименьшая) верхняя граница) множества $\{x_n\}:\ \sup\{x_n\}=a$, если выполнено:

$$\begin{cases} x_n \le a \quad \forall n, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists N:\ x_N > a-\varepsilon. \end{cases} \tag{4.9}$$

Поясним смысл второй строчки в системе (4.9). При попытке уменьшить верхнюю границу на ε найдётся номер N такой, что: $x_N > a-\varepsilon$, то есть x_N превысит нашу новую верхнюю границу $a-\varepsilon$.

Определение

Число a есть инфимум (точная (наибольшая) нижняя граница) множества $\{x_n\}:\ \inf\{x_n\}=a$, если:

$$\begin{cases} x_n \ge a \quad \forall n, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists N:\ x_N < a+\varepsilon. \end{cases} \tag{4.10}$$

4.3 Монотонная последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если для любых $n,m:\ n>m$ выполнено: $x_n>x_m$ $(x_n\ge x_m)$.
Обозначение: $x_n\uparrow$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей (невозрастающей), если для любых $n,m:\ n>m$ выполнено: $x_n<x_m$ $(x_n\le x_m)$.
Обозначение: $x_n\downarrow$.

Последовательности всех этих типов называются монотонными.

Теорема 11 (о пределе монотонной последовательности)

Монотонная последовательность всегда имеет предел.

Если монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет конечный предел, в противном случае она стремится к $+\infty$. Если монотонно убывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, то она имеет конечный предел, в противном случае она стремится к $-\infty$.

Доказательство:

Рассмотрим возрастающую последовательность $\{x_n\}$, ограниченную сверху. Тогда для множества её значений $\{x_n\}$ существует $\sup\{x_n\} = a$. Это и есть предел x_n. Действительно, по определению супремума: для любого n выполнено: $x_n \le a$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $x_N > a - \varepsilon$. Так как последовательность монотонно возрастает, то при $n > N$ имеет место следующее неравенство: $x_n \ge x_N > a - \varepsilon$. Таким образом:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \le a \\ x_n > a - \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 \le a - x_n < \varepsilon\ \Rightarrow\ |x_n - a| < \varepsilon\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

что и требовалось.

Пусть теперь возрастающая последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Тогда $\forall\ E > 0\ \exists\ N:\ \ x_N > E$. Из монотонного возрастания следует, что для $\forall\ n > N:\ \ x_n \ge x_N > E\ \ \Rightarrow\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (по определению бесконечного предела).

Для убывающей последовательности – аналогично.

$\blacksquare$

Пример

Найдем предел последовательности, заданной рекуррентно:

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}.$$

Докажем по индукции, что $a_n < 1$.

База. $a_1 = 0 < 1$ (выполнено).

Переход $n \to n+1$.

Пусть $a_n < 1$. Тогда $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} < \frac{1+3}{4} = 1$.

$\blacksquare$

Итак, $\forall\, n:\ a_n < 1 \ \Rightarrow\ 3a_n < 3 \ \Rightarrow\ 4a_n < 3 + a_n \ \Rightarrow\ a_n < \frac{a_n+3}{4} = a_{n+1}$, то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху числом 1. Значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \le 1$. Для того чтобы найти a, перейдём к пределу в соотношении $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$:

$$a = \frac{a+3}{4} \ \Rightarrow\ a = 1, \ \text{ то есть: } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

4.4 Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n, \tag{4.11}$$

$$\text{где } \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(n-k+1)}{k!} \ \text{ и } \ 0! = 1.$$

Тогда:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = /\text{По формуле бинома Ньютона}/ =$$

$$= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + \ \ldots\ + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Действительно, все члены в полученной сумме положительны. Если перейти от x_n к x_{n+1}, то в сумме добавится ещё одно положительное слагаемое. Каждый из написанных членов увеличится, так как $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ заменится на

$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)$. Таким образом, $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность возрастает. Докажем, что она ограничена сверху. Заменим все члены в скобках на единицы (тем самым, мы увеличим их). Тогда получаем следующую оценку сверху для x_n :

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= /\text{Сумма геометрической прогрессии}/ = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + 1 < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 1 = 3.$$

Итак, последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху ($x_n < 3$). Следовательно, она имеет предел. Этот предел называется числом e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.12}$$

При помощи ряда Тейлора его можно вычислить более точно:

$$e = 2,718281828459045..... \tag{4.13}$$

Замечание

Число e служит основанием натуральных логарифмов.

e – иррациональное число (не будем это доказывать).

Лемма о вложенных промежутках

Пусть $\{x_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность, $\{y_n\}$ – монотонно убывающая. Предположим также, что для любого n выполнено: $x_n < y_n$. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, то у последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ существует общий предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = C. \tag{4.14}$$

<u>Доказательство:</u>

$y_n \downarrow \Rightarrow\ \forall\, n:\ y_n \leq y_1\ \Rightarrow\ /x_n < y_n$ по условию$/\ \Rightarrow\ x_n < y_n\ \leq y_1$. То есть возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, а значит у нее существует конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

Аналогично, последовательность $\{y_n\}$ – убывающая и ограничена снизу, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = C'$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = C - C' = 0 \;\Rightarrow\; C = C'.$$

■

Геометрический смысл леммы

Отметим точки последовательностей на вещественной оси.

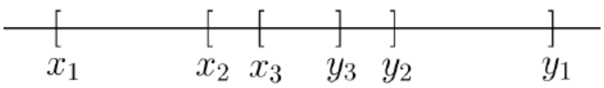


Рис. 19: Геометрический смысл теоремы

Мы получим систему вложенных друг в друга промежутков $[x_n, y_n]$, причём выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, то есть длины промежутков стремятся к нулю.

Тогда концы промежутков стремятся к одному пределу, который является общей точкой всех промежутков.

4.5 Критерий Коши сходимости последовательности

Теорема 12 (Критерий Коши сходимости последовательности) Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N: \;\forall\, n, m > N: \;|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.15}$$

<u>Доказательство:</u>

<u>Необходимость</u>.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Следовательно,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N: \;\forall\, n > N: \;|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > N,\; m > N$. Тогда будут одновременно выполнены два неравенства:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность.

Пусть выполнено условие (4.15) критерия Коши. Разобьем вещественную ось $\mathbb{R}$ на два подмножества (класса). К нижнему классу A отнесём числа α такие, для которых начиная с некоторого номера, выполнено: $\alpha < x_n$ (то есть $\exists\, N: \ \forall\, n > N: \ \ \alpha < x_n$). К верхнему классу A' отнесем все остальные числа.

Рис. 20: Огюстен Луи Коши (фр. Augustin Louis Cauchy, 1789–1857)

Докажем, что классы A и A' непустые. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём номер N из условия (4.15). Тогда для любых $n > N$, $m > N$ выполнено:

$|x_n - x_m| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. Всякое число $x_m - \varepsilon$ (при $m > N$) относится к классу A (так как при $m > N$ выполнено условие отнесения к классу $A: \ x_m - \varepsilon < x_n$). Следовательно, множество A непустое. С другой стороны, для тех же n выполнено: $x_n < x_m + \varepsilon$ (при $m > N$), значит число $x_m + \varepsilon$ не может принадлежать классу A, то есть оно принадлежит A'. Итак, мы показали, что классы A и A' непустые и каждое вещественное число попадет либо в A, либо в A'.

Рис. 21: Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (нем. Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831–1916)

Теперь докажем, что каждое число α из нижнего класса A меньше любого числа α' из верхнего класса A'.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in A \ \Leftrightarrow \ \exists\, N: \ \forall\, n > N: \ \alpha < x_n \\ \alpha \in A' \ \Leftrightarrow \ \forall\, N: \ \exists\, n > N: \ \alpha' > x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha < \alpha'.$$

По теореме Дедекинда из теории чисел существует вещественное число a, которое является пограничным: $\alpha \leq a \leq \alpha' \ \ \forall \alpha \in A, \ \alpha' \in A'$. Как было замечено выше, для любого $m > N$ выполнено: $x_m - \varepsilon \in A$, $x_m + \varepsilon \in A'$. Значит для пограничного числа a будет выполнено неравенство:

$$x_m - \varepsilon \leq a \leq x_m + \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |x_m - a| \leq \varepsilon \quad \forall m > N,$$

то есть

$$\lim_{m\to\infty} x_m = a.$$

■

Замечание

Эти пограничные числа a используются для введения иррациональных чисел.

4.6 Подпоследовательности

Определение

Пусть даны последовательность $\{x_n\}$ и некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_1, \ n_2, \ \ldots, n_k, \ \ldots\}$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Замечание

Заметим, что в последовательности $\{n_1, \ n_2, \ \ldots, n_k, \ \ldots\}$ содержатся не все натуральные числа. Таким образом, для получения подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ мы выбросили из последовательности $\{x_n\}$ некоторые члены.

Теорема 13 (о пределе подпоследовательности)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то предел любой её подпоследовательности также равен a:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a. \tag{4.16}$$

Доказательство:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N:\ \forall\, n > N:\ |x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.17}$$

Так как $n_k \to \infty$, то существует K такое, что при $k > K$ выполнено:

$$n_k > N \ \Rightarrow\ /\text{формула}(4.17)/\ \Rightarrow\ |x_{n_k} - a| < \varepsilon\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$$

■

Замечание

Если последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, то её подпоследовательность может иметь предел. Например, у последовательности $\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n$ предела не существует, однако её подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$. Этот предел подпоследовательности называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Рис. 22: Слева: Бернард Больцано (чеш. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781–1848). Справа: Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstras, 1815–1897)

Теорема 14 (о бесконечном частичном пределе неограниченной последовательности)

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, то у неё существует частичный предел, равный $+\infty$ или $-\infty$.

Доказательство:

Пусть множество $\{x_n\}$ не ограничено сверху. Тогда для любого k существует $x_{n_k}:\ x_{n_k} > k$. Подпоследовательность таких $\{x_{n_k}\}$ и будет стремиться к $+\infty$ ($k \to \infty \ \Rightarrow\ x_{n_k} \to \infty$).

Аналогично для множества $\{x_n\}$, неограниченного снизу. ■

Теорема 15 (Лемма Больцано-Вейерштрасса)(о частичном пределе ограниченной последовательности)
Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

<u>Доказательство:</u>

Поскольку $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, то существуют числа a и b такие, что для любого $n:\ a \le x_n \le b$.

1. Для отрезка $[a, b]$ построим последовательность вложенных промежутков. Разделим $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы в одной половине будет бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим эту часть за $[a_1, b_1]$. Разделим её пополам, выделим половину, содержащую бесконечное число членов последовательности и так далее. Длина k-го промежутка: $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Следовательно, по лемме о вложенных промежутках a_k и b_k стремятся к одному пределу C.

2. Теперь построим сходящуюся подпоследовательность. Пусть x_{n_1} – любой из элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в отрезке $[a_1, b_1]$, x_{n_2} – любой элемент из $\{x_n\}$, больший по номеру, чем x_{n_1} и содержащийся в $[a_2, b_2]$. И так далее. Возможность такого выбора обеспечена тем, что на отрезке $[a_k, b_k]$ содержится бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$, то есть найдутся элементы $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами.

Итак, из пунктов 1 и 2 мы получили соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = C \\ a_k \le x_{n_k} \le b_k \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = C,$$

то есть мы выбрали подпоследовательность, имеющую конечный предел.

■

Замечание

Метод последовательного деления отрезка пополам называется методом Больцано.

4.7 Предел функции

Рассмотрим числовое множество X.

Определение

Точка a называется точкой сгущения этого множества, если в любой окрестности точки a содержатся отличные от a значения x из X.

Сама точка сгущения при этом может как принадлежать множеству X, так и не принадлежать.

Пусть в области X, для которой a является точкой сгущения, задана некоторая функция $f(x)$. Опишем поведение этой функции при приближении x к a.

Определение

Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ только если $|x - a| < \delta$ (где $x \in X$ и отлично от a).

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Символьная запись этого определения такова:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X : |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.18}$$

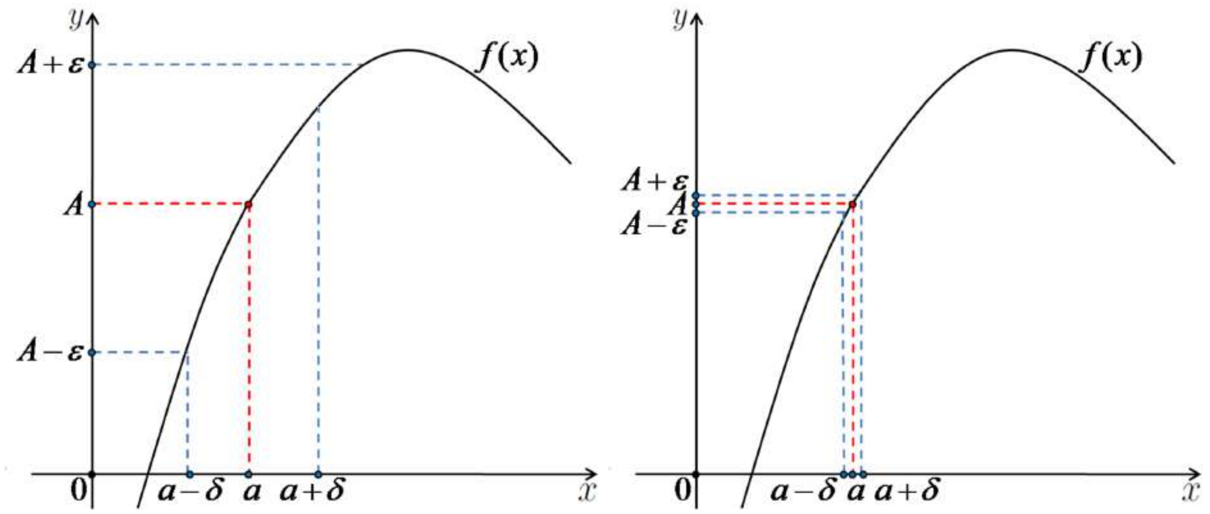


Рис. 23: Предел функции на языке ε, δ

Рассмотрим ситуацию, когда аргумент x приближается к числу a только с одной стороны: справа или слева. Тогда можно детализировать понятие предела.

Определение

Функция $f(x)$ имеет правым пределом число A при стремлении x к a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ только если $a < x < a + \delta$:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X : a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon. \tag{4.19}$$

Аналогично определяется левый односторонний предел:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X : a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon. \tag{4.20}$$

Нетрудно установить, что для существования предела (4.18) необходимо и достаточно существование и равенство односторонних пределов справа и слева:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A. \tag{4.21}$$

При стремлении x к конечному пределу a функция может иметь и бесконечный предел. А именно, функция $f(x)$ имеет пределом $+\infty$ $(-\infty)$

при стремлении x к a, если для любого числа $E > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) > E$ $(f(x) < -E)$ только если $|x - a| < \delta$ (где $x \in X$ и отлично от a):

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty : \ \forall E > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > E. \quad (4.22)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty : \ \forall E > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -E. \quad (4.23)$$

Определение

Если множество X содержит сколь угодно большие по абсолютной величине положительные (отрицательные) значения x, то говорят, что $+\infty$ $(-\infty)$ является точкой сгущения для X.

Определение

Пусть $+\infty$ $(-\infty)$ является точкой сгущения для X. Говорят,что функция $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$ имеет предел A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\Delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ только если $x > \Delta$ $(x < -\Delta)$ (где $x \in X$):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Delta > 0 : \ x > \Delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (4.24)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Delta > 0 : \ x < -\Delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (4.25)$$

Смысл всех данных определений один и тот же. Функция $f(x)$ должна быть сколь угодно близка к своему пределу A при условии, что переменная x лежит близко к своему предельному значению a. Но переменная близка к своему конечному пределу, если разность между ними (по абсолютной величине) мала, а к бесконечному, если она сама (по абсолютной величине) велика и притом сохраняет знак предела.

Определение

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функцию $f(x)$ называют бесконечно малой величиной.

Если $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, то функцию $f(x)$ называют бесконечно большой величиной.

Замечание

Знак модуля в последнем определении имеет значение. Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет бесконечный предел, то она бесконечно большая. Однако не всякая бесконечно большая величина имеет бесконечный предел.

Пример

Бесконечно большая функция $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ при $x \to 0$ не имеет бесконечного предела, так как она неограниченное число раз меняет знак.

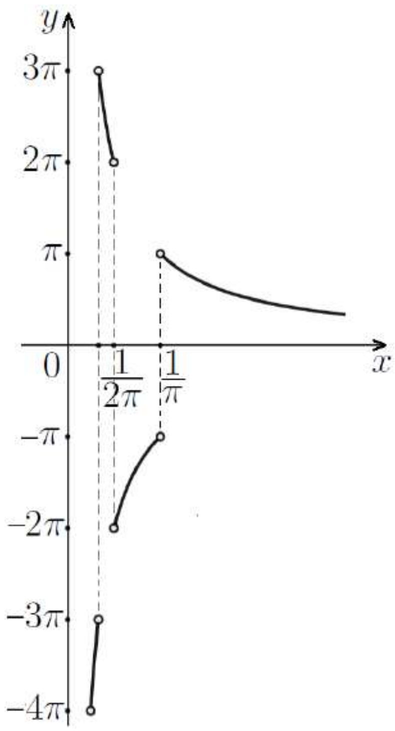


Рис. 24: График функции $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$

4.8 Сведение предела функции к пределу последовательности

Последовательность является частным случаем функции при $X = \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Однако связь предела функции и предела последовательности оказывается более глубокой. Опишем её более подробно.

При определении предела функции мы использовали значения её аргумента, близкие к предельному значению a. Такие значения могут заполнять целые интервалы, то есть несчетное множество. Подобные множества сложны для исследования. Однако мы можем выбирать последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящиеся к a. Тогда значения функции в этих точках образуют последовательность $\{f(x_n)\}$, предел которой связан с $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Эта связь устанавливается следующей теоремой:

Теорема 16 (Связь предела функции и пределов последовательностей)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n : \ x_n \in X, \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$ выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Возьмем произвольную последовательность значений аргумента x_n, сходящуюся к a : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Это можно сделать бесконечным числом способов ибо a является точкой сгущения для X. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Действительно,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \ \Leftrightarrow \ \forall\delta > 0 \ \exists N > 0 : \ \forall n > N : \ |x_n - a| < \delta.$$

Итак, для выбранного в определении предела функции $\delta > 0$ мы можем найти $N > 0$ такое, что x_n будет удалено от a менее, чем на δ. Но для таких значений аргумента по определению предела функции выполнено неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0 : \ \forall \ n > N : \ |f(x_n) - A| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

То есть мы доказали, что для любой последовательности аргументов, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции сходится к A.

Достаточность.

Пусть теперь для любой последовательности
$\{x_n : \ x_n \in X, \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$ выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Будем доказывать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ для конечных a и A.

От противного. Пусть $A \neq \lim\limits_{x\to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \exists\varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x$ такое, что $|x-a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

Выберем последовательность $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда, как мы предположили в предыдущей строке, для любого δ_n найдется x_n такое, что $|x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Эти значения x_n образуют последовательность, для которой $|x_n - a| < \delta_n \to 0$, то есть $x_n \to a$. Но соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A, так как $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Противоречие.

■

Замечание к теореме 16

В теореме 16 говорится, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Однако это избыточное требование. Достаточно требовать существования конечного предела у каждой последовательности, а то, что он одинаковый у каждой последовательности, получится автоматически.

Доказательство:

Докажем это от противного. Предположим, что две последовательности $\{x_n :\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$ и $\{\widetilde{x_n} :\ \widetilde{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$ имеют разные пределы:

$$\lim_{x\to a} f(x_n) = A, \quad \lim_{x\to a} f(\widetilde{x_n}) = \widetilde{A}, \quad A \neq \widetilde{A}.$$

Составим последовательность, в которой члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\widetilde{x_n}\}$ чередуются между собой:

$$x_1,\ \widetilde{x}_1,\ x_2,\ \widetilde{x}_2,\ \ldots\ldots, x_n,\ \widetilde{x_n},\ x_{n+1},\ \ldots\ldots$$

Эта последовательность сходится к точке a. Тогда по условию теоремы 16 последовательность

$$f(x_1),\ f(\widetilde{x}_1)\ f(x_2),\ f(\widetilde{x}_2),\ \ldots\ldots, f(x_n),\ f(\widetilde{x_n}),\ f(x_{n+1}),\ \ldots\ldots$$

имеет конечный предел. Тогда по теореме 13 (о пределе подпоследовательности) любая её подпоследовательность имеет тот же предел. В частности, тот же предел будут иметь подпоследовательности $f(x_n)$ и $f(\widetilde{x_n})$. Противоречие с предположением о том, что эти пределы разные ($A \neq \widetilde{A}$).

■

Теорема позволяет дать эквивалентное определение предела функции на языке последовательностей.

Определение

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n : \ x_n \in X, \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$ выполнено:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

В связи с этой эквивалентностью все теоремы о пределах, которые были доказаны для последовательностей, сохраняются для функций.

Приведем здесь критерий Коши для функции $f(x)$, заданной в области X, для которой a служит точкой сгущения.

Теорема 17 (Критерий Коши для предела функции)

Для того чтобы функция $f(x)$ при стремлении x к a имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 : \begin{cases} |x_1 - a| < \delta \\ |x_2 - a| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (4.26)$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Тогда по определению предела функции будет выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть точки x_1 и x_2 удовлетворяют условию $|x_1 - a| < \delta$. Тогда будут выполнены два неравенства:

$$\begin{cases} |f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |(f(x_1)-A)+(A-f(x_2))| \leq \underbrace{|f(x_1)-A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|A-f(x_2)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Исходя из определения предела функции на языке последовательностей, требуется проверить, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, существует конечный предел, одинаковый для всех таких последовательностей.

Пусть условие, сформулированное в теореме, выполнено, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ установлено соответствующее $\delta > 0$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a. По определению предела последовательности, найдется такой номер N, что для $n > N$ будет выполнено: $|x_n - a| < \delta$. Возьмем, наряду с n, и другой номер $m > N$, для которого будет выполнено: $|x_m - a| < \delta$.
Тогда по условию (4.26) будет выполнено:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется при единственном требовании, чтобы оба номера n и m были больше N. Это означает, что для последовательности $\{f(x_n)\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ выполняется условие критерия Коши сходимости последовательности (4.15) и, следовательно, последовательность

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

имеет конечный предел.

Как было показано в замечании к теореме 16, этого уже достаточно, чтобы предел $\{f(x_n)\}$ был одним и тем же для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a. Этот предел и будет пределом функции, существование которого надо было доказать.

■

4.9 Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называется предел отношения синуса бесконечно малой дуги к той же дуге, выраженной в радианной мере:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{4.27}$$

Предварительно нам придется доказать некоторые полезные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при } 0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{4.28}$$

С этой целью в круге радиуса R рассмотрим острый угол $\measuredangle AOB$, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (рис. 25). Тогда: Площадь $\triangle AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади $\triangle AOC$.

Обозначим через x радианную меру угла $\measuredangle AOB$, тогда:

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R\cdot h=\frac{1}{2}R\cdot R\sin x,$$

$$S_{\text{сектора } AOB}=\pi R^2\cdot\frac{x}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2x,$$

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}R\cdot AC=\frac{1}{2}R\cdot R\operatorname{tg} x$$

и неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x.$$

Сократим на $\frac{1}{2}R^2$ и получим требуемые неравенства (4.28).

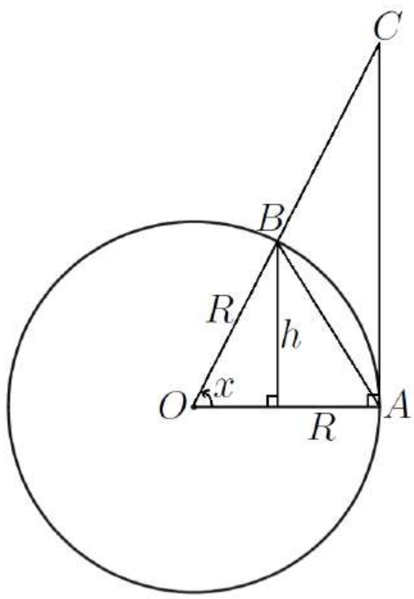


Рис. 25: Сравнение площадей областей

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; \Big/\sin x>0 \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}\Big/ \;\Rightarrow\; 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \;\Rightarrow\; 0>\frac{\sin x}{x}-1>\cos x-1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<\big/\text{в силу (4.28)}\big/<x.$$

Таким образом,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \;\Rightarrow\; \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|. \tag{4.29}$$

Последнее неравенство сохранится и при изменении знака x, то есть будет выполнено при всех $|x| < \frac{\pi}{2}$, $\;x \neq 0$. Устремляя x к нулю, в пределе получим:

$$\frac{\sin x}{x} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \tag{4.30}$$

что и доказывает формулу (4.27).

■

4.10 Второй замечательный предел

Напомним, что число e определялось как предел последовательности (формула (4.12):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.31}$$

Оказывается, что аналогичный результат будет верен и для предела функции:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x. \tag{4.32}$$

Воспользуемся определением предела функции на языке последовательностей.

Напомним, что наряду с (4.31) имеет место и равенство для подпоследовательности $\{n_k\}$:

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{4.33}$$

Выполнено это в силу теоремы 13 (формула (4.16)): пределы сходящейся последовательности и любой её подпоследовательности совпадают.

Пусть $\{x_k\}$ – некоторая последовательность значений, стремящихся к $+\infty$. Не умаляя общности, можно считать также, что $x_k > 1$ (ибо

$x_k \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$). Тогда для каждого x_k найдется натуральное n_k такое, что:

$$n_k \le x_k < n_k + 1 \quad \text{и} \quad n_k \to +\infty. \tag{4.34}$$

Отсюда получаем неравенство для обратных чисел:

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n_k+1} + 1 < \frac{1}{x_k} + 1 \le \frac{1}{n_k} + 1. \tag{4.35}$$

Возводя неравенства (4.35) в степени из неравенств (4.34), получаем:

$$\left(\frac{1}{n_k+1}+1\right)^{n_k} < \left(\frac{1}{x_k}+1\right)^{x_k} \le \left(\frac{1}{n_k}+1\right)^{n_k+1}. \tag{4.36}$$

Два крайних выражения можно преобразовать следующим образом:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}, \quad \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

причем, в силу (4.33),

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \quad \text{а также} \quad \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e. \tag{4.37}$$

Тогда пределы левой и правой частей неравенств (4.36) примут вид:

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)} = /\text{формула (4.37)}/ = \frac{e}{1} = e, \tag{4.38}$$

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) =$$
$$= /\text{формула (4.37)}/ = e \cdot 1 = e. \tag{4.39}$$

Итак, в неравенстве (4.36) левая и правая части стремятся к e при $n_k \to \infty$. Значит по правилу двух милиционеров (теорема 7) центральная часть также стремится к e:

$$\lim_{x_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e. \tag{4.40}$$

Поскольку для любой последовательности $\{x_k\}$, стремящейся к ∞, предел равен e, то и предел функции равен e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.41}$$

■

Следствие

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4.42}$$

4.11 Классификация бесконечно малых

При вычислении пределов оказывается удобно пользоваться бесконечно малыми величинами и, в частности, сравнивать их друг с другом. Опишем процедуру сравнения. Здесь мы будем использовать o-символику.

Определение

Говорят, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, если предел их отношения равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \tag{4.43}$$

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$. Читается формула как: $\alpha(x)$ есть “о малое” от $\beta(x)$.

Определение

Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости, если предел их отношения равен конечному числу, отличному от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K, \quad K \neq 0,\ K \neq \infty. \tag{4.44}$$

Если $K = 1$, то бесконечно малые называются эквивалентными.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Определение

Говорят, что $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$ при $x \to a$, если:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ c > 0 : \forall\, x :\ |x - a| < \varepsilon\ \Rightarrow\ |\alpha(x)| < c|\beta(x)|. \tag{4.45}$$

Обозначение: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

"O большое" означает, что $\alpha(x)$ либо более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, либо того же порядка малости.

Теорема 18 (о произведении бесконечно малых)

Произведение бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждый из сомножителей.

Доказательство:

Сравним бесконечно малые $\alpha(x)\beta(x)$ и $\beta(x)$. Для этого рассмотрим предел их отношения:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0\ \Leftrightarrow\ \alpha(x)\beta(x) = o(\beta(x)).$$

■

Пример

На языке бесконечно малых первый замечательный предел может быть записан в виде соотношения:

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Определение (шкала бесконечно малых величин)

Говорят, что бесконечно малая $\beta(x)$ является величиной k-го порядка относительно бесконечно малой $\alpha(x)$, если $\beta(x)$ и $\alpha^k(x)$ будут величинами одного порядка малости.

Пример

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, величины $1 - \cos x$ и x^2 одного порядка малости или бесконечно малая $1 - \cos x$ имеет порядок 2 относительно бесконечно малой x.

Теорема 19 (о разности эквивалентных бесконечно малых)

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждая из них:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)). \end{cases} \tag{4.46}$$

<u>Доказательство:</u>

<u>Необходимость.</u>

$$\alpha \sim \beta \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha}{\beta} \to 1 \;\Rightarrow\; \alpha - \beta = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\beta}_{\to 0} = o(\beta).$$

Аналогично, если рассмотреть $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$, то $\alpha - \beta = o(\alpha)$.

<u>Достаточность.</u>

$$\alpha - \beta = o(\beta) \;\Rightarrow\; \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\beta} \to 1 \;\Rightarrow\; \alpha \sim \beta.$$

■

Теорема 20 (о замене бесконечно малых под знаком предела)

Пусть для бесконечно малых при $x \to a$ выполнены следующие отношения эквивалентности: $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$. Тогда:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \tag{4.47}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \left(\underbrace{\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}}_{\to 1} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \underbrace{\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}}_{\to 1} \right) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

■

Пример

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} = \Big/ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \;\; \sin x^2 \sim x^2 \Big/ = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4.12 Непрерывные функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0. Предположим также, что x_0 является точкой сгущения области определения функции $f(x)$. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. В противном случае говорят, что в точке x_0 функция имеет разрыв.

Замечание

Рассмотрим приращение аргумента $\triangle x = x - x_0$ и приращение функции $\triangle y = f(x) - f(x_0)$. Непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение

Говорят, что функция непрерывна в промежутке, если она непрерывна в любой точке промежутка.

Теорема 21 (о непрерывности суммы, произведения и отношения функций)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в одном промежутке, обе непрерывны в точке x_0, то в этой же точке будут непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что $g(x_0) \neq 0$).

<u>Доказательство:</u>

Доказательство следует из теорем о сумме, произведении и отношении пределов.

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) =$$

$$\Big/ \text{Теорема 8 о пределе суммы (разности) функций} \Big/ =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = \Big/ \text{так функции } f(x) \text{ и } g(x) \text{ непрерывны} \Big/ =$$

$$= f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0).$$

Аналогично доказывается для произведения и отношения функций $f(x)$ и $g(x)$. ■

Следствие

Рациональная функция непрерывна во всех точках, где её знаменатель не обращается в нуль.

Доказательство:

Рациональная функция – это отношение двух полиномов. Полином является непрерывной функцией на всей числовой оси, так как получается с помощью арифметических действий (сложение, вычитание, умножение) из функций $f(x) = x$ и $f(x) = 1$, которые непрерывны. По теореме 20 отношение полиномов будет непрерывно во всех точках, где знаменатель не обращается в нуль.

■

Определение

Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа (слева), если

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \Big(f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Big). \tag{4.48}$$

Замечание

Непрерывность функции в точке x_0 равносильна её непрерывности в этой точке одновременно справа и слева.

Классификация точек разрыва

1) Точка устранимого разрыва

Определение

x_0 — точка устранимого разрыва, если существуют конечные равные друг другу односторонние пределы, отличные от $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0). \tag{4.49}$$

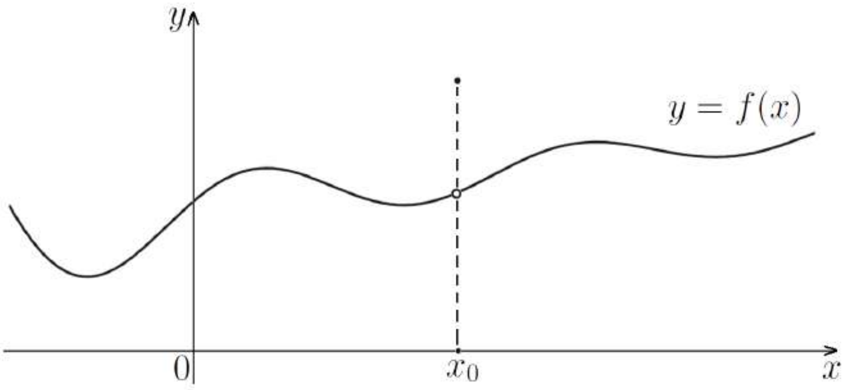


Рис. 26: Точка устранимого разрыва

2) Точка разрыва I рода

Определение

x_0 – точка разрыва I рода, если существуют конечные односторонние пределы в этой точке, но они не равны друг другу:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x). \tag{4.50}$$

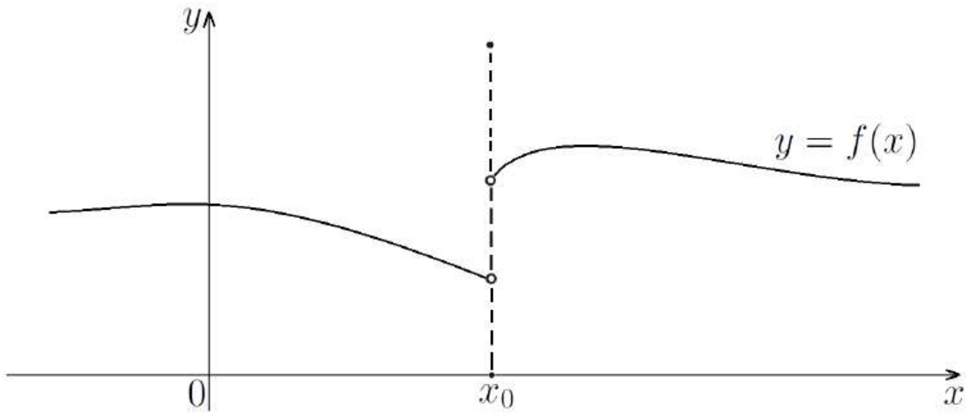


Рис. 27: Точка разрыва I рода

Разрыв первого рода также называют разрывом типа скачка.

3) Точка разрыва II рода

Определение

x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует либо равен ∞.

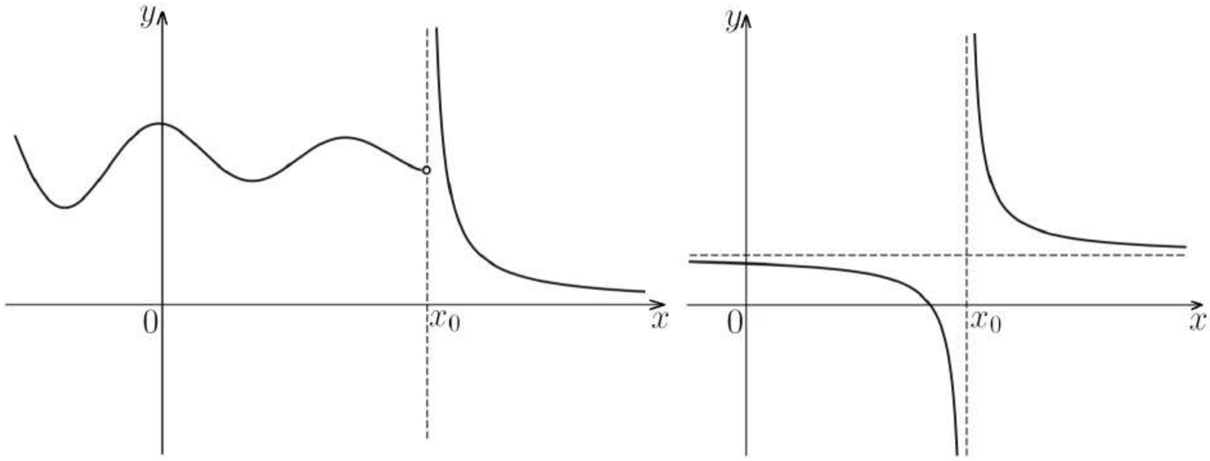


Рис. 28: Слева – разрыв II рода. Тип 1. Справа – разрыв II рода. Тип 2

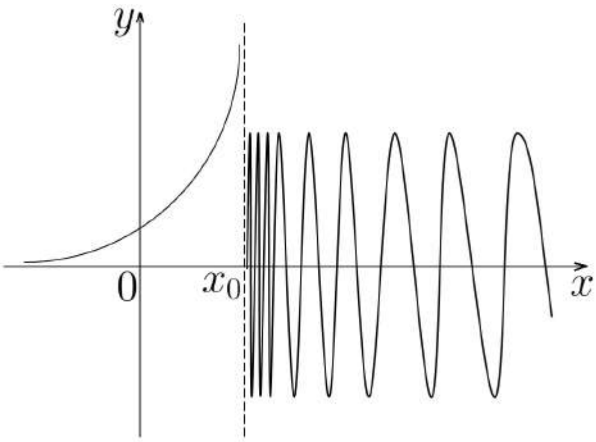


Рис. 29: Разрыв II рода. Тип 3

График функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_0 - x}, & x < x_0 \\ \sin \frac{1}{x - x_0}, & x > x_0 \end{cases}$$

При приближении к точке x_0 частота колебаний функции $\sin \dfrac{1}{x - x_0}$ бесконечно возрастает, правого предела в точке x_0 не существует.

Пример функции, разрывной в любой точке

Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

Любая точка числовой оси является точкой разрыва II рода, так как в любой сколь угодно малой окрестности точки содержатся как рациональные, так и иррациональные числа.

Рис. 30: Иоганн Дирихле (нем. Johann Dirichlet, 1805–1859)

Непрерывность монотонных функций

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области X. Функция называется возрастающей (убывающей) в этой области, если для любой пары принадлежащих ей значений из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

Если из $x_2 > x_1$ следует лишь $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$, то функцию называют неубывающей (невозрастающей). Иногда удобнее и в этом случае называть функцию возрастающей (убывающей), но в широком смысле.

Теорема 22 (о разрывах монотонной функции)

Монотонно возрастающая (убывающая) на промежутке функция $f(x)$ либо непрерывна, либо имеет в этом промежутке разрывы I рода (типа скачка).

Доказательство:

Пусть x_0 – некоторая точка рассматриваемого промежутка.

1. Рассмотрим точки x, лежащие левее x_0 $(x < x_0)$. Функция $f(x)$ возрастает:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ при } x < x_0.$$

Тогда по аналогу теоремы 11 для монотонно возрастающей функции существует конечный левый односторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0)$. Если этот предел совпадает с $f(x_0)$, то в точке x_0 функция непрерывна слева. Если не совпадает, то в точке x_0 есть разрыв.

2. Теперь рассмотрим точки x, лежащие правее x_0 $(x > x_0)$. Функция $f(x)$ возрастает:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ при } x > x_0.$$

При приближении x к точке x_0 справа значения $f(x)$ монотонно убывают и ограничены снизу числом $f(x_0)$. Тогда по аналогу теоремы 11 для монотонно возрастающей функции существует конечный правый одно-

сторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \geq f(x_0)$.
Сравнивая пункты 1 и 2, получаем:

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0+0} f(x). \tag{4.51}$$

Если в обоих неравенствах достигается равенство, то функция непрерывна в точке x_0. Если где-то строгое неравенство, то в точке x_0 функция имеет скачок.

■

Замечание

Других разрывов монотонно возрастающая функция иметь не может.

Устранимого разрыва быть не может, так как по неравенствам (4.51) значение $f(x_0)$ заключено между левым и правым пределами, и если они совпадают, то $f(x_0)$ им равна.

Разрыва II рода быть не может, так как левый и правый пределы существуют и конечны.

Теорема 23 (о непрерывности монотонной функции)

Если значения монотонно возрастающей (убывающей) на интервале X функции $f(x)$ содержатся в интервале Y и сплошь заполняют его (то есть любое значение $y \in Y$ принимается функцией хоть один раз), то эта функция непрерывна на X.

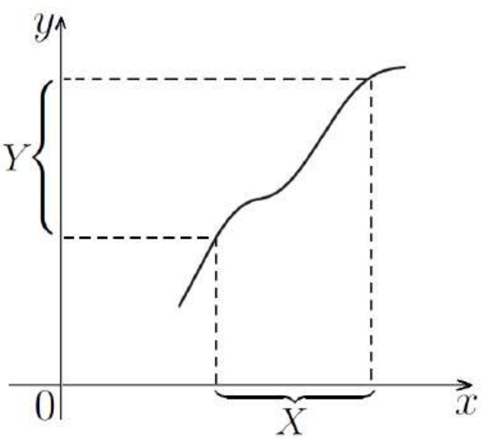


Рис. 31: Иллюстрация к теореме

Если промежуток Y полностью заполнен значениями монотонной функции от аргументов из X, то функция непрерывна на множестве X.

Доказательство:

От противного. Допустим, что в точке x_0 есть разрыв, например, слева. По теореме 21 этот разрыв может быть только скачком, то есть левый односторонний предел $f(x_0-0)<f(x_0)$. В силу монотонного возрастания функции получаем: $f(x) \leq f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ при $x<x_0$ (по определению левого одностороннего предела). $f(x)\geq f(x_0)$ при $x\geq x_0$. Таким образом, мы рассмотрели все значения аргумента x. Значения функции $f(x)$ при этом никогда не попадают в интервал $(f(x_0-0),\ f(x_0))$. Это противоречит условию теоремы, где мы предположили, что значения $f(x)$ полностью заполняют весь промежуток Y.

■

Теорема 24 (о непрерывности элементарных функций)

Основные элементарные функции

$(a^x,\ x^a,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x)$

непрерывны на всей своей области определения.

Замечание

Мы знаем, что график функции $y=\operatorname{tg} x$ разрывен в точках $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Это связано с тем, что $\operatorname{tg} x$ не определен в указанных точках. А в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ тангенс непрерывен в соответствии с теоремой. Аналогично для $\operatorname{ctg} x$.

Доказательство:

1. Показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ монотонно возрастает на всей оси. Её значения заполняют весь промежуток $(0,\infty)$ (так как $\forall y\in(0,\infty)\ \exists x=\log_a y$). Следовательно, по теореме 22 функция $y=a^x$ при $a>1$ непрерывна для любого $x\in(-\infty,\infty)$.

При $a<1$ доказательство аналогично с той лишь разницей, что функция $y=a^x$ монотонно убывает.

2. Функция $y=\sin x$. На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция монотонно возрастает и принимает все значения.

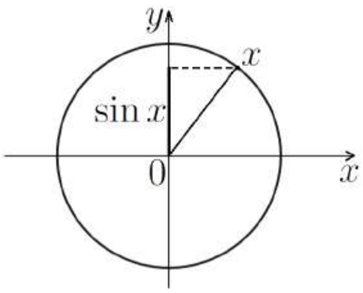


Рис. 32: Геометрическое определение $\sin x$

$y \in [-1, 1]$ (в соответствии с геометрическим определением $\sin x$).

x – угол в радианах (длина дуги единичной окружности).

$\sin x$ – проекция дуги x на ось OY.

Применяем теорему 23 и получаем непрерывность функции $y = \sin x$ на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

При $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ монотонно убывает. Повторяем процедуру и получаем непрерывность для интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. И так далее для всех промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$.

Непрерывность функции в крайних точках отрезка проверим отдельно:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi k} \sin x = (-1)^k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Аналогично для других элементарных функций.

■

Теорема 25 (о непрерывности суперпозиции элементарных функций)

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X, множество Y – область значений $f(x)$. Пусть функция $\varphi(y)$ задана на Y. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, то их суперпозиция $\varphi(f(x))$ будет непрерывна в точке x_0.

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(y)\text{ непрерывна в точке } y_0 \;\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\,\exists\sigma>0:\; |y-y_0|<\sigma \;\Rightarrow\; |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon\\ \text{Воспользовавшись непрерывностью } f(x) \text{ в точке } x_0, \text{ по } \sigma \text{ найдем } \delta>0:\\ |x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(x_0)|=|\underbrace{f(x)}_{=y}-y_0|<\sigma\end{array}\right\}$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\; |x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|<\varepsilon,$$

что означает непрерывность суперпозиции функций $\varphi(f(x))$.

■

Следствие

Теорема 25 позволяет доказать непрерывность функции $y=x^\mu$ (при $x>0$) $\forall\mu$ через суперпозицию функций: $x^\mu=e^{\mu\ln x}$, что является суперпозицией (композицией) функций $e^{\mu x}$ и $\ln x$, каждая из которых непрерывна.

Другие замечательные пределы

1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad\text{то есть }\ln(1+x)\sim x. \tag{4.52}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac1x}=\Big/\text{непрерывность логарифмической функции}\Big/$$

$$=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac1x}=\ln e=1.$$

2.

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}. \tag{4.53}$$

Доказывается аналогично.

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{4.54}$$

Доказательство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=$$

$\Big/$Заменим $a^x-1=t$ на эквивалентную бесконечно малую: $t\sim\ln(1+t)\Big/$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(a^x-1))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a.$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1. \tag{4.55}$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu. \tag{4.56}$$

Доказательство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=$$

$\Big/$Заменим $(1+x)^\mu-1=t$ на эквивалентную бесконечно малую: $t\sim\ln(1+t)\Big/$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(1+x)^\mu-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^\mu}{x}=\mu\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\mu.$$

На основании замечательных пределов можно сформировать список эквивалентных бесконечно малых.

Эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0:$

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\operatorname{tg}x\sim\operatorname{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim\ln a\cdot\log_a(1+x)\sim$$

$$\sim e^x-1\sim\frac{1}{\ln a}(a^x-1)\sim\frac{1}{\mu}\left((1+x)^\mu-1\right).$$

Кроме того, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ при $x\to 0.$

В список также включены бесконечно малые, эквивалентность которых можно доказать, воспользовавшись замечательными пределами.

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2-x^3}-1}{\sin^2 x} = \Big/ 2^{x^2-x^3}-1 \sim \ln 2\cdot(x^2-x^3); \quad \sin^2 x\sim x^2 \Big/ =$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln 2\cdot\frac{x^2-x^3}{x^2} = \ln 2.$$

4.13 Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке (на отрезке)

Теорема 26 (Первая теорема Больцано-Коши)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $c:\ a<c<b$, в которой $f(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы. Если на отрезке $[a,b]$ начало и конец графика функции находятся по разные стороны по оси абсцисс, то график пересекает ось абсцисс.

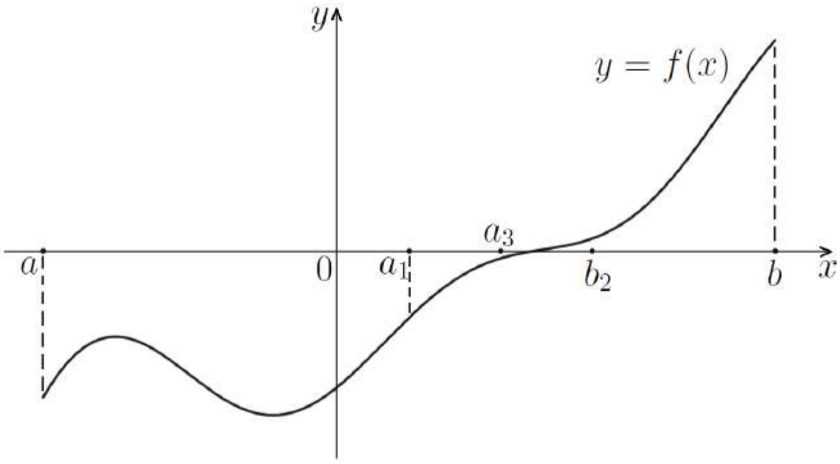


Рис. 33: Метод половинного деления

<u>Доказательство:</u>

Воспользуемся методом последовательного деления отрезка пополам (метод Больцано). Положим для определенности $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в получившейся точке $f(x)$ обращается в нуль, то теорема доказана. Если нет, то выберем ту половину

отрезка $[a, b]$, где на концах у функции значения разных знаков. Этот отрезок обозначим за $[a_1, b_1]$. Снова разделим его пополам и повторим процедуру. И так далее. Мы получим последовательность вложенных промежутков, длины которых стремятся к нулю. По лемме о вложенных промежутках для последовательности вложенных промежутков $[a_n, b_n]$ найдется общая точка $c: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.
В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ будет выполнено:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to c \ \Rightarrow \ f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \text{ (так как } f(a_n) < 0) \\ b_n \to c \ \Rightarrow \ f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \text{ (так как } f(b_n) > 0) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(c) = 0.$$

■

Замечание

Описанный способ поиска корней функции называется методом половинного деления.

Теорема 27 (Вторая теорема Больцано-Коши)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает различные значения: $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда для любого числа D, лежащего между A и B, найдется точка c между a и b такая, что $f(c) = D$. Таким образом, непрерывная функция принимает все промежуточные значения между A и B.

Доказательство:

Пусть для определенности $A < B$. Тогда $A < D < B$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - D$. Она непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда по первой теореме Больцано-Коши найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi(c) = 0$. Следовательно, $f(c) - D = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = D$.

■

Замечание

Вторая теорема Больцано-Коши дает ответ на следующий вопрос: “Для всякой ли непрерывной функции график будет являться непрерывной линией?” Ответ: да, для всякой, но это неочевидно. Дело в том, что в определении непрерывной функции о графике функции ничего не говорится. Непрерывность в точке определяется с помощью нахождения некоторого предела.

Непрерывность графика функции означает, что при непрерывном изменении переменной x в пределах от a до b значение функции $f(x)$ не может измениться скачком ни в одной точке. Если скачок графика где-то произошел, то часть значений на оси OY не будет принята. Но вторая теорема Больцано-Коши говорит о том, что для любого числа D, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка c между a и b такая, что $f(c) = D$. То есть все промежуточные значения на оси OY будут приняты функцией $f(x)$. А это противоречит наличию скачка у графика.

Теорема 28 (Первая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена, то есть существуют числа m и M такие, что: $m \le f(x) \le M \;\; \forall x : \; a \le x \le b$.

Доказательство:

От противного. Пусть функция $f(x)$ не ограничена. Значит $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x = x_n \in [a, b] \; : \; |f(x_n)| > n$. Мы получили ограниченную последовательность $\{x_n\}$ $(a \le x_n \le b)$. По лемме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : \; x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0, \; a \le x_0 \le b$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, следовательно, $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$, что невозможно ибо по нашему предположению $|f(x_{n_k})| \to \infty$. Противоречие.

$\blacksquare$

Замечание

Если функция непрерывна на незамкнутом промежутке, то она может быть и неограниченной. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не ограничена на полуинтервале $(0,1]$.

Теорема 29 (Вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ.

Доказательство:

Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$. По первой теореме Вейерштрасса число M конечно. Докажем теорему от противного. Пусть $\forall x: \ f(x) < M$ (то есть M не достигается ни в какой точке отрезка). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, так как знаменатель не обращается в нуль, а $f(x)$ непрерывна. Тогда по первой теореме Вейерштрасса она будет ограничена некоторым числом $\mu > 0:$

$$\varphi(x) \leq \mu \ \Leftrightarrow \ M - f(x) \geq \frac{1}{\mu} \ \Leftrightarrow \ f(x) \leq M - \frac{1}{\mu} \quad \forall x \in [a,b].$$

Таким образом, число $M - \frac{1}{\mu}$ оказывается верхней границей для $f(x)$. Но $M - \frac{1}{\mu} < M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, что невозможно (верхняя граница не может быть ниже точной верхней границы (супремума)). Противоречие. Значит наше предположение было неверным и существует точка $x_0: \ f(x_0) = M$. Аналогично доказывается для $\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

■

4.14 Равномерная непрерывность

Напомним определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 промежутка X. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Запишем это определение на языке ε, δ :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4.57}$$

Заметим, что здесь δ выбирается индивидуально для каждой точки x_0, то есть δ зависит от x_0. А есть ли возможность по данному ε найти такое δ, которое было бы одним и тем же для всех x? Геометрически это означало бы, что через кривую $y = f(x)$ может быть "протянуто" абсолютно тонкое кольцо диаметром 2ε и толщиной 2δ. Заметим, что при движении кольцо должно оставаться вертикальным (так как размеры кольца 2ε и 2δ заданы по координатным осям, а при наклоне кольца они изменятся).

В связи с этим вводится новое понятие. Если для функции $f(x)$ удается найти δ, подходящее для всех точек x_0 промежутка X, то функцию называют равномерно непрерывной.

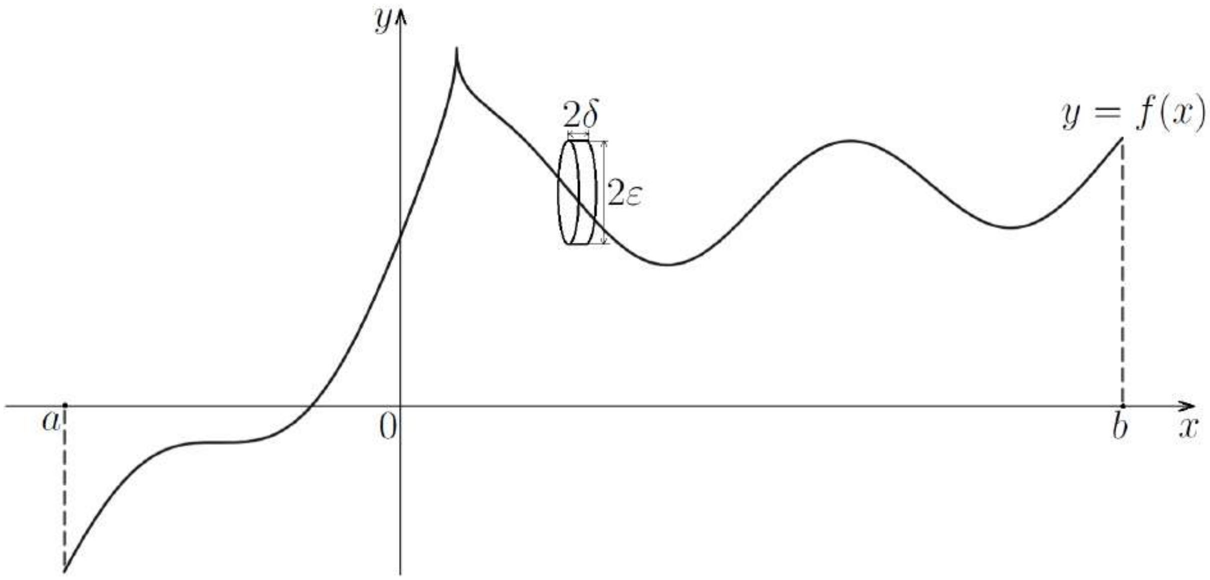


Рис. 34: Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности

Определение

Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на промежутке X, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, единое для всех точек из промежутка X, что для любой пары значений x, отстоящих друг от друга менее чем на δ, соответствующие значения функции будут отличаться друг от друга менее, чем на ε.

На языке логических символов определение может быть записано следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, x_0 \in X : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (4.58)$$

Замечание

Отметим, что здесь δ выбирается общим для всех точек x_0.

Замечание

Из равномерной непрерывности следует непрерывность. В обратную сторону это, вообще говоря, неверно.

Пример 1

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0,\ 5]$, но не является равномерно непрерывной на нем. Тонкое кольцо диаметром 2ε и толщиной 2δ через нее "протянуть" нельзя. В окрестности точки 0 наклон графика функции $y = \frac{1}{x}$ резко возрастает, поэтому кольцо "застрянет".

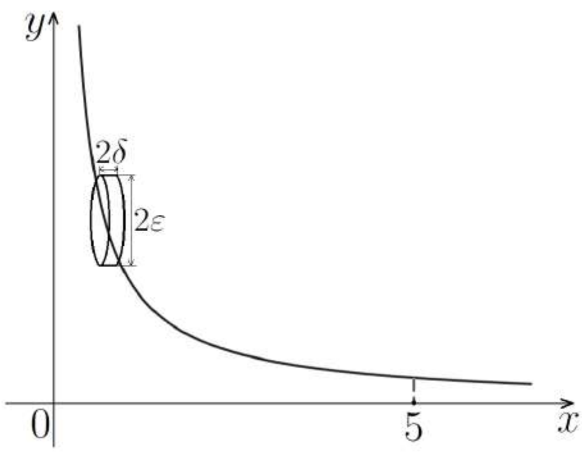


Рис. 35: График функции $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\ 5]$

Можно привести формальное доказательство отсутствия равномерной непрерывности. Выберем две точки: $x_0 = \frac{1}{n}$, $x = \frac{1}{n+1}$. За счет выбора n можно сделать расстояние между точками сколь угодно малым:

$$|x - x_0| = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Посчитаем значения функции в этих точках.

$$f(x_0) = n, \quad f(x) = n + 1 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 1 \nrightarrow 0.$$

Таким образом, для $\varepsilon = 1$ нельзя выбрать δ, которое подошло бы сразу для всех точек x_0 полуинтервала $(0,\ 5]$.

В данном примере функция $y = \frac{1}{x}$ не является ограниченной на полуинтервале $(0,\ 5]$. Однако существуют ограниченные непрерывные функции, не являющиеся равномерно непрерывными на полуинтервале.

Пример 2

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на полуинтервале $X = \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. Функция $f(x)$ непрерывна на X как суперпозиция непрерывных функций $\sin x$ и $\frac{1}{x}$. Однако равномерно непрерывной она не является. Покажем это. Выберем две точки:

$$x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad x = \frac{1}{n\pi}.$$

За счет выбора n можно сделать расстояние между точками сколь угодно малым:

$$|x - x_0| = \frac{1}{n(2n+1)\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

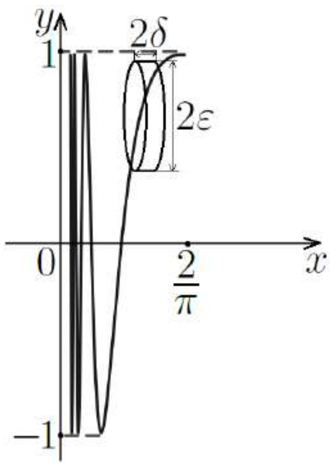


Рис. 36: График функции $y = \sin\frac{1}{x}$, $x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Посчитаем значения функции в этих точках.

$$f(x_0) = \pm 1, \quad f(x) = 0 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| = 1 \nrightarrow 0.$$

Таким образом, для $\varepsilon = 1$ нельзя выбрать δ, которое подошло бы сразу для всех точек x_0 полуинтервала $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Теорема 30 (Теорема Кантора)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$. Таким образом, для замкнутого промежутка из непрерывности следует равномерная непрерывность.

<u>Доказательство:</u>

От противного. Пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$, то есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\ x, x_0 \in [a, b] :\ |x - x_0| < \delta,\ \text{но}\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда для указанного выше ε будет выполнено:

$$\forall \delta_n > 0\ \exists\ x^{(n)}, x_0^{(n)} \in [a, b] :\ |x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n,\ \text{но}\ |f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon.$$

Здесь мы получили две последовательности $\{x^{(n)}\}$ и $\{x_0^{(n)}\}$, ограниченные отрезком $[a, b]$. По лемме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x^{(n)}\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(n_k)}\}:\quad x^{(n_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Так как

$$|x^{(n_k)} - x_0^{(n_k)}| < \delta_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

то $x_0^{(n_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 будет выполнено:

Рис. 37: Георг Кантор (нем. Georg Cantor, 1845–1918)

$$\left.\begin{array}{l} f(x^{(n_k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \\ f(x_0^{(n_k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow\ f(x^{(n_k)}) - f(x_0^{(n_k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

что противоречит предположению о том, что $|f(x^{(n_k)}) - f(x_0^{(n_k)})| \geq \varepsilon$.

■

Определение

Колебанием ω функции $f(x)$ на промежутке X называется следующая величина:

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} \{f(x'') - f(x')\}. \tag{4.59}$$

Для непрерывной функции на замкнутом промежутке колебание представляет собой разность максимума и минимума функции.

Замечание **(связь колебания функции и равномерной непрерывности)**

Равномерная непрерывность означает, что для всякого положительного ε как бы мы ни разбивали отрезок $[a, b]$ на части достаточно малой длины, колебание в пределах каждой части не превзойдет заранее заданное ε.

4.15 Принцип сжимающих отображений

Для дальнейших построений нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры. Приведем их здесь.

Определение

Пусть M – произвольное множество, и пусть каждой паре его элементов x, y сопоставлено неотрицательное число $\rho(x, y)$ так, что для всех $x, y, z \in M$ выполнено:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – симметрия;

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – неравенство треугольника.

Функция ρ называется метрикой (расстоянием), а само множество M, снабженное метрикой – метрическим пространством.

Примеры

1) Множество вещественных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ образует метрическое пространство $\mathbb{R}^1$.

2) Множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ с расстоянием (смотри рис. 38):

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |g(t) - f(t)|.$$

3) Множество точек на сфере.

Расстояние между двумя точками – это длина дуги большого круга (наименьшая из двух дуг), проходящего через эти точки (смотри рис. 39).

Замечание

Большой круг – это сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара.

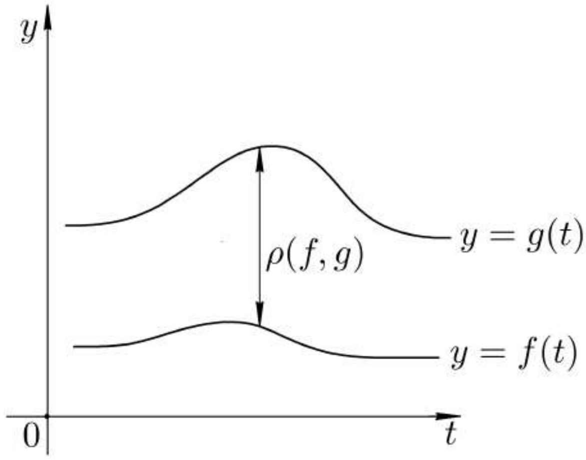


Рис. 38: Расстояние между функциями на множестве $C[a,b]$

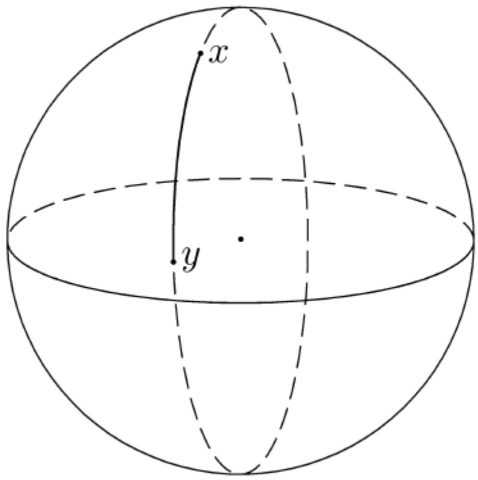


Рис. 39: Расстояние между точками на сфере

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве M называется сходящейся, если существует точка $x \in M$, обладающая свойством: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geq N:\ \rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Замечание

На множестве $\mathbb{R}$ это определение совпадает с обычным определением предела.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве M называется фундаментальной (последовательностью Коши или последовательностью, сходящейся в себе), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N, m \geq N:$ $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Определение

Метрическое пространство называется полным, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

Замечание

На вещественной оси $\mathbb{R}$ по критерию Коши любая фундаментальная последовательность сходится (ибо определение фундаментальной последовательности совпадает с условием (4.15) в критерии Коши). Следовательно, $\mathbb{R}$ – полное пространство. Если рассмотреть множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то оно не будет полным.

Сжимающие отображения

Некоторые уравнения оказывается удобно решать с помощью принципа сжимающих отображений. Пусть A – отображение метрического пространства M в себя. Найдем решение уравнения $Ax = x$. Любое уравнение можно привести к виду $Ax = x$, однако решить его этим способом удастся лишь тогда, когда A – сжимающее отображение.

Определение

Решение x уравнения $Ax = x$ называется неподвижной точкой отображения A.

Определение

Отображение A метрического пространства M в себя называется сжимающим (сжатием), если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y) \tag{4.60}$$

Пример

Сведем трансцендентное уравнение $2x = \sin x$ к виду $Ax = x$ и покажем, что оператор A в пространстве $\mathbb{R}$ является сжимающим. Данное уравнение не является алгебраическим, из него нельзя выразить x явным образом.

Разделим обе части уравнения на 2. Тем самым, мы сведем его к виду $Ax = x$, где $Ax = \frac{1}{2}\sin x$. Отображение A является сжимающим.

Действительно,

$$\rho(Ax, Ay) = |Ax - Ay| = \left|\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin y\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \le$$

$$\le \left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le \Big/ |\sin x| \le |x| \text{ по формуле (4.28)} \Big/ \le \left|\frac{x-y}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}\rho(x,y).$$

Таким образом, отображение A является сжимающим, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Теорема 31 (Принцип сжимающих отображений)

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве M, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство:

Пусть x_0 – произвольная точка в M.

Положим $x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\ \ldots\ldots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

Действительно, считая для определенности $m \ge n$, имеем:

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \Big/ \text{неравенство треугольника} \Big/$$

$$\le \alpha^n \cdot [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})],$$

$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax_0, Ax_1)$ и в силу (4.60): $\rho(Ax_0, Ax_1) \le \alpha\rho(x_0, x_1)$. Тогда:

$$\alpha^n \cdot [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \le$$

$$\le \alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}].$$

Для получения бесконечно убывающей геометрической прогрессии добавим слагаемые, от чего сумма только возрастет:

$$\alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1} + \ldots] =$$

$$= \alpha^n \cdot \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \tag{4.61}$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом n эта величина будет сколь угодно мала – меньше любого наперед заданного ε, соответственно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. По условиям теоремы, M – полное пространство, $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, следовательно, $\{x_n\}$ имеет предел (в силу определения полного метрического пространства). Положим $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Если в формуле (4.60) выбрать $y = x_n$, то неравенство примет вид:

$$\rho(Ax, Ax_n) \leq \alpha\rho(x, x_n). \tag{4.62}$$

$$\rho(x, x_n) \xrightarrow[x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x]{} 0 \Rightarrow \rho(Ax, Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

то есть мы построили решение уравнения $Ax = x$, а значит нашли неподвижную точку отображения A.

Теперь докажем единственность неподвижной точки. От противного. Пусть есть две различные неподвижные точки: $Ax = x$, $Ay = y$, соответственно: $\rho(Ax, Ay) = \rho(x, y)$. С другой стороны, в силу (4.60): $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$.
Значит $\rho(x, y) \leq \alpha\rho(x, y)$ и, следовательно: $\rho(x, y) = 0$, так как $\alpha < 1$. Таким образом, $x = y$, что доказывает единственность. ■

Пример

Принцип сжимающих отображений дает конструктивный метод приближенного нахождения решения уравнения. Пусть f – функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая условию Липшица при $k < 1$:

Рис. 40: Рудольф Липшиц (нем. Rudolf Lipschitz, 1832–1903)

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|. \tag{4.63}$$

Пусть f отображает отрезок $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно принципу сжимающих отображений, последовательность $x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots\ldots$ сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

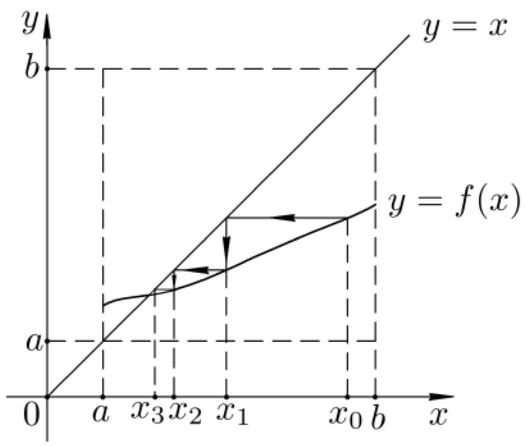


Рис. 41: Принцип сжимающих отображений при выполнении условия Липшица с некоторым $k < 1$

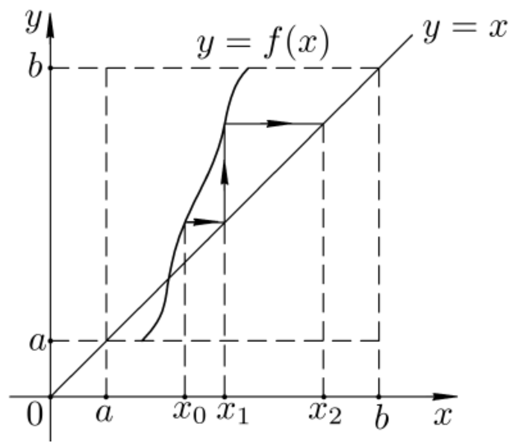


Рис. 42: Отсутствие сходимости последовательности итераций при невыполнении условия Липшица ни с одним из $k < 1$. Отображение не является сжимающим

$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots$ – последовательные приближения решения.

Комментарий

Метод сжимающих отображений не является универсальным методом поиска решения уравнения. Он будет работать только когда выполнено условие сжатия (4.60).

В частности, в приведенном выше примере уравнения $2x = \sin x$ имеет смысл искать корни только для $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, так как вне этого отрезка равенства быть не может, поскольку синус по модулю не превосходит единицы. Как было показано, отображение $Ax = \frac{1}{2}\sin x$ является сжимающим. Значит, по принципу сжимающих отображений последовательность итераций сходится к единственному корню уравнения, который в данном случае, очевидно, равен нулю: $x = 0$ (проверяется подстановкой).

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.1 Производная

Опишем эволюцию некоторого процесса, меняющегося во времени. Пусть, например, это будет задача о свободном падении тела. Пройденный телом путь s за время t с момента начала падения определяется известной формулой:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g = 9,8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – ускорение свободного падения.

Найдем среднюю скорость тела за промежуток времени от t до $t+\triangle t$. Пройденный путь за это время:

$$\triangle s = \frac{g}{2}(t+\triangle t)^2 - \frac{g}{2}t^2 = gt\triangle t + \frac{g}{2}\triangle t^2.$$

Тогда средняя скорость будет равна:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = gt + \frac{g}{2}\triangle t.$$

Как видим, эта скорость меняется вместе с изменением $\triangle t$, тем лучше характеризуя состояние падающей точки в момент t, чем меньше промежуток $\triangle t$, протекший после этого момента. Мгновенной скоростью v точки в момент времени t называют предел, к которому стремится средняя скорость $v_{\text{ср.}}$ за промежуток $\triangle t$ при $\triangle t \to 0$:

$$v = \lim_{\triangle t \to 0} v_{\text{ср.}} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = gt.$$

Данный предел называется производной функции $s(t)$. Теперь дадим строгое определение производной.

Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Возьмем такие достаточно малые приращения $\triangle x$, чтобы функция была определена в точке $x + \triangle x$. Рассмотрим отношение $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$. Если существует предел этого отношения при $\triangle x \to 0$, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, а сам предел называется производной функции f в точке x :

$$f'(x) \equiv y'_x(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}. \tag{5.1}$$

Геометрический смысл производной

Опишем процедуру построения производной с геометрической точки зрения. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0)$.

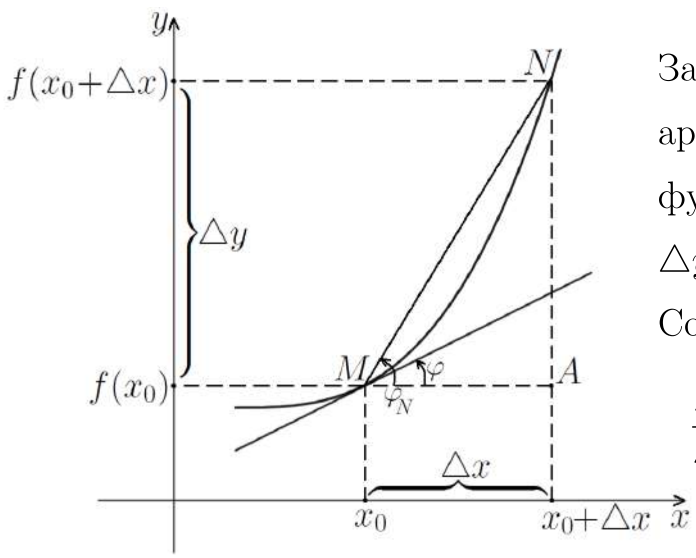


Рис. 43: Геометрический смысл производной

Зададим приращение $\triangle x$ аргументу x. Тогда приращение функции примет вид:
$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$.
Составим их отношение:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \frac{NA}{MA} = \operatorname{tg}\varphi_N,$$

то есть отношение приращения функции к приращению её аргумента есть тангенс угла φ_N наклона секущей MN графика функции $y = f(x)$.

Если устремить $\triangle x$ к нулю, то предельным положением секущей будет касательная к кривой $y = f(x)$ в точке x_0. С другой стороны, по определению производной,

$$\lim_{N\to M} \operatorname{tg}\varphi_N = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Таким образом, геометрический смысл производной – это тангенс угла

φ наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Следствие

Напишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$. Общее уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0, y_0), имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставив сюда параметры касательной: x_0, $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$, получим её уравнение:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.2}$$

Воспользуемся условием перпендикулярности прямых (произведение их угловых коэффициентов равно -1) и напишем уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{5.3}$$

Замечание

Используя понятие одностороннего предела, можно ввести односторонние производные:

$$y'_+(x) = \lim_{\triangle x \to 0+0} \frac{\triangle y}{\triangle x}, \quad y'_-(x) = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{5.4}$$

Теорема 1 (о непрерывности дифференцируемой функции)

Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Следовательно,

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} - f'(x_0) = \alpha(\triangle x) \text{ – бесконечно малая } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\alpha(\triangle x)\triangle x+y'(x_0)\triangle x \text{ – бесконечно малая } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\triangle x\to 0}(f(x_0+\triangle x)-f(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim_{\triangle x\to 0} f(x_0+\triangle x)=f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0.

■

5.2 Правила дифференцирования

В этом параграфе мы найдем производные от суммы, произведения, отношения, композиции функций, а также от обратной функции.

Теорема 2 (Производная постоянной функции)

$$C'=0, \quad \text{где } C=const. \tag{5.5}$$

<u>Доказательство:</u>

Поскольку у постоянной C нулевое приращение при любом изменении аргумента, то и производная равна нулю. ■

Теорема 3 (Производная суммы функций)

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда:

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x). \tag{5.6}$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть $y=u+v$. Придадим x приращение $\triangle x$. Тогда $u,\ v$ и y получат приращения $\triangle u,\ \triangle v$ и $\triangle y$ соответственно. Их новые значения $u+\triangle u$, $v+\triangle v$ и $y+\triangle y$ связаны тем же соотношением:

$$y+\triangle y=(u+\triangle u)+(v+\triangle v).$$

Отсюда

$$\triangle y=\triangle u+\triangle v, \quad \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}$$

и

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle x}=u'+v',$$

то есть производная y' существует и равна

$$y' = (u+v)' = u' + v'.$$

■

Замечание

Этот результат может быть распространен на любое число слагаемых.

Теорема 4 (Производная произведения функций)

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{5.7}$$

Доказательство:

Пусть $y = u \cdot v$. Приращению $\triangle x$ отвечают, как и выше, приращения $\triangle u, \ \triangle v$ и $\triangle y$. При этом $y + \triangle y = (u + \triangle u)(v + \triangle v)$, так что

$$\triangle y = \triangle u \cdot v + u \cdot \triangle v + \triangle u \cdot \triangle v$$

и

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \cdot v + u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x} \cdot \triangle v.$$

Функция v дифференцируема, а значит и непрерывна (по теореме 1). Тогда, по определению непрерывности, её приращение $\triangle v \to 0$ при $\triangle x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \cdot v + u \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

то есть производная y' существует и равна

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

■

Замечание

Если $y = uvw$, причем $u',\ v',\ w'$ существуют, то

$$y' = [(uv)\cdot w]' = (uv)'\cdot w + (uv)\cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Аналогично для любого конечного числа сомножителей.

Теорема 5 (Производная отношения функций)

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x и $v(x) \neq 0$. Тогда:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \tag{5.8}$$

Доказательство:

Докажем, что функция $y = \frac{u}{v}$ дифференцируема и найдем её производную.

$$y + \triangle y = \frac{u+\triangle u}{v+\triangle v} \ \Leftrightarrow\ \triangle y = \frac{u+\triangle u}{v+\triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{\triangle u\cdot v - u\cdot\triangle v}{v(v+\triangle v)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\frac{\triangle u}{\triangle x}\cdot v - u\cdot\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v\cdot(v+\triangle v)}.$$

Устремляя здесь $\triangle x$ к нулю (причем одновременно и $\triangle v \to 0$), убеждаемся в существовании производной

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

■

Определение суперпозиции функций

Рассмотрим функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ с согласованными областями определения. Тогда можно составить сложную функцию $f(\varphi(x))$, которая называется суперпозицией (композицией) функций f и φ.

Теорема 6 (Производная сложной функции)

Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, функция $y = f(u)$

дифференцируема в точке $u=\varphi(x)$. Тогда функция $f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x и выполнено равенство:

$$(f(\varphi(x)))'=f'_\varphi(\varphi)\cdot\varphi'_x(x). \tag{5.9}$$

<u>Доказательство:</u>

$$(f(\varphi(x)))'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\varphi(x+\triangle x))-f(\varphi(x))}{\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\left(f(\varphi(x+\triangle x))-f(\varphi(x))\right)\left(\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)\right)}{\left(\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)\right)\cdot\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\varphi(x+\triangle x))-f(\varphi(x))}{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\triangle x}=$$

$$\Big/\ u=\varphi(x),\ u+\triangle u=\varphi(x+\triangle x)\Big/$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(u+\triangle u)-f(u)}{\triangle u}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\triangle x}=$$

/ $u=\varphi(x)$ – дифференцируемая функция $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ – непрерывна.
Тогда из условия $\triangle x\to 0$ следует, что $\triangle u=\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)\to 0$ /

$$=\lim_{\triangle u\to 0}\frac{f(u+\triangle u)-f(u)}{\triangle u}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\triangle x}=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x).$$

■

Производная обратной функции

Один из способов задания функции связан с решением уравнения. Соотношение, задающее функцию $y=f(x)$, можно рассматривать как уравнение относительно x, решая которое, мы выразим переменную x через переменную y. Если при этом каждому значению y соответствует единственное решение x, то говорят, что задана обратная к f функция $x=g(y)$. Дадим более строгое определение обратной функции.

Определение

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и имеет область значений Y. Пусть f строго возрастает (строго убывает) на X. Тогда всякому $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$. Это соответствие означает, что на Y задана обратная функция g к функции f. Формально это можно записать так: $g(f(x)) = x$.

Замечание

Если функция f строго возрастает (строго убывает) на X, то обратная к ней функция также строго возрастает (строго убывает) на Y.

Замечание

Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов.

Посмотрим, как связаны производные прямой и обратной функций между собой.

Теорема 7 (Производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x строго возрастает (строго убывает), имеет обратную функцию $x = g(y)$. Пусть также функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$:

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.10}$$

Доказательство:

Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение $\triangle y$, тогда соответствующее приращение $\triangle x$ получит и функция $x = g(y)$. Заметим, что при $\triangle y \neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y = f(x)$, и $\triangle x \neq 0$. Тогда можно перейти к обратной величине:

$$\frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{1}{\frac{\triangle y}{\triangle x}}. \tag{5.11}$$

Если теперь $\triangle y \to 0$ по любому закону, то в силу непрерывности функции $x = g(y)$ приращение $\triangle x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f'(x_0) \neq 0$. А значит существует предел и для левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$. Он и представляет собой производную $g'_y(y_0)$. Переходя к пределу в равенстве (5.11), получаем искомую формулу:

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

Замечание

Обычно формулу (5.10) для производной обратной функции записывают в виде:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{5.12}$$

5.3 Производные основных элементарных функций

Производные степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций будем искать, используя определение производной и замечательные пределы.

1.

$$(x^a)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x + \triangle x)^a - x^a}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^a \left(\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^a - 1 \right)}{\triangle x} =$$

$$= \Big/ \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^a - 1 \sim a\frac{\triangle x}{x} \text{ при } \triangle x \to 0 \Big/ = ax^{a-1}, \quad a = const.$$

2.

$$(a^x)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^{x+\triangle x} - a^x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^x(a^{\triangle x} - 1)}{\triangle x} = \Big/ a^{\triangle x} - 1 \sim \triangle x \ln a \Big/ = a^x \ln a.$$

3.

$$(\log_a x)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\log_a(x + \triangle x) - \log_a x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\log_a \frac{x+\triangle x}{x}}{\triangle x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\Big/ \log_a \frac{x + \triangle x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right) \sim \frac{\triangle x}{x} \cdot \log_a e = \frac{\triangle x}{x} \frac{1}{\ln a} \Big/$$

4.

$$(\sin x)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin(x+\triangle x) - \sin x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x.$$

5.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

6.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. Найдем производную функции $y = \arcsin x$ на интервале $(-1, 1)$:

$$y'_x = (\arcsin x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\Big/$ $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. Выбираем знак “+”, так как функция $y = \arcsin x$ принимает значения $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, где $\cos y > 0$ $\Big/$

9.

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$:

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\Big/ y = \operatorname{arctg} x \;\Leftrightarrow\; x = \operatorname{tg} y \Big/$$

11.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

Таблица производных

$C' = 0$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

$(Cf(x))' = Cf'(x)$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(f(\varphi(x)))' = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	$y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Логарифмическое дифференцирование

Перечисленные правила дифференцирования помогают находить производные и от более сложных по структуре функций.

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right) =$$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right). \tag{5.13}$$

$$\left(\log_{u(x)} v(x)\right)' = \left(\frac{\ln v(x)}{\ln u(x)}\right)' = \frac{\frac{v'(x)}{v(x)}\ln u(x) - \frac{u'(x)}{u(x)}\ln v(x)}{\ln^2 u(x)}. \tag{5.14}$$

5.4 Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную во всех точках интервала (a, b). Тогда функция $f'(x)$ определена на (a, b). Если она имеет производную, то $(f'(x))'$ называется второй производной функции $f(x)$ и обозначается как $f''(x) = f^{(2)}(x)$. Аналогично определяются старшие производные: $f'''(x) = f^{(3)}(x) = \big(f^{(2)}(x)\big)'$, $\ldots\ldots\ldots$, $f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$.

Производные n-го порядка от некоторых функций удается найти.

1. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $\ a \in \mathbb{R}$ – не обязательно целое число.

$(x^a)'' = a(a-1)x^{a-2}$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Докажем по индукции.

Индукционное предположение: $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdot \ \ldots\ldots \cdot(a-n+1)x^{a-n}$.

База индукции уже была проверена при $n = 1$ и $n = 2$.

Докажем переход $n \to n+1$.

$$(x^a)^{(n+1)} = ((x^a)^{(n)})' = \big(a(a-1)\cdot \ \ldots\ldots \ \cdot(a-n+1)x^{a-n}\big)' =$$

$$= a(a-1)\cdot \ \ldots\ldots \ \cdot(a-n)x^{a-n-1}.$$

$\blacksquare$

2. $(a^x)' = a^x \ln a$,

$(a^x)'' = a^x \ln^2 a$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Докажем по индукции.

Индукционное предположение: $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$. База индукции уже была проверена при $n = 1$ и $n = 2$.

Докажем переход $n \to n+1$.

$(a^x)^{(n+1)} = ((a^x)^{(n)})' = (a^x \ln^n a)' = a^x \ln^{n+1} a$.

$\blacksquare$

3. $(\sin x)' = \cos x = \sin\big(x + \frac{\pi}{2}\big)$,

$(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Индукционное предположение:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\Big(x + \frac{\pi n}{2}\Big) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^k \cos x, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Переход $n \to n+1$.
$(\sin x)^{(n+1)} = \left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right)$.

$\blacksquare$

4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & n=2k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ (-1)^{k+1}\sin x, & n=2k+1. \end{cases}$

Доказывается аналогично.

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$,
$(\ln x)''' = (-1)\cdot(-2)\cdot(x)^{-3}$,
$(\ln x)^{IV} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(x)^{-4}$,
. . . .
Индукционное предположение: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.
Переход $n \to n+1$.
$(\ln x)^{(n+1)} = \left((-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\right)' = (-1)^n n! x^{-n-1}$.

$\blacksquare$

5.5 Формула Лейбница

Выше была доказана теорема 4 о производной произведения двух функций:

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'.$$

Обобщим её на случай n-ой производной. Результат дается формулой Лейбница.

Теорема 8 (Формула Лейбница)

Для функций $u(x),\ v(x)$, имеющих производные до n-го порядка включительно, будет выполнена формула:

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{5.15}$$

Доказательство:

По индукции.

База индукции. По теореме 4: $(uv)' = u'v + uv'$.

По формуле Лейбница получаем: $(uv)^{(1)} = C_1^0 u^{(1)} v + C_1^1 u v^{(1)} = u'v + uv'$.

Результаты совпали, то есть база индукции проверена.

Индукционный переход $n \to n+1$.

Пусть формула верна для производной порядка n. Получим $(n+1)$-ую производную.

$$(uv)^{(n+1)} = \left((uv)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} =$$

/ Выделим первое слагаемое из первой суммы и последнее из второй /

$$= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} + u^{(0)} v^{(n+1)} =$$

Соберем в двух суммах слагаемые вида $u^{(n+1-m)} v^{(m)}$ с одинаковыми произведениями производных, сумма порядков которых равна $n+1$. В каждой сумме по одному такому слагаемому, сложим их:

$$C_n^m u^{(n+1-m)} v^{(m)} + C_n^{m-1} u^{(n-m+1)} v^{(m)}.$$

Заметим, что:

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} =$$

$$= n! \cdot \frac{n-m+1+m}{m!(n-m+1)!} = \frac{n!(n+1)}{m!(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = C_{n+1}^m$$

Таким образом,

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m u^{((n+1)-m)} v^{(m)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m u^{((n+1)-m)} v^{(m)},$$

то есть мы доказали формулу для $(n+1)$-ой производной. На основании аксиомы математической индукции утверждение доказано. ■

Пример

$$(e^{3x}\cdot x^2)^{(30)} = C_{30}^0\cdot(e^{3x})^{(30)}(x^2)^{(0)} + C_{30}^1\cdot(e^{3x})^{(29)}(x^2)^{(1)} +$$

$$+C_{30}^2\cdot(e^{3x})^{(28)}(x^2)^{(2)} + C_{30}^3\cdot(e^{3x})^{(27)}\underbrace{(x^2)^{(3)}}_{=0} + 0 + \ \ldots\ldots\ + 0 =$$

$$= 3^{30}e^{3x}x^2 + 30\cdot 3^{29}e^{3x}\cdot 2x + \frac{30\cdot 29}{2}\cdot 3^{28}e^{3x}\cdot 2 =$$

$$= 3^{29}e^{3x}\left(3x^2+60x+290\right).$$

5.6 Дифференциал

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некотором промежутке X и непрерывную в точке $x_0\in X$. Тогда приращению $\triangle x$ аргумента соответствует приращение функции

$$\triangle y = f(x_0+\triangle x) - f(x_0).$$

Вид функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 может быть достаточно сложным для исследования, поэтому заменим её на линейную функцию и выясним, когда это приближение будет достаточно точным.

Теорема 9 (Критерий дифференцируемости функции)
Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы полное приращение функции
$\triangle y = f(x_0+\triangle x) - f(x_0)$, можно было представить в виде:

$$\triangle y = A\triangle x + \alpha(\triangle x)\cdot\triangle x, \quad \text{где } \alpha(\triangle x)\xrightarrow[\triangle x\to 0]{} 0, \tag{5.16}$$

при этом A не должно зависеть от $\triangle x$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке x_0, то есть в ней существует производная

$$y'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \;\Rightarrow\; \frac{\triangle y}{\triangle x} - y'_x = \alpha(\triangle x) \text{ – бесконечно малая } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \triangle y = y'_x \triangle x + \alpha(\triangle x)\cdot\triangle x,$$

что соответствует формуле (5.16) при $A = y'_x(x_0)$.

Достаточность. Пусть $\triangle y$ представимо в виде:

$$\triangle y = A\triangle x + \alpha(\triangle x)\cdot\triangle x \;\Rightarrow\; \Big/\triangle x \neq 0\Big/ \;\Rightarrow\; \frac{\triangle y}{\triangle x} = A + \alpha(\triangle x).$$

Предел этого выражения при $\triangle x \to 0$ существует, так как $\alpha(\triangle x) \xrightarrow[\triangle x \to 0]{} 0$:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = A \;\Leftrightarrow\; y'_x(x_0) = A. \qquad \blacksquare$$

Определение

Дифференциалом называется главная линейная (относительно $\triangle x$) часть приращения функции $y = f(x)$:

$$dy = y'_x \triangle x.$$

Для независимой переменной x приращение $\triangle x$ и дифференциал dx совпадают, поэтому формулу для дифференциала можно переписать в виде:

$$dy = y'_x dx. \tag{5.17}$$

Учитывая формулу (5.17), производную можно записать в виде отношения двух дифференциалов:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}. \tag{5.18}$$

Геометрический смысл дифференциала

Попробуем приблизить график функции $y = f(x)$ в окрестности некоторой точки M прямой линией. Проведем в этой точке кривой касательную MP.

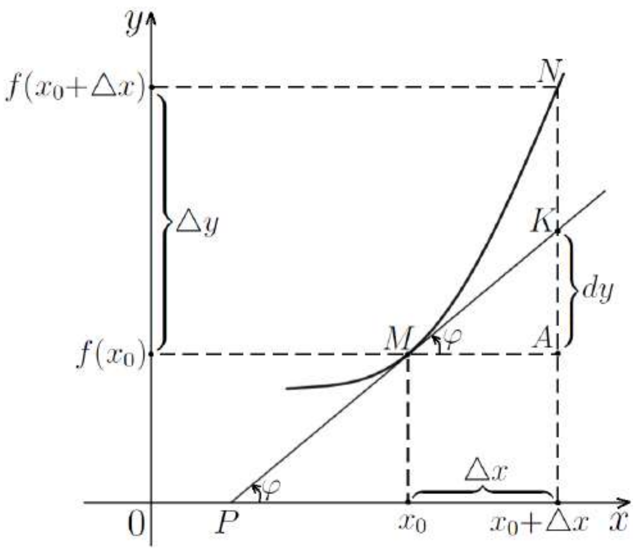


Рис. 44: Геометрический смысл дифференциала

Как мы уже видели, её угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi$, равен производной y'_x. Если абсциссе x придать приращение $\triangle x$, то ордината кривой y получит приращение $\triangle y = AN$. В то же время ордината касательной получит приращение AK. Вычисляя AK как катет прямоугольного треугольника AMK, найдем:

$$AK = MA \cdot \operatorname{tg}\varphi = y'_x \cdot \triangle x = dy.$$

Итак, $\triangle y$ есть приращение ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

При малых изменениях аргумента приращение функции можно приближенно заменить её дифференциалом. Согласно формуле (5.16):

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = A\triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x.$$

Таким образом, при малых $\triangle x$ будет выполнено:

$$f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x)\triangle x. \tag{5.19}$$

Пример

Длина ребра куба равна 2 метрам. При нагревании ребро куба увеличилось на 1 сантиметр. Найдем новый объем куба.

Обозначим ребро куба за x. Тогда его начальный объем $V(x) = x^3$. В процессе нагревания ребро куба увеличилось на $\triangle x = 0,01$ метра. Тогда новый объем равен:

$$V(x + \triangle x) = (x + \triangle x)^3 = 2,01^3 = 8,120601 \text{ м}^3.$$

Следовательно, объем куба увеличился на $\triangle V = 0,120601$ м^3.

Теперь посчитаем изменение объема с помощью дифференциала и оценим точность приближения.

$$dV = V'(x)dx = 3x^2 \cdot dx = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12.$$

Погрешность равна:

$$\frac{\triangle V - dV}{\triangle V} = \frac{0,120601 - 0,12}{0,120601} = \frac{0,000601}{0,120601} \approx 0,005,$$

то есть погрешность при замене приращения функции на дифференциал составляет $0,5\%$.

Инвариантность формы первого дифференциала

Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному важному свойству дифференциала. Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то производная композиции функций равна:

$$y'_t = (f(\varphi(t)))'_t = f'_\varphi \cdot \varphi'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{5.20}$$

Дифференциал dy, если считать x независимой переменной, выразится по формуле (5.17):

$$dy = y'_x \cdot dx. \tag{5.21}$$

Перейдем теперь к независимой переменной t. В этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt. \tag{5.22}$$

Заменим в формуле (5.22) производную y'_t её выражением (5.20), получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = \Big/ dx = x'_t dt \Big/ = y'_x \cdot dx,$$

то есть вернемся к прежней форме дифференциала (5.21).

Таким образом, мы видим, что форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой. Мы всегда имеем право писать дифференциал в форме $dy = y'_x \cdot dx$ вне зависимости от того, будет ли x независимой переменной или нет. Разница лишь в том, что если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение $\triangle x$, а дифференциал x как функции от t. Это свойство называют ***инвариантностью формы первого дифференциала***.

5.7 Дифференциалы высших порядков

Дифференциал дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ можно рассматривать как функцию от независимой переменной x и найти от неё дифференциал, который называется вторым дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается d^2y :

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx =$$

$\Big/$ dx не зависит от x, значит его можно вынести за знак производной $\Big/$

$$= (f'(x))'(dx)^2 = f''(x)dx^2. \tag{5.23}$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков. Если существует $f'''(x)$, то:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3. \tag{5.24}$$

Дифференциал n-го порядка определим индуктивно:

$$d^ny = d(d^{n-1}y). \tag{5.25}$$

Ясно, что он выражается формулой:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{5.26}$$

Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков

Зная, что первый дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Если x – независимая переменная, то по формуле (5.23) для функции $y(x)$ имеем:

$$d^2y = y''_{xx}dx^2. \tag{5.27}$$

Пусть теперь x есть функция от t, то есть $y = y(x(t))$. Тогда по формуле (5.23) для функции $y(t)$ получим:

$$d^2y = y''_{tt}dt^2 = (y'_t)'_t dt^2 = (y'_x x'_t)'_t dt^2 = \left((y'_x)'_t \cdot x'_t + y'_x \cdot x''_{tt}\right) dt^2 =$$

$$= \left((y'_x)'_x \cdot x'_t \cdot x'_t + y'_x \cdot x''_{tt}\right) dt^2 = y''_{xx}(x'_t dt)^2 + y'_x x''_{tt} dt^2 = y''_{xx}dx^2 + y'_x d^2x. \tag{5.28}$$

Как видим, в случае зависимой переменной x, форма второго дифференциала (5.28) изменилась по сравнению с (5.27). Очевидно, что дифференциалы третьего, четвертого и более высоких порядков также не обладают свойством инвариантности формы.

5.8 Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t),\ y(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем производную y'_x как отношение дифференциалов:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.29}$$

Здесь мы предполагаем, что $x'_t \neq 0$.

Если $x(t)$ и $y(t)$ – дважды дифференцируемы, то можно найти y''_{xx}. Действительно, y'_x – это функция, заданная параметрически. От неё можно найти производную по правилу (5.29):

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \quad (5.30)$$

Аналогично можно найти производные более высокого порядка.

5.9 Французские теоремы: Ферма, Дарбу, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя

Знание производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$. Вопросам этого рода и будут, в сущности, посвящены настоящий параграф и следующие за ним.

Лемма (Признак возрастания (убывания) функции)

Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0. Если эта производная $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, будет выполнено: $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$),
а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, будет выполнено:
$f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Иными словами этот факт выражают так: функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает (убывает). Если имеется в виду односторонняя производная, например, справа, то сохраняет силу лишь утверждение о значениях x, лежащих справа от x_0.

Доказательство:

По определению производной,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

По определению предела,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0)+\varepsilon.$$

По условию леммы $f'(x_0)>0$ (ограничимся этим случаем). Выберем $\varepsilon<f'(x_0)\ \Rightarrow\ f'(x_0)-\varepsilon>0$. Тогда

$$\forall x:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Значит в этой δ-окрестности точки x_0 справа от x_0 $(x-x_0>0)$ выполнено: $f(x)>f(x_0)$, слева от x_0 $(x-x_0<0)$ выполнено: $f(x)<f(x_0)$.

■

Теорема 10 (Теорема Ферма)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b) и достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в некоторой точке $c\in(a,b)$. Тогда $f'(c)=0$.

Доказательство:

Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c наибольшее значение. Докажем от противного. Пусть $f'(c)\neq0$. Например, $f'(c)>0$. Тогда по лемме в некоторой окрестности точки c выполнено: $f(x)>f(c)$ при $x>c$, что противоречит предположению о том, что в точке c достигается наибольшее значение. Аналогично для случая $f'(c)<0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

■

Геометрический смысл теоремы Ферма

Напомним, что производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$. Обращение в нуль производной $f'(c)$ означает, что в соответствующей точке этой кривой касательная параллельна оси OX (показано на рис. 45). Предположение теоремы Ферма о том, что c является внутренней точкой промежутка, является существенным, так как нам пришлось рассматривать и точки x справа от c, и точки x слева от c. Без этого предположения теорема перестала бы быть верной: если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на одном из концов отрезка, то производная $f'(x)$ на этом конце может и не быть нулем. Геометрически этот факт показан на рисунке 46.

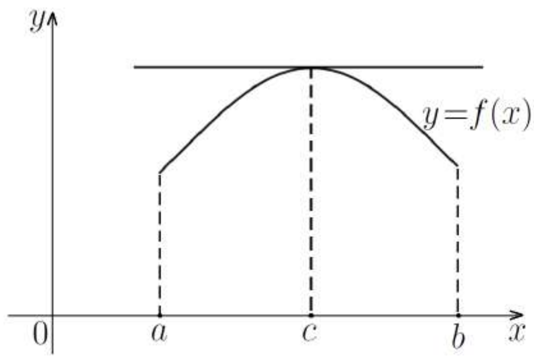


Рис. 45: Геометрический смысл теоремы Ферма

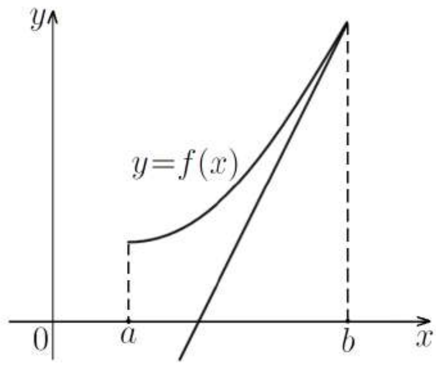


Рис. 46: Производная на конце отрезка отлична от нуля

В предыдущей главе мы доказывали вторую теорему Больцано-Коши о том, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Оказывается, аналогичное утверждение будет верно и для производных.

Теорема 11 (Теорема Дарбу)

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную на отрезке $[a, b]$, то функция $f'(x)$ принимает, в качестве значения, каждое промежуточное число между $f'(a)$ и $f'(b)$.

Доказательство:

Сперва предположим, что $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки. Например, $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$. Докажем существование точки c между a и b, в которой производная обращается в нуль.

По теореме 1, из дифференцируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

следует её непрерывность на $[a, b]$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ принимает в некоторой точке c свое наибольшее значение. Точка c не может совпадать с крайними точками отрезка a и b. В самом деле, если $f'(a) > 0$, то по лемме функция возрастает и справа от точки a её значения будут больше $f(a)$. Значит $f(a)$ уже не будет наибольшим значением. Аналогично для точки b. Итак, $a < c < b$. Тогда, по теореме Ферма, получаем: $f'(c) = 0$.

Переходя к общему случаю, возьмем любое число C, заключенное между $f'(a)$ и $f'(b)$. Пусть, для определенности, $f'(a) > C > f'(b)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - Cx$. Она непрерывна и имеет производную $\varphi'(x) = f'(x) - C$ на отрезке $[a, b]$.

Так как $\varphi'(a) = f'(a) - C > 0$, а $\varphi'(b) = f'(b) - C < 0$, то по доказанному, найдется такая точка c $(a < c < b)$, в которой

$$\varphi'(c) = f'(c) - C = 0, \quad \text{то есть} \ \ f'(c) = C.$$

Таким образом, для произвольного числа C, заключенного между $f'(a)$ и $f'(b)$, мы нашли точку c, в которой производная принимает заданное значение C. ∎

Рис. 47: Слева: Жан Гастон Дарбу (фр. Jean Gaston Darboux, 1842–1917). Справа: Мишель Ролль (фр. Michel Rolle, 1652–1719)

Теорема 12 (Теорема Ролля)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и значения на концах отрезка у неё совпадают. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Если $f(x) = const$, то $f'(x) = 0$ для всех точек промежутка.

Если $f(x)$ не является постоянной функцией, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на отрезке $[a, b]$ своих наибольшего и наименьшего значений. Хотя бы одно из этих значений принимается во внутренней точке промежутка (если бы это было не так, то на одном конце достигалось бы наибольшее значение функции, а на другом – наименьшее. Но по условию значения функции на концах отрезка совпадают. Тогда наибольшее значение совпадет с наименьшим, а функция будет постоянной, что противоречит предположению). Тогда по теореме Ферма в этой внутренней точке c отрезка $[a, b]$ выполнено: $f'(c) = 0$. ■

Следствие

Для дифференцируемой функции между корнями функции всегда есть корень производной.

Доказательство:

Пусть a и b – корни функции, то есть $f(a) = 0 = f(b)$. Значит по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если значения функции в крайних точках отрезка $[a, b]$ совпадают, то внутри отрезка найдется точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

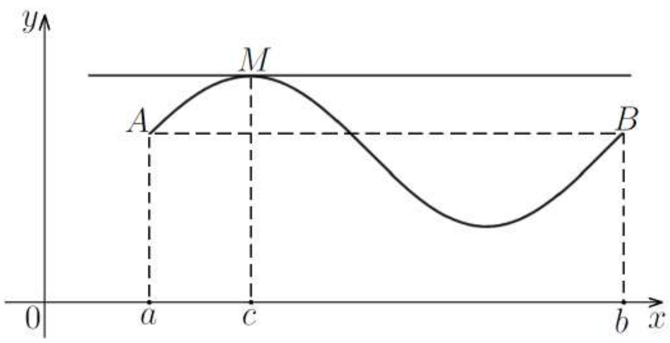


Рис. 48: Геометрический смысл теоремы Ролля

Замечание

Условие дифференцируемости функции на всем интервале (a, b) существенно для теоремы Ролля.

Например, функция $f(x) = |x|$ принимает равные значения на концах отрезка $[-1, 1]$. Однако точки, в которой $f'(x) = 0$ нет, так как в точке 0 производная не существует (из-за излома графика функции).

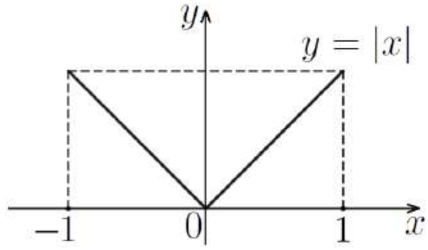


Рис. 49: График функции $y = |x|$

Теорема 13 (Теорема Лагранжа)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что будет выполнено равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{5.31}$$

Доказательство:

Введем вспомогательную функцию, определив её на отрезке $[a, b]$ равенством:

$$F(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a). \tag{5.32}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В интервале (a, b) она дифференцируема:

$$F'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a)).$$

Простой подстановкой нетрудно убедиться в том, что $F(a) = F(b) = 0$, то есть $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка. Тогда по теореме Ролля найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Значит

$$f'(c)(b - a) - (f(b) - f(a)) = 0 \ \Leftrightarrow \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

что и доказывает теорему.

■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

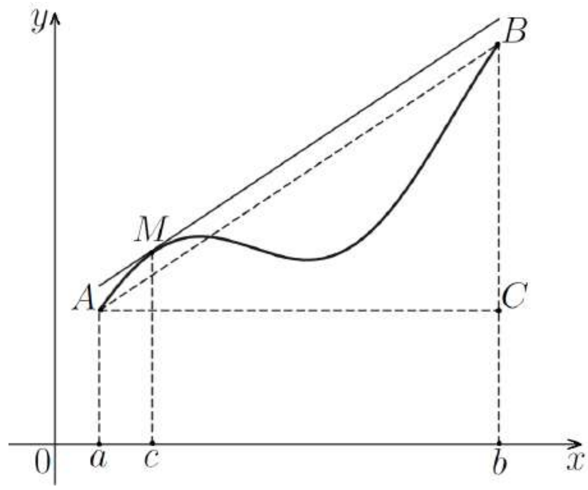


Рис. 50: Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Замечание

Формула (5.31) носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений.

Следствие (Предел производной)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + H]$ $(H > 0)$ и имеет конечную производную при $x > x_0$. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = K$, то он равен значению правой производной функции $f(x)$ в точке x_0, то есть выполнено:

$$f'(x_0+0) = f'_+(x_0). \tag{5.33}$$

Замечание

Правосторонний предел производной $f'(x_0+0)$ и правосторонняя производная $f'_+(x_0)$ отличаются порядком действий. В $f'(x_0 + 0)$ сначала вычисляется производная в точке x, а затем находится предел при $x \to x_0$.

В $f'_+(x_0)$ мы сразу берем точку x_0 и для неё вычисляем производную как правосторонний предел.

Доказательство:

Применим формулу Лагранжа (5.31) к промежутку $[x_0, x_0 + \triangle x]$ (где $0 < \triangle x \le H$):

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(\underbrace{x_0 + \theta\triangle x}_{c}), \quad \text{где} \;\; 0 < \theta < 1. \tag{5.34}$$

Сделаем предельный переход в этом равенстве при $\triangle x \to 0$. Поскольку $0 < \theta < 1$, то при $\triangle x \to 0$ будет выполнено:

$$x_0 + \theta\triangle x \xrightarrow[\triangle x \to 0]{} x_0 + 0.$$

Тогда по условию теоремы правая часть равенства

$$f'(x_0 + \theta\triangle x) \xrightarrow[\triangle x \to 0]{} K. \tag{5.35}$$

Левая часть равенства (5.34) в пределе дает правостороннюю производную:

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \xrightarrow[\triangle x \to 0]{} f'_+(x_0). \tag{5.36}$$

С учетом формул (5.35) и (5.36), предельный переход в равенстве (5.34) дает

$$f'_+(x_0) = K. \tag{5.37}$$

По условию теоремы $K = f'(x_0 + 0)$, то есть $f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0)$. ■

Теорема 14 (Теорема Коши)

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы в интервале (a, b), причем $\psi'(x) \ne 0$ ни в одной точке интервала. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что будет выполнено равенство:

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}. \tag{5.38}$$

Доказательство:

$\psi(b) \ne \psi(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля существовала бы точка c такая, что $\psi'(c) = 0$, а у нас по условию $\psi'(x) \neq 0$ ни в одной точке интервала.

Введем вспомогательную функцию, определив её на отрезке $[a, b]$ равенством:

$$F(x) = (\varphi(x) - \varphi(a))(\psi(b) - \psi(a)) - (\varphi(b) - \varphi(a))(\psi(x) - \psi(a)). \quad (5.39)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как представляет собой линейную комбинацию непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В интервале (a, b) она дифференцируема:

$$F'(x) = \varphi'(x)(\psi(b) - \psi(a)) - \psi'(x)(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

Простой подстановкой нетрудно убедиться в том, что $F(a) = F(b) = 0$, то есть $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка. Тогда по теореме Ролля найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Значит

$$\varphi'(c)(\psi(b) - \psi(a)) - \psi'(c)(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)},$$

что и доказывает теорему. ■

Теорема 15 (Правило Лопиталя)

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, причем $\psi'(x) \neq 0$ ни в одной точке этой окрестности. Пусть также имеет место равенство:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = 0. \quad (5.40)$$

Тогда если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то существует и предел отношения функций, равный ему:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \quad (5.41)$$

Доказательство:

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, значит они непрерывны в точке a. Следовательно,

$$\varphi(a)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0,\quad \psi(a)=\lim_{x\to a}\psi(x)=0.$$

$\psi'(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a. В этой окрестности $\psi(x)$ не может нигде обращаться в 0. Действительно, пусть в некоторой точке b выполнено: $\psi(b)=0$. Тогда, поскольку $\psi(a)=0$, то по теореме Ролля найдется точка $\xi\in(a,b)$, в которой $\psi'(\xi)=0$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $\psi(x)\neq 0$ в окрестности точки a.

Пусть x – некоторая точка из окрестности точки a (положим для определенности, что $x>a$). Очевидно, будет выполнено равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-0}{\psi(x)-0}=\frac{\varphi(x)-\overbrace{\varphi(a)}^{=0}}{\psi(x)-\underbrace{\psi(a)}_{=0}}. \tag{5.42}$$

Тогда для отрезка $[a,x]$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши, то есть существует точка $c\in(a,x)$ такая, что будет выполнено равенство:

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}. \tag{5.43}$$

Сравнивая равенства (5.42) и (5.43), получаем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}. \tag{5.44}$$

Перейдем к пределу при $x\to a$ в этом равенстве:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}. \tag{5.45}$$

Если $x\to a$, то и внутренняя точка отрезка $c\to a$. По условию теоремы существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$. Пусть для определенности этот предел равен конечному числу: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=A$. Тогда по определению предела будет выполнено:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}-A\right|<\varepsilon. \tag{5.46}$$

Поскольку $c \in (a, x)$, то из условия $|x-a| < \delta$ следует, что $|c-a| < \delta$, а значит для таких c будет выполнено то же неравенство: $\left|\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} - A\right| < \varepsilon$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x: |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} - A\right| < \varepsilon. \tag{5.47}$$

Значит, по определению предела,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = A. \tag{5.48}$$

С другой стороны, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = A$, то есть эти пределы равны:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{5.49}$$

Таким образом, в равенстве (5.44) правая часть имеет предел при $x \to a$. Значит и левая часть имеет такой же предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{5.50}$$

что и доказывает теорему. ■

Замечания

1) Правило Лопиталя будет справедливо в случае, когда $x \to \pm\infty$.

2) Правило Лопиталя будет верным и в случае неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, когда $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty, \ \ \psi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty$.

3) Можно применять правило Лопиталя несколько раз (если для отношения производных сохраняется неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

Пример 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{4^x - 3^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 3}.$$

Пример 2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

Замечание

Требование существования предела отношения производных в правиле Лопиталя существенно. Если этого предела не существует, то никакого вывода о пределе отношения функций сделать нельзя. Рассмотрим пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

$$\Big/\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0,\quad \text{так как } \sin x \text{ – ограничена},\quad x\to\infty\Big/$$

Таким образом, предел отношения функций существует и равен 1.

Теперь рассмотрим предел отношения производных:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Этот предел не существует, поскольку для разных последовательностей $\{x_n\},\ x_n\to\infty$ будут получаться разные значения предела. В частности, при $x_n=2\pi n+\pi$ будет выполнено: $\cos x_n=-1$, то есть мы получим последовательность, состоящую целиком из нулей, предел которой также равен нулю.

При $x_n=2\pi n+\frac{\pi}{2}$ будет выполнено: $\cos x_n=0$, то есть мы получим последовательность, состоящую целиком из единиц, предел которой также равен 1.

Таким образом, правило Лопиталя не является универсальным правилом раскрытия неопределенностей. Оно работает только в случае существования предела отношения производных. В приведенном примере разобран случай, когда неопределенность нельзя раскрыть по правилу Лопиталя, однако это возможно сделать другим способом.

Рис. 51: Франсуа Лопиталь (фр. Francois de L'Hopital, 1661–1704)

5.10 Формула Тейлора

Функция общего вида может быть достаточно сложна для исследования. Поэтому целесообразно заменять её приближенно на более простую, например, на полином. Такое приближение дается формулой Тейлора.

Рис. 52: Брук Тейлор (англ. Brook Taylor, 1685–1731)

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Составим полином

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (5.51)$$

Заметим, что

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ p'_n(x_0) = f'(x_0),\ \ldots\ldots,\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (5.52)$$

Но, вообще говоря, $p_n(x) \neq f(x)$. Рассмотрим, насколько хорошо данный полином приближает функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0. Для этого введем остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) \qquad (5.53)$$

и оценим его. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма

Пусть для некоторой функции $\varphi(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0 и имеющей в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, выполнено:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots\ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0. \qquad (5.54)$$

Тогда $\varphi(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

Доказательство:

По индукции.

База индукции: $n = 1$. Условие (5.54) примет вид: $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$. Покажем, что $\varphi(x) = o\,(x - x_0)$. Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0) = 0.$$

База проверена.

Переход $n \to n+1$. Пусть утверждение верно для некоторого целого n. Покажем, что оно будет выполнено и для $n+1$, то есть если

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \; \ldots\ldots \; = \varphi^{(n+1)}(x_0) = 0, \tag{5.55}$$

то $\varphi(x) = o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$.

Заметим, что $\varphi^{(n+1)}(x_0) = (\varphi')^{(n)}(x_0)$, то есть условие (5.55) с $(n+1)$-ой производной функции $\varphi(x)$ дает нам условие леммы с n производными для функции $\varphi'(x)$. Тогда, по индукционному предположению, для функции $\varphi'(x)$ будет выполнено:

$$\varphi'(x) = o\left((x - x_0)^n\right). \tag{5.56}$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на некотором отрезке $[x_0, x]$. Тогда по формуле Лагранжа (5.31) имеем:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x) - \overbrace{\varphi(x_0)}^{=0}}{x - x_0} = \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = \varphi'(c)(x - x_0), \quad \text{где } c \in (x_0, x). \tag{5.57}$$

По формуле (5.56) для точки $c \in (x_0, x)$ будет выполнено:

$$\varphi'(c) = o\left((c - x_0)^n\right) = \Big/ \text{так как } |c - x_0| < |x - x_0| \Big/ = o\left((x - x_0)^n\right).$$

Подставляя $\varphi'(c)$ в формулу (5.57), получаем:

$$\varphi(x) = o\left((x - x_0)^{n+1}\right),$$

то есть мы доказали индукционный переход. ■

Теорема 16 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Если функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0, то она представима в виде:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{p_n(x)} + o\left((x - x_0)^n\right). \tag{5.58}$$

Определение

Формула (5.58) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано. При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{5.59}$$

Доказательство:

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ p'_n(x_0) = f'(x_0),\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \ .\ .\ .\ .\ .\ = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Следовательно, остаточный член $r_n(x)$ удовлетворяет условию леммы и равен $o\left((x - x_0)^n\right)$:

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right),$$

что и доказывает формулу (5.58). ■

Для приближения функции $f(x)$ мы использовали полином $p_n(x)$ специального вида. Можно ли использовать для приближения другие полиномы? Оказывается, что если мы задаем точность приближения $o\left((x - x_0)^n\right)$, то никакой другой полином не подойдет. Он даст бóльшую погрешность.

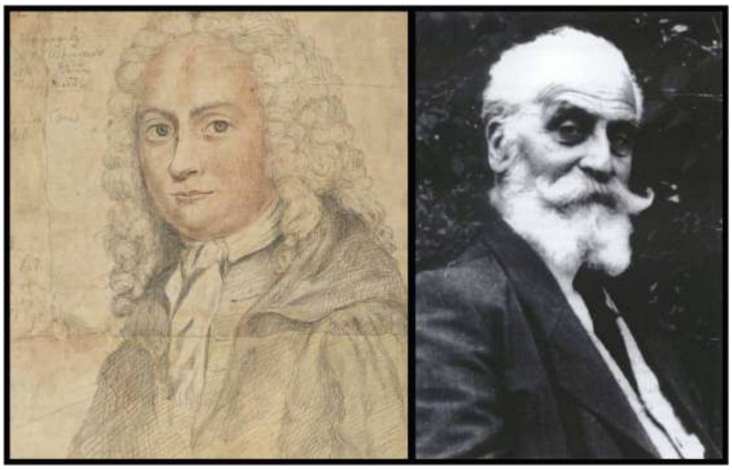


Рис. 53: Слева: Колин Маклорен (англ. Colin Maclaurin, 1698–1746). Справа: Джузеппе Пеано (итал. Giuseppe Peano, 1858–1932)

Теорема 17 (Единственность приближения полиномом)

Представление n раз дифференцируемой функции в виде

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ \ldots.. \ + A_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

единственно.

<u>Доказательство:</u>

От противного. Пусть есть 2 представления.

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ \ldots.. \ + A_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) =$$

$$= \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1(x - x_0) + \ \ldots.. \ + \widetilde{A}_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Отсюда при $x \to x_0$ получим: $A_0 = \widetilde{A_0}$. Сократим эти члены и разделим обе части равенства на $(x - x_0)$. Получим:

$$A_1 + A_2(x - x_0) + \ \ldots.. \ + A_n(x - x_0)^{n-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right) =$$

$$= \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2(x - x_0) + \ \ldots.. \ + \widetilde{A}_n(x - x_0)^{n-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right).$$

Тогда при $x \to x_0$ получаем: $A_1 = \widetilde{A_1}$. И так далее. Продолжаем процедуру до тех пор, пока все коэффициенты не совпадут. ■

Форма Пеано остаточного члена не позволяет получить качественную оценку погрешности приближения функции полиномом. Найдем такую форму остаточного члена, которая поможет получить эту оценку.

Другие формы остаточного члена

Рассмотрим остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \,.\,.\,.\,.\,. - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (5.60)$$

При получении формы Пеано для $r_n(x)$ предполагалось, что функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Для того чтобы получить более детальную форму остаточного члена, мы добавим дополнительное условие дифференцируемости, а именно, предположим, что в некоторой окрестности x_0 функция $n+1$ раз дифференцируема. Для определенности рассмотрим промежуток $[x_0, x_0+H]$ (для $[x_0-H, x_0]$ рассмотрение аналогично). Возьмем произвольное значение $x \in [x_0, x_0+H]$ и зафиксируем его. Составим функцию $\varphi(z)$ по следующему правилу:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \,.\,.\,.\,.\,. - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n, \quad \text{где } z \in [x_0, x]. \quad (5.61)$$

Поскольку функция $f(z)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[x_0, x]$, то функция $\varphi(z)$ на этом отрезке непрерывна и дифференцируема. На концах отрезка она принимает следующие значения:

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0. \quad (5.62)$$

Продифференцируем равенство (5.61):

$$\varphi'(z) = -\cancel{f'(z)} - \left[\cancel{\frac{f''(z)}{1!}(x - z)} - \cancel{f'(z)}\right] - \left[\cancel{\frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2} - \cancel{\frac{f''(z)}{1!}(x - z)}\right] -$$

$$.\,.\,.\,.\,. - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n - \cancel{\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x - z)^{n-1}}\right] = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n. \quad (5.63)$$

Выведем формулу для остаточного члена в достаточно общей форме, чтобы иметь возможность выбирать её конкретный вид в зависимости от ситуации. Для этого возьмем некоторую функцию $\psi(x)$, непрерывную на отрезке $[x_0, x]$ и дифференцируемую в интервале (x_0, x), причем

$\psi'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in (x_0, x)$. Тогда пара функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши (5.38), в соответствии с которой существует точка $c \in (x_0, x)$:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, \quad \text{где } c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1. \tag{5.64}$$

Так как $\varphi(x) = 0, \;\; \varphi(x_0) = r_n(x)$ в силу (5.62), то последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\frac{-r_n(x)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \;\Leftrightarrow\; \Big/ \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ (формула (5.63))} \Big/$$

$$\Leftrightarrow\; r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{5.65}$$

Выбирая различные $\psi(x)$, будем получать разные формы остаточного члена.

1) Пусть $\psi(z) = (x - z)^p, \;\; p > 0$. Тогда:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1} \tag{5.66}$$

– остаточный член в форме Шлёмильха и Роша.

<u>Доказательство:</u>

Подставим $\psi(x) = (x - x)^p = 0$ и $\psi(x_0) = (x - x_0)^p$ в формулу для $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{0 - (x - x_0)^p}{p \cdot (x-c)^{p-1} \cdot (-1)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} \cdot (x - x_0)^p \cdot (x-c)^{n-p+1} = \Big/ c = x_0 + \theta(x - x_0) \Big/ =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p} \cdot (x - x_0)^p \cdot \underbrace{(x - x_0 - \theta(x - x_0))^{n-p+1}}_{=(x-x_0)^{n-p+1}\cdot(1-\theta)^{n-p+1}} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p} \cdot (1-\theta)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

$\blacksquare$

2) Пусть $\psi(z) = (x - z)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (5.67)$$

– остаточный член в форме Лагранжа, который выглядит особенно просто. Он напоминает следующий очередной член формулы Тейлора, но вместо того, чтобы вычислить $(n+1)$-ю производную в точке x_0, эту производную берут для некоторого среднего (между x_0 и x) значения c. Формула напрямую следует из формы Шлёмильха и Роша при $p = n+1$.

3) Пусть $\psi(z) = x - z$. Тогда:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1} \qquad (5.68)$$

– остаточный член в форме Коши.

Рис. 54: Слева: Оскар Ксавер Шлёмильх (нем. Oskar Xavier Schlomilch, 1823–1901). Справа: Эдуард Альбер Рош (фр. Edouard Albert Roche, 1820–1883)

5.11 Формулы Маклорена для основных элементарных функций

Формула Маклорена — это формула Тейлора, написанная в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x). \qquad (5.69)$$

Используя полученные ранее выражения для производных n-го порядка основных элементарных функций, напишем формулы Маклорена для e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$. Остаточный член будем записывать в форме Лагранжа.

$$\textbf{1)}\ \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}. \qquad (5.70)$$

Здесь и далее: c – некоторая точка, лежащая в интервале $(0, x)$ (либо $(x, 0)$).

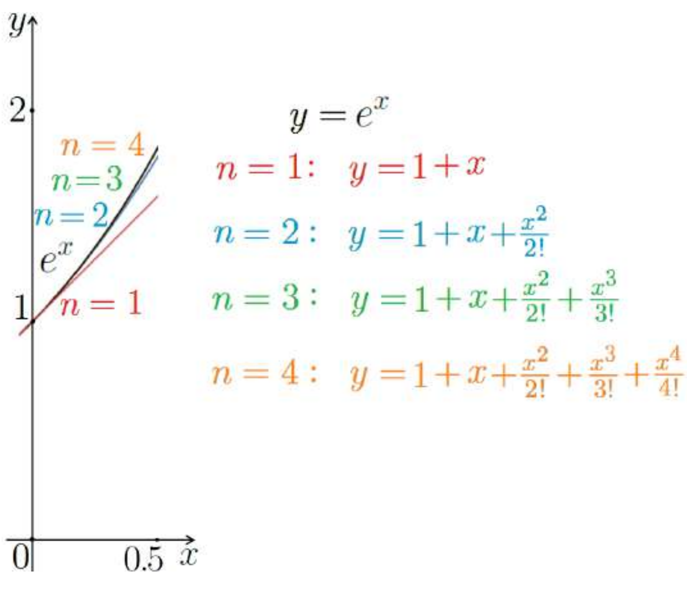


Рис. 55: Приближение функции e^x в окрестности нуля на отрезке $[0, 0.5]$

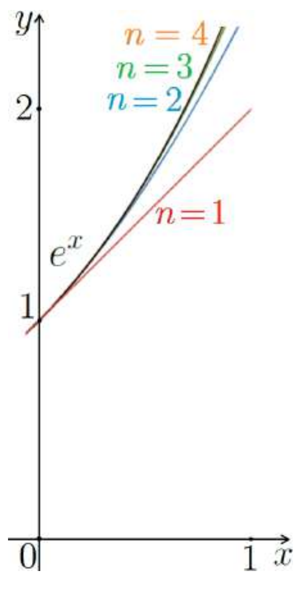


Рис. 56: Приближение функции e^x в окрестности нуля на отрезке $[0, 1]$

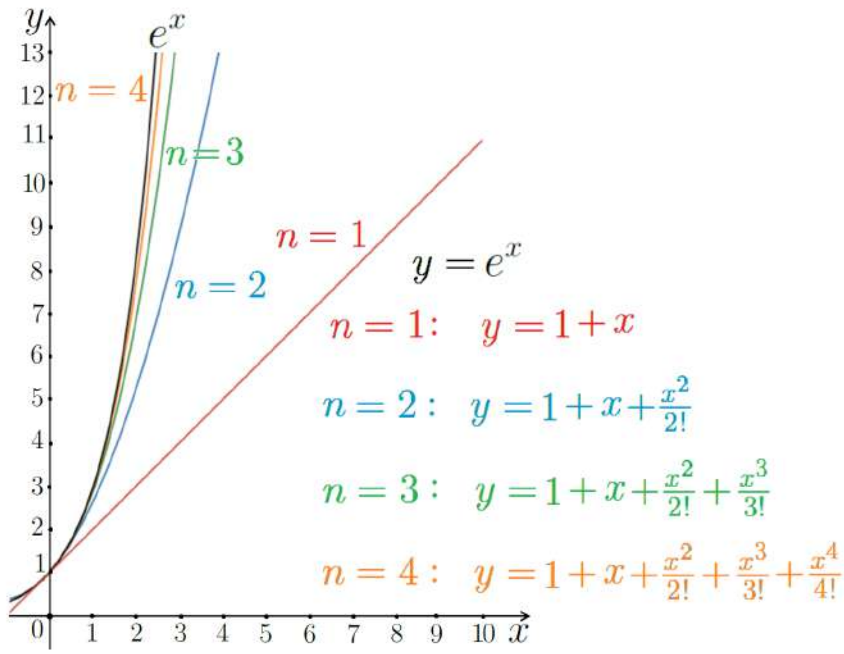


Рис. 57: Приближение функции e^x в окрестности нуля на отрезке $[0,10]$

2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin\left(c + \frac{\pi(2n+2)}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}. \tag{5.71}$$

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(c + \frac{\pi(2n+1)}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{5.72}$$

4) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{5.73}$$

5) $$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+\frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{(n+1)!}\cdot(1+c)^{a-n-1}\cdot x^{n+1}. \tag{5.74}$$

6) $$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+ \ .\ .\ .\ .\ .\ +x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}} \tag{5.75}$$

– бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

5.12 Исследование функций. Возрастание и убывание функции

Теорема 18 (Признак постоянства функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была постоянной на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \tag{5.76}$$

Доказательство:

Необходимость. $f(x) = const \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Докажем, что $f(x) = const$. Возьмем две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$, то она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \text{ (по условию теоремы) } \Rightarrow\; f(x_2) = f(x_1).$$

Поскольку точки x_1 и x_2 были выбраны произвольным образом, последнее равенство означает, что $f(x) = const$. ■

Теорема 19 (Признак возрастания (убывания) функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Для того чтобы $f(x)$ не убывала (не возрастала) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие:

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \quad \forall x \in (a, b). \tag{5.77}$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$ и выберем $\triangle x$ так, чтобы $x + \triangle x \in (a, b)$. Пусть для определенности $\triangle x > 0$. Тогда $x + \triangle x > x$. Так как $f(x)$ не убывает, то $f(x + \triangle x) \geq f(x)$. Следовательно,

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \geq 0.$$

Сделаем предельный переход в неравенстве при $\triangle x \to 0$, получим: $f'(x) \geq 0$. Аналогично для $\triangle x < 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Покажем, что функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Возьмем две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$, то она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0 \text{ (по условию теоремы)} \Rightarrow \Big/ \text{так как } x_2 > x_1 \Big/ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; f(x_2) \geq f(x_1).$$

Поскольку точки x_1 и x_2 были выбраны произвольным образом, последнее равенство означает, что функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b).

■

Замечание

Если неравенство для производной функции строгое:

$f'(x) > 0 \;\; (f'(x) < 0)$, то возрастание (убывание) функции также будет строгим.

Пример 1

Найдем интервалы монотонности функции $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0 \;\forall x \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow$ функция $f(x)$ возрастает на всей вещественной оси.

Пример 2

Найдем интервалы монотонности функции $f(x) = (x+1)^4$.

$f'(x) = 4(x+1)^3$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x > -1, \\ f'(x) = 0 \text{ при } x = -1, \\ f'(x) < 0 \text{ при } x < -1. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x)\downarrow$ (убывает) на $(-\infty,-1]$;
$f(x)\uparrow$ (возрастает) на $[-1,\infty)$.

Замечание

Точку $x=-1$, в которой меняется характер монотонности функции, можно относить к любому из интервалов $(-\infty,-1)$ или $(-1,\infty)$ или к обоим интервалам сразу.

5.13 Экстремумы функции

Определение

Множество точек x, удовлетворяющих условиям $|x-x_0|<\varepsilon,\ x\neq x_0$, называется выколотой ε-окрестностью точки x_0.

Определение

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, имеет в этой точке максимум (минимум), если для всех x из некоторой выколотой окрестности x_0 выполняется неравенство: $f(x_0)>f(x)$
$(f(x_0)<f(x))$.

Заметим, что для обозначения максимума (max) или минимума (min) существует и объединяющий их термин – экстремум.

Замечание

Отметим, что само определение максимума (минимума) предполагает, что функция задана по обе стороны от точки x_0. Понятие max и min не совпадает с понятием наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, которые могут достигаться на его концах.

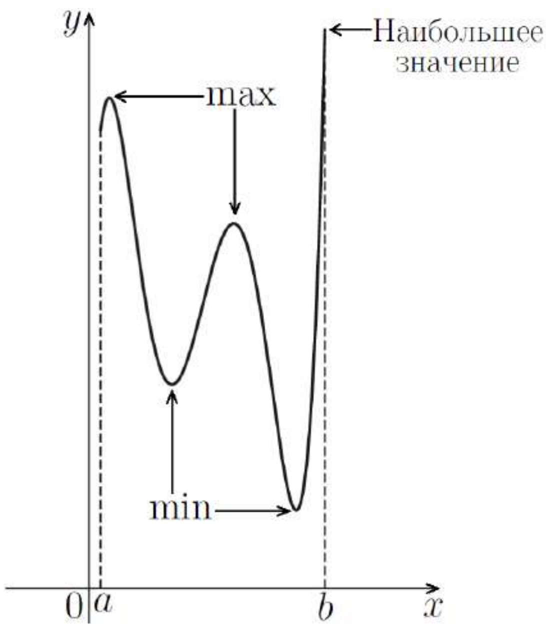


Рис. 58: Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции

Теорема 20 (Необходимое условие экстремума)
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0. \tag{5.78}$$

Доказательство:
Наличие экстремума у функции $f(x)$ в точке x_0 предполагает наличие ε-окрестности точки x_0, в которой значения функции меньше (больше), чем в точке x_0. В этом случае понятие максимума (минимума) совпадает с понятием наибольшего (наименьшего) значения. Кроме того, функция $f(x)$ дифференцируема в этой окрестности. Значит в указанной окрестности можно применить к $f(x)$ теорему Ферма, в соответствии с которой $f'(x_0) = 0$.

■

Замечание
Если расширить класс рассматриваемых функций $f(x)$ и допустить, что в отдельных точках двусторонней конечной производной не существует, то не исключена возможность того, что экстремум придется на какую-либо из таких точек, ибо теорема Ферма утверждает равенство $f'(x) = 0$ лишь в предположении, что существует двусторонняя конечная производная.

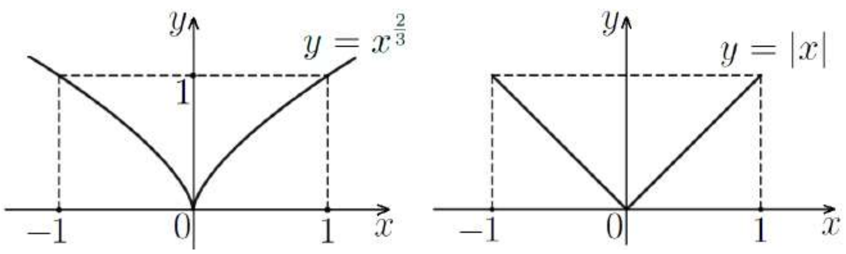


Рис. 59: Слева – график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$. Справа – график функции $y = |x|$.

Например, функция $y = x^{\frac{2}{3}}$ имеет минимум при $x = 0$, в то время как в этой точке её производная $y'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$. Точно также в точке $x = 0$ имеет минимум функция $y = |x|$, хотя двусторонней производной для неё в этой точке нет. Следовательно, и точки, в которых производная не существует, также могут доставлять функции экстремум.

Определение

Точка, в которой $f'(x_0) = 0$, называется стационарной (критической или точкой, подозрительной на экстремум).

Замечание

В стационарной точке может и не быть экстремума. Например, функция $y = x^3$ монотонно возрастает и в стационарной точке $(0, 0)$ экстремума не имеет.

Теорема 21 (Достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0,
$f'(x_0) = 0$ и при прохождении через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "$+$" на "$-$", то в точке x_0 достигается экстремум-максимум; если $f'(x)$ меняет знак с "$-$" на "$+$", то в точке x_0 достигается экстремум-минимум.

Доказательство:

Пусть производная в точке x_0 меняет знак с "$+$" на "$-$". Тогда слева от точки x_0 (при $x_1 < x_0$) функция возрастает и выполнено: $f(x_1) < f(x_0)$. Справа от точки x_0 (при $x_2 > x_0$) функция убывает, поэтому
$f(x_2) < f(x_0)$. Таким образом, в точке x_0 функция достигает максимума. Аналогично рассматривается случай экстремума-минимума.

■

Замечание

Доказательство остается в силе, если в точке x_0 производная не существует, поскольку в доказательстве используется только информация о знаке производной слева и справа от точки x_0, а не её значение в самой точке.

Пример 1

Исследуем на экстремум функцию $y = x^3$. Её производная $y'(x) = 3x^2$ не меняет знак на вещественной оси. Поэтому функция экстремумов не имеет, хотя стационарная точка существует ($y'(x) = 0$ при $x = 0$).

Пример 2

Исследуем на экстремум функцию $y = \frac{x^4}{x^3-1}$.

Область определения функции: $x \neq 1$. Найдем стационарные точки.

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \Big/ x \neq 1 \Big/ \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^6 - 4x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 = 4 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{array}\right.$$

Отметим на оси стационарные точки и граничные точки области определения функции.

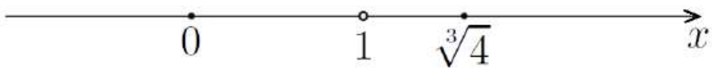


Рис. 60: Стационарные точки функции $y = \frac{x^4}{x^3-1}$

Выясним знак производной

$$y'(x) = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x-\sqrt[3]{4})(x^2 + x\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$$

на каждом из промежутков между отмеченными точками. Производная $y'(x)$ непрерывна внутри каждого промежутка (как комбинация полиномов), поэтому для выяснения её знака достаточно вычислить значение производной в какой-либо точке промежутка. И сделать это для каждого промежутка. Данный метод выяснения знака производной универсален. Он работает в случае, когда производная представляет собой комбинацию элементарных функций (e^x, $\sin x, \cos x, \ln x$, $\operatorname{arctg} x$, x^n и так далее).

В нашем случае производная $y'(x)$ представляет собой комбинацию полиномов, поэтому её знак можно выяснить более простым путем. Каждый из полиномов разложим на элементарные множители. Множитель может менять знак только при прохождении аргумента через его корень. При этом множитель $(x-a)^k$ меняет знак при прохождении аргумента x через точку a при нечетных k и не меняет знака при четных k.

Возьмем достаточно большое x (например, $x = 100$) и оценим значение производной $y'(100)$:

$$y'(100) = \frac{100^3(100^3-4)}{(100^3-1)^2} > 0.$$

В точке $x = \sqrt[3]{4}$ производная меняет знак, так как множитель $(x-\sqrt[3]{4})$ входит в выражение для производной в первой степени.

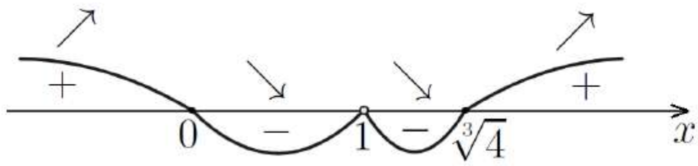


Рис. 61: Знак производной $y'(x)$

В точке $x = 1$ производная знака не меняет, ибо в выражение для производной входит множитель $(x-1)^2$ (в четной степени). В точке $x = 0$ знак вновь меняется на противоположный в силу нечетной степени у x^3.

При прохождении через точку $x = 0$ производная $y'(x)$ меняет знак с "+" на "−", то есть в точке 0 достигается экстремум-максимум:

$$y(0) = 0.$$

При прохождении через точку $x = \sqrt[3]{4}$ производная $y'(x)$ меняет знак с "−" на "+", то есть в точке $\sqrt[3]{4}$ достигается экстремум-минимум:

$$y(\sqrt[3]{4}) = \frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 1} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Метод интервалов для определения знаков производной

Если производная функции непрерывна, то определить её знаки в интервалах между корнями помогает метод интервалов. Для этого на оси OX следует указать все корни с учетом кратностей. На одном из интервалов определяется знак $y'(x)$ (в точке, где значение $y'(x)$ легко вычислить). Затем, последовательно переходя на соседние интервалы, определяют знаки на них по следующему правилу: при переходе через корень четной кратности знак не меняется, при переходе через корень нечетной кратности знак меняется на противоположный. Для использования этого правила нужно уметь определять кратность корня дифференцируемой функции, так как ранее кратность корня была определена только для полинома.

Определение **(кратность корня)**

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 корень кратности n, если выполнено:

$$\begin{cases} f(x_0) = 0, \\ f'(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0. \end{cases} \tag{5.79}$$

Следующая теорема может помочь упростить задачу о вычислении кратности корня:

Теорема 22 (Кратность корня произведения функций)

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 корень кратности m, функция $g(x)$ имеет в точке x_0 корень кратности n. Тогда их произведение $f(x) \cdot g(x)$ имеет в точке x_0 корень кратности $m + n$.

Доказательство:

Поскольку x_0 – корень кратности m функции $g(x)$, то, согласно определению (5.79) о кратности корня, будет execute:

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \ \ldots\ldots, \ f^{(m-1)}(x_0) = 0, \ f^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Так как x_0 – корень кратности n функции $g(x)$, то выполнено:

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = 0, \ \ldots\ldots, \ g^{(m-1)}(x_0) = 0, \ g^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Найдем кратность корня x_0 для произведения функций $f(x) \cdot g(x)$. По формуле Лейбница вычислим производную порядка r от произведения функций $f(x) \cdot g(x)$:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} C_r^s f^{(s)}(x) g^{(r-s)}(x). \tag{5.80}$$

Если $r < m+n$, то в каждом слагаемом либо $s < m$, либо $r-s < n$, поэтому в точке x_0 в каждом слагаемом либо $f^{(s)}(x_0) = 0$, либо $g^{(r-s)}(x_0) = 0$ (или оба сомножителя обращаются в нуль). Таким образом,

$$(f(x)g(x))^{(r)}\Big|_{x=x_0} = 0 \ \text{ при } r < m+n.$$

Если $r = m+n$, то в выражении (5.80) появится одно ненулевое слагаемое, а именно:

$$C_{m+n}^m f^{(m)}(x_0) g^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Следовательно,

$$(f(x)g(x))^{(m+n)}\Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

Тогда, согласно определению (5.79), x_0 будет корнем кратности $m+n$ для функции $f(x)g(x)$.

■

Пример 3

Исследуем на экстремум функцию $y = \sin^4 x - 4\sin x$.

Функция периодическая, с периодом 2π, определена на всей вещественной оси. Поэтому достаточно найти экстремумы на промежутке $[0,\ 2\pi]$. Найдем стационарные точки:

$$y'(x) = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ 4\cos x(\sin^3 x - 1) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos x(\sin x - 1)\underbrace{(\sin^2 x + \sin x + 1)}_{>0} = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos x(\sin x - 1) = 0.$$

На отрезке $[0,\ 2\pi]$ имеем:

$$\cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\sin x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем кратность корня $\frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ (\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ корень первой кратности}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\sin x - 1)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ (\sin x - 1)'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ (\sin x - 1)''\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ корень второй кратности}$$

Таким образом, $x = \frac{\pi}{2}$ для функции $\cos x(\sin x - 1)$ является корнем третьей кратности. Найдем кратность корня $\frac{3\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0 \\ (\cos x)'\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}} = -\sin x\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ корень первой кратности}$$

$(\sin x - 1)\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2 \neq 0$, то есть $x = \dfrac{3\pi}{2}$ – не корень функции $\sin x - 1$.

Значит $x = \frac{3\pi}{2}$ – корень первой кратности для функции $\cos x(\sin x - 1)$, а значит и для функции $y'(x) = 4\cos x(\sin^3 x - 1)$.

Выясним знак производной $y'(x)$ на всех получившихся промежутках. Можно взять в одном из них удобную точку для вычисления. Например, $x = 0$:

$$y'\Big|_{x=0} = -4 < 0.$$

Корень $x = \frac{\pi}{2}$ имеет третью кратность (нечетную), поэтому при прохождении через него производная $y'(x)$ меняет знак. Аналогично для корня $x = \frac{3\pi}{2}$.

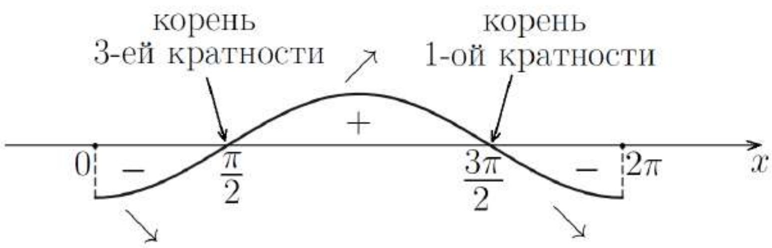


Рис. 62: Знак производной $y'(x)$

Следовательно, на $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция убывает, на $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ – возрастает, на $\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$ – убывает.

При прохождении через точку $x = \frac{\pi}{2}$ производная $y'(x)$ меняет знак с “$-$” на “$+$”, то есть в точке $\frac{\pi}{2}$ достигается экстремум-минимум:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^4 - 4 = -3.$$

При прохождении через точку $x = \frac{3\pi}{2}$ производная $y'(x)$ меняет знак с “$+$” на “$-$”, то есть в точке $\frac{3\pi}{2}$ достигается экстремум-максимум:

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)^4 - 4\cdot(-1) = 5.$$

Учитывая периодичность функции $y = \sin^4 x - 4\sin x$, получаем следующие экстремумы: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ – точки минимумов, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ – точки максимумов.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если ставится задача найти не экстремумы, а наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то следует найти все стационарные точки функции на интервале (a, b) и вычислить значения функции в них. Также следует найти значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$. Затем из всех этих значений выбираются наибольшее и наименьшее. Заметим, что проверять достаточные условия в стационарных точках при этом не требуется.

Пример

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$ на отрезке $[-\sqrt{3}, 10]$. Посчитаем производную:

$$y'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Найдем стационарные точки:

$$y'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1.$$

Вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.

$$y(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}, \quad y(1) = 1 - \frac{\pi}{2};$$
$$y(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad y(10) = 10 - 2\,\mathrm{arctg}\, 10.$$

Выберем из этих значений функции наибольшее и наименьшее. Наибольшее значение $(10 - 2\,\mathrm{arctg}\, 10)$ достигается при $x = 10$, наименьшее значение $\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$ достигается при $x = 1$.

5.14 Выпуклость графика функции

Определение

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх (вниз), если в окрестности каждой своей точки он лежит ниже (выше) любой своей касательной.

Замечание

В математическом анализе выпуклой функцией называют функцию, график которой выпуклый вниз.

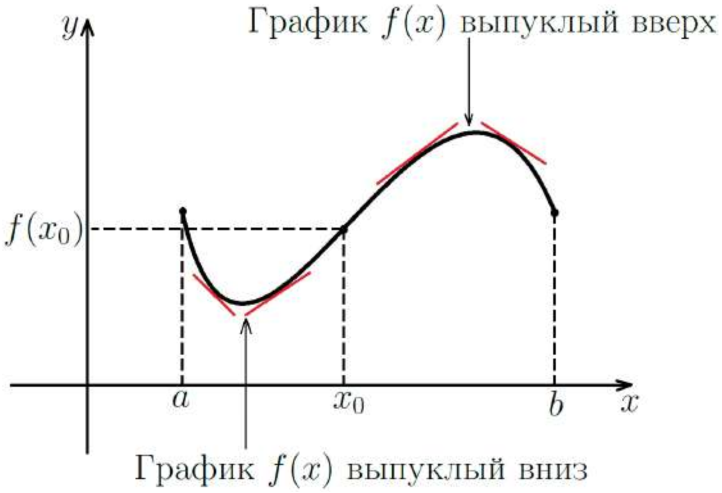


Рис. 63: Выпуклость графика функции. x_0 – точка перегиба

Определение

Точка перегиба – это точка, в которой меняется характер выпуклости.

Удобно характеризовать выпуклость графика в терминах дифференциала. Действительно, дифференциал связан с касательной к графику функции (смотри рис. 64). Если график функции выпуклый вниз, то он лежит выше касательной, а значит приращение функции $\triangle y$ будет больше дифференциала dy ($\triangle y > dy$). Аналогично, если график функции выпуклый вверх, то приращение функции будет меньше дифференциала ($\triangle y < dy$).

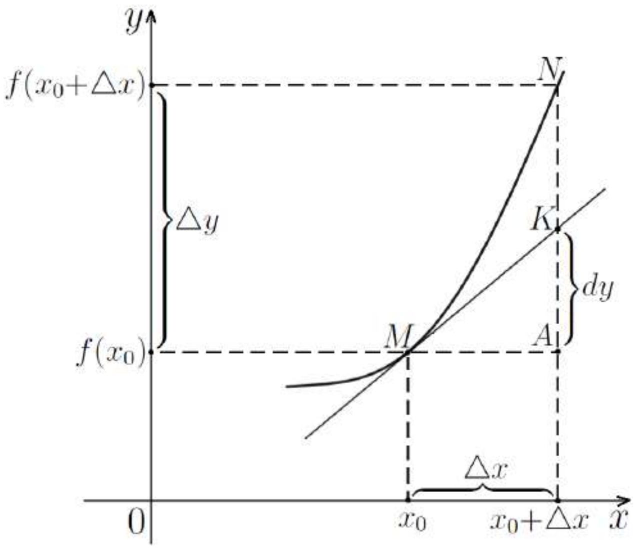


Рис. 64: Выпуклость графика функции в терминах дифференциала

Теорема 23 (Признак выпуклости функции)

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда если $f''(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то график функции будет выпуклым вверх на $[a, b]$, если $f''(x) > 0$, то выпуклым вниз.

Доказательство:

Пусть $f''(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$. Покажем, что график функции будет выпуклым вверх. Возьмем точку $x \in [a, b]$ и $\triangle x$ такое, что $x + \triangle x \in [a, b]$. Тогда по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) для окрестности точки x имеем:

$$f(x + \triangle x) = f(x) + f'(x)\triangle x + \frac{f''(c)}{2!}(\triangle x)^2, \quad \text{где } c \in (x, x + \triangle x). \tag{5.81}$$

Заметим, что $f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f$ – приращение функции, а $f'(x)\triangle x = df$ – дифференциал. Тогда формулу (5.81) можно переписать так:

$$\triangle f - df = \frac{f''(c)}{2!}(\triangle x)^2, \quad \text{где } c \in (x, x + \triangle x). \tag{5.82}$$

По предположению $f''(c) < 0$, поэтому:

$$\triangle f - df < 0 \;\Leftrightarrow\; \triangle f < df,$$

то есть график выпуклый вверх.

Аналогично, если $f''(x) > 0$, то $\triangle f > df$ и график функции выпуклый вниз.

$\blacksquare$

Замечание

В теореме предполагалось существование конечной второй производной во всех точках рассматриваемого промежутка. Однако точки перегиба могут быть и там, где y'' не существует. Возьмем, например, функцию $y = x^{\frac{1}{3}}$. Тогда:

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}.$$

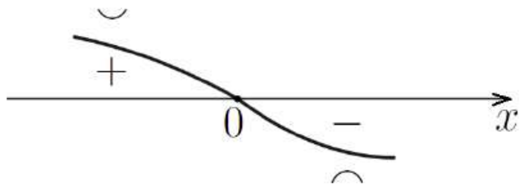


Рис. 65: Знак производной $y''(x)$

y'' не существует при $x = 0$. Но в этой точке характер выпуклости меняется, так как вторая производная меняет знак. Значит по определению $x = 0$ является точкой перегиба.

Пример

Выясним характер выпуклости графика функции $y = \frac{x^4}{x^3-1}$.

$$y'(x) = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2},$$

$$y''(x) = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3-1)^2 - (x^6 - 4x^3) \cdot 2(x^3-1) \cdot 3x^2}{(x^3-1)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{6x^8} - 12x^5 - 6x^5 + 12x^2 - \cancel{6x^8} + 24x^5}{(x^3-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} = \frac{6x^2(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{(x-1)^3(x^2+x+1)^3}$$

Отметим на числовой оси точки, где $y''(x) = 0$ или не существует. Выясним знак y'' на всех полученных промежутках. Найдем $y''(x)$ при достаточно больших значениях x, например, $x = 100$:

$$y''(100) = \frac{6 \cdot 100^2(100 + \sqrt[3]{2})(100^2 - \sqrt[3]{2} \cdot 100 + \sqrt[3]{4})}{99^3(100^2 + 100 + 1)^3} > 0.$$

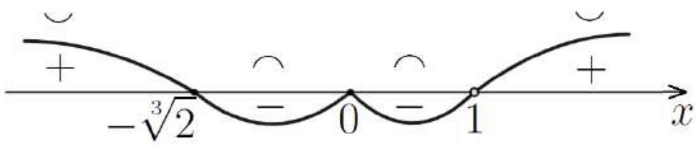


Рис. 66: Знак производной $y''(x)$

При прохождении точки $x = 1$ знак меняется, так как в выражении для y'' присутствует множитель $(x-1)^3$. При прохождении $x = 0$ знак не меняется, так как присутствует x^2. При прохождении $x = -\sqrt[3]{2}$ знак меняется из-за множителя $(x + \sqrt[3]{2})$. Итак, вторая производная дважды меняет знак – в точках $x = 1$ и $x = -\sqrt[3]{2}$. Тем не менее, точка перегиба только одна: $x = -\sqrt[3]{2}$, $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, ибо $x = 1$ не входит в область определения функции.

Теорема 24 (Достаточное условие экстремума с использованием второй производной)

Пусть в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема, причем вторая производная $f''(x)$ непрерывна, а первая производная $f'(x_0) = 0$. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0. Если $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0.

Доказательство:

Пусть $f''(x_0) < 0$. Поскольку вторая производная $f''(x)$ непрерывна, то $f''(x) < 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Значит в этой окрестности график функции будет выпуклым вверх. Следовательно, он лежит ниже касательной, проведенной в точке x_0. Но в точке x_0 выполнено:
$f'(x_0) = 0$, то есть касательная параллельна оси абсцисс. Её уравнение $y = f(x_0)$, а график функции лежит ниже, то есть $f(x) < f(x_0)$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0.

Аналогично доказывается для случая $f''(x_0) > 0$.

■

5.15 Асимптоты кривых

Определение

Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние между текущей точкой кривой и этой прямой стремится к нулю по мере удаления точки от начала координат на бесконечность.

Найдем уравнение асимптоты графика функции. В зависимости от расположения на плоскости эта прямая может быть вертикальной, горизонтальной или наклонной.

Вертикальная прямая $x = a$ будет асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполнено:

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty \end{array}\right. \tag{5.83}$$

Таким образом, в точке $x = a$ функция теряет ограниченность, и эти точки следует искать, проверяя условия (5.83) для всех граничных точек области определения функции.

Горизонтальная прямая $y = b$ будет асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполнено:

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b \end{array}\right. , \tag{5.84}$$

причем пределы на $+\infty$ и $-\infty$ нужно рассматривать по отдельности.

Найдем уравнение наклонной асимптоты. Пусть
$y = y_{\text{ас.}} = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$.

По определению асимптоты, расстояние PN от текущей точки $P(x, f(x))$ кривой $y = f(x)$ до асимптоты стремится к нулю. Отрезок PN перпендикулярен асимптоте.

Рис. 67: Наклонная асимптота

$$PM = PN \cos\alpha,$$

где α – угол наклона прямой, поэтому:

$$PN \to 0 \;\Leftrightarrow\; PM \to 0.$$

Длина отрезка PM, соответствующего точке x, равна модулю разности ординат графика функции $y = f(x)$ и асимптоты $y = kx + b$. Итак,

$$0 = \lim_{x\to\infty} PN = \lim_{x\to\infty} PM \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - b| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty} x\left|\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right| = 0 \;\Rightarrow \tag{5.85}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right| = 0. \tag{5.86}$$

Ясно, что:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0. \tag{5.87}$$

Тогда из формул (5.86) и (5.87) получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k. \tag{5.88}$$

Соотношение (5.88) является необходимым условием того, что прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$.
Вернемся к формуле (5.85):

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - b| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0. \tag{5.89}$$

Подставим найденное значение k в (5.89) и получим второе необходимое условие:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b. \tag{5.90}$$

Ясно, что если оба предела (5.88) и (5.90) существуют и конечны, то все выкладки можно провести в обратную сторону, а это и означает, что выполнение условий (5.88) и (5.90) достаточно для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = kx$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 25 (о наклонной асимптоте)

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases} \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases} \end{array}\right. \tag{5.91}$$

Замечание

Асимптоты на $+\infty$ и на $-\infty$ следует искать по отдельности.

Пример

Найдем асимптоты для графика функции $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

Область определения функции: $\begin{cases} e + \dfrac{1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$e + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -e \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ -xe < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -xe > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{1}{e} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{e} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\frac{1}{e} \end{array}\right.$$

Итак, мы нашли граничные точки области определения функции. В пределе к точке $x = 0$ мы приближаемся справа, к точке $x = -\frac{1}{e}$ – слева.

$$\lim_{x\to 0+0} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e + \frac{1}{x}} = 0.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ вертикальной асимптоты нет.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{e}-0} \underbrace{x}_{\to -\frac{1}{e}} \underbrace{\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} = +\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{e} \quad \text{– вертикальная асимптота.}$$

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\Bigl(e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\Bigr)=1=k.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}.$$

$y=x+\frac{1}{e}$ – наклонная асимптота.

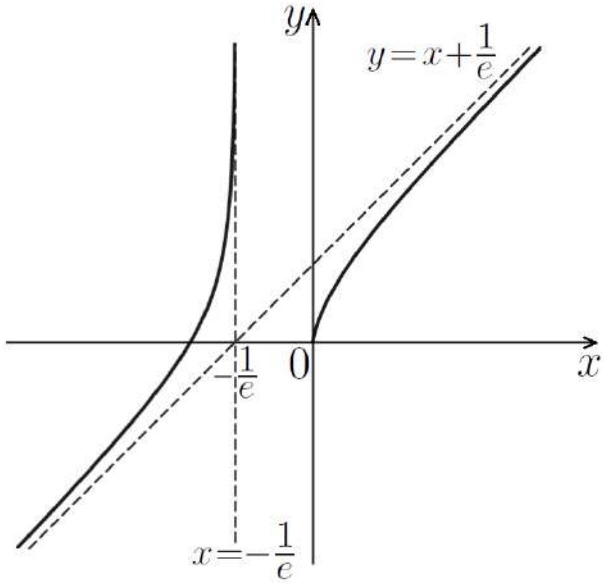


Рис. 68: График функции $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$

5.16 Общая схема исследования функции

1. Область определения функции.

2. Свойства симметрии.

Определение

Функция $f(x)$ называется четной, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля, то

есть для любого x, принадлежащего области определения, $-x$ также принадлежит области определения;
2) при замене аргумента x на противоположное $-x$ значение функции не изменится, то есть выполнено:

$$f(-x) = f(x) \ \ \forall\ x \text{ из области определения.}$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат OY.
Определение
Функция $f(x)$ называется нечетной, если:
1) область определения функции симметрична относительно нуля, то есть для любого x, принадлежащего области определения, $-x$ также принадлежит области определения;
2) при замене аргумента x на противоположное $-x$ значение функции изменит знак на противоположный:

$$f(-x) = f(x) \ \ \forall\ x \text{ из области определения.}$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
Определение
Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число T такое, что выполнено:

$$f(x+T) = f(x) \ \ \forall\ x \text{ из области определения.}$$

3. Найти экстремумы функции, интервалы возрастания и убывания функции.
4. Найти интервалы выпуклости функции вверх и вниз, точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Построить график функции. При необходимости найти значения функции в некоторых характерных точках. Например, пересечение графика функции с осями координат.

Пример 1

Исследуем функцию $y = \ln\cos x$.

1. $\ln\cos x$ определен при $\cos x > 0$. Следовательно, область определения:

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\ln(\cos(-x)) = \ln(\cos x)$ – функция четная.

$\ln(\cos(x + 2\pi)) = \ln\cos x$ – функция периодическая, с периодом 2π.

Следовательно, функцию можно исследовать только на одном периоде.

3. $y'(x) = -\operatorname{tg} x > 0 \;\Leftrightarrow\; \pi k - \dfrac{\pi}{2} < x < \pi k,\;\; k \in \mathbb{Z}.$

Пересечем полученные интервалы с областью определения функции: $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi k + \frac{\pi}{2}$. Мы получим, что:

$$y(x)\uparrow \text{ на } \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k\right), \quad y(x)\downarrow \text{ на } \left(2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

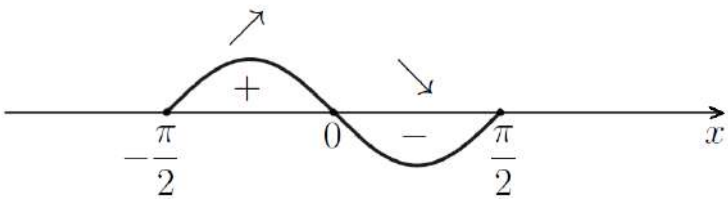


Рис. 69: Знак производной $y'(x)$

Функция $y(x)$ достигает максимума в точках $x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. $y''(x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x} < 0 \quad\Rightarrow$ функция $y(x)$ выпукла вверх на всей своей области определения.

5. Найдем асимптоты графика функции.

$$\lim_{x \to 2\pi k - \frac{\pi}{2} + 0} \ln\cos x = -\infty \;\Rightarrow\; x = 2\pi k - \frac{\pi}{2} \text{ – вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \to 2\pi k + \frac{\pi}{2} - 0} \ln\cos x = -\infty \;\Rightarrow\; x = 2\pi k + \frac{\pi}{2} \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Горизонтальных либо наклонных асимптот нет, так как функция периодическая. Значит её значения повторяются сколь угодно далеко от начала координат и она не может стремиться ни к чему, кроме самой себя. К тому же выводу можно прийти и по формальным признакам.

Горизонтальной асимптоты нет, так как пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\cos x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\cos x$ не существуют. Ибо при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ функция $\ln\cos x$ принимает как значения, равные нулю, так и сколь угодно большие по модулю значения. Либо можно отметить не существование данного предела в силу разрывов в области определения функции, которые повторяются периодически вплоть до бесконечности.

Аналогично доказывается, что пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\cos x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln\cos x}{x}$ не существуют, что означает отсутствие наклонных асимптот.

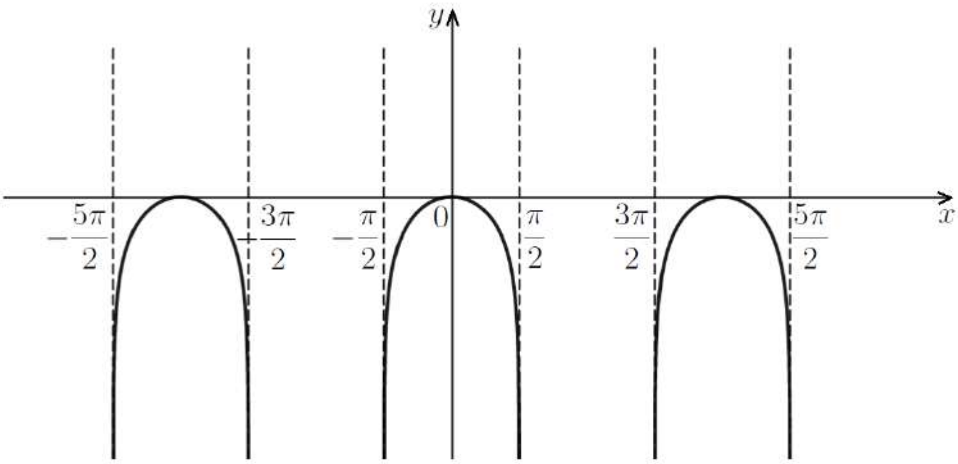


Рис. 70: График функции $y = \ln\cos x$

Пример 2

Исследуем функцию $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

1. Функция $y = x + \frac{\ln x}{x}$ определена при $x > 0$ (когда $\ln x$ существует).

2. Функция непериодическая, не обладает свойствами четности-нечетности.

3. $y'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - \ln x + 1}{x^2} > 0 \ \forall x$ из области определения функции ($x > 0$). Следовательно, функция $y(x)$ монотонно возрастает.

4. $y''(x) = \left(1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \dfrac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} =$

$= \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \ \Leftrightarrow \ \ln x = \dfrac{3}{2} \ \Leftrightarrow \ x = e^{\frac{3}{2}}.$

$y''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ x > e^{\frac{3}{2}}$ – функция $y(x)$ выпукла вверх.

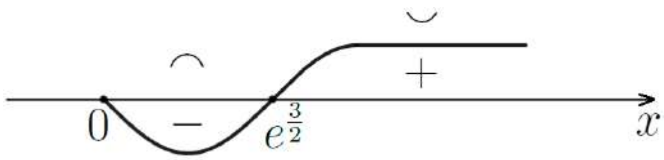


Рис. 71: Знак второй производной $y''(x)$

$0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ – функция $y(x)$ выпукла вниз. $x = e^{\frac{3}{2}}$ – точка перегиба.

5. Найдем асимптоты графика функции.

$\lim\limits_{x \to 0+0} \left(x + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty \ \Rightarrow \ x = 0$ – вертикальная асимптота.

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1,$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\cancel{x} + \dfrac{\ln x}{x} - \cancel{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Следовательно, $y = x$ – наклонная асимптота. На $-\infty$ нет необходимости искать асимптоты, так как функция определена только при $x > 0$.

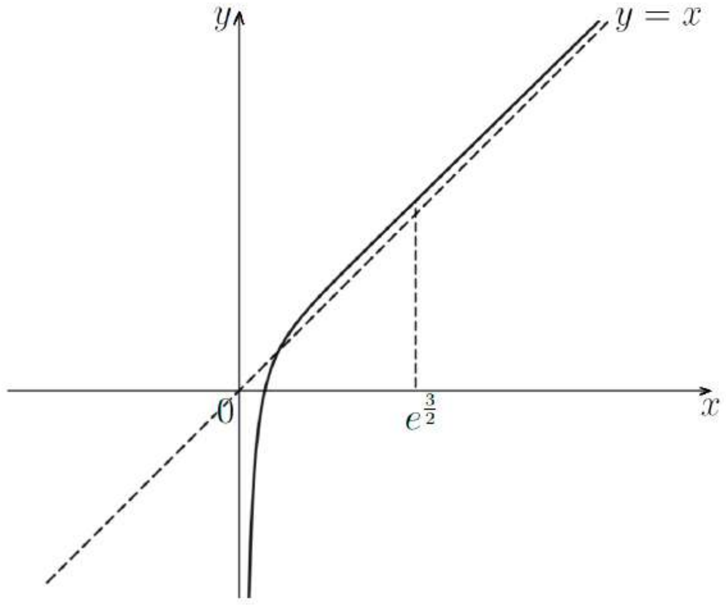


Рис. 72: График функции $y = x + \frac{\ln x}{x}$

Контрольные вопросы

Контрольные вопросы для самопроверки. Вопросы сгруппированы по главам.

Глава 1. Множества и отображения

1. Какие можно указать отношения между множествами?
2. Какие имеются основные операции над множествами?
3. Какие свойства называются ассоциативностью, коммутативностью, дистрибутивностью?
4. Что такое кванторы общности и существования?
5. Что такое функция?

Глава 2. Комплексные числа

1. Как определяются арифметические действия с комплексными числами?
2. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
3. Как выполнять арифметические операции с комплексным числом в тригонометрической форме?
4. Какие формы комплексного числа связывает формула Эйлера?
5. Как определяются тригонометрические функции комплексной переменной?
6. Что такое главное значение логарифма?

Глава 3. Полиномы

1. Как найти остаток от деления полинома на полином?

2. Какая связь существует между различными комплексными корнями полинома с вещественными коэффициентами?

3. О чем говорит основная теорема алгебры?

4. Какая связь существует между коэффициентами полинома и его корнями?

Глава 4. Пределы

1. Как определяется предел последовательности?

2. Может ли быть, что две последовательности не имеют пределов, а их сумма – имеет?

3. Может ли монотонная ограниченная последовательность не иметь предела?

4. Как определяется число e?

5. Как отличается формулировка критерия Коши сходимости последовательности от определения предела последовательности?

6. Может ли последовательность иметь предел, а её подпоследовательность – нет; и наоборот, подпоследовательность иметь предел, а вся последовательность – нет?

7. Как связан предел функции с пределом последовательности?

8. Перечислите замечательные пределы.

9. Как сравнивают бесконечно малые?

10. Чем отличаются разрывы первого и второго рода?

11. Чем отличается равномерная непрерывность от обычной непрерывности?

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Как определяется производная и какой у неё геометрический смысл?
2. Как отличаются производная от произведения функций и производная от композиции функций?
3. Перечислите производные основных элементарных функций.
4. Из каких слагаемых состоит формула для третьей производной произведения двух функций?
5. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?
6. Как продифференцировать функцию, заданную параметрически?
7. Как связаны теоремы Ролля и Лагранжа?
8. Как выглядит остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа?
9. Как проверить убывание функции?
10. Как найти экстремум функции?
11. Как выяснить характер выпуклости графика функции?
12. Какие бывают асимптоты у графиков функций и как их находить?

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989, 96 с.

[2] Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва: “Мир”, 1971, 680 с.

[3] Лапин И.А., Ратафьева Л.С., Фролов В.М. Математический анализ I. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008, 128 с.

[4] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. Москва: “Интеграл-Пресс”, 2006, 416 с.

[5] Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2. Москва: “Наука”, 1969, 528 с.

[6] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 624 с.

[7] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 13-е изд., стер. Санкт-Петербург: “Лань”, 2021, 608 с.

Попов Игорь Юрьевич
Попов Антон Игоревич

Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А