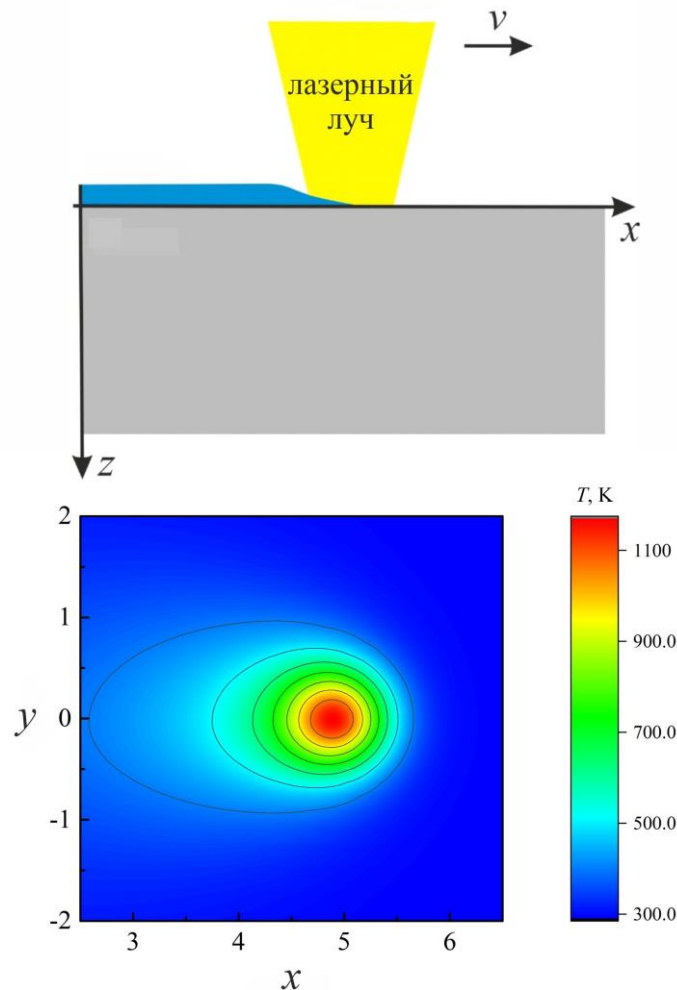


ІТМО

Д.С. Поляков, А.А. Шамова, Г.Д. Шандыбина

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ. ЧАСТЬ 1. ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И ТЕПЛОФИЗИКА ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА



Санкт-Петербург
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Д.С. Поляков, А.А. Шамова, Г.Д. Шандыбина
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
С ВЕЩЕСТВОМ. ЧАСТЬ 1. ПОГЛОЩЕНИЕ
ИЗЛУЧЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И
ТЕПЛОФИЗИКА ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 12.03.05, 16.03.01.

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2023

Поляков Д.С., Шамова А.А., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. Часть 1. Поглощение излучения в твердых телах и теплофизика лазерного нагрева: учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2023. – 100 с.

Рецензент(ы):

Вартамян Тигран Арменакович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") международного научно-образовательного центра физики наноструктур, Университета ИТМО.

Воздействие мощного лазерного излучения на поглощающие среды может инициировать целый спектр физико-химических процессов, приводящих к необратимому изменению их структуры и свойств. Например, это могут быть фазово-структурные изменения, изменения рельефа поверхности, разрушение материала, изменения химического состава и т.п. Лазерно-индуцированные процессы именно такого рода и являются предметом изучения в настоящем курсе. Рассмотренный круг вопросов позволит студентам получить базовые знания в весьма многообразной и непростой физике лазерно-индуцированных процессов в поглощающих средах. Учебное пособие будет полезно бакалаврам, магистрантам и инженерам технических профессий.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, sans-serif font. The letter 'I' is stylized with a vertical line through its center.

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2023

© Поляков Д.С., Шамова А.А., Шандыбина Г.Д., 2023

Содержание

Введение.....	5
Глава 1. Поглощение лазерного излучения в металлах	6
1.1 Уравнения Максвелла	6
1.2 Граничные условия для электромагнитного поля	9
1.3 Уравнение для комплексной амплитуды поля в токопроводящей среде	10
1.4 Решение уравнения для комплексной амплитуды поля в прозрачном диэлектрике.....	12
1.5 Решение уравнения для комплексной амплитуды поля в токопроводящей среде.....	13
1.6 Поглощение электромагнитной волны в металле. Скин-слой	14
1.7 Соотношение между амплитудами электрического и магнитного полей в плоской волне	15
1.8. Отражение электромагнитной волны от металла при нормальном падении	17
1.9 Основные положения модели Друде.....	19
1.10 Уравнение для усредненного импульса электрона во внешнем силовом поле	20
1.11 Формула Друде для комплексной диэлектрической проницаемости металла.....	22
1.12 Частотные зависимости оптических свойств металла	23
1.13 Ограничения применимости модели Друде. Роль связанных электронов ..	255
1.14 Ограничения применимости модели Друде. Аномальный скин-эффект. ...	288
1.15 Температурная зависимость поглощательной способности металла	288
1.16 Экспериментальные методы определения оптических свойств металлов....	29
1.17 Контрольные вопросы к Главе 1	30
Глава 2. Поглощение лазерного излучения в полупроводниках	32
2.1 Основные механизмы поглощения света в полупроводниках	32
2.2 Виды межзонного поглощения	34
2.3 Поглощение свободными носителями	36
2.4 Рекомбинационные процессы	39
2.5 Кинетика фотовозбуждения полупроводника лазерным излучением.....	40
2.6 Некоторые решения уравнения, описывающего фотовозбуждение полупроводника лазерным излучением	44
2.7 Насыщение межзонного поглощения	46
2.8 Фотоиндуцированный эффект Дембера.....	47
2.9 Экспериментальные методы исследования динамики фотовозбуждения полупроводников лазерными импульсами	48
2.10 Контрольные вопросы к Главе 2.....	51
Глава 3. Нагрев материалов лазерным излучением	52
3.1 Общая характеристика лазерного нагрева.....	52

3.2 Основные теплофизические понятия	53
3.3 Тепловой источник, связанный с поглощением лазерного излучения.....	54
3.3 Уравнение теплопроводности	55
3.4 Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности	56
3.5 Методы решения уравнения теплопроводности	58
3.6 Нагрев полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником.....	59
3.7 Нагрев полупространства поверхностным источником круглой формы.....	63
3.8 Общая характеристика основных линейных режимов лазерного нагрева.....	64
3.9 Остывание полупространства после нагрева поверхностным источником ...	67
3.10 Особенности лазерного нагрева материалов движущимся пучком постоянной мощности.....	69
3.11 Лазерный нагрев в условиях изменения поглощательной способности материала.....	70
3.12 Экспериментальные методы исследования лазерного нагрева.....	72
3.13 Контрольные вопросы к Главе 3.....	76
Список рекомендуемой литературы	77
Приложение 1. Некоторые формулы векторного анализа.....	78
Приложение 2. Некоторые специальные функции, применяемые в теории теплопроводности	81
Приложение 3. Уравнение теплопроводности в различных системах координат.....	85
Приложение 4. Интегральное преобразование Лапласа	86
Приложение 5. Применение метода интегрального преобразования Лапласа к решению задач лазерного нагрева	92
Приложение 6. Метод источников	95
Приложение 7. Применение метода источников к задачам лазерного нагрева	98

Введение

В основе подавляющего большинства лазерных технологий обработки материалов лежит тепловое действие света. «Тепловая модель» взаимодействия лазерного излучения с поглощающими конденсированными средами была разработана в 60-х годах прошлого века практически сразу после создания первого лазера. В рамках этой модели выделяются 4 основные стадии воздействия лазерного излучения на поглощающие материалы:

1. Поглощение света и переход поглощенной энергии в тепловую;
2. Нагрев материала без разрушения;
3. Протекание различных тепловых процессов, инициированных лазерным нагревом, в том числе и разрушение материала;
4. Остывание материала и сопутствующие процессы (последствие).

В общем случае эти стадии нельзя рассматривать независимо друг от друга. Например, нагрев материала может вызывать изменения его оптических свойств и, соответственно, оказывать влияние на процесс поглощения лазерного излучения. Таким образом, в ряде случаев процессы взаимодействия лазерного излучения с веществом оказываются пронизаны различного рода обратными связями, что, с одной стороны, существенно усложняет их анализ, а с другой стороны, обуславливает наличие интересных, нетривиальных особенностей в отклике материалов на лазерное воздействие, представляющих интерес для исследований как с физической точки зрения, так и с точки зрения приложений. В целом же, в рамках «тепловой модели» можно дать адекватное объяснение большинству наблюдаемых в экспериментах явлений.

В курсе «Взаимодействие лазерного излучения с веществом» последовательно рассматриваются основные стадии тепловой модели применительно к металлам, полупроводникам и диэлектрикам. Отдельное внимание уделено взаимодействию сверхкоротких лазерных импульсов с конденсированными средами. Пособие состоит из двух частей: «Поглощение излучения в твердых телах и теплофизика лазерного нагрева» и «Физико-химические процессы в конденсированных средах, инициированные лазерным нагревом». В главах 1 и 2 первой части учебного пособия рассматриваются процессы поглощения лазерного излучения и перевода поглощенной энергии в тепловую в металлах и полупроводниках. Глава 3 посвящена теплофизике лазерного нагрева.

Глава 1. Поглощение лазерного излучения в металлах

Рассмотрение процессов поглощения лазерного излучения в металлах будем проводить в рамках классической электродинамики сплошных сред, согласно которой излучение представляют в виде электромагнитных волн, а вещество – в виде непрерывной среды, характеризуемой определенными оптическими параметрами.

1.1 Уравнения Максвелла

Основой классической электродинамики является система уравнений Максвелла. В уравнения Максвелла входят четыре векторные величины, характеризующие электромагнитное поле в среде, которые являются функциями координат и времени и обычно обозначаются как \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} .

Вектор \mathbf{E} есть напряженность электрического поля, она определяет силу, действующую на заряд со стороны электрического поля \mathbf{F}_E : $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ (q – величина заряда). Соответственно, единицей измерения напряженности электрического поля будет Н/Кл или В/м¹.

Вектор \mathbf{B} называется индукцией магнитного поля, она определяет силу, действующую на движущийся заряд со стороны магнитного поля \mathbf{F}_M : $\mathbf{F}_M = q[\mathbf{v}_q, \mathbf{B}]$ (\mathbf{v}_q – скорость заряда, квадратными скобками обозначено векторное произведение). Измеряется индукция магнитного поля в теслах: Тл = Н·с/(Кл·м).

Таким образом, именно вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} определяют величины и направления сил, действующих на заряженные частицы со стороны электромагнитного поля.

Вектора \mathbf{D} (индукция электрического поля) и \mathbf{H} (напряженность магнитного поля) носят вспомогательный характер, их удобно использовать при записи уравнений Максвелла в среде. По определению индукция электрического поля равна:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная², \mathbf{P} – вектор поляризации среды.

Поясним понятие «поляризация среды». Под воздействием внешнего электрического поля электронные оболочки атомов смещаются относительно ядра. Таким образом, у атома появляется дипольный момент. Вектор поляризации среды по определению есть дипольный момент единицы объема

¹ На протяжении всего изложения мы будем пользоваться системой единиц СИ.

² Появление электрической постоянной в определении вектора \mathbf{D} связано с выбором системы единиц СИ, то же относится и к появлению магнитной постоянной в формуле (1.2) (см. напр., Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст]: учеб. пособие. В 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 496 с.)

среды: $\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$ ($d\mathbf{p}$ – суммарный дипольный момент атомов (молекул) внутри физически малого объема среды dV). Как несложно заметить, исходя из формулы (1.1), величины векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} имеют разную размерность.

Напряженность магнитного поля \mathbf{H} определяется соотношением:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1.2)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, \mathbf{M} – вектор намагниченности среды.

При анализе воздействия магнитного поля на вещество электроны, движущиеся по атомным орбитам, рассматриваются как некоторые элементарные замкнутые токи. Каждый элементарный замкнутый ток обладает магнитным моментом (кроме того, у электронов и у ядер есть ещё собственный (спиновый) магнитный момент). Под действием внешнего магнитного поля происходит переориентация элементарных магнитных моментов. Характер этой переориентации может быть различен для разных материалов (выделяют три основных класса материалов: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики). Количественной характеристикой отклика вещества на приложенное магнитное

поле является вектор намагниченности, равный по определению $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$ ($d\mathbf{m}$ – магнитный момент, которым обладает физически малый объем среды dV).

Помимо векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} в уравнения Максвелла входит вектор плотности токов проводимости \mathbf{j} и объемная плотность свободных зарядов ρ_e . Величина вектора \mathbf{j} численно равна току dI , протекающему через перпендикулярную ему малую площадку dS_{\perp} и отнесенному к величине её

площади: $\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}$. Объемная плотность свободных зарядов равна по величине суммарному свободному заряду среды dq_e в малом объеме dV , отнесенному к величине этого объема: $\rho_e = \frac{dq_e}{dV}$.

Далее выпишем непосредственно систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1.4)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho_e, \quad (1.6)$$

Мы не будем подробно комментировать уравнения (1.3) – (1.6), поскольку они должны быть уже хорошо знакомы студентам-оптикам. Отметим лишь, что

в дальнейшем нас главным образом будут интересовать особенности решения уравнений электродинамики, связанные с наличием в правой части уравнения (1.4) токов проводимости \mathbf{j} , которые, очевидно, не равны нулю в случае токопроводящих сред (металлов).

Для решения системы уравнений (1.3) – (1.6) необходимо знать связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{B} , \mathbf{j} и \mathbf{E} , которая устанавливается посредством так называемых материальных соотношений. Можно сказать, что материальные соотношения описывают отклик среды на внешнее воздействие (т.к. в соответствии со своими определениями вектора \mathbf{D} и \mathbf{H} содержат информацию о поляризации и намагниченности среды, наведенных электромагнитным полем). В макроскопической электродинамике эти соотношения полагаются известными в результате обобщения экспериментальных данных.

Прежде чем перейти к рассмотрению собственно материальных соотношений, имеет смысл сразу сделать существенное упрощающее предположение: нас будут интересовать только поля, зависящие от времени по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} & \mathbf{D} &= \mathbf{D}_\omega e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_\omega e^{-i\omega t} & \mathbf{H} &= \mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где \mathbf{E}_ω , \mathbf{D}_ω , \mathbf{B}_ω , \mathbf{H}_ω – амплитуды (комплексные) соответствующих полей, ω – частота излучения.

Строго говоря, именно для таких полей справедливы материальные соотношения вида (предполагается также, что среда изотропна):

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega) \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\omega) \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

величины $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\sigma(\omega)$ являются функциями (комплексными) частоты и называются диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью, соответственно. Ясно, что приближение монохроматических полей как раз хорошо применимо к случаю лазерного излучения, обладающего высокой степенью монохроматичности.

Также сразу заметим, что в оптике (т.е. при частотах электромагнитного поля $\sim 10^{14} - 10^{15} \text{ с}^{-1}$) можно считать $\mu(\omega) \approx 1$. Это связано с тем, что процесс перемагничивания ферромагнетика оказывается достаточно медленным по сравнению с быстрыми осцилляциями поля. Это приводит к тому, что, в отличие от стационарной ситуации, намагниченность материала практически отсутствует (ферромагнетик не успевает «реагировать» на быстрые изменения поля). В случае диа- и парамагнетиков, как известно, магнитная проницаемость мало отличается от единицы даже в случае медленно меняющихся во времени полей.

Линейность связи векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} , устанавливаемая соотношением (1.8), с микроскопической точки зрения означает, что наводимый электрическим полем

дипольный момент атома (связанный со смещением центра электронной плотности относительно ядра) будет линейно зависеть от напряженности поля. Ясно, что такая линейная зависимость будет иметь место при внешних полях, которые, по крайней мере, намного меньше по величине, чем внутриатомное поле. По сути, в правой части уравнения (1.8) оставлен только первый член в разложении по степеням напряженности электрического поля. Область, где такое допущение справедливо, называется линейной оптикой.

Что же касается третьего материального соотношения (1.10), то это есть дифференциальная форма закона Ома: плотность тока проводимости пропорциональна напряженности электрического поля.

1.2 Граничные условия для электромагнитного поля

Уравнения Максвелла (1.3) – (1.6), записанные в дифференциальной форме, справедливы во всех точках объема среды, однако они теряют смысл на границах раздела сред, при переходе через которые функции $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\sigma(\omega)$ изменяются скачком. Соотношения, которым подчиняется электромагнитное поле на границах раздела сред, могут быть получены из уравнений Максвелла в интегральной форме, примененных к малым объемам (или контурам), содержащим границу раздела. Мы не будем останавливаться на том, как именно осуществляется этот вывод, отсылая читателя к классическим курсам электродинамики, и приведем здесь лишь окончательный результат.

В точке на границе раздела сред поля можно разложить на две составляющие: нормальную и тангенциальную, т.е. касательную к поверхности границы (см. рис. 1.1).

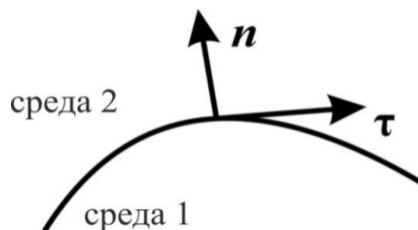


Рисунок 1.1 – Нормальный и касательный вектора на границе раздела двух сред

Оказываются справедливыми следующие соотношения для составляющих напряженности электрического поля (нормаль полагается направленной из среды 1 в среду 2):

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0} \quad \text{– для нормальной составляющей,} \quad (1.11)$$

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \quad \text{– для тангенциальной составляющей,} \quad (1.12)$$

где σ_e – поверхностная плотность свободных зарядов.

Для магнитного поля справедливо:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \text{ – для нормальной составляющей,} \quad (1.13)$$

$$\frac{B_{2\tau} - B_{1\tau}}{\mu_2 - \mu_1} = \mu_0 j_s \text{ – для тангенциальной составляющей,} \quad (1.14)$$

где j_s – плотность поверхностных токов.

В дальнейшем при рассмотрении отражения плоской электромагнитной волны от металла при нормальном падении из приведенных граничных условий нам понадобятся только (1.12) и (1.14) для тангенциальных компонент поля. При этом мы не будем предполагать наличия поверхностных токов. Таким образом, указанные соотношения просто будут выражать непрерывность касательных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} при переходе через границу раздела (напомним, что можно считать $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$).

1.3 Уравнение для комплексной амплитуды поля в токопроводящей среде

Получим уравнение, которому подчиняется амплитуда поля \mathbf{E} в токопроводящей среде. Во-первых, в соответствии с предположением (1.7) преобразуем уравнения Максвелла. Подставим первые два равенства (1.7) в

(1.3): $e^{-i\omega t} \text{rot} \mathbf{E}_\omega = -\mathbf{B}_\omega \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t}$. Производя дифференцирование в правой части и сокращая на множитель $e^{-i\omega t}$, получаем:

$$\text{rot} \mathbf{E}_\omega = i\omega \mathbf{B}_\omega. \quad (1.15)$$

Аналогично из уравнений (1.7) и (1.4) имеем:

$$\text{rot} \mathbf{H}_\omega = -i\omega \mathbf{D}_\omega + \mathbf{j}_\omega,$$

или с учетом материальных соотношений (1.8) – (1.10):

$$\frac{\text{rot} \mathbf{B}_\omega}{\mu_0} = -i\omega \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mathbf{E}_\omega + \sigma(\omega) \mathbf{E}_\omega. \quad (1.16)$$

Далее подействуем оператором rot на уравнение (1.15): $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}_\omega) = \text{rot}(i\omega \mathbf{B}_\omega)$. В правую часть получившегося равенства подставим выражение для ротора \mathbf{B}_ω из (1.16). Левую часть преобразуем согласно известному из векторного анализа тождеству³: $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{a}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$, где \mathbf{a} – некоторое векторное поле, Δ – оператор Лапласа. Соответственно, получаем: $\text{grad}(\text{div} \mathbf{E}_\omega) - \Delta \mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega (\omega^2 \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma(\omega))$. В отсутствии свободных зарядов из уравнений (1.6) и (1.8) следует, что $\text{div} \mathbf{E}_\omega = 0$. Тогда

³ Доказательство этого равенства, а также некоторые другие формулы векторного анализа приводятся в Приложении 1.

$$-\Delta \mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \left(\varepsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \right), \text{ обозначив } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \text{ (} c_0 \text{ – скорость света в}$$

вакууме) окончательно получаем:

$$\Delta \mathbf{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(\varepsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \right) \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (1.17)$$

Если в полученном уравнении положить $\sigma = 0$, то мы получим уравнение, описывающее изменение комплексной амплитуды поля в диэлектрической среде:

$$\Delta \mathbf{E}_\omega + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c_0^2} \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (1.18)$$

Из сопоставления уравнений (1.17) и (1.18) видно, что уравнения формально совпадут, если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость токопроводящей среды (металла):

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (1.19)$$

Тогда уравнение (1.17) переписется в виде:

$$\Delta \mathbf{E}_\omega + \tilde{\varepsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c_0^2} \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (1.20)$$

Таким образом, для того чтобы найти распределение электрического (монохроматического) поля в токопроводящей среде, необходимо решить уравнение (1.20). Для этого нужно знать комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, которая и определяет все оптические свойства металла. Из формулы (1.19) видно, что имеется два вклада в комплексную диэлектрическую проницаемость токопроводящей среды: первый ($\varepsilon(\omega)$) – аналогичен диэлектрической проницаемости диэлектрика и обусловлен наличием связанных зарядов и их смещением под действием электрического поля, а второй – отсутствует в диэлектриках и связан с возникновением токов проводимости в среде при приложении электрического поля. Для металлов проводимость высока и именно этот вклад зачастую и определяет их основные оптические свойства.

В заключении этого раздела отметим, что для магнитного поля \mathbf{B}_ω можно получить уравнение, абсолютно аналогичное уравнению (1.20):

$$\Delta \mathbf{B}_\omega + \tilde{\varepsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c_0^2} \mathbf{B}_\omega = 0. \quad (1.21)$$

1.4 Решение уравнения для комплексной амплитуды поля в прозрачном диэлектрике

Учитывая сходство полученных уравнений для токопроводящей и диэлектрической сред (они совпадают с точностью до замены ε на $\tilde{\varepsilon}$), имеет смысл вначале рассмотреть решения для случая прозрачной диэлектрической среды (например, оптическое стекло, воздух и т.п., тогда ε – положительная вещественная функция частоты).

Мы рассмотрим наиболее простой случай линейной поляризации излучения: положим $\mathbf{E}_\omega = (0, E_\omega, 0)$ (мы выбрали систему координат так, чтобы ось y была параллельна вектору \mathbf{E}_ω). В этом случае от векторного уравнения (1.18) можно перейти к скалярному. Также будем искать решения, у которых поле зависит только от одной из координат: $E_\omega = E_\omega(x)$ (см. рис. 1.2). С учетом принятых допущений уравнение (1.18) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c_0^2} E_\omega = 0. \quad (1.22)$$

Очевидно, что решением такого уравнения будет функция вида $E_\omega = E_0 e^{ikx}$, где E_0 – амплитуда поля, параметр k называется волновым числом. После подстановки полученного решения в исходное уравнение становится ясно, что волновое число

$$k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.23)$$

Вспомнив, что зависимость от времени напряженности электрического поля гармоническая, окончательно для напряженности электрического поля, зависящей от координат и времени, можно написать:

$$E(x, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (1.24)$$

Это решение, которое, конечно, хорошо знакомо читателям, описывает плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси x (см. рис. 1.2) (решением также будет и волна, распространяющаяся против оси x , для этого в (1.24) знак « \leftarrow » перед волновым числом надо заменить на « \rightarrow »). Физическим смыслом обладает вещественная часть решения (1.24): $\text{Re} E = E_0 \cos(\omega t - kx)$. Аналогичное решение можно записать и для индукции магнитного поля, причем вектор \mathbf{B} будет совершать колебания вдоль оси z . Кроме того, амплитуды напряженности электрического и магнитного полей связаны определенным соотношением (подробнее см. раздел 1.7).

Из вида решения (1.24) ясно, что оно обладает временной и пространственной периодичностью. Пространственный период называется длиной волны: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Временной период, в свою очередь, равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

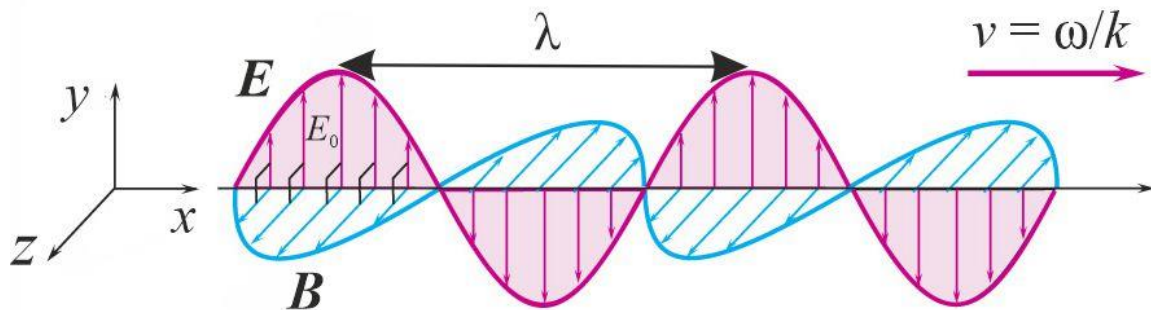


Рисунок 1.2 – Пространственное распределение напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в плоской монохроматической волне

Величина, стоящая в скобках в показателе экспоненты ($\omega t - kx$), называется фазой волны. Поверхность, для которой фаза волны имеет одинаковое значение в фиксированный момент времени, есть плоскость, перпендикулярная оси x (отсюда и название – плоская волна). С течением времени поверхность равной фазы будет перемещаться в пространстве со скоростью, называемой фазовой скоростью волны v . Дифференцируя соотношение $\omega t - kx_0 = const$ (x_0 – координата движущейся плоскости равной фазы), для $v = \frac{dx_0}{dt}$ имеем:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \quad (1.25)$$

Подставляя (1.23) в (1.25), получаем:

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ или } v = \frac{c_0}{n}, \quad (1.26)$$

где $n = c_0/v$ – показатель преломления среды. Ясно, что

$$n^2 = \varepsilon. \quad (1.27)$$

После подстановки (1.27) в (1.23) получим связь между волновым числом и показателем преломления:

$$k = \frac{\omega}{c_0} n. \quad (1.28)$$

Напомним, что диэлектрическая проницаемость ε , а вместе с ней и показатель преломления n и волновое число k являются функциями частоты. Эти зависимости называются дисперсионными.

1.5 Решение уравнения для комплексной амплитуды поля в токопроводящей среде

Рассматривать решение уравнения (1.20) будем, приняв допущения, аналогичные сделанным в предыдущем разделе. Соответственно, имеем:

$$\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial x^2} + \tilde{\varepsilon} \frac{\omega^2}{c_0^2} E_\omega = 0. \quad (1.29)$$

Решение (1.29) по форме будет в точности совпадать с решением (1.22), однако теперь волновое число k следует заменить на комплексное волновое число \tilde{k} : $E_\omega = E_0 e^{i\tilde{k}x}$. Если по аналогии с (1.27) ввести комплексный показатель преломления

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}, \quad (1.30)$$

то после подстановки решения в исходное уравнение получим связь между комплексным показателем преломления и комплексным волновым числом:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c_0} \tilde{n}. \quad (1.31)$$

Итак, окончательно для случая токопроводящей среды получаем:

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}x)}. \quad (1.32)$$

Таким образом, с учетом (1.30) и (1.31) для вычисления напряженности электрического поля в токопроводящей среде необходимо знать одну из зависимостей $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, $\tilde{n}(\omega)$ или $\tilde{k}(\omega)$.

1.6 Поглощение электромагнитной волны в металле. Скин-слой

Выясним, что означает комплексность параметров $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, $\tilde{n}(\omega)$ и $\tilde{k}(\omega)$. Для этого выделим вещественную и мнимую часть комплексного волнового числа $\tilde{k} = k + is$ и подставим в решение (1.32):

$$E(x, t) = E_0 e^{i(k+is)x} e^{-i\omega t} = E_0 e^{-sx} e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (1.33)$$

Видно, что благодаря отличной от нуля мнимой части комплексного волнового числа амплитуда волны экспоненциально убывает вдоль направления распространения волны.

Вспомним, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля. Соответственно, интенсивность волны также будет убывать по экспоненциальному закону:

$$I \sim e^{-\alpha x}, \quad (1.34)$$

где α – коэффициент поглощения. Закон поглощения вида (1.34) называют законом Бугера.

Обычно оптические характеристики среды выражают через вещественную и мнимую части комплексного показателя преломления ($\tilde{n} = n + ik_p$, где n – вещественный показатель преломления, мнимую часть k_p иногда называют коэффициентом экстинкции). Сопоставление формул (1.34) и (1.33) дает $\alpha = 2s$, а с учетом (1.31) получаем:

$$\alpha = \frac{2\omega k_p}{c_0}. \quad (1.35)$$

Видно, что коэффициент поглощения зависит только от мнимой части комплексного показателя преломления (коэффициента экстинкции k_p) и частоты излучения. Параметр k_p характеризует затухание электромагнитной волны.

Коэффициент поглощения α определяет глубину, на которую падающая волна проникает в металл:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.36)$$

Величина δ называется глубиной проникновения излучения и показывает, на какой глубине интенсивность излучения уменьшится в e раз по сравнению с исходной.

Слой металла толщиной δ , в котором преимущественно происходит поглощение электромагнитного излучения, называют скин-слоем, а само явление локализации электрического поля у поверхности проводника – скин-эффектом.

Коротко остановимся на физическом механизме поглощения энергии лазерного излучения в металле. Электромагнитная волна возбуждает в металле переменные во времени токи проводимости. Эти токи в соответствии с законом Джоуля-Ленца нагревают материал. Таким образом, происходит необратимый переход энергии электромагнитной волны в тепловую энергию, что и приводит к быстрому затуханию интенсивности излучения. Вспомним, что джоулево тепло, выделяемое в единицу времени в единице объема среды, пропорционально квадрату плотности тока, или с учетом закона Ома (1.10) квадрату напряженности поля, т.е. интенсивности излучения. Таким образом, изменение интенсивности волны dI после прохождения слоя толщиной dx около точки с координатой x должно быть пропорционально интенсивности в этой точке: $-dI \sim Idx$. Отсюда сразу же следует экспоненциальный характер спада интенсивности излучения вида (1.34).

Также отметим, что затухание амплитуд полей не всегда связано с наличием поглощения в среде.

1.7 Соотношение между амплитудами электрического и магнитного полей в плоской волне

В этом разделе мы получим важное соотношение между амплитудами напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в плоской монохроматической волне. Оно, в частности, понадобится нам в дальнейшем при рассмотрении отражения плоской монохроматической волны от поверхности металла.

Из решения уравнений (1.20) и (1.21) следует, что для плоской монохроматической волны:

$$E = E_y = E_0 e^{-i(\omega t \pm \tilde{k}x)}$$

$$B = B_z = B_0 e^{-i(\omega t \pm \tilde{k}x)},$$

здесь мы считаем, что волна распространяется вдоль (либо против) оси x , поле \mathbf{E} параллельно оси y , соответственно, поле \mathbf{B} должно быть параллельно оси z .

Подставим эти решения в первое уравнение Максвелла $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$. Вычислим

сначала левую часть равенства:

$$\text{rot}\mathbf{E} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mp i \tilde{k} E_0 e^{-i(\omega t \pm \tilde{k}x)} \mathbf{e}_z$$

с другой стороны: $-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = i\omega B_0 e^{-i(\omega t \pm \tilde{k}x)} \mathbf{e}_z$. Соответственно, $\mp \tilde{k} E_0 = \omega B_0$ или с учетом (1.31):

$$\mp \tilde{n} E_0 = c_0 B_0. \quad (1.37)$$

Знак « \rightarrow » в (1.37) соответствует волне, бегущей против оси x , а знак « $+$ » – волне, бегущей вдоль оси x .

Из полученной формулы следует, что амплитуды электрического и магнитного полей пропорциональны друг другу, при этом для токопроводящей среды коэффициент пропорциональности комплексный. Это означает, что колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} сдвинуты по фазе друг относительно друга, в отличие от прозрачных сред, в которых вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} колеблются синфазно. Выражение (1.37) также позволяет оценить отношение сил, действующих на заряды со стороны электрического и магнитного полей электромагнитной волны.

Несложно увидеть, что если $|\tilde{n}| \sim 1$, то $\frac{F_E}{F_M} \approx \frac{c_0}{v_q}$. Т.к. скорость заряда v_q , как

правило, много меньше c_0 , то основное действие на заряды оказывает именно электрическое поле электромагнитной волны.

1.8 Отражение электромагнитной волны от металла при нормальном падении

Рассмотрим задачу об отражении плоской электромагнитной волны от поверхности раздела металл/воздух. В воздухе распространяются падающая волна (i) и отраженная (r) от границы раздела волна, в металле бежит прошедшая волна (t), которая быстро затухает по мере своего распространения (см. рис. 1.3). Каждая из этих волн описывается решением вида (1.32) с учетом направления распространения (для волн, распространяющихся в воздухе, показатель преломления вещественен и примерно равен единице):

$$\begin{aligned} E_y^i &= E_0^i \exp\left(-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right) & E_y^r &= -E_0^r \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)\right) \\ B_z^i &= B_0^i \exp\left(-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right) & B_z^r &= -B_0^r \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)\right) \\ E_y^t &= E_0^t \exp\left(-i\left(\omega t - \tilde{n}\frac{\omega}{c}x\right)\right) \\ B_z^t &= B_0^t \exp\left(-i\left(\omega t - \tilde{n}\frac{\omega}{c}x\right)\right) \end{aligned} ,$$

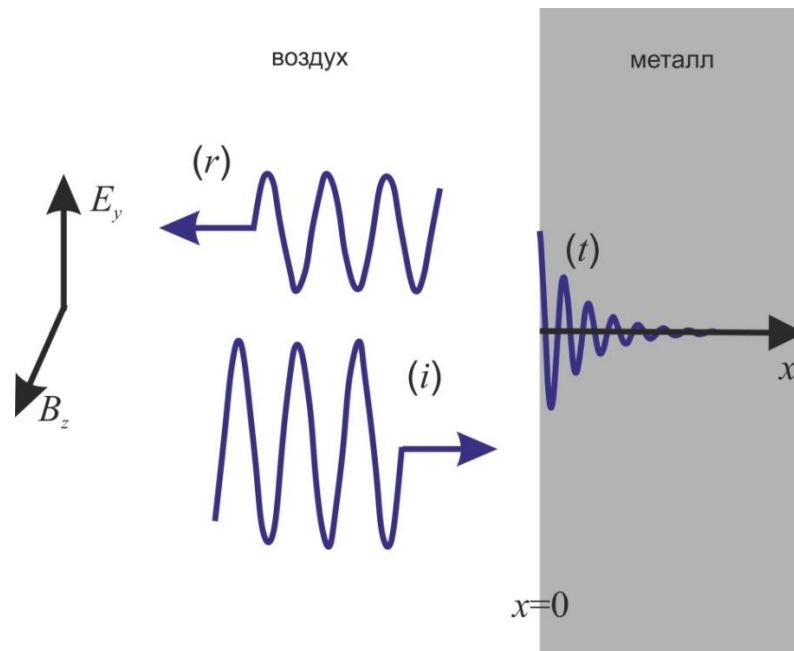


Рисунок 1.3 – Отражение электромагнитной волны от границы металл/воздух

На поверхности (при $x = 0$) воспользуемся условием непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей (1.12) и (1.14), в итоге получим:

$$E_0^t = E_0^i - E_0^r$$

$$B_0^t = B_0^i - B_0^r$$

Во втором равенстве перейдем к амплитуде напряженности электрического поля в соответствии с (1.37):

$$E_0^t = E_0^i - E_0^r$$

$$\tilde{n}E_0^t = E_0^i + E_0^r$$

Разделим левые и правые части полученных равенств на амплитуду напряженности поля падающей волны и обозначим $t = \frac{E_0^t}{E_0^i}$ и $r = \frac{E_0^r}{E_0^i}$. В итоге

получим систему из двух уравнений относительно r и t :

$$t = 1 - r$$

$$\tilde{n}t = 1 + r$$

Для r несложно получить решение: $r = \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}$. Для нахождения коэффициента отражения R , равного отношению интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей, нужно вычислить квадрат модуля r : $R = |r|^2$. Тогда для R окончательно получаем:

$$R = \frac{(n-1)^2 + k_p^2}{(n+1)^2 + k_p^2}. \quad (1.38)$$

Наличие в числителе и знаменателе слагаемого k_p^2 отличает формулу (1.38) от формулы для коэффициента отражения от диэлектрической среды. В случае металла может оказаться, что $k_p \gg n$ и $k_p \gg 1$ (либо $k_p \approx n \gg 1$), тогда коэффициент отражения будет близок к единице.

Из закона сохранения энергии следует равенство $A + R + T = 1$, где A – поглощательная способность, равная отношению поглощенной мощности к падающей, T – коэффициент пропускания. Для толстых металлических образцов (с толщиной $h \gg \delta$) можно считать $T = 0$. Тогда $A = 1 - R$, и с учетом (1.38):

$$A = \frac{4n}{(n+1)^2 + k_p^2}. \quad (1.39)$$

Поглощательная способность A и коэффициент поглощения α – оптические характеристики, которые играют важнейшую роль в анализе теплового действия лазерного излучения на материалы в целом и на металлы в частности. Действительно, поглощательная способность определяет долю энергии падающего излучения, которая в конечном счете пойдет на нагрев материала. Коэффициент поглощения α определяет глубину, на которой происходит поглощение (т.е. выделяется тепло). В простейших случаях задания именно этих

оптических характеристик материала достаточно для оценок теплового действия лазерного излучения.

Параметры A и α являются функциями частоты излучения. Знание этих зависимостей чрезвычайно важно для выбора длины волны лазера при обработке того или иного материала. Мы выразили параметры A и α через вещественную и мнимую части комплексного показателя преломления n и k_p (см. формулы (1.35) и (1.39)), спектральные зависимости которых обычно приводятся в справочниках оптических свойств материалов. В оставшихся разделах этой главы мы дадим описание и трактовку основных наблюдаемых особенностей спектральных зависимостей оптических свойств металлов.

1.9 Основные положения модели Друде

Как уже отмечалось, в электродинамике сплошных сред диэлектрическая проницаемость металлов полагается известной из эксперимента функцией частоты. Для того чтобы дать объяснение этим зависимостям, необходимо привлечь микроскопические представления о строении металлов. Наше дальнейшее рассмотрение будет строиться на основе так называемой модели Друде. Модель Друде была разработана на рубеже XIX и XX веков, т.е. ещё до создания квантовой механики, и, соответственно, современной физики твёрдого тела. Однако, несмотря на это, многие выводы этой теории получили экспериментальное подтверждение, поэтому модель Друде, учитывая её простоту и наглядность, часто рассматривается как введение в более сложные теории, описывающие свойства металлов. Согласно модели Друде металл состоит из ионного остова (кристаллической решетки) и газа электронов, которые могут свободно перемещаться по кристаллу. Предполагается также, что к электронному газу могут быть практически без изменений применены основные положения молекулярно-кинетической теории идеальных газов. Перечислим эти положения:

1. В промежутках между столкновениями не учитывается взаимодействие электронов друг с другом и с ионами (приближение независимых и свободных электронов). Т.е. при отсутствии внешних полей электрон движется равномерно и прямолинейно. В случае наличия внешних полей считается, что электрон движется в соответствии с законами Ньютона.

2. Столкновения – мгновенные случайные события, меняющие скорость электрона. При этом в основном электроны испытывают столкновения с ионами решетки.

3. Вероятность электрону испытать столкновение за малый промежуток времени dt равна просто dt/τ (время τ называется временем релаксации). В простейших случаях полагают, что время τ одинаково для всех электронов, независимо от их скорости (импульса).

4. Электроны приходят в тепловое равновесие с решеткой посредством столкновений, при этом скорость электрона после столкновения не связана с его скоростью до столкновения. Её величина определяется температурой области, в которой произошло столкновение, а направление случайно.

Покажем, что время τ , введенное в третьем положении, есть просто среднее время ожидания столкновения электрона с момента последнего столкновения (т.е. среднее время свободного пробега). Пусть электрон испытал столкновение в момент времени $t = 0$, вычислим вероятность dP того, что следующее столкновение электрон испытает в промежуток времени от t до $t + dt$. Иными словами, нам нужно вычислить совместную вероятность двух событий: в течение времени t электрон не испытал столкновения и электрон испытал столкновение в течение последующего промежутка времени dt . Время t можно разбить на t/dt малых промежутков длительностью dt . Вероятность того, что электрон не испытал столкновения в течение времени t , равна вероятности того, что электрон не испытал столкновения в каждом из этих промежутков, т.е.

$\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)^{\frac{t}{dt}}$. Вероятность того, что электрон испытал столкновение в течение последующего промежутка времени dt , равна просто dt/τ . Таким образом,

искомая вероятность $dP = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)^{\frac{t}{dt}} \frac{dt}{\tau}$. Обозначим $z = -\frac{dt}{\tau}$, тогда

$dP = \left(1 + z\right)^{\frac{1}{z}} \frac{dt}{\tau}$. Соответственно, при $z \rightarrow 0$ имеем $dP = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{dt}{\tau}$ (напомним,

что $e = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + z\right)^{\frac{1}{z}}$). Отсюда видно, что время ожидания столкновения распределено по показательному закону со средним значением τ .

1.10 Уравнение для усредненного импульса электрона во внешнем силовом поле

В данном разделе будет получено уравнение, в соответствии с которым происходит изменение среднего импульса электронов в металле под действием внешнего силового поля, которое понадобится нам для вывода формулы для комплексной диэлектрической проницаемости металла.

Пусть $\mathbf{p}(t)$ – средний импульс электронов в момент времени t . Подчеркнем, что речь идет именно об усредненном по всем электронам импульсе, т.е., например, в состоянии равновесия при отсутствии внешнего поля $\mathbf{p} = 0$, несмотря на то, что по отдельности каждый электрон находится в состоянии движения. Вычислим средний импульс электронов в момент времени $t + dt$. Электроны можно разбить на две группы: не испытавших столкновение за время dt и

испытывавших. Доля электронов, не испытывавших столкновение, равна $1 - \frac{dt}{\tau}$. Эти электроны, в соответствии со вторым законом Ньютона, получают прибавку к импульсу, равную $\mathbf{F}(t)dt$, где $\mathbf{F}(t)$ – сила, действующая на электроны со стороны внешнего поля. Мы полагаем, что эта сила одинакова для всех электронов, независимо от их импульса, что, конечно, справедливо для интересующего нас случая электрического поля. Таким образом, вклад от этих электронов в средний импульс в момент времени $t + dt$ будет равен $\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)(\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt) \approx \mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt - \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t)$. Рассмотрим далее вклад от электронов,

испытывавших столкновение за время dt . Доля таких электронов равна $\frac{dt}{\tau}$, и приращение их импульса будет меньше, чем $\mathbf{F}(t)dt$ (поскольку электроны теряют при столкновениях с решеткой свой импульс). Соответственно, вклад от этих электронов будет заведомо не больше $\frac{\mathbf{F}(t)}{\tau}dt^2$. Поправкой, квадратичной по dt , можно пренебречь. Таким образом, суммируя оба вклада, имеем $\mathbf{p}(t + dt) \approx \mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt - \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t)$ или окончательно:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau}. \quad (1.40)$$

Далее нас будет интересовать воздействие на свободные электроны металла электрического поля электромагнитной волны (действием магнитного поля мы пренебрегаем по причинам, изложенным в разделе 1.7). Тогда уравнение (1.40) примет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} - e\mathbf{E}(t), \quad (1.41)$$

где e – заряд электрона⁴.

Итак, мы видим, что уравнение вида (1.40) для среднего импульса электронов имеет форму второго закона Ньютона, в котором действие столкновений учтено введением в правую часть дополнительной силы $-\frac{\mathbf{p}}{\tau}$. Из механики известно, что силы, пропорциональные по величине скорости (импульсу) тела и направленные в противоположную сторону, являются силами вязкого трения. Таким образом, влияние столкновений электронов с решёткой на их коллективное движение эффективно сводится к тому, что электроны как бы движутся в вязкой среде, что и обуславливает сопротивление металла.

⁴ Знак заряда электрона мы будем учитывать в формулах в явном виде.

1.11 Формула Друде для комплексной диэлектрической проницаемости металла

Рассмотрим действие электрического поля линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны на свободные электроны металла. Поле такой волны гармоническим образом зависит от времени $E_y(t) = E_0 e^{-i\omega t}$.

Ясно, что в этом случае решение уравнения (1.41) следует искать в виде $p_y(t) = p_0 e^{-i\omega t}$. После его подстановки в исходное уравнение получим

$$-i\omega p_y(t) = -\frac{p_y(t)}{\tau} - eE_y(t) \quad \text{или} \quad p_y(t) = \frac{-\tau e E_y(t)}{(1 - i\omega\tau)}.$$

Упорядоченному движению электронов со средним импульсом $p_y(t)$ соответствует плотность тока

$$j(t) = -\frac{en_e p_y(t)}{m_e},$$

где n_e – концентрация электронов проводимости в металле, m_e – масса электрона, p_y/m_e – средняя скорость электрона. Тогда $j(t) = \frac{e^2 n_e \tau E_y(t)}{m_e (1 - i\omega\tau)}$,

т.е. плотность тока пропорциональна напряженности поля, но это есть не что иное, как закон Ома (1.10), если высокочастотная проводимость

$$\sigma(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{(1 - i\omega\tau)m_e}. \quad (1.42)$$

Отметим, что если в формуле (1.42) положить $\omega = 0$, то получится известная формула для статической проводимости $\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

Прежде чем перейти к формуле для диэлектрической проницаемости,

введем следующие обозначения: $\gamma = \frac{1}{\tau}$ – частота столкновений, $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$ – плазменная частота, а также пренебрежем вкладом связанных электронов в комплексную диэлектрическую проницаемость, т.е. положим $\epsilon(\omega) = 1$ (ограничения, связанные с этим допущением, будут отдельно рассмотрены позднее). Тогда из (1.42) и (1.19) имеем $\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{i}{\gamma - i\omega}$, или, выделяя вещественную и мнимую части:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (1.43)$$

Формула (1.43) называется формулой Друде для комплексной диэлектрической проницаемости металла и связывает макроскопическую характеристику среды $\tilde{\epsilon}$ с микроскопическими характеристиками: концентрацией электронов, массой электрона и частотой столкновений электрона при его движении в кристалле. Видно, что частотная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости определяется двумя параметрами, имеющими размерность частоты: плазменной частотой ω_p (которая в свою очередь определяется концентрацией электронов проводимости), и частотой столкновений электронов γ . Зная концентрацию n_e (для металлов $n_e \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$), несложно оценить, что ω_p должна быть порядка 10^{16} с^{-1} . Частота столкновений электронов γ по порядку величины равна 10^{14} с^{-1} (грубые оценки этой величины могут быть получены по измерениям статической проводимости). Параметры γ и ω_p разбивают частотный диапазон на три области (см. рис. 1.4), в которых дисперсионные зависимости оптических свойств металла носят существенно различный характер. Изучению этих зависимостей посвящен следующий раздел.

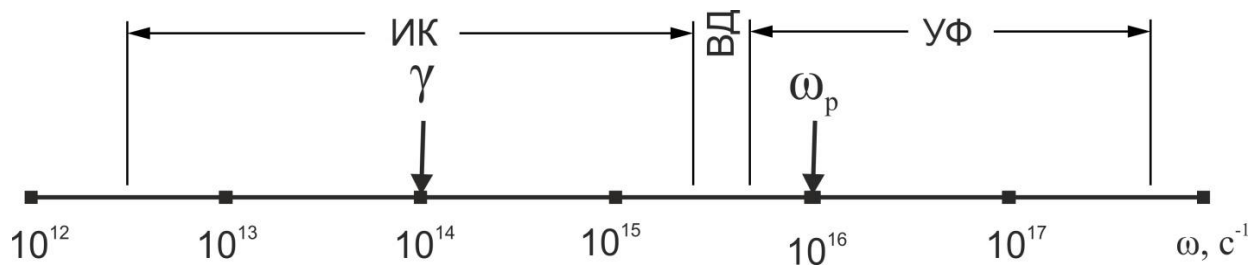


Рисунок 1.4 – Шкала электромагнитных волн с отмеченными параметрами γ и ω_p (ИК – инфракрасный диапазон, ВД – видимый диапазон, УФ – ультрафиолетовый диапазон)

1.12 Частотные зависимости оптических свойств металла

Ранее мы отмечали, что в контексте лазерной обработки металлов наибольший интерес представляют оптические параметры A и a (либо глубина проникновения излучения $\delta = \alpha^{-1}$). Мы выразили их через вещественную и мнимую части комплексного показателя преломления (см. формулы (1.39) и (1.35)). Поэтому сначала приведем соотношения для частотных зависимостей n и k_p . Из формул (1.43) и (1.30) несложно получить, что:

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{b\gamma}{\omega}\right)^2 + (1-b)^2} + (1-b)}, \quad (1.44)$$

$$k_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{b\gamma}{\omega}\right)^2 + (1-b)^2} - (1-b)}, \quad (1.45)$$

где введено обозначение $b = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}$.

На рис. 1.5 приведены графики зависимостей $n(\omega)$ и $k_p(\omega)$ в широком диапазоне частот, а также приближенные формулы, следующие из формул (1.44) и (1.45) для различных частотных интервалов. Из рис. 1.5 видно, что при $\omega < \gamma$ (дальний ИК диапазон) $n \approx k_p \gg 1$. Эту область называют областью низкочастотного нормального скин-эффекта. Если $\gamma < \omega < \omega_p$ (ближний ИК и видимый диапазоны), то $k_p \gg n$, и n может быть меньше единицы. Эту область называют областью высокочастотного нормального скин-эффекта. В области $\omega > \omega_p$ (УФ диапазон) с ростом частоты вещественный показатель преломления стремится к единице, а мнимая часть стремится к нулю. Последнее означает, что согласно модели Друде металл должен становиться прозрачным в ультрафиолетовом диапазоне длин волн. Излучение при этом как бы «перестает замечать» металл.

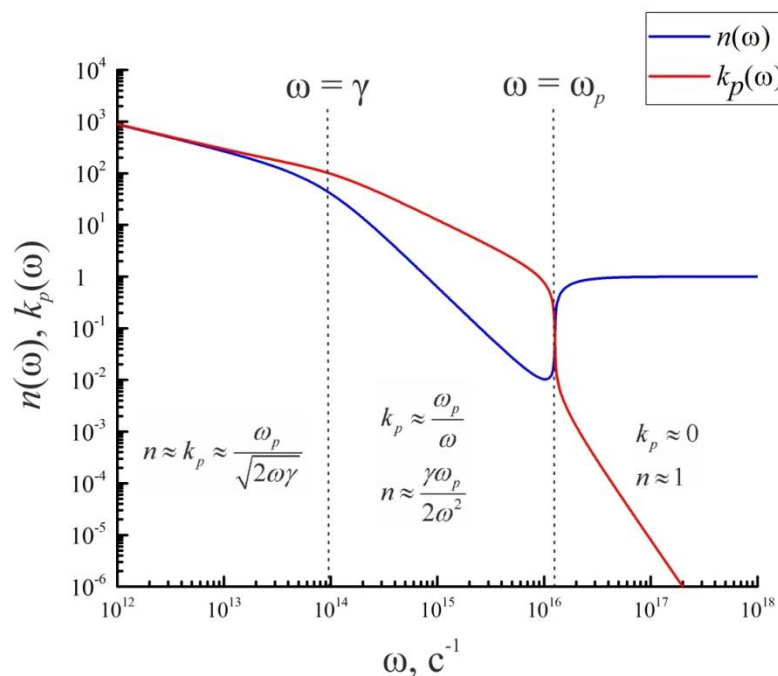


Рисунок 1.5 – Дисперсионные зависимости вещественной и мнимой частей комплексного показателя преломления металла по модели Друде (расчет проводился для $\gamma = 10^{14} \text{ с}^{-1}$ и $\omega_p = 1.2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$)

На рис. 1.6а показаны зависимости глубины проникновения излучения δ от частоты. Как видно из рисунка, в области $\omega < \gamma$ глубина скин-слоя плавно возрастает при уменьшении частоты. В области $\gamma < \omega < \omega_p$ глубина скин-слоя определяется только плазменной частотой, не зависит от частоты излучения и составляет ~ 10 нм. При переходе через плазменную частоту глубина проникновения излучения в металл резко возрастает, и металл становится

прозрачным в ультрафиолетовом диапазоне. В действительности это хорошо выполняется лишь для случая щелочных металлов (причины, по которым это не справедливо для других металлов, обсуждаются в следующем разделе). На рис. 1.6б показана зависимость поглотательной способности металла от частоты излучения. Как видно из рисунка, поглотательная способность металла невелика, в области $\omega < \omega_p$ её значения составляют порядка нескольких процентов. Это означает, что большая часть излучения отражается от поверхности металла, что в целом соответствует эксперименту.

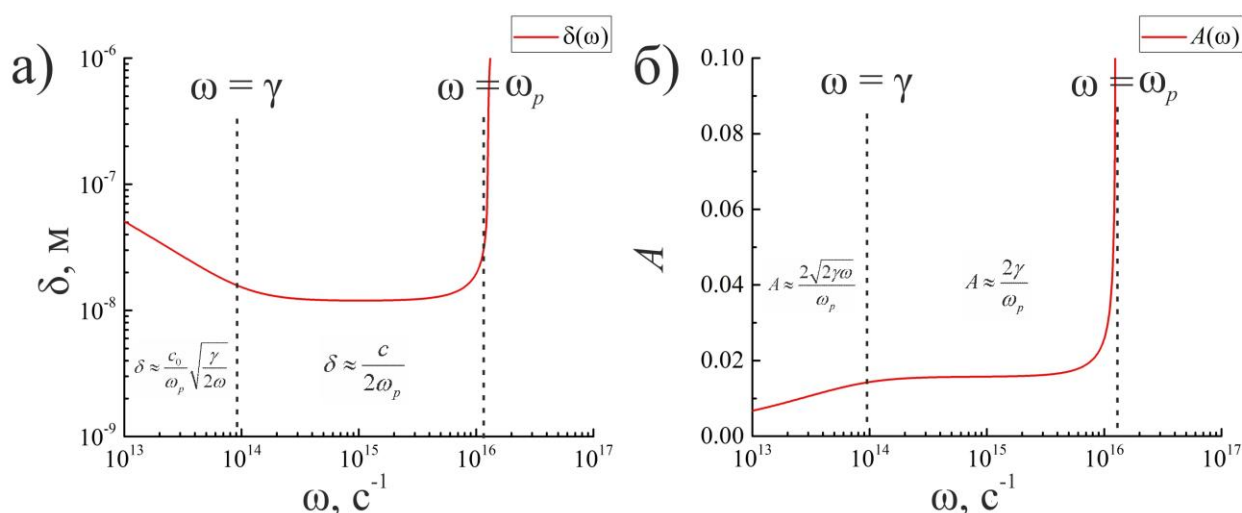


Рисунок 1.6 – Зависимость глубины скин-слоя (а) и поглотательной способности (б) металла от частоты по модели Друде

1.13 Ограничения применимости модели Друде. Роль связанных электронов

Из результатов, изложенных в предыдущем разделе, в частности следует, что коэффициент отражения металла в видимом диапазоне в рамках модели Друде не должен зависеть от частоты (см. рис. 1.6б для поглотательной способности $A = 1 - R$). Это должно означать, что все металлы должны быть бесцветными. Однако это, очевидно, не так. Например, такие металлы, как медь или золото, имеют цвет. Следовательно, модель Друде не в состоянии полностью описать наблюдаемые оптические свойства металлов. Дело в том, что при выводе формулы Друде для комплексной диэлектрической проницаемости мы пренебрегли вкладом от связанных электронов. Т.е. фактически мы рассмотрели модель, в которой металл состоит из ионного остова, который никак не реагирует на действие электромагнитного поля, и электронов проводимости. Очевидно, что в действительности в металле, помимо свободных электронов, также имеются связанные электроны, которые, в принципе, могут совершать оптические переходы между энергетическими уровнями под действием

электромагнитной волны (при поглощении кванта излучения), тем самым влияя на оптические свойства металла в целом.

Рассмотрим более подробно ситуацию на примере меди. Электронная структура изолированного атома меди может быть получена, если к структуре атома аргона добавить ещё 11 электронов. Таким образом, в соответствии с известным из химии правилом заполнения орбиталей $[Cu] = [Ar]3d^{10}4s^1$. Если из атомов меди сформировать металл, то окажется, что s -электроны верхних оболочек сформируют зону проводимости (т.е. полностью заполненную зону), а d -электроны сформируют полностью заполненные зоны, верхняя граница которых лежит ниже уровня Ферми (см. рис. 1.7). Разница между потолком d -зоны и уровнем Ферми для меди составляет около 2 эВ. Напомним, что в соответствии с принципом Паули возможны переходы электронов только в незанятые состояния, соответственно, электроны из d -зоны могут переходить в зону проводимости, только если энергия кванта превышает 2 эВ.

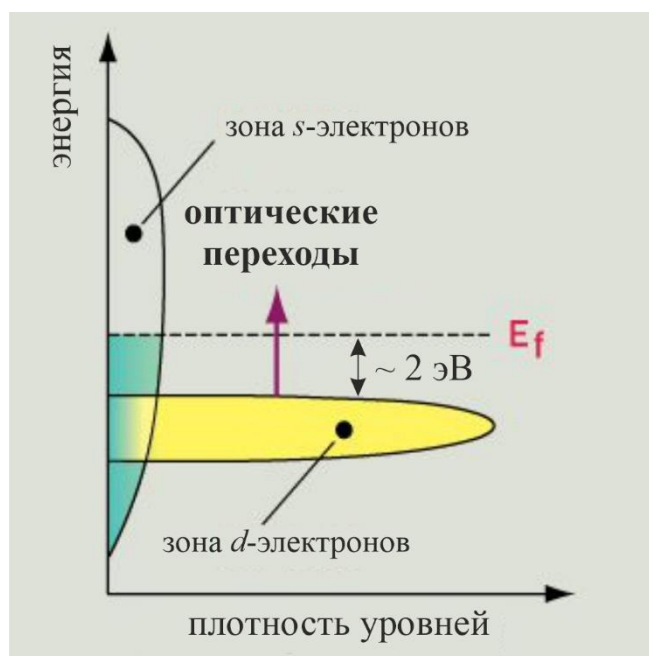


Рисунок 1.7 – Схематичное изображение энергетических зон меди (минимальная энергия фотона, при которой возможны межзонные переходы, соответствует разности энергий между «потолком» d -зоны и уровнем Ферми)

Таким образом, можно ожидать, что при энергиях кванта излучения, меньших 2 эВ, межзонные переходы в меди невозможны и её оптические свойства могут быть описаны в рамках модели Друде. Если же энергия кванта больше 2 эВ, то необходимо учитывать вклад от межзонных переходов. Это иллюстрирует рис. 1.8, на котором показано сравнение экспериментально определенных зависимостей $n(\omega)$ и $k_p(\omega)$ (а также мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости $\text{Im}\tilde{\epsilon}(\omega)$) с расчетами по модели Друде

(сравнение для $n(\omega)$ и $k_p(\omega)$ проводится как без учета вклада ионного остова в диэлектрическую проницаемость, т.е. при $\varepsilon = 1$, так и с учетом не зависящего от частоты вклада $\varepsilon = 17$). Видно, что модель Друде адекватно описывает оптические свойства меди только в области $\hbar\omega < 2$ эВ.

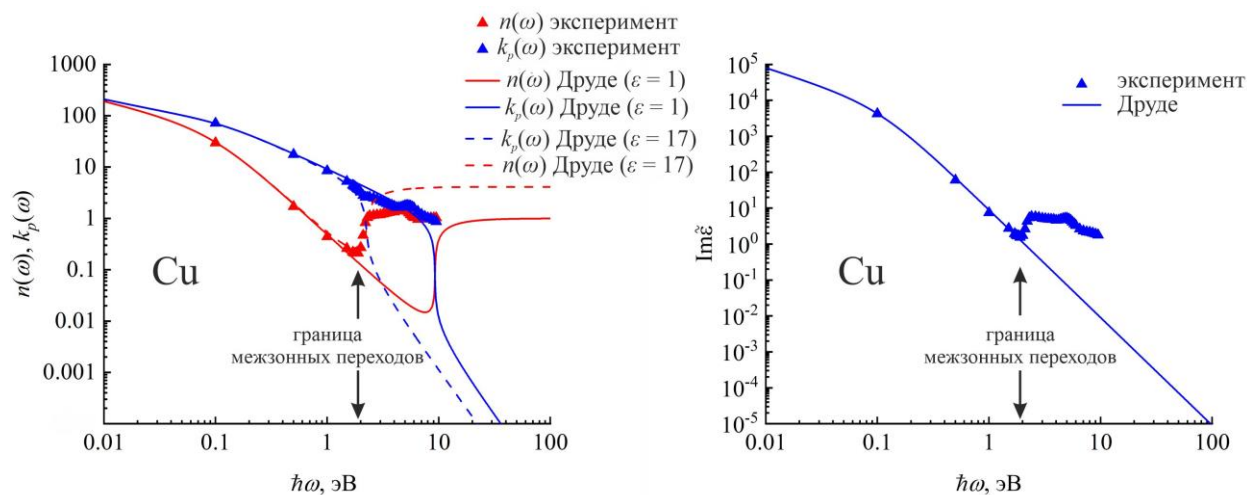


Рисунок 1.8 – Сравнение экспериментальных зависимостей n и k_p (слева) и $\text{Im}\tilde{\varepsilon}$ (справа) от частоты (энергии кванта) с расчетами по модели Друде

Из рисунка 1.9 видно, что при $\hbar\omega > 2$ эВ коэффициент отражения сильно падает при повышении частоты. Отметим, что энергии 2 эВ соответствует длина волны 620 нм, которая лежит в красной области видимого диапазона спектра. Это означает, что длинноволновое излучение видимого спектра будет отражаться лучше коротковолнового, т.е. наблюдаемый цвет меди должен быть красным.

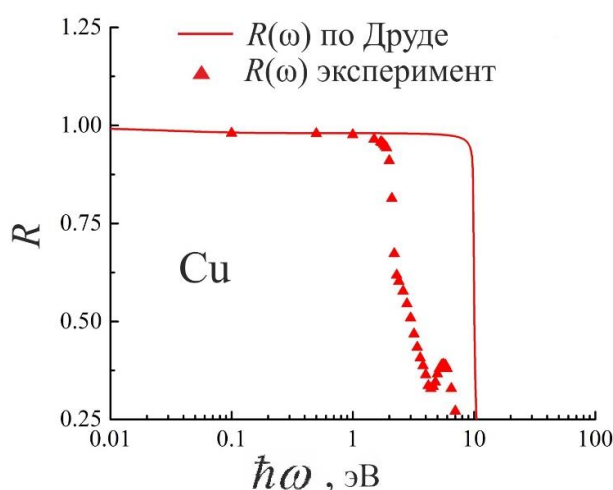


Рисунок 1.9 – Экспериментальная зависимость коэффициента отражения меди от частоты при нормальном падении и расчет по модели Друде

Спектральная зависимость коэффициента отражения металла важна при выборе длины волны излучения лазера для его обработки. Например, ясно, что при прочих равных для обработки меди лучше выбрать лазер с длиной волны видимого диапазона, а не инфракрасного.

Аналогичная меди ситуация имеет место и в благородных металлах (золото, серебро). В золоте d -зона отделена от уровня Ферми энергией 2.5 эВ, а в серебре – энергией 4 эВ (310 нм), что уже попадает в УФ диапазон. Поэтому серебро – бесцветный металл. Более сложная ситуация может наблюдаться в переходных металлах (железо, никель, титан).

Возбуждением связанных электронов с нижних энергетических уровней в зону проводимости также объясняется наличие поглощения металлов в ультрафиолетовой области спектра.

1.14 Ограничения применимости модели Друде. Аномальный скин-эффект

Коротко остановимся ещё на одном эффекте, выходящем за границы применимости модели Друде. Для проведенного ранее рассмотрения было существенно выполнение закона Ома в форме (1.10), выражающего локальную в пространстве связь плотности тока и напряженности электрического поля. Однако в условиях, когда длина свободного пробега электрона превышает характерный масштаб, на котором существенно меняется поле (т.е. глубину скин-слоя), электрон за время свободного пробега получит добавочную скорость, которая будет зависеть от напряженности поля вдоль пути движения. Значение плотности тока в некоторой точке уже не будет определяться значением поля в той же точке (нарушается локальность связи плотности тока и напряженности поля)⁵. Если при рассмотрении поглощения электромагнитной волны металлом складывается подобная ситуация, то говорят, что имеет место аномальный скин-эффект.

Аномальный скин-эффект может оказывать влияние на характер поглощения излучения при низких температурах, когда снижается частота столкновения электронов с ионами решетки и, соответственно, увеличивается длина свободного пробега.

1.15 Температурная зависимость поглощательной способности металла

Известно, что сопротивление металла, как правило, линейно растет с ростом температуры (при $T > T_D$, T_D – температура Дебая). Это связано с тем, что

⁵ Наличие пространственной дисперсии приводит к тому, что проводимость зависит не только от частоты, но и от волнового вектора.

при повышении температуры растет частота столкновений электронов с решеткой ($\gamma \sim T$). В разделе 1.12 мы установили, что в области $\gamma < \omega < \omega_p$ поглощательная способность металла равна $A = \frac{2\gamma}{\omega_p}$ (здесь речь идет о металле,

свойства которого могут быть описаны моделью Друде в указанном диапазоне частот). Соответственно, поглощательная способность металла будет линейно расти с ростом температуры:

$$A(T) = A_0 + \chi(T - T_0), \quad (1.46)$$

где $A_0 = A(T_0)$, T_0 – начальная температура, χ – коэффициент пропорциональности, который определяется статической проводимостью металла и его плазменной частотой.

Значения параметра χ обычно лежат в диапазоне $10^{-5} - 10^{-4} \text{ К}^{-1}$. Тогда добавка к поглощательной способности при нагреве металла на 1000 К может составлять около нескольких процентов. Ввиду того, что начальное значение A_0 имеет тот же порядок величины, температурная добавка может быть существенна, и её необходимо учитывать в задачах лазерного нагрева. Таким образом, между нагревом и поглощением излучения имеется положительная обратная связь, что может приводить к появлению неустойчивостей в динамике нагрева и снижению порогов повреждения металлов. Детальный анализ задачи лазерного нагрева металлов с учетом температурной зависимости поглощательной способности будет дан позднее в Главе 3.

1.16 Экспериментальные методы определения оптических свойств металлов

Поскольку слои металлов толщиной уже в несколько десятков нанометров являются непрозрачными для излучения оптического диапазона, то практически единственным способом экспериментального исследования оптических свойств металлов (например, параметров n и k_p) является анализ спектров отражения. Ясно также, что исследования одной лишь спектральной зависимости коэффициента отражения при нормальном падении (см. формулу (1.38)) недостаточно для однозначного восстановления двух зависимостей $n(\omega)$ и $k_p(\omega)$.

Существует несколько способов определения спектральных зависимостей $n(\omega)$ и $k_p(\omega)$:

1. Исследование спектров отражения при нормальном падении в сочетании с соотношениями Крамерса-Кронига. Формулы Крамерса-Кронига являются фундаментальными соотношениями, устанавливающими (исходя из весьма общих соображений) связь, задаваемую посредством некоторого интегрального преобразования, между вещественными и мнимыми частями комплексной диэлектрической проницаемости (или комплексного показателя преломления).

Используя их в качестве дополнительных соотношений между n и k_p , можно определить спектральные зависимости n и k_p по отдельности. На практике применение данного метода затруднено в связи с необходимостью проведения измерения в очень широком диапазоне частот с высокой точностью, поскольку использование соотношений Крамерса-Кронига предполагает интегрирование по всему интервалу частот.

2. Измерения спектров отражения при нормальном падении в двух различных средах с известными показателями преломления:

$$R_1 = \frac{(n - n_1)^2 + k_p^2}{(n + n_1)^2 + k_p^2} \qquad R_2 = \frac{(n - n_2)^2 + k_p^2}{(n + n_2)^2 + k_p^2},$$

здесь $n_{1,2}$ – известные показатели преломления прозрачных сред, из которых излучение падает на исследуемый поглощающий материал. Применение этого метода к поглощающим средам дает удовлетворительные результаты при $k_p < 1$, поэтому его применение в случае металлов ограничено.

3. Наиболее употребительные на практике методы основаны на анализе поляризации излучения, падающего под некоторым углом⁶. Если на металл под углом падает линейно поляризованная (под некоторым углом к плоскости падения) волна, то отраженное излучение, вообще говоря, окажется уже эллиптически поляризованным. Параметры эллиптической поляризации будут определяться оптическими константами металлов. Их измерение для различных частот позволяет определить спектральные зависимости n и k_p .

1.17 Контрольные вопросы к Главе 1

1. Каков механизм поглощения света в металлах?
2. Какие зависимости называются дисперсионными?
3. Что называют скин-эффектом и скин-слоем в металле при воздействии электромагнитного излучения?
4. Почему основное действие на электроны в металле оказывает электрическое, а не магнитное поле электромагнитной волны?
5. Назовите оптические характеристики, наиболее важные для анализа теплового действия лазерного излучения на металлы, и что они определяют?
6. Какие характеристики среды связывает формула Друде?
7. Чем объясняется наличие либо отсутствие цвета у металлов?
8. Чем обусловлено возникновение аномального скин-эффекта?
9. Почему для металлов характерна линейная зависимость поглощательной способности от температуры?

⁶ Особенности наклонного падения излучения на металл в настоящем пособии не рассматриваются. Их рассмотрение может быть найдено читателем в книге: Соколов, А.В. Оптические свойства металлов [Текст] / А.В. Соколов. – М.: Физматгиз, 1961. – 464 с.

10. Назовите способы экспериментального определения спектральной зависимости вещественного показателя преломления и коэффициента экстинкции металлов.

Глава 2. Поглощение лазерного излучения в полупроводниках

Если в металлах механизм поглощения света главным образом обусловлен поглощением на электронах проводимости в силу высокой их концентрации (10^{22} – 10^{23}) см^{-3} , то в случае полупроводников процесс поглощения света более разнообразен.

Полупроводники, в отличие от металлов, имеют запрещенную зону, что приводит к возникновению нескольких механизмов поглощения, которые зависят от длины волны излучения и могут сменяться в процессе поглощения. Важным становится соотношение между величиной кванта лазерного излучения $\hbar\omega$ и шириной запрещенной зоны E_g .

В полупроводниках под действием квантов света происходит заброс электронов в зону проводимости, в валентной зоне образуется дырка. Возникает электронно-дырочная плазма. При рассмотрении процессов фотовозбуждения полупроводника будем полагать, что концентрации электронов и дырок в каждой точке облучаемого полупроводника совпадают. Поэтому в дальнейшем будем отслеживать изменения концентрации свободных электронов n_e в зоне проводимости, считая, что это же относится и к концентрации дырок в валентной зоне, и называть ее концентрацией свободных носителей. Исключение проявляется при рассмотрении эффекта Дембера, о котором будет сказано в разделе 2.8.

2.1 Основные механизмы поглощения света в полупроводниках

Дадим характеристику основным, наиболее важным механизмам поглощения лазерного излучения в полупроводниках:

1. Собственное (межзонное) поглощение света наблюдается, когда при поглощении кванта излучения электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости. Ясно, что такой механизм поглощения возможен при условии $\hbar\omega > E_g$, где E_g – ширина запрещенной зоны полупроводника. Соответственно, коэффициент поглощения полупроводника будет резко возрастать при переходе через граничную частоту равную E_g/\hbar . На рис. 2.1 показана спектральная зависимость коэффициента поглощения типичных полупроводников (кремний, германий, арсенид галлия). Как видно из рисунка, в области собственного поглощения коэффициент поглощения может иметь значения 10^3 – 10^6 см^{-1} .

2. Внутризонное поглощение (поглощение свободными носителями). Этот механизм поглощения в целом аналогичен рассмотренному в предыдущей главе механизму поглощения электронами проводимости в металлах. В обычных условиях в полупроводниках концентрация электронов проводимости невелика (она зависит от температуры и уровня легирования) и коэффициент поглощения

свободными носителями оказывается много меньше коэффициента межзонного поглощения. Однако при лазерном облучении имеет место интенсивная генерация свободных носителей заряда (электронов и дырок), и их концентрация может стать достаточно большой для того, чтобы коэффициент внутризонного поглощения стал сопоставим по величине с коэффициентом межзонного поглощения (или даже превысил его).

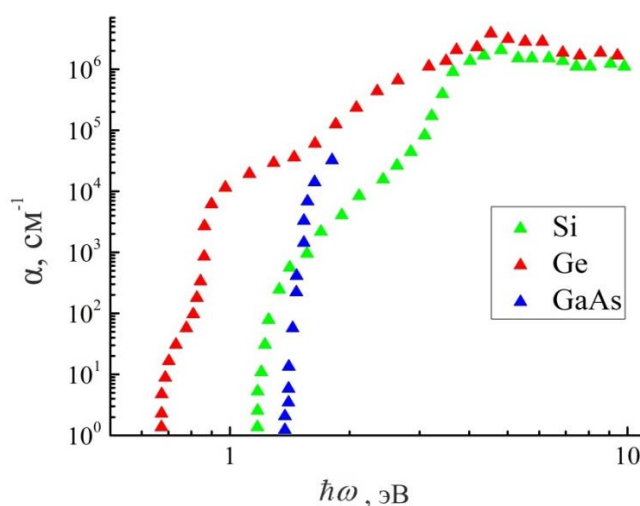


Рисунок 2.1 – Спектральные зависимости коэффициента поглощения типичных полупроводников

3. Примесное поглощение. Наличие примесей (или других дефектов) в полупроводнике создает дополнительные уровни в запрещенной зоне. Эти уровни могут участвовать в поглощении квантов падающего излучения. В этом случае возможно поглощение света с частотой $\hbar\omega < E_g$. Коэффициент примесного поглощения, как правило, невелик и составляет $\sim 10 \text{ см}^{-1}$.

4. Решеточное поглощение. Решеточное поглощение имеет место, когда излучение взаимодействует непосредственно с ионами полупроводника, и наблюдается, как правило, в среднем или дальнем ИК диапазоне. Коэффициент решеточного поглощения может достигать величин $\sim 10^3 \text{ см}^{-1}$.

В полупроводниках имеют место также более тонкие механизмы поглощения (например, экситонное), однако они, как правило, менее существенны.

При лазерной обработке полупроводников длину волны излучения обычно выбирают так, чтобы она попадала в область собственного поглощения. При этом при импульсном воздействии в полупроводнике достигаются высокие концентрации электронов и дырок, что, как уже отмечалось, может приводить к росту эффективности поглощения свободными носителями. Таким образом, именно эти два механизма и представляют наибольший интерес в контексте задач «силового» действия лазерного излучения на полупроводники.

2.2 Виды межзонного поглощения

Остановимся более подробно на процессах межзонного поглощения. В акте поглощения должен выполняться не только закон сохранения энергии, но и закон сохранения импульса (точнее квазиимпульса). При этом почти всегда можно считать, что импульс фотона оказывается много меньше импульса электрона в кристалле. Это обстоятельство обуславливает наличие ряда особенностей в процессах межзонного поглощения в зависимости от зонной структуры полупроводника.

По типу зонной структуры полупроводники можно разделить на прямозонные и непрямозонные. В прямозонных полупроводниках дно зоны проводимости и потолок валентной зоны находятся в одной точке в пространстве квазиимпульсов (см. рис. 2.2). При поглощении фотона в таком полупроводнике электрон переводится из валентной зоны в зону проводимости практически без изменения квазиимпульса. Такой переход называется прямым. Для простейшего случая параболических дисперсионных зависимостей электронов в зоне

проводимости и валентной зоне можно записать $-\frac{p^2}{2m_h} + \hbar\omega = E_g + \frac{p^2}{2m_e}$ ($m_{e,h}$ – эффективные массы электронов и дырок), откуда следует, что $p^2 = 2m^*(\hbar\omega - E_g)$, где $m^* = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$ – приведенная масса. Т.е. поглощать

излучение могут только электроны с определенным значением квазиимпульса. При квантово-механическом рассмотрении задачи поглощения различают так называемые разрешенные прямые переходы и запрещенные прямые переходы. Этим случаям соответствуют различные зависимости коэффициента межзонного поглощения от частоты излучения:

$$\alpha(\omega) \sim (\hbar\omega - E_g)^{\frac{1}{2}} \text{ – для разрешенных переходов,} \quad (2.1)$$

$$\alpha(\omega) \sim (\hbar\omega - E_g)^{\frac{3}{2}} \text{ – для запрещенных переходов.} \quad (2.2)$$

В случае непрямозонного полупроводника прямые переходы при поглощении кванта излучения с энергией, не слишком сильно превышающей E_g , невозможны в силу того, что дно зоны проводимости смещено относительно потолка валентной зоны в пространстве квазиимпульсов. Однако процесс поглощения оказывается возможным и в этом случае. Импульс, необходимый для выполнения закона сохранения, электрон получает за счет взаимодействия с фононами – квантами тепловых колебаний кристаллической решетки. Фононы обладают относительно большим импульсом (сравнимым с импульсом электрона), но малой энергией (по сравнению с энергией фотона). Таким образом, участие третьей частицы (квазичастицы) – фонона в акте поглощения

обеспечивает совместное выполнение законов сохранения импульса и энергии. Однако, поскольку теперь в процессе поглощения участвуют три частицы, то вероятность поглощения оказывается значительно ниже по сравнению с поглощением на прямых переходах. Квантово-механический анализ задачи показывает, что зависимость коэффициента поглощения при не прямых переходах от частоты описывается следующей формулой:

$$\alpha(\omega) \sim (\hbar\omega - E_g \pm \hbar\Omega)^2 \quad (2.3)$$

где $\hbar\Omega$ – энергия фонона.

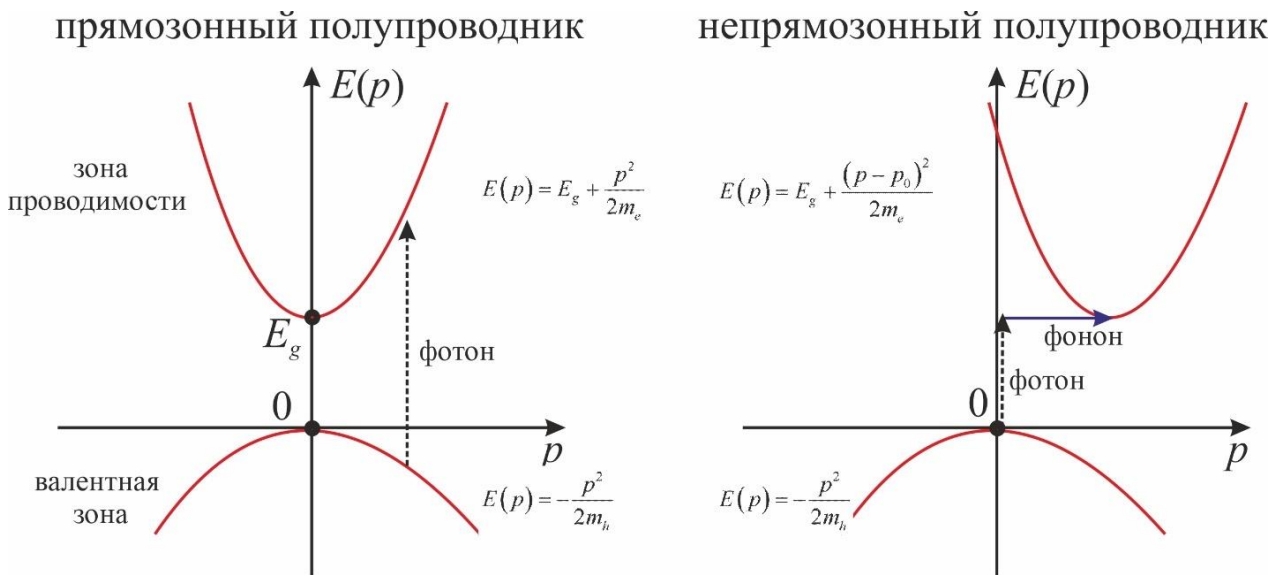


Рисунок 2.2 – Схема электронных переходов при межзонном поглощении в полупроводниках

Ширина запрещенной зоны полупроводника уменьшается с ростом температуры, что, как видно из (2.1) – (2.3), приводит к возрастанию коэффициента межзонного поглощения. Это обстоятельство, конечно, важно учитывать в задачах лазерного нагрева полупроводников. В случае непрямозонного полупроводника коэффициент пропорциональности в зависимости (2.3) определяется концентрацией фононов с квазиимпульсом, необходимым для обеспечения закона сохранения. При $T > T_D$ он пропорционален температуре. Таким образом, температурная зависимость коэффициента межзонного поглощения более ярко выражена в случае непрямозонного полупроводника.

Типичными примерами непрямозонных полупроводников являются германий и кремний. Для кремния не прямые переходы характерны в диапазоне $1.12 \text{ эВ} < \hbar\omega < 3.4 \text{ эВ}$.

2.3 Поглощение свободными носителями

Поглощение на свободных носителях при лазерной обработке может быть существенным в условиях, когда в процессе воздействия достигается высокая концентрация свободных носителей, либо для сильнолегированных полупроводников при облучении на длинах волн вне области собственного поглощения. Этот тип поглощения может рассматриваться аналогично поглощению электронами проводимости в металлах. Соответственно, формула для коэффициента поглощения может быть получена из соотношений (1.35) и (1.45). Однако следует иметь в виду, что в фотовозбужденном полупроводнике вклад в проводимость дают оба типа носителей (электроны и дырки). Далее мы будем полагать, что концентрации носителей разных знаков одинаковы, что в первом приближении обусловлено тем, что при поглощении кванта излучения возникает электрон-дырочная пара (мы также преимущественно будем иметь в виду случай собственного либо слаболегированного полупроводника). Впоследствии мы ещё вернемся к этому вопросу. Предполагая также, что частоты столкновений электронов и дырок одинаковы, можно показать, что в формулах, полученных в предыдущей главе, достаточно заменить массу электрона на приведенную массу носителей m^* . Также в формуле (1.45) слагаемые $(1 - b)$ следует заменить на $(\epsilon - b)$, где ϵ – диэлектрическая проницаемость невозбужденного полупроводника, которая может сильно отличаться от 1 (обычно $\epsilon \sim 10$). На рис. 2.3. показана зависимость коэффициента поглощения α_e на свободных носителях в приближении Друде от их концентрации n_e (α_e зависит от n_e через плазменную частоту, т.к. $\omega_p \sim \sqrt{n_e}$). При малых концентрациях плазменная частота мала и выполняется условие $\omega \gg \omega_p$, тогда коэффициент поглощения мал (в случае металлов этому условию соответствовал УФ диапазон), но линейно возрастает по мере повышения n_e :

$$\alpha_e = \sigma_e n_e, \quad (2.4)$$

где $\sigma_e = \frac{e^2 \gamma}{\epsilon_0 c_0 \sqrt{\epsilon} m^* \omega^2}$ – сечение поглощения на свободных носителях. Это приближение следует из (1.35) и (1.45) при $\omega \gg \omega_p$. В пределе высоких концентраций, когда $\omega \ll \omega_p$ полупроводник «металлизируется» и $\alpha_e = \frac{2\omega_p}{c_0}$, т.е.

$\alpha_e \sim \sqrt{n_e}$ (здесь предполагается, что $\omega > \gamma$). Переход между этими двумя предельными режимами наблюдается при приближении концентрации носителей к некоторому пороговому значению n_e^* . Анализ формул (1.35) и (1.45) показывает, что это происходит, когда вещественная часть комплексной

диэлектрической проницаемости ($\text{Re} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}$) обращается в ноль.

Соответственно, критическая концентрация равна $n_e^* = \frac{m^* \varepsilon \varepsilon_0 (\omega^2 + \gamma^2)}{e^2}$. Оценки

выполненные для кремния для длины волны $\lambda = 1.06$ мкм показывают, что $n_e^* \sim 2 \cdot 10^{21}$ см⁻³. Оказывается, что такие концентрации фотовозбужденных носителей могут быть достигнуты без разрушения полупроводника только при воздействии ультракоротких импульсов (т.е. импульсов фемто- и пикосекундной длительности). При воздействии более длинных импульсов концентрации оказываются ниже критической.

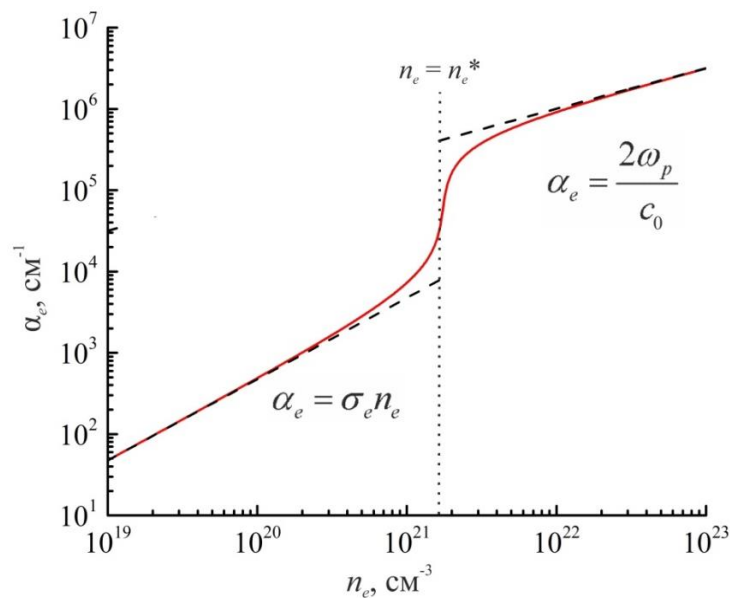


Рисунок 2.3 – Зависимость коэффициента поглощения на свободных носителях полупроводника от их концентрации, рассчитанная по модели Друде (при $m^* = 0.15m_e$, $\gamma = 8 \cdot 10^{13}$ с⁻¹, $\varepsilon = 12$, $\lambda = 1.06$ мкм)

Оценим, при каких значениях концентрации коэффициент поглощения на свободных носителях оказывается сопоставим по величине с коэффициентом межзонного поглощения. Например, в случае кремния при облучении на длинах волн, лежащих вблизи края собственного поглощения, коэффициент межзонного поглощения $\alpha_{vc} \sim 10^1 - 10^3$ см⁻¹ (см. рис. 2.1), сечение поглощения на свободных носителях $\sigma_e \sim 5 \cdot 10^{-18}$ см². Тогда при $n_e = \alpha_{vc} / \sigma_e \sim 2 \cdot 10^{18} - 2 \cdot 10^{20}$ см⁻³ поглощение на свободных носителях становится существенным. Такие концентрации фотовозбужденных носителей вполне достижимы при воздействии наносекундных импульсов.

Наш анализ в рамках модели Друде показывает, что $\alpha_e \sim \omega^{-2}$. Это хорошо выполняется в среднем и дальнем ИК диапазоне, однако при переходе в

ближний ИК и видимый диапазоны может нарушаться. Более строгий анализ с привлечением квантовой теории поглощения показывает, что $\alpha_e \sim \omega^{-g}$, где g лежит в диапазоне от 1.5. до 2.5 (либо описывается суммой вкладов указанного вида с различными g из приведенного диапазона).

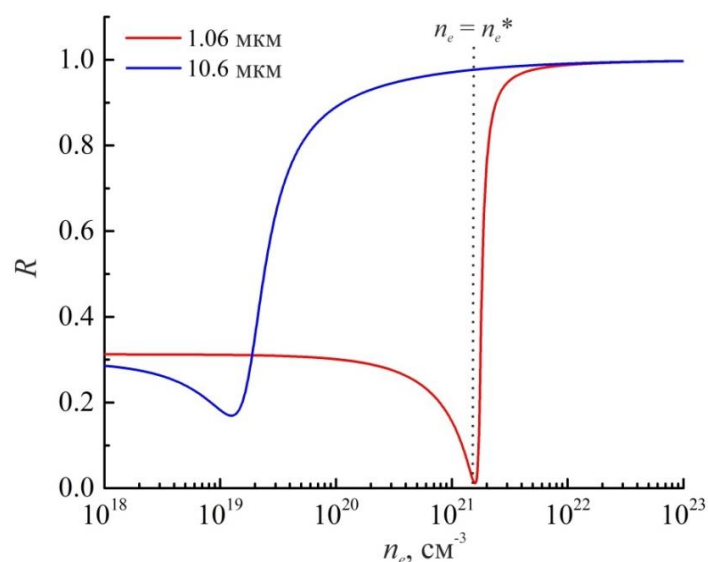


Рисунок 2.4 – Зависимость коэффициента отражения полупроводника от концентрации свободных носителей для различных длин волн (при $m^* = 0.15m_e$, $\gamma = 8 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$, $\varepsilon = 12$, $\lambda = 1.06 \text{ мкм}$)

Выясним, влияет ли увеличение концентрации электрон-дырочной плазмы на коэффициент отражения полупроводника. Анализ формул (1.38), (1.44) и (1.45) показывает, что при $n_e \ll n_e^*$ ($n \gg k_p$) коэффициент отражения практически не изменяется по мере роста n_e (см. рис. 2.4). При приближении концентрации к критическому значению наблюдается спад R . При переходе через него имеет место резкий рост коэффициента отражения, его значение приближается к значениям, характерным для металлов, – происходит «металлизация» полупроводника. Мы уже отмечали, что достижение при лазерном облучении концентраций фотовозбужденных носителей выше n_e на длинах волн ближнего ИК и видимого диапазонов (т.е. попадающих в область собственного поглощения) без его разрушения возможно при воздействии импульсов ультракороткой длительности (этот случай будет рассмотрен отдельно в последней главе). Поэтому для более длинных воздействий можно считать, что на длине волны возбуждающего излучения $R \approx \text{const}$.

Важно отметить, что для длин волн среднего ИК диапазона переход к металлическому отражению будет наблюдаться при существенно меньших концентрациях свободных носителей (см. формулу для n_e^* и рис. 2.4). Это обстоятельство обуславливает возможность метода экспериментального исследования процессов фотовозбуждения полупроводника, основанного на

анализе его коэффициента отражения на длине волны из среднего ИК диапазона (например, 10.6 мкм – CO₂-лазер), возбуждаемого коротковолновым (попадающим в область собственного поглощения) импульсом лазерного излучения, вызывающим интенсивное фотовозбуждение. Один из подобных экспериментов будет описан в разделе 2.9.

2.4 Рекомбинационные процессы

Пара носителей, возникающая при межзонном поглощении кванта излучения, впоследствии может рекомбинировать. Процессом рекомбинации называют переход возбужденного электрона обратно в валентную зону, при этом электрон-дырочная пара исчезает. Ясно, что в этом процессе должна выделяться энергия, примерно равная E_g . В зависимости от того, как именно эта энергия выделяется, процессы рекомбинации можно разделить две категории: излучательная рекомбинация и безызлучательная рекомбинация.

При излучательной рекомбинации энергия выделяется в виде излучения, т.е. при исчезновении одной электрон-дырочной пары рождается фотон с энергией $\hbar\omega \sim E_g$. Такое излучение называют рекомбинационным. Скорость излучательной рекомбинации оказывается пропорциональна квадрату концентрации носителей. Соответственно, скорость изменения концентрации носителей при излучательной рекомбинации может быть записана как $\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\beta_2 n_e^2$, где $\beta_2 \sim 10^{-15} - 10^{-20} \text{ см}^3\text{с}^{-1}$. Отметим, что в непрямозонных полупроводниках процессы излучательной рекомбинации, как правило, не играют существенной роли.

При безызлучательной рекомбинации возможны различные варианты выделения избытка энергии. В частности, энергия порядка E_g может выделяться в решетке. Обычно такой тип рекомбинации связан с наличием в полупроводнике так называемых центров безызлучательной рекомбинации – дефектов или примесей, формирующих дополнительные уровни в запрещенной зоне. Рекомбинация происходит при захвате носителя на такой центр. Скорость изменения концентрации носителей в этом случае пропорциональна концентрации носителей в первой степени: $\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\beta_1 n_e$. Видно, что в этом случае

n_e будет убывать по экспоненциальному закону с характерным временем $\tau_R = 1/\beta_1$. Величина τ_R будет зависеть не только от типа полупроводника, но и от концентрации примесей и дефектов, служащих центрами безызлучательной рекомбинации, и поэтому имеет место очень сильный разброс значений $\tau_R \sim 10^{-2} - 10^{-9} \text{ с}$. Другим вариантом выделения энергии при безызлучательной рекомбинации является её передача третьему носителю (электрону или дырке).

Такой процесс называют Оже-рекомбинацией. В этом случае в процессе рекомбинации участвуют три частицы, и скорость этого процесса будет пропорциональна кубу концентрации, соответственно, $\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\beta_3 n_e^3$, где $\beta_3 \sim 10^{-27} - 10^{-33} \text{ см}^6\text{с}^{-1}$ – коэффициент Оже-рекомбинации. Оже-рекомбинация может играть существенную роль при больших уровнях фотовозбуждения.

Помимо перечисленных видов рекомбинации, происходящих в объеме полупроводника, выделяют также поверхностную рекомбинацию, проявляющуюся при взаимодействии носителей с поверхностью полупроводника.

2.5 Кинетика фотовозбуждения полупроводника лазерным излучением

В этом разделе будет получено уравнение, позволяющее анализировать распределение концентрации свободных носителей в пространстве и во времени при лазерном фотовозбуждении полупроводника. Перечислим причины, по которым происходит изменение концентрации носителей в некоторой точке полупроводника при лазерном воздействии:

1. Генерация носителей при межзонном поглощении;
2. Рекомбинация носителей;
3. Процессы переноса носителей.

Из трех перечисленных причин первые две были рассмотрены в предыдущих разделах. Ясно, что в общем случае изменение числа носителей в некотором объеме возможно не только за счет рождения и исчезновения пар носителей (генерации и рекомбинации), но и за счет носителей, попадающих в этот объем из соседних областей, т.е. за счет переноса носителей. В общем случае процессы переноса в полупроводниках могут иметь различную природу, и их детальное описание выходит далеко за рамки настоящего пособия. Мы ограничимся лишь рассмотрением процессов переноса диффузионного типа (что, в общем, является вполне оправданным для составления общей качественной картины интересующих нас явлений).

Опишем более подробно типичную картину фотовозбуждения полупроводника лазерным излучением. Поглощение излучения с частотой $\omega > E_g/\hbar$ приводит к генерации неравновесных электрон-дырочных пар. Излучение в полупроводнике будет затухать на расстоянии порядка $1/\alpha$, где α – коэффициент поглощения полупроводника. Это будет приводить к тому, что в поверхностных слоях генерируется больше носителей, чем на глубине, т.е. распределение носителей будет неоднородным (см. рис. 2.5). Сгенерированные носители, двигаясь хаотически, будут стремиться заполнить весь предоставленный им объем, т.е. они будут мигрировать из области с более

высокой концентрацией в область с малой концентрацией (от поверхности вглубь полупроводника). Этому движению будут препятствовать столкновения носителей с решеткой, примесями и т.п. В условиях, когда длина свободного пробега электрона (или дырки) мала по сравнению с длиной, на которой существенно меняется концентрация, говорят о диффузии. В целом описанный процесс аналогичен процессу диффузии в газах (или точнее в плазме), законы которого известны. Диффузионные процессы будут приводить к тому, что масштаб фотовозбужденной области может быть больше, чем глубина проникновения света в полупроводник, и будет определяться длиной диффузии l_D . Параллельно с этим будут идти и рекомбинационные процессы.

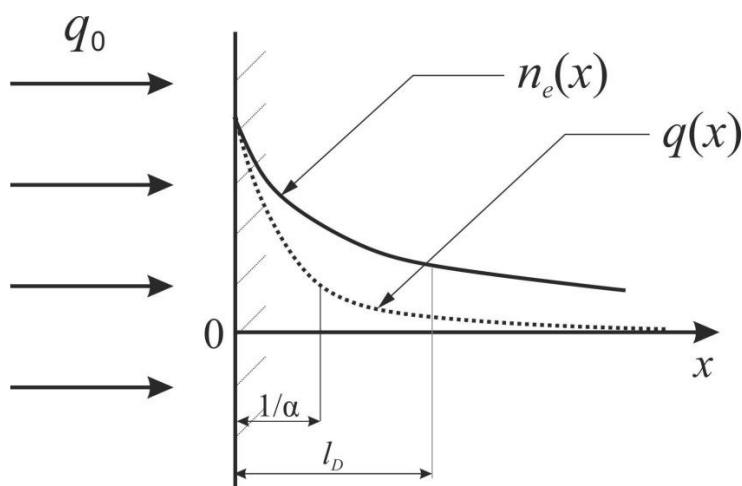


Рисунок 2.5 – Схематичное изображение распределения интенсивности излучения ($q(x)$) и концентрации фотовозбужденных неравновесных носителей ($n_e(x)$) при лазерном облучении

Итак, полная скорость изменения концентрации носителей в некоторой точке облучаемого полупроводника будет определяться суммой трех вкладов:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_G + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_R + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_D, \quad (2.5)$$

где первое слагаемое в правой части соответствует генерации носителей, второе – рекомбинации, а третье – их изменению за счет диффузионных процессов.

Последовательно получим явные выражения для каждого из этих слагаемых. Начнем с первого слагаемого, связанного с генерацией носителей.

Выясним для начала физический смысл следующей величины: $-\frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial q}{\partial x}$, где $q = q(x)$ – интенсивность излучения в точке x внутри полупроводника. По определению производной имеем $-\frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q(x) - q(x+dx)}{\hbar\omega dx}$. Умножим числитель и знаменатель на Sdt , где S – площадь некоторого сечения,

перпендикулярного направлению распространения излучения (т.е. оси x). При этом $\frac{q(x)Sdt}{\hbar\omega}$ есть число фотонов, проходящих через площадь S за время dt в

точке x , аналогично $\frac{q(x+dx)Sdt}{\hbar\omega}$ – число фотонов, проходящих через площадь S за время dt в точке $x+dx$. Разность между этими величинами, должна равняться числу фотонов, поглощенных за время dt в слое, ограниченном плоскостями x и $x+dx$, которое обозначим как dN_{abs} . Таким образом, $-\frac{1}{\hbar\omega}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dN_{abs}}{Sdxdt}$, а $Sdx = dV$

– элемент объема. Соответственно, $-\frac{1}{\hbar\omega}\frac{\partial q}{\partial x}$ есть число фотонов, поглощаемых в единицу времени в единице объема. С другой стороны, коэффициент поглощения полупроводника $\alpha = -\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x}$ (это соотношение можно рассматривать

как определение коэффициента поглощения; видно, что если $\alpha = \text{const}$, то излучение затухает по обычному экспоненциальному закону). В общем случае поглощение излучения в полупроводнике может быть обусловлено различными механизмами (межзонное поглощение, поглощение свободными носителями и др.), поэтому $\alpha = \alpha_{vc} + \alpha_e + \dots$ (здесь α_{vc} – коэффициент межзонного поглощения).

Таким образом, $\frac{\alpha_{vc}q}{\hbar\omega}$ есть число фотонов, поглощенных именно при межзонном поглощении. Т.к. при однофотонном межзонном поглощении генерируется одна электрон-дырочная пара, то

$$\left(\frac{\partial n_e}{\partial t}\right)_G = \frac{\alpha_{vc}q}{\hbar\omega}. \quad (2.6)$$

Выражения, описывающие изменение концентрации носителей при рекомбинационных процессах, были приведены в предыдущем разделе. Их можно рассматривать как обобщение экспериментальных данных. Если существенны различные каналы рекомбинации, то суммарная скорость рекомбинации будет определяться суммой соответствующих вкладов, т.е.:

$$\left(\frac{\partial n_e}{\partial t}\right)_R = -\beta_1 n_e - \beta_2 n_e^2 - \beta_3 n_e^3. \quad (2.7)$$

Коротко поясним, почему зависимости скоростей рекомбинации от концентрации носителей именно такие. Например, в случае Оже-рекомбинации в процессе участвуют три носителя. Ясно, что вероятность того, что в некотором малом объеме пространства окажется носитель в некоторый момент времени, пропорциональна n_e . Соответственно, вероятность того, что в некотором малом объеме (внутри которого носители могут взаимодействовать друг с другом)

окажутся три носителя, пропорциональна кубу концентрации, отсюда и пропорциональная n_e^3 скорость Оже-рекомбинации.

Для определения скорости изменения концентрации носителей за счет диффузионных процессов воспользуемся законом диффузии Фика: $j_n = -D \frac{\partial n_e}{\partial x}$

(здесь j_n – поток носителей, т.е. число частиц, протекающих через единицу площади за единицу времени, D – коэффициент диффузии, $[D] = \text{м}^2/\text{с}$). Исходя из закона сохранения числа частиц и определения величины j_n , следует, что $(j_n(x) - j_n(x + dx)) S dt$ – приращение числа носителей в слое толщиной dx за

время dt . Разделив это выражение на $S dx dt$, получим $-\frac{\partial j_n}{\partial x} = \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_D$, или с учетом

закона Фика (при $D = \text{const}$)⁷:

$$\left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_D = D \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2}. \quad (2.8)$$

Подставляя полученные выражения (2.6), (2.7) и (2.8) в (2.5) получим уравнение баланса концентрации фотовозбужденных носителей:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{\text{vc}} q}{\hbar \omega} - \beta_1 n_e - \beta_2 n_e^2 - \beta_3 n_e^3. \quad (2.9)$$

Мы видим, что пространственно-временное распределение концентрации фотовозбужденных носителей в полупроводнике подчиняется дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа. Чтобы решение было единственным, необходимо задать начальное условие и два граничных. В задачах лазерного фотовозбуждения в качестве начального условия почти всегда можно задать $n_e|_{t=0} = n_{e0}$, где n_{e0} – начальная равновесная концентрация свободных носителей (поскольку зачастую концентрация фотовозбужденных носителей намного превышает равновесную, то можно считать $n_{e0} = 0$). Ясно также, что в качестве граничного условия на удаленной границе полупроводника можно рассматривать $n_e|_{x \rightarrow \infty} = n_{e0}$.

Граничное условие на облучаемой поверхности должно описывать возможные потоки носителей через границу. В случае если носители не переносятся через границу (либо не уничтожаются вследствие поверхностной рекомбинации), их

поток на границе равен нулю, и, соответственно: $\frac{\partial n_e}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.

Для отыскания решения уравнения (2.9) необходимо также знать распределение интенсивности $q(x, t)$ в облучаемом полупроводнике. В общем

⁷ В дальнейшем выяснится, что уравнение теплопроводности и уравнение диффузии имеют одинаковую структуру. Вывод уравнения теплопроводности будет описан более подробно.

случае коэффициент поглощения может сам зависеть от концентрации носителей, поэтому характер поглощения может быть не экспоненциальным. Тогда для отыскания $q(x, t)$ следует воспользоваться уравнением:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \alpha q \quad (2.10)$$

с граничным условием $q|_{x=0} = Aq_0(t)$, где α – полный коэффициент поглощения полупроводника, складывающийся в первую очередь из коэффициента межзонного поглощения α_{vc} и коэффициента поглощения на свободных носителях α_e , A – поглощательная способность, $q_0(t)$ – интенсивность падающего импульса. Если же, в силу каких-либо причин, можно считать существенным только межзонное поглощение с постоянным коэффициентом α_{vc} , то, очевидно, что $q = Aq_0 e^{-\alpha_{vc}x}$.

2.6 Некоторые решения уравнения, описывающего фотовозбуждение полупроводника лазерным излучением

Уравнение (2.9), полученное в предыдущем разделе, нелинейное, и его решение в общем случае возможно только численными методами. Общим свойством решений уравнения (2.9) является то, что спустя некоторое время t_{st} при облучении с постоянной мощностью, распределение концентрации носителей перестает зависеть от времени, или, как говорят, устанавливается стационарное распределение носителей $N_e(x)$ (см. рис. 2.6). Поясним это следующим образом. На начальном этапе облучения в правой части существенно только слагаемое, ответственное за генерацию носителей, т.к. концентрация носителей ещё мала и рекомбинационные процессы, пропорциональные n_e в некоторой степени, ещё малозначительны. По мере роста n_e растёт скорость рекомбинации, и в некоторый момент рекомбинация будет компенсировать генерацию носителей. Соответственно, концентрация носителей перестанет меняться. Наличие диффузионных явлений принципиально не затронет сделанный вывод.

Ясно, что распределение $N_e(x)$ будет подчиняться уравнению:

$$D \frac{\partial^2 N_e}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{vc} q}{\hbar \omega} - \beta_1 N_e - \beta_2 N_e^2 - \beta_3 N_e^3 = 0. \quad (2.11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2.11).

В ситуации, когда излучательная рекомбинация и Оже-рекомбинация несущественны, и можно считать, что излучение затухает по экспоненциальному закону:

$$-D \frac{d^2 N_e}{dx^2} + \frac{N_e}{\tau_R} = \frac{\alpha_{vc} A q_0 e^{-\alpha_{vc}x}}{\hbar \omega}, \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{dN_e}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad N_e|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

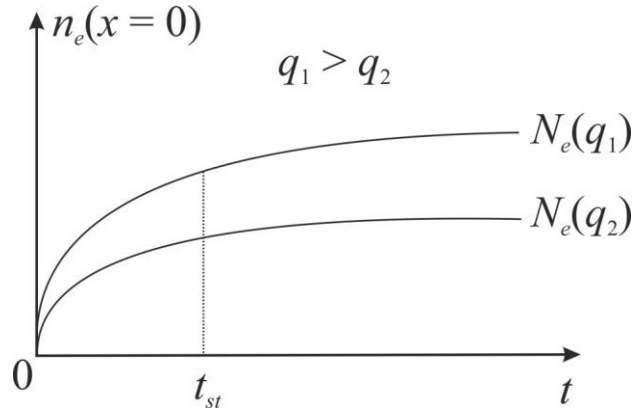


Рисунок 2.6 – Схематичная иллюстрация выхода зависимости концентрации носителей от времени (на поверхности) на стационарный режим для различных интенсивностей возбуждающего излучения

Решение будет иметь вид:

$$N_e(x) = \frac{\alpha_{vc} J \tau_R}{1 - \alpha_{vc}^2 D \tau_R} \left(e^{-\alpha_{vc} x} - \alpha_{vc} \sqrt{D \tau_R} e^{-\frac{x}{\sqrt{D \tau_R}}} \right), \quad (2.13)$$

где $J = \frac{A q_0}{\hbar \omega}$ – поглощенная плотность потока фотонов. Из (2.13) следует, что если $\alpha_{vc} \sqrt{D \tau_R} \gg 1$, то размер фотовозбужденной области определяется длиной диффузии $\sqrt{D \tau_R}$, в противоположном случае диффузионные процессы малосущественны и размер фотовозбужденной области определяется глубиной проникновения излучения $1/\alpha_{vc}$.

В условиях, когда преобладает Оже-рекомбинация, а глубина проникновения излучения мала, распределение концентрации носителей может быть найдено из уравнения:

$$D \frac{\partial^2 N_e}{\partial x^2} - \beta_3 N_e^3 = 0, \quad (2.14)$$

$$-D \left. \frac{dN_e}{dx} \right|_{x=0} = J \quad N_e|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.15)$$

Условие малости глубины проникновения излучения позволяет учитывать фотовозбуждение носителей в граничном условии. Решение уравнения (2.14) с граничным условием (2.15) имеет вид:

$$N_e(x) = \sqrt{\frac{2D}{\beta_3}} \frac{1}{x + \sqrt{\frac{D\sqrt{2D}}{J\sqrt{\beta_3}}}}, \quad (2.16)$$

т.е. профиль стационарного распределения носителей в этом случае не экспоненциальный, а гиперболический.

2.7 Насыщение межзонного поглощения

Ранее мы уже отмечали, что коэффициент межзонного поглощения α_{vc} может изменяться в процессе лазерного воздействия. Например, при нагреве полупроводника уменьшается ширина запрещенной зоны, что согласно формулам (2.1) – (2.3) должно приводить к росту α_{vc} (в случае непрямых переходов рост α_{vc} с температурой также связан с увеличением концентрации фононов, обеспечивающих сохранение квазиимпульса). Однако в некоторых ситуациях может наблюдаться и уменьшение коэффициента межзонного поглощения. Эффект, благодаря которому это происходит, называется насыщением межзонного поглощения (или динамическим эффектом Бурштейна-Мосса). Его природа аналогична известному эффекту насыщения

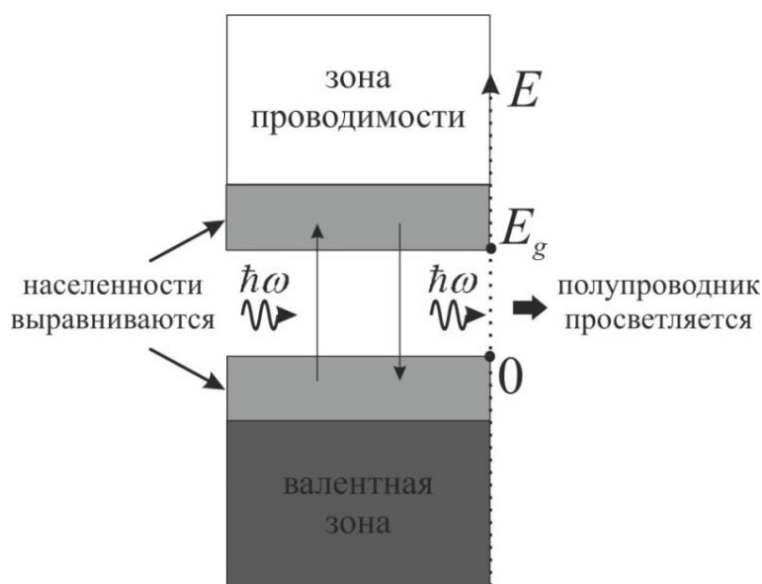


Рисунок 2.7 – Насыщение межзонного поглощения в полупроводнике

поглощения в двухуровневой системе: под воздействием интенсивного светового поля происходит выравнивание населенностей верхнего и нижнего уровней, что приводит к просветлению среды. Если энергия кванта $\hbar\omega$ лишь незначительно превышает ширину запрещенной зоны и интенсивность излучения достаточно велика, то состояния вблизи дна запрещенной зоны будут быстро заполняться электронами, в то время как состояния у потолка валентной

зоны, напротив, будут обедняться. По мере выравнивания населенностей процессы вынужденного излучения будут компенсировать поглощение квантов излучения и коэффициент межзонного поглощения уменьшится. Схематично этот процесс проиллюстрирован на рис. 2.7. Указанный эффект может, например, наблюдаться при облучении кремния на длине волны 1.06 мкм ($\hbar\omega = 1.17$ эВ, $E_g = 1.12$ эВ).

2.8 Фотоиндуцированный эффект Дембера

При рассмотрении динамики фотовозбуждения полупроводника мы полагали, что концентрации электронов и дырок в каждой точке облучаемого полупроводника совпадают. Действительно, процессы генерации и рекомбинации приводят к появлению/уничтожению именно электрон-дырочных пар. Однако процессы переноса, идущие по-разному для электронов и дырок, могут нарушать этот баланс. Коэффициенты диффузии электронов и дырок могут различаться (чаще электроны более подвижны, далее для определенности будем рассматривать именно этот случай). Такая разница будет приводить к тому, что электроны будут диффундировать вглубь полупроводника быстрее дырок. Из-за недостатка электронов на поверхности и их избытка на глубине в полупроводнике, облучаемом лазером, возникнет электрическое поле, направленное от поверхности вглубь (см. рис. 2.8). Этот эффект называют фотоиндуцированным эффектом Дембера. Неоднородность концентрации фотовозбужденных носителей может иметь место также и в радиальных (поперечных) направлениях из-за неоднородности распределения интенсивности излучения в лазерном пятне. Соответственно этому, в общем случае выделяют продольный и поперечный эффект Дембера.

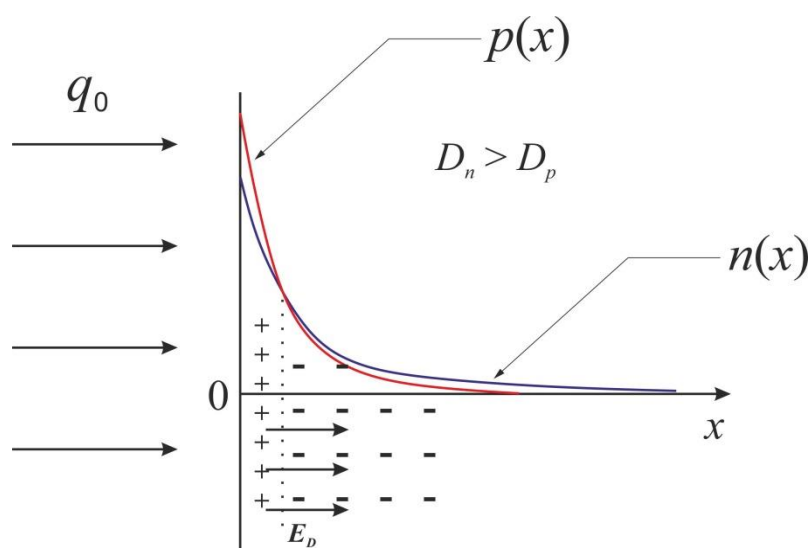


Рисунок 2.8 – Продольный фотоиндуцированный эффект Дембера

Отметим, что появление демберовского поля, в свою очередь, будет препятствовать дальнейшему разделению зарядов. Оно будет тормозить диффузию электронов и ускорять диффузию дырок. Такая диффузия называется амбиполярной. Относительная разница в концентрациях электронов и дырок при этом будет невелика, что оправдывает подход, рассмотренный в разделе 2.5 для тех случаев, когда сам по себе эффект Дембера и связанные с ним процессы нас не интересуют. В качестве коэффициента диффузии D , входящего в уравнение (2.9), следует понимать коэффициент амбиполярной диффузии $D = \frac{2D_n D_p}{D_n + D_p}$, где

$D_{n,p}$ – коэффициенты диффузии электронов и дырок «по отдельности», соответственно.

Фотоиндуцированный эффект Дембера может быть использован для генерации импульсов терагерцового излучения. Действительно, если длительность возбуждающего порядка 10^{-12} с, то описанный процесс разделения зарядов, приводящий к появлению дипольного момента, будет происходить на том же масштабе времен. Из электродинамики известно, что наличие переменного во времени дипольного момента приводит к излучению электромагнитной волны. Соответственно, в данном случае импульс излучения будет иметь центральную частоту, попадающую в терагерцовый диапазон частот.

2.9 Экспериментальные методы исследования динамики фотовозбуждения полупроводников лазерными импульсами

В разделе 2.3 было показано, что интенсивное фотовозбуждение полупроводника вызывает изменение его оптических свойств и, в частности, коэффициента отражения. Также было указано, что для исследования динамики фотовозбуждения полупроводника короткими (например, наносекундными) импульсами по изменению коэффициента отражения целесообразно использовать два лазера. Первый лазер с длиной волны, попадающей в область собственного поглощения (ближний ИК или видимый диапазоны), используется собственно для фотовозбуждения, а второй лазер среднего ИК диапазона – для анализа изменения коэффициента отражения, поскольку в этой спектральной области коэффициент отражения более чувствителен к изменениям концентрации носителей (см. рис. 2.4). Описание и результаты одного из таких экспериментов приводятся в данном разделе⁸.

⁸ Далее рассматривается эксперимент из работы: Gallant M.I., Van Driel H.M. Infrared reflectivity probing of thermal and spatial properties of laser-generated carriers in germanium // Physical Review B. – 1982. – Vol. 26. – №. 4. – P. 2133-2146.

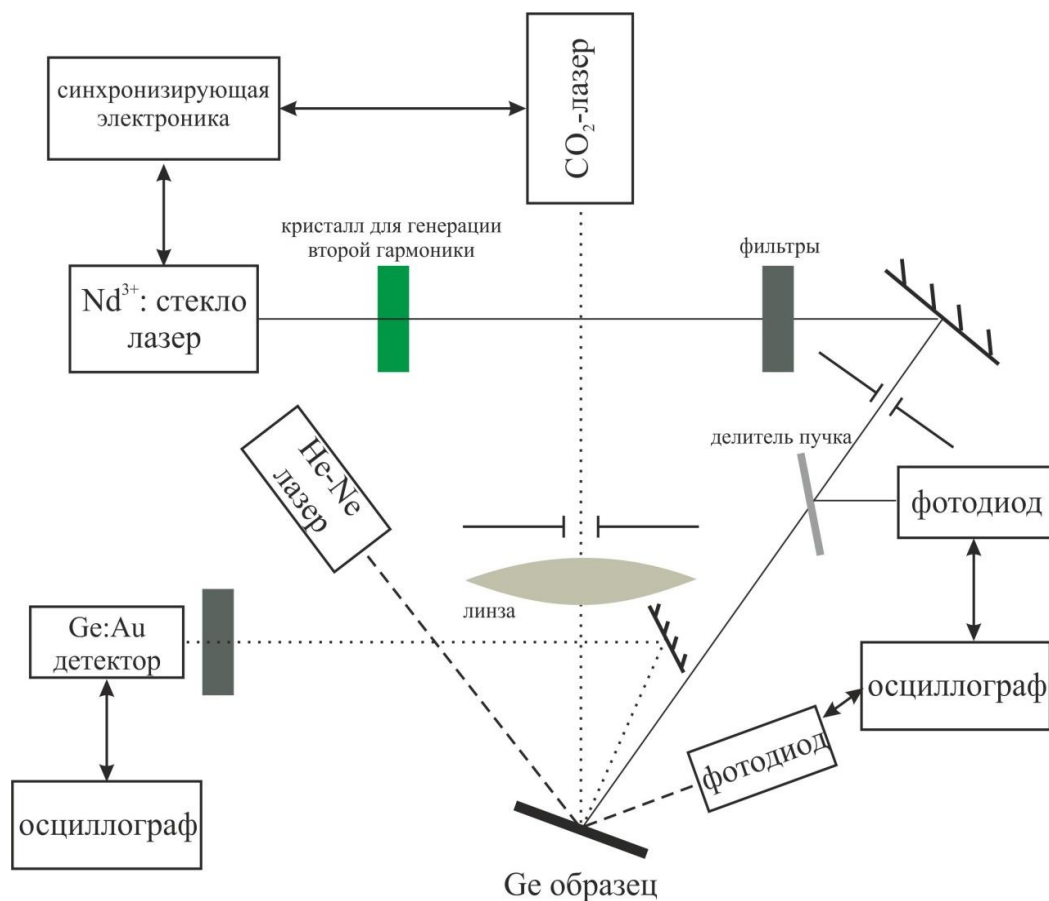


Рисунок 2.9 – Схема экспериментальной установки для исследования динамики фотовозбуждения полупроводника

На рис. 2.9 показана схема, позволяющая исследовать динамику коэффициента отражения полупроводника (в данном случае германия) при облучении импульсами наносекундной длительности. Для фотовозбуждения полупроводника используется лазер на стекле с неодимом, генерирующий импульсы с длительностью 80 нс на основной длине волны (1.06 мкм). Для исследования динамики коэффициента отражения полупроводника в среднем ИК диапазоне используется импульсный CO_2 -лазер (10.6 мкм), синхронизированный с лазером на стекле с неодимом. Излучение, отраженное от фотовозбужденного полупроводника, регистрируется Ge:Au детектором, соединенным с осциллографом. Также дополнительно проводились измерения динамики коэффициента отражения излучения He-Ne лазера.

На рис. 2.10 показаны результаты измерения коэффициента отражения германия на длине волны 10.6 мкм, возбуждаемого наносекундными импульсами на длине волны 1.06 мкм с различными интенсивностями ниже порога плавления. Видно, что в случае невысоких интенсивностей наблюдается

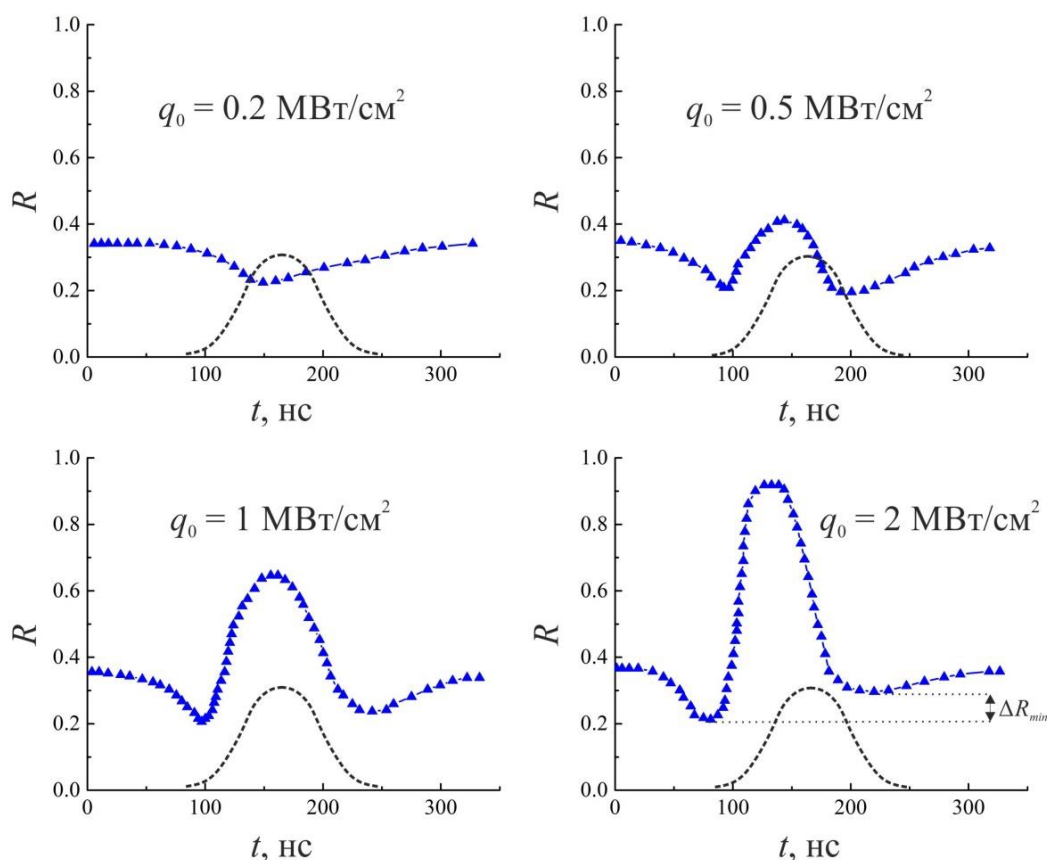


Рисунок 2.10 – Динамика изменения коэффициента отражения германия на длине волны 10.6 мкм при возбуждении наносекундными импульсами различной интенсивности (пунктиром показана форма возбуждающего импульса)

спад коэффициента отражения с последующим возвратом к первоначальному значению после окончания импульса. При повышении интенсивности возбуждающего импульса первоначальный спад сменяется быстрым ростом коэффициента отражения с последующим спадом и возвращением к первоначальному значению после окончания импульса. Рост коэффициента отражения соответствует концентрации носителей, при которой плазменная частота превышает частоту излучения (см. раздел 2.3 и рис. 2.4). Спад коэффициента отражения на заднем фронте импульса и его возврат к первоначальному значению связаны с рекомбинацией носителей. Из рис. 2.10 также видно, что значение коэффициента отражения в минимуме на заднем фронте импульса больше аналогичного значения на переднем на величину ΔR_{\min} . Это можно связать с нагревом образца. При низких интенсивностях такой разницы практически не наблюдается. Оценки концентрации фотовозбужденных носителей, полученные на основе данных по изменению отражения, показывают, что достижимые без разрушения германия уровни фотовозбуждения

наносекундными импульсами составляют $\sim 10^{19} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Существенных изменений в коэффициенте отражения в видимом диапазоне длин волн при этом не наблюдается. Описанные экспериментальные результаты в целом согласуются с теоретическими представлениями, которые были изложены ранее.

2.10 Контрольные вопросы к Главе 2

1. Перечислите основные механизмы поглощения света в полупроводниках.
2. Какие виды оптических переходов в полупроводниках вы знаете?
3. Перечислите основные механизмы рекомбинации электрон-дырочных пар в полупроводниках.
4. Каков механизм возникновения диффузии при фотовозбуждении полупроводника лазерным излучением?
5. Какова физическая природа эффекта насыщения межзонного поглощения?
6. В чем заключается физическая природа фотоиндуцированного эффекта Дембера?
7. В чем заключается основная идея исследования динамики фотовозбуждения полупроводника наносекундными лазерными импульсами оптическими методами?

Глава 3. Нагрев материалов лазерным излучением

Вторая стадия тепловой модели взаимодействия лазерного излучения с конденсированными средами связана с лазерным нагревом поглощающих материалов. Она является основной при изучении физической сущности ряда технологических операций (например, термоупрочнения, сварки и т.п.). Для лазерной обработки, связанной с удалением и разрушением материала, стадия нагревания является предварительной, но весьма важной, так как её анализ позволяет определить условия начала разрушения.

3.1 Общая характеристика лазерного нагрева

Поглощение энергии лазерного излучения материалом приводит к его нагреву. Характеристикой степени нагрева материала лазерным излучением (как и в большинстве случаев других видов нагрева) является его температура. Некоторым исключением здесь является случай воздействия на материал импульсов субпикосекундной длительности, который будет отдельно рассмотрен во второй части пособия.

Основные особенности лазерного нагрева связаны с возможностью концентрации энергии лазерного излучения как в пространстве, так и во времени. Это приводит к тому, что скорости нагрева и градиенты температуры могут достигать чрезвычайно высоких значений $\sim 10^{13}$ К/с и $\sim 10^9$ К/м, соответственно. Высокие скорости нагрева и охлаждения и большие пространственные градиенты температуры обуславливают особенности лазерного нагрева и могут привести к значительным отличиям в протекании тепловых процессов, стимулированных лазерным воздействием.

Результат теплового действия лазерного излучения будет определяться некоторым набором параметров, которые можно разбить на три группы:

1. Параметры нагревающего излучения – плотность мощности q , длительность импульса t_p , форма и размер зоны облучения, частота следования импульсов (в случае многоимпульсной обработки), скорость сканирования пучка и т.д.

2. Оптические характеристики материала – поглощательная способность A , коэффициент поглощения α .

3. Теплофизические характеристики материала – удельная теплоемкость c , коэффициент теплопроводности k .

Целью дальнейшего анализа, проводимого в этой главе, будет являться установление количественных взаимосвязей между указанными параметрами и температурой лазерного нагрева.

3.2 Основные теплофизические понятия

Напомним физический смысл основных теплофизических понятий, которые будем использовать в дальнейшем.

1. Удельная теплоемкость c показывает количество теплоты, которое необходимо сообщить единице объема (или массы) материала, чтобы нагреть его на один градус:

$$c_v = \frac{dQ}{dVdT} \text{ – теплоемкость единицы объема, } [c_v] = \text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}), \quad (3.1)$$

$$c_m = \frac{dQ}{dm dT} \text{ – теплоемкость единицы массы, } [c_m] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

где dQ – малое изменение количества теплоты, dT – приращение температуры, dV – элемент объема, $dm = \rho dV$, ρ – плотность. Ясно, что $c_v = \rho c_m$. В дальнейшем под удельной теплоемкостью c будем понимать теплоемкость единицы объема, т.е. $c = c_v$.

2. Тепловой поток j_Q показывает количество тепла, протекающее через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени, и направлен по нормали к изотермической поверхности в сторону уменьшения температуры (см. рис. 3.1):

$$j_Q = n \frac{dQ}{dt dS}, \quad (3.2)$$

n – единичная нормаль к изотермической поверхности, направленная в сторону уменьшения температуры.

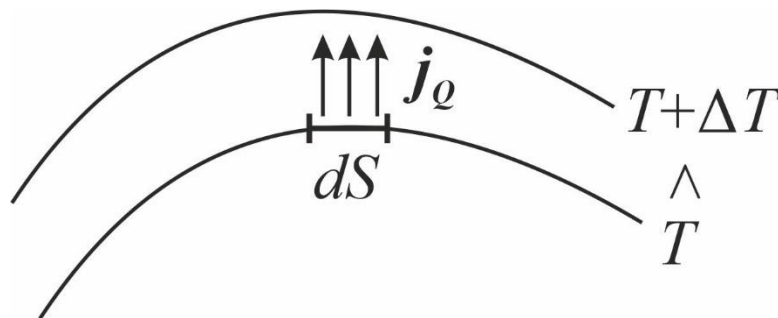


Рисунок 3.1 – К определению теплового потока

Опыт показывает, что в неоднородно нагретом теле тепловая энергия переносится от более нагретых областей к более холодным. Если через некоторую точку среды провести поверхность равной температуры (изотермическую поверхность), то в касательных к этой поверхности направлениях энергия переноситься не будет, т.к. в этих направлениях отсутствует перепад температур, поэтому тепловой поток направлен вдоль нормали. Величина теплового потока в некоторой точке неоднородно нагретого

тела оказывается пропорциональна градиенту температур, взятому с обратным знаком. Этот закон называется законом Фурье. Его можно рассматривать как обобщение экспериментальных данных.

3. Коэффициент теплопроводности k является коэффициентом пропорциональности между тепловым потоком и температурным градиентом:

$$j_Q = -k \text{grad} T, [k] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}). \quad (3.3)$$

4. Коэффициент температуропроводности (или просто температуропроводность) среды есть отношение коэффициента теплопроводности к удельной теплоемкости:

$$a = \frac{k}{c}, [a] = \text{м}^2/\text{с}. \quad (3.4)$$

Именно температуропроводность определяет скорость изменения температуры. Действительно, количество теплоты, сообщаемое некоторому объему неоднородно нагретого тела в единицу времени за счет теплопроводности, будет пропорционально k . Однако приращение температуры при этом будет обратно пропорционально c . Поэтому скорость изменения температуры будет определяться отношением k/c , т.е. температуропроводностью.

5. Плотность мощности объемных источников тепла (объемная плотность мощности тепловых источников) – энергия, выделяемая в виде тепла за единицу времени в единице объема среды.

$$q_v = \frac{dQ}{dt dV}, [q_v] = \text{Вт}/\text{м}^3. \quad (3.5)$$

В интересующих нас случаях источник тепла связан с поглощением лазерного излучения.

3.3 Тепловой источник, связанный с поглощением лазерного излучения

В разделе 2.5 мы выяснили, что величина $-\frac{\partial q}{\partial x}$ (q – плотность мощности лазерного излучения) есть энергия лазерного излучения, поглощаемая материалом в единицу времени в единице объема. Ясно, что если поглощенная энергия сразу же переводится тепловую, то:

$$q_v = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Если излучение затухает по экспоненциальному закону $q(x) = A q_0 e^{-\alpha x}$, то:

$$q_v = A \alpha q_0 e^{-\alpha x}. \quad (3.7)$$

Следует заметить, что поглощаемая энергия не всегда сразу же переводится тепло. Например, в случае межзонного поглощения кванта

излучения в полупроводнике можно считать, что в тепло сразу же переводится лишь часть энергии, равная $(\hbar\omega - E_g)$ (за счет быстрых процессов электрон-фононного взаимодействия), в то время как оставшаяся часть энергии E_g выделяется в решетке с некоторой временной задержкой, определяемой временем рекомбинации, которая может быть сопоставима или даже превышать длительность лазерного импульса. Выражение для теплового источника q_v в этом случае будет более сложным.

3.3 Уравнение теплопроводности

В этом разделе будет получено уравнение, позволяющее рассчитывать распределение температурного поля в неоднородно нагретом материале.

Рассмотрим для начала одномерный случай, когда температура может зависеть только от одной координаты и от времени. В неоднородно нагретом теле выделим тонкий слой, зажатый между плоскостями x и $x + dx$ (см. рис. 3.2).

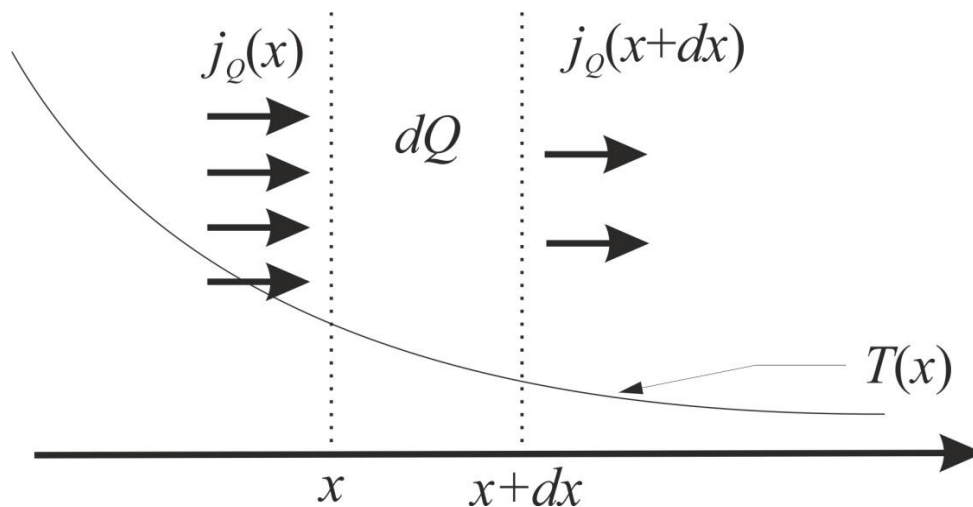


Рисунок 3.2 – К выводу уравнения теплопроводности

Определим количество теплоты dQ , сообщенное этому слою за время dt . Согласно определению теплового потока количество теплоты, втекающее в рассматриваемый объем через площадку (с площадью S) в точке x за время dt , равно $j_Q(x)Sdt$, аналогично количество теплоты, вытекающее из рассматриваемого слоя, равно $j_Q(x+dx)Sdt$. Разность между этими величинами будет равна приращению количества теплоты, полученного выделенным объемом за счет теплопроводности. В материале также может действовать объемный источник тепла, который за время dt сообщит рассматриваемому объему количество теплоты, равное $q_v S dx dt$. Итак, суммируя все вклады, можем записать, что $dQ = (j_Q(x) - j_Q(x+dx))Sdt + q_v S dx dt$. Разделив на $S dx dt$, получим

$\frac{dQ}{dVdt} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + q_v$. Из определения удельной теплоемкости (см. формулу (3.1))

следует, что $\frac{dQ}{dV} = c dT$, соответственно, $c \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + q_v$. Вспоминая, что

согласно закону Фурье (см. формулу (3.3)) $j_Q = -k \frac{\partial T}{\partial x}$, можем окончательно

записать:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_v. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) называется одномерным уравнением теплопроводности. Если среда однородна и коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, то его можно вынести из-под производной. Разделив обе части уравнения (3.8) на c , получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c}. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.9) видно, что если отсутствует объемный источник тепла ($q_v = 0$), то скорость изменения температуры пропорциональна температуропроводности материала и второй производной от температуры по координате.

Для обобщения уравнения (3.8) на трехмерный случай нужно внутреннюю производную в правой части (3.8) заменить на градиент, а внешнюю на дивергенцию:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} T) + q_v. \quad (3.10)$$

В уравнении (3.10) температура T является функцией 3-х координат и времени, а коэффициенты c , k и объемный источник тепла q_v могут являться функциями координат, времени и температуры.

3.4 Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности, полученное в предыдущем разделе, является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа. Для того чтобы получить однозначное решение уравнения теплопроводности, необходимо задать начальные и граничные условия. Мы приведем явные формулировки этих условий только для одномерного случая, указывая (в том случае, если это не вполне очевидно) способ их обобщения для трехмерной ситуации.

В качестве начального условия задается распределение температуры в материале в некоторый начальный момент времени: $T(x, 0) = T_0(x)$. В случае

лазерной обработки почти всегда начальная температура одинакова во всех точках облучаемого тела и равна комнатной.

Граничные условия определяют условия теплового взаимодействия тела с окружающей средой. Они могут быть заданы в различных формах.

Постановка граничных условий 1-го рода заключается в задании распределения температуры на границах тела во все моменты времени. Для каждой из границ необходимо задать условие вида $T(0,t) = T_s(t)$, где $T_s(t)$ – заданная функция времени, полагаем, что координата $x = 0$ (ось x направлена в глубину) соответствует границе тела (аналогичное задается на остальных границах).

Граничные условия 2-го рода задают значения теплового потока для каждой точки поверхности тела. Например, в одномерной ситуации для одной из границ имеем:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_s(t), \quad (3.11)$$

где $q_s(t)$ – заданный тепловой поток на поверхности тела. Для постановки граничных условий 2-го рода в многомерной задаче производную по координате x следует заменить на производную в направлении нормали к поверхности. Если тепловой поток на поверхности отсутствует ($q_s = 0$), то поверхность является теплоизолированной, т.е. тело никак не обменивается энергией с окружающей средой.

Граничные условия второго рода играют важную роль в задачах лазерного нагрева, и именно они задаются на облучаемой поверхности. В частности, интуитивно ясно, что если излучение поглощается в тонком поверхностном слое, то можно считать, что источник тепла является поверхностным, а поглощаемая часть плотности мощности излучения равна тепловому потоку на облучаемой поверхности тела: $q_s = Aq_0$ (q_0 – падающая плотность мощности излучения). В общем случае выражение для q_s может содержать отрицательные слагаемые, связанные с наличием тепловых потерь, которые могут быть обусловлены радиационным (потери нагретой поверхности на излучение) или конвективным теплообменом.

Если заданы температура окружающей среды T_{cp} и закон теплообмена между окружающей средой и поверхностью обрабатываемого материала, то говорят, что в тепловой задаче заданы граничные условия 3-го рода:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \beta(T - T_{cp}),$$

где β – коэффициент теплопередачи, $[\beta] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. По сути, с физической точки зрения задание граничных условий третьего рода также сводится к заданию теплового потока на поверхности в некотором частном случае. Отметим, что в

общем случае возможна ситуация, когда на различных поверхностях заданы граничные условия различных типов.

3.5 Методы решения уравнения теплопроводности

Методы решения уравнения теплопроводности (как и других задач математической физики) можно разделить на аналитические и численные. Аналитические методы позволяют выразить температуру нагрева как функцию от параметров задачи в виде явной формулы. Их преимущество заключается в том, что сразу видна зависимость решения от интересующих исследователя параметров задачи. Кроме того, зная аналитическое решение, часто бывает несложно решить обратную задачу – т.е., например, определить параметры греющего излучения, необходимые для достижения требуемой температуры, что может быть полезно при выборе режима лазерного воздействия. Недостатком аналитических методов является их сравнительно узкая область применимости. Аналитическое решение задач теплопроводности возможно для линейных задач (за редким исключением), для тел и тепловых источников, обладающих определенной симметрией, и т.п. В общем случае, когда необходимо учитывать зависимость теплофизических и оптических свойств среды от температуры, её неоднородность, сложную геометрическую форму, необходимо прибегнуть к численным методам решения. Численное решение непосредственно позволяет получить распределение температуры в облучаемом материале при некотором определенном наборе параметров. Однако для изучения зависимости решения задачи от интересующих исследователя параметров необходимо многократно повторять численные расчеты при различных значениях этих параметров. В этом отношении численные методы проигрывают аналитическим.

Несмотря на то, что большинство реальных задач, как правило, решаются с помощью численного анализа, весьма полезно ознакомиться с аналитическими решениями задач теплопроводности, поскольку они легко позволяют проиллюстрировать наиболее характерные особенности лазерного нагрева материалов, знание которых необходимо для специалиста в области лазерной обработки материалов. Кроме того, оценки, выполненные с той или иной точностью с помощью аналитических выражений, позволяют отслеживать правильность проведения численного расчета.

Для решения уравнения теплопроводности широко используется метод интегральных преобразований⁹. Он основан на преобразовании искомой неизвестной функции по одной из переменных, которое выбирается с таким расчетом, чтобы уравнение для новой преобразованной функции было значительно проще исходного. Далее находят решение преобразованного

⁹ В Приложении 5 рассмотрено применение метода преобразования Лапласа для решения задач лазерного нагрева.

уравнения и, применяя к нему обратное преобразование, определяют решение исходного уравнения.

Помимо метода интегральных преобразований используется так называемый метод источников¹⁰ (метод функций Грина). Идея метода состоит в том, что сначала находят специальное решение задачи теплопроводности (функцию Грина), соответствующее действию мгновенного точечного источника тепла. Решение задачи для произвольного источника получается суммированием (интегрированием) вкладов от точечных источников, на которые его можно разбить.

3.6 Нагрев полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником

Во многих случаях лазерного воздействия можно считать, что излучение затухает по экспоненциальному закону. Соответственно, объемный источник тепла будет определяться выражением (3.7), и постановка одномерной линейной задачи теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{Aq_0 \alpha e^{-\alpha x}}{c}, \quad (3.12)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad T(\infty, t) = T_0, \quad (3.13)$$

$$T(x, 0) = T_0. \quad (3.14)$$

Мы рассматриваем одномерную задачу, когда равномерно облучается вся поверхность материала (см. рис. 3.3). Интуитивно ясно, что применительно к

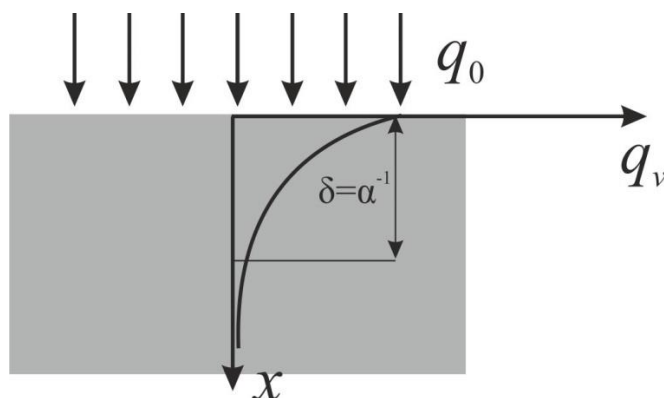


Рисунок 3.3 – К постановке задачи нагрева полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником

¹⁰ Описание метода источников и его применение к решению задач лазерного нагрева приведены в Приложениях 6 и 7.

реальной ситуации такое рассмотрение справедливо, если размер пучка достаточно большой и распределение интенсивности в пучке не зависит от поперечных координат. В дальнейшем мы укажем строгий критерий, когда данное одномерное рассмотрение допустимо.

В граничном условии на облучаемой поверхности (3.13) тепловой поток задан равным нулю, поскольку мы считаем источник объемным и учитываем его действие в правой части уравнения теплопроводности, а также полагаем, что на поверхности отсутствуют потери тепла.

Решение задачи (3.12) – (3.14) будет иметь вид¹¹:

$$T(x,t) = \frac{Aq_0}{2k\alpha} \left(4\alpha\sqrt{at} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - 2e^{-\alpha x} + e^{\alpha^2 at} \left(e^{-\alpha x} \operatorname{erfc} \left(\alpha\sqrt{at} - \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + e^{\alpha x} \operatorname{erfc} \left(\alpha\sqrt{at} + \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right) \right) + T_0, \quad (3.15)$$

где функции $\operatorname{erfc}(x)$, $\operatorname{ierfc}(x)$ – дополнительные интегралы вероятностей¹².

На поверхности (при $x = 0$) температура во времени изменяется следующим образом:

$$T(0,t) = \frac{Aq_0}{k\alpha} \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{at} + e^{\alpha^2 at} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{at}) - 1 \right) + T_0, \quad (3.16)$$

В формулу (3.16) входит комплекс параметров $\alpha\sqrt{at}$. Рассмотрим предельный случай, когда $\alpha\sqrt{at} \ll 1$ (или $\delta \gg \sqrt{at}$). Воспользуемся разложениями, справедливыми при малых значениях аргументов: $e^{\alpha^2 at} \approx 1 + \alpha^2 at$

и $\operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{at}) \approx 1 - \frac{2\alpha\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}}$. Тогда

$e^{\alpha^2 at} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{at}) \approx 1 - \frac{2\alpha\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} + (\alpha\sqrt{at})^2 - \frac{2(\alpha\sqrt{at})^3}{\sqrt{\pi}}$. Пренебрегая кубической поправкой, подставим полученное соотношение в формулу (3.16), получим

$T(0,t) = \frac{Aq_0}{k\alpha} (\alpha^2 at) + T_0$ или с учетом (3.4):

$$T(0,t) = \frac{Aq_0\alpha}{c} t + T_0. \quad (3.17)$$

Видно, что в полученное решение (3.17) не входят величины, характеризующие способность материала проводить тепло (теплопроводность или температуропроводность). Это означает, что при рассматриваемых условиях

¹¹ Вывод этой формулы приводится в Приложении 5.

¹² Их определения и свойства приводятся в Приложении 2.

($\alpha\sqrt{at} \ll 1$) процессами теплопроводности можно пренебречь. Действительно, если бы мы изначально пренебрегли теплопроводностью (т.е. положили бы $a = 0$) в уравнении (3.12), то получили бы уравнение вида $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Aq_0\alpha e^{-\alpha x}}{c}$, решение которого, очевидно:

$$T(x,t) = \frac{Aq_0\alpha e^{-\alpha x}}{c}t + T_0. \quad (3.18)$$

На поверхности при $x = 0$ из (3.18) получаем (3.17). Из (3.18) также следует, что характерная глубина прогретого слоя будет равна глубине проникновения излучения в материал δ .

Рассмотрим теперь обратный предельный случай $\alpha\sqrt{at} \gg 1$ (или $\delta \ll \sqrt{at}$). При этих условиях в формуле (3.16) в скобках существенным останется только первое слагаемое (подробнее см. в Приложении 2), тогда

$$T(0,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0. \quad (3.19)$$

Кроме того, из анализа общей формулы при $\alpha \rightarrow \infty$ (или практически при $\alpha\sqrt{at} \gg 1$) следует, что пространственно-временное распределение температуры будет определяться первым слагаемым в скобках, т.е.:

$$T(x,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_0. \quad (3.20)$$

В формулы (3.19) и (3.20) теперь уже не входит коэффициент поглощения α (или глубина проникновения излучения δ), а характерная глубина прогрева определяется температуропроводностью материала. Учитывая, что функция $\operatorname{ierfc}(x)$ быстро спадает при $x > 1$ (см. Приложение 2), за характерную глубину прогрева материала за время t можно считать величину, равную \sqrt{at} .

Отметим также следующее обстоятельство. Можно показать, что формула (3.20) получается при анализе задачи теплопроводности, в которой объемный тепловой источник полагается отсутствующим, а действие лазерного излучения моделируется поверхностным источником, т.е. путем задания теплового потока на облучаемой поверхности (граничные условия 2-го рода). Описываемая задача теплопроводности, также приводящая к решению (3.20)¹³, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (3.21)$$

¹³ Решение данной задачи может быть легко получено методом преобразования Лапласа по времени аналогично тому, как это было сделано в Приложении 5 для задачи нагрева полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником. Заинтересованному читателю предлагаем убедиться в этом самостоятельно.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = Aq_0 \quad T(\infty, t) = T_0 \quad T(x, 0) = T_0 \quad . \quad (3.22)$$

Таким образом, если выполнено условие $\alpha\sqrt{at} \gg 1$, то тепловые источники можно перенести на облучаемую поверхность, полагая, что на ней часть плотности мощности падающего излучения, равная Aq_0 , сразу преобразуется в тепловой поток.

Условие $\alpha\sqrt{at} \gg 1$ обычно хорошо выполняется для металлов. Действительно, типичные значения температуропроводности для металлов составляют $\sim 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, а глубины скин-слоя $\sim 10^{-8} \text{ м}$ (см. раздел 1.12), соответственно, для длительностей импульса $t_p > \frac{\delta^2}{a} \sim 10^{-12} \text{ с}$ поглощение можно

считать поверхностным и для оценок температуры нагрева пользоваться формулами (3.19) и (3.20). Для примера на рис. 3.4 показаны распределения температуры по глубине при нагреве стали импульсами различной длительности, рассчитанные по формуле (3.20) в момент окончания лазерного воздействия. Ясно, что для прогрева металла на большую глубину нужно использовать импульсы большей длительности. При этом глубина прогретого слоя будет расти пропорционально корню из длительности импульса. Такие оценки, в частности, могут быть полезны при расчете глубины закаленного слоя в технологии лазерного термоупрочнения.

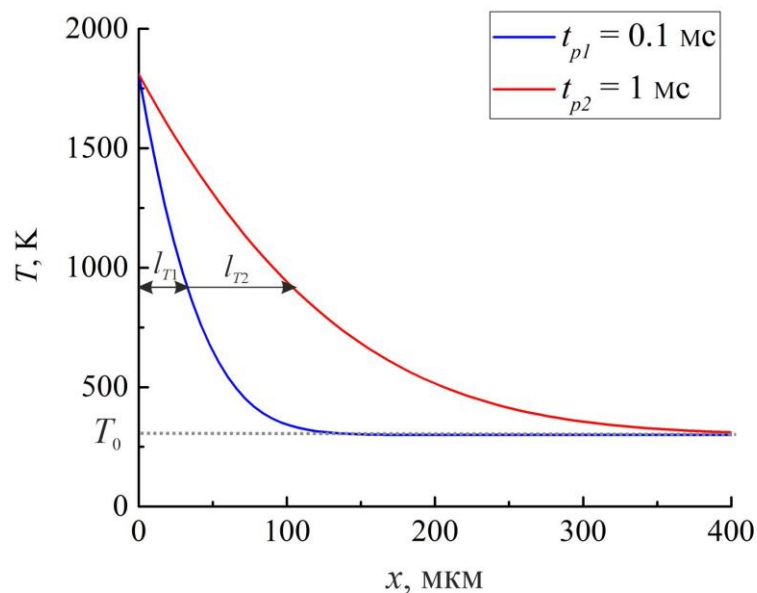


Рисунок 3.4 – Распределения температуры по глубине в момент окончания лазерного воздействия импульсами различной длительности (0.1 и 1 мс). На рисунке отмечены глубины прогретых слоев $l_{T1} = \sqrt{at_{p1}}$ и $l_{T2} = \sqrt{at_{p2}}$

3.7 Нагрев полупространства поверхностным источником круглой формы

В реальных условиях лазерный нагрев осуществляется пучком, имеющим конечные размеры, что не было учтено нами при анализе задачи теплопроводности в предыдущем разделе. Анализ трехмерной нестационарной задачи нагрева поверхностным источником круглого сечения (см. рис. 3.5) (здесь мы полагаем, что глубина проникновения излучения много меньше длины теплопроводности \sqrt{at}) приводит к формуле следующего вида для распределения температуры по глубине в центре облучаемой области ($r = 0$)¹⁴:

$$T(0, x, t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \left(\operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{ierfc} \left(\frac{\sqrt{r_0^2 + x^2}}{2\sqrt{at}} \right) \right). \quad (3.23)$$

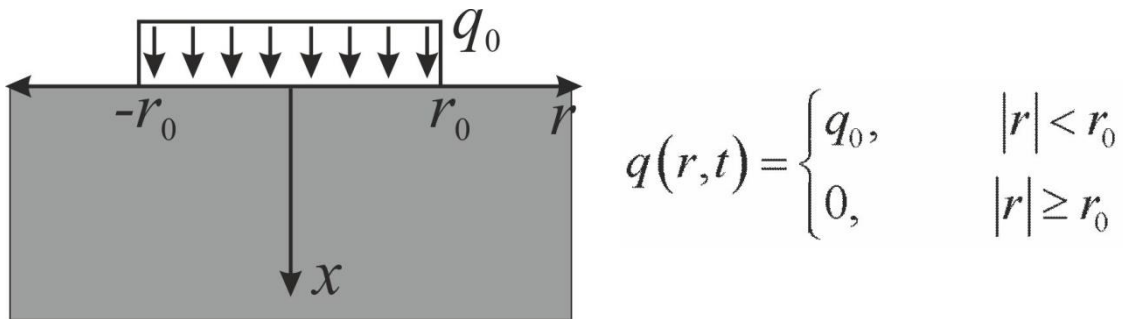


Рисунок 3.5 – К постановке задачи нагрева полупространства поверхностным источником круглого сечения

Из анализа формулы (3.23) следует, что при условии $r_0 \gg \sqrt{at}$ можно пренебречь вторым слагаемым в скобках. При этом мы получим в точности тот же результат, что и в предыдущем разделе. Таким образом, критерием применимости результатов предыдущего раздела является малость характерного размера теплопроводности (\sqrt{at}) по сравнению с радиусом пучка.

В обратном предельном случае ($r_0 \ll \sqrt{at}$, что соответствует действию длинных импульсов) при $x = 0$ воспользуемся разложением $\operatorname{ierfc} \left(\frac{r_0}{2\sqrt{at}} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{r_0}{2\sqrt{at}}$ при малых значениях аргумента. После подстановки в (3.23) получаем, что

$$T(0, 0, t) = \frac{Aq_0r_0}{k} + T_0. \quad (3.24)$$

¹⁴ Вывод этой формулы приведен в Приложении 6.

Видно, что в данном случае температура перестает зависеть от времени и, как говорят, устанавливается стационарное распределение температуры. В этом случае отвод тепла в радиальных направлениях и в глубину полностью компенсирует подвод тепла от источника.

3.8 Общая характеристика основных линейных режимов лазерного нагрева

Обобщим результаты, полученные в предыдущих двух разделах. Характер теплового действия лазерного излучения определяется соотношением трех параметров, имеющих размерность длины: δ – глубина проникновения излучения, r_0 – радиус пучка, $\sqrt{at_p}$ – длина теплопроводности (t_p – длительность импульса). В зависимости от соотношения между указанными параметрами возможны следующие режимы лазерного нагрева:

1. Поверхностное поглощение ($\delta \ll \sqrt{at_p}$), одномерный теплоотвод ($r_0 \gg \sqrt{at_p}$). В этом случае температура поверхности определяется по формуле (3.19). Используя (3.19), можно определить так называемую пороговую плотность мощности лазерного излучения q^* , т.е. минимальную плотность мощности, необходимую для достижения некоторой пороговой температуры поверхности (например, температуры плавления, закалки и т.п.):

$$q^* = \frac{\sqrt{\pi} k (T^* - T_0)}{2A \sqrt{at_p}}, \quad (3.25)$$

где T^* – некоторая пороговая температура.

Из (3.25) следует, что при повышении длительности импульса пороговая плотность мощности падает пропорционально корню из длительности. В то же время для пороговой плотности энергии $Q^* = q^* t_p$ справедливо $Q^* \sim \sqrt{t_p}$, т.е. для нагрева поверхности до некоторой температуры эффективнее использовать короткие лазерные импульсы. Это, очевидно, связано с тем, что при повышении t_p энергия расходуется на нагрев большего объема материала, т.к. глубина прогретого слоя увеличивается $\sim \sqrt{t_p}$.

2. Поверхностное поглощение ($\delta \ll \sqrt{at_p}$), трехмерный теплоотвод ($r_0 \ll \sqrt{at_p}$). В этом случае температура поверхности определяется по формуле (3.24), а пороговая плотность мощности перестает зависеть от длительности воздействия:

$$q^* = \frac{k (T^* - T_0)}{Ar_0}. \quad (3.26)$$

На рис. 3.6 схематично показана зависимость пороговой плотности мощности от длительности воздействия в соответствии с формулами (3.25) и (3.26) для общего случая поверхностного поглощения.

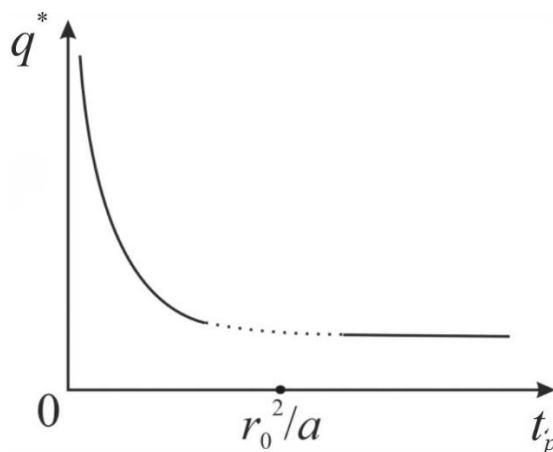


Рисунок 3.6 – Зависимость пороговой плотности мощности от длительности лазерного воздействия для случая поверхностного поглощения

Для более наглядной характеристики основных закономерностей лазерного нагрева в случае поверхностного поглощения при переходе от режима одномерного теплоотвода к режиму трехмерного теплоотвода на рис. 3.7 приведены распределения температуры по глубине в момент окончания действия импульса длительностью 100 мкс на алюминий для различных радиусов пучка при одинаковой плотности мощности излучения ($q_0 \sim 1.75 \cdot 10^6$ Вт/см²). Как видно при $r_0 = 3\sqrt{at_p}$, поверхности равной температуры в области, близкой к центру пучка, представляют собой плоскости, параллельные поверхности, и, соответственно, тепло отводится только в глубину материала (теплоотвод одномерный). В противоположном случае, когда $r_0 = \frac{\sqrt{at_p}}{3}$,

теплоотвод осуществляется уже во все стороны (в глубину и в радиальных направлениях), и, соответственно, температура нагрева снижается. При этом моменту времени, когда становится существенным радиальный теплоотвод, соответствует момент времени, когда зависимость температуры поверхности от времени на рис. 3.8 начинает отклоняться от корневой и выходит на постоянное значение.

3. Объемное поглощение, теплоотвод мал ($\delta \gg \sqrt{at_p}$, $r_0 \gg \sqrt{at_p}$). В этом случае теплопроводность не играет никакой роли, нагрев является адиабатическим, а температура нагрева поверхности определяется по формуле (3.17). Пороговая плотность мощности определяется по формуле:

$$q^* = \frac{c\delta(T^* - T_0)}{At_p}. \quad (3.27)$$

В этом случае $q \sim t_p^{-1}$, а пороговая плотность энергии, очевидно, не зависит от длительности воздействия.

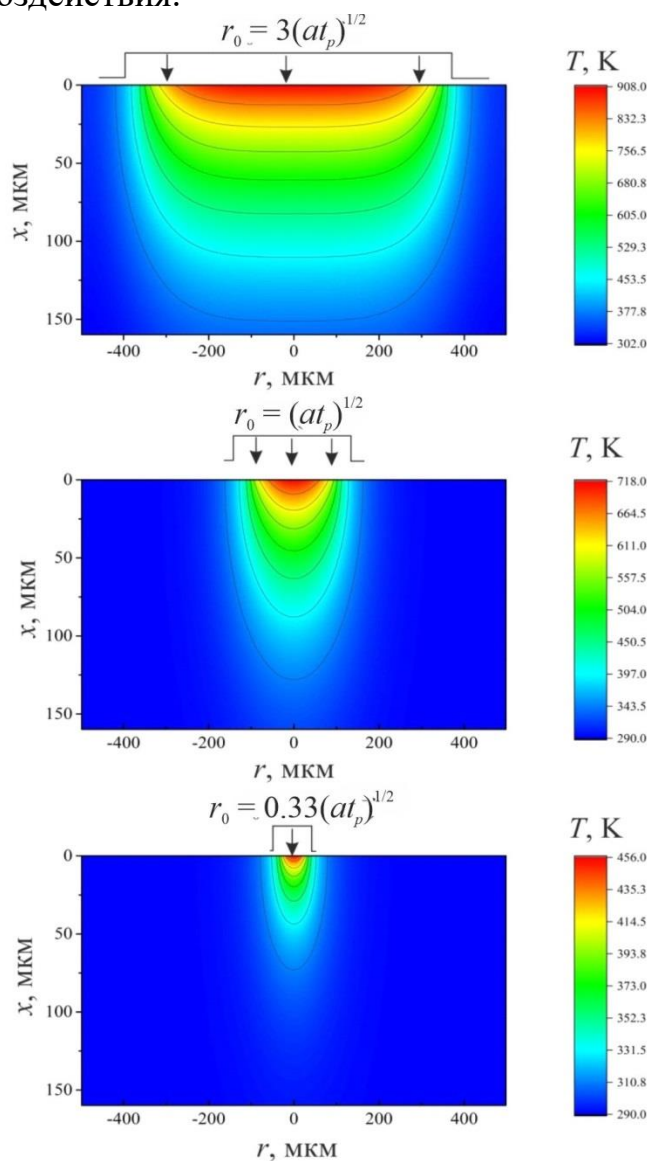


Рисунок 3.7 – Распределения температуры в момент окончания лазерного воздействия для случая поверхностного поглощения при различных соотношениях между r_0 и $\sqrt{at_p}$

4. Объемное поглощение, радиальный теплоотвод ($\delta \gg \sqrt{at_p}$, $r_0 \ll \sqrt{at_p}$). Не анализируя подробно этот случай, приведем для справок формулу для оценки температуры поверхности:

$$T(0,0,t) = \frac{Aq_0 r_0^2}{4k\delta} \ln\left(19.4 \frac{at}{r_0^2}\right) + T_0. \quad (3.28)$$

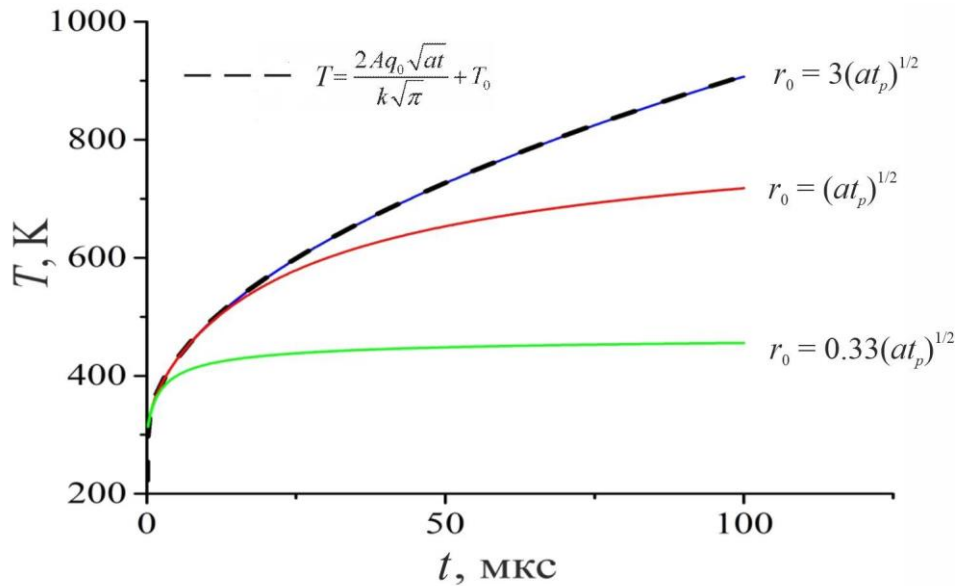


Рисунок 3.8 – Зависимости температуры нагрева поверхности от времени для случая поверхностного поглощения при различных соотношениях между r_0 и $\sqrt{at_p}$

3.9 Остывание полупространства после нагрева поверхностным источником

Для некоторых приложений оказывается важной не только стадия лазерного нагрева материала, но и стадия остывания после окончания воздействия. Рассмотрим задачу о нагреве и остывании полубесконечного тела в условиях поверхностного поглощения и одномерного теплоотвода:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (3.29)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = A(q_1 + q_2) \quad T(\infty, t) = T_0, \quad (3.30)$$

$$T(x, 0) = T_0. \quad (3.31)$$

При этом будем полагать, что

$$q_1 = q_0 \quad q_2 = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_p \\ -q_0, & t \geq t_p \end{cases} \quad (3.32)$$

Ясно, что задание q_1 и q_2 в соответствии с (3.32) отвечает действию поверхностного теплового источника с плотностью мощности, равной q_0 в

течении времени t_p и равной 0 при $t > t_p$, т.е. соответствует воздействию лазерного импульса с длительностью t_p .

Из линейности рассматриваемой задачи теплопроводности следует, что если $T_1(x, t)$ – решение задачи, соответствующее граничному условию на облучаемой поверхности $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = Aq_1$, а $T_2(x, t)$ – решение задачи,

соответствующее граничному условию на облучаемой поверхности $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = Aq_2$, то их сумма $T_1(x, t) + T_2(x, t)$ будет решением,

удовлетворяющим граничному условию (3.30). Но решения $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$ уже были получены нами ранее. Действительно, $T_1(x, t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_0$

(формула (3.20)), для $T_2(x, t)$ решение при $t > t_p$ будет иметь тот же вид, но в соответствии с (3.32) должно быть сдвинуто во времени на t_p и иметь знак « \rightarrow »

перед q_0 : $T_2(x, t) = -\frac{2Aq_0\sqrt{a(t-t_p)}}{k} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_p)}}\right)$, а при $0 < t < t_p$ $T_2(x, t) = 0$.

Тогда решение задачи (3.29) – (3.31) запишется следующим образом:

$$T(x, t) = \begin{cases} \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_0, & 0 < t < t_p \\ \frac{2Aq_0\sqrt{a}}{k} \left(\sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \sqrt{t-t_p} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_p)}}\right) \right) + T_0, & t \geq t_p \end{cases} \quad (3.33)$$

Для температуры поверхности получаем:

$$T(0, t) = \begin{cases} \frac{2Aq_0\sqrt{a}}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + T_0, & 0 < t < t_p \\ \frac{2Aq_0\sqrt{a}}{k\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - \sqrt{t-t_p}) + T_0, & t \geq t_p \end{cases} \quad (3.34)$$

Схематично динамика температуры поверхности при нагреве и остывании материала после импульсного лазерного воздействия показана на рис. 3.9.

Если обозначить $T_{\max} = \frac{2Aq_0\sqrt{at_p}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$, то формулу (3.34) можно

переписать в более компактном виде:

$$T(0,t) = \begin{cases} \frac{T_{\max} - T_0}{\sqrt{t_p}} \sqrt{t} + T_0, & 0 < t < t_p \\ \frac{T_{\max} - T_0}{\sqrt{t_p}} (\sqrt{t} - \sqrt{t - t_p}) + T_0, & t \geq t_p \end{cases} \quad (3.35)$$

Из формулы (3.35) следует, что поверхность материала остынет в 2 раза (т.е. $\frac{T(0,t) - T_0}{T_{\max} - T_0} = \frac{1}{2}$, если $\sqrt{\frac{t}{t_p}} - \sqrt{\frac{t}{t_p} - 1} = \frac{1}{2}$, откуда несложно найти, что $t = t_p + \frac{9}{16}t_p$). Таким образом, характерное время остывания материала определяется только длительностью воздействия, и по истечении времени $\frac{9}{16}t_p$ после окончания воздействия материала остынет в 2 раза.

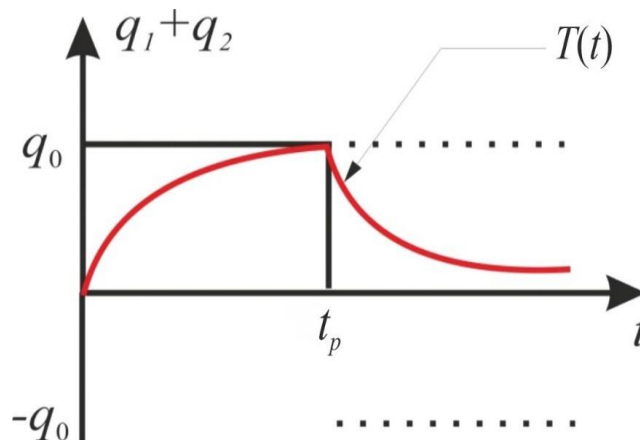


Рисунок 3.9 – Динамика температуры при нагреве и охлаждении полубесконечного тела при воздействии импульсного поверхностного источника длительностью t_p

3.10 Особенности лазерного нагрева материалов движущимся пучком постоянной мощности

Во многих лазерных технологиях используется нагрев движущимся пучком постоянной мощности. При этом независимо от характера теплоотвода происходит стабилизация температуры в области облучения, т.к. при движении источника в процесс нагрева вовлекаются все новые и новые участки обрабатываемого материала. Не разбирая подробно задачу о нагреве материалов движущимся световым пятном, на основе простых рассуждений, базирующихся на уже известных нам закономерностях лазерного нагрева, дадим рекомендации

для оценок теплового действия движущегося источника. Далее будем рассматривать случай поверхностного поглощения. Интуитивно ясно, что для точки, находящейся на линии, вдоль которой осуществляется сканирование, тепловое воздействие будет сходным с действием импульсного источника длительностью $t_p = \frac{2r_0}{v}$, где r_0 – радиус пучка, v – скорость сканирования.

Соответственно, по аналогии с импульсным воздействием возможны два предельных случая соотношения между радиусом пучка r_0 и длиной теплопроводности $\sqrt{at_p}$: $v \gg \frac{2a}{r_0}$ (быстродвижущийся источник) и $v \ll \frac{2a}{r_0}$ (медленнодвижущийся источник). В первом случае для оценок максимальной температуры следует в формулу (3.19) подставить $t_p = \frac{2r_0}{v}$:

$$T = \frac{2Aq_0}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2ar_0}{v}} + T_0. \quad (3.36)$$

Для случая медленнодвижущегося источника температура поверхности в центре облучаемой области перестает зависеть от скорости сканирования и может быть оценена по формуле (3.24).

3.11 Лазерный нагрев в условиях изменения поглотительной способности материала

В разделе 1.15 было отмечено, что в некоторых случаях поглотительная способность металлов увеличивается с ростом температуры. Рассмотрим нагрев металла в условиях, когда зависимость поглотительной способности от температуры линейна и определяется в соответствии с соотношением (1.46). Ясно, что наличие положительной обратной связи между нагревом и поглощением должно приводить к более интенсивному нагреву (или даже «лавинообразному» нарастанию температуры) по сравнению с ситуациями, рассмотренными ранее. Постановка задачи для ситуации с одномерным теплоотводом будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0, \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= A(T)q_0 \quad A(T) = A_0 + \chi(T - T_0), \\ T(\infty, t) &= T_0 \quad T(x, 0) = T_0. \end{aligned}$$

В такой постановке решение задачи легко может быть получено методом преобразования Лапласа по времени и имеет следующий вид:

$$T(x,t) = \frac{A_0}{\chi} \left(e^{-\beta x} e^{\beta^2 at} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \beta\sqrt{at} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right) + T_0, \quad (3.37)$$

где $\beta = \frac{\chi q_0}{k}$.

На поверхности при $x = 0$ из (3.37) получаем:

$$T(0,t) = \frac{A_0}{\chi} \left(e^{\beta^2 at} \operatorname{erfc}(-\beta\sqrt{at}) - 1 \right) + T_0. \quad (3.38)$$

Анализ формулы (3.38) при $\beta\sqrt{at} \ll 1$ (начальный этап нагрева) показывает, что, как и следовало ожидать, $T(0,t) = \frac{2A_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$ (т.к. при малых значениях аргументов с учетом только линейных по $\beta\sqrt{at}$ поправок $e^{\beta^2 at} \approx 1$, а $\operatorname{erfc}(-\beta\sqrt{at}) \approx 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta\sqrt{at}$), т.е. динамика нагрева такая же, как и без изменения поглотательной способности. При $\beta\sqrt{at} \gg 1$ $\operatorname{erfc}(-\beta\sqrt{at}) \approx 2$ и $T(0,t) = \frac{2A_0}{\chi} e^{\beta^2 at} + T_0$, т.е. наблюдается экспоненциальный рост температуры. За характерное время переключения между двумя режимами (время возникновения тепловой неустойчивости) можно принять время $t^* = \frac{1}{\beta^2 a}$.

На рис. 3.10 показаны зависимости температуры поверхности меди ($A_0 = 0.028$, $\chi = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$), рассчитанные для воздействия миллисекундного лазерного импульса с учетом линейного роста поглотательной способности по формуле (3.38) и для постоянной (взятой при начальной температуре) поглотательной способности по формуле (3.19). На начальном этапе действия импульса добавка к поглотательной способности мала и динамика нагрева соответствует нагреву с постоянной поглотательной способностью. Однако по мере роста температуры поправка χT становится сравнимой с A_0 и в значительной мере начинает определять динамику нагрева. Как видно из рисунка 3.10, игнорирование увеличения A заметно занижает максимальную температуру нагрева. В рассматриваемом случае, для того чтобы расчет при постоянной A давал ту же температуру поверхности к концу импульса, плотность мощности необходимо увеличить примерно на 40%. К концу импульса поглотательная способность увеличивается почти в 2 раза (с 0.028 до 0.048). Таким образом, для более точной теоретической оценки пороговых плотностей мощности (энергии) необходимо учитывать температурную зависимость поглотательной способности. Отметим, что в рассматриваемом примере нелинейность выражена

умерено, т.к. $t^* > t_p$, поэтому на рис. 3.10 отсутствует участок чисто экспоненциального роста температуры.

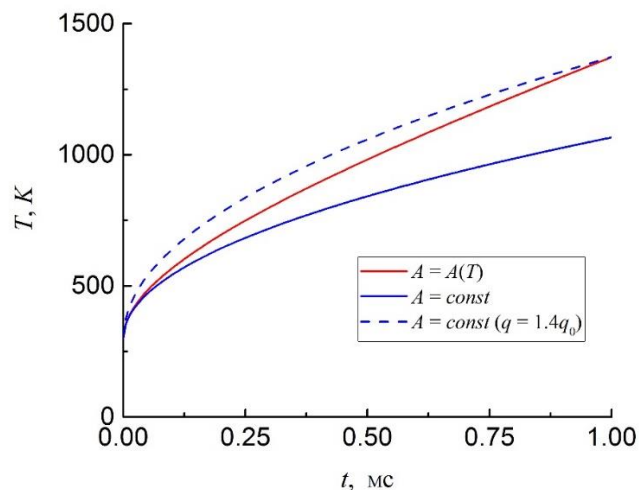


Рисунок 3.10 – Зависимости температуры поверхности меди от времени в течение действия лазерного импульса длительностью $t_p = 1$ мс, рассчитанные с учетом изменения поглотательной способности и без (пунктиром показан результат расчета температуры при постоянном значении поглотательной способности, но с увеличенной в 1.4 раза плотностью мощности)

Отметим, что нагрев поверхности металла является не единственной причиной, по которой поглотательная способность может меняться в процессе лазерного воздействия. Так, например, формирование оксидной пленки на поверхности металла при лазерном облучении также может приводить к изменению поглотательной способности и обуславливать ряд особенностей в тепловом действии лазерного излучения на окисляющиеся материалы. Такая ситуация будет рассмотрена во второй части пособия.

3.12 Экспериментальные методы исследования лазерного нагрева

Основные особенности и сложности измерения температуры при лазерном нагреве связаны с кратковременностью теплового действия лазерного излучения, а также с малыми зонами термического влияния (вплоть до нескольких мкм). Эти особенности не позволяют в подавляющем большинстве случаев использовать контактные методы измерения температуры (например, с помощью термопары), поскольку при малых размерах облучаемой области (сопоставимых с размерами термопары или ещё меньше) она может служить дополнительным стоком тепла, поглощать часть излучения и т.п. Таким образом, её наличие будет изменять условия эксперимента. К тому же необходимо обеспечивать надежный тепловой контакт датчика с поверхностью, температура

которой измеряется, что не всегда возможно, особенно при быстром нагреве. Ввиду указанных причин для экспериментального измерения температуры при лазерном нагреве используются бесконтактные методы. Наиболее употребительные методики основаны на анализе теплового излучения нагреваемого материала. Они обладают достаточно высоким временным (высокоскоростные ИК камеры имеют частоты обновления кадров до нескольких десятков кГц и выше) и пространственным разрешением (вплоть до нескольких десятков мкм). Существуют также бесконтактные методы, основанные на анализе интенсивности комбинационного рассеяния, однако они оказываются более сложными в употреблении и менее распространены.

Рассмотрим более подробно эксперимент по исследованию лазерного нагрева плавленого кварца излучением CO_2 лазера с помощью высокоскоростной ИК камеры¹⁵. Схема экспериментальной установки показана на рис. 3.11. Излучение CO_2 лазера фокусируется на образец плавленого кварца и

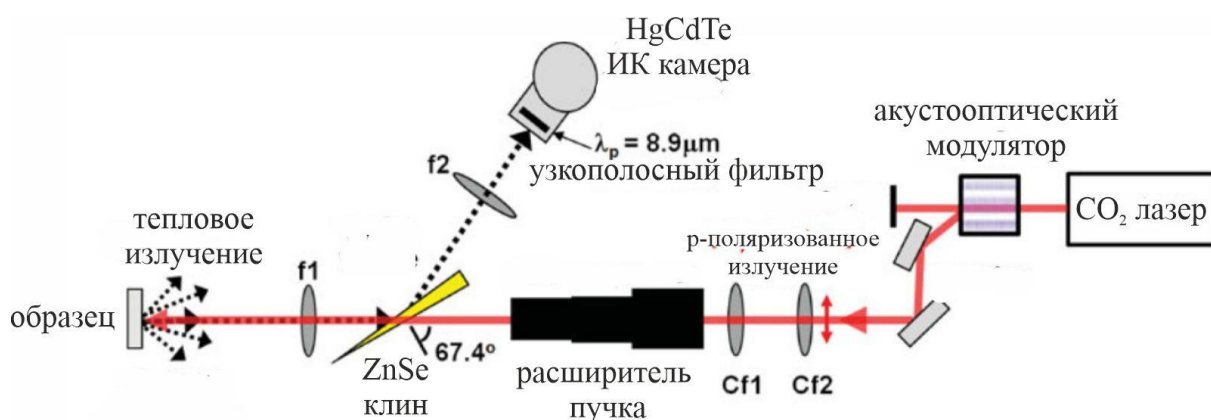


Рисунок 3.11 – Схема установки для измерения температуры при лазерном нагреве с помощью ИК камеры (f1, f2, Cf1 и Cf2 – линзы)

нагревает его. Тепловое излучение нагретого материала с помощью ZnSe клина, расположенного под углом Брюстера (это позволяет избежать попадания в камеру p -поляризованного излучения CO_2 лазера, отраженного от образца), направляется на HgCdTe ИК камеру, перед которой установлен узкополосный фильтр, который из широкого спектра теплового излучения пропускает излучение с определенной, оптимальной для анализа длиной волны (в рассматриваемом случае – 8.9 мкм). Поясним, из каких соображений осуществлялся выбор этой оптимальной длины волны. Ясно, что при лазерном нагреве материал будет прогрет по глубине неоднородно. Подповерхностные слои, имеющие меньшую температуру, в общем случае также будут вносить

¹⁵ Далее описывается эксперимент из работы: Elhadj S., Matthews M.J., Yang S.T. Combined Infrared Thermal Imaging and Laser Heating for the Study of Materials Thermophysical and Processing Properties at High Temperatures // Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences. – 2014. – Vol. 39. – № 3. – P. 175-196.

вклад в сигнал теплового излучения, регистрируемого камерой, что может искажать оценку температуры поверхности. Чтобы минимизировать это искажение, длину волны для анализа следует выбирать из условия её максимального поглощения исследуемым материалом. В случае плавленого кварца максимум поглощения в ИК диапазоне приходится на длину волны ~ 9 мкм. Глубина проникновения излучения на этой длине волны составляет $\sim 0.1 - 1$ мкм, что намного меньше, чем ожидаемый масштаб неоднородности нагрева материала по глубине в рассматриваемом эксперименте (т.е. можно считать, что температура внутри слоя, от которого регистрируется сигнал, практически одинакова).

Опуская технические (но достаточно содержательные с физической точки зрения) детали калибровки ИК камеры, приведем полученные в результате эксперимента результаты. Радиус пучка r_0 в эксперименте составлял 350 мкм, а время облучения – порядка 5 с. Несложно оценить, что в данном случае масштаб теплопроводности $\sqrt{at_p} \gg r_0 \gg \delta$ (для плавленого кварца $a \approx 8 \cdot 10^{-7}$ м²/с и $\delta = 10$ мкм на длине волны 10.6 мкм). Поэтому в соответствии с ранее проведенным анализом следует ожидать, что при лазерном облучении будет устанавливаться стационарная температура поверхности, величина которой может быть оценена по формуле (3.24). Действительно, приведенные на рис. 3.12 экспериментальные зависимости температуры от времени для точки на поверхности в центре

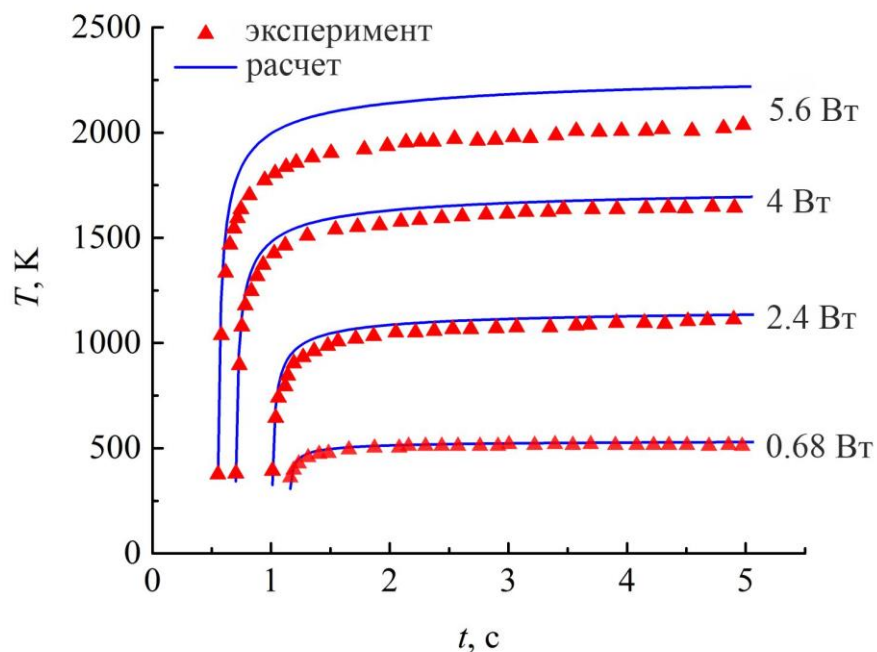


Рисунок 3.12 – Зависимость температуры плавленого кварца от времени при нагреве излучением CO₂-лазера с различной мощностью

облучаемой области при различных мощностях излучения полностью подтверждают этот вывод (сплошные кривые рассчитаны по формуле (3.23); улучшить согласие расчета и эксперимента можно, если учесть гауссову форму лазерного пучка, которая использовалась в эксперименте). Стационарная температура поверхности увеличивается с ростом мощности излучения. При этом в соответствии с (3.24) следует ожидать, что эта зависимость будет линейной.

На рис. 3.13 показана зависимость стационарной температуры поверхности от отношения P/r_0 ($P = q_0 \pi r_0^2$ – мощность излучения). Видно, что для случая облучения на длине волны 10.6 мкм экспериментальные точки действительно хорошо ложатся на прямую. Однако, если изменить длину волны лазера на 4.6 мкм, то линейная аппроксимация описывает экспериментальные данные значительно хуже. Это связано с тем, что глубина проникновения излучения на этой длине волны уже составляет порядка 1 мм, соответственно, тепловой источник становится объемным, и пользоваться формулами (3.23) и (3.24) уже нельзя.

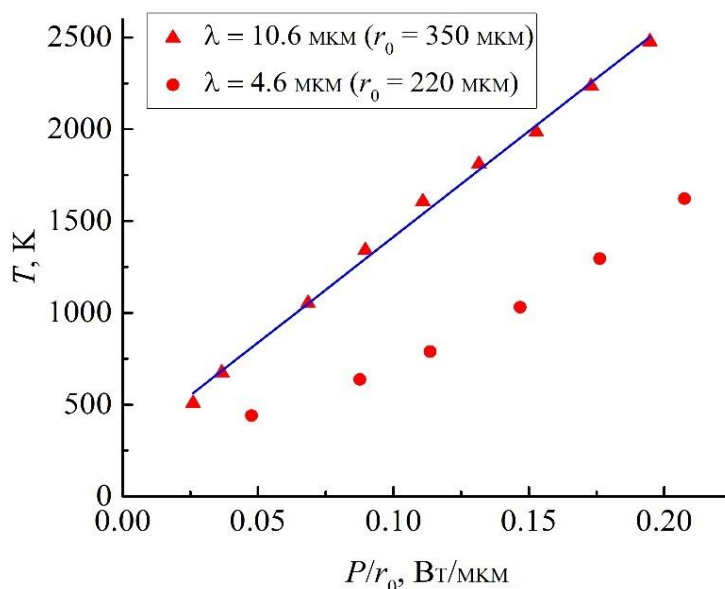


Рисунок 3.13 – Зависимость максимальной температуры поверхности от отношения мощности излучения к радиусу пучка при облучении плавленого кварца на различных длинах волн

3.13 Контрольные вопросы к Главе 3

1. Набором каких параметров будет определяться результат теплового действия лазерного излучения на материал?
2. В каких формах могут быть заданы граничные условия для уравнения теплопроводности?
3. Назовите два основных метода, которые широко используются для решения уравнения теплопроводности.
4. Соотношением каких параметров, имеющих размерность длины, определяется характер теплового действия лазерного излучения?
5. Чем определяется характерное время остывания полупространства после нагрева поверхностным источником при одномерном теплоотводе?
6. По какому закону развивается нагрев металла в задаче с одномерным теплоотводом в условиях линейной зависимости поглотательной способности от температуры?
7. Какие экспериментальные методы исследования лазерного нагрева вы знаете?

Список рекомендуемой литературы

1. Соколов, А.В. Оптические свойства металлов [Текст] / А.В. Соколов. – М.: Физматгиз, 1961. – 464 с.
2. Ахманов, С.А. Физическая оптика [Текст]: учеб. для студентов вузов, обучающихся по направлению и специальности "Физика" / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. – 654 с.
3. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела [Текст]: в 2 т. / Н. Ашкрофт, Н. Мермин; перевод с англ. А.С. Михайлова; под ред. М.И. Каганова. – М.: Мир, 1979. – 24 см.
4. Анисимов, С.И. Действие излучения большой мощности на металлы [Текст] / С.И. Анисимов, Я.А. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко; под ред. А.М. Бонч-Бруевича и М.А. Ельяшевича. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
5. Таблицы физических величин: справочник [Текст] / [принимали участие: В.Г. Аверин, Б.А. Аронзон, Н.С. Бабаев и др.]; под ред. акад. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
6. Карслоу, Г.С. Теплопроводность твердых тел [Текст]: пер. со 2-го англ. изд. / Г.С. Карслоу, Д. Егер; под ред. проф. А.А. Померанцева. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
7. Лыков, А.В. Теория теплопроводности [Текст]: учеб. пособие для студентов теплотехнических специальностей высших учебных заведений / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
8. Либенсон, М.Н. Лазерно-индуцированные оптические и термические процессы в конденсированных средах и их взаимное влияние [Текст]: [монография] / М.Н. Либенсон; СПбГУ ИТМО. – СПб.: Наука, 2007. – 422, [1] с.

Приложение 1. Некоторые формулы векторного анализа

Формулы векторного анализа, содержащие операции взятия градиента, дивергенции, ротора, удобно записывать и преобразовывать с использованием так называемого оператора набла, который в декартовых координатах представляет собой символический вектор следующего вида:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Компоненты вектора набла представляют собой символы взятия частных производных. Под их произведением на какую-либо функцию следует понимать взятие соответствующей частной производной от этой функции.

Градиент, дивергенция и ротор с помощью оператора набла могут быть записаны следующим образом:

1. $\mathit{grad}U = \mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U$ – градиент скалярной функции U

может быть представлен как умножение вектора набла на скаляр U .

2. $\mathit{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla, \mathbf{a})$ – дивергенция векторного поля \mathbf{a} может

быть представлена как скалярное произведение вектора набла на \mathbf{a} .

3. $\mathit{rota} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = [\nabla, \mathbf{a}]$ – ротор

векторного поля \mathbf{a} может быть представлен как векторное произведение вектора набла на \mathbf{a} .

Некоторые формулы векторного анализа легко могут быть получены путем формальной замены истинных векторов на вектор набла в формулах обычной векторной алгебры (в конце приложения мы укажем ограничения применимости этого правила).

В таблице П1-1 при переходе от формул левого столбца к соответствующим формулам правого вектор \mathbf{b} был формально заменен на ∇ (необходимо иметь в виду, что при подобной замене уравнение должно быть записано так, чтобы все дифференциальные операторы стояли перед дифференцируемым вектором \mathbf{a}).

Последней формулой из таблицы П1-1 мы воспользовались в разделе 1.3 при выводе уравнения для амплитуды поля в токопроводящей среде. Дополнительно проверим его справедливость непосредственной выкладкой. Покажем, что проекции на ось x левой и правой частей равенства $\mathit{rot}(\mathit{rota}) = \mathit{grad}(\mathit{div} \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$ совпадают. Для левой части:

$$\left(\operatorname{rot}(\operatorname{rota})\right)_x = \left(\frac{\partial(\operatorname{rota})_z}{\partial y} - \frac{\partial(\operatorname{rota})_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \quad (\text{здесь мы}$$

дважды воспользовались выражением для вычисления компонент ротора в декартовых координатах, см. выше).

Для правой части:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{grad}(\operatorname{diva})\right)_x - (\Delta \mathbf{a})_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Видно, что полученные выражения в точности совпадают. Для остальных проекций проверка выполняется аналогично.

Таблица П1-1. Формулы из векторной алгебры и векторного анализа

Формулы из векторной алгебры	Формулы из векторного анализа
$(\mathbf{b}, \mathbf{b}U) = b^2 U$	$(\nabla, \nabla U) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, Δ – оператор Лапласа
$[\mathbf{b}, \mathbf{b}U] = 0$	$[\nabla, \nabla U] = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$ – ротор градиента равна нулю
$(\mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]) = 0$	$(\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = \operatorname{div}(\operatorname{rota}) = 0$ – дивергенция ротора равна нулю
$[\mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]] =$ $= \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{b})\mathbf{a}$	$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \operatorname{rot}(\operatorname{rota})$ $= \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{diva}) - \Delta \mathbf{a}$ ротор от ротора равен градиенту от дивергенции минус лапласиан

Следует отметить, что оператор набла сочетает в себе свойства вектора и производной. В том случае, когда он действует на произведение, содержащее два или более истинных вектора или скаляра, преобразование этих произведений по обычным правилам векторной алгебры становится неприменимым. Например:

$$\operatorname{grad}(UV) = \nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U = U\operatorname{grad}V + V\operatorname{grad}U,$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = (\nabla, U\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \nabla U) + U(\nabla, \mathbf{a}) = \mathbf{a}\operatorname{grad}U + U\operatorname{diva},$$

$$\text{rot}(U\mathbf{a}) = [\nabla, U\mathbf{a}] = U[\nabla, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \nabla U] = U\text{rota} + [\text{grad}U, \mathbf{a}].$$

Эти формулы похожи на формулу производной произведения в обычном анализе. Их справедливость также может быть проверена непосредственной выкладкой.

Приложение 2. Некоторые специальные функции, применяемые в теории теплопроводности

В теории теплопроводности применяются различные специальные функции. Рассмотрим некоторые из них, часто встречающиеся при записи аналитических решений уравнения теплопроводности в задачах лазерного нагрева.

Интегралом вероятностей называют функцию следующего вида:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{П2-1})$$

Дополнительный интеграл вероятности определяется следующим образом:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (\text{П2-2})$$

На рис. П2-1 представлены графики этих функций.

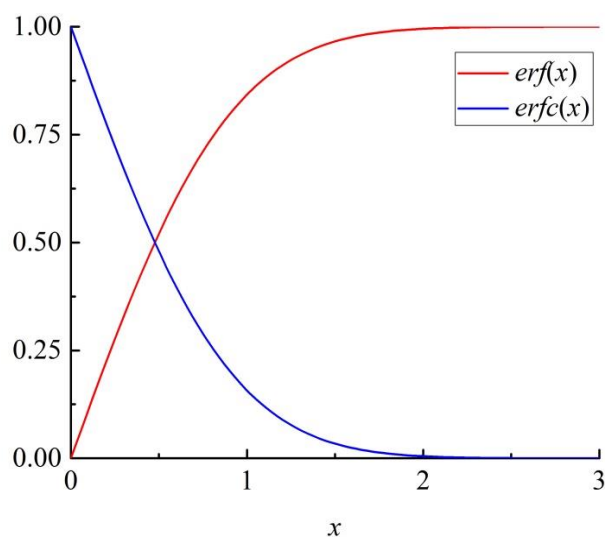


Рисунок П2-1 – Графики функций $\operatorname{erf}(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$

Отметим очевидное свойство функций $\operatorname{erf}(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$, непосредственно следующее из определений:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{П2-3})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erfc}(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{П2-4})$$

Получим разложение для $erf(x)$ в виде степенного ряда. Известно, что экспонента раскладывается в ряд следующим образом: $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, соответственно, $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$. Подставляя это разложение в определение

функции $erf(x)$ и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Таким образом,

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right). \quad (\text{П2-5})$$

Полученный ряд является знакопеременным и быстро сходится. При малых x можно ограничиться только линейным слагаемым:

$$erf(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \quad (\text{П2-6})$$

$$erfc(x) \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x$$

Далее дадим определение кратным дополнительным интегралам вероятности. Кратные дополнительные интегралы вероятности определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} i^1 erfc(x) &= \int_x^{\infty} erfc(t) dt \\ i^2 erfc(x) &= \int_x^{\infty} i^1 erfc(t) dt \\ &\dots\dots\dots \\ i^n erfc(x) &= \int_x^{\infty} i^{n-1} erfc(t) dt \end{aligned} \quad (\text{П2-7})$$

На рис. П2-2 приведены графики кратных дополнительных интегралов вероятности. Как видно из рисунка, кратные дополнительные интегралы вероятности быстро убывают при увеличении аргумента. Для нас наиболее важную роль будет играть первый кратный интеграл вероятности $i^1 erfc(x)$, который для краткости будем обозначать $ierfc(x)$.

Проинтегрируем по частям правую часть определения функции $ierfc(x)$:

$$ierfc(x) = \int_x^{\infty} erfc(t) dt = terfc(t) \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} t d(erfc(t)) = terfc(t) \Big|_x^{\infty} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} te^{-t^2} dt.$$

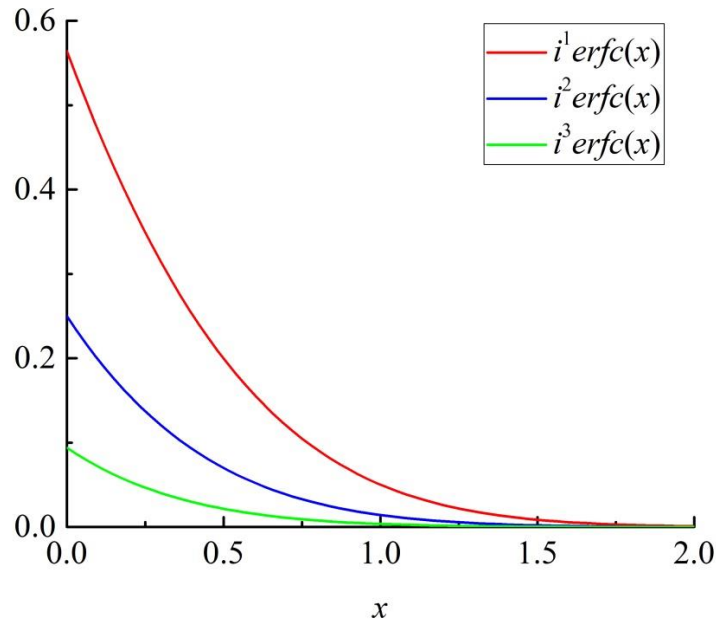


Рисунок П2-2 – Графики кратных дополнительных интегралов вероятностей

Используя правило Лопиталья, несложно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (terfc(t)) = 0$ и, соответственно, $terfc(t) \Big|_x^{\infty} = -xerfc(x)$. Интеграл во втором слагаемом легко берется: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} te^{-t^2} dt = -\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\right) \Big|_x^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Итак, окончательно получим:

$$ierfc(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - xerfc(x). \quad (\text{П2-8})$$

При малых x $e^{-x^2} \approx 1 - x^2$ и $xerfc(x) \approx x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x\right)$, соответственно, ограничиваясь линейной поправкой для $ierfc(x)$ при малых значениях аргумента, получим:

$$ierfc(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} - x, \quad (\text{П2-9})$$

и, соответственно, $ierfc(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Соотношениями (П2-6) и (П2-9) мы воспользовались в разделе 3.6 при анализе предельных случаев общего выражения для температурного поля,

возникающего при нагреве полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником. В том же разделе при больших значениях аргумента мы пренебрегли слагаемым вида $e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)$ по сравнению с $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}$ (под x понимается комплекс $\alpha\sqrt{at}$). Прокомментируем правомочность такого шага. Во-первых, несложно увидеть, что значение функции $e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)$ в 0 равно 1. Во-вторых, эта функция является монотонно убывающей. Действительно, вычислим её производную:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)\right) = 2xe^{x^2} \operatorname{erfc}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} e^{x^2} = 2\left(e^{x^2} x \operatorname{erfc}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Из равенства (П2-8) имеем $x \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - i \operatorname{erfc}(x)$, соответственно,

после несложных преобразований получим $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)\right) = -2e^{x^2} i \operatorname{erfc}(x) < 0$.

Таким образом, мы показали, что $e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) < 1$ при $x > 0$, и этой поправкой, очевидно, можно пренебречь по сравнению с $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}$ при больших x .

Приложение 3. Уравнение теплопроводности в различных системах координат

В зависимости от симметрии задачи при решении задач лазерного нагрева удобно пользоваться различными системами координат, что иногда позволяет понизить размерность задачи. Приведем вид линейного уравнения теплопроводности в различных системах координат.

Декартовы координаты (x, y, z) .

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{q_v}{c}. \quad (\text{ПЗ-1})$$

Цилиндрические координаты (r, z, φ) .

Связь с декартовыми координатами:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

$$z = z$$

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q_v}{c}. \quad (\text{ПЗ-2})$$

Сферические координаты (r, θ, φ) .

Связь с декартовыми координатами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi.$$

$$z = r \cos \theta$$

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q_v}{c}. \quad (\text{ПЗ-3})$$

Приложение 4. Интегральное преобразование Лапласа

Метод интегральных преобразований широко используется при аналитическом решении задач лазерного нагрева. В данном приложении будет приведено определение и перечислены основные свойства интегрального преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа некоторой функции вещественного аргумента $f(t)$ задается следующим образом:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L[f(t)] = f_L(s), \quad (\text{П4-1})$$

здесь s – комплексная переменная, функция $f(t)$ называется оригиналом, а функция $f_L(s)$ – изображением (применение преобразования Лапласа к функции $f(t)$ также будем иногда обозначать как $L[f(t)]$). Разумеется, для того чтобы у функции $f(t)$ существовало изображение, интеграл (П4-1) должен сходиться. Кроме того, полагается, что функция $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Обратное преобразование Лапласа позволяет по изображению восстановить оригинал функции, т.е. если $L[f(t)] = f_L(s)$, то $L^{-1}[f_L(s)] = f(t)$, где L^{-1} означает обратное преобразование Лапласа.

Можно показать, что обратное преобразование Лапласа дается формулой¹⁶:

$$L^{-1}[f_L(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_L(s)e^{st} ds, \quad (\text{П4-2})$$

здесь σ – вещественное число, такое, что все особые точки функции $f_L(s)$ имеют вещественную часть, меньшую σ , а сама функция $f_L(s)$ должна равномерно стремиться к 0 при $|s| \rightarrow \infty$.

Свойства преобразования Лапласа:

1. Свойство линейности.

$$L[Af(t) + Bg(t)] = AL[f(t)] + BL[g(t)]. \quad (\text{П4-3})$$

$$L^{-1}[Af_L(s) + Bg_L(s)] = AL^{-1}[f_L(s)] + BL^{-1}[g_L(s)], \quad (\text{П4-4})$$

здесь A, B – некоторые константы, f_L, g_L – изображения функций f и g , соответственно.

Свойство линейности прямого и обратного преобразования Лапласа является прямым следствием линейности операции интегрирования.

2. Изображение производной.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sf_L(s) - f(0). \quad (\text{П4-5})$$

¹⁶ Мы примем это утверждение без дополнительных пояснений.

Действительно:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sf_L(s) - f(0).$$

При решении уравнения теплопроводности это свойство является критически важным, т.к. позволяет избавиться от производной по времени, что существенно упрощает задачу.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 f_L(s) - sf(0) - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Обобщая полученные соотношения на производные более высоких порядков, получим:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n f_L(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}. \quad (\text{П4-6})$$

3. Интегрирование оригинала функции.

$$L\left[\int_0^t f(t') dt'\right] = \frac{f_L(s)}{s}. \quad (\text{П4-7})$$

Ясно, что $\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(t') dt' \right) = f(t)$, тогда, используя (П4-5), сразу получаем

$$L[f(t)] = sL\left[\int_0^t f(t') dt'\right], \text{ откуда следует (П4-7).}$$

4. Теорема подобия.

$$L[f(At)] = \frac{1}{A} f_L\left(\frac{s}{A}\right). \quad (\text{П4-8})$$

5. Теорема смещения.

$$L[e^{At} f(t)] = f_L(s - A). \quad (\text{П4-9})$$

Свойства 4 и 5 без труда доказываются, исходя из определения преобразования Лапласа.

6. Производная изображения

$$\frac{df_L(s)}{ds} = L[-tf(t)]. \quad (\text{П4-10})$$

Действительно, если $f_L(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$, то

$$\frac{df_L(s)}{ds} = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-st} dt = L[-tf(t)].$$

Обобщая это свойство на производные более высокого порядка, получим:

$$\frac{d^n f_L(s)}{ds^n} = L\left[(-t)^n f(t)\right]. \quad (\text{П4-11})$$

7. Интегрирование изображения.

$$\int_s^\infty f_L(s') ds' = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]. \quad (\text{П4-12})$$

Покажем, что это действительно так:

$$\int_s^\infty f_L(s') ds' = \int_s^\infty \int_0^\infty f(t) e^{-s't} dt ds' = \int_0^\infty f(t) \left(\frac{-e^{-s't}}{t}\right)\Big|_s^\infty dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = L\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

8. Умножение изображений.

$$f_{L1} f_{L2} = L\left[\int_0^t f_1(t') f_2(t-t') dt'\right] = L\left[\int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt'\right], \quad (\text{П4-13})$$

здесь f_{L1} и f_{L2} – изображения функций f_1 и f_2 , соответственно.

Для доказательства этого свойства воспользуемся соотношением (П4-2):

$$L^{-1}\left[f_{L1}(s) f_{L2}(s)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_{L1}(s) f_{L2}(s) e^{st} ds. \quad \text{С учетом того, что}$$

$$f_{L2}(s) = \int_0^\infty f_2(t') e^{-st'} dt', \quad \text{получим следующее равенство:}$$

$$L^{-1}\left[f_{L1}(s) f_{L2}(s)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f_2(t') dt' \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_{L1}(s) e^{s(t-t')} ds. \quad \text{При этом ясно, что}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_{L1}(s) e^{s(t-t')} ds = f_1(t-t'), \quad \text{тогда } L^{-1}\left[f_{L1}(s) f_{L2}(s)\right] = \int_0^\infty f_2(t') f_1(t-t') dt. \quad \text{Т.к.}$$

мы можем считать, что $f_1(t) = 0$ при $t < 0$, то $f_1(t-t') = 0$ при $t' > t$, и верхний предел интегрирования в последнем полученном равенстве можно заменить на t :

$$L^{-1}\left[f_{L1}(s) f_{L2}(s)\right] = \int_0^t f_2(t') f_1(t-t') dt. \quad \text{Таким образом, второе равенство в}$$

формуле (П4-13) доказано. Рассуждая аналогично, можно показать справедливость и первой части равенства (П4-13).

Перечисленные свойства упрощают нахождение изображений функций и восстановление оригиналов функций по её изображению.

Для примера приведем изображения некоторых функций¹⁷:

¹⁷ Здесь в основном приводятся изображения тех функций, которые встречаются в задачах теплопроводности, рассмотренных на страницах данного пособия. Более полная таблица оригиналов и изображений может быть найдена в соответствующей специализированной литературе.

$$1. L[A] = \frac{A}{s}, A = const, \text{Res} > 0 \quad (\text{П4-14})$$

$$L[A] = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{A}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s}.$$

$$2. L[At] = \frac{A}{s^2}, A = const, \text{Res} > 0 \quad (\text{П4-15})$$

$$L[At] = A \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = A \left(-t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt \right) = -\frac{A}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s^2}.$$

$$3. L[e^{At}] = \frac{1}{s-A}, A = const, \text{Res} > A. \quad (\text{П4-16})$$

Доказательство тривиально, исходя из определения.

В теории теплопроводности важную роль играют кратные интегралы вероятности, для их изображений оказывается справедлива следующая формула:

$$4. L \left[(4t)^{\frac{n}{2}} i^n \text{erfc} \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} \right) \right] = \frac{1}{s^{\frac{n}{2}+1}} e^{-A\sqrt{s}}, \quad (\text{П4-17})$$

здесь A – константа, $n = 0, 1, 2, \dots$ (при $n = 0$ считаем, что $i^0 \text{erfc}(t) = \text{erfc}(t)$).

Продemonстрируем справедливость формулы (П4-17) для интересующих нас случаев $n = 0$ и $n = 1$. Вычислим для начала изображение функции $t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}}$

($A > 0$). По определению имеем $L \left[t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}} \right] = \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}} e^{-st} dt$, сделаем замену

$t' = \frac{A}{2\sqrt{t}}$ тогда $t = \frac{A^2}{4t'^2}$ и $dt' = -\frac{A}{4} t^{-\frac{3}{2}} dt$. С учетом замены имеем

$L \left[t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}} \right] = \frac{4}{A} \int_0^{\infty} e^{-\left(t'^2 + \frac{A^2 s}{4t'^2}\right)} dt'$. Интеграл вида $\int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx$ хорошо известен¹⁸, его

значение равно $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$ ($a, b > 0$). Соответственно, в нашем случае имеем:

$$L \left[t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}} \right] = \frac{2\sqrt{\pi}}{A} e^{-A\sqrt{s}} \quad (\text{Res} > 0, A > 0). \quad (\text{П4-18})$$

¹⁸ Смотри, например, Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е изд., перераб. при участии Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Применяя к полученному равенству формулу (П4-10), в соответствии с которой однократному дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $(-t)$, получим:

$$L \left[t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t}} \right] = \sqrt{\pi s} \frac{1}{2} e^{-A\sqrt{s}}. \quad (\text{П4-19})$$

Далее применим свойство (П4-7) к равенству (П4-18):

$$L \left[\int_0^t t'^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t'}} dt' \right] = \frac{2\sqrt{\pi}}{A} \frac{e^{-A\sqrt{s}}}{s}. \text{ Под интегралом делаем замену } a = \frac{A}{2\sqrt{t'}}, \text{ получаем}$$

$$\int_0^t t'^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t'}} dt' = \frac{4}{A} \int_{\frac{A}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-a^2} da. \text{ Но полученный в правой части последнего равенства}$$

интеграл с точностью до множителя есть дополнительный интеграл вероятности от аргумента $\frac{A}{2\sqrt{t}}$ (см. (П2-2)). Итак, окончательно получаем, что

$$L \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} \right) \right] = \frac{e^{-A\sqrt{s}}}{s} \text{ (данное соотношение есть частный случай (П4-17) при } n = 0).$$

Чтобы показать справедливость (П4-17) для $n = 1$, опять применим свойство интегрирования оригинала, но уже к соотношению (П4-19):

$$L \left[\int_0^t t'^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t'}} dt' \right] = \sqrt{\pi s} \frac{1}{2} e^{-A\sqrt{s}}. \text{ Путем уже стандартной замены } a = \frac{A}{2\sqrt{t'}} \text{ интеграл}$$

в правой части сводится к виду $\int_0^t t'^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{A^2}{4t'}} dt' = A \int_{\frac{A}{2\sqrt{t}}}^{\infty} a^{-2} e^{-a^2} da$. Полученное

выражение проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{A}{2\sqrt{t}}}^{\infty} a^{-2} e^{-a^2} da &= A \left(- \left(\frac{e^{-a^2}}{a} \right) \Big|_{\frac{A}{2\sqrt{t}}}^{\infty} - 2 \int_{\frac{A}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-a^2} da \right) = A \left(\frac{e^{-\left(\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)^2}}{\left(\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)} - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} \right) \right) = \\ &= \frac{A\sqrt{\pi}}{\left(\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)} \left(\frac{e^{-\left(\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{A}{2\sqrt{t}} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} \right) \right) = 2\sqrt{\pi t} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались соотношением (П2-8). Итак, мы показали, что $L\left[2\sqrt{t} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)\right] = s^{-\frac{3}{2}} e^{-A\sqrt{s}}$, а это есть частный случай формулы (П4-17) при $n = 1$.

В заключении приведем изображение ещё одной функции, которое встретится нам в Приложении 5 при решении уравнения теплопроводности, описывающего лазерный нагрев полубесконечного тела экспоненциально спадающим с глубиной тепловым источником.

$$5. L\left[e^{Ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{e^{-A\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}. \quad (\text{П4-20})$$

Покажем справедливость этого равенства прямым вычислением изображения путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} L\left[e^{Ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right)\right] &= e^{Ab} \int_0^{\infty} e^{-(s-b^2)t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right) dt = \\ &= \frac{e^{Ab}}{b^2 - s} \left(\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right) e^{-(s-b^2)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(s-b^2)t} e^{-\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right)^2} \left(\frac{b}{2\sqrt{t}} - \frac{A}{4t\sqrt{t}}\right) dt \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в скобках после выполнения подстановки обращается в 0. Оставшийся интеграл разбивается на разность двух интегралов:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(s-b^2)t} e^{-\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right)^2} \left(\frac{b}{2\sqrt{t}} - \frac{A}{4t\sqrt{t}}\right) dt = e^{-Ab} \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(st + \frac{A^2}{4t}\right)} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(st + \frac{A^2}{4t}\right)} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \right).$$

Первый из полученных интегралов в скобках путем замены $a = \sqrt{t}$ сводится к табличному интегралу вида $\frac{2b}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(st + \frac{A^2}{4a^2}\right)} da = \frac{be^{-A\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$. Второй интеграл сводится

к аналогичному путем замены $a = \frac{1}{\sqrt{t}}$: $\frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{A^2 a^2}{4} + \frac{s}{a^2}\right)} da = e^{-A\sqrt{s}}$. Итак, суммируя

полученный результат, действительно получаем, что:

$$L\left[e^{Ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{A}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{e^{-A\sqrt{s}}}{b^2 - s} \left(\frac{b}{\sqrt{s}} - 1\right) = \frac{e^{-A\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}.$$

Приложение 5. Применение метода интегрального преобразования Лапласа к решению задач лазерного нагрева

Идея применения метода интегральных преобразований для решения уравнения теплопроводности состоит в следующем. К уравнению теплопроводности применяется интегральное преобразование. Полученное уравнение для преобразованной функции, являющееся более простым по отношению к исходному, решается стандартными методами. Далее к полученному решению применяется обратное преобразование, и в результате получается решение исходного уравнения.

Для примера рассмотрим решение уравнения теплопроводности для случая нагрева полупространства экспоненциально спадающим тепловым источником с использованием преобразования Лапласа по времени. Математическая постановка задачи приведена в разделе 3.6: одномерное уравнение теплопроводности (3.12), граничные условия (3.13) и начальное условие (3.14). Применяя преобразование Лапласа по времени к уравнению (3.12) и используя свойство (П4-5), после несложных преобразований получим следующее уравнение:

$$a \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} - s T_L = -\frac{A q_0 \alpha e^{-\alpha x}}{c s} - T_0, \quad (\text{П5-1})$$

здесь $T_L = T_L(x, s)$ – изображение температуры.

Аналогичным образом поступаем с граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial T_L}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad T_L|_{x \rightarrow \infty} = \frac{T_0}{s}. \quad (\text{П5-2})$$

Полученное уравнение для T_L является обыкновенным линейным неоднородным (с правой частью специального вида) дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, решение которого легко получить стандартными методами решения соответствующих уравнений. Несложно выяснить, что общим решением уравнения (П5-1) будет функция следующего вида:

$$T_L(x, s) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x} + \frac{A q_0 \alpha e^{-\alpha x}}{c} \frac{1}{s(s - a\alpha^2)} + \frac{T_0}{s}.$$

Условию ограниченности решения на бесконечности отвечает константа $C_2 = 0$. Постоянная C_1 находится из первого граничного условия (П5-2):

$$C_1 = \frac{A q_0 \alpha^2 \sqrt{a}}{c} \frac{1}{s \sqrt{s} (a\alpha^2 - s)}. \quad \text{Таким образом, частное решение уравнения (П5-1)}$$

для изображения температуры, соответствующее дополнительным условиям (П5-2), имеет вид:

$$T_L(x, s) = \frac{Aq_0\alpha^2\sqrt{a}}{c} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{s\sqrt{s}(a\alpha^2 - s)} + \frac{Aq_0\alpha e^{-\alpha x}}{c} \frac{1}{s(s - a\alpha^2)} + \frac{T_0}{s}. \quad (\text{П5-3})$$

Искомое распределение температур получается после применения обратного преобразования Лапласа к (П5-3). Оригинал третьего слагаемого, очевидно, просто равен T_0 (см. (П4-14)). Чтобы определить оригинал второго слагаемого, заметим, что $\frac{1}{s(s - a\alpha^2)} = \frac{1}{a\alpha^2} \left(\frac{1}{s - a\alpha^2} - \frac{1}{s} \right)$. Используя полученные

в предыдущем разделе формулы (П4-14) и (П4-16), получим, что $L^{-1} \left[\frac{Aq_0\alpha e^{-\alpha x}}{c} \frac{1}{s(s - a\alpha^2)} \right] = \frac{Aq_0\alpha e^{-\alpha x}}{c} \frac{1}{a\alpha^2} (e^{\alpha^2 at} - 1) = \frac{Aq_0 e^{-\alpha x}}{k\alpha} (e^{\alpha^2 at} - 1)$.

Далее с учетом того, что $\frac{1}{s - a\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{s} - \alpha\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{s} + \alpha\sqrt{a}} \right)$, первое

слагаемое в (П5-3) разбивается на следующие слагаемые, изображения которых также были получены нами ранее (см. (П4-17) и (П4-20)):

$$\frac{Aq_0\alpha^2\sqrt{a}}{c} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{s\sqrt{s}(a\alpha^2 - s)} = \frac{Aq_0\alpha^2\sqrt{a}}{c} \frac{1}{a\alpha^2} \left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{s\sqrt{s}} - \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} - \alpha\sqrt{a})} + \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \alpha\sqrt{a})} \right)$$

Таким образом, получаем, что

$$L^{-1} \left[\frac{Aq_0\alpha^2\sqrt{a}}{c} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{s\sqrt{s}(a\alpha^2 - s)} \right] = \frac{Aq_0\sqrt{a}}{k} 2\sqrt{t} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{Aq_0}{2k\alpha} e^{-\alpha x} e^{\alpha^2 at} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \alpha\sqrt{at} \right) + \frac{Aq_0}{2k\alpha} e^{\alpha x} e^{\alpha^2 at} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \alpha\sqrt{at} \right).$$

Далее, суммируя все полученные слагаемые и пользуясь свойством $\operatorname{erfc}(x) = 2 - \operatorname{erfc}(-x)$, окончательно получаем:

$$T(x,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{Aq_0 e^{-\alpha x}}{k\alpha} + \frac{Aq_0}{2k\alpha} e^{\alpha^2 at} \left(e^{-\alpha x} \operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{at} - \frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + e^{\alpha x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \alpha\sqrt{at}\right) \right) + T_0.$$

Видно, что полученное выражение совпадает с (3.15).

Приложение 6. Метод источников

Рассмотрим линейное трехмерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{q_v}{c}$$

и выясним, какой вид должна иметь его правая часть для того, чтобы функция $G(x, y, z, t)$ вида

$$G(x, y, z, t) = \frac{E_0}{c} \Theta(t - t') g(x - x', y - y', z - z', t - t') \quad (\text{П6-1})$$

являлась его решением.

В формуле (П6-1) E_0 – некоторая константа, имеющая размерность энергии, x', y', z' – координаты некоторой точки, t' – некоторый момент времени, $\Theta(t - t')$ – ступенчатая функция Хевисайда, т.е.

$$\Theta(t - t') = \begin{cases} 1 & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases},$$

а функция g определяется следующим образом:

$$g(x - x', y - y', z - z', t - t') = \frac{\exp\left(-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4a(t - t')}\right)}{(4\pi a(t - t'))^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{П6-2})$$

Вычислим производную по времени и вторые производные по координатам от функции G . Для производной по времени, опуская для краткости аргументы, от которых зависят функции, можем записать

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{E_0}{c} \frac{\partial \Theta}{\partial t} g + \frac{E_0}{c} \Theta \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Для производной функции g по времени в свою очередь можно получить выражение вида:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = g \left(-\frac{3}{2}(t - t')^{-1} + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4a} (t - t')^{-2} \right).$$

Для производной от g по координате x несложно получить, что $\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{(x - x')}{2a(t - t')} g$, соответственно, для второй производной имеем:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2a(t - t')} \left(g - \frac{(x - x')^2}{2a(t - t')} g \right) = -g \left(\frac{1}{2a} (t - t')^{-1} - \frac{(x - x')^2}{4a^2} (t - t')^{-2} \right).$$

Ясно, что выражения для вторых производных по координатам y и z будут полностью аналогичны полученному для производной по координате x с точностью до замены x и x' на соответствующие переменные. Тогда получим, что

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = g \left(-\frac{3}{2}(t-t')^{-1} + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a}(t-t')^{-2} \right).$$

Соответственно, после подстановки функции G левая часть уравнения теплопроводности примет вид $\frac{E_0}{c} \frac{\partial \Theta}{\partial t} g$. Выясним, что представляет из себя эта

функция. Во-первых, можно записать, что $\frac{\partial \Theta(t-t')}{\partial t} = \delta(t-t')$ – дельта функция

Дирака, она равна нулю всюду, кроме точки $t = t'$, в которой она обращается в бесконечность. Таким образом, нам нужно выяснить, как ведет себя функция g при $(t-t') \rightarrow 0$. Функцию g можно представить в виде произведения трех одинаковых функций, каждая из которых зависит только от переменных $(x-x')$, $(y-y')$ и $(z-z')$. В частности, функция переменной $(x-x')$ будет иметь вид «нормального распределения», «дисперсия» которого определяется параметром

$$(t-t'): \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right). \text{ Вид этой функции при различных значениях}$$

параметра $(t-t')$ показан на рис. Пб-1. Из рисунка видно, что при уменьшении параметра $(t-t')$ исследуемая функция становится все более узкой, а её значение в точке $(x-x') = 0$ возрастает. При этом, как несложно показать, площадь под графиком остается конечной и равной единице. Таким образом, можем сказать,

что при $t-t' \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right) \rightarrow \delta(x-x')$. И,

соответственно, $\frac{E_0}{c} \frac{\partial \Theta}{\partial t} g = \frac{E_0}{c} \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z')$. А функция

теплового источника, отвечающего решению уравнения теплопроводности в виде функции G , будет иметь вид $q_G = E_0 \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z')$.

Физически действие источника, описываемого полученным соотношением, соответствует мгновенному выделению энергии E_0 в момент времени t' в точке с координатами x', y', z' , т.е. действию мгновенного точечного источника. А функция G называется функцией Грина для уравнения теплопроводности.

Идея метода источников состоит в том, что реальный (не точечный, а распределенный) тепловой источник произвольного вида представляется совокупностью точечных источников. Тогда решение уравнения теплопроводности будет представлять собой суперпозицию решений,

соответствующих действию каждого точечного источника, на которые «разбивается» реальный протяженный источник.

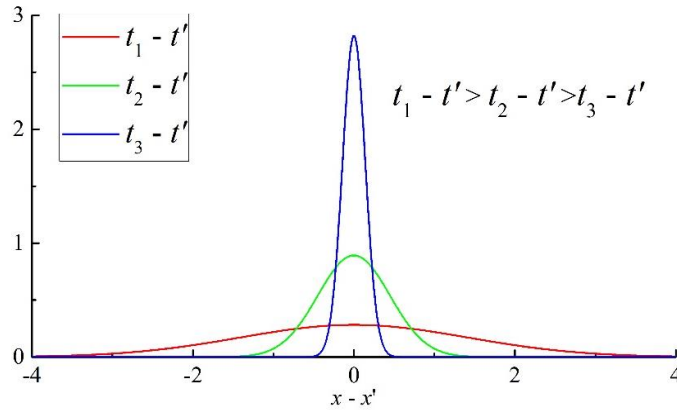


Рис. Пб-1. Характерный вид функции $\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right)$ при различных значениях параметра $t-t'$.

Получим окончательную формулу, позволяющую рассчитывать распределение температур, если задано распределение источников.

Рассмотрим полученное нами равенство

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) = \frac{E_0}{c} \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \quad \text{и}$$

умножим левую и правую части равенства на $q_v(x', y', z', t')$ и проинтегрируем по переменным x', y', z', t' . В результате получим уравнение теплопроводности, в правой части которого стоит функция источников q_v переменных x, y, z, t (в силу

известного свойства дельта-функции $\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t-t') dt' = f(t)$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{q_v}{c}, \quad \text{где температура } T \text{ равна}$$

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t-t') q_v(x', y', z', t') g(x-x', y-y', z-z', t-t') dt' dx' dy' dz'.$$

Полученное выражение можно переписать, устранив функцию Хевисайда в подынтегральной функции:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t dt' \iiint_{-\infty}^{\infty} q_v(x', y', z', t') g(x-x', y-y', z-z', t-t') dx' dy' dz', \quad (\text{Пб-3})$$

функция g здесь задается соотношением (Пб-2).

Приложение 7. Применение метода источников к задачам лазерного нагрева

Применим метод источников для исследования задачи лазерного нагрева полубесконечного тела поверхностным источником круглой формы, рассмотренную в разделе 3.7. Попытка непосредственного применения формулы (Пб-3), полученной в Приложении б, к рассматриваемой ситуации встречает определенные трудности, связанные с тем, что формула (Пб-3) соответствует нагреву тела, заполняющего все пространство, в то время как мы хотим найти распределение температуры в полубесконечном теле. В подобных ситуациях поступают следующим образом. Задачу нагрева ограниченного тела заменяют на эквивалентную задачу нагрева тела, заполняющего все пространство, видоизменив функцию источников таким образом, чтобы не изменить решение в интересующей нас области. В случае задачи нагрева полубесконечного тела поверхностным источником можно рассмотреть эквивалентную ей задачу нагрева всего пространства поверхностным источником удвоенной мощности. С учетом сказанного функцию q_v , входящую в формулу (Пб-3), следует брать в виде:

$$q_v = \begin{cases} 2Aq_0\delta(x) & y^2 + z^2 < r_0^2 \\ 0 & y^2 + z^2 \geq r_0^2 \end{cases}, \quad (\text{П7-1})$$

здесь r_0 – радиус пучка, ось x направлена вглубь материала, поверхностный источник действует в плоскости $x = 0$, центру пучка соответствуют координаты $y = 0, z = 0$.

Полагая, что источники включаются в момент времени $t = 0$, для температуры в центре на оси пучка ($y = 0, z = 0$) получим:

$$\begin{aligned} T(x, 0, 0, t) &= \frac{2Aq_0}{c} \int_0^t dt' \iint_{y'^2+z'^2 < r_0^2} dy' dz' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x')}{(4\pi a(t-t'))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + y'^2 + z'^2}{4a(t-t')}\right) dx' = \\ &= \frac{2Aq_0}{c(4\pi a)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right) dt' \iint_{y'^2+z'^2 < r_0^2} \exp\left(-\frac{y'^2 + z'^2}{4a(t-t')}\right) dy' dz'. \end{aligned}$$

Интегрирование по переменным y', z' легко выполнить, перейдя в полярные координаты:

$$\iint_{y'^2+z'^2 < r_0^2} \exp\left(-\frac{y'^2 + z'^2}{4a(t-t')}\right) dy' dz' = 2\pi \int_0^{r_0} \exp\left(-\frac{r'^2}{4a(t-t')}\right) r' dr' = 4\pi a(t-t') \left(1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{4a(t-t')}\right)\right)$$

Соответственно, получаем, что

$$\begin{aligned}
T(x,0,0,t) &= \frac{8\pi a A q_0}{c(4\pi a)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{4a(t-t')}\right)\right) dt' = \\
&= \frac{A q_0}{c\sqrt{\pi a}} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right) dt' - \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2+r_0^2}{4a(t-t')}\right) dt' \right).
\end{aligned} \tag{П7-2}$$

Преобразуем первый интеграл в скобках, сделав замену $\beta = \frac{x}{2\sqrt{a}}(t-t')^{\frac{1}{2}}$ (соответственно, $d\beta = \frac{x}{4\sqrt{a}}(t-t')^{-\frac{3}{2}} dt'$), и выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right) dt' = \frac{x}{\sqrt{a}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \beta^{-2} e^{-\beta^2} d\beta = -\frac{x}{\sqrt{a}} \left(\beta^{-1} e^{-\beta^2} \Big|_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} + 2 \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right).$$

Первое слагаемое в скобках после подстановки пределов интегрирования переходит в $\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$, а второе с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

представляет собой $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$. Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right) dt' &= \frac{x\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right) = \\
&= \frac{x\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right) = 2\sqrt{\pi t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).
\end{aligned}$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались соотношением (П2-8).

Очевидно, что второй интеграл в скобках выражения (П7-2) вычисляется абсолютно аналогично:

$$\int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2+r_0^2}{4a(t-t')}\right) dt' = 2\sqrt{\pi t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\sqrt{x^2+r_0^2}}{2\sqrt{at}}\right).$$

Учитывая, что $\frac{A q_0}{c\sqrt{\pi a}} = \frac{A q_0 \sqrt{a}}{k\sqrt{\pi}}$, и добавляя к окончательному выражению начальную температуру T_0 , получим, что

$$T(x,0,0,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} \left(\operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{\sqrt{x^2 + r_0^2}}{2\sqrt{at}}\right) \right) + T_0 .$$

Тем самым формула (3.23), приведенная в разделе 3.7, доказана.

Поляков Дмитрий Сергеевич
Шамова Александра Андреевна
Шандыбина Галина Дмитриевна

**Взаимодействие лазерного излучения с веществом.
Часть 1. Поглощение излучения в твердых телах и
теплофизика лазерного нагрева**

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А