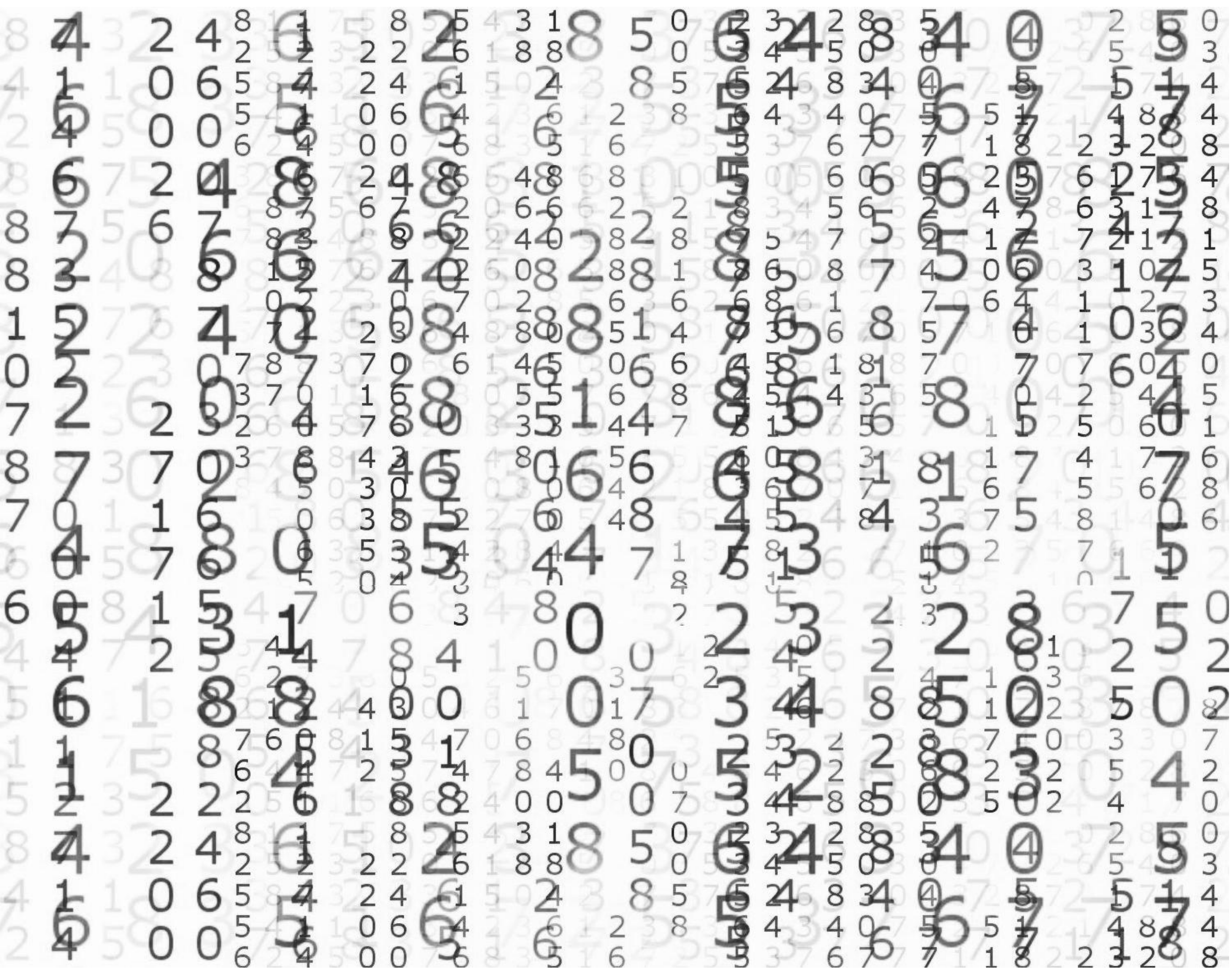
И.В. Блинова, А.И. Попов, И.Ю. Попов,
О.В. Сильванович, Г.В. Тимофеева

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Санкт-Петербург
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**И.В. Блинова, А.И. Попов, И.Ю. Попов,
О.В. Сильванович, Г.В. Тимофеева**

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 03.03.02, 05.03.06, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 38.03.01, 38.03.02, 38.03.05, 44.03.04, 45.03.04
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

**Санкт-Петербург
2023**

Блинова И.В., Попов А.И., Попов И.Ю., Сильванович О.В., Тимофеева Г.В. Типовой расчет по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное исчисление – СПб: Университет ИТМО, 2023. – 67 с.

Рецензент:
Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория “ординарный профессор”) института “Высшая инженерно-техническая школа”, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. Типовой расчет включает в себя задачи по следующим темам: “Комплексные числа”, “Непрерывность функции”, “Пределы”, “Дифференциальное исчисление функций одной переменной”, “Правило Лопиталя”, “Исследование функций и построение графиков”, “Приложения производной”.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый семестр включает в себя задачи по темам: «Комплексные числа», «Пределы», «Непрерывность функции», «Дифференцирование функций», «Правило Лопиталя», «Исследование функций» и «Приложения производной».

Каждый студент обязан выполнить семь заданий (включая подпункты a), b), c), ...), одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие. Все чертежи и рисунки следует сделать на миллиметровке, затем подклеить их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения. По окончании решения написать ответ.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

Типовой расчет содержит семь заданий. Отмеченные “звездочкой” задачи сложнее остальных и выполняются по указанию преподавателя.

Задание 1

1.1 Пример выполнения задания 1

а) Изобразить на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условию: $\begin{cases} \operatorname{Im}(z+i) \geq |z| \\ \frac{\pi}{4} < \arg\left(z + \frac{1}{2}i\right) < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Решение.

Перейдем от системы неравенств с комплексными числами к задаче аналитической геометрии на плоскости XOY. Подставим $z = x + iy$ в первое неравенство:

$$\operatorname{Im}(x + i(y+1)) \geq \sqrt{x^2+y^2} \;\Leftrightarrow\; y+1 \geq \sqrt{x^2+y^2}.$$

При $y < -1$ неравенство неверно. Исключим эту область из ответа. Рассмотрим $y \geq -1$. Возведем неравенство в квадрат:

$$\begin{cases} y^2 + 2y + 1 \geq x^2 + y^2 \\ y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ y \geq -1 \quad \text{(выполнено автоматически)} \end{cases}$$

Мы получили часть плоскости, лежащую выше параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Рассмотрим второе неравенство. Введем новую переменную $z' = z + \frac{1}{2}i$. Тогда имеем: $\frac{\pi}{4} < \arg z' < \frac{3\pi}{4}$. По определению аргумента комплексного числа это неравенство задает на плоскости $X'OY'$ внутренность угла между прямыми $y' = x'$ и $y' = -x'$. Вернемся к исходной переменной:

$$z = z' - \frac{i}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Геометрически этот переход означает сдвиг осей координат на $\frac{1}{2}$ вдоль оси OY. Пересекая данный угол с областью, полученной в первой части решения, получаем ответ.

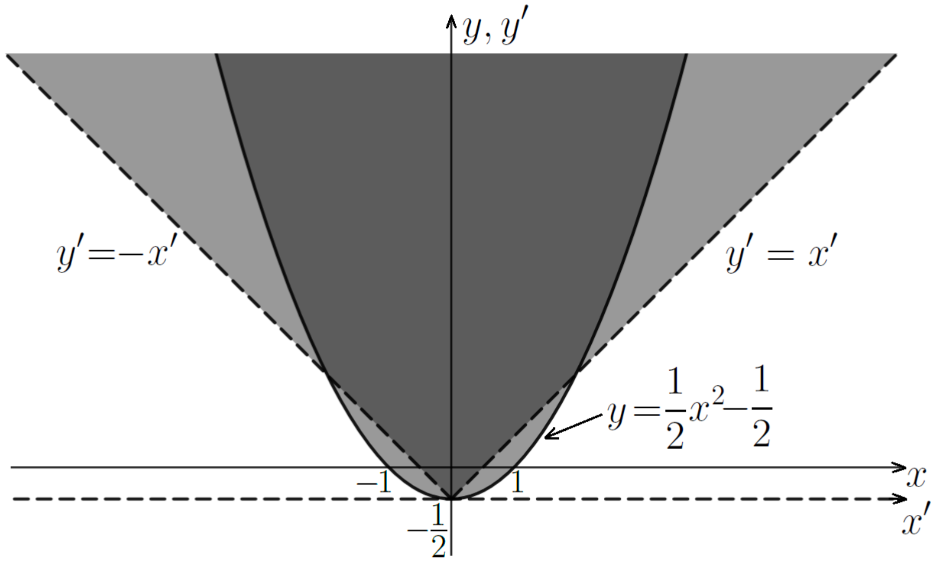


Рис. 1: Геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям: $\operatorname{Im}(z+i) \geq |z|, \quad \frac{\pi}{4} < \arg\left(z+\frac{1}{2}i\right) < \frac{3\pi}{4}$

Серым цветом залиты области, отвечающие каждому из неравенств. Черным цветом отмечена искомая область.

b) Пример 1.

Найти все значения комплексного корня и изобразить их на чертеже:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+i}}$$

Решение.

Упростим выражение:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}.$$

Найдем модуль и аргумент подкоренного числа:

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

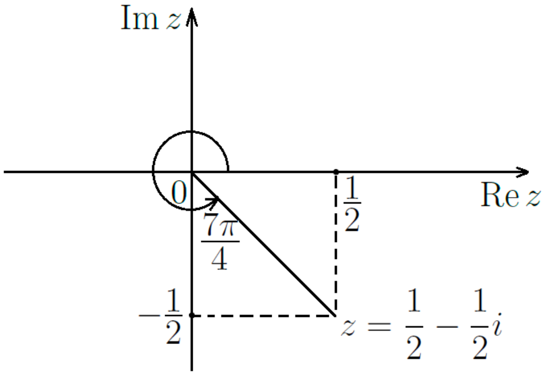


Рис. 2: Поиск аргумента числа $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$$\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{7\pi}{4}.$$

Зная модуль и аргумент, по формуле найдем значения $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right).$$

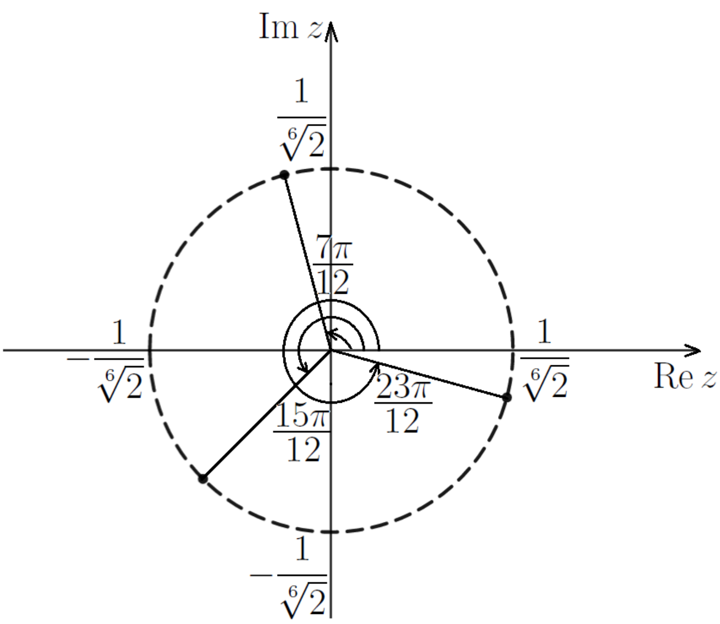


Рис. 3: Все значения $\sqrt[3]{\frac{1}{1+i}}$

Пример 2.

Найти все значения комплексного корня и изобразить их на чертеже:

$$\sqrt[3]{1} - \sqrt{1}$$

Решение.

Вычислим значения $\sqrt{1}$ и $\sqrt[3]{1}$:

$$\sqrt[3]{1} = |1| \cdot \left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt[3]{1} = \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad k = 0, \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = 1, \\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = 2. \end{cases}$$

Теперь посчитаем значения $\sqrt{1}$ и $\sqrt[3]{1}$:

$$\sqrt{1} = |1| \cdot \left(\cos\frac{2\pi k}{2} + i\sin\frac{2\pi k}{2}\right), \quad k = 0,\ 1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{1} = \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad k = 0, \\ \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad k = 1. \end{cases}$$

Для получения $\sqrt[3]{1} - \sqrt{1}$ из каждого значения $\sqrt[3]{1}$ вычтем каждое значение $\sqrt{1}$, то есть получим 6 значений:

$$\sqrt[3]{1} - \sqrt{1} = \begin{cases} 1 - 1 = 0, \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 1 - (-1) = 2, \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

Значения $\sqrt[3]{1}$ лежат в вершинах правильного треугольника. При вычитании $\sqrt{1}$ он сдвигается на 1 или на -1, то есть получается два треугольника.

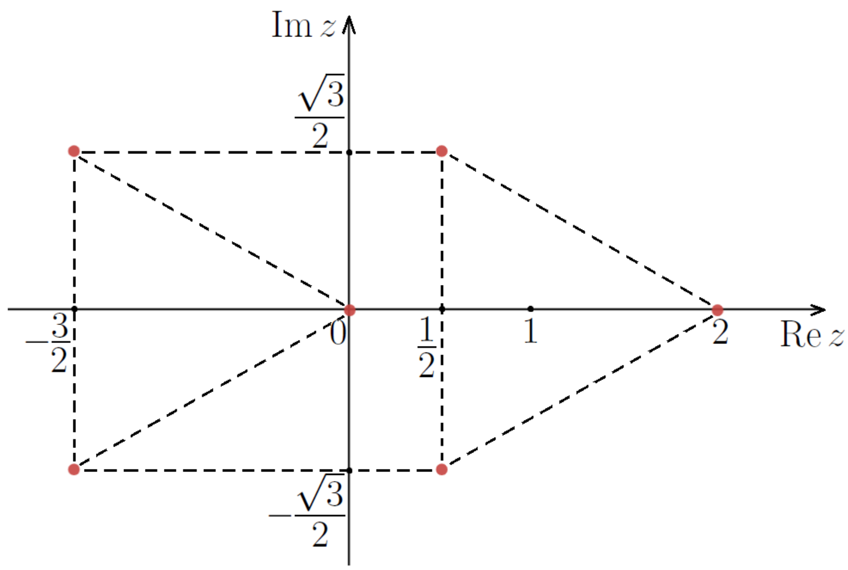


Рис. 4: Все значения $\sqrt[3]{1} - \sqrt{1}$ (красные точки на графике)

с) Пример 3.

Вычислить значения функции комплексной переменной: $(1-i)^{i-1}$

Решение.

$$(1-i)^{i-1} = e^{(i-1)\mathrm{Ln}(1-i)} = e^{(i-1)\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{7\pi}{4}+2\pi k i\right)} = e^{i\cdot\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2\pi k-\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{7\pi}{4}-2\pi k i} =$$

$$= e^{-\frac{7\pi}{4}-2\pi k-\frac{1}{2}\ln 2}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{7\pi}{4}-2\pi k i} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2\pi k}\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2\pi k\right)\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2\pi k}\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

Пример 4.

Вычислить значения функции комплексной переменной: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}-2}-e^{-i\frac{\pi}{3}+2}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)e^{-2}-e^{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}i\left(\cos\frac{\pi}{3}(e^{-2}-e^{2})+i\sin\frac{\pi}{3}(e^{-2}+e^{2})\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\,2+\frac{1}{2}i\,\mathrm{sh}\,2.$$

1.2 Варианты задания 1

а) Изобразить на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условию:

1. $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| < 1 \\ 0 < \operatorname{Re}(iz) \le 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2 \le |z+i| < 3 \\ |z-2| < |z| \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \le \arg(i(1-z)) \le \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{iz} \ge \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$

5. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \ge 1$

6. $\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} \ge \frac{1}{2} \\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

7. $\operatorname{Im}\left((1+i)z\right) = 0$

8. $\operatorname{Im}\left((1-i)(z+i)\right) = 0$

9. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$

10. $|z-2| = |1-2\overline{z}|$

11. $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$

12. $\begin{cases} 1 < |z| < 2 \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

13. $\frac{\pi}{4} < \arg(z-i) \le \frac{3}{4}\pi$

14. $\begin{cases} |z+1| > 1 \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

15. $\operatorname{Im} z^2 > 2$

16. $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \arg(z+i) < \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 0 \le \arg(iz) \le \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} |z-i-1| \ge |z+i+1| \\ |z| \le 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \operatorname{Im}(iz+7) \le 1 \\ 1 < |z-1| < 2 \end{cases}$

20. $\operatorname{Re}(z^2) \ge 1$

21. $\begin{cases} \operatorname{Re}(2z-4+3i) \ge 2 \\ \frac{\pi}{6} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z| > 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \arg((i+1)z) \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

23. $\begin{cases} |z-i| \le |z-1| \\ 1 \le |z-2-2i| \le 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \operatorname{Im}(z^2) \le 4 \\ |\operatorname{Re} z| \le 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) \geq 4 \\ \mathrm{Re}\, z \leq 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} |\,\mathrm{Im}\, z| + |\,\mathrm{Re}\, z| \geq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} |z|^2 \leq \mathrm{Re}(z^2) + 8 \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

28. $\begin{cases} |z|^2 \leq \mathrm{Im}(z^2) + 1 \\ |z| > 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \mathrm{Im}\, \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} \\ \mathrm{Im}\, z \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

30. $\begin{cases} \mathrm{Im}(z^2) \geq 2 \\ |\,\mathrm{Im}\, z| + |\,\mathrm{Re}\, z| \leq 4 \end{cases}$

b) Найти все значения следующих корней и изобразить их на комплексной плоскости:

1. $\sqrt[4]{-i}$

2. $\sqrt[3]{27}$

3. $\sqrt{-16}$

4. $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$

5. $\sqrt{\left|\sqrt{2}i + 1\right| + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13}}$

6. $\sqrt[3]{5\frac{1+i}{1-3i} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{13}}$

7. $\sqrt[3]{\left(\frac{1+i}{-1+i}\right) - |-\sqrt{2} + i|}$

8. $\sqrt[3]{\frac{|4+3i|(1+i^{71})}{2-i^{101}} - (1+i)^2}$

9. $\sqrt[4]{\frac{|1+\sqrt{15}i|(2-\sqrt{3}i^{33})}{\sqrt{3}-i} + 2\sqrt{3}i^{102}}$

10. $\sqrt[3]{i}$

11. $\sqrt[5]{1 - i}$

12. $\sqrt[6]{-64}$

13. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$

14. $\sqrt[4]{-1 - i}$

15. $\sqrt[3]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - i\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4}$

16. $\sqrt[4]{i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18}}$

17. $\sqrt[3]{\sqrt{3}i^7 + i^{62}}$

18. $\sqrt[5]{\frac{5}{1-i}}$

19. $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i} - \sqrt{3}}$

20. $\sqrt[4]{\frac{16}{1+i}}$

21. $\sqrt{-1} + \sqrt{i}$

22. $\sqrt[4]{-1} + \sqrt{-1}$

23. $\sqrt[3]{1} - \sqrt[6]{1}$

24. $\sqrt{\sqrt{-1} + i}$

25. $\sqrt[4]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + i}$

26. $\sqrt[3]{\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^3+8}$

27. $\sqrt[4]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3}$

28. $\sqrt[3]{1+i\sqrt{-1}}$

29. $\sqrt{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}$

30. $\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}}$

c) Вычислить следующие значения функций комплексной переменной (то есть записать результат в виде: $a+ib$, где $a,\ b\in\mathbb{R}$):

1. $e^{1+\frac{\pi}{4}i}$

2. $(-i)^{-i}$

3. $\cos(2i)$

4. $\sqrt[3]{i}$

5. $\mathrm{Ln}(ie^2)$

6. $\sin i$

7. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$

8. $e^{1-\frac{\pi}{6}i}$

9. $\sin(5-i)$

10. $\sqrt[4]{-i}$

11. $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}$

12. $\cos i$

13. e^{-1+2i}

14. 1^i

15. $\sin(3i)$

16. $\sqrt[3]{1+i}$

17. $\mathrm{Ln}(2-3i)$

18. $\cos(2-i)$

19. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}i\right)$

20. $e^{1+\frac{9}{4}\pi i}$

21. $i^{\frac{1}{6}}$

22. $\cos(\pi i)$

23. $\sqrt[3]{-2+2i}$

24. $\mathrm{Ln}(3-2i)$

25. $(-1)^{\sqrt{2}}$

26. $\sin(9-2i)$

27. $\mathrm{ctg}(\pi i)$

28. $(1+i)^{i+1}$

29. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

30. $\mathrm{Ln}(e^3-e^3i)$

Задание 2

2.1 Пример выполнения задания 2

a) Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot7}+\ldots\ldots+\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}\right)$.
Решение. Представим дробь $\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$ в виде разности двух дробей: $\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}$.
Тогда n-ый член последовательности можно переписать в виде

$$\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\ldots\ldots+\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}.$$

Дробь $\frac{1}{3n+4}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot7}+\ldots\ldots+\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}.$$

b) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to-\frac{1}{3}$, то есть получается неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, воспользовавшись информацией о том, что один корень $x=-\frac{1}{3}$ уже известен, тогда

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(x-1)}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+1}{x-1}=-\frac{1}{4}.$$

c) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.
Решение. Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть $\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}\right)^{x+1}.$$

Дробь $\frac{1}{5(5x+7)}$ является бесконечно малой при $x\to\pm\infty$, тогда
при $x\to+\infty$ получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}\right]=0,$$

при $x \to -\infty$ получим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-\infty}\right]=\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}\right]=+\infty.$$

d) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. По формулам приведения, известным из школьного курса алгебры, получим: $\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}2x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\operatorname{ctg}2x}=[1^{\infty}]=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\left(-\frac{1}{5x}\right)\cdot(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}.$$

Используя второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}=e.$$

Так как функция $y=e^x$ является непрерывной на всей числовой оси, можно внести знак предела в степень показательной функции:

$$\lim_{x\to 0}e^{(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{tg}2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}}=e^{\frac{5}{2}}.$$

Здесь мы заменили функцию $\operatorname{tg}2x$ на эквивалентную бесконечно малую: $\operatorname{tg}2x\sim 2x$ при $x\to 0$.

e) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x+19}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{4x}-2}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-8$, тогда $t\to 0$. Предел функции преобразуем следующим образом:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t+8+19}-\sqrt{t+8+1}}{\sqrt[5]{4(t+8)}-2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt[3]{t+27}-3)-(\sqrt{t+9}-3)}{\sqrt[5]{4t+32}-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1\right)-3\left(\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt[5]{1+\frac{t}{8}}-1\right)}=$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{\sqrt[5]{1+\frac{t}{8}}-1} - \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{\sqrt[5]{1+\frac{t}{8}}-1} =$$

$$\Big/ (1+y)^{\mu}-1 \sim \mu y \quad \text{при} \quad y\to 0 \Big/$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{27}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{t}{8}} - \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{9}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{t}{8}} = \frac{3}{2}\left(\frac{40}{81}-\frac{20}{9}\right) = -\frac{70}{27}.$$

f) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Решение. Заметим, что при $x\to+\infty$ функции $\sin\sqrt{x+1}$ и $\sin x$ не имеют предела, а принимают все возможные значения от -1 до 1. Воспользуемся формулой для разности синусов и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).$$

Функция $\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ ограничена, а аргумент функции $\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$ преобразуем, домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$. Полученная функция $\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую будет бесконечно малой величиной, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\Bigg(\underbrace{2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\to 0 \text{ при } x\to\infty}\cdot\underbrace{\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{ограничена}}\Bigg) = 0.$$

***g)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-1$. Тогда:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{100}-2(1+t)+1}{(1+t)^{50}-2(1+t)+1}.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots\ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

$$\text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Тогда:

$$(1+t)^{100} = 1 + 100t + \frac{100 \cdot 99}{2} t^2 + \ \ldots\ldots \ + t^{100},$$

$$(1+t)^{50} = 1 + 50t + \frac{50 \cdot 49}{2} t^2 + \ \ldots\ldots \ + t^{50}.$$

Для вычисления предела будем пренебрегать бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем t. Тогда:

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{100} - 2(1+t) + 1}{(1+t)^{50} - 2(1+t) + 1} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + 100t - 2(1+t) + 1}{1 + 50t - 2(1+t) + 1} = \lim_{t\to 0} \frac{98t}{48t} = \frac{49}{24}.$$

***h)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$ сделаем замену переменной $t = x - 3$, тогда:

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin (t+3)}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t \cos 3 + \cos t \sin 3}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} (\sin t \operatorname{ctg} 3 + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} (1 + \sin t \operatorname{ctg} 3 + (\cos t - 1))^{\frac{1}{t}}.$$

При $t \to 0$ функция $\cos t - 1$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\sin t \operatorname{ctg} 3$, поэтому ей можно пренебречь. Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, найдем

$$\lim_{t\to 0} (1 + \sin t \operatorname{ctg} 3)^{\frac{1}{\sin t \operatorname{ctg} 3} \cdot \frac{\sin t \operatorname{ctg} 3}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t \operatorname{ctg} 3}{t}} = e^{\operatorname{ctg} 3}.$$

***i)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Раскроем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, введя новую переменную $t = x + 1,\ t \to +0$. Далее домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и получим

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{t\to +0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos (t-1)}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{t\to +0} \frac{\pi - \arccos (t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi} + \sqrt{\arccos (t-1)}\right)}.$$

Бесконечно малую функцию $\pi - \arccos(t-1)$ при $t \to +0$ заменим на эквивалентную:

$$\pi - \arccos(t-1) \sim \sin(\pi - \arccos(t-1)) = \sin(\arccos(t-1)) =$$
$$= \sqrt{1-\cos^2(\arccos(t-1))} = \sqrt{1-(t-1)^2} = \sqrt{1-t^2+2t-1} =$$
$$= \sqrt{2t-t^2} = \sqrt{t}\cdot\sqrt{2-t}.$$

Тогда:

$$\lim_{t\to+0} \frac{\pi - \arccos(t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{\cancel{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{2-t}}{\cancel{\sqrt{t}}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2.2 Варианты задания 2

Найти пределы (без использования правила Лопиталя):

1. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+5+\ldots+(3n-1)}{n+5} - \frac{3}{2}n\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32-x^2}-2}{(e^x-e^{2x})\operatorname{arctg}x}$

b) $\lim\limits_{x\to-1,5}\frac{2x^3+7x^2+4x-3}{2x^3-5x^2-32x-30}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln(2x^2-1)}{1-\cos\sqrt{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{5x+2}\right)^{1-3x}$ ***g)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(0,5\sqrt{x^2-3})-\arccos(0,5\sqrt{x+1})}{2x^2-3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0,3}\left(\frac{10x}{3}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x-0,3)}}$ ***h)** $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{\ln(\sqrt[3]{6-2x}+x)}{\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi(1-x)}{4}}}$

2. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^5(\sqrt[3]{2n^9-3n}-\sqrt[3]{2n^9})$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4(\sqrt[5]{1+x^2}-1)}{e^{\pi x}-3x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^4-4x^2-2x}{3x^3+5x^2+x-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\ln\cos 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{5x+2}\right)^{1+3x}$ ***g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-1}\left(\arccos\frac{3x-1}{3x+1}-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-2}(x+3)^{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x+2)}}$ ***h)** $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$

3. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{2}{3^n}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0,2}\left(\frac{5x+1}{2}\right)^{\frac{3x+2}{\sin(x-0,2)}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-8x+5}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{1-4x^2}{\sin^2(2x-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{1-3x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-x^2}-\sqrt[3]{1+2x}}{3x\sqrt{\sin 2x}}$

*g) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x(\sqrt{2+x}-1)}{\arccos\frac{2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{\pi}{3}}$

*h) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^{10}-2^{10}-10\cdot2^9(x-2)}{(x-2)^2}$

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+8+...+(3n+2)}{\sqrt{9n^4-n+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{9x^3+57^2-41x+7}{36x^4-24x^3+22x^2-12x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to0{,}4} \left(\frac{5x}{2}\right)^{\frac{2x}{\ln(5x-1)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 3x}{1+x\sin x-\cos 2x}$

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\cos(2\pi(x+0{,}5))}}{2-\sqrt[6]{3x+64}}$

*g) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$

*h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-4x\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)}$

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2\cdot7}+\ldots+\dfrac{3}{(5n-3)\cdot(5n+2)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0{,}5} \dfrac{12x^4-12x^3+23x^2-20x+5}{4x^3-4x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{1-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to4} \left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-4)}}$

e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 0{,}5x}$

f) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2^{3x}-8}{(2-x)^5-1}$

*g) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\arcsin\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{6}}{x^2+4x-5}$

*h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(20x+1)^{30}-(30x+1)^{20}}{\sqrt[20]{1-30x^2}-1}$

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot4^n-3^{n+2}}{4^{n+1}+3^{n-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{3x^3+5x^2+x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x+7}\right)^{4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \left(2-\frac{x}{3}\right)^{\left(\cos\frac{\pi x}{6}\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin x-\cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin 2x+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[4]{1+x}}$

*g) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\arccos(0{,}5\sqrt{2x+6})-\arcsin(0{,}5\sqrt{-x})}{\sqrt[5]{2x+5}-1}$

*h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\frac{2}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)^{3\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^2+7}{5+8+...+(3n+2)}-\dfrac{2}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}{5x^3-16x^2+4x+16}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \left(2-\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{\sin(3-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt[4]{1+x^2}}{3\ln(1-2x^2)}$

*g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(5x+2)\left(\operatorname{arctg}\frac{5x+2}{5x-2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

*h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^4}+2\cdot\sqrt[10]{3x^3}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}-\sqrt[10]{5x}\right)}$

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{4n^6+3n^5-1}-\sqrt[3]{4n^6+2}}{7n+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3-x^2-16x-20}{4-2x^4-8x^3-7x^2+4x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-3}{x+11}\right)^{1+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to5} \left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{(x-5)^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(0{,}2(\pi-3x))}{1-2\cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}\cdot\left(e^{\sqrt{2-x}}-1\right)}{\sqrt[5]{22+5x}-(x^2-2)}$

*g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}-0{,}5\pi}{\mathrm{tg}\sqrt{1-x^2}}$

*h) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)^{101}-101x+201}{3x^3-12x^2+12x}$

9. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2\left(\sqrt{3}\right)^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^4+4x^3+5x^2+4x+1}{4x^3-4x^2-7x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x+17}\right)^{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^{\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tgx}}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sqrt{25-5(x-\pi)^2}-5}{\ln(2+\cos x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$

*g) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2-13}}{3}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x+7}}{3}}{3x^2+11x-4}$

*h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x\cdot 2^x)-\cos(x\cdot 2^{-x})}{\ln(1+x^3)}$

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+7+\ldots+(6n-5)}{5n^2-\sqrt{3n}+2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-x^2-16x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x+19}{2x-1}\right)^{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2(x-1)}-e^{3(x-1)}}{\sin\pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{1+7x}-1+x^2}{\sqrt{2x}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$

*g) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\arcsin\frac{\sqrt{2-x}}{2}-\frac{\pi}{3}}{\sin(x+1)}$

*h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{7\mathrm{ctg}(2x)}$

11. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4\cdot 10} + \ldots + \frac{3}{(6n-2)\cdot(6n+4)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-9x^2+27x-27}{2x^3-12x^2+24x-18}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{9x+12}\right)^{5x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(2-\frac{x}{2}\right)^{\frac{3x-6}{\sin^2(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{(\mathrm{tg}\,4x+x-\pi)\ln\frac{x}{\pi}}{1+\cos 5x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-\sqrt[3]{27-x}}{6^{2x}-6^{5x}}$

*g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\ln(x+4)}{\arcsin\sqrt{\frac{3}{10+2x}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{x+7}}}$

*h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sin\frac{x+2}{5}+\sin\frac{\pi(2-x)}{4}}{\ln(\sqrt[5]{30-x}+0{,}5x)}$

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{0{,}5^{n+2}-0{,}3^n}{0{,}5^{n-3}+2\cdot 0{,}3^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-5}{3x-14}\right)^{-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^{(2\mathrm{tg}x-2)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\ln(x+4)}{7^{x^2-8}-7}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1-x}{\arcsin^2(\sqrt{x+1}-1)}$

*g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-1}}{\left(\mathrm{arctg}\frac{2-7x}{2+7x}+\frac{\pi}{4}\right)^{-1}}$

*h) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{\cos 2}{\cos x}\right)^{(\ln(x+3))^{-1}}$

13. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+9+\ldots+(4n+1)}{3n-1} - \frac{2n-1}{3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^4+6x^3+8x^2-6x-9}{2x^3+13x^2+24x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x+13}{5x-3}\right)^{-4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{x}{9}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{18}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}1}{\sin\pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-2x-x^2}-1-x^2}{e^{3x}-e^{0,25x^2}}$

*g) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin\sqrt{x^2-9}}{\arcsin\frac{2}{\sqrt{x^2-5}}-\frac{\pi}{2}}$

*h) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^7-3^7-7\cdot 3^6(x-3)}{(x-3)^2}$

14. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{27n^3-2n^2+1}-3n\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2-9x+27}{2x^4-12x^3+19x^2-6x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{5x-1}\right)^{3x-7}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2-\frac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\operatorname{tg}x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln((1-x)(1+x+x^2))}$

*g) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-1}{\operatorname{arctg}(\sqrt{9-x^2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{9-x^2}-1)}$

*h) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)\right)^{\frac{3}{\cos x}}$

15. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{48}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 4^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^4+3x^3+2x^2+6x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+11}\right)^{6x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{2}{\sin x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-0,3x}-1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{10-3x}-2}{e^{0,5x}-e}$

*g) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{x}}{4}}{\sqrt[3]{2x-7}-1}$

*h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(5x+1)^{20}-(20x+1)^5}{\sqrt[5]{1+20x^2}-1}$

16. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+7+\ldots+(5n-3)}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{8n^6+n-3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+13}{4x-1}\right)^{1-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x+2}\right)^{(\ln(1+x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\sin 4x}{\ln\cos 0,5x}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(4-x^2)(\sqrt[5]{5+2x}-1)}{(e^{x^2-4}-e^{x+2})\cdot\sin(2+x)}$

*g) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)}{x^3+1}$

*h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{2}{x}+\sin\frac{5}{x}\right)^{(3\sin\frac{1}{x})^{-1}}$

17. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2\cdot 9}+\ldots+\frac{5}{(7n-5)(7n+2)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^4-8x^3+19x^2-24x+48}{x^3+7x^2-104x+240}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{4x}{\pi}\right)^{(1-\sin 2x)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\ln(1+\cos 3x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt[4]{81-5x}}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

*g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x+\sqrt{x^4-1}}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{3-2x}{3+2x}+\frac{\pi}{4}\right)^{-1}}$

*h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^5}-2\cdot\sqrt[7]{x})}{\ln(1+\sqrt[4]{7x}+2\cdot\sqrt[11]{x})}$

18. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\cdot 5^{n-1}-4^{n+2}}{13\cdot 4^{n-1}+6\cdot 5^{n+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3^{x+1}-3}$

b) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3+7x^2+8x-16}{x^4+8x^3+20x^2+32x+64}$ f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x^2-9)\cdot\operatorname{arctg}(x-3)}{(e^x-e^3)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x+3}{x+4}\right)^{4x-3}$ *g) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\arccos\left(0{,}5\sqrt{x^2-2}\right)-0{,}25\pi}{2^{x+2}-x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(x+2)^2}{4}\right)^{(\sqrt{1-3x}-1)^{-1}}$ *h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+3)^{99}+99x+197}{x^3+2x^2-x-2}$

19. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+5}{1+5+\ldots+(4n-3)}+\frac{5}{n}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos 2x}-\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1+4x^2)}{(1-2x^3)^8-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{14x+5}\right)^{1-3x}$ *g) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{\operatorname{arctg}\sqrt{3x+6}+\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 7x)^{(\sqrt[5]{1-9x+x^2}-1)^{-2}}$ *h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x^2\cdot 5^x)-\cos(x^2\cdot 5^{-x})}{\sqrt[3]{1-2x^5}-1}$

20. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\left(\sqrt[3]{(3n^2-1)^2}-\sqrt[3]{(3n^2+1)^2}\right)^{-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sqrt{\cos 2x}-1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+0{,}2x^2}-3}{(e-e^{7x+1})\cdot\ln(1-0{,}2x)}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{6x-11}{x+6}\right)^{2+3x}$ *g) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x^2-9)}{\frac{\pi}{3}-\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}$ *h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{(3x(1-\cos 2x))^{-1}}$

21. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}+\ldots+\frac{5}{\sqrt{2^n}}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\ln\cos 4x}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+5x^2+x-3}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x}-1}{(3^{2x}-1)\operatorname{arctg} 0{,}3x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x-1}$ *g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\arccos\frac{\sqrt{3x-1}}{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}}}$ *h) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(\sqrt{4x+1}-x)}{\sin\frac{x-2}{3}-\sin\frac{\pi x}{2}}$

22. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-n+3n^2}{2+6+\ldots+(4n-2)}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+9x^2+24x+20}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{25-x^2}-5}{(5^x-3^{2x})\cdot\ln(1-\operatorname{tg} x)}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^{-1-x}$ *g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+4}}}{\operatorname{arctg}\frac{6-x}{6+x}+\frac{\pi}{4}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\sin 3x^2\right)^{\frac{1}{x\operatorname{arctg} x}}$ *h) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\frac{\cos x}{\cos 4x}\right)^{(\sin(x-4))^{-1}}$

23. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1\cdot 9}+\ldots+\frac{4}{(8n-7)(8n+1)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+10x^2+33x+36}{x^3-9x^2-27x+27}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{3x+2}{2}\right)^{\frac{5x}{\operatorname{arctg} x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 2x-\sin x}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2x}\cdot(e^{\sqrt{x^3}}-1)}{\ln(1-2x)\cdot(\sqrt[7]{1+3x}-1)}$

*g) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\arcsin(x^2-3)-0{,}5\pi}{\sqrt{4-x^2}}$

*h) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^6-4^6-6\cdot4^5\cdot(x-4)}{(x-4)^2}$

24. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5\cdot8^n+(-7)^n}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}{x^4-6x^3+x^2+48x-72}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{tg}2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(e^{x-0{,}5\pi}-1)\operatorname{tg}x}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\ln(1+x)-\ln(1-x))\cdot\ln(1-3x)}{(1+x^2)^5-1}$

*g) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+2}}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}\cdot(x^2-1)}$

*h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{16}}(\operatorname{tg}4x)^{\left(\sin\left(14x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-1}}$

25. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+8+\ldots+(5n-2)}{4+7+\ldots+(3n+1)}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}(1+\ln(1+5x))^{(\ln(1-3x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{5^{3x^2+1}-5}$

f) $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{\sqrt{x-1}-1}$

*g) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{6-x}}+\frac{\pi}{4}}{2x^2+5x+2}$

*h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(10x+1)^7-(7x+1)^{10}}{\sqrt[7]{1-10x^2}-1}$

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)}-\sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^4-13x^2-48}{(x+1)(2x-7)(x-3)-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^{\left(\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin4x)}{4^{x+1}-4}$

f) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{(2x+5)^9-1}$

*g) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt[4]{5x+1}-2}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}}$

*h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1-\sin x}\right)^{(5x(\cos x-1))^{-1}}$

27. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\ldots+3\cdot\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-2)(2x+1)(3x-1)+12}{x^3-3x^2+x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(3-\frac{x+4}{2}\right)^{(\arcsin(x^2-x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x^3)}$

f) $\lim\limits_{x\to3}\frac{5^{x^2-9}-5^{2x-6}}{\sqrt{4-\sin^2(x-3)}-2}$

*g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x^4-2x+3}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-2}{x^2+2}-\frac{\pi}{4}\right)^{-1}}$

*h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\sqrt[9]{4x}+\sqrt{8x^3})}{\ln(1+2\cdot\sqrt[15]{x}+\sqrt[3]{25x^2})}$

28.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{7+9+...+(2n+5)}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3-4x^2-3x-10}{(x+1)(x-4)(3x-14)-6}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x^2+11}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg} 3x^2\right)^{(\operatorname{arctg} x^2)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-\sin 2x}-\cos x}{7^{2x+1}-7}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+3)-\ln x}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}$

*g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt[5]{x+4}-1}{\arccos\frac{\sqrt{x^2-6}}{x+5}-\frac{\pi}{6}}$

*h) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)^{200}-200x+599}{2x^3-9x^2+27}$

29.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 10} \frac{(11-x)(0{,}1x+1)(2x-19)-2}{x^3-10x^2+2x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\frac{2x}{x+1}\right)^{(\sqrt{1-\cos 4x})^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{25-3x}-5}$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2^{4+2x}-2^{x^2-4}}{\ln(-x)-\ln(x+4)}$

*g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}}{\ln(3-x)}$

*h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{x}\cdot 3^x)-\cos(\sqrt{x}\cdot 3^{-x})}{\sin(\pi-3x^2)}$

30.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n-1}+(-3)^{n+1}}{5^{n+2}+(-3)^n}$

b) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{3x^3+17x^2-27x+7}{(2x+13)(x+9)^9+4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0{,}3x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\arcsin\frac{x^2}{3}\right)^{(\ln(1+3x^2))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{5^{x^3+1}-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(\sqrt{3x}-2)}{\sqrt[4]{13-4x}-1}$

*g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\arcsin\frac{\sqrt{x+5}}{2}-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2+\frac{x}{3}}-1}$

*h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(5^{2x}-x^3)}{\ln(7^{2+x}-x^3)}$

Задание 3

3.1 Пример выполнения задания 3

а) Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, но не является на ней непрерывной, так как эта функция не элементарная. Она задана тремя различными формулами для разных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрывы в точках $x=0$ и $x=2$, где меняется её аналитическое выражение. Исследуем поведение функции при приближении к точке $x=0$ слева и справа:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\sqrt{1-x}=1,\quad f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}0=0.$$

Значит, это точка разрыва I рода (разрыв типа скачка). Аналогично для точки $x=2$:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}0=0,\quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}(x-2)=0,$$

то есть в точке $x=2$ функция непрерывна. График функции представлен на рисунке 5.

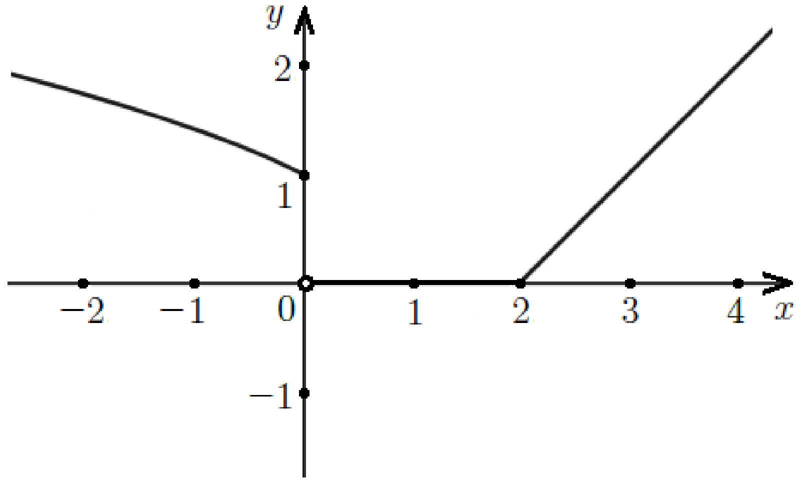


Рис. 5: График функции $f(x)$

b) Исследовать функцию $f(x) = \frac{|x+5|}{x^2+2x-15}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Разложим знаменатель этой элементарной функции на множители и получим $f(x) = \frac{|x+5|}{(x+5)(x-3)}$. Эта функция определена и непрерывна во всех точках области определения: $-\infty < x < -5$;
$-5 < x < 3$; $3 < x < +\infty$. В точках $x = -5$ и $x = 3$ она не определена, поэтому имеет в них разрывы. Вычислим лево и правосторонние пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x\to-5-0} f(x) = \lim_{x\to-5-0} \frac{-(x+5)}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to-5-0} \frac{-1}{x-3} = \frac{1}{8},$$

$$\lim_{x\to-5+0} f(x) = \lim_{x\to-5+0} \frac{x+5}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to-5+0} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, в точке $x = -5$ функция имеет конечный разрыв, её скачок $\lim\limits_{x\to-5+0} f(x) - \lim\limits_{x\to-5-0} f(x) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$.
Вычислим лево и правосторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x\to3-0} f(x) = \lim_{x\to3-0} \frac{x+5}{(x+5)(x-3)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to3+0} f(x) = \lim_{x\to3+0} \frac{x+5}{(x+5)(x-3)} = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет бесконечный разрыв (или разрыв 2-го рода). График функции представлен на рисунке 6.

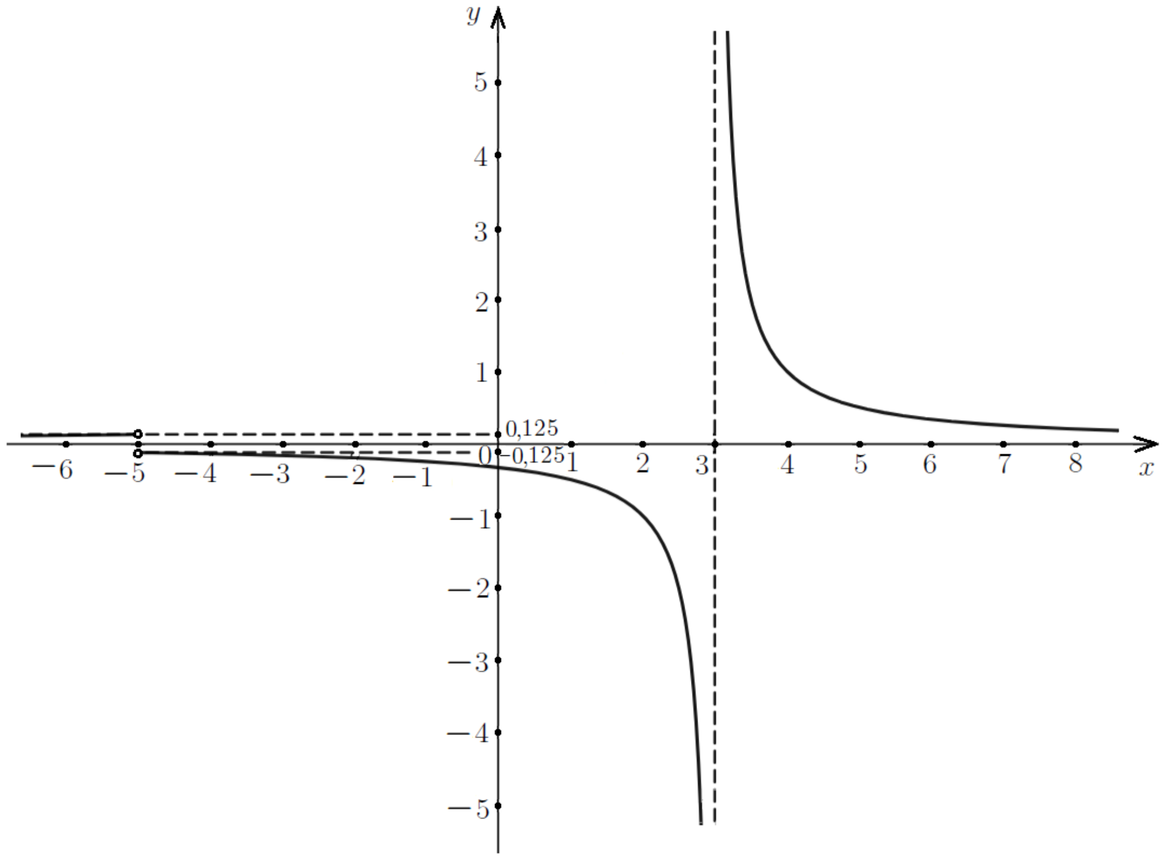


Рис. 6: График функции $f(x) = \frac{|x+5|}{x^2+2x-15}$

c) Исследовать функцию $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Элементарная функция $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = -3$ и $x = 3$. Так как выполнено условие $f(x) = f(-x)$, то функция является четной, а, значит, можно исследовать на разрыв только одну точку, например, $x = 3$. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке.

Так как $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{9}{x^2-9} = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to 3-0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = [5^{-\infty}] = 0$.

Далее $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{9}{x^2-9} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to 3+0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = [5^{+\infty}] = +\infty$.

Следовательно, точка $x = 3$, как и точка $x = -3$, является точкой разрыва 2-го рода. График функции представлен на рисунке 7.

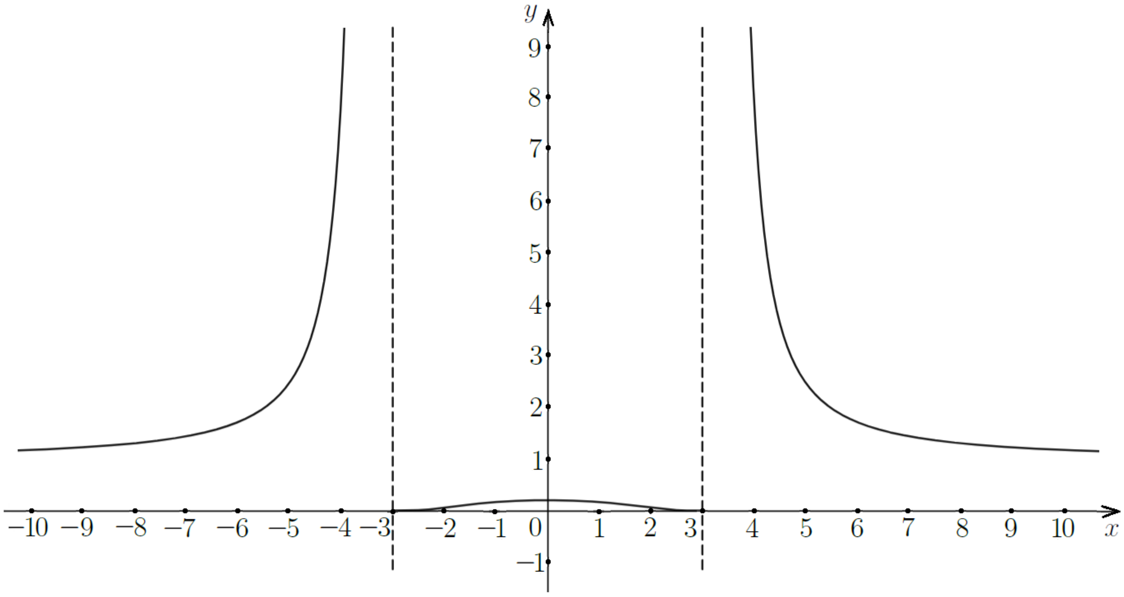


Рис. 7: График функции $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$

3.2 Варианты задания 3

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и построить её график:

1. **a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ x^3 + 1, & |x| \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

***c)** $f(x) = 3^{\frac{3}{x^2-4}}$

2. **a)** $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x}, & -1 < x \leq 0 \\ 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \frac{2|x+3|}{x+3}$

***c)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$

3. **a)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \leq 2 \\ 2 - x, & 2 < x \leq 5 \\ 2e^x, & x > 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{|x-2|}$

***c)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$

4. **a)** $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1, & x<0 \\ -x^3, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{|x+6|}$

***c)** $f(x)=\sin\frac{x}{x-2}$

5. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\le -1 \\ x+3, & |x|<1 \\ \frac{1}{x-3}, & x\ge 1 \end{cases}$

b) $f(x)=2x-\frac{|1-x|}{x-1}$

***c)** $f(x)=\cos\frac{x}{x-1}$

6. **a)** $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4 \\ \lg(x+4), & \\ -4<x<2 & \\ x+4, & x\ge 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-x-6}$

***c)** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$

7. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2x^{-2}, & x<0 \\ 2x+5, & 0\le x\le 3 \\ 2+x^2, & x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$

***c)** $f(x)=2^{\frac{1}{4-x^2}}$

8. **a)** $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{x}{2}, & x\le 0 \\ \cos\frac{x}{2}, & 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x-0{,}5\pi}, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $f(x)=3x+\frac{2|x+1|}{x+1}$

***c)** $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+2}$

9. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x\le -2 \\ -x^2, & -2<x\le -1 \\ \frac{1}{x+1}, & x>-1 \end{cases}$

b) $f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$

***c)** $f(x)=\sin\frac{x-2}{x}$

10. **a)** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x<-2 \\ |x-1|, & |x|\le 2 \\ x^2-2, & x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\frac{x^2+x-3}{|x-1|}$

***c)** $f(x)=\cos\frac{x+1}{x}$

11. **a)** $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $f(x) = x - \frac{3|x+2|}{x+2}$ ***c)** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$

12. **a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ \lg(3x+1), & 0 < x \le 3 \\ 10 - x^2, & x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \frac{|x+2|}{2x^2+3x-2}$ ***c)** $f(x) = 2^{\frac{2}{1-x^2}}$

13. **a)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x \le -1 \\ 3^{-x}, & -1 < x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \frac{3x^2-2x-5}{|x+1|}$ ***c)** $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{x-2}$

14. **a)** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ |x - 1|, & |x| < 1 \\ x^2 + 1, & x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = 2x + \frac{|x+3|}{x+3}$ ***c)** $f(x) = \sin \frac{x}{x+1}$

15. **a)** $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \le 0 \\ -x^2 - 2x + 4, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \frac{|1-x|}{3x-x^2-2}$ ***c)** $f(x) = \cos \frac{x}{x+2}$

16. **a)** $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$ ***c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$

17. **a)** $f(x) = \begin{cases} 3x^{-1}, & x \le -3 \\ 3^{x+3}, & -3 < x < 0 \\ |x + 3|, & x \ge 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \frac{x}{|x|} - 3x + 2$ ***c)** $f(x) = 2^{\frac{3}{x^2-2}}$

18. **a)** $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x\le-\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{|2-x|}{3x^2-4x-4}$ ***c)** $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x-2}{x}$

19. **a)** $f(x)=\begin{cases}3x^3-1, & x\le-1\\ x^2-3x+2, & -1<x\le2\\ 3^{\frac{1}{x-2}}, & x>2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{|x+1|}$ ***c)** $f(x)=\sin\frac{2x}{2x-1}$

20. **a)** $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+2}}, & x<-2\\ 4x+2, & -2\le x\le2\\ \frac{2}{2-x}, & x>2\end{cases}$ **b)** $f(x)=2x-\frac{|2x+1|}{2x+1}$ ***c)** $f(x)=\cos\frac{3x}{1-3x}$

21. **a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x+\pi}, & x<-\frac{\pi}{2}\\ |x|, & |x|\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2x+\pi}, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$ ***c)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3}}$

22. **a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x<-1\\ |x-1|, & |x|\le1\\ 2x, & x>1\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{x^2-x-2}{|x-1|}$ ***c)** $f(x)=3^{\frac{2}{x^2-2}}$

23. **a)** $f(x)=\begin{cases}e^x-e, & x<0\\ \ln(3x+1), & 0\le x\le1\\ e^{-x}, & x>1\end{cases}$ **b)** $f(x)=x-\frac{3(x+1)}{|x+1|}$ ***c)** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x^2}}$

24. **a)** $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x-1, & x\le0\\ |x+1|, & 0<x\le2\\ \frac{4}{2-x}, & x>2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{|x+2|}{2x^2+x-6}$ ***c)** $f(x)=4^{\frac{1}{4-x^2}}$

25. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}}, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \cos 2x, & |x|\le\frac{\pi}{2} \\ 2^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{|x-1|}$ ***c)** $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{x+1}$

26. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2^{x+\frac{\pi}{2}}, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \sin 2x, & |x|\le\frac{\pi}{2} \\ 2^{x-\frac{\pi}{2}}, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $f(x)=3x+\frac{|x-1|}{x-1}$ ***c)** $f(x)=\sin\frac{x-1}{x}$

27. **a)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-3}, & x\ge 3 \\ \frac{1}{x-3}, & 0\le x<3 \\ 3x^2+1, & x<0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-4x+3}$ ***c)** $f(x)=\cos\frac{x-2}{x}$

28. **a)** $f(x)=\begin{cases} \ln(x+2), & -1\le x\le 2 \\ 3x^2+2x-1, & x<-1 \\ 4x-8, & x>2 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{|x-1|}$ ***c)** $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-5}}$

29. **a)** $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & x\le -\pi \\ \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{2}), & |x|<\pi \\ x-\pi, & x\ge\pi \end{cases}$ **b)** $f(x)=2x-\frac{|x+3|}{x+3}$ ***c)** $f(x)=5^{\frac{1}{5-x^2}}$

30. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x-5, & x<-1 \\ \sqrt[3]{x^2}, & -1\le x\le 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{|x+3|}{x^2+3x}$ ***c)** $f(x)=\sin\frac{x+2}{4-x}$

Задание 4

4.1 Пример выполнения задания 4

a) Продифференцировать функцию $y = \arcsin e^x + \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$. Упростить полученное выражение.

Решение. Продифференцируем функцию как сумму двух функций и упростим результат:

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot \left(-2e^{2x}\right) =$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} - \frac{e^{2x}}{e^x\sqrt{1 - e^{2x}}} = 0.$$

b) Продифференцировать функцию $y = \frac{(x-4)^7 \cdot (5x+1)^3}{(5x^2+3) \cdot (\operatorname{tg} \frac{x}{10} - 4)^8}$, используя предварительное логарифмирование.

Решение. Прологарифмируем функцию, учитывая свойства логарифмов:

$$\ln y = 7\ln(x-4) + 3\ln(5x+1) - \ln(5x^2+3) - 8\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{10} - 4\right).$$

Теперь продифференцируем обе части уравнения:

$$\frac{y'}{y} = \frac{7}{x-4} + \frac{15}{5x+1} - \frac{10x}{5x^2+3} - \frac{8}{\operatorname{tg}\frac{x}{10} - 4} \cdot \frac{1}{10\cos^2\frac{x}{10}},$$

откуда

$$y' = \frac{(x-4)^7 \cdot (5x+1)^3}{(5x^2+3) \cdot (\operatorname{tg}\frac{x}{10} - 4)^8} \cdot \left(\frac{7}{x-4} + \frac{15}{5x+1} - \frac{10x}{5x^2+3} - \frac{8}{\operatorname{tg}\frac{x}{10} - 4} \cdot \frac{1}{10\cos^2\frac{x}{10}}\right).$$

c) Продифференцировать функцию $y = x^{\operatorname{arctg}(5x-2)}$.

Решение. Запишем функцию в виде показательной:

$$y = e^{\operatorname{arctg}(5x-2)\ln x},$$

а затем продифференцируем, используя теорему о производной произведения:

$$y' = e^{\operatorname{arctg}(5x-2)\ln x} \cdot \left(\frac{5}{1 + (5x-2)^2}\ln x + \operatorname{arctg}(5x-2) \cdot \frac{1}{x}\right).$$

Теперь вернемся к первоначальной форме записи функции и получим ответ:

$$y' = x^{\operatorname{arctg}(5x-2)} \cdot \left(\frac{5\ln x}{1+(5x-2)^2} + \frac{\operatorname{arctg}(5x-2)}{x} \right).$$

***d)** Найти производную функции $f(x) = \sqrt[3]{5x-2}$, пользуясь непосредственно определением производной.

Решение. Для переменной x зададим приращение $\triangle x$, тогда y получит приращение $\triangle y$:

$$y + \triangle y = \sqrt[3]{5(x+\triangle x)-2},$$

откуда

$$\triangle y = \sqrt[3]{5(x+\triangle x)-2} - \sqrt[3]{5x-2}.$$

Исходя из определения производной, найдем

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(5(x+\triangle x)-2)^{\frac{1}{3}} - (5x-2)^{\frac{1}{3}}}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{5x-2+5\triangle x}{5x-2} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{5\triangle x}{5x-2} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{\triangle x}.$$

Заменим бесконечно малую функцию $\left(1+\frac{5\triangle x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$ на эквивалентную $\frac{1}{3} \cdot \frac{5\triangle x}{5x-2}$ и получим

$$y' = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5\triangle x}{5x-2}}{\triangle x} = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-2)^2}}.$$

***e)** Написать и доказать по индукции формулу для производной n-го порядка функции $y = \frac{1}{x+5}$.

Решение. Продифференцируем функцию несколько раз, чтобы сделать предположение об общем виде формулы для производной n-го порядка:

$$y' = \frac{-1}{(x+5)^2}, \quad y'' = \frac{(-1)(-2)}{(x+5)^3}, \quad y''' = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(x+5)^4}, \; \ldots .$$

Индукционное предположение: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$.

База индукции уже была проверена при $n = 1,\ 2,\ 3$.
Докажем переход $n \to n+1$.

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left((-1)^n \cdot n!(x+5)^{-n-1}\right)' = (-1)^n \cdot n!(-n-1)(x+5)^{-n-2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(x+5)^{n+2}}.$$

Формула сохранила свою структуру и для $n+1$ тоже, то есть мы доказали индукционный переход. Следовательно, на основании аксиомы математической индукции утверждение доказано.

4.2 Варианты задания 4

а) Продифференцировать функцию:

1. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right)$

2. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3x}}{1-x}$

3. $y = x - \ln(1+e^x) - \frac{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}} - \left(\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}\right)^2$

4. $y = \frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sin x}{2} - \frac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\right)$

5. $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$

6. $y = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{\ln(1-x+x^2)}{x}$

7. $y = \frac{x\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{3x^2+2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3x^2+2}$

8. $y = \ln\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+7} - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}$

9. $y = x\arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

10. $y = \frac{\arccos(x\sqrt{x})}{3(1-x^3)} + \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}$

11. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x - \sin x}$

12. $y=\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}$

13. $y=\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\cdot\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

14. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}$

15. $y=\frac{1}{14}\ln\frac{(x+1)^2}{9x^2+6x+4}+\frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}$

16. $y=\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sin^2 x\right)$

17. $y=(x-1)\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$

18. $y=\frac{1}{10\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arcsin x}{10(1+5x^2)}$

19. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+2x}+x}{\sqrt[4]{1+2x}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}$

20. $y=x-e^{-x}\cdot\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

21. $y=\ln(1+x)-3\ \ln\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}$

22. $y=\frac{1}{8}\ln(2x^2-x+2)+\frac{\sqrt{15}}{12}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+\frac{3}{2}\ln(x-2)+\frac{x}{2}$

23. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\arcsin e^x+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

24. $y=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$

25. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}$

26. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x}$

27. $y=x-\frac{1}{2}\ln\left((1+e^x)\sqrt{1+e^{2x}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x$

28. $y=\sqrt{e^{2x}+e^{4x}-1}+\ln\left(2+e^x+\sqrt{e^{2x}+e^{4x}-1}\right)-\arcsin\frac{2-e^{-x}}{\sqrt{5}}$

29. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$

30. $y=e^x\cdot\arcsin e^x+\sqrt{1-e^{2x}}$

b) Продифференцировать функцию, используя предварительное логарифмирование:

1. $y=\frac{(2x+3)^5(\sin 3x+1)^7}{(3x^3-2)(7x-1)^6}$

2. $y=\sqrt[10]{\frac{(2x-1)^9(x+3)^3}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin^7(x+1)}}$

3. $y=\frac{(\cos^3 5x-2x)^4(x^2+2)^3}{\arcsin^2 x\cdot(3x^3+2x+1)^5}$

4. $y=\sqrt[11]{\frac{\arccos^5(3x+1)\cdot(x^2+1)^2}{(x^4+x^3)(7x+3)^2}}$

5. $y=\frac{(x^2+3)^5(\mathrm{arctg}3x+1)^2}{(\sqrt[3]{x}-2)(5x-2)^4}$

6. $y=\frac{\sqrt[3]{(2x^3+3)^5}\cos^7(3x-2)}{(3x-1)^5(6x^2+3x+1)^3}$

7. $y=\frac{(e^{2x}+1)^3(x^5+3x)^4}{\arcsin^3 2x(2x^3+x^2)^5}$

8. $y=\sqrt[12]{\frac{\arcsin^5 3x\cdot(x^2+5)^7}{(6x^3-2)^3(2^x+1)^2}}$

9. $y=\frac{\mathrm{ctg}^3(0{,}2x)\cdot(4\sqrt{x}+2)^2}{(x^2+\sqrt{10})^7(3x^5+4x^2+1)^4}$

10. $y=\sqrt[15]{\frac{\sin^6(3x-4)\cdot\cos^2(2x-1)}{(\sqrt{x}-3)^4(3x^6+2)^3}}$

11. $y=\frac{(7x+2)^5(3x^2-1)^3}{(\cos^2 5x+1)(2\sqrt[5]{x}-1)^2}$

12. $y=\sqrt[11]{\frac{(5x+2)^2(x-7)^3}{\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin^5(2x+1)}}$

13. $y=\frac{(\sin^2(7x)+2)^3(x^4-1)^2}{\mathrm{arctg}^7(6x-1)(x^3+2x+1)^4}$

14. $y=\sqrt[17]{\frac{(\sqrt[3]{x}+2x)(2x-3)^3}{\mathrm{tg}^6(7x+1)\cdot(x+1)^2}}$

15. $y=\frac{(2x^5-3)^2(\mathrm{arcctg}(5x)-\sqrt{3})^2}{(3x+2)^2(x-2)^5}$

16. $y=\frac{\sqrt[7]{(x^2+3)^2}\cdot\sin^5(2x+1)}{(4x+1)^3(3x^2+2\sqrt{x}+1)^4}$

17. $y=\frac{(3^{5x}+1)^4(x^3+2)^2}{\arccos^3(2x+1)\cdot(\sqrt{x}+2)^5}$

18. $y=\sqrt[19]{\frac{(2x+1)^5(3x^2+2)^7}{\mathrm{arctg}^5(0{,}3x)\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^2}}$

19. $y=\frac{\mathrm{tg}^3(0{,}5x)\cdot(3\sqrt[5]{x}+2)^2}{(2x^7+\sqrt{3})^2(3^x+x^2)}$

20. $y=\sqrt[17]{\frac{\cos^7(0{,}2x)\cdot\mathrm{tg}^2(3x)}{(\sqrt[5]{x}+2)^3(x^8+3)^2}}$

21. $y=\frac{(3x+1)^5(2x^3+5)^7}{(\sin^3 5x+2)(3\sqrt[7]{x}+2)^4}$

22. $y=\sqrt[9]{\frac{(7x^2+3)^2(x+\sqrt{5})^4}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\arccos^2(3x-2)}}$

23. $y=\frac{(\cos^3(5x)+2)^2(x^5+2)^3}{\mathrm{arcctg}(2\sqrt{x})\cdot(x^4+3\sqrt[4]{x})^2}$

24. $y=\sqrt[7]{\frac{(6x+5)^3(\sqrt[4]{x}+3)^2}{\sin^5(0{,}3x)\cdot(2x-\sqrt{7})^2}}$

25. $y=\frac{(3x^4-2)^{11}(\mathrm{arctg}^3(2x+1))}{(5x-1)^3(x+3)^6}$

26. $y=\frac{\sqrt[9]{(x^3+3)^2}\cdot\cos^7(2x-1)}{(3\sqrt{x}-1)^2(5x^3+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2})^2}$

27. $y=\frac{(5^{\sqrt{x}}+2)^3(x^4-\sqrt{5})^2}{\arcsin^5(\sqrt{2x})(\sqrt[3]{x}+2)^4}$

28. $y=\sqrt[5]{\frac{(3x+1)^3(2\sqrt{x}+5)^4}{\mathrm{arctg}^3(0{,}1x)\cdot(\sqrt[5]{x}+1)^3}}$

29. $y=\frac{\mathrm{ctg}^5(2\sqrt{x})\cdot(7\sqrt[4]{x^3}+2)^2}{(3x^5+2)^2(7^x-2x)^3}$

30. $y=\sqrt[7]{\frac{\sin^5(2x+3)\mathrm{ctg}^2(x+1)}{(x^9+3)^2(\sqrt[7]{x^3}-\sqrt{3})^3}}$

c) Продифференцировать функцию:

1. $y = x^{\mathrm{tg}(2x+1)}$

2. $y = \sqrt[x]{3x^7 - 2}$

3. $y = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^x$

4. $y = (2x+1)^{2^x}$

5. $y = x^{3^x+x}$

6. $y = (\sin 2x)^{0,5x}$

7. $y = 2x^{x^3-x}$

8. $y = (\ln(x^2+2))^x$

9. $y = (5x+1)^{\frac{1}{3x+2}}$

10. $y = (\sin x^2)^{\cos 2x}$

11. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\sin 2x}$

12. $y = (\cos x^2)^{\frac{1}{x+2}}$

13. $y = (x^2+3)^{\frac{1}{\cos 3x}}$

14. $y = (7x+1)^{\arcsin(\sqrt{2}x)}$

15. $y = (4x-3)^{\arccos(\sqrt{3}x)}$

16. $y = (2x)^{\mathrm{ctg}\, 3x}$

17. $y = \sqrt[2x]{x^5+2}$

18. $y = (2x)^{2^x}$

19. $y = (x^3+x)^{3x}$

20. $y = (3x+1)^{\mathrm{arcctg}(\sqrt{5}x)}$

21. $y = (\ln(x+2))^{3^x}$

22. $y = (x^3)^{\mathrm{arctg}(2\sqrt{x})}$

23. $y = (3x)^{e^{x^3}}$

24. $y = (2x-1)^{\sin x^5}$

25. $y = (\sqrt{x}+2)^{(\sqrt{3}x-1)}$

26. $y = (\sqrt[3]{x})^{\mathrm{ctg}(3x)}$

27. $y = (4x^5-5)^{\mathrm{tg}(\sqrt{x})}$

28. $y = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\sqrt{x-2}}$

29. $y = (\mathrm{tg}\, 5x)^{5^x}$

30. $y = (6x)^{\cos x^6}$

***d)** Найти производную функции, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = \sqrt{5x^2 - x}$

2. $y = e^{3x-2}$

3. $y = \sin(4x+3)$

4. $y = \log_2(5x+2)$

5. $y = 7^{2x-1}$

6. $y = \frac{1}{3(3x-7)}$

7. $y = (2x-5)^3$

8. $y = e^{\sin(2x-1)}$

9. $y = \mathrm{tg}(\frac{3x}{4})$

10. $y = 3(x-2)^{-2}$

11. $y = \sqrt{6x - x^2}$

12. $y = e^{7-2x}$

13. $y = \cos(0,5x - 3)$

14. $y = \log_5(2x-1)$

15. $y = 9^{3-2x}$

16. $y = \frac{1}{4(4x+3)}$

17. $y = (3x+1)^3$

18. $y = e^{\cos(4x+1)}$

19. $y = \mathrm{ctg}\frac{4x}{5}$

20. $y = \frac{5}{(x+3)^2}$

21. $y = \sqrt{2x^2 + 5x}$

22. $y = e^{0,5x+9}$

23. $y = \sin(7-3x)$

24. $y = \log_3(4-3x)$

25. $y = 8^{6x+1}$

26. $y = \frac{1}{7(5-7x)}$

27. $y = (3-2x)^3$

28. $y = e^{\sin(3-2x)}$

29. $y = \mathrm{tg}\frac{2x}{7}$

30. $y = \frac{4}{(x-4)^2}$

***е)** Написать и доказать по индукции формулу для производной n-го порядка указанной функции:

1. $y = \sqrt[7]{e^{3x+1}}$

2. $y = \log_3(4x-1)$

3. $y = \frac{7x}{2x^2-5x-3}$

4. $y = 5^{6x+7}$

5. $y = \frac{4x-1}{11\,(3x+2)}$

6. $y = \cos(2x-1) + \sin(3x+1)$

7. $y = \frac{-x^2}{(2x+1)(x+1)^2}$

8. $y = (x-2)^3\,\ln(x-2)$

9. $y = (x+3)e^{x-3}$

10. $y = \frac{4x-7}{2x^2+3x-2}$

11. $y = \sqrt[5]{e^{2-3x}}$

12. $y = \log_2(5x+3)$

13. $y = \frac{-14x}{3x^2+16x+5}$

14. $y = 7^{3x-2}$

15. $y = \frac{9x+1}{23\,(5x-2)}$

16. $y = \cos(0,5x+1) - \sin(4x-1)$

17. $y = \frac{x^2}{(3-2x)(x-3)^2}$

18. $y = (x+3)^3\, \ln(x+3)$

19. $y = (x-2)e^{x+2}$

20. $y = \frac{11x-1}{3x^2-5x-2}$

21. $y = \sqrt[3]{e^{7x-1}}$

22. $y = \log_4(2x-3)$

23. $y = \frac{5x}{2x^2+9x-18}$

24. $y = 3^{4x+5}$

25. $y = \frac{7x-2}{15\,(4x+1)}$

26. $y = \sin(\frac{x}{5}+1) - \cos(3x-1)$

27. $y = \frac{x^2}{(1-2x)(x-1)^2}$

28. $y = (x+1)^3\, \ln(x+1)$

29. $y = (x+1)e^{x-1}$

30. $y = \frac{x+2}{2x^2-7x+5}$

Задание 5

5.1 Пример выполнения задания 5

a) Найти предел $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{5}{1+x^5}\right)$, используя правило Лопиталя.

Решение. Предел представляет собой неопределённость вида $[\infty-\infty]$, поэтому преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к 0. Затем дважды применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to-1}\frac{3(1+x^5)-5(1+x^3)}{(1+x^3)\,(1+x^5)}=\lim_{x\to-1}\frac{\big(3(1+x^5)-5(1+x^3)\big)'}{\big((1+x^3)\,(1+x^5)\big)'}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{15x^4-15x^2}{3x^2\cdot(1+x^5)+(1+x^3)\cdot 5x^4}=\lim_{x\to-1}\frac{15x^2\,(x^2-1)}{x^2\cdot(3(1+x^5)+(1+x^3)\cdot 5x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\big(15(x^2-1)\big)'}{(3(1+x^5)+(1+x^3)\cdot 5x^2)'}=\lim_{x\to-1}\frac{30x}{15x^4+3x^2\cdot 5x^2+(1+x^3)\cdot 10x}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{30x}{40x^4+10x}=\lim_{x\to-1}\frac{30}{40x^3+10}=-1.$$

b) Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$, используя правило Лопиталя.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $[1^\infty]$. Обозначим искомый предел через a:

$$a=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$$

и прологарифмируем функцию:

$$\ln a=\ln\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=3\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)\right)'}{(x)'}=$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\frac{2}{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=3\lim_{x\to0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{6}{\pi}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции найдем предел самой функции:

$$a=e^{-\frac{6}{\pi}}.$$

5.2 Варианты задания 5

а) Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{\ln(x+2)}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{6}{1-x^3}-\frac{10}{1-x^5}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{e^x}{e^x-e}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{\operatorname{arctg}(x-1)}-\frac{2}{x-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^7+1}-\frac{3}{x^{21}+1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{\ln(x-2)}-\frac{x}{x-3}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x+\sin^2 x}-\frac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{3}{x^3+3x}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^9-1}-\frac{4}{x^{12}-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2e^x}{x^2-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{1-x^5}-\frac{6}{x^{15}-1}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{4}{\ln(x+4)}-\frac{4x}{x+3}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{5}{x^5+1}-\frac{7}{x^7+1}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{3}{\ln(x-1)}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{4}{1-x^4}-\frac{10}{x^{10}-1}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{x^2}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}(x+1)}-\frac{1}{x+1}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{7}{x^7+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\frac{2}{\ln(x+5)}-\frac{2x}{x+4}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{1}{x^2-\frac{\pi^2}{16}}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{x^2+x}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{6}{x^4-1}-\frac{9}{1-x^6}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin x^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x}{2x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{11}{x^{11}+1}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{2x}{x-3}-\frac{2}{\ln(x-2)}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^{10}-1}-\frac{3}{x^{15}-1}\right)$

b) Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{(e^x-5x-1)^{-1}}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 2x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}(e^{-x}+x)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x)^{2x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} 2x)^{3x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\cos^{-1}(0{,}5\pi x)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{(2e^x-2+3x)^{-1}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)^{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{tg}^{-1} x}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty}(3^{-x}+3x)^{\frac{2}{3x}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)^{\sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{10}{\sqrt{x^2+x}}\right)^{x-10}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}(x-5)^{\frac{5}{\ln x}}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{x}{x+1}}$

20. $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\sin^{-1}(\pi x)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{(3e^x-3+5x)^{-1}}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x+2^{-x})^{(3x+2)^{-1}}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}(2-2^x+3x)^{\frac{1}{2x}}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty}(5^{-x}+3x)^{\frac{2}{5x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\frac{x}{x+1}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{(x^2+3x)^{-1}}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty}(3x+2)^{\frac{4}{\ln x}}$

29. $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{2}{3\sin(\pi x)}}$

30. $\lim\limits_{x\to \infty}(4^x+2^{-x})^{3(2x-5)^{-1}}$

Задание 6

6.1 Пример выполнения задания 6

Провести полное исследование функций и построить их графики. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.

2. Проверить, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и указать, как эти свойства влияют на вид графика функции.

3. Исследовать функцию с помощью первой производной: найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

4. Исследовать функцию с помощью второй производной: найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции.

5. Проверить наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

6. Найти точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найти значения функции в некоторых дополнительных точках.

а) Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2-3}{x-2}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точки $x = 2$.

2. Функция не является периодической. Проверим чётность (нечётность):

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x - 2} = \frac{x^2 - 3}{-x - 2}; \quad f(-x) \neq f(x); \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной — график функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

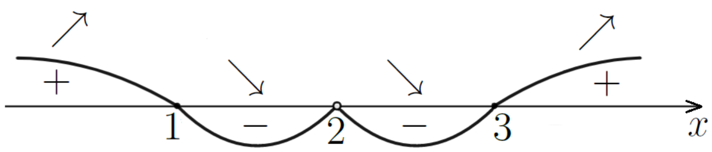
3. Найдём первую производную функции $y = \frac{x^2-3}{x-2}$:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2}\right)' = \frac{(x^2 - 3)'\,(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x - 2) - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}.$$

Тогда $y' = 0$ при $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Проверим знаки производной:



Значит, функция возрастает при $x \in (-\infty,\ 1];\ \ [3,\ +\infty)$ и убывает при $x \in [1,\ 2);\ \ (2,\ 3]$. При переходе через стационарную точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, эта точка – точка максимума и $y_{max} = y(1) = 2$. При переходе через стационарную точку $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, эта точка – точка минимума и $y_{min} = y(3) = 6$.

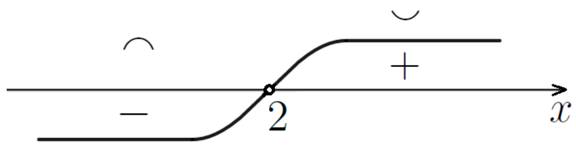
4. Найдём вторую производную функции $y = \frac{x^2-3}{x-2}$:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2}\right)'' = \left(\frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3)}{(x - 2)^2}\right)' = \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - (x^2-4x+3)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)\cdot(x-2) - 2x^2+8x-6}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции:



Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty,\ 2)$ и выпукла вниз при $x \in (2,\ +\infty)$. Точка $x = 2$ не принадлежит области определения функции, а значит, не является и точкой перегиба функции.

5. Так как функция не является непрерывной в точке $x = 2$, проверим в этой точке наличие вертикальной асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-3}{x-2} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-3}{x-2} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty,$$

то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = \pm\infty.$$

Следовательно, горизонтальной асимптоты нет. Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x\,(x-2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-2} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3-x\,(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ – наклонная асимптота.

6. Находим точки пересечения функции с координатными осями:
$OX:\ y=\frac{x^2-3}{x-2}=0$ при $x=\pm\sqrt{3}$, $OY:\ y(0)=\frac{3}{2}$.
Дополнительные точки: $y(4)=6,5$; $y(-4)\approx -2,17$.

График функции представлен на рисунке 8:

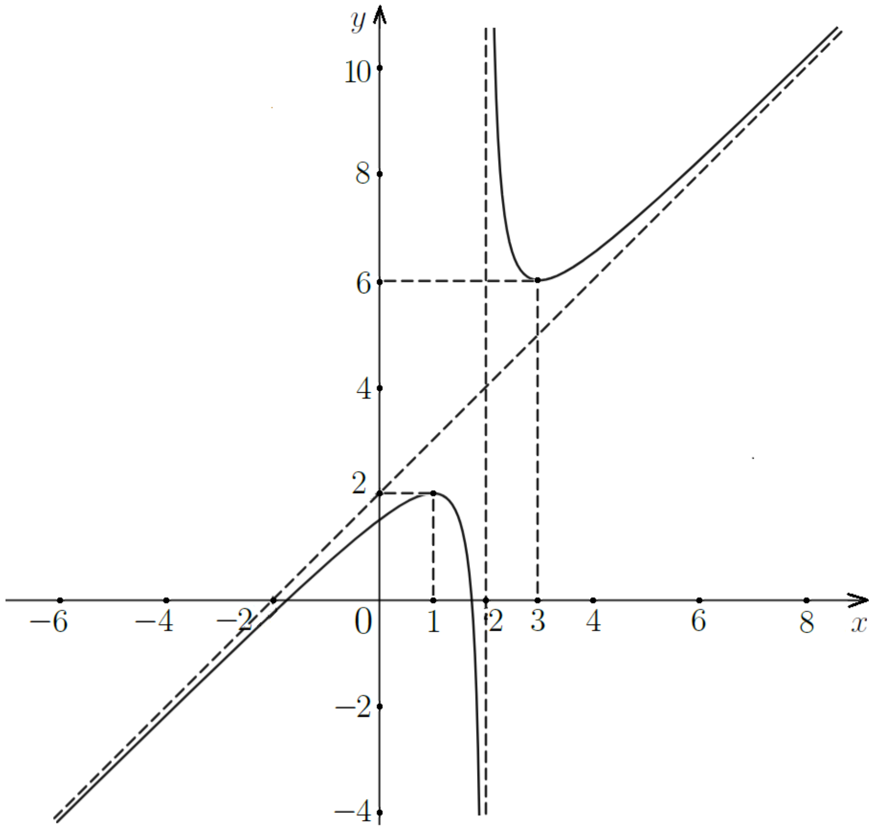


Рис. 8: График функции $y=\frac{x^2-3}{x-2}$

***b)** Провести полное исследование функции $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точек x, удовлетворяющих уравнению:

$$\sin x+\cos x=0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x=-1 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

2. Функция является периодической, её период $T=2\pi$.

Проверим чётность (нечётность):

$$f(-x) = \frac{1}{\sin(-x) + \cos(-x)} = \frac{1}{\cos x - \sin x};$$

$f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной — график функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

3. Найдём первую производную функции $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$:

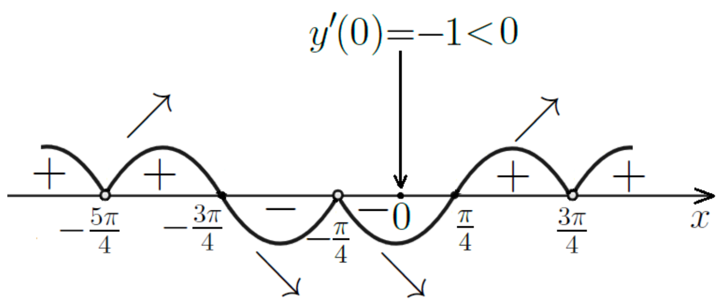
$$y' = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x}\right)' = -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Тогда $y' = 0$ при

$$\sin x - \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Определим знаки производной на интервале длины $T = 2\pi$: $x \in \left(-\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$. Для этого посчитаем значение производной $y'(x)$ в какой-нибудь точке, например, в точке $x = 0$. Тогда на всей остальной оси знаки производной можно будет расставить автоматически (так как мы знаем, что в точках $\frac{\pi}{4} + \pi k$ производная меняет знак).

$$y'(0) = \frac{\sin 0 - \cos 0}{(\sin 0 + \cos 0)^2} = -1 < 0.$$



Значит, функция возрастает при $x \in \left(-\frac{5\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$ и убывает при $x \in \left[-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$. При переходе через стационарную точку $x = -\frac{3\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, эта точка – точка максимума:

$$y_{max} = y\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

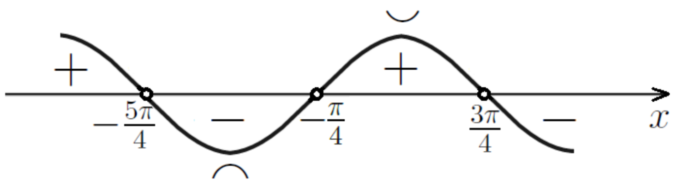
При переходе через стационарную точку $x = \frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, эта точка – точка минимума:

$$y_{min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Найдём вторую производную функции $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$:

$$y'' = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x}\right)'' = \left(\frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}\right)' = \frac{3 - 2\sin x\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции между точками разрыва (так как числитель второй производной в нуль не обращается ни при каких x):



Функция выпукла вверх при $x \in \left(-\frac{5\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4}\right)$ и выпукла вниз при $x \in \left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$. Точка $x = -\frac{\pi}{4}$ не принадлежит области определения функции, а значит, не является и точкой перегиба функции.

5. Так как функция не является непрерывной в точках $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, проверим в этой точке наличие вертикальных асимптот:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4} - 0} \frac{1}{\sin x + \cos x} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4} + 0} \frac{1}{\sin x + \cos x} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

Значит, прямая $x = -\frac{\pi}{4}$ является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

горизонтальной асимптоты нет, так как предела не существует.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(\sin x + \cos x)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{\sin x + \cos x} \right).$$

Предела не существует. Значит, наклонных асимптот нет.

6. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

$OX: \ y = \frac{1}{\sin x + \cos x} \neq 0$ ни при каких x, $OY: \ y(0) = \frac{1}{\sin 0 + \cos 0} = 1$.

График функции представлен на рисунке 9:

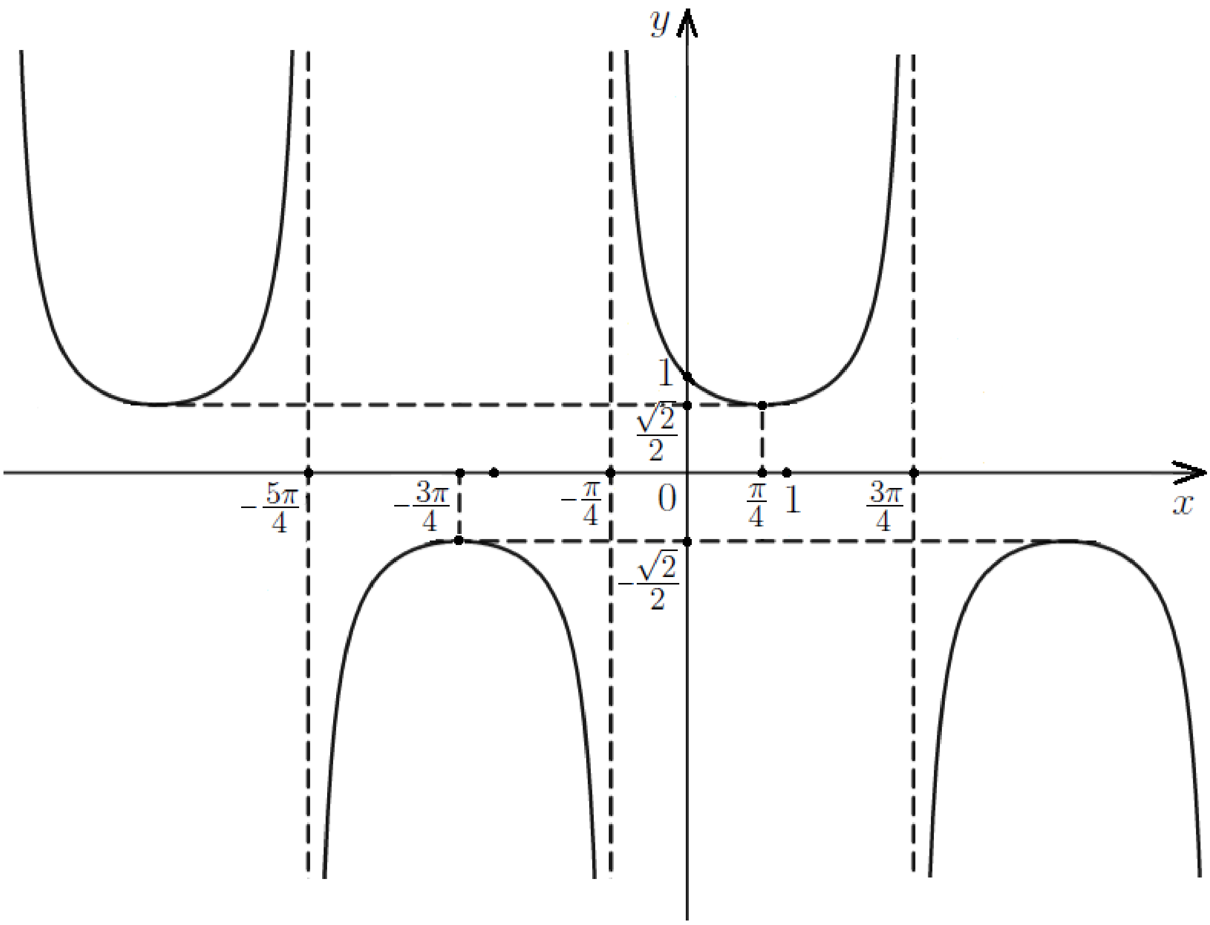


Рис. 9: График функции $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

***c)** Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

Проверим чётность (нечётность):

$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} \;\Rightarrow\; f(-x) = f(x).$$

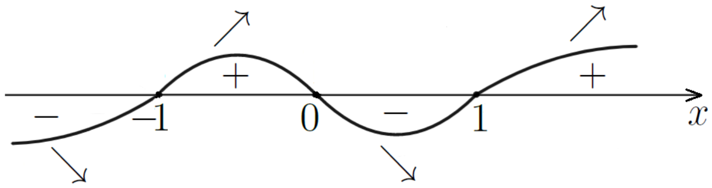
Следовательно, функция является чётной, её график симметричен относительно оси ординат.

3. Найдём первую производную функции $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$:

$$y' = \left(\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Производная $y' = 0$ при $x = 0$ и разрывна при $x = \pm 1$. Так как сама функция непрерывна в этих точках, то они являются критическими точками — при выполнении достаточного условия экстремума (смене знака производной при переходе через эти точки) в них может быть экстремум в виде пика.

Проверим знаки производной:



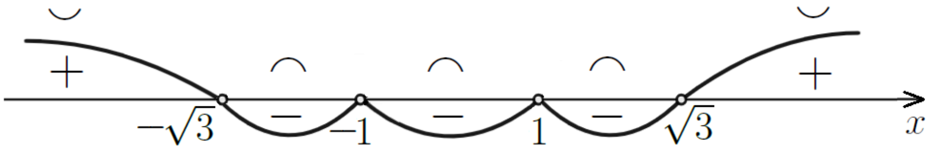
Значит, функция возрастает при $x \in [-1,\ 0]; \quad [1,\ +\infty)$ и убывает при $x \in (-\infty,\ -1]; \quad [0;\ 1]$. При переходе через стационарную точку $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, эта точка – точка максимума и $y_{max} = y(0) = 1$. При переходе через критические точки $x = \pm 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = \pm 1$ – точки минимума в виде пика и $y_{min} = y(\pm 1) = 0$.

4. Найдём вторую производную функции $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$:

$$y'' = \left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)'' = \left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\right)' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3(x^2-1) - 2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^4}}.$$

Проверим знаки второй производной функции при переходе через точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ и $x_{3,4} = \pm 1$:



Функция выпукла вверх при $x \in (-\sqrt{3},\ -1)$; $(-1,\ 1)$; $(1,\ \sqrt{3})$ и выпукла вниз при $x \in (-\infty,\ -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3},\ +\infty)$. Точки $(-\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4})$ являются точками перегиба функции.

5. Так как функция является непрерывной везде на числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty.$$

Следовательно, горизонтальной асимптоты нет. Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty.$$

Значит, наклонных асимптот нет.

6. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

$OX:\ y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0$ при $x = \pm 1$, $\quad OY:\ y(0) = 1$.

График функции представлен на рисунке 10:

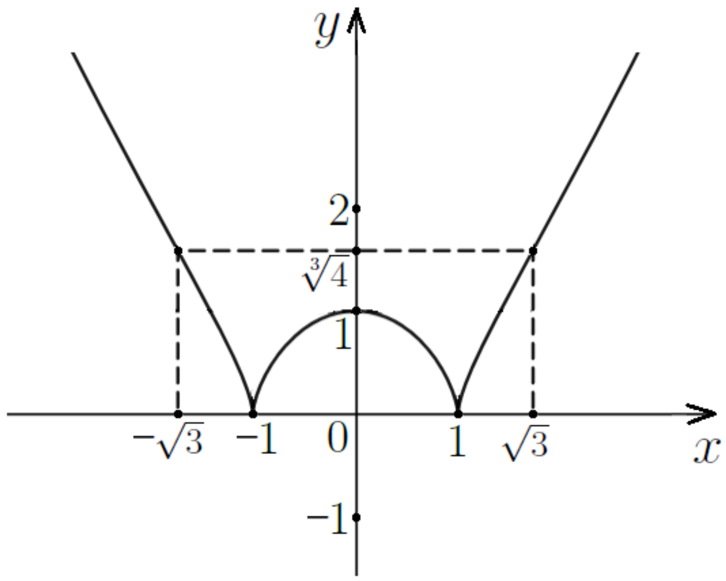


Рис. 10: График функции $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

6.2 Варианты задания 6

а) Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y = \frac{x^3-27x+54}{x^3}$

2. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

3. $y = \frac{x^3-32}{x^2}$

4. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

5. $y = \frac{x^2}{4x^2-1}$

6. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$

7. $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$

8. $y = \frac{2x^3-3x+1}{x^3}$

9. $y = \frac{2x^3+x^2+1}{x^2}$

10. $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$

11. $y = \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$

12. $y = \frac{5x}{4-x^2}$

13. $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$

14. $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$

15. $y = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3$

16. $y = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$

17. $y = \frac{13-4x-x^2}{4x+3}$

18. $y = \frac{x^3}{x^4-1}$

19. $y = \frac{2x^2+4x+2}{2-x}$

20. $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

21. $y = \frac{12-3x^2}{x^2+12}$

22. $y = \frac{4x^2+9}{4x+8}$

23. $y = \frac{(x^2-4)\,x}{3x^2-4}$

24. $y = \frac{(x^2-5)\,x}{5-3x^2}$

25. $y = \frac{3x^2-7}{2x+1}$

26. $y = \frac{2x^3-2x}{x^4-1}$

27. $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

28. $y = \frac{x^3}{9\,(x-3)^2}$

29. $y = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$

30. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

***b)** Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y = 5x\,\sqrt[3]{(x-1)^2}$

2. $y = \cos x + \frac{1}{\cos x}$

3. $y = 2x + 4 - 3\,\sqrt[3]{(x+2)^2}$

4. $y = 0,5e^{\sqrt{2}\cos x}$

5. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$

6. $y = \sqrt[3]{1+\sin x}$

7. $y = 2\,\sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$

8. $y = \frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$

9. $y = \sqrt[3]{8-x^3}$

10. $y = \ln(2\cos^2 x)$

11. $y = (x+2)\,\sqrt[3]{(1-x)^2}$

12. $y = 2x - \sin\frac{x}{2}$

13. $y = 3\,\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x$

14. $y = \sqrt[3]{1+\cos x}$

15. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}$

16. $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

17. $y = \sqrt[3]{(x^2+5x)^2}$

18. $y = \sin x\,(1-\cos x)$

19. $y = -\sqrt[3]{(x^2-6x+5)^2}$

20. $y = \frac{10\sin x}{2+\cos x}$

21. $y = \frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$

22. $y = (2+\sin x)\cos x$

23. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}\,(x-2)^3$

24. $y = \sqrt[3]{1-\cos x}$

25. $y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}$

26. $y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{2}}$

27. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^2}}$

28. $y = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

29. $y = (4-x)\,\sqrt[3]{x}$

30. $y = \ln(\sin x) + \sin x$

Задание 7

7.1 Пример выполнения задания 7

a) Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 20. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

Решение. По условию задачи $x + y = 20$, поэтому $y = 20 - x$ и можно составить функцию $f(x) = x^3 \cdot (20 - x)$, которую будем исследовать на экстремум. Найдём производную $y' = (20x^3 - x^4)' = 60x^2 - 4x^3$. Приравняем эту производную к нулю и получим уравнение $4x^2 \cdot (15 - x) = 0$. Корни этого уравнения $x = 0$ и $x = 15$ дадут подозрительные на экстремум точки функции. В точке $x = 15$ производная меняет знак с "+" на "$-$", значит, это точка максимума. Тогда искомые значения чисел $x = 15$ и $y = 5$.

b) Определите наибольшее отклонение от нуля функции $y = x + \sin 2x$ на отрезке $[0,\ \pi]$.

Решение. Для нахождения наибольшего отклонения от нуля функции на отрезке $[a,\ b]$ нужно из значений функции $f(x)$ на концах отрезка и в точках экстремума, принадлежащих отрезку, выбрать наибольшее по модулю. Найдем значения функции на концах отрезка:
$y(0) = 0;\ y(\pi) = \pi$. Далее продифференцируем функцию: $y' = 1+2\cos 2x$ и приравняем полученную производную к нулю, откуда получим:

$$1+2\cos 2x = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отрезку $[0,\ \pi]$ принадлежат две точки из найденных, а именно, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$. Вычислим в них значения функции:
$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},\quad y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Среди четырех полученных значений функции выберем наибольшее по модулю: $y(\pi) = \pi$.

c) Криволинейная трапеция ограничена кривой $y = x^2 + 2$ и отрезками прямых $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Решение. Обозначим искомую точку через x_0 и найдём значение функции в этой точке $y(x_0) = x_0^2 + 2$. Далее вычислим значение производной функции в этой точке: $y' = 2x$ и $y'(x_0) = 2x_0$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. Основаниями трапеции служат отрезки $y(1)$ и $y(5)$, которые отсекает касательная на лучах $x = 1$ и $x = 5$. Высота трапеции равна разности абсцисс прямых $x = 5$ и $x = 1$, то есть равна 4. Вычислим $y(1)$ и $y(5)$ для касательной:

$$y(1) = x_0^2 + 2 + 2x_0 \cdot (x - x_0)\Big|_{x=1} = x_0^2 + 2 + 2x_0 \cdot (1 - x_0) = 2 + 2x_0 - x_0^2,$$

$$y(5) = x_0^2 + 2 + 2x_0 \cdot (x - x_0)\Big|_{x=5} = x_0^2 + 2 + 2x_0 \cdot (5 - x_0) = 2 + 10x_0 - x_0^2.$$

Теперь найдем площадь трапеции:

$$S = \frac{y(1) + y(5)}{2} \cdot 4 = 2(4 + 12x_0 - 2x_0^2).$$

Найдем, при каком x_0 будет достигнут максимум площади обычной трапеции. Для этого приравняем производную $\frac{dS}{dx_0}$ к нулю:

$$S'_{x_0} = 24 - 8x_0 = 0 \iff x_0 = 3.$$

Тогда уравнение касательной примет вид:

$$y = y(3) + y'(3)(x - 3) \iff y = \left(x^2 + 2\right)\Big|_{x=3} + 2x\Big|_{x=3} \cdot (x - 3) \iff$$

$$\iff y = 3^2 + 2 + 2 \cdot 3(x - 3) \iff y = 11 + 6(x - 3) \iff y = 6x - 7.$$

Ответ: касательную следует провести в точке $x_0 = 3$, уравнение касательной: $y = 6x - 7$.

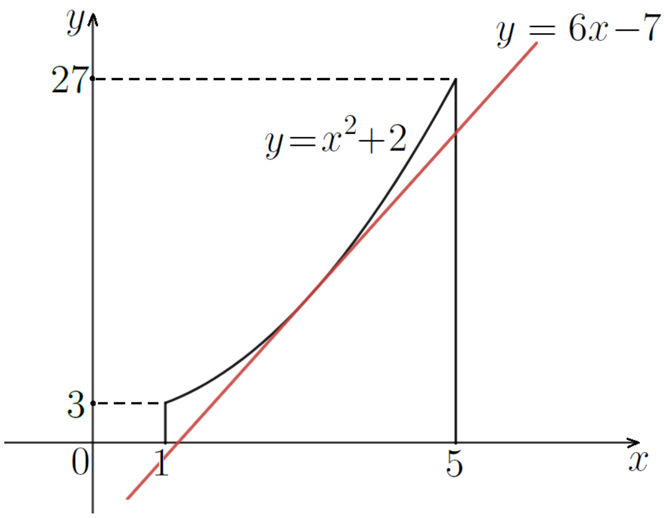


Рис. 11: Касательная прямая к криволинейной трапеции

7.2 Варианты задания 7

а) Решите задачу:

1. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 15. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

2. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 16. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?

3. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 18$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?

4. Известно, что сумма двух положительных чисел $2x$ и y равна 15. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?

5. Известно, что удвоенное произведение двух положительных чисел x и y равно 18. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?

6. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 50$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?

7. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x + 3y = 12$. При каких значениях x и y величина xy^3 будет наибольшей?

8. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2y = 2$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2 + 4)$ будет наименьшей?

9. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 27$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?

10. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x + y = 15$. При каких значениях x и y величина x^4y будет наибольшей?

11. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2y = 3$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2 + 9)$ будет наименьшей?

12. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 48$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

13. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x + 2y = 3$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

14. Для двух положительных чисел x и y известно, что $xy^2 = 5$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2 + 25)$ будет наименьшей?

15. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 32$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?

16. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 21. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?

17. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 25. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?

18. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 72$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?

19. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x + 2y = 36$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?

20. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2y = 1$. При каких значениях x и y величина $x^2 + 9y$ будет наименьшей?

21. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 8$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?

22. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x + y = 18$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?

23. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3y = 4$. При каких значениях x и y величина $y(x^4 + 12)$ будет наименьшей?

24. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 48$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?

25. Для двух положительных чисел x и y известно, что $6x + y = 8$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

26. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3y^2 = 4$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2 + 1)$ будет наименьшей?

27. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 15$. При каких значениях x и y величина x^3y^2 будет наибольшей?

28. Для двух положительных чисел x и y известно, что $5x + y = 60$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

29. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2y^3 = 16$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2 + 4)$ будет наименьшей?

30. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2 + y^2 = 96$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?

b) Определите наибольшее отклонение от нуля функции на отрезке:

1. $y = x + \sin 2x, \quad [\pi,\ 2\pi]$

2. $y = \operatorname{tg} x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$

3. $y = e^x \cos x, \quad [0,\ \pi]$

4. $y = e^{4x} \operatorname{tg} x, \quad \left[-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$

5. $y = \operatorname{tg} 4x - 16x, \quad \left[-\frac{\pi}{16},\ \frac{\pi}{24}\right]$

6. $y = x + \cos 2x, \quad [0,\ \pi]$

7. $y = \operatorname{ctg} x + 2x, \quad \left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$

8. $y = e^x \sin x, \quad [0,\ \pi]$

9. $y = x - \cos 2x, \quad [0,\ \pi]$

10. $y = \operatorname{tg} x - x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$

11. $y = e^{-x} \cos x, \quad [0,\ \pi]$

12. $y = \sqrt{3}x + \sin 2x, \quad [\pi,\ 2\pi]$

13. $y = e^{2x} \operatorname{tg} 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{6},\ 0\right]$

14. $y = e^{2x} \sin^2 x, \quad [0,\ \pi]$

15. $y = \operatorname{tg} 3x + 4x, \quad \left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right]$

16. $y = \operatorname{ctg} x + 2x, \quad \left[-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6}\right]$

17. $y = e^{-x} \sin x, \quad [0,\ \pi]$

18. $y = \sqrt{3}x + \cos 2x, \quad [0,\ \pi]$

19. $y = \operatorname{tg} 2x - 4x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$

20. $y = e^{2x} \sin 2x, \quad [0,\ \pi]$

21. $y = \sqrt{3}x - \cos 2x, \quad [-\pi,\ 0]$

22. $y = 4x - \operatorname{tg} 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{6},\ 0\right]$

23. $y = e^{2x} \cos^2 x, \quad [0,\ \pi]$

24. $y = \operatorname{tg} x + 8 \sin x, \quad \left[-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6}\right]$

25. $y = \operatorname{ctg} 2x + 4x, \quad \left[-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4}\right]$

26. $y = -e^{4x} \operatorname{tg} x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$

27. $y = \operatorname{ctg} x + 8 \cos x, \quad \left[\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{3}\right]$

28. $y = \operatorname{tg} 3x - 4x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$

29. $y = -e^{2x} \operatorname{tg} x, \quad \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$

30. $y = e^{2x} \cos 2x, \quad \left[\frac{\pi}{16},\ \frac{\pi}{6}\right]$

c) Решите задачу. Сделайте поясняющий рисунок:

1. В прямой круговой конус с углом 30° в осевом сечении и радиусом основания r вписан цилиндр. Определить радиус основания и высоту цилиндра, при которых его полная поверхность будет наибольшей.

2. Найти наибольшее значение площади прямоугольного треугольника ABC, в котором угол C прямой, если одной вершиной является точка $(0,\ 0)$, вершина B лежит на графике функции $y = 5x^3e^{4-3x}+\frac{8}{x}$, а вершина C расположена на оси абсцисс, и её абсцисса удовлетворяет соотношению $0,5 \le x \le 10$.

3. Определить радиус цилиндра, вписанного в шар радиуса R, который имеет наибольшую боковую поверхность. Указать значение площади полной поверхности такого цилиндра.

4. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+m}$-ую часть курса, а забывает at-ую часть. Сколько дней надо затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса, если $m = 0,5$ и $a = \frac{2}{49}$?

5. Найти радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S, который имеет наибольший объём.

6. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y = e^{-x}$ и отрезками прямых $x = 0,\ x = 1,\ y = 0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Указать значение этой площади.

7. Найти радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в конус с высотой h и радиусом r, боковая поверхность которого будет наибольшей.

8. В пространстве задана стандартная прямоугольная система координат $OXYZ$. Нужно пройти кратчайшим путем от точки

$C(-1,\ -1,\ 1)$ до точки $D(2,\ -2,\ 0)$, обязательно заходя по пути на ось OZ. Определить длину такого кратчайшего пути.

9. Найти размеры правильной треугольной пирамиды заданного объёма V, которая имеет наименьшую сумму рёбер.

10. Провести через заданную точку $A(a,\ b)$, лежащую внутри некоторого угла φ, прямую, которая отсечёт от этого угла треугольник наименьшей площади. Указать значение этой площади.

11. По двум прямолинейным дорогам, составляющим угол в 60°, в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два пешехода: один со скоростью v_1 км/ч, а другой – v_2 км/ч. В начальный момент первый пешеход находится на расстоянии a км от перекрестка, а другой на расстоянии b км. Через какое время после начала движения расстояние между ними будет наименьшим? Определить это расстояние.

12. Найти наибольшее возможное значение отношения объёма конуса, вписанного в шар радиуса R, к объёму шара. Определить расстояние от центра шара до основания конуса.

13. В прямоугольник $ABCD$ со сторонами 24 и 27 см вписаны две касающиеся друг друга окружности. Одна окружность касается сторон AB и AD, а другая — сторон BC и CD. Найти наименьшее значение суммы площадей, ограниченных этими окружностями.

14. Проволокой длины L необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Найти радиус круга, при котором площадь клумбы будет наибольшей.

15. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты точки D и E соответственно так, что прямая DE параллельна стороне AB. Точка P делит сторону AB на части так, что $BP = 8AP$. Площадь треугольника ABC равна 1. Определить значение $k = \frac{DC}{BC}$, чтобы площадь трапеции $APDE$ была наибольшей.

16. Найти радиус и высоту цилиндра, имеющего наибольший объём, который вписан в куб с ребром a так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба.

17. Вершинами треугольника ABC являются точки $A(3,\ 5)$ и $B(0,\ 5)$, а третья вершина C лежит на параболе $y = 3x^2 - 48x + 20$. Найти наименьшее возможное значение площади такого треугольника.

18. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R, который имеет наибольшую площадь полной поверхности. Указать значение площади полной поверхности такого конуса.

19. В какой точке (абсцисса которой равна x_0) графика функции $y = -4x^4 + x$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, касательной к графику функции и прямой $x = x_0 + 2$, была наименьшей?

20. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса R с центральным углом φ.

21. В прямом круговом конусе произведение высоты и радиуса основания равно a. Какое наименьшее значение может принимать радиус шара, описанного вокруг этого конуса?

22. Найти наибольший объём правильного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид вращения $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

23. Определить высоту конуса, описанного около полушара радиуса R, который имеет наименьший объём, если его основание и основание полушара лежат в одной плоскости и концентричны.

24. На координатной плоскости OXY задано множество всех равносторонних треугольников, две вершины которых лежат на прямой $y = -3x + 3$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $0,5x^2 \leq y \leq -3x + 3$. Найти наибольшее возможное значение площади таких треугольников.

25. В сферу вписаны правильная треугольная пирамида со стороной основания 9 и правильная четырехугольная призма, нижние плоскости оснований которых совпадают. Центр сферы делит высоту призмы в отношении $\sqrt{5} : 1$, считая от вершины. Найти наибольшее возможное значение объёма призмы.

26. Провести через заданную точку $A(a,\ b)$, лежащую внутри некоторого угла α, прямую, которая отсечёт от этого угла два отрезка, суммарная длина которых будет наименьшей. Указать значение этой суммы.

27. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$ и $y = 0$ нужно вырезать прямоугольник наибольшей площади. Определить стороны этого прямоугольника.

28. Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y = e^{\alpha x}$ и $y = \frac{\ln x}{a},\ a > 0$.

29. В треугольной пирамиде $PABC$ расстояние от каждой из вершин до середины ребра AB равно a см. При какой величине двугранного угла при ребре PC объём пирамиды будет наибольшим? Найти этот объём.

30. В какой точке (абсцисса которой равна x_0) графика функции $y = x^4 + 2x^2$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой $x = x_0 - 1$ была наименьшей?

Список литературы

[1] Попов А.И., Попов И.Ю. Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление. СПб: Университет ИТМО, 2023, 173 с.

[2] Родина Т.В., Трифанова Е.С. Задачи и упражнения по математическому анализу I. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011, 208 с.

[3] Сильванович О.В., Тимофеева Г.В. Индивидуальные домашние задания по высшей математике (модуль 2). Предел, непрерывность, дифференцирование функции одной переменной. СПб: Университет ИТМО, 2018, 66 с.

[4] Сильванович О.В., Тимофеева Г.В. Типовые расчеты по высшей математике. 1 семестр (2 модуль). Предел и непрерывность функции. Дифференцирование функции одной переменной. СПб: Университет ИТМО, 2012, 49 с.

Блинова Ирина Владимировна
Попов Антон Игоревич
Попов Игорь Юрьевич
Сильванович Ольга Васильевна
Тимофеева Галина Васильевна

Типовой расчет по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное исчисление

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А