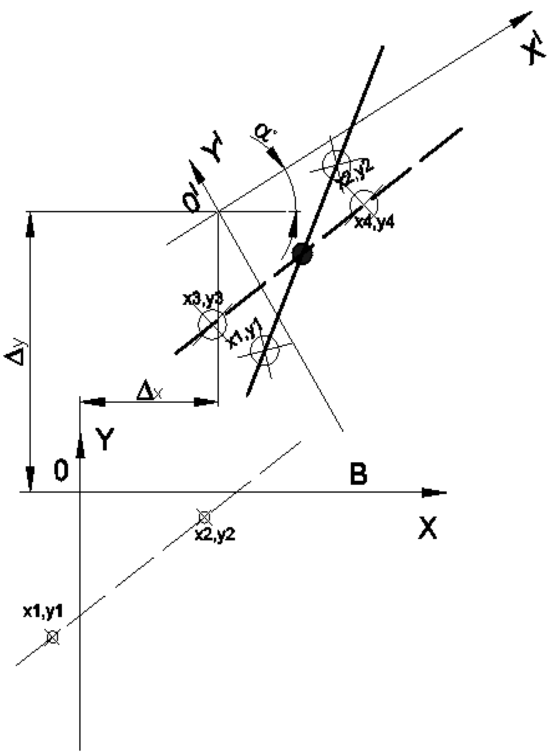
ИТМО

И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Ч. I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ



Санкт-Петербург
2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Ч. I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 09.03.01, 12.03.01, 13.03.01, 13.03.02, 15.03.06, 16.03.03, 24.03.02, 27.03.04
в качестве Учебно-методическое пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Санкт-Петербург
2024

Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков С.В., Решение систем уравнений в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I. Линейные уравнения. Пересечение прямых – СПб: Университет ИТМО, 2024. – 65 с.

Рецензент(ы):
Тертычный Владимир Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") факультета информационных технологий и программирования Университета ИТМО.

Пособие содержит сведения о теории и задачах линейной алгебры и аналитической геометрии, связанных с решением систем уравнений и манипуляциями с прямыми и фигурами. Предназначено для бакалавров по направлениям подготовки: 09.03.01, 12.03.01, 13.03.01, 13.03.02, 15.03.04, 15.03.06, 24.03.02, 27.03.04.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента. ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

Содержание

Введение 4
1. Основные расчетные соотношения 6
1.1. Общие положения...6
1.2. Система линейных уравнений..6
1.3. Уравнения прямых 7
1.4. Манипуляции с прямыми 8
1.5. Параллельное смещение прямой 8
1.6. Поворот прямой на заданный угол 10
1.7. Одновременное смещение и поворот фигур вокруг точки 11
1.8. Поворот прямой на угол α и параллельное смещение прямой в базовую точку (x_b, y_b) 13
2. Примеры расчета точек пересечения прямых 15
3. Задания для самостоятельной работы 25
3.1. Пересечение прямых 25
4. Контрольные вопросы..32
4.1. Общие положения..32
Список литературы...41
Приложение А. Листинги программ расчета точек пресечения фигур 43
Приложение Б. Список примеров 63

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия – это разделы математики, в которых рассматриваются системы уравнений, методы их решений и задачи геометрии с использованием различных систем координат. В пособии даются краткие сведения о системах линейных уравнений, их решении матричным методом. В связи с этим для успешного усвоения предложенного материала необходимо повторить правила действия над матрицами и определителями. Аналитическая геометрия – это раздел математики, который часто называют координатной геометрией. Этим подчеркивается принципиальное отличие аналитической геометрии от синтетической геометрии, основанной на постулатах. Линейная алгебра и аналитическая геометрия широко применяются в физике и инженерных науках, в робототехнике, аэрокосмической отрасли, при разработке оборонной техники, кораблестроении, различных видов транспорта, включая железнодорожный и автомобильный. Аналитическая геометрия – это базис современной геометрии, включая дифференциальную, дискретную и компьютерную геометрию. В пособии приводятся общие сведения о различных манипуляциях с прямыми. Возможные манипуляции с прямыми это: смещение – параллельный перенос прямой на Δx и Δy по осям 0X и 0Y, соответственно; поворот прямой относительно оси 0X на угол α; смещение и поворот прямой одновременно. Эти манипуляции подробно рассмотрены и дан вывод всех формул для решения задач, в рамках которых необходимо исследовать параллельное смещение прямой, поворот прямой на заданный угол, одновременное смещение и поворот фигур вокруг точки, поворот прямой на угол α и параллельное смещение прямой в базовую точку (x_b, y_b). По каждому разделу разобраны задачи и приводятся их решения в аналитическом виде. Для закрепления материала приводятся контрольные вопросы (более 40) и задания для самостоятельной работы (около 20). В современной науке и технике широко используются цифровые технологии, в частности, различные математические пакеты: MathCAD, Matlab, Maple, Mathematica, Statistica и др. В Университете ИТМО в процессе обучения по разным направлениям подготовки в той или иной мере используются все вышеперечисленные пакеты. В ходе преподавания различных разделов математики, включая линейную алгебру и аналитическую геометрию, авторы данного пособия в основном использовали MathCAD. Обусловлено это тем, что в этом пакете удачно сочетается инструментарий, наиболее востребованный с одной стороны, научными работниками, исследователями, с другой – инженерами и конструкторами, то есть производственниками. Кроме того, по MathCAD в репозитарии ИТМО содержится значительное число пособий, затрагивающих различные разделы математики. Как и данное пособие, все указанные пособия содержат как теоретический материал по теме пособия, так и разделы, включающие примеры, задания для самостоятельной работы, контрольные вопросы. Особенностью данного пособия является практическое рассмотрение вопросов аналитического преобразования математических выражений и приведения их к виду, необходимому для использования инструментов MathCAD при решении систем линейных уравнений и построения графиков без использования «пера и бумаги». Учебное пособие предназначено студентам для освоения методов линейной алгебры, аналитической геометрии и навыков расчетов в среде MathCAD 15. Оно может быть использовано в учебном процессе образовательных программах подготовки бакалавров: 09.03.01 (информатика и вычислительная техника), 12.03.01 (приборостроение), 13.03.01 (теплоэнергетика и теплотехника), 13.03.02 (электроэнергетика и электротехника), 15.03.04 (автоматизация технологических процессов и производств), 15.03.06 (мехатроника и робототехника), 24.03.02 (системы управления движением и навигация), 27.03.04 (управление в технических системах).

1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1.1. Общие положения

При решении задачи нахождения точки пресечения прямых необходимо:

- рассчитать точку пересечения прямых;
- построить графики прямых и нанести точку пересечения этих прямых.

Прямая описывается линейным уравнением вида:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \tag{1}$$

где x, y – переменные, a, b, c – коэффициенты.

Задача нахождения точки пересечения прямых сводится к решению системы линейных уравнений, в которой количество неизвестных равно количеству уравнений.

1.2. Система линейных уравнений

В общем виде система линейных уравнений описывается как

$$\begin{cases} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + \ldots + a_{0,\mathrm{n}}x_n = b_0; \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,\mathrm{n}}x_n = b_1; \\ \ldots \\ a_{\mathrm{n},0}x_0 + a_{\mathrm{n},1}x_1 + \ldots + a_{\mathrm{n},\mathrm{n}}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots a_{\mathrm{n,n}}$ – коэффициенты, $x_0, x_1, \ldots x_n$ – неизвестные, $b_0, b_1, \ldots b_n$ – свободные члены.

В матричном виде система линейных уравнений имеет вид

$$A \cdot X = B, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,\mathrm{n}} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,\mathrm{n}} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{\mathrm{n},0} & a_{\mathrm{n},1} & \ldots & a_{\mathrm{n,n}} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для нахождения точки пересечения двух прямых система (3) примет вид:

$$\begin{cases} a_{0,0}x + a_{0,1}y = b_0; \\ a_{1,0}x + a_{1,1}y = b_1, \end{cases} \tag{4}$$

или в матричной форме:

$$A \cdot XY = B, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix}, \; XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор неизвестных XY определится как

$$XY = A^{-1} \cdot B, \tag{6}$$

где A^{-1} – обратная матрица.

В пакете MathCAD для решения системы линейных уравнений используется функция $\boldsymbol{lsolve}(A,B)$.

Для нахождения точки пересечения прямых необходимо:

- уравнения, описывающие прямые привести к виду (4);
- составить матрицы A, B;
- найти почку пересечения прямых используя (6) или функцию $\boldsymbol{lsolve}(A,B)$.

Для построения графиков прямых необходимо уравнение прямой привести к виде $y = f(x)$, тогда система уравнений (4) примет вид:

$$\begin{cases} y1 = \dfrac{b_0 - a_{0,0}x}{a_{0,1}}; \\ y2 = \dfrac{b_1 - a_{1,0}x,}{a_{1,1}}. \end{cases} \tag{7}$$

1.3. Уравнения прямых

Вариант 1. Прямая проходит через две точки (Рис. 1.1)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0, \tag{8}$$

где x – абсцисса точки, y – ордината точки, x_1, y_1 – координаты первой точки, через которую проходит прямая, x_2, y_2 – координаты второй точки, через которую проходит прямая.

Вариант 2. Прямая пересекает оси X и Y в точках a_1, b_1 (Рис. 1.1):

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1 = 0, \tag{9}$$

где

$$a_1 = -\frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_1 - y_2},\ b_1 = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}.$$

Вариант 3. Вид прямой для расчета точек пересечения прямых:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \tag{10}$$

где $a = \dfrac{1}{x_2 - x_1}$, $b = -\dfrac{1}{y_2 - y_1}$, $c = \dfrac{y_1}{y_2 - y_1} - \dfrac{x_1}{x_2 - x_1}$ или $a = \dfrac{1}{a_1}$, $b = \dfrac{1}{b_1}$, $c = -1$.

Матричная форма записи прямой (вариант 3):

$$AB^T \cdot XY + c = 0, \tag{11}$$

где $AB=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – вектор коэффициентов, $AB^T=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ – транспонированный вектор, $XY=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных.

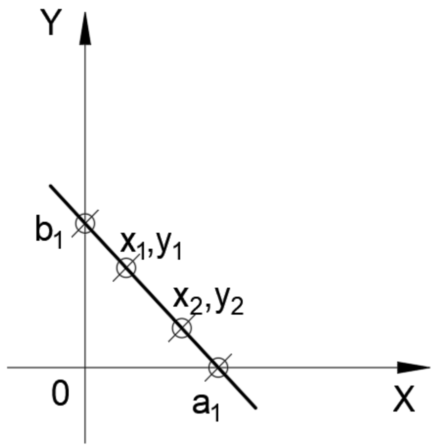


Рис. 1.1. График прямой

Функция для построения графика прямой (вариант 3) имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$y=-\frac{c+a\cdot x}{b}. \quad (12)$$

1.4. Манипуляции с прямыми

Возможные манипуляции с прямыми это:

- смещение – параллельный перенос прямой на $\vartriangle x$ и $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y, соответственно;
- поворот прямой относительно на угол α;
- смещение и поворот прямой одновременно.

Для получения требуемых расчетных соотношений после манипуляции с прямой (смещение и поворот) вводится локальная система координат ($0^I X^I Y^I$), расположенная таким образом, чтобы в этой системе координат положение прямой было такое же, что и у прямой до перемещения. Затем производится пересчет координат из локальной системы в глобальную систему координат ($0XY$) с использованием аффинных преобразований [18, 19].

1.5. Параллельное смещение прямой

При параллельном переносе аффинные преобразования имеют вид (Рис. 1.2):

$$\begin{cases} x^I = x - \vartriangle x; \\ y^I = y - \vartriangle y, \end{cases} \quad (13)$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ – расстояние по осям 0X и 0Y между началом глобальной и локальной систем координат.

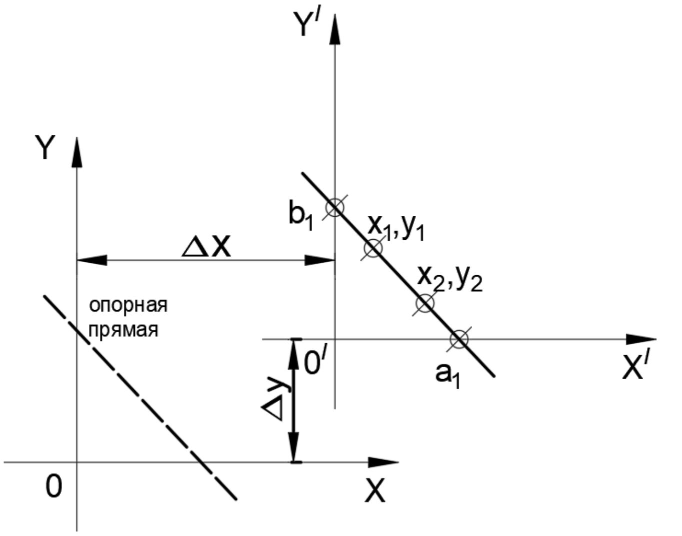


Рис. 1.2. График параллельно смещенной прямой

В матричной форме аффинные преобразования примут вид:

$$XY^I = XY - \vartriangle XY \,, \tag{14}$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ – координаты точки в локальной системе координат, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – вектор параллельного смещения точек.

Уравнение прямой (10) в локальной системе координат примет вид

$$a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0 \,. \tag{15}$$

С учетом (13) в глобальной системе координат уравнение прямой равно:

$$a \cdot \left(x - \vartriangle x \right) + b \cdot \left(y - \vartriangle y \right) + c = 0 \,. \tag{16}$$

Матричная форма записи уравнения прямой с учетом (14):

$$AB^T \cdot \left(XY - \vartriangle XY \right) + c = 0 \,, \tag{17}$$

где $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – вектор коэффициентов, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – вектор смещения точек по осям координат.

Пересчет координат точек прямой из локальной системы координат в глобальную систему координат

После преобразования (14) получим:

$$XY = XY^I + \vartriangle XY \,. \tag{18}$$

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = -\frac{a \cdot \left(x + \vartriangle x\right) - c}{b} + \vartriangle y \,. \tag{19}$$

1.6. Поворот прямой на заданный угол

При повороте прямой на угол α аффинные преобразования имеют вид (Рис. 1.3):

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha), \end{cases} \tag{20}$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, α – угол поворота фигуры относительно горизонтальной оси в локальной системе координат. Положительный угол α против часовой стрелки.

В матричной форме:

$$XY^I = M\alpha \cdot XY \,, \tag{21}$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ – координаты точки в локальной системе координат,

$XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат,

$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота.

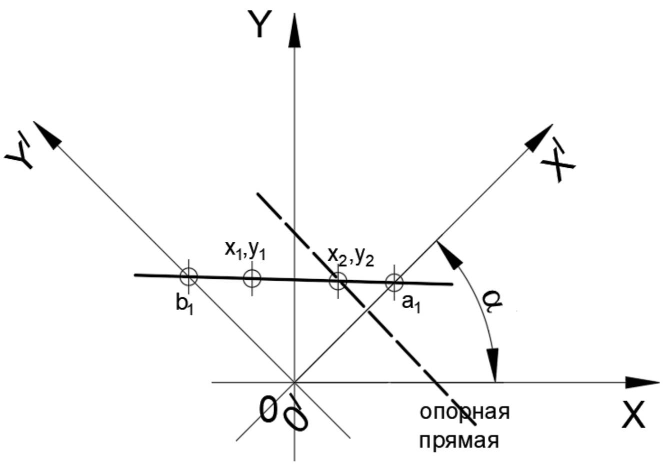


Рис. 1.3. График прямой при повороте

Уравнение прямая в локальной системе координат примет вид:

$$a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0. \tag{22}$$

С учетом (20) в глобальной системе координат уравнение прямой:

$$a \cdot \left(x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) \right) + b \cdot \left(-x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \right) + c = 0, \tag{23}$$

или после преобразования:

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0, \tag{24}$$

где $a1 = a \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \sin(\alpha)$, $b1 = a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha)$, $c1 = c$.

Матричная форма записи уравнения прямой с учетом (20):

$$AB^T \cdot \left(M\alpha \cdot XY \right) + c = 0, \tag{25}$$

где $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – вектор коэффициентов, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота.

Пересчет точек из локальной системы координат в глобальную систему координат

После преобразования (21) получим:

$$XY = M\alpha^{-1} \cdot XY^I. \tag{26}$$

Матрица $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ является ортогональной, т.е.

$$M\alpha \cdot M\alpha^{-1} = E, \tag{27}$$

где E – единичная матрица.

Одним из свойств ортогональных матриц является равенство:

$$M\alpha^{-1} = M\alpha^T, \tag{28}$$

где $M\alpha^T$ – транспонированная матрица.

С учетом (28) выражение (26) примет вид

$$XY = M\alpha^T \cdot XY^I. \tag{29}$$

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x, \alpha)$ и равна

$$y = k_1 \cdot x + k_2, \tag{30}$$

где

$$k_1 = -\frac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\sin(\alpha) \cdot (y1 - y2) - \cos(\alpha) \cdot (x1 - x2)},$$

$$k_2 = -\frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\sin(\alpha) \cdot (y1 - y2) - \cos(\alpha) \cdot (x1 - x2)}.$$

1.7. Одновременное смещение и поворот фигур вокруг точки

При одновременном параллельном переносе на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ и повороте фигуры на угол α аффинные преобразования имеют вид (Рис. 1.4) [18–20]:

$$\begin{cases} x' = (x - \vartriangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -(x - \vartriangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \cos(\alpha), \end{cases} \qquad (31)$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ – расстояние по осям 0X и 0Y между началом глобальной и локальной систем координат, α – угол поворота фигуры относительно горизонтальной оси в локальной системе координат. Положительный угол α против часовой стрелки.

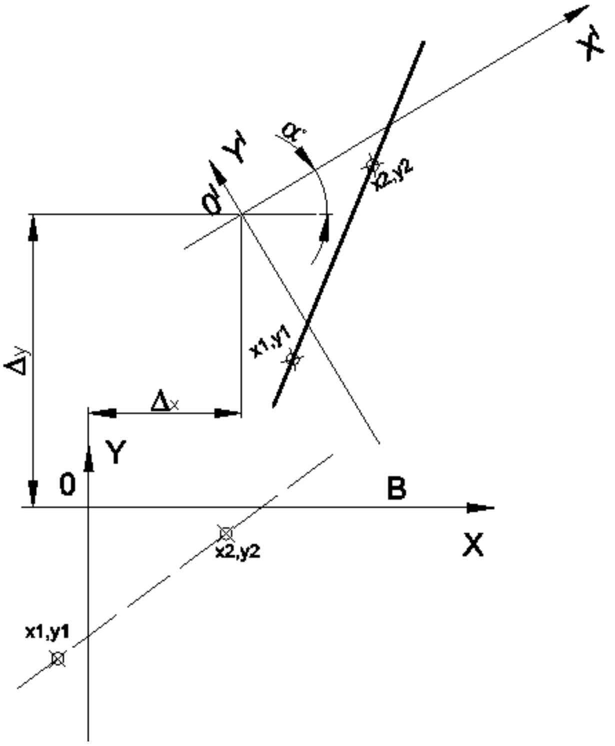


Рис. 1.4. График прямой при повороте и параллельном смещении

В матричной форме:

$$XY^I = M\alpha \cdot (XY - \vartriangle XY), \qquad (32)$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ – координаты точки в локальной системе координат,

$XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – вектор параллельного смещения точек.

Уравнение прямой в локальной системе координат примет вид

$$a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0. \tag{33}$$

С учетом (31) в глобальной системе координат уравнение прямой:

$$\begin{gathered} a \cdot \left((x - \vartriangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \sin(\alpha) \right) + \ldots \\ \ldots + b \cdot \left(-(x - \vartriangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \cos(\alpha) \right) + c = 0, \end{gathered} \tag{34}$$

или после преобразования:

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0, \tag{35}$$

где

$$a1 = a \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \sin(\alpha), \; b1 = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \sin(\alpha),$$

$$c1 = -(a \cdot \vartriangle x + b \cdot \vartriangle y) \cdot \cos(\alpha) + (b \cdot \vartriangle x - a \cdot \vartriangle y) \cdot \sin(\alpha) + c.$$

Матричная форма записи с учетом (31):

$$AB^T \cdot \left(M\alpha \cdot (XY - \vartriangle XY) \right) + c = 0, \tag{36}$$

где $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – вектор коэффициентов, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

Пересчет точек из локальной системы координат в глобальную систему координат

После преобразования (32) получим:

$$XY = M\alpha^{-1} \cdot XY^I + \vartriangle XY. \tag{37}$$

С учетом (28) выражение (37) примет вид

$$XY = M\alpha^T \cdot XY^I + \vartriangle XY. \tag{38}$$

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x, \alpha, \vartriangle x, \vartriangle y)$ и равна

$$y = k_3 \cdot (x - \vartriangle x) + \vartriangle y + k_4, \tag{39}$$

где

$$k_3 = \frac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)},$$

$$k_4 = \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)}.$$

1.8. Поворот прямой на угол α и параллельное смещение прямой в базовую точку (x_b, y_b)

Необходимо рассчитать величину параллельного смещения $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ прямой такое, чтобы любая (выбранная) точка, принадлежащая прямой в локальной системе координат $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$, совместилась с базовой точкой $XY_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ в глобальной системе координат.

Требуемое выражением получим, используя (32):

$$\vartriangle XY = XY_b - M\alpha^{-1} \cdot XY^I, \tag{40}$$

где $M\alpha \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМЫХ

При выполнении примеров и заданий студент должен знать следующие разделы MathCAD:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и многострочной функций и их вызов.
- Векторизация.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функции ***augment()***, ***lsolve()***.
- Символьные операции: ***simplify***, ***solve***, ***substitute***, ***collect***.
- Матричные операции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых.

Пример № 2.1. Найти точку пересечения прямых.

1. Фигура 1: прямая, проходящая через точки (x1, y1) и (x2, y2). Фигура 2: прямая пересекает ось 0X в точке a *и ось 0Y в точке* b.

2. Получить аналитические выражения для построения прямых.

3. Рассчитать точку пересечения прямых, используя обратную матрицу и функцию ***lsolve()***. *Сравнить полученные результаты.*

4. Построить графики прямых, точки через которые они проходят, точку пересечения прямых.

Исходные данные

Фигура 1: $x1=-3,\ y1=-1,\ x2=-1,\ y2=-6$.

Фигура 2: $a=5$, $b=-2$.

Решение

1. Функции для построения графиков.

1.1. Фигура 1:

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot x+\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{x1-x2}$$

или после подстановки конкретных значений $y=-\frac{5}{2}\cdot x-\frac{17}{2}$.

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1=\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1.2. Фигура 2:

$y = \left(-\dfrac{b}{a}\right) \cdot x + b$ или после подстановки координат $y = \dfrac{2}{5} \cdot x - 2$.

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$,

точка 2 $xy4 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2. Рассчитать точку пересечения прямых.

Для нахождения точки пересечения прямых $xy_{\text{int}} = \begin{pmatrix} x_{\text{int}} \\ y\text{i}_{\text{nt}} \end{pmatrix}$ с использованием обратной матрицы и функции ***lsolve***(A, B) необходимо решить систему уравнений вида $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = 0; \\ a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0, \end{cases}$ т.е. определить массивы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a1 & b1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -b \\ -b1 \end{pmatrix}$.

2.1. Приведем уравнение фигуры 1 к виду $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{1}{x_1 - x_2}\right) \cdot x + \left(\frac{1}{y_1 - y_2}\right) \cdot y + \left(\frac{x_1}{x_1 - x_2} - \frac{y_1}{y_1 - y_2}\right).$$

Тогда $a = \dfrac{1}{x_1 - x_2} = 0.5$, $b = \dfrac{1}{y_1 - y_2} = 0.2$, $c = \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} - \dfrac{y_1}{y_1 - y_2} = 1.7$.

2.2. Приведем уравнение фигуры 2 к виду $a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0$:

$$\frac{x}{a1} + \frac{y}{b1} - 1 = \frac{1}{a1} \cdot x + \frac{1}{b1} \cdot y - 1.$$

Тогда $a2 = \dfrac{1}{a1} = -0.2$, $b2 = \dfrac{1}{b1} = 0.143$, $c2 = -1$.

Подставляя полученные в п.2.1 и п.2.2 значения a, b, c, $a2$, $b2$, $c2$ в A и B, найдем:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a2 & b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -c \\ -c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Точка пересечения прямых:

- использование обратной матрицы:

$$xy_{\text{int}} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1.7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix};$$

- использование функции $\boldsymbol{lsolve}(A,B)$:

$$xy_{\text{int}} = \boldsymbol{lsolve}(A,B) = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix}.$$

Оба варианта дают одинаковый результат.

Листинг программы приведен в на Рис. А 1–Рис. А 5, стр. 43–47.

Пример № 2.2. Найти точку пересечения прямых.

1. Опорная прямая, проходящая через точки (x1, y1) и (x2, y2).

Фигура 1: опорная прямая повернута на угол α.

Фигура 2: опорная прямая повернута на угол β и параллельно смещена в базовую точку (x0, y0).

2. Рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят, используя точки (x1, y1) и (x2, y2) на опорной прямой.

3. Получить аналитические выражения для построения прямых.

4. Рассчитать точку пересечения прямых, используя обратную матрицу и функцию ***lsolve()****. Сравнить полученные результаты.*

5. Построить графики прямых, точки через которые они проходят, точку пересечения прямых.

Исходные данные

Опорная прямая: $x1 = 3,\ y1 = 1,\ x2 = -1,\ y2 = -2$.

Фигура 1: $\alpha = 90^0$.

Фигура 2: $\beta = 30^0,\ xy0 = \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Функции для построения графиков.

Опорная прямая:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}.$$

или после подстановки конкретных значений $y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{5}{4}$

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1.1. Фигура 1.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y = \frac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)},$$

или после подстановки конкретных значений $y = -1.333 \cdot x + 1.667$.

Координаты точек, через которые проходит прямая

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy3$, $xy4$) на фигуре 1.

Пересчет координат ($x1$, $y1$):

$$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

точка 1 $xy3 = M\alpha^{-1} \cdot xy1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

точка 2 $xy4 = M\alpha^{-1} \cdot xy2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.2. Фигура 2.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол и параллельное смещение прямой:

$$\begin{cases} x' = \left(x - \vartriangle x\right) \cdot \cos(\alpha) + \left(y - \vartriangle y\right) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -\left(x - \vartriangle x\right) \cdot \sin(\alpha) + \left(y - \vartriangle y\right) \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y=\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}\cdot\left(x-\vartriangle x\right)+$$

$$+\vartriangle y+\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}.$$

Необходимо определить величины $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена после поворота и проходит через точку ($x0$, $y0$):

$XY^I=\begin{pmatrix}x^I\\ y^I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x1\\ y1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ координаты точки на прямой в локальной системе координат, например, точки $x1, y1$,

$M\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.866 & 0.5\\ \text{-}0.5 & 0.866\end{pmatrix}$ – матрица поворота фигуры 2,

$XY_b=\begin{pmatrix}x0\\ y0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 10\end{pmatrix}$ – базовая точка, через которую проходит фигура 2 (задается).

$$\vartriangle XY=XY_b-M\beta\cdot XY^I=\begin{pmatrix}-1.098\\ 7.634\end{pmatrix},$$

или после подстановки конкретных значений уравнение фигуры 2:

$$y=2.341\cdot x+7.659\,.$$

Координаты точек, через которые проходит прямая

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy5$, $xy6$) на фигуре 2.

Пересчет координат ($x1$, $y1$):

точка 1 $xy5=XY_b=\begin{pmatrix}1\\ 10\end{pmatrix}$ – совпадает с базовой точкой.

Пересчет координат ($x2$, $y2$):

$$M\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.866 & 0.5\\ -0.5 & 0.866\end{pmatrix},\quad xy2=\begin{pmatrix}x2\\ y2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Точка 2 $xy6=M\beta^{-1}\cdot xy2-\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\text{-}0.964\\ 5.402\end{pmatrix}$.

2. Рассчитать точку пересечения прямых.

Для нахождения точки пересечения прямых $xy_{\text{int}} = \begin{pmatrix} x_{\text{int}} \\ y\text{i}_{\text{nt}} \end{pmatrix}$ с использованием обратной матрицы и функции $\boldsymbol{lsolve}(A, B)$ необходимо решить систему уравнений вида $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = 0; \\ a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0, \end{cases}$ т.е. определить массивы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a1 & b1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -b \\ -b1 \end{pmatrix}$.

2.1. Приведем уравнение фигуры 1 к виду $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$:

$$\frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} = \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x_1 - x_2} - \frac{\sin(\alpha)}{y_1 - y_2} \right) \cdot x +$$

$$+ \left(\frac{\cos(\alpha)}{y_1 - y_2} - \frac{\sin(\alpha)}{x_1 - x_2} \right) \cdot y + \left(\frac{x_1}{x_1 - x_2} - \frac{y_1}{y_1 - y_2} \right).$$

Тогда $a = -\dfrac{\cos(\alpha)}{x_1 - x_2} - \dfrac{\sin(\alpha)}{y_1 - y_2} = -0.333$, $b = \dfrac{\cos(\alpha)}{y_1 - y_2} - \dfrac{\sin(\alpha)}{x_1 - x_2} = -0.25$,

$c = \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} - \dfrac{y_1}{y_1 - y_2} = 0.417$.

2.2. Приведем уравнение фигуры 2 к виду $a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0$:

$$\frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} = \left(-\frac{\cos(\beta)}{x_1 - x_2} - \frac{\sin(\beta)}{y_1 - y_2} \right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\beta)}{y_1 - y_2} - \frac{\sin(\beta)}{x_1 - x_2} \right) \cdot y + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{x_1 + \triangle x \cdot \cos(\beta) + \triangle y \cdot \sin(\beta)}{x_1 - x_2} - \frac{y_1 + \triangle y \cdot \cos(\beta) - \triangle x \cdot \sin(\beta)}{y_1 - y_2} \right).$$

Тогда

$$a2 = \left(-\frac{\cos(\beta)}{x_1 - x_2} - \frac{\sin(\beta)}{y_1 - y_2} \right) = \text{-0.383}, \ b2 = \frac{\cos(\beta)}{y_1 - y_2} - \frac{\sin(\beta)}{x_1 - x_2} = 0.164,$$

$$c2 = \frac{x_1 + \triangle x \cdot \cos(\beta) + \triangle y \cdot \sin(\beta)}{x_1 - x_2} - \frac{y_1 + \triangle y \cdot \cos(\beta) - \triangle x \cdot \sin(\beta)}{y_1 - y_2} = \text{-1.254}.$$

Подставляя полученные в п.2.1 и п.2.2 значения a, b, c, $a2$, $b2$, $c2$ в A и B, найдем:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a2 & b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.333 & -0.25 \\ -0.383 & 0.164 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -c \\ -c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.417 \\ 1.254 \end{pmatrix}.$$

2.3. Точка пересечения прямых.

- использование обратной матрицы:

$$xy_{\text{int}} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -0.333 & -0.25 \\ -0.383 & 0.164 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.417 \\ 1.254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.631 \\ 3.841 \end{pmatrix}.$$

- использование функции $\boldsymbol{lsolve}(A, B)$:

$$xy_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -1.631 \\ 3.841 \end{pmatrix}.$$

Оба варианта дают одинаковый результат.

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 6–Рис. А 14, стр. 48–56.

Пример № 2.3. Найти точку пересечения прямых.

1. Опорная прямая, проходящая через точки (x1, y1) и (x2, y2).

Фигура 1: опорная прямая повернута на угол α.

Фигура 2: опорная прямая смещена параллельно по осям X и Y на $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

2. Рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят.

3. Получить аналитические выражения для построения прямых.

4. Рассчитать точку пересечения прямых, используя обратную матрицу и функцию ***lsolve()****. Сравнить полученные результаты.*

5. Построить графики прямых, точки, через которые они проходят, точку пересечения прямых.

Исходные данные

Опорная прямая: $x1 = -3,\ y1 = -1,\ x2 = -1,\ y2 = -6$.

Фигура 1: $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Фигура 2: $\alpha = 80^0$.

Решение

1. Функции для построения графиков.

Опорная прямая:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

или после подстановки конкретных значений $y = -\frac{5}{2} \cdot x - \frac{17}{2}$

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1.1. Фигура 1.

Аффинные преобразования при параллельном переносе фигуры:

$$\begin{cases} x' = x - \vartriangle x; \\ y' = y - \vartriangle y. \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I, решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика

$$y = \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x - \left(\frac{\vartriangle x + x1}{x1 - x2} - \frac{\vartriangle y + y1}{y1 - y2} \right) \cdot (y1 - y2),$$

или после подстановки конкретных значений $y = -\frac{5}{2} \cdot x - \frac{41}{2}$.

Координаты точек, через которые проходит прямая

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy3$, $xy4$) на фигуре 1. Следует отметить, что положение опорной прямой в глобальной системе координат такое же, что и положение фигуры 1 в локальной системе координат.

Пересчет координат ($x1$, $y1$):

точка 1 $xy3 = XY^I + \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Пересчет координат ($x2$, $y2$):

точка 2 $xy4 = XY^I + \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$

1.2. Фигура 2.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I, решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y = \frac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)},$$

или после подстановки конкретных значений $y = 0.209 \cdot x - 3.225$.

Координаты точек, через которые проходит прямая

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy5$, $xy6$) на фигуре 2.

Пересчет координат ($x1$, $y1$):

$$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.174 & 0.985 \\ -0.985 & 0.174 \end{pmatrix},\ xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

точка 1 $xy5 = M\alpha^{-1} \cdot xy1 = \begin{pmatrix} 0.464 \\ -3.128 \end{pmatrix}$,

точка 2 $xy6 = M\alpha^{-1} \cdot xy2 = \begin{pmatrix} 5.735 \\ -2.027 \end{pmatrix}$.

2. Рассчитать точку пересечения прямых.

Для нахождения точки пересечения прямых $xy_{\text{int}} = \begin{pmatrix} x_{\text{int}} \\ y\text{i}_{\text{nt}} \end{pmatrix}$ с использованием обратной матрицы и функции ***lsolve***(A, B) необходимо решить систему уравнений вида $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = 0; \\ a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0, \end{cases}$ т.е. определить массивы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a1 & b1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -b \\ -b1 \end{pmatrix}$.

2.1. Приведем уравнение фигуры 1 к виду $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$:

$$\frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} = \left(-\frac{1}{x_1 - x_2}\right) \cdot x + \left(\frac{1}{y_1 - y_2}\right) \cdot y + \left(\frac{x_1 + \vartriangle x}{x_1 - x_2} - \frac{y_1 + \vartriangle y}{y_1 - y_2}\right).$$

Тогда $a = -\dfrac{1}{x_1 - x_2} = 0.5$, $b = \dfrac{1}{y_1 - y_2} = 0.2$, $c = \dfrac{x_1 + \vartriangle x}{x_1 - x_2} - \dfrac{y_1 + \vartriangle y}{y_1 - y_2} = 4.1$.

2.2. Приведем уравнение фигуры 2 к виду $a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = 0$:

$$\frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} = \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x_1 - x_2} - \frac{\sin(\alpha)}{y_1 - y_2}\right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y_1 - y_2} - \frac{\sin(\alpha)}{x_1 - x_2}\right) \cdot y + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{x_1}{x_1 - x_2} - \frac{y_1}{y_1 - y_2}\right).$$

Тогда $a2 = -\dfrac{\cos(\alpha)}{x_1 - x_2} - \dfrac{\sin(\alpha)}{y_1 - y_2} = -0.11$, $b2 = \dfrac{\cos(\alpha)}{y_1 - y_2} - \dfrac{\sin(\alpha)}{x_1 - x_2} = 0.527$,

$c2 = \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} - \dfrac{y_1}{y_1 - y_2} = 1.7$.

Подставляя полученные в п.2.1 и п.2.2 значения a, b, c, $a2$, $b2$, $c2$ в A и B, найдем:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a2 & b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.11 & 0.527 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -c \\ -c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.1 \\ -1.7 \end{pmatrix}.$$

2.3. Точка пересечения прямых:

- использование обратной матрицы

$$xy_{\text{int}} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.11 & 0.527 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4.1 \\ -1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.377 \\ -4.557 \end{pmatrix};$$

- использование функции $\boldsymbol{lsolve}(A, B)$:

$$xy_{\text{int}} = \boldsymbol{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -6.377 \\ -4.557 \end{pmatrix}.$$

Оба варианта дают одинаковый результат.

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 15–Рис. А 20, стр. 57–62.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1. Пересечение прямых

Задание 3.1. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Фигура 1: прямая: $3 \cdot x - 6 \cdot y + 5 = 0$.

Фигура 2: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = 2.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = 7$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2 через которые они проходят.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур.

Задание 3.2. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Фигура 1: прямая проходит через точки ($x1$ = 4, $y1$ = –7) и ($x2$ = –5, $y2$ = 11).

Фигура 2: прямая $3 \cdot x - 2 \cdot y + 5 = 0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек осей 0X и 0Y на фигурах 1 и 2 через которые они проходят.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур.

Задание 3.3. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Фигура 1: прямая проходит через точки ($x1$ = 4, $y1$ = –7) и ($x2$ = –5, $y2$ = 11).

Фигура 2: прямая проходит через точки ($x1$ = –8, $y1$ = –13) и ($x2$ = 4, $y2$ = 11).

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур.

Задание 3.4. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая проходит через точки ($x1$ = –8, $y1$ = 15) и ($x2$ = 5, $y2$ = –6).

Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 4$, $\Delta y = -2$.

Фигура 2: прямая проходит через точки ($x1$ = 4, $y1$ = –7) и ($x2$ = –5, $y2$ = 11).

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 через которые она проходят, используя точки ($x1$ = –8, $y1$ = 15) и ($x2$ = 5, $y2$ = –6).

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.5. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая проходит через точки ($x1 = –8$, $y1 = 15$) и ($x2 = 5$, $y2 = –6$).

Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -3$, $\Delta y = 4$.

Фигура 2: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = 3.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = 3$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигуре 1, через которые она проходит, используя точки опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.6. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая проходит через точки ($x1 = –8$, $y1 = 15$) и ($x2 = 5$, $y2 = –6$).

Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно и проходит через базовою точку с координатами $x_b = -7$, $y_b = 4$.

Фигура 2: прямая проходит через точки ($x1 = 4$, $y1 = –7$) и ($x2 = –5$, $y2 = 11$).

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1, через которые она проходит, используя точки ($x1 = –8$, $y1 = 15$) и ($x2 = 5$, $y2 = –6$).

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходит, указать точку пересечения фигур, базовую точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.7. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая проходит через точки ($x1 = –8$, $y1 = 15$) и ($x2 = 5$, $y2 = –6$).

Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно и проходит через базовую точку с координатами $x_b = 4$, $y_b = 12$.

Фигура 2: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = 3.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = 3$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигуре 1, через которые она проходит, используя точки ($x1 = -8$, $y1 = 15$) и ($x2 = 5$, $y2 = -6$).

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур, опорную точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.8. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая проходит через точки ($x1 = -3$, $y1 = -1$) и ($x2 = -1$, $y2 = -6$).

Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -4$, $\Delta y = -2$.

Фигура 2: опорная прямая повернута на угол $\alpha = 90^0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят, путем пересчета координат точек на опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.9. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = -1.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = 2.5$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 3$, $\Delta y = 4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -45^0$ относительно опорной прямой.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1 и 2.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.10. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $3 \cdot x - 6 \cdot y + 5 = 0$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 3$, $\Delta y = -4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = 35^0$ относительно опорной прямой.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve**(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.11. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $3 \cdot x - 6 \cdot y + 5 = 0$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 3$, $\Delta y = -4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = 35^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена в базовую точку $x_b = 5$, $y_b = 4$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve**(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур, базовую точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.12. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = -3.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = -9$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -3$, $\Delta y = 4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -60^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена в базовую точку $x_b = 2$, $y_b = 2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят, путем пересчета координат точек на опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур, опорную точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.13. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $3 \cdot x - 6 \cdot y + 5 = 0$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 3,\ \Delta y = -4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = 35^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -2$, $\Delta y = -4$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.14. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = -3.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = -9$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -3$, $\Delta y = 4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -60^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 5$, $\Delta y = -4$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят, путем пересчета координат точек на опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.15. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $3 \cdot x - 4 \cdot y + 5 = 0$.

Фигура 1: повернута на угол $\alpha = 95^0$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = 15^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена в базовую точку $x_b = 3$, $y_b = 8$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур, опорную точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.16. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: прямая пересекает ось 0X в точке $a1 = -3.5$, а ось 0Y – в точке $b1 = -9$.

Фигура 1: повернута на угол $\alpha = 85^0$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -30^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена в опорную точку $x_{оп} = -4$, $y_{оп} = 2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2, через которые они проходят, путем пересчета координат точек на опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур, базовую точку и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.17. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $3 \cdot x - 2 \cdot y + 3 = 0$.

Фигура 1: повернута на угол $\alpha = 75^0$ относительно опорной прямой и смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -3$, $\Delta y = 4$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -15^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена по осям 0X и 0Y на $\Delta x = -3$, $\Delta y = -2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя функцию ***lsolve****(A,B)*.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

Задание 3.18. Найти точку пересечения двух прямых.

1. Опорная прямая: $-3 \cdot x + 4 \cdot y + 3 = 0$.

Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 3$, $\Delta y = 1$ относительно опорной прямой.

Фигура 2: прямая повернута на угол $\alpha = -60^0$ относительно опорной прямой и параллельно смещена по осям 0X и 0Y на $\Delta x = 5$, $\Delta y = -4$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур и рассчитать координаты точек пересечения осей 0X и 0Y на фигурах 1, 2 и опорной прямой.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу.

4. Построить графики фигур и точки, через которые они проходят, указать точку пересечения фигур и нанести опорную прямую (штриховой линией) и точки, через которые она проходит.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1. Общие положения

1. В матричном виде система линейных уравнений имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $X \cdot A = B$
2. $A \cdot B = X$
3. $A \cdot X = B$
4. $B \cdot A = X$
5. Нет выражения

Ответ: 3.

2. В матричном виде система линейных уравнений имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $A \cdot B = X$.

3. В матричном виде вектор неизвестных системы линейных уравнений ищется в виде ______ (выбрать из списка).

1. $X = B \cdot A$
2. $X = A \cdot B$
3. $X = A \cdot B^{-1}$
4. $X = A^{-1} \cdot B$
5. $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$
6. Нет выражения

Ответ: 4

4. В матричном виде вектор неизвестных системы линейных уравнений ищется в виде ______ (вписать выражение).

Ответ: $X = A^{-1} \cdot B$.

5. Уравнение, описывающее прямую, проходящую через две любые точки, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0$.

6. Уравнение, описывающее прямую, проходящую через две любые точки, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$.

7. Уравнение, описывающее прямую, проходящую через две любые точки, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{x_1 - x}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0$
2. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0$
3. $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{x - y}{y_2 - y_1} = 0$
4. $\frac{x - x_1}{y_2 - y_1} - \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1} = 0$
5. Нет выражения

Ответ: 2.

8. Выражения для расчета точек (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением прямой, проходящей через две любые точки, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $a = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_1 - y_2}$, $b = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}$.

9. Функция построения графика прямой, описываемой уравнением $a_{0,0}x + a_{0,1}y = b_0$, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \frac{b_0 - a_{0,0}x}{a_{0,1}}$.

10. Уравнение, описывающее прямую, пересекающую оси 0X и 0Y, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0$
2. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + c = 0$
3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1 = 0$
4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$
5. Нет выражения

Ответ: 4.

11. Выражения для расчета точек (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением прямой, проходящей через две любые точки, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $a = -\dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_1 - y_2}$, $b = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}$
2. $a = \dfrac{x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{y_1 - y_2}$, $b = \dfrac{x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}$
3. $a = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_1 + y_2}$, $b = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 + x_2}$
4. $a = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_1 - y_2}$, $b = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}$
5. Нет выражения

Ответ: 1.

12. Рассчитать точки (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением прямой, проходящей точки ($x_1 = -3, y_1 = -1$) и ($x_2 = -1, y_2 = -6$) ______ (вписать координаты).

Ответ: a = –3.4, b = –8.5.

13. Рассчитать точки (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением прямой, проходящей точки ($x_1 = -3, y_1 = -1$) и ($x_2 = -1, y_2 = -6$) _________ (выбрать из списка).

1. a = 0.3, b = –8
2. a = –4.2, b = –9.3
3. a = –3.4, b = –8.5
4. a = 0.5, b =5
5. Нет выражения

Ответ: 3.

14. Выражения для расчета точек (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $a = -\dfrac{c_1}{a_1}$, $b = -\dfrac{c_1}{b_1}$.

15. Рассчитать точки (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением $-5 \cdot x + 7 \cdot y + 3 = 0$ ______ (вписать координаты)

Ответ: a = 0.6, b = –0.43.

16. Для расчета координат фигуры при перемещении и повороте используется ______ (вписать слово) преобразования.
Ответ: аффинные.

17. Рассчитать точки (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением $-5 \cdot x + 7 \cdot y + 3 = 0$ _________ (выбрать из списка).

1. a = 0.6, b = –0.43
2. a = –1.2, b = –3.3
3. a = –0.4, b = –0.8
4. a = 0.1, b = 5
5. Нет выражения

Ответ: 1.

18. Уравнение прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ в матричной форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $AB^T \cdot XY - c1 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2. $XY \cdot AB^T - c1 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
3. $AB^T \cdot XY + c1 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
4. $AB \cdot XY + c1 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
5. Нет выражения

Ответ: 3.

19. Уравнение прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ в матричной форме имеет вид ______ (вписать выражение и расшифровать входящие массивы).

Ответ: $AB^T \cdot XY + c1 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

20. Функция для построения прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = -\dfrac{c1 + a1 \cdot x}{b1}$.

21. Выражения для расчета точек (a, b) пересечения осей координат 0X и 0Y прямой, описываемой уравнением $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $a = \frac{c_1}{a_1}, b = -\frac{c_1}{b_1}$
2. $a = \frac{c_1}{a_1}, b = \frac{c_1}{b_1}$
3. $a = -\frac{c_1}{a_1}, b = \frac{c_1}{b_1}$
4. $a = -\frac{c_1}{a_1}, b = -\frac{c_1}{b_1}$
5. Нет выражения

Ответ: 4.

22. При параллельном перемещении фигуры на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и OY аффинные преобразования имеют вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\begin{cases} x^I = x - \vartriangle x; \\ y^I = y - \vartriangle y. \end{cases}$

23. Уравнение прямой $a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0$ (в локальной системе координат) после параллельного перемещении фигуры на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y в глобальной системе координат имеют вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $a \cdot (x - \vartriangle x) + b \cdot (y - \vartriangle y) + c = 0$.

24. В матричном виде уравнение прямой $a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0$ (в локальной системе координат) после параллельного переноса примет вид в глобальной системе координат ______ (вписать выражение, расшифровать массивы).

Ответ: $AB^T \cdot (XY - \vartriangle XY) + c = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

25. Функция для построения прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ в глобальной системе координат после параллельного смещения прямой на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = -\frac{a1 \cdot (x + \vartriangle x) - c1}{b1} + \vartriangle y$.

26. При параллельном перемещении фигуры на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y аффинные преобразования имеют вид ______ (выбрать выражение).

1. $\begin{cases} x^I = x - \vartriangle x; \\ y^I = y - \vartriangle y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^I = x + \vartriangle x; \\ y^I = y + \vartriangle y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^I = x - 2 \cdot \vartriangle x; \\ y^I = y - 2 \cdot \vartriangle y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^I = x - \vartriangle x^2; \\ y^I = y - \vartriangle y^2 \end{cases}$
5. Нет выражения

Ответ: 1.

27. Рассчитать координаты точки на прямой (x_1, y_1) в глобальной системе координат при параллельном смещении на $\vartriangle x = -4$, $\vartriangle y = 2$ по осям 0X и 0Y, если в локальной системе координат точка имела координаты
($x_1^I = -3$, $y_1^I = -1$) ______ (вписать значения координат).
Ответ: $x_1 = -7$, $y_1 = 1$.

28. Рассчитать величину параллельного смещения $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y, если координаты точки на прямой равны ($x_1 = 8$, $y_1 = 4$) в глобальной системе координат, а в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = -1$) ______ (вписать значения координат).
Ответ: $\vartriangle x = 5$, $\vartriangle y = 5$.

29. При повороте фигуры на угол α аффинные преобразования имеют вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$

30. При повороте фигуры на угол α аффинные преобразования в матричной форме имеют вид ______ (вписать выражение и расшифровку массивов в выражении).

Ответ: $XY^I = M\alpha \cdot XY$, $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

31. При повороте фигуры на угол α аффинные преобразования имеют вид ______ (выбрать выражение).

1. $\begin{cases} x' = -x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$	
2. $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) - y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$	
3. $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$	
4. $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$	
5. Нет выражения	

Ответ: 3.

32. В матричном виде уравнение прямой $a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0$ (в локальной системе координат) после поворота фигуры на угол α примет вид в глобальной системе координат ______ (вписать выражение, расшифровать массивы).

Ответ: $AB^T\left(M\alpha \cdot XY\right) + c = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

33. Функция для построения прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол α имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ:

$$y = -\frac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\sin(\alpha) \cdot (y1 - y2) - \cos(\alpha) \cdot (x1 - x2)} x - \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\sin(\alpha) \cdot (y1 - y2) - \cos(\alpha) \cdot (x1 - x2)}.$$

34. Рассчитать координаты точки на прямой (x_1, y_1) в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол $\alpha = 60^0$, если в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = 1$) ______ (вписать значения координат).

Ответ: $x_1 = 0.63$, $y_1 = 3.1$.

35. При повороте фигуры на угол α и параллельном смещении на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y аффинные преобразования имеют вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\begin{cases} x' = (x - \vartriangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -(x - \vartriangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$

36. Рассчитать координаты точки на прямой (x_1, y_1) в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол $\alpha = 45^0$, если в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = 1$) ______ (вписать значения координат).
Ответ: $x_1 = 1.414$, $y_1 = 2.828$.

37. При повороте фигуры на угол α и параллельном смещении на $\triangle x$, $\triangle y$ по осям 0X и 0Y аффинные преобразования в матричной форме имеют вид ______ (вписать выражение и расшифровку массивов в выражении).
Ответ:

$$XY^I = M\alpha \cdot (XY - \triangle XY),\; XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix},\; M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\; \triangle XY = \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix}.$$

38. При повороте фигуры на угол α и параллельном смещении на $\triangle x$, $\triangle y$ по осям 0X и 0Y аффинные преобразования имеют вид ______ (выбрать выражение).

1. $\begin{cases} x' = (x + \triangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \triangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -(x - \triangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y + \triangle y) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = (x - \triangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \triangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -(x - \triangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \triangle y) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = (x - \triangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \triangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = (x - \triangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \triangle y) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = (x - \triangle x) \cdot \cos(\alpha) - (y - \triangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = (x - \triangle x) \cdot \sin(\alpha) - (y - \triangle y) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$
5. Нет выражения

Ответ: 2.

39. Уравнение прямой $a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0$ (в локальной системе координат) после поворота фигуры на угол α и параллельном смещении на $\triangle x$, $\triangle y$ по осям 0X и 0Y в глобальной системе координат имеют вид ______ (вписать выражение).

Ответ:
$$a \cdot \Big(\big(x - \triangle x \big) \cdot \cos(\alpha) + \big(y - \triangle y \big) \cdot \sin(\alpha) \Big) + \ldots$$
$$\ldots + b \cdot \Big(-\big(x - \triangle x \big) \cdot \sin(\alpha) + \big(y - \triangle y \big) \cdot \cos(\alpha) \Big) + c = 0.$$

40. В матричном виде уравнение прямой $a \cdot x^I + b \cdot y^I + c = 0$ (в локальной системе координат) после поворота фигуры на угол α и параллельном смещении на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y примет вид в глобальной системе координат ______ (вписать выражение, расшифровать массивы).

Ответ: $AB^T \cdot \left(M\alpha \cdot (XY - \vartriangle XY) \right) + c = 0$, $AB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

41. Функция для построения прямой $a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = 0$ в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол α и параллельном смещении на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям 0X и 0Y, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = k_3 \cdot \left(x - \vartriangle x \right) + \vartriangle y + k_4$, $k_3 = \dfrac{\sin(\alpha) \cdot (x1 - x2) + \cos(\alpha) \cdot (y1 - y2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)}$,

$k_4 = \dfrac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)}$.

42. Рассчитать координаты точки на прямой (x_1, y_1) в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол $\alpha = 30^0$ и параллельном смещении на $\vartriangle x = 4$, $\vartriangle y = -2$ по осям 0X и 0Y, если в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = 1$) ______ (вписать значения координат).

Ответ: $x_1 = 6.1$, $y_1 = 0.37$.

43. Рассчитать координаты точки на прямой (x_1, y_1) в глобальной системе координат после поворота фигуры на угол $\alpha = 45^0$ и параллельном смещении на $\vartriangle x = 3$, $\vartriangle y = 3$ по осям 0X и 0Y, если в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = 1$) ______ (вписать значения координат).

Ответ: $x_1 = 4.414$, $y_1 = 5.828$.

44. Рассчитать величину параллельного смещения $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ прямой по осям 0X и 0Y, при одновременном повороте на угол $\alpha = 30^0$ и параллельном смещении фигуры, если координаты точки на прямой равны ($x_1 = 1$, $y_1 = 10$) в глобальной системе координат, а в локальной системе координат точка имела координаты ($x_1^I = 3$, $y_1^I = 1$) ______ (вписать значения координат).

Ответ: $\vartriangle x = -1.1$, $\vartriangle y = 7.63$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.
2. Дьяконов В.П. MathCAD 11/12/13 в математике: Справ. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.
3. Использование MathCAD в теории матриц: Метод. указания / И.В. Кудрявцева, В.А. Рыков, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011. – 50 с.
4. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MathCAD: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
6. Практические занятия в пакете MathCAD по исследованию систем линейных алгебраических уравнений: Пособие / В.А. Рыков, С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. – 107 с.
7. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгстел К. Оптимизация в технике. В 2 кн. Кн. 1. – М.: Мир, 1986. – 349 с.
8. Хаммельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: изд. «МИР», 1975. – 534 с.
9. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков, Е.Д. Скобов. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2014. – 166 с.
10. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. II: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. – 178 с.
11. Практикум по работе в математическом пакете MathCAD: Пособие / С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, В.А. Рыков. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. – 84 с.
12. Некоторые главы MathCAD необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Основы программирования, массивы, графики: учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, П.С. Поцелуева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГМТУ, 2023. – 286 с.
13. Некоторые главы MathCAD необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Решение уравнений, собственные функции, символьные расчеты: учеб. пособие / Д.Э. Гуськова, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГМТУ, 2023. – 181 с.
14. Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В., Рыков В.А., Старков К.А., Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть VII. Многомерная оптимизация. Численный метод нулевого порядка. Метод наилучшей пробы. – СПб: Университет ИТМО, 2020, – 91 с.

15. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 3. Многомерная оптимизация. Аналитические методы: Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 164 с.

16. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 4. Методы оптимизации. Тесты с ответами: Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 85 с.

17. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 5 Многомерная оптимизация. Численные методы. Метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге. Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2020. – 109 с.

18. С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина. Конспект лекций для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 72 с.

19. Макаров Е.М. Линейные и афинные пространства в компьютерной геометрии. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 36 с.

20. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Аналитическая геометрия евклидового пространства. Учебное пособие. I–II семестры. – Казань: Казанский университет, 2014. – 204 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ РАСЧЕТА ТОЧЕК ПРЕСЕЧЕНИЯ ФИГУР

Пример № 2.1 Найти точку пересечения двух прямых.
Фигура 1: прямая проходит через точки (x11,y11) и (x21,y21);
Фигура 2: прямая пересекает ось 0X в точке ***a1*** и ось 0Y в точке ***b1***;

1. Получить аналитические выражения для построения прямых.
2. Рассчитать точку пересечения прямых, используя обратную матрицу и функцию lsolve(▪). Сравнить полученные результаты.
3. Построить графики прямых, точки через которые они проходят, точку пересечения прямых.

Исходные данные

Фигура 1

$x11 := -3 \quad y11 := -1$ координаты первой точки

$x21 := -1 \quad y21 := -6$ координаты второй точки

Фигура 2.

$a1 := 5$ пересечение оси 0X

$b1 := -2$ пересечение оси 0Y

1. Функции для построения графиков прямых

1. Фигура 1

Аналитическое описание $\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной у

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \left| \begin{matrix} solve, y \\ collect, x \end{matrix} \right. \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f1(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения гарфика опорной прямой

$$f1(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Координаты точек через которые проходит опорная прямая

$t11(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad t12(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$

Рис. А 1. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 1 (Пример № 2.1)

2.Фигура 2: прямая пересекает оси 0X и 0Y в точках ***a*** и ***b***

Фигура 2 аналитическое описание $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 =$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \;\left|\begin{array}{l}\text{solve}, y\\ \text{collect}, x\end{array}\right. \rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + b \qquad \left(-\frac{b1}{a1}\right)\cdot x + b1 \text{ simplify } \rightarrow \frac{2\cdot x}{5} - 2$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f2(x, a, b)$

Функция для построения графика фигуры 2

$$f2(x, a, b) := \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + b$$

Координаты точек через которые пройдет фигура 2

$$t21(a) := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t22(b) := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

2. Рассчитать точку пересечения прямых

Представить описание выражений для прямых в виде

Фигура 1 $a01\cdot x + b01\cdot y = c01$ Фигура 2 $a02\cdot x + b02\cdot y = c02$

тогда искомые переменные в $\text{lsolve}(A, B)$ $A := \begin{pmatrix} a01 & b01 \\ a02 & b02 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} c01 \\ c02 \end{pmatrix}$

Фигура 1. Преобразовать выражения к виду $a01\cdot x + b01\cdot y = c01$

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \text{ collect}, x, y \rightarrow \left(-\frac{1}{x1 - x2}\right)\cdot x + \frac{y}{y1 - y2} + \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

$$a01(x1, x2) := -\frac{1}{x1 - x2} \qquad b01(y1, y2) := \frac{1}{(y1 - y2)} \qquad c01(x1, y1, x2, y2) := -\left(\frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}\right)$$

Фигура 2. Преобразовать выражения к виду $a02\cdot x + b02\cdot y = c02$

Рис. А 2. Листинг программы расчета точек пересечения прямых.
Часть 2 (Пример № 2.1)

2.Фигура 2: прямая пересекает оси 0X и 0Y в точках ***a*** и ***b***

Фигура 2 аналитическое описание $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 =$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \;\Big|\begin{matrix}\text{solve}, y\\ \text{collect}, x\end{matrix} \rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + b \qquad \left(-\frac{b1}{a1}\right)\cdot x + b1 \text{ simplify } \rightarrow \frac{2\cdot x}{5} - 2$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f2(x, a, b)$

Функция для построения графика фигуры 2

$$f2(x, a, b) := \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + b$$

Координаты точек через которые пройдет фигура 2

$$t21(a) := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t22(b) := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

2. Рассчитать точку пересечения прямых

Представить описание выражений для прямых в виде

Фигура 1 $a01\cdot x + b01\cdot y = c01$ Фигура 2 $a02\cdot x + b02\cdot y = c02$

тогда искомые переменные в $\text{lsolve}(A, B)$ $A := \begin{pmatrix} a01 & b01 \\ a02 & b02 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} c01 \\ c02 \end{pmatrix}$

Фигура 1. Преобразовать выражения к виду $a01\cdot x + b01\cdot y = c01$

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \text{ collect}, x, y \rightarrow \left(-\frac{1}{x1 - x2}\right)\cdot x + \frac{y}{y1 - y2} + \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

$$a01(x1, x2) := -\frac{1}{x1 - x2} \qquad b01(y1, y2) := \frac{1}{(y1 - y2)} \qquad c01(x1, y1, x2, y2) := -\left(\frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}\right)$$

Фигура 2. Преобразовать выражения к виду $a02\cdot x + b02\cdot y = c02$

Рис. А 3. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 3 (Пример № 2.1)

$a02(a) := \frac{1}{a}$ $\quad b02(b) := \frac{1}{b}$ $\quad c02 := 1$

Тогда искомая матрица A и вектор B) после подстановки конкретныхзначений (см. исходные данные) равны

$$A := \begin{pmatrix} a01(x11, x21) & b01(y11, y21) \\ a02(a1) & b02(b1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} c01(x11, y11, x21, y21) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Расчет точки пересечения с использованием обратной матрицы

$$XYint := A^{-1} \cdot B \qquad XYint = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix}$$

Расчет точки пересечения с использованием функции lsolve(A, B)

$$XYint := lsolve(A, B) \; XYint = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix}$$

Вывод:

1. точка пересчения прямых равна $XYint = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix}$;
2. обо способа расчета дали одинаковые результаты.

Расчет векторов для построения графиков фигур

$x_{min} := -10 \quad x_{max} := 10 \quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $\quad i := 0..N1$ дискретный аргумент

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, x11, y11, x21, y21)}$ ординаты фигуры 1

$yy2 := \overrightarrow{f2(xx, a1, b1)}$ ординаты фигуры 2

Рис. А 4. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 4 (Пример № 2.1)

Координы точек через которые проходят фигуры

$$bl\_v(f1, f2) := vxy \leftarrow \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент х-координаты двух точек, второй элемент - у - координаты двух точек.
на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

Точка пересечения прямых $XYint = \begin{pmatrix} -2.241 \\ -2.897 \end{pmatrix}$

Фигура1 $XY1 := bl\_v(t11(x11, y11), t12(x21, y21))$ $XY1^T = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \right]$

Фигура 2 $XY2 := bl\_v(t21(a1), t22(b1))$ $XY2^T = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

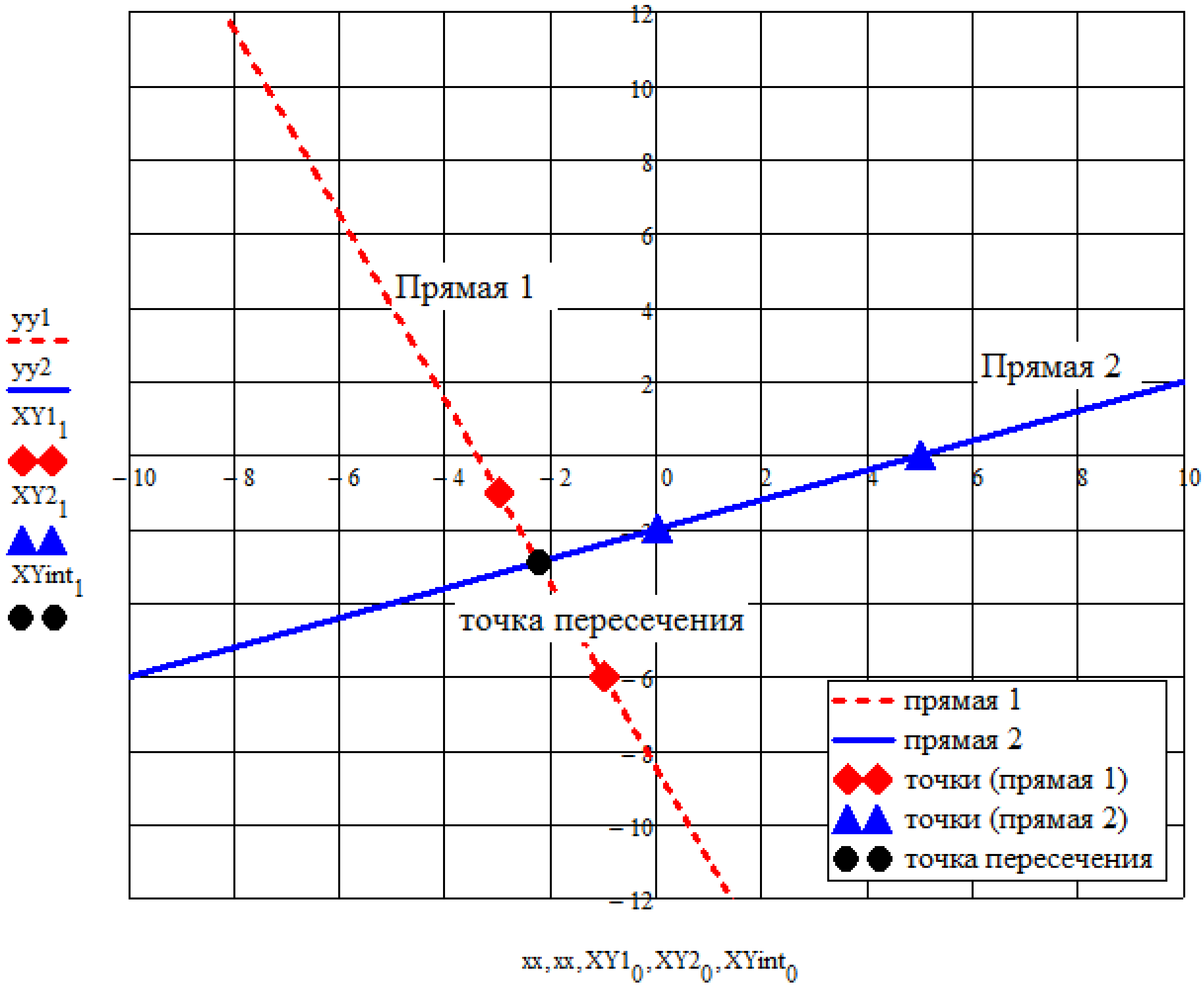


Рис. А 5. Листинг программы расчета точек пересечения прямых.
Часть 5 (Пример № 2.1)

Пример №2.2 Найти точку пересечения двух прямых.
1. Опорная прямая проходит через точки (x11,y11) и (x21,y21);
Фигура 1: опорная прямая повернута на угол $\alpha 1$;
Фигура 2: опорная прямая повернута на угол $\beta 1$ и параллельно смещена в базовую точку x0, y0;
2. Рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2 через которые они проходят, используя точки (x11,y11) и (x21,y21).
3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя обратную матрицу и lsolve(▪) функцию
4. Построить графики фигур, точки через которые они проходят, точку пересечения прямых и нанести опорную прямую (шриховой линией) с точками через которые она проходит.

Исходные данные

Координаты двух точек через которые проходит опорная прямая

$x11 := 3 \quad y11 := 1$ координаты первой точки (опорная прямая)

$x21 := -1 \quad y21 := -2$ координаты второй точки (опорная прямая)

$\alpha 1 := 90°$ угол поворота (в градусах) опорной прямой (фигуры 1)

$\beta 1 := 30°$ угол поворота (в градусах) опорной прямой (фигуры 2)

$x0 := 1 \quad y0 := 10$ координаты базовой точки через которую проходит фигура 2

$$XY0 := \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. Функции для построения графиков прямых

Опорная прямая:

Аналитическое описание $\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \ \Bigg| \begin{matrix} \text{solve}, y \\ \text{collect}, x \end{matrix} \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f0(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения гарфика опорной прямой

$$f0(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Рис. А 6. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 1 (Пример № 2.2)

Координаты точек через которые проходит опорная прямая

$$t1(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad t2(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

1.1. Фигура 1 - опорная прямая повернута на угол α

Аффинные преобразования при поворота координат

$$X(x, y, \alpha) := x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) \qquad Y(x, y, \alpha) := -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$

Фигура 1 аналитическое описание $\dfrac{X(x, y, \alpha) - x1}{x2 - x1} - \dfrac{Y(x, y, \alpha) - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y и скопировать в f1(x, x1, y1, x2, y2, α)

$$\frac{X(x, y, \alpha) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y(x, y, \alpha) - y1}{y2 - y1} \left| \begin{array}{l} \text{solve}, y \\ \text{collect}, x, \cos(\alpha), \sin(\alpha) \end{array} \right. \rightarrow \frac{\cos(\alpha) \cdot (y1 - y2) + \sin(\alpha) \cdot (x1 - x2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)}$$

$$f1(x, x1, y1, x2, y2, \alpha) := \frac{\cos(\alpha) \cdot (y1 - y2) + \sin(\alpha) \cdot (x1 - x2)}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha) \cdot (x1 - x2) - \sin(\alpha) \cdot (y1 - y2)}$$

Рис. А 7. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 2 (Пример № 2.2)

Координаты точек

Пересчитать координаты точек на опорной прямой (x1,y1) и (x2,y2) в соответствующие координаты точек на фигуре 1

Выражение для пересчета локальных координат точки (x1,y1) в глобальные координаты XY имеет вид

координаты точки t1 (функция $t1\alpha(x1,y1,\alpha)$) на фигуре 2 при пересчете точки (x1,y1)

$$M\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad XY1 := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$$

$$t1\alpha(x1,y1,\alpha) := M\alpha^{-1} \cdot XY1 \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} x1\cdot\cos(\alpha) - y1\cdot\sin(\alpha) \\ x1\cdot\sin(\alpha) + y1\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

координаты точки t2 (функция $t2\alpha(x1,y1,\alpha)$) на фигуре 2 при пересчете точки (x2,y2)

$$XY2 := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

$$t2\alpha(x2,y2,\alpha) := M\alpha^{-1} \cdot XY2 \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} x2\cdot\cos(\alpha) - y2\cdot\sin(\alpha) \\ x2\cdot\sin(\alpha) + y2\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

1.2. Фигура 2 - опорная прямая повернута на угол β и параллельно смещена в точку с координатами x0, y0

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$$X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) := (x - \Delta x)\cdot\cos(\alpha) + (y - \Delta y)\cdot\sin(\alpha)$$

$$Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) := -(x - \Delta x)\cdot\sin(\alpha) + (y - \Delta y)\cdot\cos(\alpha)$$

Фигура 2 аналитическое описание $\dfrac{X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - x1}{x2 - x1} - \dfrac{Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - y1}{y2 - y1} = 0$

Рис. А 8. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 3 (Пример № 2.2)

$$\frac{X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-x1}{x2-x1}-\frac{Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-y1}{y2-y1}\ \begin{vmatrix} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x, \cos(\alpha), \sin(\alpha) \\ \text{collect}, \Delta x, \Delta y \end{vmatrix} \rightarrow \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}\right]\cdot\Delta x+\Delta y+\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}+\frac{x\cdot[\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}\right]\cdot\Delta x+\Delta y+\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}+\frac{x\cdot[\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)]}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

Обозначить

$$fK(x1,y1,x2,y2,\alpha):=\frac{\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)+\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

$$fK1(x1,y1,x2,y2,\alpha):=\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

$$f2(x,x1,y1,x2,y2,\alpha,\Delta x,\Delta y):=fK(x1,y1,x2,y2,\alpha)\cdot(x-\Delta x)+\Delta y+fK1(x1,y1,x2,y2,\alpha)$$

Небходимо определить величины $\Delta x, \Delta y$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена после поворота и проходит через очку x0, y0

Рис. А 9. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 4 (Пример № 2.2)

$XY0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ базовая точка через которую проходит фигура 2 (задается)

$M\beta := \begin{pmatrix} \cos(\beta 1) & \sin(\beta 1) \\ -\sin(\beta 1) & \cos(\beta 1) \end{pmatrix}$ матрица поворота фгуры 2

$XY1 := \begin{pmatrix} x11 \\ y11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ координаты точки фигуры 2 в локальной системе координат

$\Delta XY := XY0 - M\beta^{-1} \cdot XY1 = \begin{pmatrix} -1.098 \\ 7.634 \end{pmatrix}$ величины $\Delta x, \Delta y$

Координаты точек через которые пройдет фигура 2
Первая точка ($t1\alpha\Delta$) совмещена с базовой точкой (x0,y0).
Осталось определить координаты второй точки ($t2\alpha\Delta$).

$t1\alpha\Delta := XY0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$XY2 := \begin{pmatrix} x21 \\ y21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ координаты второй точки фигуры 2 в локальной системе координат

$t2\alpha\Delta := M\beta^{-1} \cdot XY2 + \Delta XY$ $\quad t2\alpha\Delta = \begin{pmatrix} -0.964 \\ 5.402 \end{pmatrix}$

2. Рассчитать точку пересечения прямых (фигура 1 и фигура 2)

2.1. Использовать команду lsolve(A,B)

Представить описание выражений для фигур в виде

Фигура 1 $a01 \cdot x + b01 \cdot y = c01$ Фигура 2 $a02 \cdot x + b02 \cdot y = c02$

тогда искомая точка пересечения прямых определится в lsolve(A,B) $\quad A := \begin{pmatrix} a01 & b01 \\ a02 & b02 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} c01 \\ c02 \end{pmatrix}$

Фигура 1. Преобразовать выражения к виду $a01 \cdot x + b01 \cdot y = c01$

$\frac{X(x,y,\alpha) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y(x,y,\alpha) - y1}{y2 - y1}$ collect, x, y $\rightarrow \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right) \cdot y + \frac{}{x}$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже

$$\left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right) \cdot y + \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

Рис. А 10. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 5 (Пример № 2.2)

$$a02(x1,x2,y1,y2,\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{x1-x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1-y2} \qquad b02(x1,x2,y1,y2,\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{y1-y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1-x2}$$

$$c02(x1,x2,y1,y2) := \frac{x1}{x1-x2} - \frac{y1}{y1-y2}$$

Фигура 2. Преобразовать выражения к виду $a03\cdot x + b03\cdot y = c03$

$$\frac{X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - x1}{x2-x1} - \frac{Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - y1}{y2-y1} \text{ collect}, x, y \rightarrow \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1-x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1-y2}\right)\cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1-y2}\right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже

$$\left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1-x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1-y2}\right)\cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1-y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1-x2}\right)\cdot y \ldots$$
$$+ \frac{x1 + \Delta x\cdot\cos(\alpha) + \Delta y\cdot\sin(\alpha)}{x1-x2} - \frac{y1 + \Delta y\cdot\cos(\alpha) - \Delta x\cdot\sin(\alpha)}{y1-y2}$$

переменная ***a3***

$$a03(x1,y1,x2,y2,\alpha) := -\frac{\cos(\alpha)}{x1-x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1-y2}$$

переменная ***b3***

$$b03(x1,y1,x2,y2,\alpha,\Delta x,\Delta y) := \frac{\cos(\alpha)}{y1-y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1-x2}$$

переменная ***c3***

$$c03(x1,y1,x2,y2,\alpha,\Delta x,\Delta y) := \frac{x1 + \Delta x\cdot\cos(\alpha) + \Delta y\cdot\sin(\alpha)}{x1-x2} - \frac{y1 + \Delta y\cdot\cos(\alpha) - \Delta x\cdot\sin(\alpha)}{y1-y2}$$

Искомая матрица А ($fA(x1,y1,x2,y2,\alpha,\beta,\Delta x,\Delta y)$) и вектор В ($B$) будут равны

<u>матрица А</u>

$\Delta x := \Delta XY_0 = -1.098 \qquad \Delta y := \Delta XY_1 = 7.634$

$$A := \begin{pmatrix} a02(x11,x21,y11,y21,\alpha1) & b02(x11,x21,y11,y21,\alpha1) \\ a03(x11,y11,x21,y21,\beta1) & b03(x11,y11,x21,y21,\beta1,\Delta x,\Delta y) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -0.333 & -0.25 \\ -0.383 & 0.164 \end{pmatrix}$$

<u>вектор В</u>

$$B := \begin{pmatrix} -c02(x11,x21,y11,y21) \\ -c03(x11,y11,x21,y21,\beta1,\Delta x,\Delta y) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -0.417 \\ 1.254 \end{pmatrix}$$

Рис. А 11. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 6 (Пример № 2.2)

точка пересечения фигуры 1 и фигуры 2 XYint определится как

$$XYint := lsolve(A,B) \qquad XYint = \begin{pmatrix} -1.631 \\ 3.841 \end{pmatrix}$$

2.1. Использовать блок Given-Find

константы $\alpha 1 = 90 \cdot ^\circ$ $\beta 1 = 30 \cdot ^\circ$ $\Delta x = -1.098$ $\Delta y = 7.634$

начальные приближения

$xn := 1 \qquad yn := 1$

Given

$$\frac{xn \cdot \cos(\alpha 1) + yn \cdot \sin(\alpha 1) - x11}{x21 - x11} - \frac{-xn \cdot \sin(\alpha 1) + yn \cdot \cos(\alpha 1) - y11}{y21 - y11} = 0$$

$$\frac{(xn - \Delta x) \cdot \cos(\beta 1) + (yn - \Delta y) \cdot \sin(\beta 1) - x11}{x21 - x11} - \frac{-(xn - \Delta x) \cdot \sin(\beta 1) + (yn - \Delta y) \cdot \cos(\beta 1) - y11}{y21 - y11} = 0$$

$$XY1int := Find(xn, yn) \qquad XY1int = \begin{pmatrix} -1.631 \\ 3.841 \end{pmatrix}$$

Вывод: координаты точки пересечени фигур $XY1int = \begin{pmatrix} -1.631 \\ 3.841 \end{pmatrix}$. Оба метода дают одинаковый результат

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -10 \qquad x_{max} := 15 \quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $i := 0 .. N1$ дискретный аргумент

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

Рис. А 12. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 7 (Пример № 2.2)

$$yy0 := \overrightarrow{f0(xx, x11, y11, x21, y21)}$$ ординаты опорной прямой

$$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, x11, y11, x21, y21, \alpha 1)}$$ ординаты фигуры 1

$$\Delta XY := \begin{pmatrix} -1.098 \\ 7.634 \end{pmatrix}$$ см. выше

$$yy2 := \overrightarrow{f2(xx, x11, y11, x21, y21, \beta 1, \Delta XY_0, \Delta XY_1)}$$ ординаты фигуры 2

3.2. Координы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент х-координаты двух точек, второй элемент - у - координаты двух точек. на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Опорная прямая

$$XY1 := t1(x11, y11) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad XY2 := t2(x21, y21) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$XY12 := bl\_v(XY1, XY2) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Фигура1 (поворот)

$$XY12\alpha := bl\_v(t1\alpha(x11, y11, \alpha 1), t2\alpha(x21, y21, \alpha 1)) \qquad XY12\alpha^T = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Фигура 2 (поворот и перенос)

$$XY12\Delta\beta := bl\_v(t1\alpha\Delta, t2\alpha\Delta) \qquad XY12\Delta\beta^T = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -0.964 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 10 \\ 5.402 \end{pmatrix} \right]$$

Рис. А 13. Листинг программы расчета точек пересечения прямых.
Часть 8 (Пример № 2.2)

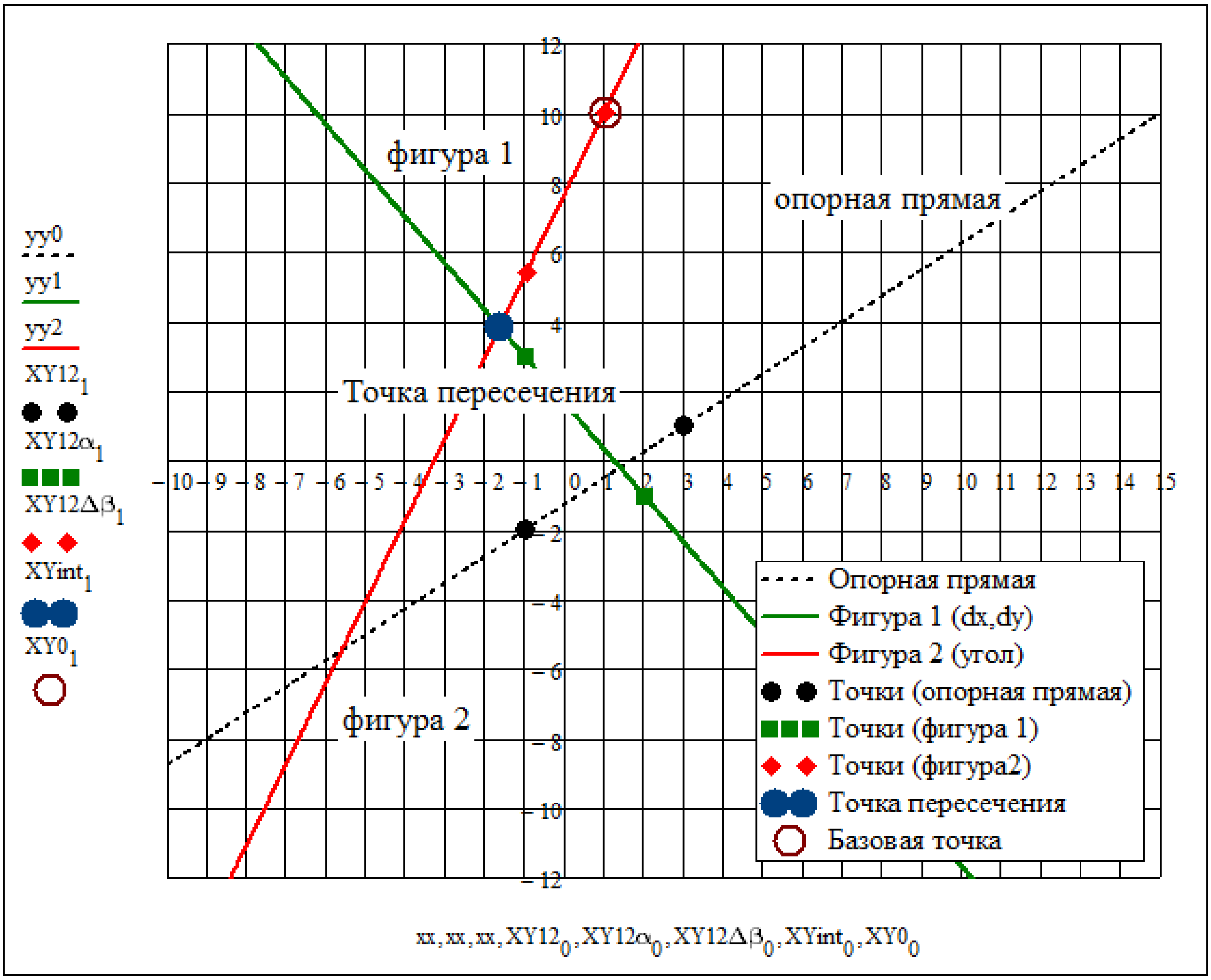


Рис. А 14. Листинг программы расчета точек пересечения прямых.
Часть 9 (Пример № 2.2)

Пример № 2.3. Найти точку пересечения двух прямых.
1. Опорная прямая проходит через точки (x11,y1) и (x21,y21)
Фигура 1: опорная прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x2, \Delta y2$;
Фигура 2: опорная прямая повернута на угол $\alpha 1$;
2. Рассчитать координаты двух точек на фигурах 1 и 2 через которые они проходят, используя точки (x11,y11) и (x21,y21) на опорной прямой как исходные.
3. Рассчитать точку пересечения фигур 1 и 2, используя обратную матрицу и функцию $\mathrm{lsolve}(\blacksquare)$. Сравнить полученные результаты.
4. Построить графики фигур, точек через которые они проходят, точку пересечения прямых и нанести опорную прямую (шриховой линией) с точками через которые она проходит.

Исходные данные

Координаты двух точек через которые проходит опорная прямая

$x11 := -3 \quad y11 := -1$ координаты первой точки (опорная прямая)

$x21 := -1 \quad y21 := -6$ координаты первой точки (опорная прямая)

$\Delta x2 := -4 \quad \Delta y2 := -2$ параллельное смещение фигуры1 относительно опорной прямой

$\alpha 1 := 80°$ угол поворота (в градусах) фигуры2 относительно опорной прямой

<u>1. Функции для построения графиков прямых</u>

Опорная прямая:

<u>Аналитическое описание</u> $\dfrac{x - x1}{x2 - x1} - \dfrac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \;\Bigg|\begin{array}{l}\mathrm{solve}, y\\ \mathrm{collect}, x\end{array} \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2}\cdot x + \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f0(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения гарфика опорной прямой

$$f0(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2}\cdot x + \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{x1 - x2}$$

<u>Координаты точек</u> через которые проходит опорная прямая

$$t1(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad t2(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

Рис. А 15. Листинг программы расчета точек пересечения прямых.
Часть 1 (Пример № 2.3)

1.1.Фигура 1: прямая смещена параллельно по осям 0X и 0Y на $\Delta x1, \Delta y2$ оносительно опорной прямой проходящая через точки (x1,y1) и (x2,y2)

Фигура 1 аналитическое описание $\frac{(x-\Delta x1)-x1}{x2-x1} - \frac{(y-\Delta y1)-y1}{y2-y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{(x-\Delta x1)-x1}{x2-x1} - \frac{(y-\Delta y1)-y1}{y2-y1} \;\left|\begin{array}{l}\text{solve}, y\\ \text{collect}, x\end{array}\right. \rightarrow \frac{y1-y2}{x1-x2}\cdot x - \left(\frac{\Delta x1+x1}{x1-x2} - \frac{\Delta y1+y1}{y1-y2}\right)\cdot(y1-y2)$$

Скопировать полученное выражение в функцию
$f1(x, x1, y1, x2, y2, \Delta x1, \Delta y1)$
Функция для построения графика фигуры 1

$$f1(x, x1, y1, x2, y2, \Delta x1, \Delta y1) := \frac{y1-y2}{x1-x2}\cdot x - \left(\frac{\Delta x1+x1}{x1-x2} - \frac{\Delta y1+y1}{y1-y2}\right)\cdot(y1-y2)$$

$$\frac{y11-y21}{x11-x21}\cdot x - \left(\frac{\Delta x2+x11}{x11-x21} - \frac{\Delta y2+y11}{y11-y21}\right)\cdot(y11-y21) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{5\cdot x}{2} - \frac{41}{2}$$

Координаты точек через которые пройдет фигура 1

$$t1\Delta(x1, y1, \Delta x1, \Delta y1) := \begin{pmatrix} x1+\Delta x1 \\ y1+\Delta y1 \end{pmatrix} \quad t2\Delta(x2, y2, \Delta x1, \Delta y1) := \begin{pmatrix} x2+\Delta x1 \\ y2+\Delta y1 \end{pmatrix}$$

1.2. Фигура 2 - прямая повернута на угол α относительно опорной прямой, проходящая через точки (x1,y1) и (x2,y2)

Аффинные преобразования при поворота координат

$X(x, y, \alpha) := x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha) \qquad Y(x, y, \alpha) := -x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha)$

Фигура 1 аналитическое описание $\frac{X(x,y,\alpha)-x1}{x2-x1} - \frac{Y(x,y,\alpha)-y1}{y2-y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{X(x,y,\alpha)-x1}{x2-x1} - \frac{Y(x,y,\alpha)-y1}{y2-y1} \;\left|\begin{array}{l}\text{solve}, y\\ \text{collect}, x, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\end{array}\right. \rightarrow \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}\right.$$

Рис. А 16. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 2 (Пример № 2.3)

Анлитическое выражение слишком длинное, поэтому скопиовано и приведено ниже

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}\right]\cdot x-\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}$$

$$f2(x,x1,y1,x2,y2,\alpha) := \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}\right]\cdot x-\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)}$$

Анлитическое выражение слишком длинное, поэтому скопиовано и приведено ниже

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}\right]\cdot x-\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)-\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)}$$

<u>Координаты точек</u>

Пересчитать координаты точек на опорной прямой (x1,y1) и (x2,y2) в соответствующие координаты точек на фигуре 2

Выражение для пересчета локальных координат точки (x1,y1) в глобальные координаты XY имеет вид

координаты точки t1 (функция $t1\alpha(x1,y1,\alpha)$) на фигуре 2 при пересчете точки (x1,y1)

$$M\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad XY1 := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$$

$$t1\alpha(x1,y1,\alpha) := M\alpha^{-1}\cdot XY1 \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} x1\cdot\cos(\alpha)-y1\cdot\sin(\alpha) \\ x1\cdot\sin(\alpha)+y1\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

координаты точки t2 (функция $t2\alpha(x1,y1,\alpha)$) на фигуре 2 при пересчете точки (x2,y2)

$$XY2 := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x21\cdot\cos(\alpha1)-y21\cdot\sin(\alpha1) \\ x21\cdot\sin(\alpha1)+y21\cdot\cos(\alpha1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.735 \\ -2.027 \end{pmatrix}$$

$$t2\alpha(x2,y2,\alpha) := M\alpha^{-1}\cdot XY2 \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} x2\cdot\cos(\alpha)-y2\cdot\sin(\alpha) \\ x2\cdot\sin(\alpha)+y2\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

<u>2. Рассчитать точку пересечения прямых (фигура 1 и фигура 2)</u>

Рис. А 17. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 3 (Пример № 2.3)

Использовать обратную матрицу и функцию lsolve(A,B)

Представить описание выражений для фигур в виде

Фигура 1
$a01 \cdot x + b01 \cdot y = c01$

Фигура 2
$a02 \cdot x + b02 \cdot y = c02$

тогда искомые переменные в lsolve(A,B)
$$A := \begin{pmatrix} a01 & b01 \\ a02 & b02 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} c01 \\ c02 \end{pmatrix}$$

Фигура 1. Преобразовать выражения к виду $a01 \cdot x + b01 \cdot y = c01$

$$\frac{(x - \Delta x1) - x1}{x2 - x1} - \frac{(y - \Delta y1) - y1}{y2 - y1} \text{ collect}, x, y \rightarrow \left(-\frac{1}{x1 - x2}\right) \cdot x + \frac{y}{y1 - y2} + \frac{\Delta x1 + x1}{x1 - x2} - \frac{\Delta y1 + y1}{y1 - y2}$$

$$a01(x1,x2) := -\frac{1}{x1 - x2} \qquad b01(y1,y2) := \frac{1}{(y1 - y2)}$$

$$c01(x1,y1,x2,y2,\Delta x1,\Delta y1) := \left(\frac{\Delta x1 + x1}{x1 - x2} - \frac{\Delta y1 + y1}{y1 - y2}\right)$$

Фигура 2. Преобразовать выражения к виду
$a02 \cdot x + b02 \cdot y = c02$

$$\frac{X(x,y,\alpha) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y(x,y,\alpha) - y1}{y2 - y1} \text{ collect}, x, y \rightarrow \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right) \cdot y$$

Анлитическое выражение слишком длинное, поэтому скопиовано и приведено ниже

$$\left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right) \cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right) \cdot y + \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

$$a02(x1,x2,y1,y2,\alpha) := -\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2} \qquad b02(x1,x2,y1,y2,\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}$$

$$c02(x1,x2,y1,y2) := \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

Искомая матрица A ($fA(x1,y1,x2,y2,\alpha,\beta,\Delta x,\Delta y)$) и вектор B (B) будут равны

<u>матрица A</u>

$$A := \begin{pmatrix} a01(x11,x21) & b01(y11,y21) \\ a02(x11,y11,x21,y21,\alpha 1) & b02(x11,x21,y11,y21,\alpha 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.11 & 0.527 \end{pmatrix}$$

Рис. А 18. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 4 (Пример № 2.3)

вектор B

$$B := \begin{pmatrix} -c01(x11, y11, x21, y21, \Delta x2, \Delta y2) \\ -c02(x11, x21, y11, y21) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4.1 \\ -1.7 \end{pmatrix}$$

точка пересечения фигуры 1 и фигуры 2 XYint определится как

Обратная матрица

$$XYint := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -6.377 \\ -4.557 \end{pmatrix}$$

Функция lsolve(A, B)

$$XYint := lsolve(A, B) \qquad XYint = \begin{pmatrix} -6.377 \\ -4.557 \end{pmatrix}$$

Расчет векторов для построения **графика фигур**

$x_{min} := -10 \quad x_{max} := 15 \quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $\quad i := 0 .. N1$ дискретный аргумент

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

$yy0 := \overrightarrow{f0(xx, x11, y11, x21, y21)}$ ординаты опорной прямой

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, x11, y11, x21, y21, \Delta x2, \Delta y2)}$ ординаты фигуры 1

$yy2 := \overrightarrow{f2(xx, x11, y11, x21, y21, \alpha 1)}$ ординаты фигуры 2

Координы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент x-координаты двух точек, второй элемент - y - координаты двух точек.
на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Рис. А 19. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 5 (Пример № 2.3)

Опорная прямая

$XY12 := bl\_v(t1(x11, y11), t2(x21, y21))$ $\qquad XY12^T = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \right]$

Фигура1 (параллельный перенос)

$XY12\Delta := bl\_v(t2\Delta(x21, y21, \Delta x2, \Delta y2), t1\Delta(x11, y11, \Delta x2, \Delta y2))$

$XY12\Delta^T = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$

Фигура 2 (поворот)

$XY12\alpha := bl\_v(t1\alpha(x11, y11, \alpha1), t2\alpha(x21, y21, \alpha1))$ $\qquad XY12\alpha^T = \left[\begin{pmatrix} 0.464 \\ 5.735 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.128 \\ -2.027 \end{pmatrix} \right]$

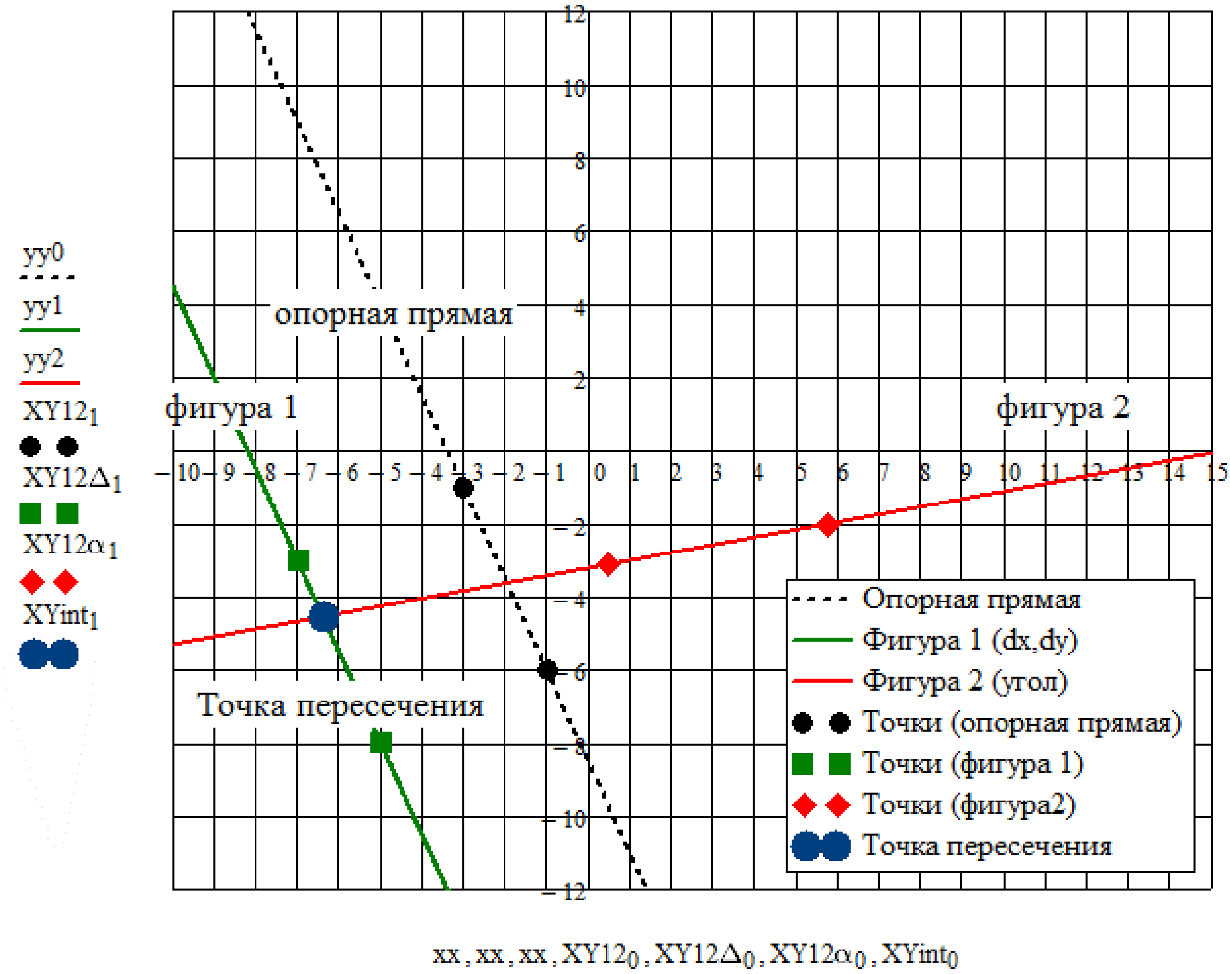


Рис. А 20. Листинг программы расчета точек пересечения прямых. Часть 6 (Пример № 2.3)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СПИСОК ПРИМЕРОВ

Пример № 2.1. Найти точку пересечения прямых. 15
Пример № 2.2. Найти точку пересечения прямых. 17
Пример № 2.3. Найти точку пересечения прямых. 21

Кудрявцева Ирина Владимировна
Рыков Сергей Владимирович
Рыков Сергей Алексеевич

Решение систем уравнений в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I. Линейные уравнения. Пересечение прямых

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А