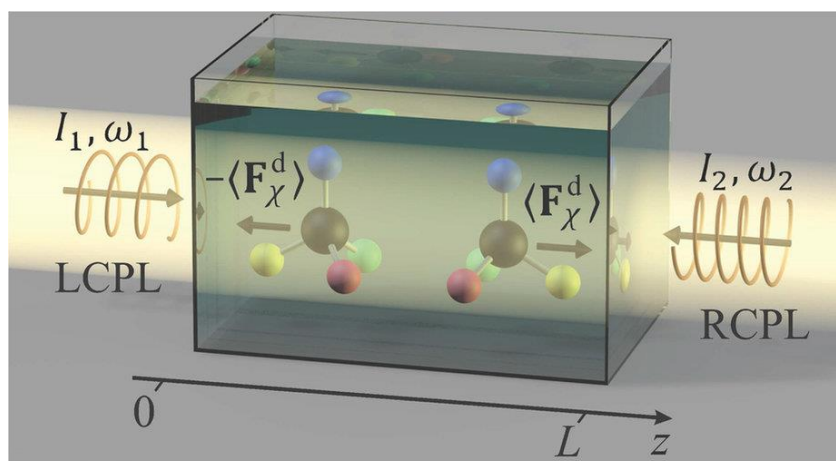


ІТМО

**И.А. Вовк, А.Ю. Дубовик, Е.В. Кунделев,
Ю.В. Рождественский**

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХИРАЛЬНЫХ
НАНОЧАСТИЦ СО СВЕТОМ**



**Санкт-Петербург
2024**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**И.А. Вовк, А.Ю. Дубовик, Е.В. Кунделев,
Ю.В. Рождественский**

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХИРАЛЬНЫХ
НАНОЧАСТИЦ СО СВЕТОМ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры

ИТМО

Санкт-Петербург
2024

Вовк И.А., Дубовик А.Ю., Кунделев Е.В., Рождественский Ю.В.,
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХИРАЛЬНЫХ НАНОЧАСТИЦ СО СВЕТОМ– СПб:
Университет ИТМО, 2024. – 90 с.

Рецензент(ы):

Баранов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") международного научно-образовательного центра физики наноструктур, Университета ИТМО.

В учебном пособии изложены основы современных физических моделей, применимых для описания взаимодействия хиральных наночастиц со светом. Также представлено описание современных физических подходов по разделению рацемических смесей хиральных наночастиц. Учебное пособие предназначено для магистров, обучающихся по профилю «Физика наноструктур» по направлению подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика» в рамках курса «Оптическая активность наноструктур».

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The 'I' and 'T' are connected, and the 'O' is a solid circle.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2024

© Вовк И.А., Дубовик А.Ю., Кунделев Е.В., Рождественский Ю.В., 2024

Оглавление

Введение.....	7
Глава 1 Хиральная наночастица в поле монохроматического света	9
1.1. Общее выражение для силы, действующей на изотропный хиральный диполь	9
1.2. Ахиральная компонента силы	12
1.2.1. Выделение консервативной и диссипативной сил	12
1.2.2. Консервативная ахиральная сила	12
1.2.3. Диссипативная ахиральная сила	13
1.3. Хиральная компонента силы	14
1.3.1. Консервативная хиральная сила.....	14
1.3.2. Диссипативная хиральная сила	15
1.4. Момент силы, действующий на изотропный хиральный диполь	16
Глава 2 Хиральный диполь в поле линейно и циркулярно поляризованных волн	18
2.1. Линейно поляризованная волна.....	18
2.2. Циркулярно поляризованная волна	19
2.3. Две линейно поляризованные волны одинаковых частот, распространяющиеся в одном направлении	21
2.4. Две циркулярно поляризованные волны одинаковых частот, распространяющиеся навстречу друг другу	24
Глава 3 Хиральный диполь в поле двух циркулярно поляризованных волн различных частот	28
3.1. Силы, действующие на хиральный диполь.....	28
3.2. Поглощение и круговой дихроизм	31
3.2.1. Общее выражение для эффективности поглощения электромагнитного поля хиральным диполем	31
3.2.2. Поглощение волн с круговой поляризацией	32
3.2.3. Круговой дихроизм и коэффициент диссимметрии.....	32
Глава 4 Диффузия хиральных наночастиц в силовом поле	34
4.1. Диффузия в однородном силовом поле	34

4.1.1. Постановка задачи	34
4.1.2. Стационарное решение уравнения диффузии	36
4.1.3. Нестационарное решение уравнения диффузии	36
4.1.4. Оценка чистоты энантиомеров в изначально рацемической смеси наночастиц	37
4.2. Диффузия в экспоненциально убывающем силовом поле.....	39
4.2.1. Постановка задачи	39
4.2.2. Стационарное решение уравнения диффузии	40
4.2.3. Общее решение уравнения диффузии	40
4.2.4. Оценка чистоты энантиомеров в изначально рацемической смеси наночастиц	44
Глава 5 Векторное поле пучка Лагерра – Гаусса	47
5.1. Параксиальное приближение.....	47
5.2. Решение параксиального уравнения Гельмгольца	48
5.3. Напряженности электрического и магнитного полей в параксиальном приближении.....	50
5.4. Мощность и орбитальный момент импульса пучка	52
Глава 6 Электромагнитное поле пучков Лагерра – Гаусса разных поляризаций	54
6.1. Пучок с поперечной поляризацией векторного потенциала.....	54
6.1.1. Плотность хиральности	54
6.1.2. Плотность потока хиральности	57
6.1.3. Вектор Пойнтинга	59
6.1.4. Нормировочная постоянная.....	60
6.1.5. Орбитальный момент импульса	60
6.2. Пучок с круговой поляризацией векторного потенциала	61
6.2.1. Связь между энергетическими и хиральными характеристиками пучков с круговой поляризацией.....	61
6.2.2. Плотность хиральности	62
6.2.3. Вектор Пойнтинга	65
6.2.4. Орбитальный момент импульса	65
6.3. Пучок с продольной поляризацией векторного потенциала.....	66
6.3.1. Плотность хиральности	66

6.3.2. Плотность потока хиральности	67
6.3.3. Вектор Пойнтинга	69
6.3.4. Нормировочная постоянная.....	70
6.3.5. Орбитальный момент импульса	72
6.4. Сравнение плотностей хиральности Т-, С- и L-пучков.....	73
6.4.1. Сравнение Т- и L-пучков	73
6.4.2. Сравнение С- и L-пучков.....	73
Глава 7 Хиральный диполь в поле пучков Лагерра – Гаусса.....	75
7.1. Пучок с поперечной поляризацией векторного потенциала.....	75
7.1.1. Хиральная консервативная сила	75
7.1.2. Хиральная диссипативная сила	77
7.2. Пучок с круговой поляризацией векторного потенциала	78
7.2.1. Хиральная консервативная сила	78
7.2.2. Хиральная диссипативная сила	78
7.3. Пучок с продольной поляризацией векторного потенциала.....	79
7.3.1. Хиральная консервативная сила	79
7.3.2. Хиральная диссипативная сила	79
7.4. Выражение для хиральной диссипативной силы в случае произвольного параксиального пучка.....	80
Список литературы.....	82
Приложения	84
Приложение 1: Вычисление нормировочного интеграла.....	84
Приложение 2: Размерные единицы.....	85
Т-пучок	85
С-пучок.....	87
L-пучок	88

Введение

Неорганические наночастицы, обладающие свойством хиральности (т.е. они отличимы от своего зеркального отображения), привлекают сегодня большое внимание исследователей во всём мире. Перспективность исследований таких наночастиц обусловлена большим потенциалом их использования в различных научных и промышленных областях. К наиболее перспективным приложениям хиральных наночастиц относятся разделение противоположных хиральных форм (энантиомеров) биомолекул из-за их различной биоактивности [1-4], контроль энантиомерной чистоты хиральных лекарственных препаратов [5], характеристика вторичной структуры больших биомолекул [6] и создание новых типов метаматериалов [7-11]. Одной из важных задач, стоящих перед исследователями, является разделение рацемических смесей хиральных наночастиц, к образованию которых приводит большинство методов изготовления [12].

В ряде недавних теоретических работ была продемонстрирована возможность энантиоселективного перемещения хиральных наночастиц с помощью механических сил, действующих на них со стороны хирального электромагнитного поля [13–15]. Такое перемещение оказывается возможным благодаря явлению *кругового дихроизма*, которое заключается в различном поглощении наночастицами право-циркулярно поляризованного и лево-циркулярно поляризованного света. Расчеты показывают, что оптическая активность хиральных полупроводниковых нанокристаллов может существенно превосходить оптическую активность хиральных молекул [16–19] и быть сравнимой с оптической активностью хиральных плазмонных комплексов [20]. Так, коэффициент диссимметрии (g) оптических переходов в нанокристаллах может в 10–100 раз превышать аналогичный коэффициент молекул ($g \sim 10^{-3} - 10^{-4}$). Данный коэффициент может быть увеличен еще на порядок, если наночастицу поместить в узел стоячей волны, образованной двумя распространяющимися навстречу друг другу плоскими волнами круговой поляризации [21]. Однако даже при этом не зависящие от энантиомерной формы наночастиц нехиральные силы светового давления оказываются намного больше энантиоселективных хиральных сил, обусловленных круговым дихроизмом. Условия, при которых нехиральная компонента оптомеханической силы отсутствует и наночастицы могут перемещаться под действием полностью хиральной силы, были найдены в работе [14].

До сих пор предлагаемые методы разделения энантиомеров с помощью света преимущественно основывались на использовании плоских волн. При этом поля более сложных конфигураций, которые также способны индуцировать хиральные силы значительной величины, практически не анализировались. Поскольку энантиомеры хиральных наночастиц проявляют различные свойства только при взаимодействии с другими хиральными объектами, энантиоселективные силы

могут быть созданы световыми полями, обладающими внутренней хиральностью. Такие поля в частности порождают световые пучки Лагерра – Гаусса, имеющие топологический заряд и переносящие орбитальный момент импульса [22]. Возможность использования данных пучков для энантиоселективного перемещения наночастиц на макроскопические расстояния была показана в работе [23].

Учебное пособие служит дополнительным материалом для освоения дисциплины «Оптическая активность наноструктур» и предназначено для обучения магистров по направлению 12.04.03 – Фотоника и оптоинформатика. Главы учебного пособия полностью соответствуют пунктам раздела «Оптомеханика хиральных нанокристаллов» в рамках данного курса. Теоретический материал учебного пособия рекомендуется использовать студентам для самостоятельного и углублённого освоения лекций и успешной подготовки к практическим занятиям. Для самостоятельного контроля степени усвоения материала приводится ряд вопросов после каждой главы.

Для освоения дисциплины «Оптическая активность наноструктур» необходимы знания, полученные в рамках общего курса физики, курсов теоретической механики, электродинамики, квантовой механики, основ физики твёрдого тела, а также математических дисциплин — линейной алгебры, анализа, теории функций комплексного переменного.

Полученные знания позволяют овладеть навыками использования основных понятий и моделей физики хиральных наноструктур для постановки, выбора метода и решения практических задач в рамках проведения научно-исследовательских работ по хиральности.

Глава 1

Хиральная наночастица в поле монохроматического света

1.1. Общее выражение для силы, действующей на изотропный хиральный диполь

На изотропную хиральную наночастицу, обладающую электрическим дипольным моментом $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и магнитным дипольным моментом $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, в электромагнитном поле с напряженностями электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ действует сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{P} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} + \mu_0 \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right] - \varepsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \times \mathbf{E} \right], \quad (1.1)$$

где ε_0 и μ_0 — это электрическая и магнитная постоянные соответственно. Считая, что зависимость всех величин от времени является гармонической, и используя представление

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{p}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{m}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{m}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ — комплексные амплитуды электрического и магнитного полей, $\mathbf{p}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{m}_0(\mathbf{r})$ — комплексные амплитуды электрического и магнитного моментов, а ω — частота поля, получаем следующее выражение для силы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4} [(\mathbf{p}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} + (\mathbf{p}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* e^{2i\omega t} + (\mathbf{p}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + (\mathbf{p}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0] \\
& + \frac{1}{4} [(\mathbf{m}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 e^{-2i\omega t} + (\mathbf{m}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* e^{2i\omega t} + (\mathbf{m}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* \\
& + (\mathbf{m}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0] \\
& + \frac{1}{4} i\omega\mu_0 (-\mathbf{p}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{-2i\omega t} - \mathbf{p}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{p}_0^* \times \mathbf{H}_0 \\
& + \mathbf{p}_0^* \times \mathbf{H}_0^* e^{2i\omega t}) \\
& - \frac{1}{4} i\omega\varepsilon_0 (-\mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} - \mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{m}_0^* \times \mathbf{E}_0 \\
& + \mathbf{m}_0^* \times \mathbf{E}_0^* e^{2i\omega t}).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Данная сила содержит быстро осциллирующие компоненты, пропорциональные $e^{\pm 2i\omega t}$, а также компоненты, не зависящие от времени. Результирующее действие компонент первого типа на достаточно большом промежутке времени равняется нулю. Поэтому после усреднения выражения для силы по периоду световых колебаний получим

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{F} \rangle = & \frac{1}{4} [(\mathbf{p}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + (\mathbf{p}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + (\mathbf{m}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + (\mathbf{m}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0] \\
& + \frac{1}{4} i\omega\mu_0 (-\mathbf{p}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{p}_0^* \times \mathbf{H}_0) \\
& - \frac{1}{4} i\omega\varepsilon_0 (-\mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{m}_0^* \times \mathbf{E}_0) \\
& = \frac{1}{2} \text{Re} [(\mathbf{p}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + (\mathbf{m}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* - i\omega\mu_0 \mathbf{p}_0 \times \mathbf{H}_0^* + i\omega\varepsilon_0 \mathbf{m}_0 \\
& \times \mathbf{E}_0^*].
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В наиболее общем виде связь электрического и магнитного дипольных моментов хиральной наночастицы с индуцирующими их электрическим и магнитным полями дается выражениями

$$\mathbf{p}_0 = \alpha \mathbf{E}_0 + i\chi \mathbf{H}_0, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{m}_0 = -i\chi \mathbf{E}_0 + \beta \mathbf{H}_0. \tag{1.9}$$

Комплексные величины $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\beta = \beta' + i\beta''$ и $\chi = \chi' + i\chi''$ называются электрической, магнитной и смешанной электромагнитной поляризуемостями, соответственно. В общем случае они являются тензорами и зависят от напряженности электромагнитного поля. Для простоты рассмотрения мы будем полагать отклик наночастицы на световое поле линейным и изотропным, а величины α , β , и χ — не зависящими от напряженности поля скалярами.

Подставляя выражения для дипольных моментов (1.8) и (1.9) в выражение для силы (1.7) и приводя, находим

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{F} \rangle &= [(\alpha \mathbf{E}_0 + i\chi \mathbf{H}_0) \cdot \nabla] \mathbf{E}_0^* + [(-i\chi \mathbf{E}_0 + \beta \mathbf{H}_0) \cdot \nabla] \mathbf{H}_0^* - i\omega\mu_0(\alpha \mathbf{E}_0 + i\chi \mathbf{H}_0) \\
&\quad \times \mathbf{H}_0^* + i\omega\varepsilon_0(-i\chi \mathbf{E}_0 + \beta \mathbf{H}_0) \times \mathbf{E}_0^* \\
&= \frac{1}{2} \text{Re}\{\alpha[(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i\omega\mu_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] \\
&\quad + \beta[(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + i\omega\varepsilon_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^*] \\
&\quad + \chi[i(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*]\} \\
&= \langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \rangle + \langle \mathbf{F}_\chi \rangle,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где были введены обозначения

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\alpha \mathbf{f}_0 + \beta \mathbf{g}_0), \tag{1.11}$$

$$\langle \mathbf{F}_\chi \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\chi \mathbf{h}_0), \tag{1.12}$$

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i\omega\mu_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{g}_0 = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + i\omega\varepsilon_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^*, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{h}_0 = i(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*, \tag{1.15}$$

где $\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \rangle$ и $\langle \mathbf{F}_\chi \rangle$ — усредненные по времени ахиральная и хиральная компоненты оптической силы.

Используя закон индукции Фарадея и теорему о циркуляции магнитного поля, представим (1.13), (1.14) и (1.15) в виде

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0 \times [\nabla \times \mathbf{E}_0^*], \tag{1.16}$$

$$\mathbf{g}_0 = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \mathbf{H}_0 \times [\nabla \times \mathbf{H}_0^*], \tag{1.17}$$

$$\mathbf{h}_0 = i[(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{H}_0^*)]. \tag{1.18}$$

Отсюда становится ясно, что \mathbf{f}_0 и \mathbf{g}_0 — векторные поля, отвечающие за воздействие электрического и магнитного полей, а \mathbf{h}_0 — особая величина, характеризующая связь хирального поля с хиральным диполем.

1.2. Ахиральная компонента силы

1.2.1. Выделение консервативной и диссипативной сил

Поскольку величины α , β , \mathbf{f}_0 и \mathbf{g}_0 комплексные, ахиральную часть силы можно разделить на консервативную и диссипативную компоненты. Выделение диссипативной компоненты силы необходимо, в частности, для оценки поглощения оптического излучения хиральным диполем. Представляя комплексные величины в форме $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, запишем ахиральную силу (1.11) в виде

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\alpha' + i\alpha'')(\mathbf{f}'_0 + i\mathbf{f}''_0) + (\beta' + i\beta'')(\mathbf{g}'_0 + i\mathbf{g}''_0)] \\ &= \frac{1}{2} (\alpha' \mathbf{f}'_0 + \beta' \mathbf{g}'_0 - \alpha'' \mathbf{f}''_0 - \beta'' \mathbf{g}''_0) = \langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle + \langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle,\end{aligned}\quad (1.19)$$

где $\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle$ — консервативная компонента ахиральной силы (*the reactive component*), а $\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle$ — ее диссипативная компонента (*the dissipative component*), определяемые выражениями

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle = \frac{1}{2} (\alpha' \mathbf{f}'_0 + \beta' \mathbf{g}'_0), \quad (1.20)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle = -\frac{1}{2} (\alpha'' \mathbf{f}''_0 + \beta'' \mathbf{g}''_0). \quad (1.21)$$

1.2.2. Консервативная ахиральная сила

Рассмотрим консервативную компоненту ахиральной силы. Для этого, применив формулу двойного векторного произведения векторов, преобразуем векторное поле \mathbf{f}_0 к более компактному виду:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_0 &= (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0 \times [\nabla \times \mathbf{E}_0^*] = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + \nabla(\mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{E}}_0^*) - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* \\ &= \nabla(\mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{E}}_0^*),\end{aligned}\quad (1.22)$$

где $\hat{}$ указывает на вектор, на который воздействует оператор набла. Используя свойства комплексных чисел, получаем вещественную компоненту данного поля в виде

$$\mathbf{f}'_0 = \frac{\nabla(\mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{E}}_0^*) + \nabla(\mathbf{E}_0^* \hat{\mathbf{E}}_0)}{2} = \frac{\nabla \|\mathbf{E}_0\|^2}{2}. \quad (1.23)$$

Подобным образом, после упрощения и применения формулы для производной произведения функций, для \mathbf{g}'_0 получаем

$$\mathbf{g}'_0 = \frac{\nabla(\|\mathbf{H}_0\|^2)}{2}. \quad (1.24)$$

Подставив (1.23) и (1.24) в (1.20), имеем

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha' \frac{\nabla(\|\mathbf{E}_0\|^2)}{2} + \beta' \frac{\nabla(\|\mathbf{H}_0\|^2)}{2} \right) = \frac{\alpha'}{\varepsilon_0} \nabla \langle W^{(\mathbf{E})} \rangle + \frac{\beta'}{\mu_0} \nabla \langle W^{(\mathbf{H})} \rangle, \quad (1.25)$$

где $\langle W^{(\mathbf{E})} \rangle$ и $\langle W^{(\mathbf{H})} \rangle$ — усредненные по времени электрическая и магнитная части плотности энергии, определяемые как

$$\langle W^{(\mathbf{E})} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \|\mathbf{E}_0\|^2, \quad (1.26)$$

$$\langle W^{(\mathbf{H})} \rangle = \frac{\mu_0}{4} \|\mathbf{H}_0\|^2. \quad (1.27)$$

1.2.3. Диссипативная ахиральная сила

Рассмотрим диссипативную компоненту ахиральной оптической силы. Для этого используем уравнения Максвелла и (1.22), из которых получим для \mathbf{f}_0'' следующую форму записи:

$$\mathbf{f}_0'' = \text{Im}[(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^*] - \omega \mu_0 \text{Re}[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*]. \quad (1.28)$$

Рассмотрим вспомогательное выражение $\nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*]$, учитывая отсутствие в системе свободных зарядов $(\nabla \cdot \mathbf{E}_0) = 0$ и используя свойства производной от произведения двух функций,

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*] &= \nabla \times [\hat{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{E}_0^*] + \nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{E}}_0^*] \\ &= (\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_0^* (\nabla \cdot \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}_0^*) - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* \\ &= (\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* = -2i \text{Im}[(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^*]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Электромагнитное хиральное поле характеризуется плотностью потока хиральности, электрическая эллиптичность которой определяется выражением:

$$\Phi^{(\mathbf{E})} = \frac{1}{\omega} \left[\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \frac{i}{2} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*]. \quad (1.30)$$

Применив операцию ротора к электрической эллиптичности плотности потока хиральности электромагнитного поля, получим

$$\nabla \times \Phi^{(\mathbf{E})} = \frac{i}{2} \nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*] = \text{Im}[(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^*]. \quad (1.31)$$

Усредненный по времени вектор Пойнтинга есть

$$\mathbf{\Pi} = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*]. \quad (1.32)$$

Подставляя (1.32) в (1.28), (1.31) в (1.29), а затем результат в (1.28), находим выражение для \mathbf{f}_0'' в виде

$$\mathbf{f}_0'' = \nabla \times \Phi^{(\mathbf{E})} - 2\omega \mu_0 \mathbf{\Pi} = -2\omega \mu_0 \mathbf{\Pi}_0^{(\mathbf{E})}, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbf{\Pi}_0^{(E)} = \mathbf{\Pi} - \frac{\nabla \times \mathbf{\Phi}^{(E)}}{2\omega\mu_0} \quad (1.34)$$

есть электрическая орбитальная компонента вектора Пойнтинга. Аналогично получаем

$$\mathbf{g}_0'' = \nabla \times \mathbf{\Phi}^{(H)} - 2\omega\varepsilon_0\mathbf{\Pi} = -2\omega\varepsilon_0\mathbf{\Pi}_0^{(H)}, \quad (1.35)$$

где

$$\mathbf{\Pi}_0^{(H)} = \mathbf{\Pi} - \frac{\nabla \times \mathbf{\Phi}^{(H)}}{2\omega\varepsilon_0} \quad (1.36)$$

— магнитная орбитальная компонента вектора Пойнтинга, а

$$\mathbf{\Phi}^{(H)} = \frac{i}{2} [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^*] \quad (1.37)$$

— магнитная эллиптичность плотности потока хиральности.

Все предыдущие действия позволяют нам представить диссипативную компоненту ахиральной силы в виде:

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle = \frac{\alpha''}{\varepsilon_0} \frac{\omega}{c^2} \mathbf{\Pi}_0^{(E)} + \frac{\beta''}{\mu_0} \frac{\omega}{c^2} \mathbf{\Pi}_0^{(H)}. \quad (1.38)$$

1.3. Хиральная компонента силы

1.3.1. Консервативная хиральная сила

Хиральная сила, подобно ахиральной, состоит из консервативной и диссипативной компонент,

$$\langle \mathbf{F}_\chi \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\chi \mathbf{h}_0) = \frac{1}{2} (\chi' \mathbf{h}'_0 - \chi'' \mathbf{h}''_0) = \langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle + \langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle, \quad (1.39)$$

где $\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle$ и $\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle$ — это реактивная и диссипативная компоненты хиральной силы, которые определяются выражениями

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{1}{2} \chi' \mathbf{h}'_0, \quad (1.40)$$

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = -\frac{1}{2} \chi'' \mathbf{h}''_0. \quad (1.41)$$

Применив уравнения Максвелла к (1.18), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= i(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + i\mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) - i\mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{H}_0^*) \\ &= i[(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{H}_0^*)], \end{aligned} \quad (1.42)$$

откуда

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}'_0 &= \frac{i}{2} [(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{H}_0^*) \\
&\quad - (\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + (\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_0^* \times (\nabla \times \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_0^* \times (\nabla \times \mathbf{H}_0)] \\
&= -\text{Im}[(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) + (\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0^* \\
&\quad \times (\nabla \times \mathbf{H}_0)] = -\text{Im}[\nabla(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{H}_0)] = \text{Im}[\nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*)] \\
&= \nabla[\text{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*)],
\end{aligned} \tag{1.43}$$

где было использовано векторное тождество

$$\nabla(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*) + (\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0^* \times (\nabla \times \mathbf{H}_0). \tag{1.44}$$

Поскольку для гармонического поля плотность хиральности по определению есть

$$K(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2} \left[\left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \right] = \frac{\omega}{2c^2} \text{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*), \tag{1.45}$$

то, применив предыдущие соотношения, можно записать (1.40) в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{1}{2} \chi' \nabla[\text{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*)] = c \chi'(c/\omega) \nabla K. \tag{1.46}$$

1.3.2. Диссипативная хиральная сила

Для получения диссипативной компоненты хиральной силы найдем ротор от вектора Пойнтинга при условии отсутствия свободных зарядов $[(\nabla \cdot \mathbf{E}_0) = (\nabla \cdot \mathbf{H}_0) = 0]$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{\Pi} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*]) = \frac{1}{2} \text{Re}(\nabla \times [\hat{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0^*] + \nabla \times [\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{H}}_0^*]) \\
&= \frac{1}{2} \text{Re}[(\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 - \mathbf{H}_0^* (\nabla \cdot \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_0 (\nabla \cdot \mathbf{H}_0^*) - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^*] \\
&= \frac{1}{2} \text{Re}[(\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^*].
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Тогда, применив (1.30), (1.37) и (1.47) и введя поток плотности хиральности, как

$$\mathbf{\Phi} = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{\Phi}^{(E)} + \mu_0 \mathbf{\Phi}^{(H)}), \tag{1.48}$$

получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}''_0 &= \text{Re}[(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^*] + \text{Im}[\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*] \\
&= 2 \nabla \times \mathbf{\Pi} - 2\omega (\varepsilon_0 \mathbf{\Phi}^{(E)} + \mu_0 \mathbf{\Phi}^{(H)}) = 2 \nabla \times \mathbf{\Pi} - 4 \mathbf{\Phi},
\end{aligned} \tag{1.49}$$

что позволяет окончательное выражение для диссипативной компоненты в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = c \chi'' \frac{2}{c} \left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{\Pi} \right). \tag{1.50}$$

1.4. Момент силы, действующий на изотропный хиральный диполь

Момент силы, действующий на хиральный диполь в электромагнитном поле, представим в виде

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (1.51)$$

Воспользовавшись определениями (1.2) – (1.5) и проведя усреднение по времени, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Gamma} \rangle &= \frac{1}{4} (\mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{p}_0^* \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{m}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{m}_0^* \times \mathbf{H}_0) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{m}_0 \times \mathbf{H}_0^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\alpha \mathbf{E}_0 + i\chi \mathbf{H}_0) \times \mathbf{E}_0^* + (-i\chi \mathbf{E}_0 + \beta \mathbf{H}_0) \times \mathbf{H}_0^*]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Далее, как и для силы, нам следует выделить хиральную и ахиральную части момента силы:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Gamma} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\alpha \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \beta \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* + i\chi(\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\alpha \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \beta \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^*) - \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\chi(\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)] \\ &= \langle \mathbf{\Gamma}_{\alpha, \beta} \rangle + \langle \mathbf{\Gamma}_{\chi} \rangle, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $\langle \mathbf{\Gamma}_{\alpha, \beta} \rangle$ — ахиральная компонента момента силы, а $\langle \mathbf{\Gamma}_{\chi} \rangle$ — его хиральная компонента, определяемые соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Gamma}_{\alpha, \beta} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\alpha \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \beta \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^*) = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{i} \mathbf{\Phi}^{(E)} + \frac{\beta}{i} \mathbf{\Phi}^{(H)} \right) \\ &= \operatorname{Im}(\alpha \mathbf{\Phi}^{(E)} + \beta \mathbf{\Phi}^{(H)}), \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Gamma}_{\chi} \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\chi(\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0^* \times \mathbf{E}_0)] = \operatorname{Im}[\chi \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)] \\ &= \chi'' \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) = 2\chi'' \Pi. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Вопросы

1. Какой общий вид выражения для силы, действующей на изотропный хиральный диполь в поле монохроматического света?

2. Какие компоненты можно выделить в общем выражении для силы, действующей на изотропный хиральный диполь в поле монохроматической волны?
3. Какой вид у ахиральной компоненты силы?
4. Какой вид у хиральной компоненты силы?
5. Какая компонента электромагнитной поляризуемости ответственна за связь хирального поля с хиральным диполем?
6. Какой вид у момента силы, действующего на хиральный диполь в электромагнитном поле?

Глава 2

Хиральный диполь в поле линейно и циркулярно поляризованных волн

2.1. Линейно поляризованная волна

Рассмотрим плоскую линейно поляризованную монохроматическую электромагнитную волну с частотой ω , волновым вектором $k = \omega/c$, напряженностью электрического поля E_0 и единичным вектором поляризации \mathbf{e} . Если волна распространяется в положительном направлении оси z , тогда ее электрическое поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}E_0e^{ikz}. \quad (2.1)$$

Используя закон индукции Фарадея, находим магнитное поле

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_0}{i\mu_0\omega} = \frac{k}{\mu_0\omega} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0] = Z_0^{-1} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0], \quad (2.2)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — импеданс пустого пространства.

Чтобы убедиться, что для такой волны с ортогональными векторами электрического и магнитного поля плотность потока хиральности и плотность хиральности равны нулю, рассчитаем (1.45) и (1.48) для него:

$$K = \frac{\omega}{2c^2} \text{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) = \frac{\omega}{2c^2} Z_0^{-1} E_0^2 \text{Im}(\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}]) = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \Phi^{(\mathbf{E})} + \mu_0 \Phi^{(\mathbf{H})}) = \frac{i\omega}{4} (\varepsilon_0 [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*] + \mu_0 [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^*]) \\ &= \frac{i\omega}{4} \varepsilon_0 E_0^2 ([\mathbf{e} \times \mathbf{e}] + [[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}] \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}]]) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

что говорит нам о равенстве нулю как хиральных сил, так и ахирального момента силы:

$$\langle \mathbf{F}_\chi^f \rangle = 0, \quad (2.5)$$

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = 0, \quad (2.6)$$

$$\langle \Gamma_{\alpha,\beta} \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.4) несложно заметить, что эллиптичности плотности потока хиральности для линейно поляризованной плоской волны равны нулю, что

позволяет сделать вывод о равенстве вектора Пойнтинга своим орбитальным компонентам:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= \mathbf{\Pi}_0^{(E)} = \mathbf{\Pi}_0^{(H)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) = \frac{1}{2} Z_0^{-1} E_0^2 [\mathbf{e} \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}]] \\ &= \frac{1}{2} Z_0^{-1} E_0^2 (\mathbf{e}_z (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_z)) = I_0 \mathbf{e}_z,\end{aligned}\quad (2.8)$$

где интенсивность волны дается выражением

$$I_0 = \frac{E_0^2}{2Z_0}.\quad (2.9)$$

Величина как электрической, так и магнитной компонент плотности энергии, усредненных по времени, для линейно поляризованной плоской волны не зависит от координат, а это значит, что реактивная часть хиральной компоненты силы, зависящая от их градиента, будет равна нулю

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^r \rangle = 0.\quad (2.10)$$

Зато не будут равны зависящие от потока энергии диссипативная компонента хиральной силы и хиральный момент силы, значения которых примут следующий вид:

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^d \rangle = \left(\frac{\alpha''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta''}{\mu_0} \right) \frac{\omega}{c^2} I_0 \mathbf{e}_z,\quad (2.11)$$

$$\langle \Gamma_\chi \rangle = 2\chi'' I_0 \mathbf{e}_z.\quad (2.12)$$

2.2. Циркулярно поляризованная волна

Рассмотрим теперь циркулярно поляризованную волну, распространяющуюся в положительном направлении вдоль оси z . Электрическая компонента электромагнитного поля такой волны представима в виде

$$\mathbf{E}_{0\nu}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\nu E_0 e^{ikz},\quad (2.13)$$

где векторы поляризации лево- и право-поляризованных волн имеют вид

$$\mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)\quad (2.14)$$

и

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y).\quad (2.15)$$

Такие векторы поляризации являются комплексно сопряженными ($\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_L^*$), что заметно упрощает работу с ними. Для начала следует определить основные свойства операций над такими векторами

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\nu^* = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = 1, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu^* = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu^* = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\nu = 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{e}_L \times \mathbf{e}_L^* = -\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_R^* = \mathbf{e}_L \times \mathbf{e}_R = -i\mathbf{e}_z, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{e}_\nu \times \mathbf{e}_z = \mp i\mathbf{e}_\nu, \quad (2.19)$$

где верхний знак соответствует правой круговой поляризации, а нижний знак — левой. Используя уравнения Максвелла и последнее соотношение, найдем напряженность магнитного поля для циркулярно поляризованных волн обеих поляризаций:

$$\mathbf{H}_{0\nu}(\mathbf{r}) = Z_0^{-1}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_{0\nu}] = Z_0^{-1}E_0[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\nu]e^{ikz} = \pm iZ_0^{-1}\mathbf{E}_{0\nu}. \quad (2.20)$$

Рассмотрение данного случая следует начать с расчета вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E}_{0\nu} \times \mathbf{H}_{0\nu}^*) = \mp \frac{1}{2}Z_0^{-1}\text{Re}(i\mathbf{E}_{0\nu} \times \mathbf{E}_{0\nu}^*) = I_0\mathbf{e}_z, \quad (2.21)$$

что приводит хиральный момент силы к виду (2.12).

Также стоит упомянуть, что для волны с круговой поляризацией, как и для линейно поляризованной волны, усредненная по времени плотность энергии будет однородна. В таком случае для консервативной компоненты имеем

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle = \frac{\alpha'}{\varepsilon_0} \nabla \langle W^{(\mathbf{E})} \rangle + \frac{\beta'}{\mu_0} \nabla \langle W^{(\mathbf{H})} \rangle = 0. \quad (2.22)$$

Далее, рассчитав плотность хиральности для циркулярно поляризованной волны

$$K = \frac{\omega}{2c^2} \text{Im}(\mathbf{E}_{0\nu} \cdot \mathbf{H}_{0\nu}^*) = \frac{\omega}{2c^2} \text{Im}(\pm iZ_0^{-1} \|\mathbf{E}_{0\nu}\|^2) = \pm \frac{\omega}{c^2} I_0, \quad (2.23)$$

заметим, что в таком случае она отлична от нуля, хотя векторы напряженностей поля по-прежнему ортогональны. Плотность хиральности в данном случае однородна и это означает, что зависящая от ее градиента консервативная часть хиральной компоненты силы будет равна нулю,

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = 0. \quad (2.24)$$

Плотность потока хиральности следует найти, используя ее эллиптичности,

$$\Phi^{(\mathbf{E})} = \frac{i}{2} [\mathbf{E}_{0\nu} \times \mathbf{E}_{0\nu}^*] = \frac{i}{2} E_0^2 [\mathbf{e}_\nu \times \mathbf{e}_\nu^*] = \mp \frac{1}{2} E_0^2 \mathbf{e}_z, \quad (2.25)$$

$$\Phi^{(\mathbf{H})} = \frac{i}{2} [\mathbf{H}_{0v} \times \mathbf{H}_{0v}^*] = \frac{i}{2} Z_0^{-2} [\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{E}_{0v}^*] = Z_0^{-2} \Phi^{(\mathbf{E})}, \quad (2.26)$$

$$\Phi = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \Phi^{(\mathbf{E})} + \mu_0 \Phi^{(\mathbf{H})}) = \omega \varepsilon_0 \Phi^{(\mathbf{E})} = \mp \frac{\omega}{c} I_0 \mathbf{e}_z. \quad (2.27)$$

Вследствие того, что эллиптичности однородны, орбитальные компоненты вектора Пойнтинга равны ему самому. Тогда для оставшихся сил и моментов сил получим:

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^d \rangle = \left(\frac{\alpha''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta''}{\mu_0} \right) \frac{\omega}{c^2} I_0 \mathbf{e}_z, \quad (2.28)$$

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \mp 2\chi'' \frac{\omega}{c} I_0 \mathbf{e}_z, \quad (2.29)$$

$$\langle \Gamma_{\alpha, \beta} \rangle = \mp \left(\frac{\alpha''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta''}{\mu_0} \right) \frac{I_0}{c} \mathbf{e}_z. \quad (2.30)$$

Итак, в отличие от линейно поляризованной плоской волны, в поле волны с круговой поляризацией на точечный хиральный диполь действует хиральная компонента силы, что позволяет сделать заключение о том, что циркулярно поляризованный свет — самый простой хиральный объект.

2.3. Две линейно поляризованные волны одинаковых частот, распространяющиеся в одном направлении

Рассмотрим теперь волну, образованную двумя линейно поляризованными волнами одинаковой частоты с поляризациями \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 и напряженностью электрического поля E_0 каждая, распространяющимися навстречу друг другу вдоль оси z . Электрическое и магнитное поля такой волны имеют вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0 (\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz}), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= E_0 \frac{\nabla \times (\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz})}{i\mu_0 \omega} \\ &= Z_0^{-1} E_0 ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{-ikz}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Две линейно поляризованные волны одинаковой амплитуды создают стоячую волну, в которой перенос энергии отсутствует. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) \\
&= I_0 \operatorname{Re}[(\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz}) \times ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{ikz})] \\
&= I_0 \operatorname{Re}(\mathbf{e}_1 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] - \mathbf{e}_2 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] - \mathbf{e}_1 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{2ikz} \\
&\quad + \mathbf{e}_2 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-2ikz}) = I_0 \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \operatorname{Re}(-e^{2ikz} + e^{-2ikz}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Для плотности хиральности получаем

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\omega}{2c^2} \operatorname{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) \\
&= I_0 \frac{\omega}{c^2} \operatorname{Im}[(\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz}) \\
&\quad \cdot ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{ikz})] \\
&= I_0 \frac{\omega}{c^2} \operatorname{Im}(-\mathbf{e}_1 \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{2ikz} + \mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-2ikz}) \\
&= -I_0 \frac{\omega}{c^2} (\mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1]) \operatorname{Im}(2 \cos 2kz) = 0,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

а эллиптичности плотности потока хиральности будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\mathbf{E})} &= \frac{i}{2} E_0^2 [(\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz}) \times (\mathbf{e}_1 e^{-ikz} + \mathbf{e}_2 e^{ikz})] \\
&= \frac{i}{2} E_0^2 ([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] e^{2ikz} + [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1] e^{-2ikz}) \\
&= -E_0^2 \sin 2kz [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2],
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\mathbf{H})} &= \frac{i}{2} E_0^2 Z_0^{-2} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{-ikz}) \\
&\quad \times ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{ikz}) \\
&= -\frac{i}{2} E_0^2 Z_0^{-2} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{2ikz} + [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] \\
&\quad \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-2ikz}) = -\frac{i}{2} E_0^2 Z_0^{-2} [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] (e^{2ikz} - e^{-2ikz}) \\
&= E_0^2 Z_0^{-2} \sin 2kz [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = -Z_0^{-2} \Phi^{(\mathbf{E})}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Тогда, хоть и эллиптичности и отличны от нуля, но из-за их различных знаков плотность потока хиральности становится равна нулю,

$$\Phi = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \Phi^{(\mathbf{E})} + \mu_0 \Phi^{(\mathbf{H})}) = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 - \mu_0 Z_0^{-2}) \Phi^{(\mathbf{E})} = 0. \tag{2.37}$$

Зная $\Phi^{(E)}$ и $\Phi^{(H)}$, определим орбитальные компоненты вектора Пойнтинга. Для этого найдем

$$\nabla \times \Phi^{(E)} = -E_0^2 \nabla \times ([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \sin 2kz) = -2kE_0^2 \cos 2kz [\mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]] = 0, \quad (2.38)$$

$$\nabla \times \Phi^{(H)} = -Z_0^{-2} \nabla \times \Phi^{(E)} = 0, \quad (2.39)$$

что позволяет считать орбитальные компоненты вектора Пойнтинга равными ему самому. Найдя выражения для электрической и магнитной частей плотности энергии

$$\begin{aligned} \langle W^{(E)} \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 (\mathbf{e}_1 e^{ikz} + \mathbf{e}_2 e^{-ikz}) \cdot (\mathbf{e}_1 e^{-ikz} + \mathbf{e}_2 e^{ikz}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 [1 + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \cos 2kz], \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \langle W^{(H)} \rangle &= \frac{\mu_0}{4} E_0^2 Z_0^{-2} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{-ikz}) \\ &\quad \cdot ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{ikz}) \\ &= \frac{\mu_0}{4} E_0^2 Z_0^{-2} (2 - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] e^{2ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] \\ &\quad \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] e^{-2ikz}) \\ &= \frac{\mu_0}{2} E_0^2 Z_0^{-2} (1 - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1] \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2] \cos 2kz) \\ &= \frac{\mu_0}{2} E_0^2 Z_0^{-2} [1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \cos 2kz] \end{aligned} \quad (2.41)$$

и их градиенты

$$\nabla \langle W^{(E)} \rangle = -\varepsilon_0 k E_0^2 \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \sin 2kz, \quad (2.42)$$

$$\nabla \langle W^{(H)} \rangle = \mu_0 k E_0^2 Z_0^{-2} \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \sin 2kz = -\nabla \langle W^{(E)} \rangle, \quad (2.43)$$

получим выражения для сил и моментов сил в виде

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^r \rangle = - \left(\frac{\alpha'}{\varepsilon_0} - \frac{\beta'}{\mu_0} \right) \frac{\omega}{c^2} 2I_0 \sin 2kz (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_z, \quad (2.44)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^d \rangle = 0, \quad (2.45)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\chi}^r \rangle = 0, \quad (2.46)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\chi}^d \rangle = 0, \quad (2.47)$$

$$\langle \Gamma_{\alpha, \beta} \rangle = - \left(\frac{\alpha''}{\varepsilon_0} - \frac{\beta''}{\mu_0} \right) \frac{2I_0}{c} \sin 2kz [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2], \quad (2.48)$$

$$\langle \Gamma_\chi \rangle = 0. \quad (2.49)$$

Данные выражения, вместе с предыдущими результатами, позволяют сделать вывод об отсутствии возможности получения хиральных сил с помощью линейных волн и призывают обратиться в дальнейшем к рассмотрению волн с круговой поляризацией.

2.4. Две циркулярно поляризованные волны одинаковых частот, распространяющиеся навстречу друг другу

Если две циркулярно поляризованные монохроматические волны распространяются в отрицательном направлении оси z , то электрическое поле таких волн имеет вид

$$\mathbf{E}_{0R}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_R^* E_0 e^{-ikz}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E}_{0L}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_L^* E_0 e^{-ikz}. \quad (2.51)$$

Пусть поле образуется из двух волн одинаковой частоты, распространяющихся в разные стороны вдоль оси z . Электрическое и магнитное поле такой волны для случая разных круговых поляризаций будут иметь вид

$$\mathbf{E}_{0v}(\mathbf{r}) = E_0 (\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}) = 2E_0 \mathbf{e}_v \cos kz, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0v}(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla \times \mathbf{E}_{0v}}{i\mu_0\omega} = -\frac{2E_0 k}{i\mu_0\omega} \sin kz [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_v] = 2i \frac{E_0}{\mu_0 c} \sin kz (\pm i \mathbf{e}_v) \\ &= \mp 2Z_0^{-1} E_0 \sin kz \mathbf{e}_v, \end{aligned} \quad (2.53)$$

а для случая одинаковых круговых поляризаций —

$$\mathbf{E}_{0v}(\mathbf{r}) = E_0 (\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}), \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0v}(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla \times (\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz})}{i\mu_0\omega} = \frac{E_0 k}{\mu_0\omega} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_v] e^{ikz} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_v^*] e^{-ikz}) \\ &= \pm i Z_0^{-1} E_0 (\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}) = \pm i Z_0^{-1} \mathbf{E}_{0v}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где верхний (нижний) знак соответствует волне с правой (левой) круговой поляризацией, в положительном направлении оси z .

Теперь рассмотрим подробнее случай волн разной круговой поляризации. Как мы убедились в предыдущих разделах, плотность хиральности ненулевая только в случае волн с круговой поляризацией, поэтому начать стоит именно с нее:

$$K = \frac{\omega}{2c^2} \text{Im}(\mathbf{E}_{0v} \cdot \mathbf{H}_{0v}^*) = \mp \frac{\omega}{c^2} 2I_0 \sin 2kz \text{Im}(\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v^*) = 0. \quad (2.56)$$

Плотность потока хиральности вместе со своими эллиптичностью в таком случае будут иметь вид

$$\Phi^{(\mathbf{E})} = \frac{i}{2} [\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{E}_{0v}^*] = 2iE_0^2 \cos^2 kz [\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_v^*] = \mp 2E_0^2 \cos^2 kz \mathbf{e}_z, \quad (2.57)$$

$$\Phi^{(\mathbf{H})} = \frac{i}{2} [\mathbf{H}_{0v} \times \mathbf{H}_{0v}^*] = 2iZ_0^{-2}E_0^2 \sin^2 kz [\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_v^*] = \mp 2E_0^2 Z_0^{-2} \sin^2 kz \mathbf{e}_z, \quad (2.58)$$

$$\Phi = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \Phi^{(\mathbf{E})} + \mu_0 \Phi^{(\mathbf{H})}) = \mp \omega \varepsilon_0 E_0^2 \mathbf{e}_z = \mp \frac{\omega}{c} 2I_0 \mathbf{e}_z. \quad (2.59)$$

Как и следовало ожидать, поле, имеющее вид (2.52), (2.53), не будет переносить энергию

$$\Pi = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{H}_{0v}^*) = \mp 2I_0 \sin 2kz \text{Re}[\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_v^*] = 0, \quad (2.60)$$

а усредненные по времени электрическая и магнитная части плотности энергии записываются следующим образом:

$$\langle W^{(\mathbf{E})} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz, \quad (2.61)$$

$$\langle W^{(\mathbf{H})} \rangle = \mu_0 Z_0^{-2} E_0^2 \sin^2 kz, \quad (2.62)$$

Отсюда находим консервативную часть ахиральной компоненты силы

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^r \rangle = 2 \left(\frac{\alpha'}{\varepsilon_0} - \frac{\beta'}{\mu_0} \right) \frac{\omega}{c^2} I_0 \sin 2kz \mathbf{e}_z. \quad (2.63)$$

Учитывая нулевой перенос энергии, можно записать

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle = 0, \quad (2.64)$$

$$\langle \Gamma_\chi \rangle = 0. \quad (2.65)$$

Диссипативная часть хиральной компоненты силы принимает вид

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \mp 4\chi'' \frac{\omega}{c} I_0 \mathbf{e}_z. \quad (2.66)$$

По сравнению с одной волной с круговой поляризацией, такая конфигурация волн с круговой поляризацией позволяет избавиться от диссипативной части ахиральной компоненты силы и вдвое усиливает поток хиральности, тем самым

усиливая диссипативную часть хиральной компоненты силы. Посмотрим, что будет, если поменять поляризацию одной из волн.

В случае, когда поле образуется волнами с одинаковой круговой поляризацией, возникает стоячая волна, в которой не только не осуществляется перенос энергии

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{H}_{0v}^*) = \pm \frac{1}{2} Z_0^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{E}_{0v}^*] \\ &= \pm I_0 \operatorname{Re}[(\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}) \times (\mathbf{e}_v^* e^{-ikz} + \mathbf{e}_v e^{ikz})] = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

но и вращение векторов поляризации компенсирует друг друга, что приводит к равенству нулю плотности хиральности и эллиптичностей потока хиральности:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\omega}{2c^2} \operatorname{Im}(\mathbf{E}_{0v} \cdot \mathbf{H}_{0v}^*) \\ &= \pm \frac{\omega}{c^2} I_0 \operatorname{Im}[(\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}) \cdot (\mathbf{e}_v^* e^{-ikz} + \mathbf{e}_v e^{ikz})] = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\Phi^{(E)} = \frac{i}{2} [\mathbf{E}_{0v} \times \mathbf{E}_{0v}^*] = \frac{i}{2} E_0^2 [(\mathbf{e}_v e^{ikz} + \mathbf{e}_v^* e^{-ikz}) \times (\mathbf{e}_v^* e^{-ikz} + \mathbf{e}_v e^{ikz})] = 0, \quad (2.69)$$

$$\Phi^{(H)} = \frac{i}{2} [\mathbf{H}_{0v} \times \mathbf{H}_{0v}^*] = Z_0^{-2} \Phi^{(E)} = 0. \quad (2.70)$$

В такой волне, в которой не только не осуществляется перенос энергии, но и не происходит вращение вектора поляризации, ожидаемо все силы и моменты сил будут равны нулю.

Вопросы

1. Чему равны хиральные компоненты силы и ахиральные компоненты момента силы, действующие на хиральный диполь в поле линейно поляризованной волны?
2. Чему равны реактивная и диссипативная компоненты ахиральной силы, действующей на хиральный диполь в поле линейно поляризованной волны?
3. Чему равен хиральный момент силы, действующей на хиральный диполь в поле линейно поляризованной волны?
4. Чему равны консервативные компоненты хиральной и ахиральной компоненты силы, действующей на хиральный диполь в поле циркулярно поляризованной волны?
5. Чему равны диссипативные компоненты хиральной и ахиральной компоненты силы, действующей на хиральный диполь в поле циркулярно поляризованной волны?
6. В чем заключается отличие в действии циркулярно поляризованной волны от линейно поляризованной на точечный хиральный диполь?

7. Можно ли получить хиральные силы с помощью линейных волн?
8. Чем отличаются силы и моменты сил, действующие на хиральный диполь в поле двух циркулярно-поляризованных волн, распространяющихся навстречу друг другу для случая одинаковой и разной круговой поляризации?

Глава 3

Хиральный диполь в поле двух циркулярно поляризованных волн различных частот

3.1. Силы, действующие на хиральный диполь

Энантиомеры хиральных наночастиц могут быть разделены оптически только тогда, когда они взаимодействуют с хиральным световым полем. Чтобы добиться разделения энантиомеров в макроскопических объемах, необходимо избежать малых пространственных колебаний интенсивности поля и убедиться, что поле оказывает на наночастицы только хиральную силу, в то время как ахиральная сила отсутствует или ничтожно мала. Для получения поля с малыми флуктуациями интенсивности хорошо подходит суперпозиция плоских волн, распространяющихся вдоль одной оси.

В главе 2 мы убедились, что наличие хиральных сил возможно при использовании света с круговой поляризацией. В таком поле на хиральный диполь оказывают воздействие только две диссипативные силы — ахиральная (2.22) и хиральная (2.29), для которых справедливо заметить, что направление воздействия ахиральной силы зависит лишь от направления распространения волны, а для хиральной — еще и от направления круговой поляризации. Это означает, что, подобрав правильную поляризацию волн, распространяющихся навстречу друг другу, можно скомпенсировать ахиральную компоненту силы, одновременно усилив хиральную.

Из раздела 2.4 можно заключить, что при использовании двух волн с одинаковой круговой поляризацией, распространяющихся навстречу друг другу, силы друг друга компенсируют, тогда как при использовании двух волн с различной круговой поляризацией, распространяющихся в разных направлениях, мы можем не только усилить диссипативную часть хиральной компоненты силы, но и полностью уничтожить диссипативную часть ахиральной компоненты силы. К сожалению, в таком случае из-за возникающей в таком поле неоднородности распределения энергии появляется консервативная часть ахиральной компоненты силы, которую также необходимо уничтожить.

Для исключения неоднородностей плотности энергии, вызывающих ахиральную силу, разумно начать формирование полностью хиральной оптической силы, рассматривая две встречных циркулярно поляризованных плоских волны различных частот, $\omega_1 \neq \omega_2$ (разность частот необходима, чтобы избежать интерференции между волнами и обеспечить формирование единой

хиральной силы). Такие волны для получения максимальной хиральной силы должны иметь разную круговую поляризацию, и в этом случае электрическое поле может быть представлено в виде:

$$\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{e}_{\pm}(E_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} + E_2 e^{-i(\omega_2 t + k_2 z)})], \quad (3.1)$$

где E_{ν} и k_{ν} соответственно амплитуда и волновое число волны ν , а $\mathbf{e}_{\pm} = (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ для волны с правой круговой поляризацией, распространяющейся в направлении $\pm z$. Рисунок 1 соответствует полю $\mathbf{E}_{-}(\mathbf{r}, t)$, которое состоит из света с левой круговой поляризацией (LCPL), распространяющегося в направлении $+z$, и света с правой круговой поляризацией (RCPL), распространяющегося в направлении $-z$.

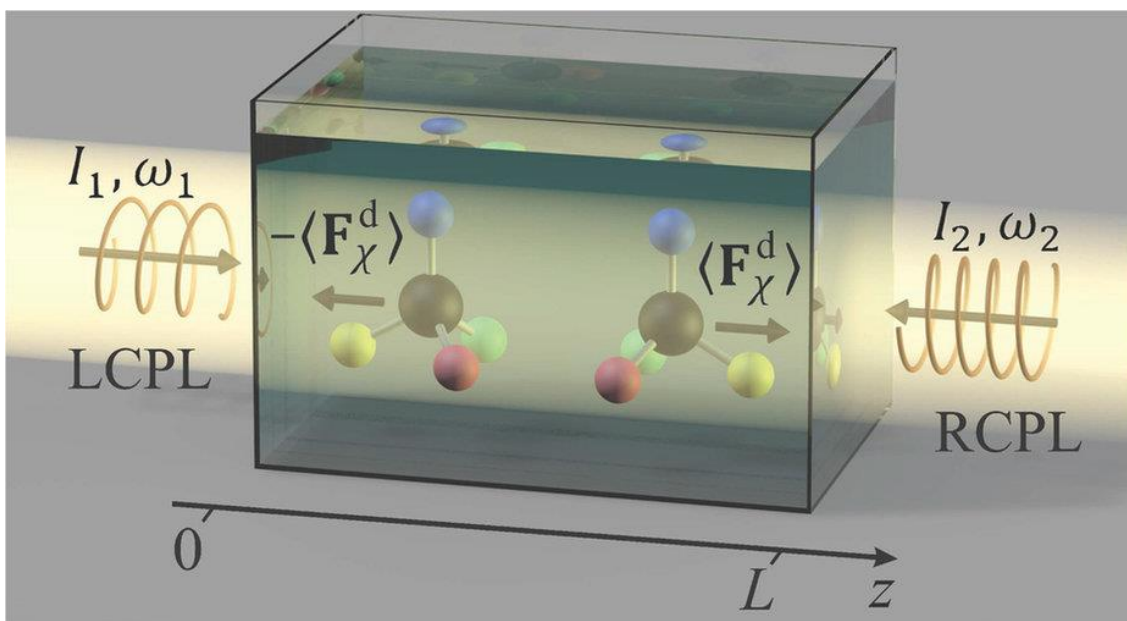


Рисунок 1. Разделение хиральных наночастиц с помощью полностью хиральной оптической силы, являющейся результатом взаимодействия двух встречных неинтерферирующих плоских волн с различной круговой поляризацией.

Благодаря отсутствию интерференции между волнами, распространяющимися в разных направлениях, интересующие нас величины могут быть посчитаны для каждой из них по отдельности. Так, интенсивность рассматриваемого электромагнитного поля является просто суммой интенсивностей отдельных волн. Поскольку она является однородной в пространстве, градиентная сила отсутствует, т.е. $\langle \mathbf{F}_{\alpha, \beta}^r \rangle = 0$. Плотность хиральности такого поля также не изменяется в пространстве и определяется суммой плотностей хиральности двух волн,

$$K_{\pm} = K_{1\pm} + K_{2\pm} = \pm(k_1 I_1 + k_2 I_2)/c, \quad (3.2)$$

где $I_\nu = E_\nu^2/(2Z_0)$ — интенсивность волны ν . Из-за пространственной однородности плотности хиральности, $\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle$, пропорциональная ее градиенту, будет также равна нулю.

Оставшиеся две оптические силы зависят от вектора Пойнтинга и эллиптичностей электрического и магнитного полей, которые в нашем случае определяются как

$$\mathbf{P}_{1\pm} = I_1 \mathbf{e}_z, \mathbf{P}_{2\pm} = -I_2 \mathbf{e}_z, \quad (3.3)$$

$$\Phi_{\nu\pm}^{(\mathbf{E})} = Z^2 \Phi_{\nu\pm}^{(\mathbf{H})} = \mp Z I_\nu \mathbf{e}_z. \quad (3.4)$$

Следует отметить, что в то время как, векторы Пойнтинга встречных плоских волн ориентированы противоположно, соответствующие эллиптичности указывают в одном направлении из-за противоположных поляризаций этих волн.

Используя эти выражения, найдем оставшиеся силы и моменты сил:

$$\langle \mathbf{\Gamma}_{\alpha,\beta} \rangle = \mp \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\alpha_1''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_1''}{\mu_0} \right) I_1 + \left(\frac{\alpha_2''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_2''}{\mu_0} \right) I_2 \right] \mathbf{e}_z, \quad (3.5)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\alpha,\beta}^d \rangle = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\alpha_1''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_1''}{\mu_0} \right) k_1 I_1 - \left(\frac{\alpha_2''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_2''}{\mu_0} \right) k_2 I_2 \right] \mathbf{e}_z, \quad (3.6)$$

$$\langle \mathbf{\Gamma}_\chi \rangle = 2(\chi_1'' I_1 - \chi_2'' I_2) \mathbf{e}_z, \quad (3.7)$$

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \mp 2[\chi_1'' k_1 I_1 + \chi_2'' k_2 I_2] \mathbf{e}_z, \quad (3.8)$$

где индексы поляризуемостей отмечают частоты, на которых они берутся, и верхний или нижний знак, как и раньше, соответствует волне с правой круговой поляризацией, движущейся в положительном или отрицательном направлении оси z .

Далее проанализируем диссипативную часть ахиральной компоненты силы, которая равна нулю тогда, когда два слагаемых в квадратных скобках уравнения (3.6) компенсируются. Учитывая иерархию поляризуемостей ($\alpha'' \gg \chi'' \gg \beta''$), можно пренебречь магнитной частью силы, и тогда условия равенства ахиральной компоненты силы нулю можно записать в виде:

$$\alpha_1'' \omega_1 I_1 = \alpha_2'' \omega_2 I_2. \quad (3.9)$$

Таким образом, можно получить полностью хиральную постоянную оптическую силу, которая делает возможным разделение энантиомеров наночастиц в макромасштабе. Эта сила сопровождается хиральным и ахиральным крутящими моментами, и может быть повышена за счет увеличения интенсивности двух волн или с использованием нескольких пар встречных плоских волн, с соблюдением уравнения (3.9) для каждой пары. Повышение интенсивности ограничено поглощением излучения наночастицами и раствором, поскольку последнее может

привести к спаду оптической интенсивности и связанной с ней силы с расстоянием, изменению скорости дрейфа энантиомеров, или даже уничтожить их и вскипятить раствор в какой-то момент. В дальнейшем мы исключаем рассмотрение таких вредных эффектов, предполагая, что выработка тепловой энергии за счет оптического поглощения пренебрежимо мала.

Важное значение также имеет то, что $\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle$ зависит от вращательных сил R_{ba} оптических переходов, происходящих внутри наночастиц, так $\chi''(\omega) \propto R_{ba}(\omega)/(\omega\hbar)$ [23]. Хиральная сила достигает своего максимума, когда $R_{ba}(\omega_1)$ и $R_{ba}(\omega_2)$ имеют одинаковый знак.

3.2. Поглощение и круговой дихроизм

3.2.1. Общее выражение для эффективности поглощения электромагнитного поля хиральным диполем

Поскольку на энантиомеры будет оказывать воздействие диссипативная сила, необходимым действием будет расчет поглощения. Интенсивность поглощения электромагнитного поля хиральным диполем представима в виде

$$A = \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right) \right\rangle_t, \quad (3.10)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Выразим интенсивность поглощения через фазоры, считая, что зависимость всех входящих величин является гармонической,

$$\begin{aligned} A &= \frac{i\omega}{4} \left\langle (-\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{p}_0^* e^{i\omega t}) \cdot (\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}) \right. \\ &\quad \left. + (-\mathbf{m}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{m}_0^* e^{i\omega t}) \cdot (\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{H}_0^* e^{i\omega t}) \right\rangle_t \\ &= \frac{i\omega}{4} (-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathbf{p}_0^* \cdot \mathbf{E}_0 - \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* + \mathbf{m}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) \\ &= \frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Применив (1.8) и (1.9) к данному выражению, получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega}{2} \text{Im}[(\alpha \mathbf{E}_0 + i\chi \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{E}_0^* + (-i\chi \mathbf{E}_0 + \beta \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{H}_0^*] \\ &= \frac{\omega}{2} \text{Im}[\alpha (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) + \beta (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*)] \\ &\quad + \frac{\omega}{2} \text{Im}\{i\chi [(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) - (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*)]\} \\ &= \frac{\omega}{2} (\text{Im } \alpha \|\mathbf{E}_0\|^2 + \text{Im } \beta \|\mathbf{H}_0\|^2) + \omega \text{Im } \chi \text{Im}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) \\ &= \frac{\omega}{2} (\text{Im } \alpha \|\mathbf{E}_0\|^2 + \text{Im } \beta \|\mathbf{H}_0\|^2) + 2c^2 \text{Im } \chi K. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используя предыдущие обозначения, получаем общий вид поглощения электромагнитного поля хиральным диполем в виде

$$A = \frac{\omega}{2}(\alpha''\|\mathbf{E}_0\|^2 + \beta''\|\mathbf{H}_0\|^2) + 2c^2\chi''K. \quad (3.13)$$

3.2.2. Поглощение волн с круговой поляризацией

Для циркулярно поляризованной волны частоты ω_1 , распространяющейся в положительном направлении оси z , электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}_{0v}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\pm}E_1e^{ik_1z}. \quad (3.14)$$

Начнем поиск интенсивности поглощения с нахождения квадратов модулей векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\|\mathbf{E}_{1v}\|^2 = E_1^2 = 2Z_0I_1, \quad (3.15)$$

$$\|\mathbf{H}_{1v}\|^2 = Z_0^{-2}E_1^2 = 2Z_0^{-1}I_1. \quad (3.16)$$

С учетом плотности хиральности волны с круговой поляризацией

$$K_{\text{CPL}\pm} = \pm \frac{\omega_1}{2c^2}Z_0^{-1}E_1^2\text{Im}(\mathbf{e}_{\pm}e^{ik_1z} \cdot ie^{-ik_1z}\mathbf{e}_{\pm}^*) = \pm k_1I_1/c, \quad (3.17)$$

найдем интенсивность поглощения

$$A_1 = \omega_1I_1(\alpha_1''Z_0 + \beta_1''Z_0^{-1} \pm 2\chi_1''). \quad (3.18)$$

3.2.3. Круговой дихроизм и коэффициент диссимметрии

Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси z , с противоположной первой волне круговой поляризацией и частотой ω_2 электрическое поле будет выглядеть как

$$\mathbf{E}_{0v}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\mp}^*E_2e^{-ik_2z} = \mathbf{e}_{\pm}E_2e^{-ik_2z}, \quad (3.19)$$

а интенсивность поглощения для такой волны примет вид:

$$A_2 = \omega_2I_2(\alpha_2''Z_0 + \beta_2''Z_0^{-1} \mp 2\chi_2''). \quad (3.20)$$

Очень важной характеристикой поглощения оптического излучения хиральными объектами, необходимой для расчета χ'' , является круговой дихроизм, определяемый как разница поглощения циркулярно поляризованных волн одинаковой частоты, но имеющих разную круговую поляризацию,

$$\begin{aligned} \text{CD}(\omega) &= A_+ - A_- \\ &= \omega I_0(\alpha''Z_0 + \beta''Z_0^{-1} + 2\chi'') - \omega I_0(\alpha''Z_0 + \beta''Z_0^{-1} - 2\chi'') \\ &= 4\omega I_0\chi''. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Очень удобной нормированной величиной, которая характеризует энантиоселективность света с круговой поляризацией, является фактор диссимметрии, определяемый, как

$$g = 2 \frac{A_+ - A_-}{A_+ + A_-} = \frac{4\chi''}{\alpha''Z_0 + \beta''Z_0^{-1}}. \quad (3.22)$$

Для получения поглощения интенсивности в хиральном силовом поле сложим полученные поглощения для двух волн с круговой поляризацией, пренебрегая дисперсией и принимая во внимание иерархию поляризуемостей:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \omega_1 I_1 (\alpha_1'' Z_0 + \beta_1'' Z_0^{-1} \pm 2\chi_1'') + \omega_2 I_2 (\alpha_2'' Z_0 + \beta_2'' Z_0^{-1} \mp 2\chi_2'') \\ &= k_1 I_1 \left(\frac{\alpha_1''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_1''}{\mu_0} \right) + k_2 I_2 \left(\frac{\alpha_2''}{\varepsilon_0} + \frac{\beta_2''}{\mu_0} \right) \pm 2(\chi_1'' \omega_1 I_1 - \chi_2'' \omega_2 I_2) \\ &\approx k_1 I_1 \frac{\alpha_1''}{\varepsilon_0} + k_2 I_2 \frac{\alpha_2''}{\varepsilon_0} \approx 2k_1 I_1 \frac{\alpha_1''}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При получении данной формулы вклад магнитного поля в поглощение и дисперсия были приняты нулевыми в силу своей малости.

Вопросы

1. Какой общий вид для хиральных и ахиральных компонент сил и момент сил, действующих на хиральный диполь в поле двух циркулярно поляризованных волн различных частот?
2. Как получить полностью хиральную постоянную оптическую силу, которая делает возможным разделение энантиомеров наночастиц в макромасштабе?
3. Какой общий вид выражения для поглощения электромагнитного поля хиральным диполем?
4. Какой общий вид выражения для интенсивности для поглощения электромагнитного поля хиральным диполем?
5. Что такое круговой дихроизм и фактор диссимметрии?
6. Какой общий вид выражения для кругового дихроизма и фактора диссимметрии?

Глава 4

Диффузия хиральных наночастиц в силовом поле

4.1. Диффузия в однородном силовом поле

4.1.1. Постановка задачи

Для оценки масштабов полностью хиральной оптической силы лучше всего подойдет уравнение вынужденной диффузии в однородном силовом поле, которое в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}, \quad (4.1)$$

где $\rho(z, t)$ — плотность, а $q(z, t)$ — поток массы, определяемый как

$$q = -D \frac{\partial \rho}{\partial z} + v\rho, \quad (4.2)$$

где D — коэффициент диффузии, $v = DF/(k_B T)$ — скорость дрейфа диполей при отсутствии диффузии, k_B — постоянная Больцмана и T — температура среды. В предположении что энантиомеры находятся в коллоидном растворе и не взаимодействуют друг с другом, их поведение в однородном силовом поле $\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = F \mathbf{e}_z$ описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - v \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Будем считать, что диполи находятся в кювете, стенки которой имеют координаты $z = 0$ и $z = L$, а начальная концентрация диполей $\rho(z, 0) = \rho_0 = \text{const}$. Уравнение диффузии характеризуется двумя важными масштабами, $t_0 = D/v^2$ и $z_0 = D/v$, которые играют центральную роль в пространственно-временной эволюции концентрации. На рисунке 2 показано, как сильно эти две шкалы зависят от силы для типичного значения коэффициента диффузии малых молекул в воде $D = 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$.

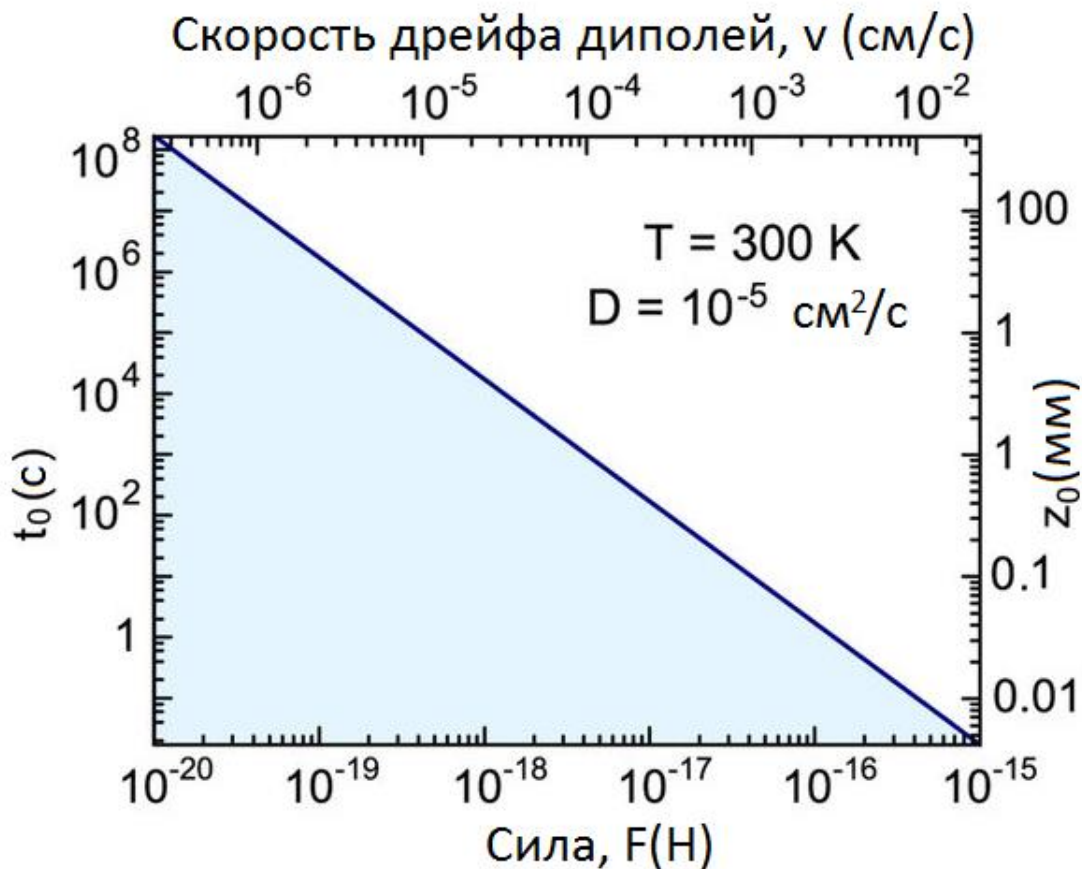


Рисунок 2. Характерные пространственный и временной масштабы пространственно-временной эволюции концентрации наночастиц, диффундирующих в воде при комнатной температуре в присутствии постоянной силы F .

В данной модели не рассматривается нагрев системы, так как легко сделать его пренебрежимо малым за счет выбора длины волны возбуждения в окне прозрачности коллоидного раствора и уменьшения концентрации наночастиц. Простое уравнение теплового баланса показывает, что повышение температуры ΔT обратно пропорционально массе m и теплоемкости C раствора и может быть оценено как $\Delta T \sim P\tau_1 / (Cm)$, где P — скорость поглощения и τ_1 — характерное время рассеивания тепла. За счет увеличения массы раствора (или уменьшения времени рассеивания тепла), всегда можно сделать температуру системы настолько стабильной, насколько это требуется на практике.

Решение данного уравнения находится для равномерного начального распределения диполей в кювете, используя закон сохранения числа диполей, который эквивалентен условию обращения в нуль потока массы на стенках кюветы, $q(0, t) = q(L, t) = 0$.

4.1.2. Стационарное решение уравнения диффузии

Начнем поиск решения с анализа равновесного распределения хиральных диполей, при котором поток массы равен нулю. Данное распределение является решением уравнения

$$z_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial z} = \rho_s, \quad (4.5)$$

где ρ_s — стационарная концентрация диполей. Далее, используя закон сохранения числа диполей

$$\rho_0 L = \int_0^L \rho_s(z) dz, \quad (4.6)$$

получим решение этого уравнения в виде

$$\rho_s(z) = \rho_0 \frac{L/z_0}{e^{L/z_0} - 1} e^{z/z_0}. \quad (4.7)$$

4.1.3. Нестационарное решение уравнения диффузии

Концентрация каждого энантиомера будет асимптотически приближаться к равновесной концентрации ρ_s , что позволяет произвести замену

$$\rho(z, t) = [1 + f(z, t) e^{-2z+vt/(4z_0)}] \rho_s(z), \quad (4.8)$$

которая приводит уравнение диффузии к стандартному виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (4.9)$$

Подставив начальные и граничные условия в (4.8), получим их для функции $f(z, t)$:

$$2D \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=0} = vf(0, t), \quad (4.10)$$

$$2D \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=L} = vf(L, t), \quad (4.11)$$

$$f(z, 0) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s(z)} - 1 \right) e^{z/(2z_0)}. \quad (4.12)$$

Будем искать общее решение уравнения (4.9) методом разделения переменных:

$$f(z, t) = (a \cos \lambda z + b \sin \lambda z) e^{-\lambda^2 D t}. \quad (4.13)$$

Начнем решение начально-краевой задачи с подстановки левого граничного условия в уравнение (4.13), что позволяет связать две константы пространственной

интеграции, $a = 2\lambda z_0 b$. В свою очередь, граничные условия правой стенки кюветы определяют спектр параметра λ :

$$\lambda_n = \pi n/L, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

В результате семейство решений уравнения диффузии, удовлетворяющих граничным условиям, имеет вид

$$\rho(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2z_0 \lambda_n \cos \lambda_n z + \sin \lambda_n z) e^{-\lambda_n^2 D t}. \quad (4.15)$$

Наконец, с помощью легко поддающейся проверке ортогональности функций $u_n(z) = 2z_0 \lambda_n \cos \lambda_n z + \sin \lambda_n z$ на интервале $(0, L)$ из начального условия мы находим

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sigma_n} \int_0^L u_n(z) \left(\frac{\rho_0}{\rho_s(z)} - 1 \right) e^{\frac{z}{2z_0}} dz \\ &= \frac{16z_0^2 \lambda_n / L}{[1 + (2z_0 \lambda_n)^2]^2} \left(1 - (-1)^n e^{-\frac{L}{2z_0}} \right) \frac{\rho_0 e^{\frac{z}{2z_0}}}{\rho_s(z)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$\sigma_n = \int_0^L u_n^2(z) dz = \frac{L}{2} [1 + (2z_0 \lambda_n)^2]. \quad (4.17)$$

Полученное аналитическое решение дает нам четкое представление о пространственно-временной эволюции концентраций обоих энантиомеров.

4.1.4. Оценка чистоты энантиомеров в изначально рацемической смеси наночастиц

Выражение (4.7) демонстрирует стационарную концентрацию диполей, которые под воздействием силы F будут двигаться в сторону ее воздействия ($\chi'' > 0$) и могут быть обозначены, как $\rho_+(z)$. Для энантиомера, движущегося в противоположную сторону ($\chi'' < 0$) стоит ввести обозначение $\rho_-(z)$, а стационарное распределение их концентрации примет вид

$$\rho_-(z) = \rho_0 \frac{L/z_0}{1 - e^{-L/z_0}} e^{-z/z_0}. \quad (4.18)$$

Чистота разделенных в пространстве энантиомеров характеризуется энантиомерным избытком (ee) и соотношением энантиомеров (er), которые определяются выражениями

$$ee(z) = \frac{\rho_+(z) - \rho_-(z)}{\rho_+(z) + \rho_-(z)} = \tanh\left(\frac{z - L/2}{z_0}\right), \quad (4.19)$$

$$er(z) = \frac{\rho_+(z)}{\rho_-(z)} = e^{(2z-L)/z_0}. \quad (4.20)$$

Также информативными являются интегральные показатели пространственного разделения энантиомеров. Введем три такие меры, как функции одного безразмерного параметра $q = L/z_0$,

$$\eta = \frac{\langle z \rangle}{L} = \frac{1}{\rho_0 L^2} \int_0^L z \rho_s(z) dz = \frac{1}{1 - e^{-q}} - \frac{1}{q}, \quad (4.21)$$

$$\delta_{\langle z \rangle} = \frac{1}{\rho_0 L} \int_{2\langle z \rangle - L}^L \rho_s(z) dz = \frac{1 - e^{q[\coth(q/2) - 1]} - 2}{1 - e^{-q}}, \quad (4.22)$$

$$\delta_{1/2} = \frac{1}{\rho_0 L} \int_{L/2}^L \rho_s(z) dz = \frac{1 - e^{-q/2}}{1 - e^{-q}}, \quad (4.23)$$

которые являются нормированным положением центра масс системы наночастиц, относительным количеством наночастиц, содержащихся в пределах области длины $2(L - \langle z \rangle)$ относительно центра масс, а также относительным количеством наночастиц в правой половине кюветы. Последние три определения предполагают, что наночастицы движутся вправо, т.е. $q > 0$.

Экспоненциальные зависимости величин в уравнениях от длины кюветы и параметра q являются уникальной особенностью разделения энантиомеров с использованием полностью хиральной и постоянной оптической силы. Эта особенность позволяет разделить энантиомеры до степени чистоты, которая находится далеко за пределами того, что может быть достигнуто с помощью современной хроматографии. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 3. Пусть энантиомеры заметно смещаются в течение времени $t_0 = 10$ с, что (см. рисунок 2) соответствует $z_0 = 0.1$ мм и $v = 10^{-3}$ см/с и требует хиральной силы около 4×10^{-16} Н.

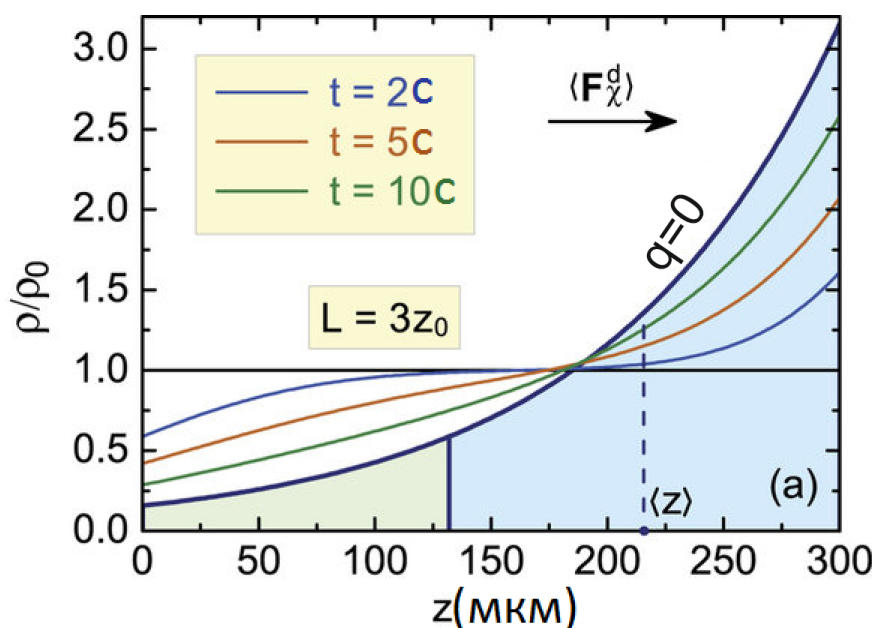


Рисунок 3. Пространственно-временная эволюция концентрации энантиомеров, перемещаемых с постоянной хиральной силой. Синим цветом закрашена область с относительным числом наночастиц $\delta_{\langle z \rangle}$. Параметры моделирования: $v = 10^{-3}$ см/с и $D = 10^{-5}$ см²/с.

Рассмотренный пример показывает, что полное разделение энантиомеров в субмиллиметровом масштабе за время порядка нескольких сотен секунд требует хиральной силы порядка 10^{-16} Н.

4.2. Диффузия в экспоненциально убывающем силовом поле

4.2.1. Постановка задачи

В разделе 3.2 было посчитано поглощение интенсивности поля из-за наличия диссипативной силы и диссипативного момента силы. Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать коллоидный раствор, в котором отсутствует нагрев, но теперь примем во внимание ослабление света при распространении в среде. Таким образом, сила примет вид $F = F_0 e^{-\alpha z}$, где α — коэффициент поглощения, а F_0 — сила, действующая на диполи у левой стенки. Тогда поток массы будет определяться следующим образом:

$$q = -D \frac{\partial \rho}{\partial z} + v \rho, \quad (4.24)$$

где $v = DF/(k_B T)$ — скорость дрейфа диполей при отсутствии диффузии. Теперь, подставив поток массы в уравнение (4.1), получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - \frac{v_0}{F_0} \frac{\partial(F\rho)}{\partial z}, \quad (4.25)$$

где $v_0 = DF_0/(k_B T)$ — скорость дрейфа диполей при отсутствии диффузии и постоянной силе $F = F_0$. Подставив в уравнение (4.25) выражение для силы, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - v_0 \frac{\partial(e^{-\alpha z} \rho)}{\partial z}. \quad (4.26)$$

Данное уравнение, как и в предыдущем случае, будет решаться в кювете длины L с координатами стенок $z = 0$ и $z = L$ с равномерным начальным распределением диполей, $\rho(z, 0) = \rho_0 = \text{const}$, и нулевым потоком массы через стенки, $q(0, t) = q(L, t) = 0$.

4.2.2. Стационарное решение уравнения диффузии

Проанализируем равновесное распределение хиральных диполей, к которому система приходит при $t \rightarrow \infty$, характеризующееся равенством нулю потока массы. Данное распределение является решением уравнения $q(z, t) = 0$ и имеет вид

$$z_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial z} = \rho_s e^{-\alpha z}, \quad (4.27)$$

а решение его дается выражением

$$\rho_s(z) = \rho_c \exp\left(\frac{L_{\text{eff}}(z)}{z_0}\right), \quad (4.28)$$

где ρ_c — константа интегрирования, а $L_{\text{eff}}(z) = (1 - e^{-\alpha z})/\alpha$.

Константа интегрирования находится из условия

$$\rho_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_s(z) dz = \frac{\rho_c}{L} \int_0^L \exp\left(\frac{L_{\text{eff}}(z)}{z_0}\right) dz = \frac{\rho_c e^\kappa}{aL} (\text{Ei}(-\kappa) - \text{Ei}(-\kappa q)), \quad (4.29)$$

где $\kappa = 1/(\alpha z_0)$, $q = e^{-\alpha L}$, $\text{Ei}(x)$ — экспоненциальный интеграл. Переписав (4.29), получим

$$\rho_c = \rho_0 \frac{aL e^{-\kappa}}{\text{Ei}(-\kappa) - \text{Ei}(-\kappa q)}. \quad (4.30)$$

4.2.3. Общее решение уравнения диффузии

В уравнении (4.25) сделаем замену переменной

$$x = e^{-\alpha z}, \quad (4.31)$$

которая преобразует уравнение диффузии к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha(\alpha D + v_0 x)x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \alpha v_0 x \rho. \quad (4.32)$$

При этом граничные условия на стенках кюветы $q(0, t) = q(L, t) = 0$ принимают форму

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=1} = -\kappa \rho(1, t), \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=q} = -\kappa \rho(q, t). \quad (4.34)$$

Уравнение (4.32) следует решать методом разделения переменных с помощью подстановки

$$\rho(x, t) = [1 + f(x)e^{-\lambda^2 D t}] \rho_s(x), \quad (4.35)$$

которая приведет его к виду

$$\alpha^2 x^2 f'' + \alpha(\alpha - kx)xf' + \lambda^2 f = 0, \quad (4.36)$$

где $k = 1/z_0$, а штрих означает дифференцирование по переменной x .

Для функции $f(x)$ смешанные (4.33), (4.34) граничные условия функции ρ становятся граничными условиями второго рода:

$$f'(1) = f'(q) = 0. \quad (4.37)$$

Сделав замену $f = x^{i\mu} g$, преобразуем уравнение

$$x^2 f'' + (1 - kx)xf' + \mu^2 f = 0 \quad (4.38)$$

к виду

$$xg'' + (1 + 2i\mu - kx)g' - i\mu k g = 0, \quad (4.39)$$

где $\mu = \lambda/\alpha$.

Общее решение данного уравнения есть

$$g(x) = C_1 U(i\mu, 2i\mu + 1, kx) + C_2 L_{-i\mu}^{2i\mu}(kx), \quad (4.40)$$

где $U(i\mu, 2i\mu + 1, kx)$ — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода, а $L_{-i\mu}^{2i\mu}(kx)$ — присоединенные многочлены Лагерра. Таким образом, сделав обратную замену, общее вещественное решение исходного уравнения можно представить в виде

$$f(x) = c_1 [x^{i\mu} U(i\mu, 2i\mu + 1, kx) + \text{с. с.}] + c_2 [x^{i\mu} L_{-i\mu}^{2i\mu}(kx) + \text{с. с.}], \quad (4.41)$$

где c_1 и c_2 — вещественные константы интегрирования.

Используя выражение (4.41) и граничные условия (4.37), получаем дисперсионное уравнение

$$A(1)B(q) = A(q)B(1), \quad (4.42)$$

где

$$A(q) = i\mu q^{i\mu-1}U(i\mu, 2i\mu + 1, \kappa q) - \frac{i\mu}{\sqrt{\pi q}} e^{\kappa q/2} \kappa^{-i\mu+1/2} K_{i\mu+1/2} \left(\frac{\kappa q}{2} \right) + \text{с. с.}, \quad (4.43)$$

$$B(q) = i\mu q^{i\mu-1} L_{-i\mu}^{2i\mu}(\kappa q) - \kappa q^{i\mu} L_{-1-i\mu}^{1+2i\mu}(\kappa q) + \text{с. с.}, \quad (4.44)$$

а $K_{i\mu+1/2}(\kappa q/2)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Уравнение (4.42) определяет спектр параметра μ : $\mu_n = (\dots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots)$, где $\mu_{-n} = -\mu_n$ и $\mu_0 = 0$. В результате семейство решений, удовлетворяющих граничным условиям, имеет вид

$$\rho(x, t) = [1 + \Phi(x, t)]\rho_s(x), \quad (4.45)$$

где

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left\{ x^{i\mu_n} \left(U(i\mu_n, 2i\mu_n + 1, \kappa x) + b_n L_{-i\mu_n}^{2i\mu_n}(\kappa x) \right) + \text{с. с.} \right\} e^{-\mu_n^2 \alpha^2 D t} \quad (4.46)$$

и

$$b_n = -\frac{A_n(1)}{B_n(1)} = -\mu_n \frac{iU(i\mu_n, 2i\mu_n + 1, \kappa) - i\pi^{-1/2} e^{\kappa/2} \kappa^{-i\mu_n+1/2} K_{i\mu_n+1/2} \left(\frac{\kappa}{2} \right) + \text{с. с.}}{i\mu_n L_{-i\mu_n}^{2i\mu_n}(\kappa) - \kappa L_{-1-i\mu_n}^{1+2i\mu_n}(\kappa) + \text{с. с.}} \quad (4.47)$$

Для функции $\Phi(x, t)$ определим начальное условие:

$$\Phi(x, 0) = \frac{\rho_0}{\rho_s(x)} - 1. \quad (4.48)$$

Запишем систему функций (4.38) в виде

$$f_n(x) = x^{i\mu_n} \left[U(i\mu_n, 2i\mu_n + 1, \kappa x) + b_n L_{-i\mu_n}^{2i\mu_n}(\kappa x) \right] + \text{с. с.} \quad (4.49)$$

и найдем вес $w(x)$, с которым она ортогональна на интервале $(q, 1)$. Из определения $f_n(x)$ следует, что они удовлетворяют уравнениям

$$x^2 f_n'' + (1 - \kappa x) x f_n' + \mu_n^2 f_n = 0, \quad (4.50)$$

$$x^2 f_m'' + (1 - \kappa x) x f_m' + \mu_m^2 f_m = 0. \quad (4.51)$$

Таким образом мы имеем систему уравнений для двух ортогональных функций. Умножим левую часть первого уравнения на f_m , второго — на f_n и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} (\mu_n^2 - \mu_m^2) f_n f_m &= x^2 (f_m'' f_n - f_n'' f_m) + (1 - \kappa x) x (f_m' f_n - f_n' f_m) \\ &= x^2 (f_m' f_n - f_n' f_m)' + (1 - \kappa x) x (f_m' f_n - f_n' f_m). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Интегрируя уравнение (4.52) с весом $w(x)$ в пределах от q до 1, получим

$$\begin{aligned} (\mu_n^2 - \mu_m^2) \int_q^1 w f_n f_m dx &= \int_q^1 w x^2 (f_m' f_n - f_n' f_m)' dx + \int_q^1 w (1 - \kappa x) x (f_m' f_n - f_n' f_m) dx \\ &= w x^2 (f_m' f_n - f_n' f_m) \Big|_q^1 \\ &+ \int_q^1 [w (1 - \kappa x) x - (w x^2)'] (f_m' f_n - f_n' f_m) dx. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Из определения ортогональности функций, считая $n \neq m$ и $\mu_n \neq \mu_m$, получаем

$$\int_q^1 w f_n f_m dx = 0. \quad (4.54)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (4.53) равно нулю в силу граничных условий, а второе обращается в нуль, когда

$$w(1 - \kappa x)x = (w x^2)', \quad (4.55)$$

т.е. при

$$w(x) = \frac{e^{-\kappa x}}{x}. \quad (4.56)$$

Тогда, применив начальное условие (4.48), получим

$$a_n = \frac{1}{\sigma_n} \int_q^1 w(x) f_n(x) \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} e^{\kappa(x-1)} - 1 \right) dx, \quad (4.57)$$

где нормировочная функция будет задана как

$$\sigma_n = \int_q^1 f_n^2(x) w(x) dx. \quad (4.58)$$

Исходя из (4.46), легко показать, что $a_0 = 0$ и

$$\Phi(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) e^{-\mu_n^2 \alpha^2 D t}. \quad (4.59)$$

4.2.4. Оценка чистоты энантиомеров в изначально рацемической смеси наночастиц

Величина $\rho_s(z)$ характеризует энантиомер, движение которого будет сонаправлено с направлением воздействия силы $[\rho_s^+(z)]$, для второго энантиомера справедливым будет выражение

$$\rho_s^-(z) = \rho_c e^{\frac{L_{eff}(L-z)}{z_0}}. \quad (4.60)$$

Полученное аналитическое решение дает нам ясную картину пространственно-временной эволюции плотности массы хиральных наночастиц, движущихся в одну сторону, но оно не дает исчерпывающего ответа на вопрос о чистоте смеси, состоящей из одинакового количества энантиомеров, движущихся под воздействием силы в разные стороны. Основными пространственными характеристиками такой смеси являются энантиомерный избыток (ee) и соотношение энантиомеров (er), заданные соответствующими выражениями:

$$ee(z) = \frac{\rho_s^+(z) - \rho_s^-(z)}{\rho_s^+(z) + \rho_s^-(z)} = \tanh\left(\frac{L_{eff}(z) - L_{eff}(L-z)}{2z_0}\right), \quad (4.61)$$

$$er(z) = \frac{\rho_s^+(z)}{\rho_s^-(z)} = \exp\left(\frac{L_{eff}(z) - L_{eff}(L-z)}{z_0}\right), \quad (4.62)$$

где $\rho_s^+(z)$ — стационарная концентрация энантиомеров, которые под воздействием силы F движутся вдоль оси z в направлении $+z$, а $\rho_s^-(z) = \rho_s^+(L-z)$ — стационарная концентрация энантиомеров, движущихся им навстречу под воздействием той же самой силы.

Значимой характеристикой индуцированной диффузии малых хиральных наночастиц в жидкости является сильная ее зависимость от определяющих масштаб соотношений, таких как αL , определяющего масштаб поглощения оптической силы суспензией, и соотношения L/z_0 , определяющего пространственный масштаб диффузии. Здесь очень важны критические соотношения αL и L/z_0 . Заметим, что при устремлении пространственного масштаба L/z_0 к нулю избыток энантиомеров тоже устремится к нулю, т.е. разделения не произойдет. Подобным образом смесь поведет себя, если устремить αL к бесконечности.

На рисунке 4 показано стационарное распределение концентрации хиральных наночастиц и двух основных мер чистоты энантиомера, определенных формулами (4.61) и (4.62), для разных значений соотношений αL и L/z_0 . Распределение концентрации, показанное на рисунке 4, хорошо характеризует зависимость распределения хиральных наночастиц от αL : при $\alpha L = 0$ зависимость экспоненциальная, тогда как при высоком поглощении, что ожидаемо, изменения концентрации почти не происходит; центры масс энантиомеров при увеличении

поглощения смещаются к центру кюветы. Сравнение верхних двух рисунков показывает, что смещение концентрации энантиомеров более выражено для большего соотношения L/z_0 . Пространственное распределение энантиомерного избытка и энантиомерного соотношения, представленное на рисунке 4 (в) и (г), подтверждает те же выводы: при высоком поглощении концентрация энантиомера не сильно отличается от рацемической смеси, а при малом поглощении слева и справа от центра кюветы получают смеси, обогащенные соответствующим энантиомером.

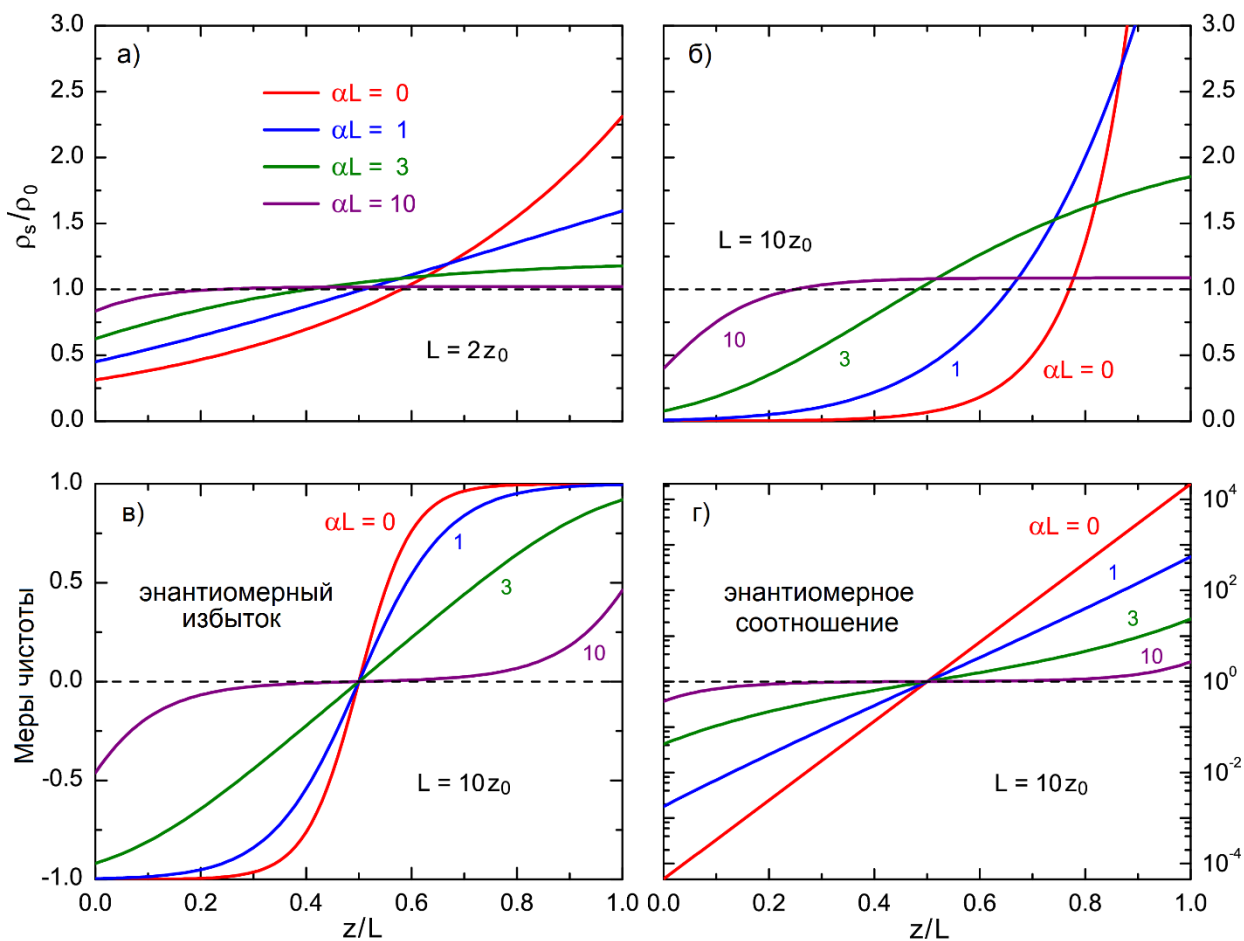


Рисунок 4. (а) и (б) стационарная концентрация наночастиц, диффундирующих в присутствии экспоненциально затухающей силы. (в) и (г) стационарные меры чистоты энантиомеров, состоявших первоначально в рацемической смеси и подвергнутых воздействию энантиоселективной силы.

Вопросы

1. Какой вид имеет выражение для равновесного и неравновесного распределения хиральных диполей в однородном силовом поле?
2. Какие величины характеризуют чистоту разделенных в пространстве энантиомеров? Какой вид имеют соответствующие выражения?

3. В каком случае рацемическая смесь хиральных наночастиц может быть разделена однородной полностью хиральной оптической силой на отдельные энантиомеры?
4. Какой вид имеет выражение для равновесного и неравновесного распределения хиральных диполей в экспоненциально убывающем силовом поле?
5. Какой вид имеют выражения для энантиомерного избытка и соотношения энантиомеров в экспоненциально убывающем силовом поле?
6. Как поглощение света влияет на степень пространственного разделения энантиомеров наночастиц в экспоненциально убывающем силовом поле?

Глава 5

Векторное поле пучка Лагерра – Гаусса

5.1. Параксиальное приближение

Рассмотрим монохроматическое поле лазерного пучка с частотой ω , распространяющегося в вакууме в положительном направлении оси z . Будем описывать поле посредством векторного потенциала, который удобно представить в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{A}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\mathbf{e}$ — фазор векторного потенциала, $\psi(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда пучка и \mathbf{e} — не зависящий от пространственных координат единичный вектор поляризации, такой что $\|\mathbf{e}\|^2 \equiv (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) = 1$. Постоянство направления и фазы комплексного вектора \mathbf{e} позволяет подчинить векторный потенциал скалярному уравнению Гельмгольца [20]

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (5.2)$$

где $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ — оператор Лапласа, $k = \omega/c$ — волновое число, а c — скорость света в вакууме.

При анализе распространения несильно расходящихся пучков является оправданным использование параксиального приближения, в рамках которого комплексная амплитуда пучка представляется в виде произведения медленно меняющейся в пространстве комплексной огибающей пучка $u(\mathbf{r})$ и быстро осциллирующего фазового множителя e^{ikz} ,

$$\psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikz}. \quad (5.3)$$

Изменения комплексной огибающей и ее производной по координате z считаются малыми на расстояниях порядка длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Это приближение позволяет записать параксиальное уравнение Гельмгольца в виде [25]

$$\Delta_T u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5.4)$$

где $\Delta_T = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ — поперечный оператор Лапласа.

Таким образом, в данном подходе открывается возможность использования известных решений параксиального волнового уравнения, среди которых, в рамках поставленных нами задач, представляют интерес пучки Лагерра – Гаусса.

5.2. Решение параксиального уравнения Гельмгольца

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z) комплексная огибающая пучка Лагерра – Гаусса, являющаяся решением уравнения (5.4), имеет вид [26]

$$u(\mathbf{r}) = U(\rho, z)e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad (5.5)$$

где

$$U(\rho, z) = a_{lm} \frac{w_0}{w} \left(\frac{\rho}{w}\right)^{|l|} L_m^{|l|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) e^{-(\rho/w)^2}, \quad (5.6a)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k\rho^2}{2R} + l\varphi - (|l| + 2m + 1)\zeta, \quad (5.6b)$$

— модуль и фаза огибающей,

$$L_m^l(\xi) = \frac{\xi^{-l} e^\xi}{m!} \frac{d^m}{d\xi^m} (\xi^{l+m} e^{-\xi}) \quad (5.7)$$

— обобщенный полином Лагерра, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}$ — ширина пучка, $R(z) = z + z_0^2/z$ — радиус кривизны волнового фронта, $\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0)$ — запаздывание фазы (известное как эффект Гюи), $w_0 = \sqrt{\lambda z_0/\pi}$ — радиус перетяжки, z_0 — рэлеевская длина, a_{lm} — нормировочная постоянная, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — топологический заряд пучка и $m = 0, 1, 2, \dots$ — количество узловых точек в радиальном направлении. Профили интенсивности и фазы нескольких пучков Лагерра – Гаусса с разными индексами l и m представлены на рисунке 5. Пучок Лагерра – Гаусса порядка $l = m = 0$ есть просто гауссов пучок.

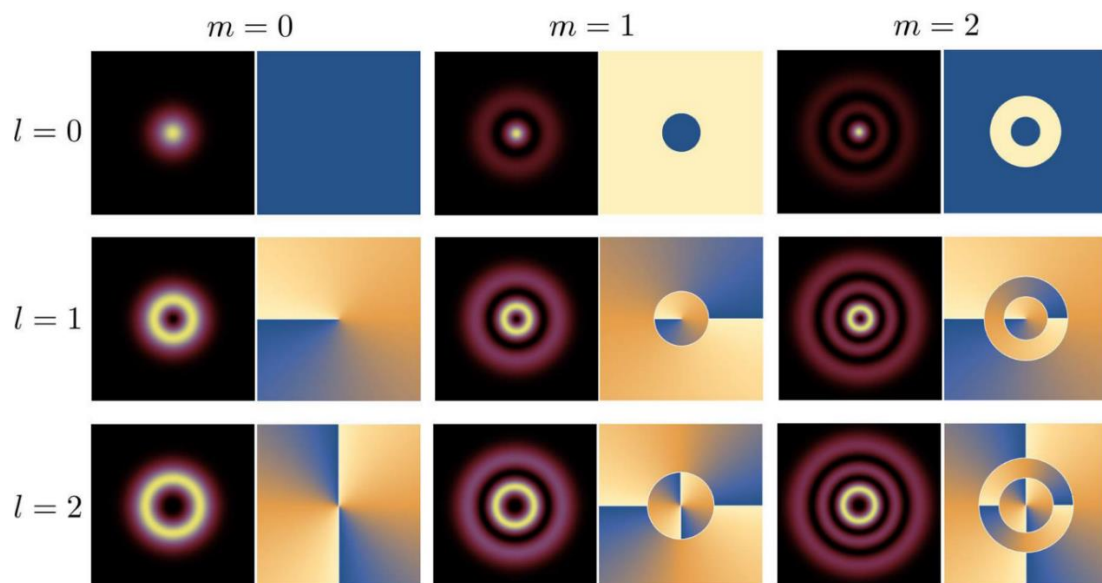


Рисунок 5. Поперечные профили интенсивности (слева) и фазы (справа) пучков Лагерра – Гаусса с индексами $l = 0, 1, 2$ и $m = 0, 1, 2$ в плоскости $z = 0$ [27].

На рисунке 6 показаны параметры пучка Лагерра – Гаусса и его волновой фронт при $l = 0$. В случае гауссова пучка, поперечный профиль интенсивности которого описывается гауссовой функцией, ширина пучка есть такое расстояние $\rho = w(z)$ от оси пучка, на котором интенсивность пучка спадает до $1/e^2$ от своего максимального значения. Расстояние вдоль оси $2z_0$, в пределах которого ширина пучка не превышает значения $\sqrt{2}w_0$, называется глубиной резкости. Величина $2\vartheta = 2w/z$ есть угол расходимости пучка.

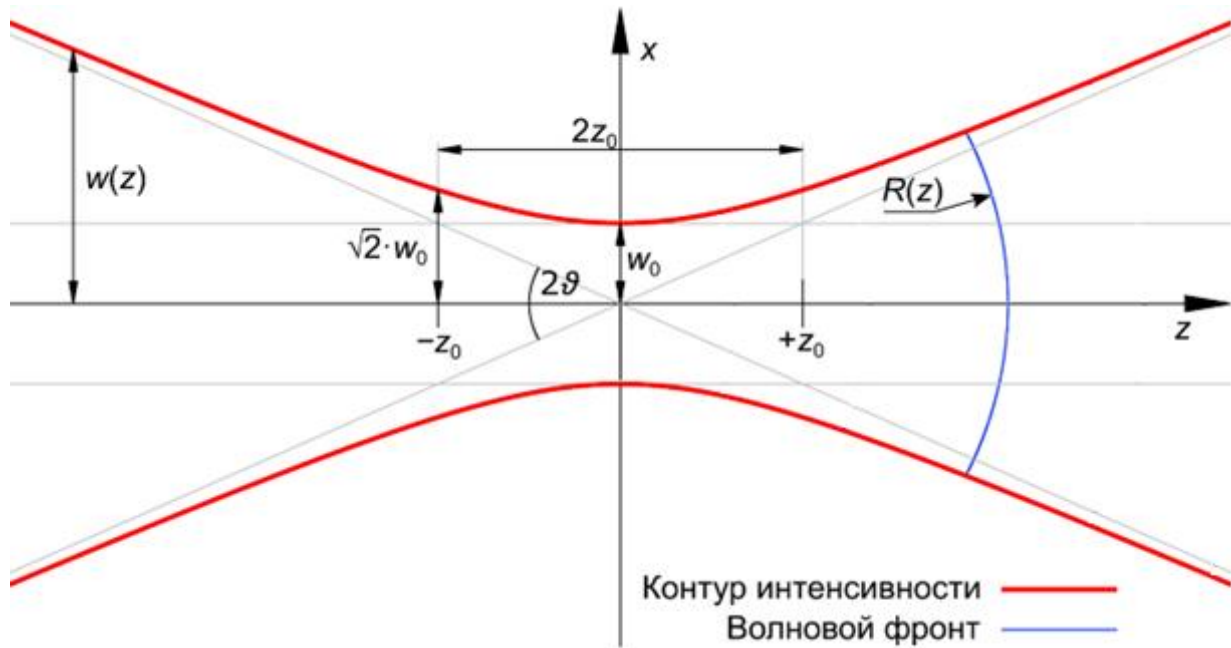


Рисунок 6. Параметры параксиального пучка: ширина пучка $w(z)$, радиус перетяжки w_0 , радиус кривизны волнового фронта $R(z)$, длина Рэлея z_0 , угол расходимости 2ϑ .

Структура комплексной огибающей (56) такова, что дифференцирование ее по координате z по порядку величины эквивалентно делению на рэлеевскую постоянную z_0 , а дифференцирование по поперечным координатам — делению на ширину пучка w . В рамках применимости параксиального приближения мы будем пренебрегать всеми слагаемыми порядка $(kz_0)^{-1}$ по сравнению с единицей. При этом следует иметь в виду соотношение $w^2 \sim z_0/k$, с использованием которого мы будем исключать из уравнений частные производные второго порядка от огибающей, а также произведения первых производных от огибающей по поперечным координатам.

5.3. Напряженности электрического и магнитного полей в параксиальном приближении

Аналогично векторному потенциалу напряженности электрического и магнитного полей представимы в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}. \quad (5.8b)$$

Выбрав в качестве калибровки условие Лоренца [28]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (5.9)$$

где $\Phi = \text{Re}(\Phi_0 e^{-i\omega t})$ — скалярный потенциал, и принимая во внимание монохроматичность пучка, можно выразить электрическое и магнитное поля через векторный потенциал следующим образом

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_0 + ik\mathbf{A}_0 = (i/k)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_0) + ik\mathbf{A}_0, \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = Z_0^{-1} \nabla \times \mathbf{A}_0, \quad (5.10b)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — импеданс пустого пространства, а ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

В дальнейшем нас будут интересовать не столько сами напряженности полей, сколько производные от них величины, содержащие скалярные и векторные произведения полей. Для удобства последующих вычислений разложим напряженности электрического и магнитного полей на слагаемые, попарные отношения которых по порядку величины равняются целым степеням величины kw . Для этого представим оператор набла в виде суммы поперечной и продольной составляющих:

$$\nabla = \nabla_T + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.11)$$

где $\nabla_T = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$ — поперечный оператор набла, а \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — орты осей декартовых координат.

Подстановка векторного потенциала в выражение (5.10) дает

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k} \left(\nabla_T + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\nabla_T \psi \cdot \mathbf{e} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + ik\psi \mathbf{e} \\
&= \frac{i}{k} \left\{ \nabla_T \left[\frac{(\mathbf{e} \cdot \nabla_T)u}{f^2 ku} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{iku}{fku} \right) \right] \right. \\
&\quad + \mathbf{e}_z \left[(\mathbf{e} \cdot \nabla_T) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{iku}{fku} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k^2 u}{ku} \right) \right] + \frac{k^2 u \mathbf{e}}{ku} \right\} e^{ikz}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь под слагаемыми указан порядок малости, причём $f = (kw)^{-1}$.

Несмотря на то, что отдельные слагаемые в данном выражении имеют разный порядок малости, ни одно из них при вычислении квадратичных по напряженностям электрического и магнитного полей характеристик пучка опущено быть не может. Так, например, производная $-2\partial_z u \mathbf{e}_z$, которая является малой по сравнению со слагаемым $-iku \mathbf{e}_z$, должна быть удержана в случае чисто продольного векторного потенциала $\mathbf{A}_0 = \psi \mathbf{e}_z$, для которого члены $-iku \mathbf{e}_z$ и $iku \mathbf{e}_z$ взаимно уничтожаются.

При вычислении величин линейных по напряженностям электрического и магнитного полей, данные напряженности с учетом параксиального приближения можно упростить. Для этого заметим, что дифференцирование векторного потенциала по любой координате η эквивалентно его умножению на логарифмическую производную $q_\eta = \partial_\eta \ln \psi$ от комплексной амплитуды пучка, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{A}_0 = \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi \mathbf{e}) = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mathbf{e} = q_\eta \mathbf{A}_0. \tag{5.13}$$

Используя это свойство, а также приближение

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik u \right) e^{ikz} \approx ik\psi, \tag{5.14}$$

введем вспомогательный вектор

$$\mathbf{Q} = \nabla \ln \psi \approx \frac{1}{u} \nabla_T u + ik \mathbf{e}_z, \tag{5.15}$$

который позволяет придать дивергенции и ротору векторного потенциала простой вид

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_0 \approx (\nabla_T + ik\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{A}_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0, \quad (5.16a)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_0 \approx (\nabla_T + ik\mathbf{e}_z) \times \mathbf{A}_0 = \mathbf{Q} \times \mathbf{A}_0. \quad (5.16b)$$

Используя данное обозначение и применяя параксиальное приближение, можем записать выражения для электрического и магнитного полей следующим образом:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_z) \frac{1}{u} \left(\nabla_T u + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0) \mathbf{e}_z + ik\mathbf{A}_0, \quad (5.17a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = Z_0^{-1} \mathbf{Q} \times \mathbf{A}_0. \quad (5.17b)$$

Применяя формулу Лагранжа для двойного векторного произведения, напряженность электрического поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \times (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{e}_z) - (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_z) \frac{1}{u} \left(\nabla u + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right). \quad (5.18)$$

Данное выражение показывает, что электрическое поле разделяется на две составляющие, одна из которых порождается поперечной компонентой векторного потенциала и имеет порядок ku , а вторая — порождается продольной компонентой и имеет порядок u/w . В связи с этим мы будем разделять пучки на два типа: пучки с чисто поперечным векторным потенциалом и L -пучки, векторный потенциал которых чисто продольный. Среди пучков с поперечным векторным потенциалом особый интерес представляют пучки линейной (T -пучки) и круговой (C -пучки) поляризации.

В дальнейшем мы будем пользоваться как декартовой системой координат, так и цилиндрической системой координат. Поскольку для пучков Лагерра – Гаусса $\partial_\phi u = ilu$, в этих координатах вектор \mathbf{Q} имеет вид

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) + ik\mathbf{e}_z = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{il}{\rho} \mathbf{e}_\phi + ik\mathbf{e}_z. \quad (5.19)$$

5.4. Мощность и орбитальный момент импульса пучка

Такие величины, как плотность хиральности (1.45), вектор Пойнтинга (1.32) и т.п., характеризуют электромагнитное поле произвольной конфигурации. Для светового пучка, имеющего выделенное направление распространения, могут быть введены дополнительные характеристики. В частности, если пучок

распространяется в направлении оси z , его интенсивность $I(\mathbf{r})$ равняется z -компоненте усредненного по времени вектора Пойнтинга, $I(\mathbf{r}) = (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_z)$.

Полная мощность пучка P , характеризующая энергию, переносимую им в единицу времени в направлении оси z , есть интеграл от интенсивности пучка по всей поперечной плоскости. С учетом осевой симметрии профиля интенсивности пучков Лагерра – Гаусса данная мощность равняется

$$P = 2\pi \int_0^{\infty} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_z) \rho d\rho. \quad (5.20)$$

Данное выражение позволяет нормировать амплитуды пучков Лагерра – Гаусса с разными l и m на полную мощность P .

Аналогично потоку энергии пучка можно ввести поток орбитального момента импульса в направлении оси распространения, L_z . Для этого нужно проинтегрировать z -компоненту плотности потока орбитального момента импульса электромагнитного поля $\mathbf{r} \times \langle \mathbf{S} \rangle / c^2$ по всей поперечной плоскости

$$L_z = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^{\infty} (\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi})_z \rho d\rho. \quad (5.21)$$

Как мы увидим ниже, вследствие особой фазовой структуры пучков Лагерра – Гаусса переносимый ими орбитальный момент импульса в общем случае оказывается отличен от нуля.

Вопросы

1. Что такое параксиальное приближение?
2. Какой вид имеет решение параксиального уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах?
3. Какой вид имеют выражения для напряженности электрического и магнитного полей в параксиальном приближении?
4. На какие составляющие разделяется электрическое поле пучка в параксиальном приближении?
5. Какой вид имеют выражения для мощности и орбитального момента импульса пучка в параксиальном приближении?

Глава 6

Электромагнитное поле пучков Лагерра – Гаусса разных поляризаций

6.1. Пучок с поперечной поляризацией векторного потенциала

Начнем с рассмотрения T -пучка. Положим, что векторный потенциал линейно поляризован в плоскости, поперечной направлению распространения пучка, и выберем это направление за ось x , так что $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x$. Тогда выражения для электрического и магнитного полей (60) в декартовых координатах запишутся в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left(ikue_x - \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) e^{ikz}, \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_0} \left(ikue_y - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) e^{ikz}. \quad (6.1b)$$

Данные поля являются почти полностью поперечными, имея малые продольные компоненты, обусловленные зависимостью комплексной огибающей волны от поперечных координат.

6.1.1. Плотность хиральности

Легко видеть, что точность $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, даваемая выражением (61), является недостаточной для вычисления плотности хиральности, определяемой выражением (1.45). Действительно, скалярное произведение напряженностей электрического и магнитного полей в виде (61) содержит только произведение первых производных от комплексной огибающей пучка, которое имеет порядок $|u|^2/w^2$. Слагаемое аналогичного порядка возникает, если в выражении (5.12) удерживать игрековую компоненту напряженности электрического поля, имеющую порядок $u/(kw^2)$. Поэтому для вычисления плотности хиральности следует воспользоваться выражениями для электрического и магнитного полей в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left(ikue_x - \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_z + \frac{i}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \mathbf{e}_y \right) e^{ikz}, \quad (62a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_0} \left(ikue_y - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) e^{ikz}. \quad (62b)$$

Используя данные выражения, из определения (1.45) получаем:

$$K = \frac{\varepsilon_0 k}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} + u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right). \quad (6.3)$$

В цилиндрических координатах производные первого порядка от огибающей пучка есть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{il}{\rho} u \sin \varphi, \quad (6.4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{il}{\rho} u \cos \varphi. \quad (6.4b)$$

Их произведение

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 - \frac{l^2}{\rho^2} |u|^2 \right) \sin 2\varphi - \frac{il}{\rho} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \sin^2 \varphi + u^* \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos^2 \varphi \right) \quad (6.5)$$

позволяет найти мнимую часть первого слагаемого в выражении (6.3) в виде

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = -\frac{l}{\rho} \operatorname{Re} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{2} \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}. \quad (6.6)$$

Для вычисления смешанной производной последовательно применим правило дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{il}{\rho} u \sin \varphi \right) \sin \varphi \\ &\quad + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{il}{\rho} u \sin \varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin 2\varphi - il \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \rho} \sin^2 \varphi \\ &\quad + \frac{\cos \varphi}{\rho} \left(il \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{l^2}{\rho} u \sin \varphi - \frac{il}{\rho} u \cos \varphi \right). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Производя упрощения, окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{l^2}{\rho^2} u \right) \sin 2\varphi + il \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \rho} \cos 2\varphi. \quad (6.8)$$

Далее можем записать

$$\operatorname{Im} \left(u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\sin 2\varphi}{2} \operatorname{Im} \left[u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] + l \operatorname{Re} \left(u^* \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \rho} \right) \cos 2\varphi. \quad (6.9)$$

Для преобразования первого слагаемого, учтем, что $u = |u|e^{i\varphi}$ и $\partial_\rho \varphi = k\rho/R$. В результате получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial |u|}{\partial \rho} + i \frac{k\rho}{R} |u| \right) e^{i\varphi} = \frac{u}{|u|} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} + i \frac{k\rho}{R} u, \quad (6.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \left(\frac{\partial^2 |u|}{\partial \rho^2} + 2i \frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} - \frac{k^2 \rho^2}{R^2} |u| + i \frac{k}{R} |u| \right) e^{i\varphi} \\ &= \frac{u}{|u|} \frac{\partial^2 |u|}{\partial \rho^2} + 2i \frac{k\rho}{R} \frac{u}{|u|} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} - \frac{k^2 \rho^2}{R^2} u + i \frac{k}{R} u. \end{aligned} \quad (6.10b)$$

Подстановка данных производных в выражение (6.9) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) &= \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(2 \frac{k\rho}{R} |u| \frac{\partial |u|}{\partial \rho} + \frac{k}{R} |u|^2 - \frac{1}{\rho} \frac{k\rho}{R} |u|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} l \rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + l \rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подставляя (6.6) и (6.11) в (6.3), получаем плотность хиральности T -пучка в виде

$$K = \frac{\varepsilon_0 k}{4} \left[\left(\frac{k\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{\rho} \right) \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} + l \rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right]. \quad (6.12)$$

Видно, что плотность хиральности T -пучка имеет компоненту, которая не зависит от топологического заряда l , и поэтому отлична от нуля даже для пучков с $l = 0$. Кроме того, плотность хиральности может быть разделена на две части: аксиально симметричную компоненту, пропорциональную $(1/\rho)\partial_\rho |u|^2$, и компоненту, зависящую от азимутального угла.

В плоскости $z = 0$ волновые фронты пучка выпрямляются, поэтому содержащее в знаменателе радиус кривизны слагаемое исчезает и плотность хиральности T -пучка принимает вид

$$\begin{aligned} K &= \frac{\varepsilon_0 k}{4} l \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 k}{4} l \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} + \rho \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^3} |u|^2 \right) \cos 2\varphi \right] \\ &= -\frac{\varepsilon_0 k}{2} \frac{l}{\rho} \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin^2 \varphi + \frac{1}{\rho} |u|^2 \cos 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Полезно проанализировать поведение плотности хиральности (6.12) вблизи сингулярности пучка. Для этого заметим, что квадрат модуля огибающей $|u|^2$ как функция радиальной координаты имеет на оси нуль порядка $2|l|$, что видно из выражения для модуля огибающей (5.6). Тогда функция $(1/\rho)\partial_\rho|u|^2$ будет иметь нуль порядка $2|l| - 2$ на оси. Иными словами, при любых значениях $|l|$, кроме единицы, функция $(1/\rho)\partial_\rho|u|^2$ при $\rho = 0$ будет обращаться в нуль, в то время как при $|l| = 1$, с учетом аксиальной симметрии, она будет иметь локальный экстремум на оси. Нетрудно также показать, что зависящие от угловой координаты слагаемые в выражении (6.12) обращаются в нуль на оси пучка при любых значениях $|l|$. Таким образом, плотность хиральности T -пучка при $|l| = 1$ оказывается отлична от нуля в нуле интенсивности пучка.

На рисунке 7 представлена плотность хиральности T -пучка с индексами $l = m = 1$ в единицах $P/(c\lambda z_0^2)$ (см. Приложение 2). Видно, что плотность хиральности имеет один минимум в центре пучка, а также два локальных максимума на оси y . При больших l центральный пик распадается на два, расположенных также на оси y симметрично оси пучка.

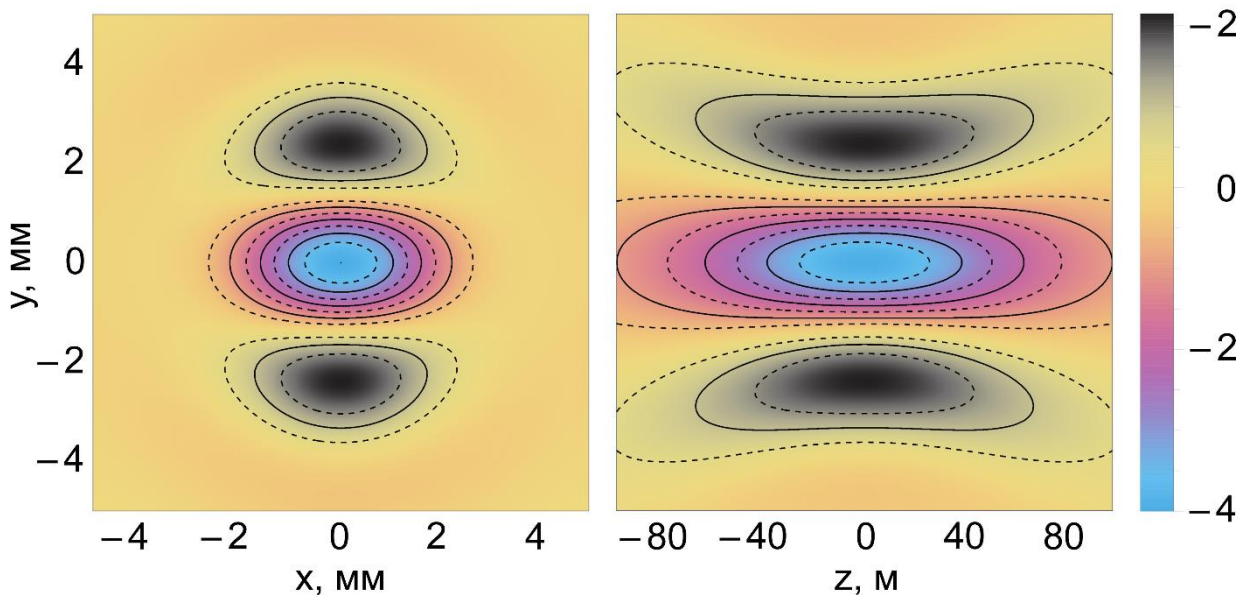


Рисунок 7. Нормированная плотность хиральности в плоскостях $z = 0$ (слева) и $x = 0$ (справа) для T -пучка с индексами $l = m = 1$, длиной волны $\lambda = 500$ нм и длиной Рэлея $z_0 = 100$ м.

6.1.2. Плотность потока хиральности

Аналогично плотности хиральности эллиптичности пучка (1.30), (1.37) следует вычислять, используя напряженности электрического и магнитного полей в виде (6.2).

Векторное произведение пары комплексно-сопряженных векторов является чисто мнимым и представимо в виде

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = 2i \operatorname{Im}(E_{0y}E_{0z}^* \mathbf{e}_x + E_{0z}E_{0x}^* \mathbf{e}_y + E_{0x}E_{0y}^* \mathbf{e}_z), \quad (6.14)$$

где E_{0x} , E_{0y} и E_{0z} — декартовы компоненты электрического поля. Используя данное представление, а также выражения (1.30), (1.37) и (6.2), получаем чисто действительную эллиптичность электрического поля в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(\mathbf{E})} &= -\operatorname{Im}(E_{0y}E_{0z}^* \mathbf{e}_x + E_{0z}E_{0x}^* \mathbf{e}_y + E_{0x}E_{0y}^* \mathbf{e}_z) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{i}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} \mathbf{e}_x - iku^* \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_y - u \frac{\partial^2 u^*}{\partial y \partial x} \mathbf{e}_z\right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Пренебрегая в полученном выражении x -компонентой эллиптичности, имеющей порядок $|u|^2/(kw^3)$, по сравнению с намного большей y -компонентой, получим

$$\begin{aligned} \Phi^{(\mathbf{E})} &= -k \operatorname{Re}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y - \operatorname{Im}\left(u \frac{\partial^2 u^*}{\partial y \partial x}\right) \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{k}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \mathbf{e}_y + \operatorname{Im}\left(u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Используя (6.11), находим электрическую эллиптичность в окончательном виде

$$\Phi^{(\mathbf{E})} = -\frac{k}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} \left(\frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + l\rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z. \quad (6.17)$$

Поскольку магнитное поле линейно поляризованного T -пучка имеет только две декартовы компоненты, выражение для его эллиптичности будет содержать только компоненту в направлении оси x ,

$$\Phi^{(\mathbf{H})} = -\operatorname{Im}(H_{0y}H_{0z}^*) \mathbf{e}_x = \frac{k}{Z_0^2} \operatorname{Re}\left(u \frac{\partial u^*}{\partial y}\right) \mathbf{e}_x = \frac{k}{2Z_0^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial y} \mathbf{e}_x. \quad (6.18)$$

Подстановка (6.17) и (6.18)(6.18) в формулу для плотности потока хиральности (1.48) дает

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\omega}{2} \left(\varepsilon_0 \left[-\frac{k}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} \left(\frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + l\rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z \right] \right. \\ &\quad \left. + \mu_0 \frac{k}{2Z_0^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial y} \mathbf{e}_x \right) \\ &= \frac{\omega \varepsilon_0}{4} k \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \mathbf{e}_y \right) \\ &\quad + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \left(\frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + l\rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Выразим первое слагаемое в этом выражении в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial |u|^2}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \mathbf{e}_y = \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} (\sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y) = -\frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (6.20)$$

Таким образом, находим плотность потока хиральности в виде

$$\Phi = \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \left[-k \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{k\rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + l\rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (6.21)$$

Полученный результат показывает, что поперечная компонента вектора плотности потока хиральности T -пучка является аксиально симметричной, в то время как продольная компонента, обусловленная ненулевой y -компонентой электрического поля, является функцией азимутального угла.

Заметим, что выполняется соотношение

$$K = \frac{1}{c} \left(\frac{l}{k\rho} \Phi \cdot \mathbf{e}_\varphi + \Phi \cdot \mathbf{e}_z \right), \quad (6.22)$$

которое с учетом (5.19) может быть записано в компактном виде

$$K = -\frac{i}{\omega} \mathbf{Q} \cdot \Phi. \quad (6.23)$$

6.1.3. Вектор Пойнтинга

Подставляя выражения для полей (6.1) в формулу (1.32), получим вектор Пойнтинга в виде

$$\mathbf{\Pi} = \frac{k|u|^2}{2Z_0} \text{Im} \left[\frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) + ik\mathbf{e}_z \right] = \frac{k|u|^2}{2Z_0} \text{Im} \mathbf{Q}. \quad (6.24)$$

Мнимая часть вектора \mathbf{Q} тесно связана с кривизной и формой поверхностей постоянной фазы. Поэтому вектор $\text{Im} \mathbf{Q}$ естественным образом входит в уравнение для вектора Пойнтинга, направленного в изотропной среде по нормали к фазовым поверхностям.

Поскольку разложение ρ -компоненты вектора \mathbf{Q} на действительную и мнимую части дается формулой (6.10)(66), а две другие компоненты данного вектора являются чисто мнимыми, то, используя выражение для \mathbf{Q} в цилиндрических координатах, можем записать

$$\mathbf{\Pi} = I \left(\frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\rho + \frac{l}{k\rho} \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \right), \quad (6.25)$$

где интенсивность пучка определяется выражением

$$I = \frac{k^2 |u|^2}{2Z_0}. \quad (6.26)$$

6.1.4. Нормировочная постоянная

С учетом (6.25) полная мощность T -пучка (5.20) принимает вид

$$P = \frac{\pi k^2}{Z_0} \int_0^\infty |u|^2 \rho d\rho. \quad (6.27)$$

Подставляя в данное выражение комплексную амплитуду (5.6)(56) и вводя новую переменную интегрирования $\xi = 2\rho^2/w^2$, получаем

$$P = \frac{\pi k^2}{2^{|l|+2} Z_0} w_0^2 a_{lm}^2 \int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi. \quad (6.28)$$

Входящий в данное выражение интеграл равен [29]

$$\int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi = (m+1)_{|l|}, \quad (6.29)$$

где $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ для натуральных n и $(x)_0 = 1$ — символ Похгаммера [30].

В результате для рассматриваемого пучка находим нормировочную константу в виде

$$a_{lm} = \frac{2}{kw_0} \sqrt{\frac{2^{|l|}}{\pi} \frac{Z_0 P}{(m+1)_{|l|}}}. \quad (6.30)$$

6.1.5. Орбитальный момент импульса

Поскольку ρ - и z -компоненты вектора Пойнтинга не дают вклад в продольную компоненту орбитального момента импульса, поток орбитального момента импульса T -пучка целиком обусловлен φ -компонентой вектора Пойнтинга. Поэтому формула (5.21) может быть записана в виде

$$L_z = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty (\rho \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{\Pi})_z \rho d\rho = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \rho^2 d\rho = \frac{2\pi l}{c\omega} \int_0^\infty I \rho d\rho = \frac{lP}{c\omega}. \quad (6.31)$$

Таким образом, орбитальный момент импульса, переносимый T -пучком пропорционален топологическому заряду l . Следует отметить, что выражения (6.25) и (6.31) совпадают с результатами, полученными в работе [21].

6.2. Пучок с круговой поляризацией векторного потенциала

Перейдем к рассмотрению пучков Лагерра – Гаусса, векторный потенциал которых имеет круговую поляризацию. Для краткости будем называть их C -пучками. Поляризация C -пучков описывается комплексным единичным вектором

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad (6.32)$$

где верхний знак «+» соответствует левой круговой поляризации, а нижний знак «-» — правой. При этом векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\mathbf{e}_{\pm}. \quad (6.33)$$

Чтобы вычислить напряженности электрического и магнитного полей, воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{e}_{\pm} = \pm i[-(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_{\pm} + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{\pm})\mathbf{e}_z], \quad (6.34)$$

которое имеет место для любого комплексного вектора \mathbf{Q} . В результате для C -пучка выражения (5.17)(60) принимают вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{e}_z + ik\mathbf{A}_0, \quad (6.35a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \pm iZ_0^{-1}[-(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{A}_0 + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{e}_z] = \pm \frac{1}{iZ_0}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}). \quad (6.35b)$$

В декартовых координатах, в частности, имеем:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left[ikue_{\pm} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \right] e^{ikz}. \quad (6.36)$$

6.2.1. Связь между энергетическими и хиральными характеристиками пучков с круговой поляризацией

Формулы (6.35)(67) позволяют выразить квадратичные по напряженностям величины только через фазор электрического поля. Можно показать, что эти характеристики в случае циркулярно поляризованного пучка не зависят от времени и даются выражениями

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \pm \frac{i}{2Z_0}\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*, \quad (6.37a)$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\|\mathbf{E}_0\|^2. \quad (6.37b)$$

Легко видеть, что вектор Пойнтинга, эллиптичности (1.30), (1.37) и поток хиральности (1.48) оказываются взаимно пропорциональны, причем имеют место соотношения

$$\Phi = (k/Z_0)\Phi^{(E)} = kZ_0\Phi^{(H)} = \pm k\Pi. \quad (6.38)$$

Также пропорциональны друг другу оказываются плотность энергии и плотность хиральности:

$$K = \pm kW = \pm \frac{\varepsilon_0 k}{2} \|\mathbf{E}_0\|^2. \quad (6.39)$$

Таким образом, для полного описания энергетических и хиральных свойств S -пучков достаточно вычислить квадрат модуля напряженности электрического поля $\|\mathbf{E}_0\|^2$ и вектор Пойнтинга $\Pi(\mathbf{r})$.

6.2.2. Плотность хиральности

Чтобы вычислить $\|\mathbf{E}_0\|^2$ с точностью до членов порядка $|u|^2/w^2$, воспользуемся выражением для напряженности электрического поля (5.12). Полагая в нем $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\pm$ и пренебрегая слагаемым порядка $u/(kwz_0)$, получаем

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left(ikue_\pm - (\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm)\mathbf{e}_z + \frac{i}{k}\nabla_T(\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm) \right) e^{ikz}. \quad (6.40)$$

В результате квадрат модуля напряженности электрического поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_0\|^2 &= \left\| kue_\pm + \frac{1}{k}\nabla_T(\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm) \right\|^2 + |\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm|^2 \\ &\approx k^2|u|^2 + 2 \operatorname{Re}[u^* \mathbf{e}_\pm^* \cdot \nabla_T(\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm)] + |\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm|^2, \end{aligned} \quad (6.41)$$

где мы пренебрегли слагаемым $\|\nabla_T(\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm)/k\|^2 \sim |u|^2/(k^2w^4)$, которое в k^2w^2 раз меньше, чем последний член в выражении (6.41)(6.41).

Преобразуем второе и третье слагаемые в декартовых координатах. Преобразование второго слагаемого дает

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re}[u^* \mathbf{e}_\pm^* \cdot \nabla_T(\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm)] \\ &= \operatorname{Re} \left[u^* (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[u^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \mp i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 |u|^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (u^* u)}{\partial x^2} = u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \operatorname{Re} \left(u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right], \quad (6.43)$$

то

$$\operatorname{Re} \left[u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 |u|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial y^2} \right) - \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2. \quad (6.44)$$

Третье слагаемое в выражении (6.41), в свою очередь, равно

$$|\nabla_T u \cdot \mathbf{e}_\pm|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \pm i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \pm 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right). \quad (6.45)$$

Подставляя (6.44) и (6.45) в (6.41)(6.41), получаем

$$\|\mathbf{E}_0\|^2 = k^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 |u|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial y^2} \right) \pm 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right). \quad (6.46)$$

С учетом (6.4) и (6.6), в цилиндрических координатах данное выражение преобразуется к виду

$$\|\mathbf{E}_0\|^2 = k^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}. \quad (6.47)$$

Таким образом, плотность хиральности (6.39) принимает вид

$$K = \pm \frac{\varepsilon_0 k}{2} \left(k^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right). \quad (6.48)$$

Рисунок 8 иллюстрирует плотность хиральности C -пучка с индексами $l = m = 1$ в единицах $kP/(c\lambda z_0)$ (см. Приложение 2). Первое слагаемое в выражении (6.48) характеризует плотность хиральности вдали от оси пучка, т.е. при $k\rho \gg 1$, и повторяет профиль интенсивности, имеющий кольцевую структуру. При этом плотность хиральности отлична от нуля даже при отсутствии топологического заряда. Второе и третье слагаемые, в свою очередь, становятся существенными только вблизи оси. Характерный радиус распределения плотности хиральности в случае C -пучка больше, чем в случае T -пучка, что видно из сопоставления рисунка 3 с рисунком 2, а также выражения (6.48)(6.48) с выражением (2.24).

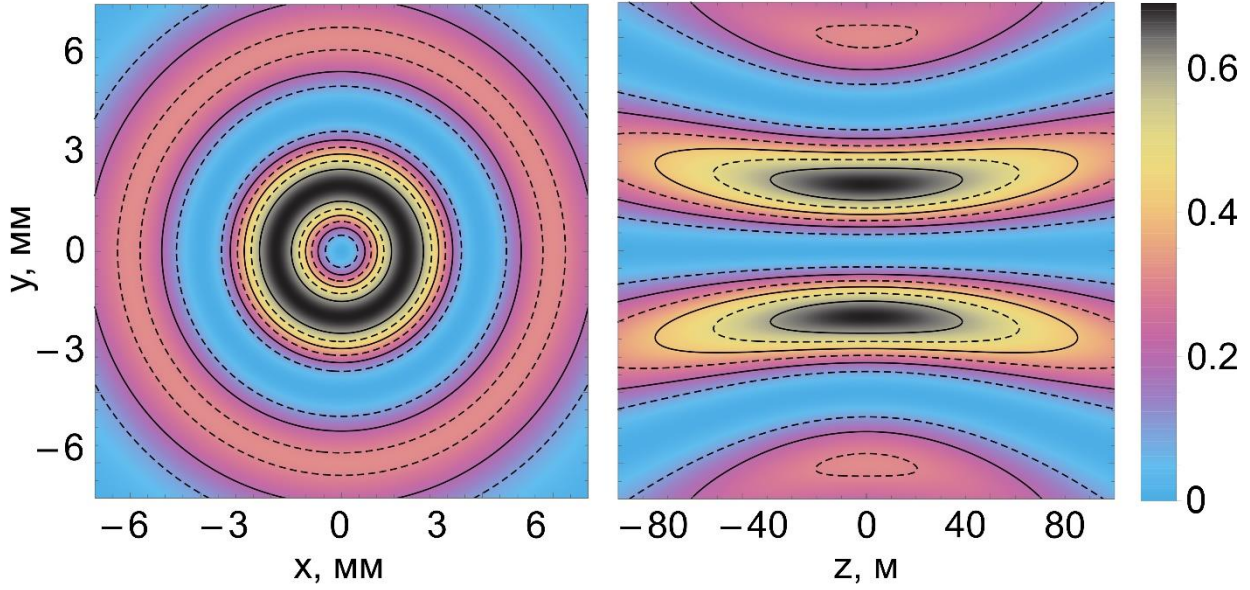


Рисунок 8. Нормированная плотность хиральности в плоскостях $z = 0$ (слева) и $x = 0$ (справа) для C -пучка с индексами $l = m = 1$, длиной волны $\lambda = 500$ нм и длиной Рэлея $z_0 = 100$ м.

Из выражения (6.48) также видно, что плотность хиральности C -пучка отлична от нуля на оси при $|l| = 1$. Действительно, поскольку первый член обобщенного полинома Лагерра равен $(m + 1)_{|l|}/|l|!$, первые ненулевые члены (при $l \neq 0$) разложения квадрата модуля огибающей (2.7)(56) и его производных в ряд Маклорена по степеням ρ/w имеют вид

$$|u|^2 = a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{w^2} \left(\frac{(m + 1)_{|l|}}{|l|!} \right)^2 \left(\frac{\rho}{w} \right)^{2|l|} + \dots, \quad (6.49a)$$

$$\frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} = 2|l| a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{w^3} \left(\frac{(m + 1)_{|l|}}{|l|!} \right)^2 \left(\frac{\rho}{w} \right)^{2|l|-1} + \dots, \quad (6.49б)$$

$$\frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} = 2|l|(2|l| - 1) a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{w^4} \left(\frac{(m + 1)_{|l|}}{|l|!} \right)^2 \left(\frac{\rho}{w} \right)^{2|l|-2} + \dots. \quad (6.49в)$$

Подставляя (6.49) в выражение (6.48),

$$K = \pm \frac{\varepsilon_0 k}{2} |l| a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{w^4} \left(\frac{(m + 1)_{|l|}}{|l|!} \right)^2 (2|l| - 1 \mp 2l) \left(\frac{\rho}{w} \right)^{2|l|-2} + \dots, \quad (6.50)$$

и полагая $|l| = 1$, находим

$$K_{|l|=1}(\rho = 0) = \varepsilon_0 a_{lm}^2 \frac{z_0}{w^4} (m + 1)^2 (\pm 1 - 2l), \quad (6.51)$$

где мы учли, что $kw_0^2/2 = z_0$.

6.2.3. Вектор Пойнтинга

Подставляя напряженность электрического поля (6.35) в выражение для вектора Пойнтинга (1.32), получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= \pm \frac{i}{2Z_0} [ik\mathbf{A}_0 - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{e}_z] \times [-ik\mathbf{A}_0^* - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)^*\mathbf{e}_z] \\ &= \pm \frac{k}{2Z_0} [ik\mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_0^* + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)^*\mathbf{A}_0 \times \mathbf{e}_z + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{A}_0^* \times \mathbf{e}_z] \quad (6.52) \\ &= \pm \frac{1}{2Z_0} \text{Re}[ik\mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_0^* + 2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{A}_0^* \times \mathbf{e}_z].\end{aligned}$$

Подставляя в данное выражение векторный потенциал в виде $\mathbf{A}_0 = ue^{ikz}\mathbf{e}_\pm$ и вычисляя векторные произведения с помощью (6.34), находим

$$\mathbf{\Pi} = I \left(\mathbf{e}_z + \frac{2}{k} \text{Im}[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\pm)\mathbf{e}_\pm^*] \right), \quad (6.53)$$

где, как и ранее, интенсивность определяется выражением (6.26)(6.26).

Поскольку z-компонента вектора (6.53) совпадает с z-компонентой вектора (6.25), нормировочная постоянная для циркулярно поляризованного пучка определяется найденным ранее выражением (6.30).

Преобразование выражения (6.53)(6.53) дает:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= I \left\{ \mathbf{e}_z + \frac{1}{k} \text{Im}[(Q_x \pm iQ_y)(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)] \right\} \\ &= (I/k) \{ k\mathbf{e}_z + \text{Im}[Q_x\mathbf{e}_x + Q_y\mathbf{e}_y \pm i(Q_y\mathbf{e}_x - Q_x\mathbf{e}_y)] \} \quad (6.54) \\ &= (I/k) [\text{Im} \mathbf{Q} \pm \text{Re}(Q_y\mathbf{e}_x - Q_x\mathbf{e}_y)] \\ &= (I/k) (\text{Im} \mathbf{Q} \pm \text{Re} \mathbf{Q} \times \mathbf{e}_z).\end{aligned}$$

Используя выражение (5.19) для вектора \mathbf{Q} в цилиндрических координатах, получаем:

$$\text{Im} \mathbf{Q} \pm \text{Re} \mathbf{Q} \times \mathbf{e}_z = \text{Im} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\rho + \frac{l}{\rho} \mathbf{e}_\varphi + k\mathbf{e}_z \pm \text{Re} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) (-\mathbf{e}_\varphi). \quad (6.55)$$

С учетом данного результата и разложения (6.10), окончательно находим

$$\mathbf{\Pi} = I \left[\frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{k} \left(\frac{l}{\rho} \mp \frac{1}{|u|} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \right]. \quad (6.56)$$

6.2.4. Орбитальный момент импульса

Вектор Пойнтинга (6.56)(6.56) содержит ненулевую φ -компоненту, следовательно, C-пучки могут переносить орбитальный момент. Согласно формуле (5.21), имеем

$$L_z = \frac{\pi k^2}{c\omega Z_0} \int_0^\infty |u|^2 \left(\frac{l}{\rho} \mp \frac{1}{|u|} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} \right) \rho^2 d\rho. \quad (6.57)$$

Вычисление второго интеграла по частям дает

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \rho^2 d\rho = \frac{1}{2} |u|^2 \rho^2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty |u|^2 \rho d\rho. \quad (6.58)$$

Произведение $|u|^2 \rho^2$ обращается в нуль на обоих пределах, а второй интеграл с точностью до множителя дает мощность пучка P [см. (6.27)]. В результате получаем

$$L_z = (l \pm 1) \frac{\pi k^2}{c\omega Z_0} \int_0^\infty |u|^2 \rho d\rho = (l \pm 1) \frac{P}{c\omega}. \quad (6.59)$$

Примечательно, что орбитальный момент пучков с $|l| = 1$ может быть равен нулю. Подобный результат получен в работе [22].

6.3. Пучок с продольной поляризацией векторного потенциала

Наконец, перейдем, к рассмотрению L -пучков. Подставляя $\mathbf{A}_0 = u e^{ikz} \mathbf{e}_z$ в выражения (5.17), находим

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = - \left(\nabla_T u + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) e^{ikz}, \quad (6.60a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = Z_0^{-1} e^{ikz} \nabla_T u \times \mathbf{e}_z. \quad (6.60b)$$

В цилиндрических координатах данные поля принимают вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{il}{\rho} u \mathbf{e}_\varphi + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) e^{ikz}, \quad (6.61a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_0} \left(\frac{il}{\rho} u \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi \right) e^{ikz}. \quad (6.61b)$$

6.3.1. Плотность хиральности

Напряженности полей (6.60) дают плотность хиральности L -пучка в виде

$$K = - \frac{\varepsilon_0 k}{2} \text{Im}(\nabla_T u \cdot [\nabla_T u^* \times \mathbf{e}_z]) = i \frac{\varepsilon_0 k}{2} (\mathbf{e}_z \cdot [\nabla_T u \times \nabla_T u^*]). \quad (6.62)$$

Поскольку

$$\nabla_T u \times \nabla_T u^* = - \frac{il}{\rho} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \rho} + u \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_z = - \frac{il}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad (6.63)$$

то плотность хиральности имеет вид

$$K = \frac{\varepsilon_0 k l}{2 \rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}. \quad (6.64)$$

Плотность хиральности L -пучка с индексами $l = m = 1$ в единицах $kP/(c\lambda z_0)$ (см. Приложение 2) изображена на рисунке 9. Как и в случае T -пучка, экстремум функции при $|l| = 1$ расположен на оси пучка, однако теперь его знак совпадает со знаком l . При увеличении l центральный пик исчезает, и поперечное распределение плотности хиральности приобретает полностью кольцевую структуру.

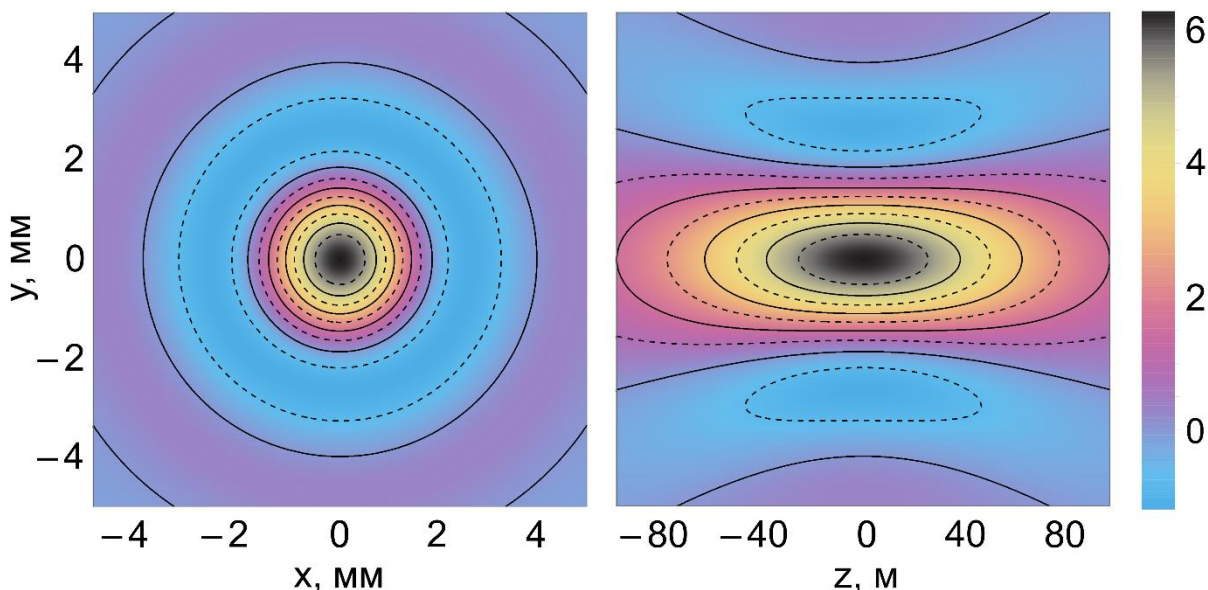


Рисунок 9. Нормированная плотность хиральности в плоскостях $z = 0$ (слева) и $x = 0$ (справа) для L -пучка с индексами $l = m = 1$, длиной волны $\lambda = 500$ нм и длиной Рэлея $z_0 = 100$ м.

6.3.2. Плотность потока хиральности

Эллиптичность (1.30) электрического поля L -пучка с учетом (6.60)(70) равна

$$\begin{aligned} \Phi^{(E)} &= \frac{i}{2} \left(\nabla_T u \times \nabla_T u^* + 2 \frac{\partial u^*}{\partial z} \nabla_T u \times \mathbf{e}_z + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \times \nabla_T u^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \mathbf{e}_z + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \nabla_T u^* \right) \times \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Для преобразования мнимой части в выражении для $\Phi^{(E)}$, воспользуемся выражением для поперечной части оператора набла в цилиндрических координатах,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\nabla_T u^*\right)\times\mathbf{e}_z &= -\frac{l}{\rho}\operatorname{Re}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho - \operatorname{Im}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi \\ &= -\frac{1}{2}\frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial z}\mathbf{e}_\rho - \operatorname{Im}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (6.66)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{|u|}\frac{\partial|u|}{\partial z} + iu\frac{\partial\phi}{\partial z},\quad (6.67)$$

и учитывая $\partial_\rho\phi = k\rho/R$, находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial\rho}\right) &= \operatorname{Im}\left[\left(\frac{u}{|u|}\frac{\partial|u|}{\partial z} + iu\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left(\frac{u^*}{|u|}\frac{\partial|u|}{\partial\rho} - iu^*\frac{k\rho}{R}\right)\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[\left(\frac{\partial|u|}{\partial z} + i|u|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial|u|}{\partial\rho} - i|u|\frac{k\rho}{R}\right)\right] \\ &= -|u|\frac{\partial|u|}{\partial z}\frac{k\rho}{R} + |u|\frac{\partial|u|}{\partial\rho}\frac{\partial\phi}{\partial z}.\end{aligned}\quad (6.68)$$

Подставляя (6.66) и (6.68) в (6.65), получаем эллиптичность электрического поля в виде

$$\Phi^{(\mathbf{E})} = -\frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial z}\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{k\rho}{R}\frac{\partial|u|^2}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\mathbf{e}_z.\quad (6.69)$$

Поскольку магнитное поле L -пучка, в отличие от электрического, не имеет продольной компоненты, то его эллиптичность является чисто продольной:

$$\begin{aligned}\Phi^{(\mathbf{H})} &= \frac{i}{2Z_0^2}[(\nabla_T u \times \mathbf{e}_z) \times (\nabla_T u^* \times \mathbf{e}_z)] = \frac{i}{2Z_0^2}\nabla_T u \times \nabla_T u^* \\ &= \frac{1}{2Z_0^2}\frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (6.70)$$

Подставляя найденные эллиптичности в выражение (1.48) для плотности потока хиральности, получаем

$$\Phi = \frac{\omega\varepsilon_0}{2}\left[-\frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial z}\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{k\rho}{R}\frac{\partial|u|^2}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{l}{\rho}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\mathbf{e}_z\right].\quad (6.71)$$

Данное выражение показывает, что продольная компонента плотности потока хиральности пропорциональна плотности хиральности (6.64),

$$K = \frac{1}{c}(\Phi \cdot \mathbf{e}_z),\quad (6.72)$$

и по порядку величины превосходит поперечную компоненту в kw раз.

6.3.3. Вектор Пойнтинга

Подстановка полей (6.60) в выражение для вектора Пойнтинга (1.32) и раскрытие двойного векторного произведения по формуле Лагранжа дают

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= -\frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} \left[\left(\nabla_T u + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times \left(\nabla_T u^* \times \mathbf{e}_z \right) \right] \\ &= \frac{1}{2Z_0} \left[-2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \nabla_T u^* \right) + \|\nabla_T u\|^2 \mathbf{e}_z \right].\end{aligned}\quad (6.73)$$

Как и мнимую часть в (6.65), будем искать вещественную часть в этом выражении в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \nabla_T u^* \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\rho + \frac{l}{\rho} \operatorname{Im} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (6.74)$$

Тогда, с учетом (6.67), имеем

$$\operatorname{Im} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2, \quad (6.75)$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) &= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial |u|}{\partial z} + i |u| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial |u|}{\partial \rho} - i |u| \frac{k\rho}{R} \right) \right] \\ &= \frac{\partial |u|}{\partial z} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} + \frac{k\rho}{R} \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2.\end{aligned}\quad (6.76)$$

Наконец, подставляя (6.74), (6.75) и (6.76) в (6.73), можно записать вектор Пойнтинга в виде

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{Z_0} \left[- \left(\frac{\partial |u|}{\partial z} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} + \frac{k\rho}{R} \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2 \right) \mathbf{e}_\rho - \frac{l}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2 \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2} \|\nabla_T u\|^2 \mathbf{e}_z \right], \quad (6.77)$$

где

$$\|\nabla_T u\|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 + \frac{l^2}{\rho^2} |u|^2. \quad (6.78)$$

В дальнейшем, при вычислении орбитального момента импульса, нам потребуется выражение для производной по z от фазы, входящей в выражение (6.77). Согласно (5.6), данная производная равняется

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{k\rho^2}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} - (|l| + 2m + 1) \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (6.79)$$

Поскольку

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (z + z_0^2/z) = 1 - \frac{z_0^2}{z^2}, \quad (6.80a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \tan^{-1} \frac{z}{z_0} = \frac{1/z_0}{1 + z^2/z_0^2} = \frac{z_0}{z} \frac{1}{z_0^2/z + z} = \frac{z_0}{z} \frac{1}{R}, \quad (6.80b)$$

то

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{R} \left[\frac{k\rho^2}{2} \frac{1}{R} \left(\frac{z_0^2}{z^2} - 1 \right) - (|l| + 2m + 1) \frac{z_0}{z} \right]. \quad (6.81)$$

Учитывая, что $R = (z_0 w/w_0)^2/z$ и $w_0^2 = 2z_0/k$, перепишем данное выражение в более удобном виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{R} \left[\frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{z_0}{z} - \frac{z}{z_0} \right) - (|l| + 2m + 1) \frac{z_0}{z} \right]. \quad (6.82)$$

6.3.4. Нормировочная постоянная

Согласно (6.77), z -компонента вектора Пойнтинга L -пучка равняется

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z) = \frac{1}{2Z_0} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 + \frac{l^2}{\rho^2} |u|^2 \right) = \frac{1}{2Z_0} \left[\left(\frac{\partial \ln|u|}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{k^2 \rho^2}{R^2} + \frac{l^2}{\rho^2} \right] |u|^2. \quad (6.83)$$

Вычисление логарифмической производной от модуля огибающей (5.6) дает

$$\frac{\partial \ln|u|}{\partial \rho} = \frac{|l|}{\rho} + \frac{4\rho}{w^2} \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} - \frac{2\rho}{w^2}, \quad (6.84)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $\xi = 2\rho^2/w^2$. Подставляя (6.84)(6.84) в (6.83), находим

$$\begin{aligned} 2Z_0 \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z)}{|u|^2} &= \frac{l^2}{\rho^2} + \frac{4\rho^2}{w^4} + \frac{16\rho^2}{w^4} \left(\frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} \right)^2 - \frac{4|l|}{w^2} + \frac{8|l|}{w^2} \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} \\ &\quad - \frac{16\rho^2}{w^4} \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} + \frac{k^2 \rho^2}{R^2} + \frac{l^2}{\rho^2} \\ &= -\frac{4|l|}{w^2} + \frac{2l^2}{\rho^2} + \left(\frac{4}{w^4} + \frac{k^2}{R^2} \right) \rho^2 + \frac{16\rho^2}{w^4} \left(\frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} \right)^2 \\ &\quad + \frac{8|l|}{w^2} \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} - \frac{16\rho^2}{w^4} \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Принимая во внимание, что $R = (z_0 w / w_0)^2 / z$ и $w_0^2 = 2z_0 / k$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{w^4} + \frac{k^2}{R^2} \right) \rho^2 &= \left(\frac{2}{w^2} + \frac{k^2 w^2}{2R^2} \right) \xi = \frac{1}{w^2} \left(2 + \frac{z^2 k^2 w_0^4}{2z_0^4} \right) \xi = \frac{2}{w^2} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \xi \\ &= \frac{2}{w_0^2} \xi. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Удобно ввести новую функцию

$$F(\xi) = 2Z_0 w^2 |u|^{-2} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_z) = F_1(\xi) + F_2(\xi) + F_3(\xi), \quad (6.87)$$

где

$$F_1(\xi) = 2 \frac{w^2}{w_0^2} \xi, \quad (6.88a)$$

$$F_2(\xi) = -8\xi \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} + 8\xi \left(\frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} \right)^2, \quad (6.88b)$$

$$F_3(\xi) = 8l \frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} + \frac{4l^2}{\xi} - 4|l|. \quad (6.88b)$$

С использованием данной функции условие нормировки (5.20) принимает вид

$$P = \frac{\pi}{Z_0 w^2} \int_0^\infty F(\xi) |u|^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{Z_0} \frac{a_{lm}^2}{2^{|l|+2}} \frac{w_0^2}{w^2} \int_0^\infty F(\xi) [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi. \quad (6.89)$$

Поскольку

$$\int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi = (m+1)_{|l|} (|l| + 2m + 1), \quad (6.90)$$

то

$$\int_0^\infty F_1(\xi) [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi = 2 \frac{w^2}{w_0^2} (m+1)_{|l|} (|l| + 2m + 1). \quad (6.91)$$

Можно также показать (см. Приложение 1), что

$$\int_0^\infty F_2(\xi) [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi = \int_0^\infty F_3(\xi) [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi = 0. \quad (6.92)$$

Таким образом мощность пучка принимает вид

$$P = \frac{\pi}{Z_0} \frac{a_{lm}^2}{2^{|l|+1}} (m+1)_{|l|} (|l| + 2m + 1), \quad (6.93)$$

откуда находим нормировочную постоянную

$$a_{lm} = \sqrt{\frac{2^{|l|+1}}{\pi(|l| + 2m + 1)} \frac{Z_0 P}{(m + 1)^{|l|}}}. \quad (6.94)$$

6.3.5. Орбитальный момент импульса

Подстановка φ -компоненты вектора Пойнтинга (6.77) в выражение для потока орбитального момента (5.21) дает

$$L_z = -\frac{2\pi l}{c^2 Z_0} \int_0^\infty \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2 \rho d\rho. \quad (6.95)$$

С учетом (6.82) получаем

$$\begin{aligned} L_z &= -\frac{2\pi l}{c^2 Z_0} \frac{1}{R} \int_0^\infty \left[\frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{z_0}{z} - \frac{z}{z_0} \right) - (|l| + 2m + 1) \frac{z_0}{z} \right] |u|^2 \rho d\rho \\ &= -\frac{2\pi l}{c^2 Z_0} \frac{1}{R} \left[\frac{1}{w^2} \left(\frac{z_0}{z} - \frac{z}{z_0} \right) \int_0^\infty |u|^2 \rho^3 d\rho \right. \\ &\quad \left. - (|l| + 2m + 1) \frac{z_0}{z} \int_0^\infty |u|^2 \rho d\rho \right]. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Вычисляя интегралы по отдельности и используя (6.94)(6.94), находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u|^2 \rho^3 d\rho &= a_{lm}^2 \frac{w^2 w_0^2}{2^{|l|+3}} \int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi \\ &= a_{lm}^2 \frac{w^2 w_0^2}{2^{|l|+3}} (m + 1)^{|l|} (|l| + 2m + 1) = \frac{w^2 w_0^2}{4\pi} Z_0 P, \end{aligned} \quad (6.97a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u|^2 \rho d\rho &= a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{2^{|l|+2}} \int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi = a_{lm}^2 \frac{w_0^2}{2^{|l|+2}} (m + 1)^{|l|} \\ &= \frac{w_0^2}{2\pi(|l| + 2m + 1)} Z_0 P. \end{aligned} \quad (6.97b)$$

Наконец, подставляя (6.97)(76) в (6.96) и производя упрощения, приходим к окончательному выражению для потока орбитального момента импульса

$$L_z = -\frac{l}{2c^2} \frac{w_0^2}{R} \left[\left(\frac{z_0}{z} - \frac{z}{z_0} \right) - 2 \frac{z_0}{z} \right] P = \frac{lP}{c\omega}. \quad (6.98)$$

Как и в предыдущих случаях, орбитальный момент пропорционален топологическому заряду l и полной мощности пучка P .

6.4. Сравнение плотностей хиральности T-, C- и L-пучков

В предыдущих разделах этой главы были получены выражения для хиральных и нехиральных характеристик пучков Лагерра – Гаусса с поперечной, круговой и продольной поляризациями векторного потенциала. Для того чтобы сравнить между собой хиральность этих пучков, будем использовать величину их плотности хиральности с учетом нормировки на их полную мощность.

6.4.1. Сравнение T- и L-пучков

Следует ожидать, что наибольшие значения плотности хиральности для каждого из пучков в силу расходимости будут наблюдаться вблизи фокуса пучка, поэтому целесообразно сравнивать плотности хиральности пучков при $|z| \ll z_0$. В таком случае плотности хиральности T- и L-пучков будут определяться выражениями (6.13) и (6.64). Несмотря на то, что данные выражения имеют одинаковый порядок малости по амплитуде пучков $|u|$, хиральности пучков существенно разнятся из-за разного пространственного распределения интенсивности пучков. В самом деле, с учетом нормировочных констант (6.30) и (6.94) находим отношение плотностей хиральности двух пучков в виде

$$\frac{K_{\text{TPB}}}{K_{\text{LPB}}} = - \frac{|l| + 2m + 1}{kz_0} \left(\sin^2 \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2\rho} \frac{\partial \ln|u|}{\partial \rho} \right), \quad (6.99)$$

где K_{TPB} и K_{LPB} — плотности хиральности T- и L-пучков, а $\partial_\rho \ln|u|$ дается выражением (6.84).

Можно видеть, что выражение в скобках в (6.99) имеет порядок единицы, так что порядок отношения плотностей хиральности T- и L-пучков определяется знаменателем kz_0 . Величина kz_0 , как нетрудно показать, связана с расходимостью пучка посредством соотношения $kz_0 = 2/\vartheta^2$, где ϑ — половина угла при вершине конуса, который асимптотически очерчивает контур интенсивности параксиального пучка при $z \gg z_0$. Таким образом, увеличение плотности хиральности L-пучка по отношению к плотности хиральности T-пучка может быть достигнуто уменьшением угла расходимости пучка. В частности, при $z_0 = 100$ м и $\lambda = 500$ нм отношение плотностей хиральности двух пучков составит величину порядка 10^9 .

6.4.2. Сравнение C- и L-пучков

Вдали от фазовой сингулярности ($\rho \gg \lambda$) отношение плотности хиральности K_{LPB} (6.64) L-пучка к плотности хиральности K_{CPB} (6.48) C-пучка равняется

$$\frac{K_{\text{LPB}}}{K_{\text{CPB}}} = \pm \frac{l}{|l| + 2m + 1} \frac{w_0^2}{\rho} \frac{\partial \ln|u|}{\partial \rho}. \quad (6.100)$$

Видно, что поскольку $\ln|u|$ имеет порядок единицы, L -пучок обладает плотностью хиральности, которая сравнима по величине с плотностью хиральности циркулярно поляризованного пучка. При этом наибольшие значения $K_{LРВ}$ по сравнению с $K_{СРВ}$ достигаются в плоскости $z = 0$, где характерный поперечный размер пучка w принимает минимальное значение, $w(0) = w_0$.

Вопросы

1. Какой вид имеет выражение для плотности хиральности и плотности потока хиральности в поле пучка с поперечной поляризацией векторного потенциала?
2. При какой поляризации векторного потенциала электромагнитное поле пучков Лагерра – Гаусса обладает плотностью хиральности и потоком хиральности?
3. В каком случае плотность хиральности в пучках Лагерра – Гаусса с топологическим зарядом $l = \pm 1$ имеет ненулевое значение?
4. Какой вид имеет выражение для плотности хиральности и плотности потока хиральности в поле пучка с продольной поляризацией векторного потенциала?
5. Какую доминирующую компоненту имеет плотность потока хиральности (Φ) в пучках Лагерра – Гаусса с поперечной поляризацией векторного потенциала?
6. Какую доминирующую компоненту имеет плотность потока хиральности (Φ) в пучках Лагерра – Гаусса с круговой и продольной поляризациями векторного потенциала?
7. Какого экстремального соотношения между собой могут достигать плотности хиральности пучков Лагерра – Гаусса с продольной и поперечной поляризацией векторного потенциала?
8. Как соотносятся плотности хиральности T - и L -пучков, а также S - и L -пучков?

Глава 7

Хиральный диполь в поле пучков Лагерра – Гаусса

7.1. Пучок с поперечной поляризацией векторного потенциала

7.1.1. Хиральная консервативная сила

Согласно (1.46), консервативная часть хиральной силы, действующей на хиральный диполь со стороны электромагнитного поля светового пучка, определяется градиентом плотности хиральности этого пучка. Данная часть силы в случае несильно расходящихся пучков будет преимущественно поперечной, поскольку производная огибающей пучка по координате z намного меньше производной по поперечным координатам. С учетом этого консервативная часть хиральной силы представима в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{c\chi'}{k} \left(\nabla_T K + \frac{\partial K}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \approx \frac{c\chi'}{k} \nabla_T K. \quad (7.1)$$

Начнем с рассмотрения сил, действующих на хиральный диполь со стороны T -пучка. Данные силы удобно выражать через интенсивность пучка, определяемую выражением (6.26). Выраженная через интенсивность, плотность хиральности T -пучка (6.12) имеет вид

$$K = \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{k\rho} \right) \frac{\partial I}{\partial \rho} + \frac{l\rho}{k} \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right]. \quad (7.2)$$

Ввиду того что плотность хиральности зависит от азимутального угла, консервативная сила для T -пучка должна иметь как радиальную, так и угловую составляющие, т.е. может быть записана в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{c\chi'}{k} \left(\frac{\partial K}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right). \quad (7.3)$$

Дифференцируя плотность хиральности (7.2) по радиальной координате, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \rho} &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{k\rho} \right) \frac{\partial I}{\partial \rho} + \frac{l\rho}{k} \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{k\rho} \right) \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi + \frac{l}{k\rho} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \right) \cos 2\varphi \right].\end{aligned}\quad (7.4)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} - 2 \frac{I}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} - 3 \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial I}{\partial \rho} + 4 \frac{I}{\rho^3}.\quad (7.5)$$

Подставляя (7.5) в (7.4) и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \rho} &= \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{k\rho} \right) \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi + \frac{l}{k\rho} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{k} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} - 3 \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial I}{\partial \rho} + 4 \frac{I}{\rho^3} \right) \cos 2\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{k\rho} \sin^2 \varphi \right) \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho}{R} \sin 2\varphi + \frac{l}{k\rho} (1 - 3 \cos 2\varphi) \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} + 4 \frac{l}{k} \frac{I}{\rho^3} \cos 2\varphi \right].\end{aligned}\quad (7.6)$$

Затем легко находим φ -компоненту градиента плотности хиральности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial K}{\partial \varphi} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial \rho} \cos 2\varphi - \frac{l}{k} \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \sin 2\varphi \right).\quad (7.7)$$

Таким образом, хиральная консервативная сила для T -пучка имеет вид (7.3), где $\partial_\rho K$ и $\partial_\varphi K/\rho$ даются выражениями (7.6) и (7.7). Величина и направление хиральной консервативной силы для случая $l = m = 1$ показаны на рисунке 10.

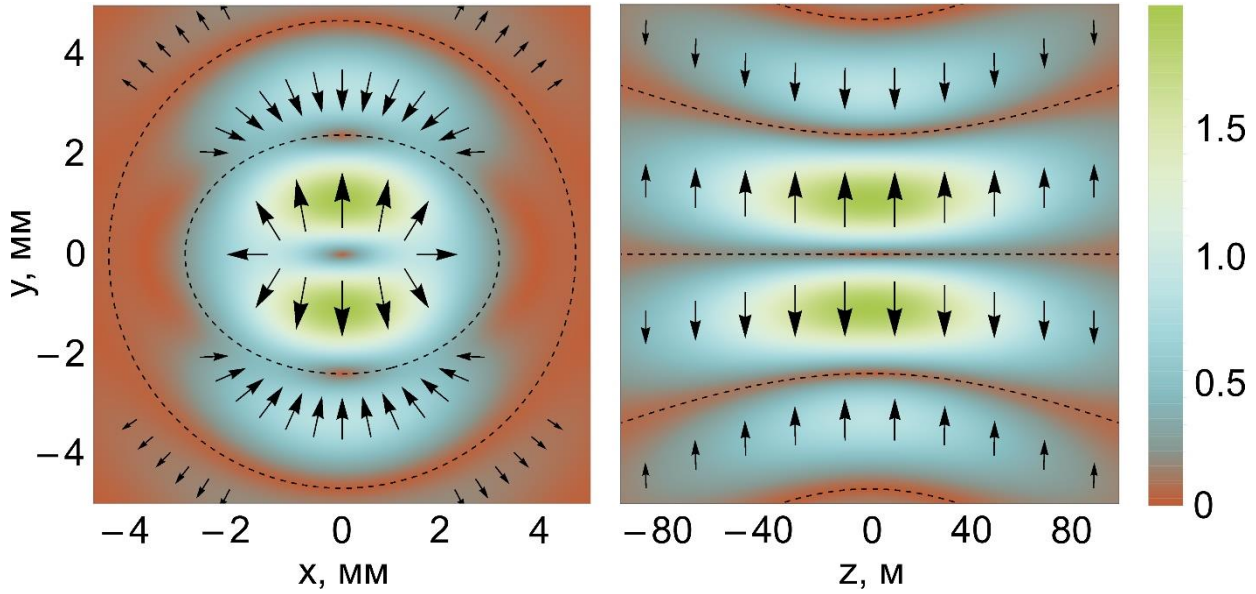


Рисунок 10. Нормированная хиральная консервативная сила, действующая на хиральный диполь с $\chi' > 0$ со стороны T -пучка с индексами $l = m = 1$, длиной волны $\lambda = 500$ нм и длиной Рэлея $z_0 = 100$ м, в плоскостях $z = 0$ (слева) и $x = 0$ (справа). Направление силы обозначено стрелками, а величина силы в единицах $\chi' P / (w_0 z_0^2)$ (см. Приложение 2) показана цветом.

7.1.2. Хиральная диссипативная сила

Хиральная диссипативная сила, действующая на хиральный диполь в поле светового пучка, пропорциональна разности удвоенной плотности потока хиральности (1.48) и ротора вектора Пойнтинга (1.32),

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \chi'' (2\Phi - \nabla \times \mathbf{\Pi}). \quad (7.8)$$

В цилиндрических координатах ротор векторного поля имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial \Pi_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho \Pi_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Pi_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z. \quad (7.9)$$

Поскольку ни в одном из рассмотренных нами случаев компоненты вектора Пойнтинга от угловой координаты не зависят, производные по ней можно опустить:

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = -\frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial \Pi_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \Pi_\varphi)}{\partial \rho} \mathbf{e}_z. \quad (7.10)$$

Подставляя в это выражение компоненты вектора Пойнтинга для T -пучка (6.25), получаем

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = -\frac{l}{k\rho} \frac{\partial I}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\rho}{R} \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{l}{k\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_z \approx -\frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{l}{k\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad (7.11)$$

где мы пренебрегли малыми членами, пропорциональными производным $\partial_z I$.

Выражая плотность потока хиральности (6.21) через интенсивность пучка (6.26),

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{\rho}{R} \frac{\partial I}{\partial \rho} \sin 2\varphi + \frac{l\rho}{k} \frac{\partial(I/\rho^2)}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z \right], \quad (7.12)$$

и используя (7.11), находим хиральную диссипативную силу (7.8) в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = 2c\chi'' K \mathbf{e}_z, \quad (7.13)$$

где плотность хиральности K определяется выражением (7.2).

7.2. Пучок с круговой поляризацией векторного потенциала

7.2.1. Хиральная консервативная сила

Согласно (6.48)(6.48), плотность хиральности C -пучка

$$K = \pm \frac{1}{c} \left(kI + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{k\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \quad (7.14)$$

не зависит от угловой координаты, поэтому φ -компонента хиральной консервативной силы будет тождественно равна нулю. В таком случае можем записать

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle &= \frac{c\chi'}{k} \frac{\partial K}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho = \pm \chi' \left[\frac{\partial I}{\partial \rho} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{e}_\rho \\ &= \chi' \left[\pm \frac{\partial I}{\partial \rho} + \frac{1}{k^2} \left(\pm \frac{1}{2} \frac{\partial^3 I}{\partial \rho^3} - \frac{l}{\rho} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} + \frac{l}{\rho^2} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{e}_\rho. \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.2.2. Хиральная диссипативная сила

Плотность потока хиральности и вектор Пойнтинга C -пучка, согласно (6.38), связаны простым соотношением $\Phi = \pm k\Pi$. Из этого легко видеть, что плотность потока энергии превосходит ротор вектора Пойнтинга в kw раз, $\Phi \gg \nabla \times \Pi$.

Используя (6.56) и (7.10) и опуская производные по z , находим

$$\begin{aligned} \nabla \times \Pi &= -\frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{1}{k} \left(\frac{l}{\rho} \mp \frac{1}{|u|} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} \right) I \right] \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{k\rho} \left[l \frac{\partial I}{\partial \rho} \mp \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (7.16)$$

С помощью данного выражения и (6.56) запишем хиральную диссипативную силу (7.8) в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \chi'' \left\{ \pm 2kI \left[\frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{k} \left(\frac{l}{\rho} \mp \frac{1}{2I} \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \right] + \frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{k\rho} \left[l \frac{\partial I}{\partial \rho} \mp \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial I}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{e}_z \right\} \approx \pm 2k\chi'' I \left(\frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\rho + \frac{l}{k\rho} \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \right), \quad (7.17)$$

где мы пренебрегли слагаемыми порядка $I/(kw^2)$ по сравнению с kI . Опуская также малые поперечные компоненты, можем записать

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle \approx \pm 2k\chi'' I \mathbf{e}_z. \quad (7.18)$$

7.3. Пучок с продольной поляризацией векторного потенциала

7.3.1. Хиральная консервативная сила

Поскольку интенсивность L -пучка (6.83) определяется сложнее, чем в предыдущих случаях, мы не будем выражать через нее силы в явном виде.

Градиент даваемой выражением (6.64) плотности хиральности L -пучка так же, как и в случае C -пучка, не имеет азимутальной компоненты. Поэтому хиральная консервативная сила принимает вид

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{c\chi'}{k} \frac{\partial K}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho = \frac{\chi'}{2Z_0} l \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\rho = \frac{\chi'}{2Z_0} \frac{l}{\rho} \left(\frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\rho. \quad (7.19)$$

7.3.2. Хиральная диссипативная сила

Сопоставление формул (6.64), (6.72), (6.77) и (7.8) показывает, что плотность потока хиральности (а именно ее z -компонента), как и в случае C -пучка, по порядку величины превосходит ротор вектора Пойнтинга. Опуская, как и ранее, производные компонент вектора Пойнтинга по z , запишем ротор вектора Пойнтинга (6.77) в виде

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = - \frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \left(\frac{\partial |u|}{\partial z} \frac{\partial |u|}{\partial \rho} + \frac{k\rho}{R} \frac{\partial \phi}{\partial z} |u|^2 \right) \right] \mathbf{e}_z, \quad (7.20)$$

где

$$I = \frac{\|\nabla_T u\|^2}{2Z_0}. \quad (7.21)$$

Продольная компонента ротора вектора Пойнтинга пренебрежимо мала по сравнению с продольной компонентой плотности потока хиральности, поэтому хиральная диссипативная сила (7.8) L -пучка с учетом (6.64) и (6.71) принимает вид

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle &= \chi'' \left(2\Phi + \frac{\partial I}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi \right) \\
&= \frac{\chi''}{Z_0} \left[-k \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial z} \mathbf{e}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{k^2 \rho}{R} \frac{\partial |u|^2}{\partial z} - k \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial \|\nabla_T u\|^2}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{2}{\varepsilon_0} K \mathbf{e}_z \right].
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Опуская малые поперечные компоненты, приходим к соотношению, аналогичному (7.13),

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle \approx 2c\chi'' K \mathbf{e}_z. \tag{7.23}$$

7.4. Выражение для хиральной диссипативной силы в случае произвольного параксиального пучка

Хиральная диссипативная сила даётся выражением

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = -\frac{1}{2} \chi'' \operatorname{Im} \mathbf{h}_0, \tag{7.24}$$

где

$$\mathbf{h}_0 = i(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + \omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*. \tag{7.25}$$

Используя уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме в виде

$$-i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \nabla \times \mathbf{H}_0, \tag{7.26a}$$

$$i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 = \nabla \times \mathbf{E}_0, \tag{7.26b}$$

запишем последние два члена в (7.25) следующим образом:

$$\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -i \mathbf{E}_0 \times [\nabla \times \mathbf{H}_0^*] = i [(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* - \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{H}}_0^*)], \tag{7.27a}$$

$$\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* = i \mathbf{H}_0 \times [\nabla \times \mathbf{E}_0^*] = i [\nabla(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) - (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^*]. \tag{7.27b}$$

Подставляя (7.27) в (7.25) и приводя подобные слагаемые,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_0 &= i(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^* - i(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* + i[\nabla(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) - (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^*] \\
&\quad + i[(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_0^* - \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{H}}_0^*)] = i[\nabla(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) - \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{H}}_0^*)],
\end{aligned} \tag{7.28}$$

получаем хиральную диссипативную силу в виде

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \frac{1}{2} \chi'' \operatorname{Re} [\nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{H}}_0^*) - \nabla(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathbf{H}_0)]. \tag{7.29}$$

Для несильно расходящихся пучков, распространяющихся вдоль оси z , справедливы соотношения $\partial_z \mathbf{E}_0 \approx ik \mathbf{E}_0$ и $\partial_z \mathbf{H}_0 \approx ik \mathbf{H}_0$. Поэтому, используя представление оператора набла (5.11), можем записать

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle = \chi'' \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\nabla_T (\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{H}}_0^*) - \nabla_T (\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathbf{H}_0)] + k \operatorname{Im} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) \mathbf{e}_z \right\}. \quad (7.30)$$

Можно видеть, что поперечная компонента хиральной диссипативной силы по порядку величины в kw раз меньше ее продольной компоненты. С использованием определения плотности хиральности (1.45) продольная компонента хиральной диссипативной силы, действующей на хиральную наночастицу со стороны параксиального пучка, принимает вид

$$\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle \cdot \mathbf{e}_z = \chi'' k \operatorname{Im} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) = 2c \chi'' K. \quad (7.31)$$

Таким образом, хиральная диссипативная сила в случае несильно расходящихся пучков является преимущественно продольной и по модулю равна $2c \chi'' K$, если пренебрегать членами порядка $\chi'' (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*) / z_0$. Этот результат подтверждает расчеты, выполненные в предыдущих разделах этой главы.

Вопросы

1. Какая сила действует на хиральную наночастицу, помещенную в поле пучка Лагерра – Гаусса и какие компоненты в ней можно выделить?
2. Какой вид имеет выражение для хиральной консервативной и диссипативной силы в поле пучка с поперечной поляризацией векторного потенциала?
3. Какими особенностями обладают консервативная и неконсервативная часть хиральной силы пучков Лагерра – Гаусса?
4. Какой вид имеет выражение для хиральной консервативной и диссипативной силы в поле пучка с круговой поляризацией векторного потенциала?
5. Какой вид имеет выражение для хиральной консервативной и диссипативной силы в поле пучка с продольной поляризацией векторного потенциала?
6. Поле каких пучков может быть использовано для энантиоселективного перемещения наночастиц на расстояния порядка ширины пучка?
7. Какой вид имеет выражение для хиральной диссипативной силы в случае произвольного параксиального пучка?

Список литературы

1. Crossley R.J. Chirality and biological activity of drugs. — 1995. — Vol. 7.
2. Bitchagno G.T.M. et al. Demystifying racemic natural products in the homochiral world // Nature Reviews Chemistry. — 2022. — Vol. . — № 42. — P. 806–822.
3. Shukla N. et al. Chiral metal surfaces for enantioselective processes // Nature Materials. — 2020. — Vol. 19. — P. 939–945.
4. Ma B. et al. Regulation of biological processes by intrinsically chiral engineered materials // Nature Reviews Material. — 2023. — Vol. 8. — P. 403–413.
5. Govorov A.O. et al. Chiral nanoparticle assemblies: Circular dichroism, plasmonic interactions, and exciton effects // Journal of Materials Chemistry. — 2011. — Vol. 21. — № 42. — P. 16806–16818.
6. Hendry E. et al. Ultrasensitive detection and characterization of biomolecules using superchiral fields // Nature Nanotechnology. — 2010. — Vol. 5. — № 11. — P. 783–787.
7. Pendry J. A chiral route to negative refraction // Science. — 2004. — Vol. 306. — № 5700. — P. 1353–1355.
8. Wang B. et al. Chiral metamaterials: Simulations and experiments // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. — 2009. — Vol. 11. — № 11. — P. 114003.
9. Cho N.H. et. al. Bioinspired chiral inorganic nanomaterials // Nature Reviews Bioengineering. — 2023. — Vol. 1. — P. 88–106.
10. Zhu H. et. al. Creating chirality in the nearly two dimensions // Nature Materials. — 2024. — Vol. 23. — P. 316–322.
11. Lv J. et. al. Self-assembled inorganic chiral superstructures // Nature Reviews Chemistry. — 2022. — Vol. 6. — P. 125–145.
12. Mukhina M.V. et al. Intrinsic chirality of CdSe/ZnS quantum dots and quantum rods // Nano Letters. — 2015. — Vol. 15. — № 5. — P. 2844–2851.
13. Canaguier-Durand A. et al. Mechanical separation of chiral dipoles by chiral light // New Journal of Physics. — 2013. — Vol. 15. — № 12. — P. 123037.
14. Rukhlenko I.D. et al. Completely chiral optical force for enantioseparation // Scientific Reports. — 2016. — Vol. 6. — P. 36884.

15. Canaguier-Durand A., Genet C. Chiral near fields generated from plasmonic optical lattices // *Physical Review A*. — 2014. — Vol. 90. — № 2. — P. 023842.
16. Rukhlenko I.D. et al. Shape-induced optical activity of chiral nanocrystals // *Optics Letters*. — 2016. — Vol. 41. — № 11. — P. 2438–2441.
17. Tepliakov N.V. et al. Optical activity of chirally distorted nanocrystals // *Journal of Applied Physics*. — 2016. — Vol. 119. — № 19. — P. 194302.
18. Tepliakov N.V. et al. Engineering optical activity of semiconductor nanocrystals via ion doping // *Nanophotonics*. — 2016. — Vol. 5. — № 4. — P. 573–578.
19. Baimuratov A.S. et al. Dislocation-induced chirality of semiconductor nanocrystals // *Nano Letters*. — 2015. — Vol. 15. — № 3. — P. 1710–1715.
20. Govorov A.O. et al. Theory of circular dichroism of nanomaterials comprising chiral molecules and nanocrystals: Plasmon enhancement, dipole interactions, and dielectric effects // *Nano Letters*. — 2010. — Vol. 10. — № 4. — P. 1374–1382.
21. Tang Y., Cohen A.E. Optical chirality and its interaction with matter // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104. — № 16. — P. 163901.
22. Allen L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // *Physical Review A*. — 1992. — Vol. 45. — № 11. — P. 8185.
23. Vovk I.A. et al. Chiral nanoparticles in singular light fields // *Scientific Reports*. — 2017. — Vol. 7. — P. 45925.
24. Choi J.S., Cho M. Limitations of a superchiral field // *Physical Review A*. — 2012. — Vol. 86. — № 6. — P. 063834.
25. Davis L. Theory of electromagnetic beams // *Physical Review A*. — 1979. — Vol. 19. — № 3. — P. 1177.
26. Салех Б., Тейх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения. — 2012.
27. Plick W.N., Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams // *Physical Review A*. — 2015. — Vol. 92. — № 6. — P. 063841.
28. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. — 2013.
29. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. — 1963.

30. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. — 1964. — Vol. 55.

Приложения

Приложение 1: Вычисление нормировочного интеграла

Покажем, что

$$\int_0^{\infty} F_2(\xi) [L_m^{|\xi|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|\xi|} d\xi = 0.$$

Для этого используем интегралы (6.29) и (6.90). Учитывая, что

$$[L_m^{|\xi|}(\xi)]' = -L_{m-1}^{|\xi|+1}(\xi) = \frac{1}{\xi} [mL_m^{|\xi|}(\xi) - (|\xi| + m)L_{m-1}^{|\xi|}(\xi)],$$

находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} [L_m^{|\xi|}(\xi)]' L_m^{|\xi|}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} [mL_m^{|\xi|}(\xi) - (|\xi| + m)L_{m-1}^{|\xi|}(\xi)] L_m^{|\xi|}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|\xi|} d\xi = m(m+1)_{|\xi|}. \end{aligned}$$

Далее с учетом рекуррентного соотношения

$$[L_m^{|\xi|}(\xi)]' = -L_{m-1}^{|\xi|+1}(\xi) = L_m^{|\xi|}(\xi) - L_m^{|\xi|+1}(\xi)$$

находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \xi \left(\frac{[L_m^{|\xi|}(\xi)]'}{L_m^{|\xi|}(\xi)} \right)^2 [L_m^{|\xi|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|\xi|} d\xi = \int_0^{\infty} [L_m^{|\xi|}(\xi) - L_m^{|\xi|+1}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} [L_m^{|\xi|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi + \int_0^{\infty} [L_m^{|\xi|+1}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} L_m^{|\xi|}(\xi) L_m^{|\xi|+1}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi \\ &= \frac{(l+m)!}{m!} (l+2m+1) + \frac{(l+m+1)!}{m!} \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} L_m^{|\xi|}(\xi) L_m^{|\xi|+1}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi = \frac{(l+m)!}{m!} (2l+3m+2) \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} L_m^{|\xi|}(\xi) L_m^{|\xi|+1}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|\xi|+1} d\xi. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла с учетом того же рекуррентного соотношения получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi)]' L_m^{|l|}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi &= \int_0^\infty [L_m^{|l|}(\xi) - L_m^{|l|+1}(\xi)] L_m^{|l|}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi \\ &= (m+1)_{|l|} (l+2m+1) - \int_0^\infty L_m^{|l|}(\xi) L_m^{|l|+1}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi. \end{aligned}$$

Сравнивая данное выражение с полученным ранее, находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_m^{|l|}(\xi) L_m^{|l|+1}(\xi) e^{-\xi} \xi^{|l|+1} d\xi &= \frac{(l+m)!}{m!} (l+2m+1) - m \frac{(l+m)!}{m!} \\ &= (m+1)_{|l|} (l+m+1) \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi \left(\frac{[L_m^{|l|}(\xi)]'}{L_m^{|l|}(\xi)} \right)^2 [L_m^{|l|}(\xi)]^2 e^{-\xi} \xi^{|l|} d\xi \\ = (m+1)_{|l|} (2l+3m+2) - 2(m+1)_{|l|} (l+m+1) = m(m+1)_{|l|}. \end{aligned}$$

Приложение 2: Размерные единицы

При построении графиков плотности хиральности, консервативной и диссипативной хиральных сил удобно использовать единицы, включающие в себя все размерные константы и множители.

T-пучок

Введем для удобства безразмерную амплитуду пучка $|u_0|^2$ согласно равенству

$$|u|^2 = U^2 |u_0|^2 = \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^2} |u_0|^2.$$

Нормировочная постоянная для амплитуды u_0 есть

$$a_{lm} = 2 \sqrt{\frac{2^{|l|}}{(m+1)_{|l|}}}.$$

Нормировка хиральности

Введем единицу хиральности

$$K_0 = 2\varepsilon_0 k \frac{U^2}{w_0^2} = 2\varepsilon_0 k \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^4} = \frac{2P}{\pi c k w_0^4} = \frac{2P}{\pi c \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda Z_0}{\pi}\right)^2} = \frac{P}{c \lambda Z_0^2}.$$

Плотность хиральности в этих единицах принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{K}{K_0} &= \frac{\frac{\varepsilon_0 k}{4} \left[\left(\frac{k\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{\rho} \right) \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} + l\rho \frac{\partial |u/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right]}{K_0} \\
&= \frac{\frac{\varepsilon_0 k}{4} U^2 \left[\left(\frac{k\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{\rho} \right) \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho} + l\rho \frac{\partial |u_0/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right]}{2\varepsilon_0 k \frac{U^2}{w_0^2}} \\
&= \frac{w_0^2}{8} \left[\left(\frac{k\rho}{R} \sin 2\varphi - \frac{l}{\rho} \right) \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho} + l\rho \frac{\partial |u_0/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right].
\end{aligned}$$

Нормировка реактивной силы

Введем единицу реактивной силы

$$\langle F_\chi^r \rangle_0 = 2\pi \frac{c\chi' K_0}{k w_0} = 2\pi \frac{c\chi'}{k} \frac{1}{w_0} \frac{P}{c\lambda z_0^2} = \frac{\chi' P}{w_0 z_0^2}.$$

Реактивная силы в этих единицах равняется

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{\frac{c\chi'}{k} \nabla K}{\langle F_\chi^r \rangle_0} = \frac{\frac{c\chi'}{k} \nabla K}{2\pi \frac{c\chi' K_0}{k w_0}} = \frac{w_0}{2\pi} \nabla \left(\frac{K}{K_0} \right).$$

Нормировка диссипативной силы

Для нормировки данной силы, нам нужно отнормировать поток хиральности и интенсивность пучка. Введем единицу диссипативной силы

$$\begin{aligned}
\langle F_\chi^d \rangle_0 &= 4\pi \frac{\chi'' I}{k w_0^2} = 4\pi \frac{\chi''}{k} \frac{1}{w_0^2} \frac{k^2 U^2}{2Z_0} = 4\pi \frac{\chi''}{k} \frac{1}{w_0^2} \frac{k^2}{2Z_0} \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^2} = \frac{2\chi'' P}{k w_0^4} = \frac{2\chi'' P}{\frac{2\pi \lambda z_0}{\lambda} \frac{\pi}{\pi} w_0^2} \\
&= \frac{\chi'' P}{w_0^2 z_0}.
\end{aligned}$$

Производя нормировку, получим

$$\frac{\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle}{\langle F_\chi^d \rangle_0} = \frac{\chi'' (2\Phi - \nabla \times \Pi)}{\langle F_\chi^d \rangle_0} = 2 \left(\frac{\Phi}{q} \right) - \nabla \times \left(\frac{\Pi}{q} \right),$$

где

$$q = \frac{P}{w_0^2 z_0}.$$

Производя деление, находим

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi \cdot \mathbf{e}_\varphi}{q} &= \frac{-\omega \frac{\varepsilon_0 k}{4} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}}{q} = -\frac{\omega \frac{\varepsilon_0 k}{4} U^2 \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho}}{\frac{P}{w_0^2 z_0}} = -\frac{w_0^2 z_0}{P} \omega \frac{\varepsilon_0 k}{4} \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^2} \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho} \\
&= -\frac{z_0}{4\pi} \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho},
\end{aligned}$$

так что

$$\frac{\Phi}{q} = \frac{z_0}{4\pi} \left[-\frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{\rho}{R} \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho} \sin 2\varphi + \frac{l\rho}{k} \frac{\partial |u_0/\rho|^2}{\partial \rho} \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_z \right].$$

Поскольку

$$\frac{\Pi}{q} = \frac{I}{q} \left(\frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\rho + \frac{l}{k\rho} \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \right),$$

то нормированная интенсивность есть

$$\frac{I}{q} = \frac{\frac{k^2 U^2}{2Z_0} |u_0|^2}{\frac{P}{w_0^2 z_0}} = \frac{w_0^2 z_0}{P} \frac{k^2}{2Z_0} \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^2} |u_0|^2 = \frac{z_0}{2\pi} |u_0|^2.$$

C-пучок

Нормировка хиральности

Введем единицу хиральности

$$K_0 = 2\varepsilon_0 k \frac{U^2}{w_0^2} k z_0 = \frac{P}{c\lambda z_0^2} k z_0 = \frac{kP}{c\lambda z_0}.$$

Плотность хиральности в этих единицах принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{K}{K_0} &= \frac{\pm \frac{\varepsilon_0 k}{2} \|\mathbf{E}_0\|^2}{K_0} = \frac{\pm \frac{\varepsilon_0 k}{2} U^2}{2\varepsilon_0 k \frac{U^2}{w_0^2} k z_0} \left(k^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right) \\ &= \pm \frac{w_0^2}{4kz_0} \left(k^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial \rho^2} \mp \frac{l}{\rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Нормировка реактивной силы

Введем единицу реактивной силы

$$\langle F_\chi^r \rangle_0 = k z_0 \frac{\chi' P}{w_0 z_0^2} = \frac{\chi' k P}{w_0 z_0}.$$

Реактивная силы в этих единицах равняется

$$\langle \mathbf{F}_\chi^r \rangle = \frac{\frac{c\chi'}{k} \nabla K}{\langle F_\chi^r \rangle_0} = \frac{\frac{c\chi'}{k} \nabla K}{\frac{\chi' k P}{w_0 z_0}} = \frac{w_0 z_0 c}{k P} \frac{k P}{k c \lambda z_0} \nabla \left(\frac{K}{K_0} \right) = \frac{w_0}{2\pi} \nabla \left(\frac{K}{K_0} \right).$$

Нормировка диссипативной силы

Введем единицу диссипативной силы

$$\langle F_\chi^d \rangle_0 = k z_0 \frac{\chi'' P}{w_0^2 z_0} = \frac{\chi'' k P}{w_0^2}.$$

Производя нормировку, получим

$$\frac{\langle \mathbf{F}_\chi^d \rangle}{\langle F_\chi^d \rangle_0} = \frac{\chi'' (2\Phi - \nabla \times \Pi)}{\langle F_\chi^d \rangle_0} = 2 \left(\frac{\Phi}{q} \right) - \nabla \times \left(\frac{\Pi}{q} \right),$$

где

$$q = \frac{kP}{w_0^2}.$$

Поскольку $\Phi \propto \Pi \propto I$, то достаточно отнормировать интенсивность пучка

$$\frac{I}{q} = \frac{\frac{k^2 U^2}{2Z_0} |u_0|^2}{\frac{kP}{w_0^2}} = \frac{w_0^2}{kP} \frac{k^2}{2Z_0} \frac{Z_0 P}{\pi k^2 w_0^2} |u_0|^2 = \frac{1}{2\pi k} |u_0|^2.$$

L-пучок

Введем для удобства безразмерную амплитуду пучка $|u_0|^2$ согласно равенству $|u|^2 = U^2 |u_0|^2 = Z_0 P |u_0|^2$.

Нормировочная постоянная для амплитуды u_0 есть

$$a_{lm} = \sqrt{\frac{2^{|l|+1}}{(|l| + 2m + 1)(m + 1)^{|l|}}}.$$

Нормировка хиральности

Введем единицу хиральности

$$K_0 = \frac{\varepsilon_0 k U^2}{\pi w_0^2} = \frac{\varepsilon_0 k Z_0 P}{\pi w_0^2} = \frac{kP}{c\lambda z_0}.$$

Плотность хиральности в этих единицах принимает вид

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\frac{\varepsilon_0 k l}{2 \rho} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}}{\frac{\varepsilon_0 k U^2}{\pi w_0^2}} = \frac{\frac{\varepsilon_0 k l}{2 \rho} \frac{\partial (U^2 |u_0|^2)}{\partial \rho}}{\frac{\varepsilon_0 k U^2}{\pi w_0^2}} = \frac{\pi w_0^2 l}{2 \rho} \frac{\partial |u_0|^2}{\partial \rho}.$$

Вовк Илья Александрович
Дубовик Алексей Юрьевич
Кунделев Евгений Валерьевич
Рождественский Юрий Владимирович

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХИРАЛЬНЫХ НАНОЧАСТИЦ СО СВЕТОМ

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №

Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А