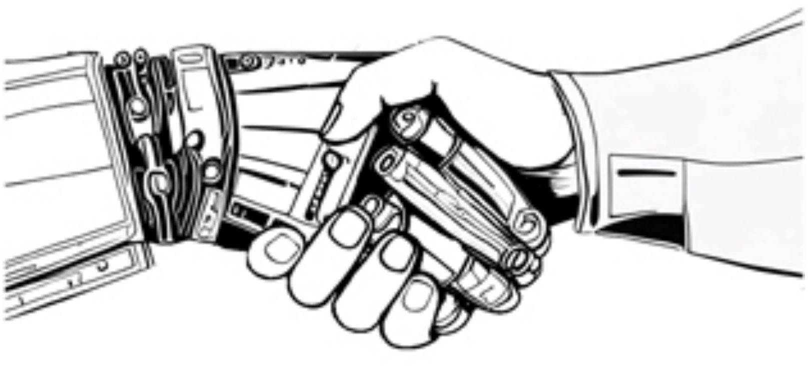
Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

М.В. Бабушкин, А.А. Ведяков
А.О. Ведякова, Е.В. Милованович
О.В. Слита, В.Ю. Тертычный-Даури

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ИСКУССТВЕННЫМ ИНТЕЛЛЕКТОМ



Санкт-Петербург
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

М.В. Бабушкин, А.А. Ведяков, А.О. Ведякова, Е.В. Милованович, О.В. Слита, В.Ю. Тертычный-Даури

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ИСКУССТВЕННЫМ ИНТЕЛЛЕКТОМ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки
01.04.02, 09.04.01, 09.04.02, 09.04.03, 15.04.06
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования магистратуры

Санкт-Петербург

2024

Бабушкин М.В., Ведякова А.О., Ведяков А.А., Милованович Е.В., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю. Математические методы решения некоторых задач, связанных с искусственным интеллектом. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2024. – 132 с.

Рецензент(ы):
Шориков А.Ф., доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, отдел дифференциальных уравнений;

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлены некоторые современные методы решения задач искусственного интеллекта (ИИ), посвященные: 1) задачам обучения и 2) задачам динамического адаптивного оптимального оценивания в условиях неопределенности. Во второй части в качестве приложения и дополнительного справочного материала рассмотрены элементы теории обучаемых опознающих систем (ООС), играющих важную роль в процессе создания математической основы решения задач, связанных с ИИ. Здесь изложены вопросы алгоритмизации процессов обучения, разделимости классов изображений, стохастической теории ООС, метод стохастической аппроксимации, приведена общая постановка задачи самообучения. К приложению также примыкает дополнение в виде небольшой части из двух обзорных задач, анализ и решение которых требуется провести обучающимся.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплинам «Дополнительные разделы машинного обучения», «Методы машинного обучения в робототехнике», «Математические и алгоритмические основы машинного обучения», «Математические основы машинного обучения» по образовательным программам направлений подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.04.02 «Информационные системы и технологии», 09.04.03 «Прикладная информатика», 15.04.06 «Мехатроника и робототехника». Студенты получают необходимые знания принципов и математических основ машинного обучения, формируют глубокое понимание работы самообучающихся систем и умения работы с ними.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, пять лет подряд в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

Оглавление

Часть I

О некоторых задачах искусственного интеллекта

Введение

Начнем с известного тезиса о том, что имеются разночтения по поводу смыслового содержания понятия «искусственный интеллект» (ИИ). Тем не менее, доминирует достаточно общая и универсальная точка зрения на ИИ как на задачу обучения [6]. При этом, конечно же, речь не идет об обучении (дрессировке) биологических существ. Имеются в виду лишь искусственно созданные человеком вычислительные комплексы (роботы, компьютеры, цифровые имитаторы и т.д.), наделенные памятью, сенсорными устройствами, регуляторами в виде обратных связей, механическими и электрическими приводами и т.д.

Часто под ИИ понимают задачу машинного, т.е. компьютерного обучения различного типа нейросетей умению производить классификацию текстов, детекции, сегментации изображений. При всем при том, задачи управления динамическими объектами здесь не рассматриваются — дело сводится только к формированию сходящихся алгоритмов и процедур самообучения (обучения «без учителя») с учетом экстремизации некоторого функционала качества.

«Распознавание образов представляет собой часть общей проблемы искусственного интеллекта, возникшей под влиянием работ Н. Винера, Дж. фон Неймана, А.М. Тьюринга, У. Росс Эшби и других основоположников кибернетики» [99] (см. также работы [23, 119]). Подробнее о задачах распознавания образов, в которых изучаются вопросы функционирования опознающих систем см. также обширную литературу [1, 2, 4, 8, 12, 14, 14-20, 24, 25, 28-29, 31-33, 36-37, 40-44, 48, 59, 63, 65, 68, 73-75, 77-80, 82-84, 93, 95, 97, 98, 101-106, 117-119, 122-126].

Итак, проблема ИИ может рассматриваться, как только что это было сказано, по-разному, например, как задача машинной классификации изображений, а может изучаться как задача адаптивного обучения через задачу динамического оценивания неизвестных параметров управляемого объекта или параметров воздействующей на него среды (различных возмущений). Взять, скажем, хорошо известную задачу обучения езде робота на велосипеде [100, 128], которая попадает под эту трактовку проблемы ИИ.

Материал учебного пособия (до Приложения) фактически разбит на две части: первая часть, в целом, посвящена задаче обучения и, в частности, задаче самообучения, а вторая посвящена аналогам ИИ в задачах динамического оптимального оценивания в условиях неопределенности. Речь идет о математическом моделировании ИИ в задачах адаптивного оптимального управления в условиях, когда параметры объекта и среды (действующих на него возмущений) неизвестны. Требуется синтезировать сходящуюся настройку параметров, когда время адаптации и время оптимизации, т.е. обучения системы управления, считаются заранее неизвестными.

В Главе 1 даются разнообразные пояснения, что из себя представляет проблема ИИ. Упор сделан на определении новых понятий, связанных, в основном, с процессами обучения и адаптации, хотя, в принципе, и обучение и адаптация настолько тесно друг с другом связаны, что отделить одно от другого часто бывает затруднительно. Вводятся понятия алгоритма обучения, целевой функции, распознающей системы, класса изображений, тренировочного множества, алгоритма с поощрением, конечно-сходящегося алгоритма, адаптивной управляющей системы, цели управления, тактики управления, времени адаптации и др.

В Главе 2 поставлена общая задача о самообучении (обучении «без учителя») — о разделении множеств — в терминах классического вариацинного исчисления. Общность задачи обусловлена введением в анализ дополнительной переменной времени. Задача решается с помощью определения экстремальных условий, при которых будет достигаться минимизация функционала общего среднего риска. Рассматриваются задачи, соответствующие нефиксированному промежутку времени и фиксированному. Для двух этих случаев находятся выражения для расчета вариаций функционалов качества. Указываются необходимые условия для определения экстремальных значений процесса самообучения (разделения классов множества изображений) во времени.

В Главе 3 изучается новый класс нелинейных динамических задач применительно к внутренней вариационной задаче адаптивного оптимального управления с подвижной правой границей, когда время адаптации (обучения) и оптимизации заранее не задаются.

Решение этой задачи ищется на пути сведения задачи условной оптимизации к задаче безусловной при выполнении двух ограничений (связей): на движение управляемого объекта и наличие алгоритма сходящейся настройки параметров. Определяются необходимые условия для выбора экстремального движения при одновременном формировании конкретной замкнутой оптимальной системы адаптивного управления.

Материал Главы 4 посвящен внешней вариационной задаче адаптивного субоптимального управления с подвижной правой границей, когда на нелинейную управляемую динамическую систему действуют равномерно ограниченные неизвестные детерминированные возмущения. Здесь также, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что время адаптации (настройки, обучения) и оптимизации не известно заранее. Кроме того, поскольку внешние возмущения не контролируются, обеспечить оптимизационный процесс движения не удается — приходится ограничиться лишь субоптимизационным процессом, который включает в себя задание субоптимального управления и сходящийся алгоритм оценивания неизвестных возмущений. Их совокупность (субоптимальное управление плюс алгоритм адаптации) позволяет обеспечить минимизацию исходного функционала качества с некоторым уровнем оптимизации.

Глава 1

Искусственный интеллект как процесс самообучения с использованием адаптивных обратных связей

Задача формирования и создания обучаемых, адаптивных, опознающих систем, как теперь становится отчетливо понятно, возникла при создании систем, сходных по своим возможностям и эффективности использования с системами искусственного интеллекта.

Речь идет о задаче создания систем, работающих в условиях существенной априорной неопределенности о свойствах внешней среды и некоторых внутренних параметров. Эта задача приводит к необходимости построения таких систем, которые могли бы при своем функционировании на основе поступающей и обрабатываемой информации менять свои параметры или свою структуру так, чтобы обеспечить с течением времени целевые задания. Такие системы стали называться обучаемыми (самообучаемыми) адаптивными системами.

Многие известные адаптивные системы используют в режиме своего функционирования итеративные *алгоритмы обучения*, которые также называются алгоритмами настройки или адаптивными алгоритмами, которые определяют правило (закон) целенаправленного изменения параметров (структуры) системы, зависящей от поступающей на вход информации. Большинство таких алгоритмов представляют собой градиентные либо поисковые процедуры, связанные с поставленной *целевой функцией*.

Эффективность применения данных алгоритмов напрямую зависит от характера выполнения их сходимости. Отметим, что в основе доказательства сходимости многих алгоритмов обучения лежат идеи, использующие метод функций Ляпунова (ФЛ) в теории дифференциальных уравнений (ДУ), при котором положительная ФЛ убывает на траекториях изучаемого процесса.

К сказанному добавим, что работ, посвященных решению задач обучения, самообучения опознающих систем, исследованию алгоритмов адаптивного управления к настоящему времени накопилось великое множество; выделим из них только некоторые [2, 4, 6, 17, 18, 25, 28, 33, 36, 43, 57-59, 66, 70, 72, 75, 80, 82, 83, 94, 96, 98-102, 107-110, 113, 114, 122-126, 128].

Вначале следует также сказать, что персептронные системы Розенблатта [77] при исследовании проблемы автоматической классификации изображений предназначались для изучения механизмов работы мозга и их возможностей [28, 29]. Этот и другие подходы в виде использования теории групп и групповых инвариантов, экстраполяционных, лингвистических схем часто не позволяют моделировать способность мозга к обучению на очень коротких обучающих последовательностях.

1.1 Некоторые пояснения о процессе обучения

Воспользуемся некоторыми обзорными результатами работы [99]. Изначально обучаемая опознающая система трактовалась как персептронная система [123, 124], где задача обучения ставилась в виде задачи построения по обучающей последовательности разделяющих поверхностей в пространстве различных признаков. Такой подход к задаче распознавания можно назвать геометрическим или, иначе, экстраполяционным. При этом опознающие системы различаются как алгоритмами обучения, так и их предназначением.

Модель персептрона (системы нейронных сетей) Розенблатта послужила прототипом многих моделей обучаемых опознающих систем. Будем под *системой* иметь в виду некоторое устройство, предназначенное для однозначного отображения множества входных сигналов в множество выходных сигналов. Входные сигналы называют *изображениями*, а выходные — *ответами системы*.

Далее, *опознающая*, или еще иначе, *распознающая система*, которая часто называется *классификатором*, представляет собой систему, классифицирующую множество изображений, исходя из некоторой доступной классификации.

Здесь под классификацией подразумевается разбиение множества изображений или его части на непересекающиеся подмножества, именуемые *классами изображений.*

Система, способная стать опознающей с помощью введения в нее некоторой информации о части изображений и классах изображений, называется *обучаемой опознающей системой.* Это означает, что после введения информации лишь о части изображений, такая система способна стать классификатором всех изображений. Тем самым обнаруживаем *свойство экстраполяции*, присущее обучаемым системам.

Отметим, что множество изображений (с информацией о них, вводимой в систему) значительно беднее всего множества изображений. Это «вводимое» множество (вернее, вводимая информация о нем) состоит из конечного числа изображений. Система в результате такого ввода может по-разному производить классификацию, т.е. может менять свою структуру.

Процесс ввода информации об изображениях и, как результат, приводящий к изменению структуры, называется *обучением* системы, где множество изображений, которые система использует в обучении, называется *тренировочным*, или *обучающим множеством.*

Важно обратить внимание, что в обучаемую опознающую систему заранее не вводится полная информация о классах изображений; требуется, однако, чтобы способность к правильной классификации изображений возникла, как итог, в процессе обучения.

Еще одно важное замечание. Конкретная обучаемая опознающая система — это система, зависящая от некоторого конкретного параметра, определяющего структуру системы. Обучение тогда сводится к нахождению или оценке требуемого значения этого параметра.

Входящие сигналы воспринимаются системой на основе конечного набора *признаков* — функций, определенных на множестве изображений. Причем набор значений всех признаков, соответствующих данному изображению, называется *описанием изображения.* Точки в пространстве признаков называются *изображениями*, а множества в пространстве признаков, отвечающие классам изображений, называются *классами в пространстве признаков* или *образами.*

Обозначим множество изображений через Ω; Ω — абстрактное множество с элементами ω. Пусть Ω_1, ..., Ω_l — непересекающиеся подмножества множества Ω; здесь Ω_k, $k = \overline{1, l}$ — классы изображений. Вещественные функции $s_k(\omega)$, $k = \overline{1, l}$, такие, что

$$s_k(\omega) \;>\; \max_{i \neq k} \; s_i(\omega), \qquad \forall\, k, \; \forall\, \omega \in \Omega_k,$$

называются *дискриминантными* или *разделяющими* по отношению к подмножествам Ω_1, ..., Ω_l.

В случае двух классов изображений, когда $l = 2$, функция $s(\omega) = s_1(\omega) - s_2(\omega)$ принимает значения разных знаков на разных классах: множества Ω_1 и Ω_2 разделяются по знаку функции $s(\omega)$.

Для опознающей системы с переменной структурой можно рассмотреть задачу, называемую *задачей обучения*, которая состоит в отыскании такого параметра $\tau_* \in T$, при котором $\Omega_k(\tau_*) = \Omega_k$, $k = \overline{1, l}$.

Найти требуемый параметр τ_* можно с помощью перебора элементов множества T. Такая процедура перебора называется *алгоритмом обучения*, а опознающая система с переменной структурой и с соответствующим алгоритмом обучения называется *обучаемой опознающей системой*.

Задача обучения опознающей системы, основанной на *методе конечно-сходящихся алгоритмов* (КСА) решения целевых неравенств, изучается как задача решения счетной системы *целевых неравенств*. Приходим, тем самым, к задаче оценивания неизвестного параметра, определяющего структуру опознающей системы; эта задача решается при помощи специальных рекуррентных процедур, названных *алгоритмами с поощрением*, которые сходятся при определенных условиях за конечное число итераций.

Пусть алгоритм обучения имеет вид

$$\tau_{n+1} = \Phi(x_n, \tau_n, \sigma_n), \qquad n = 1, 2, \, \ldots \, . \tag{1}$$

где формирование оценок векторного параметра τ (вектора весов) происходит последовательно с учетом текущей информации. Здесь τ_1 — произвольный начальный вектор весов; x_1, x_2, ... — элементы тренировочной последовательности; σ_n — некоторые параметры, характеризующие класс векторных функций Φ.

Для функционирования алгоритма (1) необходимо знание изображения x_n, поступающего на вход системы в данный момент времени. Рекуррентный алгоритм (1) называется *алгоритмом с поощрением*, если его можно представить в виде

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_n \, \Phi(x_n, \tau_n, \sigma_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0, \end{cases} \tag{3}$$

а $\varphi(x, \tau, \sigma)$ — некоторая *целевая функция*, характеризующая качество работы алгоритма.

Видим, что в алгоритме (2), (3) вектор весов на n–м шаге не изменяется, если система работает правильно и $\theta_n = 0$; в противном случае он изменяется по некоторому правилу. Эта информация о характере работы системы в процессе обучения (которая является информацией об изображениях тренировочного множества) сообщается опознающей системе и может учитываться при формировании алгоритмов обучения.

Рекуррентные алгоритмы без поощрения называются также *алгоритмами с принудительным обучением*, отличительной чертой которых является наличие целевого условия, при котором их работа в процессе обучения состоит в накоплении некоторых статистических данных о внешних возмущениях с целью нахождения вектора весов.

Введем понятие о КСА обучения опознающей системы. Алгоритм (2), (3) называется *конечно-сходящимся*, если для произвольного начального вектора τ_1 и произвольной бесконечной тренировочной последовательности $x_1, x_2, \ldots$ выполнено условие

$$\varliminf_{n \to \infty} \; \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0,$$

означающего $\exists\, r$ — такого номера, что при $n \ge r$ будет выполнено $\varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0$. По алгоритму (2), (3) это означает, что $\tau_r = \tau_{r+1} =$

..., т.е. последовательность τ_n сходится к пределу за *конечное* число шагов алгоритма (2), (3).

Если на тренировочном множестве $\{\, x_n \,\}_{n \in N}$ определена счетная последовательность целевых неравенств относительно искомого вектора τ : $\varphi(x_n, \tau, \sigma_n) > 0$ $(*)$, $n = 1, 2, ...$, то тогда задача об обучении опознающей системы представляет собой задачу нахождения алгоритма решения τ счетной системы неравенств $(*)$.

Пусть задана вещественная функция $\varphi(x, \tau)$, $x \in X \subset R^q$, $\tau \in R^p$, такая, что выполнены условия:

1. $\varphi(x, \tau)$ ограничена равномерно по $x \in X$, $|\,\varphi(x, \tau)\,| < C_1$, дифференцируема по τ, $\forall\, x$; евклидова норма ее градиента $\|\, \nabla_\tau\, \varphi(x, \tau)\,\| < C_2$, где C_1, C_2 — постоянные, не зависящие от выбора $x \in X$.

2. $\exists\, \tau_* \in R^p$ и число $\varepsilon_* > 0$, для которого $\forall\, x \in X$ справедливы неравенства: $\varphi(x, \tau_*) \ge \varepsilon_* > 0$.

3. $\forall\, (x, \tau)$ — пары точек, $x \in X$, $\tau \in R^p$, удовлетворяющих условию $\varphi(x, \tau) \le 0$, справедливо неравенство
$$\big(\nabla_\tau\, \varphi(x, \tau),\, \tau_* - \tau\big) \ge \varphi(x, \tau_*) - \varphi(x, \tau).$$

Пусть, кроме того, $\tau_1 \in R^p$ — произвольный вектор и $\{\, x_n \,\} \in X$ — произвольное счетное множество. Зададим алгоритм с поощрением вида
$$\tau_{n+1} = \tau_n + \alpha_n \theta_n\, \nabla_\tau\, \varphi(x_n, \tau_n), \tag{4}$$
$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi(x_n, \tau_n) \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad \varphi(x_n, \tau_n) > 0, \end{cases}$$
здесь α_n — некоторая числовая последовательность.

Тогда можно сформулировать и доказать утверждение [99], по которому следует, что в случае выполнения условий 1–3 алгоритм (4) является конечно-сходящимся, если
$$\alpha_n = A_n + B_n, \qquad \text{либо} \qquad \alpha_n = \max\big\{\, A_n,\, B_n \,\big\},$$
где
$$A_n = \frac{1}{\kappa_n}, \qquad B_n = -\,\frac{\beta_n\, \varphi(x_n, \tau_n)}{\|\, \nabla_\tau\, \varphi(x_n, \tau_n)\,\|^2},$$

причем

$$\kappa_n = 1+\sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad \kappa_{n+1} = \kappa_n+\theta_{n+1}, \quad \kappa_0 = 1,\ \beta_n \in [\,0,2\,],\ n = 0,1,\,\dots .$$

Алгоритм с поощрением (4) имеет характерную форму: вектор τ не меняется, если очередное неравенство выполнено, и изменяется в направлении наибольшего увеличения функции $\varphi(x,\tau)$ в противном случае.

Конкретные КСА предназначены для нахождения решения линейных систем неравенств. Их можно использовать в задаче обучения опознающей системы персептронного типа относительно разделения множеств. Вопросы, связанные с таким разделением (алгоритмы «Ява», «Полоска», «Отражение», «Надежное разделение», «Оптимальное разделение», процедуры построения комитета неравенств и др.) широко обсуждаются в работе [99].

Там же можно найти результаты, относящиеся к теории обучения: к стохастическим аналогам КСА, алгоритмам случайного поиска, теории принятия статистических решений, минимизации эмпирического риска, методу стохастической аппроксимации и процедуре Роббинса–Монро, методу потенциальных функций и самообучению (обучению без учителя).

1.2 Некоторые пояснения о процессе адаптации

Воспользуемся некоторыми рассуждениями и доводами о применении метода КСА для решения задач адаптивного управления, изложенных в близких по духу работах [99, 128]. Важно сразу же отметить, что задачи адаптивной стабилизации и слежения могут быть переформулированы как задачи нахождения решения системы неравенств, задаваемых целевым условием и способом формирования управления. Поэтому для нахождения требуемого решения можно использовать рекуррентные алгоритмы с поощрением.

Пусть имеется непрерывный динамический объект управления (ОУ), снабженный системой управления (СУ), причем синтез СУ должен осуществляться в условиях априорной неопределенности о параметрах самого ОУ либо внешних условий в виде неконтролируемых возмущений. Тогда естественно обратиться к *адаптивным* *управляющим системам* для восполнения недостающей и необходимой информации в процессе формирования СУ и функционирования ОУ.

Зададим ОУ с помощью уравнения

$$F\big[\,y(t),\ ...,\ y^{(m_1)}(t),\ u(t),\ ...,\ u^{(m_2)}(t),\ \xi,\ t\,\big] = 0, \tag{5}$$

где $F(\cdot)$ — известная вещественная функция своих аргументов, $y(t)$ — вектор-функция выходов ОУ, $u(t)$ — вектор-функция управлений, $y^{(k)}(t)$, $u^{(k)}(t)$ — k–е производные по t соответствующих векторных функций, $m_1, m_2 \in N$ — натуральные числа, $\xi \in \Xi$ — неизвестный параметр из множества Ξ, $t \in [\,t_0, \infty)$ — время. Множество Ξ характеризует степень априорной неопределенности об ОУ и условиях его работы. Считаем функцию F в уравнении (5) такой, что при задании достаточно гладкой вектор-функции $u(t)$ и фиксации параметра $\xi \in \Xi$ уравнение (5) однозначно определяет выходной процесс $y(\xi, t)$. Все это в совокупности позволяет говорить о *классе ОУ*, определяемом множеством Ξ с параметрами ξ в виде его элементов.

При выборе управления надо ориентироваться на *цель управления* (ЦУ) — требование обеспечения некоторых ограничений на выходной процесс. Понятно, что ЦУ определяются особенностями каждой конкретной задачи управления. К примеру, зададим ЦУ в виде обеспечения предельного неравенства

$$\lim_{t\to\infty}\ \inf_{s\geq t}\ \varphi\big[\,\sigma(s),\ s\,\big] > 0, \tag{6}$$

где $\sigma(t)$ — набор известных к моменту времени t величин, связанных с ОУ и СУ ($\sigma(t)$, в частности, может содержать выход $y(t)$ и вход $u(t)$ и их производные до определенного порядка), $\varphi[\,\sigma(t),\ t\,]$ — известная вещественная функция своих аргументов.

Предположим, что для каждого ОУ из класса Ξ управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение ЦУ, существует и его можно найти из уравнения

$$U\big[\,\sigma(t),\ u(t),\ ...,\ u^{(m_3)}(t),\ \omega(\xi),\ t\,\big] = 0, \tag{7}$$

где $\omega(\xi)$ — отображение Ξ в конечномерное пространство Ω и U — известная функция своих аргументов. Тем самым считаем, что, если модель ОУ определена, параметр ξ известен, то можно синтезировать управление, обеспечивающее ЦУ (6) в форме (7).

Отметим, что в ряде практических задач синтез требуемых управлений можно произвести в виде некоторого правила, зависящего не от всех характеристик ОУ, а лишь от некоторого числа их комбинаций, что и служит объяснением появления величины $\Omega(\xi)$ в соотношении (7). Если $\omega(\xi)$ — это тождественное преобразование, то $\Xi \subseteq \Omega$.

Управлением (7) нельзя, однако, воспользоваться, так как оно зависит от неизвестного вектора $\omega(\xi)$. Поэтому следует искать требуемое управление из уравнения

$$U\big[\,\sigma(t),\, u(t),\, ...,\, u^{(m_3)}(t),\, \tau(t),\, t\,\big] = 0, \tag{8}$$

где $\tau(t) \in \Omega$ — вектор-функция, которую также называют *тактикой управления* (ТУ). Соотношение (8) дополняют алгоритмом изменения ТУ в виде

$$\tau(t+0) = Q\big\{\,\tau(t-0) + \theta(t)\,\psi\big[\,\sigma(t-0),\, \tau(t-0),\, t-0\,\big]\,\big\}, \tag{9}$$

где обозначено

$$f(t \pm 0) = \lim_{\varepsilon \to 0}\, f(t \pm \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0,$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi[\,\sigma(t),\, t\,] \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad \varphi[\,\sigma(t),\, t\,] > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $\psi(\sigma, \tau, t)$ — функция со значениями в Ω; $Q(\tau)$ — отображение Ω в его подмножество T и $\tau(t_0) \in T$ — произвольный элемент.

Предполагается, что $\forall\, \tau \in T$ из уравнения (8) можно определить вектор-функцию $u(t)$, не обязательно обеспечивающую выполнение ЦУ (6), и $\omega(\Xi) \subseteq T$. В нашем случае достаточно ограничиться алгоритмом (10), реализующим кусочно-постоянную ТУ со значениями в T. Полагаем, что функции $Q(\tau)$ и $\psi(\sigma, \tau, t)$ определяются, чтобы обеспечить ЦУ (6); понятно, что эти функции не должны зависеть от неизвестного параметра ξ.

Соотношения (8) – (10) задают полностью СУ, предназначенную для управления любым ОУ из класса Ξ. СУ (8) – (10) называется *адаптивной в классе* Ξ *ОУ по отношению к ЦУ* (6), если неравенство (6) выполнено $\forall\,\xi \in \Xi$.

Еще отметим, что наименьшее время $t(\xi)$, начиная с которого во все дальнейшие моменты времени выполнено неравенство $\inf_{s\geq t}\ \varphi[\,\sigma(s),\,s\,] > 0$, называется *временем адаптации* или, иначе, *временем настройки, временем обучения* адаптивной системы управления (АдСУ). Процедура (9), (10) называется *алгоритмом адаптации.*

В случае, когда АдСУ предназначена для поддержания некоторых характеристик ОУ на каком-то конкретном уровне в заданных пределах, говорят об *адаптивном регуляторе* (АР). АР включает в себя сам *регулятор* и *адаптор* — устройство, назначение которого состоит в настройке регулятора. *Системой адаптивного управления* (САдУ) называют систему, объединяющую ОУ и АдСУ.

К АдСУ предъявляется требование практической приемлемости, а именно, время $t(\xi)$ адаптации не должно быть слишком большим. После завершения процесса адаптации АдСУ значения параметра $\omega(\xi)$ не найдет, а только получит некоторую его оценку $\tau[\,t(\xi)\,]$, при которой будет выполнено ЦУ. Построение АдСУ в виде соотношений (8) – (10) для конструирования $\psi(\sigma,\tau,t)$ и $Q(\tau)$, называют *синтезом АдСУ.* На практике, очевидно, надо уметь так формулировать закон управления (8) и ЦУ (6), чтобы синтез АдСУ был возможен.

Обратим теперь внимание на важную задачу об адаптивной стабилизации линейного ОУ. Предположим, что ОУ задается уравнением

$$\sum_{k=0}^{m_1} B_k\, y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m_2} C_k\, u^{(k)}(t) + v(t), \tag{11}$$

где $y(t)$ — m–я компонента вектор-функции выходов ОУ, $u(t)$ — l–я компонента вектор-функции управлений, $v(t)$ — m–я компонента вектор-функции внешних возмущений.

Будем считать для $v(t)$ ее равномерную по t ограниченность: $\sup_t\, \|\, v(t)\,\| < \infty$. Считаем также, что матрицы $B_k \in R^m \times R^m$, $C_k \in R^m \times R^l$ не зависят от t. Видим, что ОУ (11) является частным случаем ОУ (5). Пусть матрица B_{m_1} известна и невырождена. Тогда можно положить, что $B_{m_1} = I_m$ — единичная матрица порядка m. Кроме того, пусть матрица C_{m_2} известна, причем матрица $C_{m_2}C^*_{m_2}$

— невырождена. Остальные коэффициенты ОУ считаются неизвестными и их объединение дает вектор неизвестных параметров ξ. Пусть также элементы вектор-функции $v(t)$ не измеряются.

Задача о стабилизации ОУ (11) ставится так: требуется найти такие управления $u(t)$, при которых выход ОУ удовлетворял бы условию: $\| y(t) \| < \varepsilon_0$, где ε_0 — заданное положительное число.

Приходим при синтезе АР к задаче о нахождении матричного решения τ неравенств $\varphi(\tau, t) > 0$, где для целевой функции $\varphi(\tau, t) \,\exists\, \tau_*$ — решение такое, что $\forall\, t$ имеет место «усиленное» неравенство: $\varphi(\tau_*, t) \geq \varepsilon_*,\ \varepsilon_* > 0$.

Значения $\varphi(\tau, t)$ известны $\forall\, t$; функция $\varphi(\tau, t)$ выпукла по τ. Поэтому для решения неравенств $\varphi(\tau, t) > 0$ можно воспользоваться матричным аналогом КСА с произвольной матрицей $\tau(t_0)$ соответствующей размерности. Возьмем рекуррентную процедуру для нахождения матричной функции $\tau(t)$ вида

$$\tau(t+)) = \tau(t-0) + \gamma(t-0)\,\theta(t)\,\nabla_\tau\,\varphi(\tau-0,\, t-0), \qquad (12)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi[\,\tau(t),\, t\,] \leq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \varphi[\,\tau(t),\, t\,] > 0, \end{cases}$$

где $\gamma(t)$ — некоторые положительные функции, $\nabla_\tau\,\varphi(\tau, t)$ — градиент функции φ по матричному аргументу τ. Выражения для $\varphi(\cdot)$, $\nabla_\tau\,\varphi(\cdot)$ можно найти в работе [81].

Функции $\gamma(t)$ вычисляются по формуле

$$\gamma(t) = \frac{1}{\kappa(t)} - \frac{\beta(t)\,\varphi[\,\tau(t),\, t\,]}{\|\,\nabla_\tau\,\varphi[\,\tau(t),\, t\,]\,\|^2}, \qquad (13)$$

где функция $\kappa(t)$ определяется согласно рекуррентной процедуре

$$\kappa(t+0) = \kappa(t-0) + \theta(t), \qquad \kappa(t_0) = 1, \qquad \beta(t) \in [\,0; 2\,].$$

Здесь $\beta(t)$ — произвольная функция со значениями из промежутка $[\,0; 2\,]$,

$$\|\,\nabla_\tau\,\varphi(\tau, t)\,\|^2 = \mathrm{Sp}\,\{\,[\,\nabla_\tau\,\varphi(\tau, t)\,]^*\nabla_\tau\,\varphi(\tau, t)\,\}.$$

Можно показать, что $\forall\, t, s:\ t > s$ справедливо неравенство

$$\|\, \tau_* - \tau(s) \,\| \geq \|\, \tau_* - \tau(t) \,\|,$$

где $\|\, \tau \,\|^2 = \mathrm{Sp}\,(\tau^* \tau)$, откуда следует, что с течением времени $\tau(t) \to \tau_*$; τ_* — искомый матричный параметр. Если

$$\sup_t \left\|\, \nabla_\tau\, \varphi[\, \tau(t),\, t] \,\right\| < \infty,$$

то легко показать, что алгоритм (12), (13) — это КСА, так как

$$\lim_{t \to \infty}\ \theta(t) = 0, \tag{14}$$

и в процессе обучения будет лишь конечное число коррекций коэффициентов регулятора. Из двузначности $\theta(t)$, а также из условия (14) вытекает, что $\theta(t) \equiv 0$ при достаточно больших t.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит задача обучения опознающей системы, основанной на методе конечно-сходящихся алгоритмов?
2. Какой алгоритм называется алгоритмом с поощрением?
3. Что такое время адаптации (обучения)?

Глава 2

Общая задача о самообучении

Ставится задача о самообучении, т.е. обучении «без учителя», при том условии, когда добавляется в анализ еще одна переменная, принимающая смысл времени. Это условие в постановке задачи существенным образом ее усложняет.

Происходит тем самым не только разбиение пространства признаков на конечное число подмножеств, но и учет происходящих при этом изменений во временной области. Такая задача может считаться вполне новой и весьма актуальной. Заинтересованных читателей отправляем для знакомства с соответствующими приемами формирования рекуррентных алгоритмов самообучения и, в частности, процедурой Роббинса–Монро в рамках метода стохастической аппроксимации.

Перейдем теперь к пояснениям, необходимым для формулировки основной задачи о самообучении. Пусть все множество изображений требуется разбить на l классов. Введем в рассмотрение случайную функцию (случайный процесс), характеризующую расстояние точки $x(\omega, t)$ от некоторой неизвестной пока особой точки (центра) класса.

В этом случае классификация «во времени» может быть основана на требовании, чтобы каждый элемент x каждого класса был удален от особой точки класса на расстояние, меньшее, чем от особых точек других классов.

Важно отметить, что данное условие можно связать с минимизацией *функционала среднего риска* на рассматриваемом промежутке времени $[\,t_0, t_1\,]$. Задачу самообучения будем считать решенной, если по тренировочному множеству удастся найти особые точки (центры) $\tau^{(1)}$, ..., $\tau^{(l)}$ и границы соответствующих множеств, для которых риск будет минимален.

Итак, пусть пространство признаков $X(t) \subset R^q$ разбито на l непересекающихся подмножеств $X^{(1)}(t)$, ..., $X^{(l)}(t)$; оно подвержено деформации во времени, на что указывает зависимость от времени t. Обозначим через $\tau^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,l}$ —особые точки (центры) выделенных множеств.

Зададим далее $R_k[\,x\,]$, $x(t)$, $k = \overline{1,l}$ — произвольные функции, характеризующие расстояние от изображения $x(t) = x(\omega, t)$ до особой точки (центра) $\tau^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,l}$, соответствующего класса, используя выражение: $\rho_k[\,x(t),\, \tau^{(k)}(t)\,] = R_k[\,x(t) - \tau^{(k)}(t)\,]$.

Здесь функция $\rho_k[\,x(t),\, \tau^{(k)}(t)\,]$ играет роль *функции потерь* или *функции штрафов* для изображений k–го класса, $k = \overline{1,l}$. С учетом того, что $x(t) = x(\omega, t)$ — случайный вектор процессов, средний риск (средний штраф) можно представить в виде

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{l} p_k(t) \int\limits_{X^{(k)}(t)} R_k[\,x - \tau^{(k)}(t)\,]\, p_k[\,x, t\,]\, dx\, dt, \tag{15}$$

где с помощью вероятностей введены обозначения для плотностей распределения непрерывных случайных величин (изображений) $x(t)$ при данном t :

$$p_k(t) = P\big\{\, x(\omega, t) \in X^{(k)}(t)\,\big\}, \qquad k = \overline{1,l}, \qquad t \in [\,t_0, t_1\,],$$

$$p_k[\,x, t\,] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P\big\{\, [\,x(\omega, t) \in D_\varepsilon(x)\,] \bigcap X^{(k)}(t)\,\big\}}{P\big[\,x(\omega, t) \in D_\varepsilon(x)\,\big]\, V_\varepsilon(x)};$$

здесь $D_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε с центром в точке x, $V_\varepsilon(x)$ — объем этого шара в предположении, что написанный предел существует.

Пользуясь структурой функций $p_k(t)$ и $p_k[\,x, t\,]$, можно ввести плотность распределения изображений $p[\,x, t\,] = \sum_{k=1}^{l} p_k(t)\, p_k$ $[\,x, t\,]$. Тогда средний риск W (15) перепишется так:

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{X^{(k)}(t)} R_k[\,x - \tau^{(k)}(t)\,]\, p[\,x, t\,]\, dx\, dt. \tag{16}$$

Переход от (15) к (16) возможен в силу сделанного предположения о непересекаемости множеств $X^{(k)}(t)$. При формировании общей функции потерь в виде

$$Q[\,x,\tau,t\,] = \sum_{k=1}^{l} R_k\big[\,x - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, I^{(k)}[\,x,t\,],$$

где $\tau(t) = \big(\tau^{(1)}(t),\ \dots,\ \tau^{(l)}(t)\big)^{*}$ — набор векторов $\tau^{(k)}(t)$, $I^{(k)}[\,x,t\,]$ — индикатор (характеристическая функция) множества $X^{(k)}(t)$, $k=\overline{1,l}$, $t\in[\,t_0,t_1\,]$, *общий средний риск* можно записать следующим образом:

$$W(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{X}\sum_{k=1}^{l} R_k\big[\,x - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, I^{(k)}[\,x,t\,]\,p[\,x,t\,]\,dx\,dt \;=$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} M_x\,Q[\,x,\tau,t\,]\,dt, \tag{17}$$

где $M_x\,Q[\,x,\tau,t\,]$ — среднее по x функции $Q[\,x,\tau,t\,]$. Задача, таким образом, ставится так: требуется с учетом введенных функций потерь и общей функции потерь произвести разбиение множества изображений на классы путем минимизации соответствующего функционала общего среднего риска (17), добиваясь тем самым построения разделяющих функций, с помощью которых решается поставленная задача разбиения пространства признаков на классы. В этом, собственно, и заключается основная решаемая задача в рамках концепции минимизации функционала (17) в задаче о самообучении [99, 113].

В работе [99] *особыми точками* (центрами) множеств названы параметры с экстремальными значениями. Множество разделяющих поверхностей параметризуют, что приводит к вариационной задаче для нахождения экстремальных значений параметров разделяющих поверхностей и отвечающих им центров (особых точек) классов. При варьировании обозначенных параметров получим уравнения, решая которые, найдем экстремальные параметры. В случае, когда плотность $p[\,x,t\,]$ распределения изображений неизвестна, следует осуществлять оценку параметров с использованием тренировочного множества в виде некоторой обучающей выборки [99].

Нижеследующее утверждение помогает определить условия, которым должны удовлетворять экстремальные параметры задачи. Пользуясь стандартными приемами вариационного исчисления, эти условия можно найти из равенства нулю вариации функционала (17). Особенностью здесь является то, что варьированию подлежит не только подынтегральное выражение, но и меняющиеся пределы интегрирования.

Отметим еще заранее, что при вычислении вариации δW функционал W задается только на решениях системы уравнений Эйлера, так как только на интегральных кривых этой системы уравнений может достигаться экстремум. При этом функционал δW превращается в дифференциал этой функции.

Будем считать, что промежуток времени $[\,t_0, t_1\,]$ не фиксирован и точка t_1, где $t_1 > t_0$, может принимать произвольные переменные значения, т.е. величина t_1 варьируема. Пусть $f(x)$ — некоторая гладкая вещественная функция, задающая поверхность $S = \{\, x:\ f(x) = 0 \,\}$, и $\nabla f(x) \neq 0$ в точках, где $f(x) = 0$. Обозначим также поверхность $S' = \{\, x:\ f(x) + \delta f(x) = 0 \,\}$ и множества:

$$S_+ = \big\{\, x:\ f(x) > 0 \,\big\}, \qquad S'_+ = \big\{\, x:\ f(x) + \delta f(x) > 0 \,\big\}.$$

Через $o(z)$ обозначим величину, для которой

$$\lim_{|\,z\,| \to 0} \big(o(z)/|\,z\,| \big) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $R:\ R^q_u \times R^q_x \times R^1_t \to R$ — непрерывная по всем переменным функция, гладкая по переменной u, финитная по переменным x и t; $g:\ R^q_x \times R^1_t \to R^q$ — непрерывная вектор-функция; f — гладкая вещественная функция, задающая множество $S_+(t) = \{\, x \in R^q:\ f(x,t) > 0 \,\}$. Тогда вариация функционала*

$$W = W(t_1, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_+(t)} R\big(g(x,t), x, t\big)\, dx\, dt$$

имеет вид

$$\delta W = \int\limits_{S_+(t_1)} R\big(g(x,t_1),x,t_1\big)\,dx\,\delta t_1 \;+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} \nabla_u\, R\big(g(x,t),x,t\big)\;\cdot\;\delta g(x,t)\,dx\,dt,$$

где $\nabla_u\, R(u,x,t)$ *— градиент функции* R *по переменной* u, *а знак «·» обозначает скалярное произведение.*

Доказательство. Запишем приращение функционала

$$\Delta W = W(t_1+\delta t_1,\, g+\delta g) - W(t_1,g)\;=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1+\delta t_1} R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t)\,dx\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t),x,t)\,dx\,dt\;=$$

$$=\int\limits_{t_1+\delta t_1}\int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t)\,dx\,dt\;+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} (R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t) - R(g(x,t),x,t))\,dx\,dt. \qquad (18)$$

Первый интеграл в правой части формулы (18) представим в силу теоремы о среднем в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t_1}\int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t)\,dx\,dt\;=$$

$$=\int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t)\,dx\,\Bigg|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1}\delta t_1, \qquad (19)$$

где $\theta\in(0,1)$. Так как функция R по условию финитна по x и t, то найдется такой компакт K, что $R(u,x,t)=0$ при $x\notin K$. Тогда

$$\int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t)+\delta g(x,t),x,t)\,dx\,\Bigg|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1}\;=$$

$$= \int\limits_{S_+(t)\cap K} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t)\, dx \bigg|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1}.$$

Учитывая гладкость функции f и равномерную непрерывность функций R и g, можно записать равенство

$$\int\limits_{S_+(t)\cap K} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t)\, dx \bigg|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1} =$$

$$= \int\limits_{S_+(t_1)\cap K} R(g(x,t_1), x, t_1)\, dx + \sigma,$$

где $\sigma \to 0$ при $\delta t_1\, \delta g \to 0$. Поэтому, принимая во внимание формулу (19), получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \int\limits_{S_+(t)} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{S_+(t_1)} R(g(x,t_1), x, t_1)\, dx \cdot \delta t_1 + \sigma \cdot \delta t_1. \tag{20}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию второго слагаемого в правой части формулы (18). Пользуясь формулой Тейлора, имеем

$$\int\limits_{S_+(t)} (R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) - R(g(x,t), x, t))\, dx =$$

$$= \int\limits_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t), x, t), x, t),\ \delta g(x,t))\, dx + o(\delta g).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_+(t)} (R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) - R(g(x,t), x, t))\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t), x, t), x, t),\ \delta g(x,t))\, dx\, dt + o(\delta g). \tag{21}$$

Сопоставив формулы (18), (20) и (21), имеем

$$\Delta W = \int\limits_{S_+(t_1)} R(g(x,t_1),x,t_1)\,dx\cdot\delta t_1 + \sigma\cdot\delta t_1 +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t),x,t),\, \delta g(x,t))\,dx\,dt + o(\delta g).$$

Главная часть этого выражения, линейная по δt_1 и δg, дает требуемую формулу для вариации δW. Теорема доказана.

Сформулируем следствие из этой теоремы для фиксированного промежутка времени $[\,t_0,t_1\,]$ и специального вида подынтегральной функции.

Следствие. *Пусть f — гладкая вещественная функция, задающая множество $S_+(t)=\{\,x\in R^q:\ f(x,t)>0\,\}$; $R:\ R^q\to R^1$ — гладкая функция; $\tau:\ [\,t_0,t_1\,]\to R^q$ — непрерывная вектор-функция; $p:\ R^q_x\times R^1_t\to R^1$ — непрерывная финитная функция. Тогда вариация функционала*

$$W = W(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} R(x-\tau(t))\,p(x,t)\,dx\,dt$$

имеет вид

$$\delta W = -\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{S_+(t)} (\nabla R(x-\tau(t)),\, \delta\tau(t))\,p(x,t)\,dx\,dt.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно в теореме 1 положить $\delta t_1=0$, $g(x,t)=x-\tau(t)$, а в качестве $R(u,x,t)$ взять функцию $R(u)\,p(x,t)$.

В следующей теореме полагаем, что промежуток времени $[\,t_0,t_1\,]$ фиксирован и полностью определен.

Теорема 2. *Пусть $R:\ R^q_x\times R^1_t\to R^1$ — гладкая финитная функция; f — гладкая вещественная функция, задающая поверхность $S(t)=\{\,x\in R^q:\ f(x,t)=0\,\}$; $\nabla_x f(x,t)\neq 0$ при $x\in S(t)$. Положим $S_+(t)=\{\,x\in R^q:\ f(x,t)>0\,\}$. Тогда вариация функци-*

онала

$$W = W(f) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_+(t)} R(x,t)\,dx\,dt$$

имеет вид

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S(t)} \frac{\delta f(x,t)}{\| \nabla_x f(x,t) \|}\, R(x,t)\,ds\,dt.$$

Доказательство. (см. также работы [6, 87, 90, 136]). Положим: $S'_+(t) = \{\, x : \ f(x,t) + \delta f(x,t) > 0 \,\}$. Запишем далее приращение функционала W :

$$\Delta W = W(f + \delta f) - W(f) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S'_+(t)} R(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_+(t)} R(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\int\limits_{S'_+(t)} R(x,t)\,dx - \int\limits_{S_+(t)} R(x,t)\,dx \right) dt.$$

Обозначив через $V(t)$ объем, заключенный между поверхностями $S(t)$ и

$$S'(t) = \{\, x \in R^q : \ f(x,t) + \delta f(x,t) = 0 \,\},$$

получим

$$\Delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{V(t)} R(x,t)\,dx\,dt. \tag{22}$$

Взяв произвольную точку $x \in S(t)$, обозначим через x' такую точку на $S'(t)$, что

$$x' = x + \alpha\, \frac{\nabla_x f(x,t)}{\| \nabla_x f(x,t) \|} = x + \delta x, \tag{23}$$

где α — некоторая малая скалярная величина. Для интеграла по объему в соотношении (22) имеем

$$\int\limits_{V(t)} R(x,t)\,dx = \int\limits_{S(t)} \int\limits_{x}^{x'} R(x,t)\,dz\,\overrightarrow{ds},$$

где $\overrightarrow{ds}$ — ориентированный по антиградиенту $-\nabla_x f(x,t)$ элемент площади на поверхности $S(t)$.

В силу того, что функция $R(x,t)$ равномерно непрерывна, а точка x' близка к точке x, т.е. вариация δx мала, получим равенства

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{V(t)} R(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S(t)} R(x,t) \int\limits_{x}^{x'} dz\,\overrightarrow{ds}\,dt + o(\|\,\delta x\,\|) \ =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S(t)} R(x,t)\,(\delta x,\ \overrightarrow{ds})\,dt + o(\|\,\delta x\,\|). \qquad (24)$$

Формула (23) позволяет вычислить δx. В силу дифференцируемости функций f и δf справедливы соотношения

$$ff(x+\delta x,t) = f(x,t) + (\nabla_x f(x,t),\, \delta x) + o(\|\,\delta x\,\|),$$

$$\delta f(x+\delta x,t) = \delta f(x,t) + (\nabla_x \delta f(x,t),\, \delta x) + o(\|\,\delta x\,\|).$$

Поэтому, принимая во внимание определение множества $S'(t)$, находим

$$0 = f(x',t) + \delta f(x',t) = f(x+\delta x,t) + \delta f(x+\delta x,t) \ =$$

$$= \ f(x,t) + (\nabla_x f(x,t),\, \delta x) + \delta f(x,t) + o(\|\,\delta x\,\|).$$

Так как $f(x,t) = 0$ при $x \in S(t)$, то

$$0 = (\nabla_x f(x,t),\, \delta x) + \delta f(x,t) + o(\|\,\delta x\,\|).$$

Отсюда с помощью формулы (23) найдем

$$\delta x = -\,\frac{\delta f(x,t)\cdot \nabla_x f(x,t)}{\|\,\nabla_x f(x,t)\,\|^2} + \frac{\nabla_x f(x,t)}{\|\,\nabla_x f(x,t)\,\|^2}\, o(\|\,\delta x\,\|). \qquad (25)$$

Так как функция f гладкая и $\nabla_x f(x,t) \neq 0$ при $x \in S(t)$, то величина $\|\nabla_x f(x,t)\|^{-1}$ ограничена некоторым числом C на множестве $\{(x,t):\ t \in [t_0, t_1],\ x \in S(t) \bigcap K\}$, где K — компакт, такой что $R(x,t) = 0$ при $x \notin K$. Следовательно,

$$\|\delta x\| \leq C\,|\delta f(x,t)| + o(\|\delta x\|) \leq C \max_{\substack{x\in K\\ t\in[t_0,t_1]}} |\delta f(x,t)| + o(\|\delta x\|).$$

С учетом, что δx стремится к нулю вместе с величиной δf, при $\delta f \to 0$ получим

$$o(\|\delta x\|) = o\Bigg(\max_{\substack{x\in K\\ t\in[t_0,t_1]}} |\delta f(x,t)|\Bigg).$$

Таким образом, из формулы (25) следует

$$\delta x = -\frac{\delta f(x,t)\cdot \nabla_x f(x,t)}{\|\nabla_x f(x,t)\|^2} + o\Bigg(\max_{\substack{x\in K\\ t\in[t_0,t_1]}} |\delta f(x,t)|\Bigg).$$

Подставив последние два выражения в соотношение (24), получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{V(t)} R(x,t)\,dx\,dt\ =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{S(t)} \frac{\delta f(x,t)}{\|\nabla_x f(x,t)\|}\,R(x,t)\,ds\,dt + o\Bigg(\max_{\substack{x\in K\\ t\in[t_0,t_1]}} |\delta f(x,t)|\Bigg), \qquad (26)$$

где $ds = -\big(\overrightarrow{ds},\ \nabla_x f(x,t)\big)/\|\nabla_x f(x,t)\|$.

Сопоставляя соотношения (22) и (26), оставляя главную линейную по δf часть приращения ΔW, получим требуемую формулу для вариации функционала W. Теорема доказана.

Возвращаясь к функционалу общего среднего риска (17), представим вариацию δW в виде суммы двух вариаций: $\delta W = \delta_1 W + \delta_2 W$, где вариация $\delta_1 W$ связана с изменением особой точки (центров, параметров) $\tau^{(1)}(t)$, ..., $\tau^{(l)}(t)$, а вариация $\delta_2 W$ связана с изменением множеств $X^{(1)}(t)$, ..., $X^{(l)}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Просчитаем эти вариации. Вариация $\delta_1 W$, пользуясь выражением (16) и следствием, равна

$$\delta_1 W = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{X^{(k)}(t)} \big(\nabla R_k[\,x - \tau^{(k)}(t)\,],\, \delta\tau^{(k)}(t)\big)\, p[\,x, t\,]\, dx\, dt. \quad (27)$$

Чтобы вычислить вариацию $\delta_2 W$ обратимся к теореме 2. Для записи функционала W в требуемой форме введем в рассмотрение дискриминантные (разделяющие) функции $f^{(k)}$:

$$f^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \inf_{y \notin X^{(k)}(t)} \;\|\, x - y \,\|, & \text{если} \quad x \in X^{(k)}(t), \\ -\inf_{y \in X^{(k)}(t)} \;\|\, x - y \,\|, & \text{если} \quad x \notin X^{(k)}(t), \end{cases} \quad (28)$$

где $t \in [\,t_0, t_1\,]$; здесь $f^{(k)}(x,t)$ — разность расстояний от изображения x до множества $X \setminus X^{(k)}(t)$ и от изображения x до множества $X^{(k)}(t)$.

Из сотношений (28) имеем: $f^{(k)}(x,t) \geq 0$, если $x \in X^{(k)}(t)$, и $f^{(k)}(x,t) < 0$, если $x \in X \setminus X^{(k)}(t)$, а знак равенства достигается лишь на границе $S_k(t)$ множества $X^{(k)}(t)$. Тогда выражение для W можно уточнить (ср. с выражением (16)):

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{S_+^{(k)}(t)} R_k\big[\,x - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, p[\,x, t\,]\, dx\, dt,$$

где множество $S_+^{(k)}(t) = \{\, x : \;\; f^{(k)}(x,t) > 0 \,\}$; считается также, что граница $S_k(t) = \{\, x : \;\; f^{(k)}(x,t) = 0 \,\}$ множества $X^{(k)}(t)$ имеет нулевую меру, т.е. интегралы по множествам $S_+^{(k)}(t)$ и $S_\oplus^{(k)}(t) = \{\, x : f^{(k)}(x,t) \geq 0 \,\}$ совпадают.

По теореме 2 требуется, чтобы $\nabla_x f^{(k)}(x,t) \neq 0$, $x \in S_k(t)$. По формулам (28) получим, что $\nabla_x f^{(k)}(x,t)\,\big|_{x \in S_k(t)} \;\; = -\,n_k$, где n_k — единичный вектор внешней нормали к границе $S_k(t)$ множества $X^{(k)}(t)$ в предположении, что $\exists\, n_k$ для всех точек $S_k(t)$. Проварьируем разделяющие функции $f^{(k)}(x,t)$; их гладкие вариации обозначим через $\delta f^{(k)}(x,t)$. Тогда по теореме 2 найдем

$$\delta_2 W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{S_k(t)} \delta f^{(k)}(x,t)\, R_k\big[\, x - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, p[\, x, t\,]\, ds\, dt, \qquad (29.1)$$

ввиду того, что $\|\, \nabla_x f^{(k)}(x,t)\, \|_{x\in S_k(t)} = 1$, $k = \overline{1,l}$. Формула (29.1) дает соответствующую запись для вариации $\delta_2 W$, связанной с изменением множеств $X^{(k)}(t)$.

Если точка x принадлежит границе двух множеств $X^{(q)}(t)$ и $X^{(r)}(t)$, т.е. $x \in S_q(t) \bigcap S_r(t)$, то имеет место равенство

$$\delta f^{(q)}(x,t) = -\, \delta f^{(r)}(x,t). \qquad (29.2)$$

Для решения экстремальной задачи необходимо потребовать, чтобы $\delta_1 W = 0$, $\delta_2 W = 0$. Из соотношения (27) следует необходимое условие

$$\int\limits_{S_+^{(k)}(t)} \nabla R_k\big[\, x - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, p[\, x, t\,]\, dx = 0. \qquad (30)$$

Из равенства $\delta_2 W = 0$ с учетом соотношений (29.1) и (29.2) получим, что $\forall\, x$, принадлежащего границе множеств $X^{(q)}(t)$ и $X^{(r)}(t)$, когда $p[\, x, t\,] \neq 0$, должно быть выполнено также необходимое условие

$$R_q\big[\, x - \tau^{(q)}(t)\,\big] = R_r\big[\, x - \tau^{(r)}(t)\,\big]. \qquad (31)$$

Таким образом, экстремальные множества $X^{(k)}(t)$ и их особые точки (центры, параметры) $\tau^{(k)}(t)$ должны удовлетворять условиям (30), (31). При том, что $x(t) = x(\omega, t)$ — случайная функция (случайный процесс), требование (30) можно записать так:

$$M\big\{\, \nabla R_k\big[\, x(\omega,t) - \tau^{(k)}(t)\,\big]\, I^{(k)}[\, x(\omega,t), t\,]\,\big\} = 0,\ \ k = \overline{1,l},$$

где $M\{\cdot\}$ — математическое ожидание (операция усреднения). Эти условия дают уравнения для нахождения особых точек (центров, параметров) $\tau^{(k)}(t)$ классов множества изображений, зная которые можно затем однозначно из соотношений (31) определить множества $X^{(k)}(t)$, $t \in [\, t_0, t_1\,]$.

Как итог отметим следующее. К задаче самообучения, или к задаче обучения «без учителя», имеются различные подходы, объединенные общей идеей экстремизации некоторого функционала среднего риска. Здесь эта концепция была дополнена важной переменной времени, призванной придать изучаемой задаче ИИ динамический характер. В терминах классического вариационного исчисления определены необходимые условия, при которых рассматриваемый функционал общего среднего риска достигает экстремального значения в процессе самообучения на всем промежутке времени.

Ниже изучается новый класс вариационных динамических задач применительно к задачам адаптивного оптимального управления в случае, когда правая концевая трансграница считается изначально не заданной. Эти задачи могут рассматриваться как одни из важнейших задач в проблеме ИИ.

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите функционал среднего риска. Что означают его компоненты?
2. Для чего нужны разделяющие функции?
3. Какой вид имеет вариация функционала среднего риска?

Глава 3

Внутренняя вариационная задача адаптивного оптимального управления с подвижной правой границей

Аппаратные средства, которые используются в этом параграфе, подразумевают широкое применение как методов классического вариационного исчисления [9, 26, 120, 129], так и приемов адаптивного оптимального управления [3, 10, 11, 21, 22, 34, 35, 45, 55, 64, 71, 86-89, 92, 100, 133, 134], основанных на введении обратных связей при решении задач параметрической идентификации.

3.1 Вводные замечания и пояснения

Под классическим вариационным исчислением будем понимать, как это обычно принято, использование вариаций в виде малых допустимых смещений функционалов и функций при выводе необходимых и достаточных условий экстремума. Рассмотренные ниже условные вариационные задачи адаптивного оптимального управления в рамках классического вариационного исчисления можно считать новыми и в достаточной степени актуальными.

К теории оптимального управления отнесем, прежде всего, ту часть вариационного исчисления, которая связана с принципом максимума и конструкции которого используют игольчатые вариации, позволяющие преодолевать затруднения, вызванные замкнутостью множества допустимых управлений. Помимо этого, добавим еще и метод динамического программирования в теории оптимального управления, приводящий к уравнениям Гамильтона-Якоби-Беллмана, и различные его модификации.

Задачи с подвижными границами составляют важный класс условных вариационных задач. Подвижные границы — суть концы (начальные и конечные значения) траекторий динамической системы в ситуациях, когда:

1) переменные состояния $x(t_0)$, $x(t_1)$ в фиксированные моменты времени t_0 и t_1 не заданы;

2) переменные состояния, напротив, в моменты t_0, t_1 заданы, но сами значения времени t_0 и (или) t_1 не известны;

3) не определены, вернее, не заданы в совокупности величины $x(t_0), t_0$ и (или) $x(t_1), t_1$.

Ниже анализируется более общий, третий тип задач в предположении, что начальные значения $(x(t_0), t_0)$ заданы, но не известны заранее значения конечной трансграничной точки $(x(t_1), t_1)$. Говоря о *трансграницах*, будем иметь в виду те подвижные границы, которые приводят к появлению *трансверсальных условий*, обуславливающих определенные взаимосвязи между угловыми коэффициентами параметров движения в самой граничной точке.

3.2 Вариационная задача адаптивного оптимального управления

Зададимся функционалом вида

$$J = V[\,x(t_1), t_1\,] + \int\limits_{t_0}^{t_1} F[\,x(t),\, \dot{x}(t),\, \tau(t), t\,]\, dt \to \mathrm{extr}, \tag{32}$$

с известными положительно определенными, непрерывно дифференцируемыми по своим переменным скалярными функциями $V[\,x(t), t\,]$, $F[\,x(t),\, \dot{x}(t),\, \tau(t), t\,]$, для которого требуется найти экстремальное значение.

Векторные величины $x(t) \in R^n$, $\tau(t) \in R^m$, имеют смысл неизвестных вектор-функций времени состояния и параметров управляемой адаптивной динамической системы, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u, \tau, t), \qquad x, u \in R^n, \quad \tau \in R^m. \tag{33}$$

Здесь $u(t) \in U \subset R^n$ — вектор терминального адаптивного управления, который определен на множестве допустимых управлений U. Считается, что U — это множество всех ограниченных непрерывных функций $u(t)$, $t \in [\, t_0, t_1 \,]$. Вектор $\tau(t) \in R^m$ — неизвестная, ненаблюдаемая (неизмеряемая) вектор-функция дрейфующих во времени параметров системы (33); $\tau(t)$ меняется по t непрерывно дифференцируемым образом. Вектор-функция $f(\cdot) \in R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

Полагаем, что правый конец t_1 промежутка времени интегрирования $[\, t_0, t_1 \,]$ не задан; не указано также значение $x(t_1)$, а фиксированы лишь значения $x(t_0), t_0$. Иначе говоря, полагаем, что точка $(x(t_1), t_1)$ перемещается в пространстве.

Пользуясь уравнением (33), имеем тем самым векторную неголономную связь:

$$\psi(x, \dot{x}, u, \tau, t) = f(x, u, \tau, t) - \dot{x} = 0. \tag{34}$$

Кроме того, полагаем, что вектор-функция параметров $\tau(t)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям связей (уравнениям настройки параметров $\bar{\tau}(t)$), формирующих оптимальное управление $u_0(t) = u_0[\, x(t), \bar{\tau}(t), t \,])$:

$$\varphi[\, \tau(t),\ \dot{\tau}(t), t \,] = \dot{\bar{\tau}}(t) - \dot{\tau}(t) + \alpha\, [\, \bar{\tau}(t) - \tau(t) \,] = 0, \tag{35}$$

где $\bar{\tau}(t)$, $\tau(t) \in R^m$, $\alpha > 0$ — заданное положительное число; $\bar{\tau}(t)$ — вектор-функция оценок неизвестных параметров $\tau(t)$. Очевидно, уравнение адаптора (35) с решением

$$\bar{\tau}(t) = \tau(t) + [\, \bar{\tau}(t_0) - \tau(t_0) \,]\, e^{-\alpha\, (t - t_0)} \tag{36}$$

приводит к сходимости оценок $\bar{\tau}(t)$ к $\tau(t)$ в зависимости от требуемой точности оценивания $\delta > 0$:

$$\overline{\lim_{t \to t_1}}\ \|\, \bar{\tau}(t) - \tau(t) \,\| < \delta, \tag{37}$$

и времени окончания процесса оптимизации и адаптации t_1; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Очевидно также, что дифференциальная связь (35) может рассматриваться как голономная (проинтегрированная) связь (36).

Требуется найти тройку неизвестных вектор-функций $(x(t),\, u(t),\ \tau(t))$ со значениями в R^n и R^m соответственно, $t \in [\,t_0, t_1\,]$, удовлетворяющую начальным условиям $(x(t_0),\, \tau(t_0), t_0)$ и обеспечивающую выполнение условий, а именно: $J \to \mathrm{extr}$ (32) наряду с обеспечением требований $\psi(x, \dot{x}, u, \tau, t) = 0$ (34), где $\psi \in R^n$, и $\varphi(\tau, \dot{\tau}, t) = 0$ (35), где $\varphi \in R^m$.

В классическом вариационном исчислении задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум с помощью введения множителей Лагранжа. Условия (33), (34), (35) порождают вспомогательный функционал качества

$$J_* = V[\,x(t_1), t_1\,] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\, F[x,\, f(x, u, \tau, t),\, \tau(t), t\,] +$$

$$+\, \mu^*(t)\, \psi(x, \dot{x}, u, \tau, t) + \lambda^*(t)\, \varphi(\tau, \dot{\tau}, t)\,\}\, dt \to \mathrm{extr}, \qquad (38)$$

где звездочка сверху означает операцию транспонирования, а $\mu(t)$, $\lambda(t)$ — неопределенные множители Лагранжа, $\mu(t) \in R^n$, $\lambda(t) \in R^m$. Важно отметить здесь, что свободные (или подвижные) величины $(x(t_1), t_1)$ наряду с множителями Лагранжа $\mu(t)$, $\lambda(t)$ могут использоваться как еще один класс величин, оптимизирующих выбираемую систему адаптивного управления.

Вводя в рассмотрение вспомогательный функционал J_* (38), отмечаем, что в процессе вычисления вариации δJ_* функционал J_* задается только на решениях системы уравнений Эйлера, поскольку лишь на интегральных кривых этой системы уравнений может достигаться экстремум. При этом функционал δJ_* превращается в функцию точки $(x(t_1), t_1)$ и вариация функционала превращается в дифференциал этой функции.

Заметим, что $\delta x\,\big|_{t=t_1}$ не равно $\delta x(t_1)$, так как $\delta x\,\big|_{t=t_1}$ — приращение координаты x в точке t_1 при переходе от экстремали, проходящей через точки $(x(t_0), t_0)$ и $(x(t_1), t_1)$, к экстремали, проходящей через точки $(x(t_0), t_0)$ и $(x(t_1) + \delta x(t_1),\ t_1 + \delta t_1)$; здесь $\delta x(t_1)$ — это приращение $x(t_1)$ при перемещении граничной точки в положение $(x(t_1) + \delta x(t_1),\ t_1 + \delta t_1)$. Из сказанного следует, что с точностью до малых высокого порядка

$$\delta x\,\Big|_{t=t_1} \; = \; \delta x(t_1) - \dot{x}(t_1)\, \delta t_1, \qquad (39)$$

а $\delta x(t_1) = \delta x\,\big|_{t=t_1} + \dot{x}(t_1)\,\delta t_1$ — это полное приращение вектора $x(t_1)$ за время δt_1.

3.3 Первое основное утверждение

Интегрирование по частям в функционале качества J_* (38) приводит к выражению

$$J_* = V[\,x(t_1), t_1\,] - \mu^*(t)\,x(t)\,\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x, u, \tau, t)\,dt,$$

$$\begin{aligned} G(x,u,\tau,t) \equiv G[\,x,u,\tau,t,\mu(t),\ \dot{\mu}(t),\ \lambda(t)\,] \ = \quad & \quad (40) \\ = \ F(x,u,\tau,t) + \mu^*(t)\,f(x,u,\tau,t) + \dot{\mu}^*(t)\,x(t) + \lambda^*(t)\,\varphi(\tau,\dot{\tau},t). & \end{aligned}$$

Вычислим далее вариацию функционала J_* (40) на экстремальных движениях (решениях, траекториях) с подвижной трансграницей $(x(t_1), t_1)$, где $\delta x(t_0) = 0$, с учетом возникающих вариаций $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta\tau(t)$, $\delta x(t_1)$, δt_1 с точностью до величин второго порядка малости. Напомним при этом, что векторные множители $\mu(t)$, $\lambda(t)$ в задаче Лагранжа не варьируются, а соответствующим образом выбираются.

Теорема 3. *В предположении непрерывной дифференцируемости по всем своим переменным функций V, G, а также справедливости выполнения соотношения* (39) *для $\delta x\,\big|_{t=t_1}$, вариация функционала J_** (40) *задается выражением*

$$\begin{aligned} \delta J_* = dJ_* = \left(\frac{\partial V[\,x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)} - \mu^*(t_1) \right) \delta x(t_1) \ + & \\ + \left(\frac{\partial V[\,x(t_1), t_1\,]}{\partial t_1} + G(x,u,\tau,t)\Bigg|_{t=t_1} + \mu^*(t_1)\,\dot{x}(t_1) \right) \delta t_1 \ + & \quad (41) \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau}\,\delta\tau \right] dt, & \end{aligned}$$

полученным с точностью до малых второго порядка.

Доказательство. Вновь отметим, что поскольку функционал J_* (40) на экстремальных движениях при перемещении граничной точки из положения $(x(t_1), t_1)$ в положение $(x(t_1) + \delta x(t_1),\ t_1 + \delta t_1)$ превратился в функцию $x(t_1)$ и t_1, то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции. При этом линейная часть приращения ΔJ_* записывается так:

$$\Delta J_* = \int\limits_{t_0}^{t_1+\delta t_1} G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t)\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x,u,\tau,t)\,dt\ =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t_1} G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t)\,dt + \tag{42}$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \big[\,G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t) - G(x,u,\tau,t)\,\big]\,dt.$$

В правой части выражения (42) первый интеграл в силу теоремы о среднем дает запись

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t_1} G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t)\,dt = G\,\Big|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1} \cdot \delta t_1, \quad \theta \in (0;1).$$

По условию задачи $G(x,u,\tau,t)$ — непрерывная функция, следовательно,

$$G\,\Big|_{t=t_1+\theta\,\delta t_1} = G(x,u,\tau,t)\,\Big|_{t=t_1} + \sigma_1,$$

где $\sigma_1 \to 0$ при $\delta t_1 \to 0$, $\delta x(t_1) \to 0$. Поэтому

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t_1} G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t)\,dt = G(x,u,\tau,t)\,\Big|_{t=t_1}\cdot\delta t_1 + \sigma_1\,\delta t_1. \tag{43}$$

Затем возьмем в правой части выражения (42) второй интеграл и разложим подынтегральную функцию, пользуясь формулой Тейлора

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \big[\,G(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \tau+\delta\tau,\ t) - G(x,u,\tau,t)\,\big]\,dt\ = \tag{44}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau}\,\delta \tau \right] dt + \sigma_2,$$

где σ_2 — сколь угодно малая более высокого порядка, чем $\delta x, \delta u$ или $\delta\tau$.

Принимая во внимание соотношения (43) и (44), напишем выражение для δJ_* с точностью до членов порядка выше первого относительно $\delta x(t_1)$, δt_1, $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ и $\delta\tau(t)$:

$$\delta J_* = dJ_* = \frac{\partial\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)}\,\delta x(t_1) + \frac{\partial\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{\partial t_1}\,\delta t_1\, -$$

$$-\, \mu^*(t_1)\,\delta x\,\Big|_{t=t_1} + G(x,u,\tau,t)\,\Big|_{t=t_1} \cdot \delta t_1\, +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau}\,\delta \tau \right] dt.$$

Вновь воспользуемся зависимостью (39) для $\delta\,\Big|_{t=t_1}$. В итоге получим утверждение теоремы в виде выражения (41).

3.4 Условие трансверсальности

Выберем векторный множитель $\mu(t)$ так, чтобы функциональные коэффициенты при $\delta x(t_1)$, $\delta x(t)$ в соотношении (41) обратились в нуль. Получим отсюда систему n уравнений Эйлера по x с граничным условием на правом конце:

$$\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial x} = 0, \qquad \mu(t_1) = \left(\frac{\partial\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)} \right)^*, \tag{45}$$

либо с учетом обозначения (40) получим в точности систему уравнений

$$\dot\mu(t) = -\left(\frac{\partial\, F(x,u,\tau,t)}{\partial\, x(t)} + \mu^*(t)\,\frac{\partial\, f(x,u,\tau,t)}{\partial\, x(t)} \right)^* \tag{46}$$

с граничным условием $\mu(t_1)$ (45).

Таким образом, выражение (41) при наличии требований (45) переписывается в виде

$$\delta J_* = dJ_* = \left(\frac{\partial V[\, x(t_1), t_1 \,]}{\partial t_1} + G(x,u,\tau,t) \,\big|_{t=t_1} + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) \right) \delta t_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau}\, \delta\tau \right] dt. \qquad (47)$$

Положим далее в равенстве (47) выполненным условие

$$\frac{\partial V[\, x(t_1), t_1 \,]}{\partial t_1} + G[\, x(t_1),\, u(t_1),\, \tau(t_1),\, t_1 \,] + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) = 0,$$

которое может быть с помощью граничного условия (45) представлено скалярным уравнением

$$\frac{\partial V[\, x(t_1), t_1 \,]}{\partial t_1} + \frac{\partial V[\, x(t_1), t_1 \,]}{\partial\, x(t_1)}\, \dot{x}(t_1) + G[\, x(t_1),\, u(t_1),\, \tau(t_1),\, t_1 \,] = 0,$$

либо после сворачивания первых двух слагаемых

$$\frac{d\, V[\, x(t_1), t_1 \,]}{dt_1} + G[\, x(t_1),\, u(t_1),\, \tau(t_1),\, t_1 \,] = 0,$$

либо, в итоге, так:

$$\frac{dJ_*}{dt_1} = 0. \qquad (48)$$

Обратим внимание, что требование трансверсальности (48) для переменного граничного значения времени t_1 совпадает с хорошо известным условием оптимальности в задачах локального программирования [34, 64, 71, 91], где интегральный функционал качества имеет переменный верхний предел t (понятно, что в нашем случае $t_1 = t$ и величина t_1 принимает значение скользящего, текущего момента времени). Следовательно, условие локальной оптимальности превращается в принцип минимума производной функционала (функции) качества J_* на семействе оптимальных управлений u_0 :

$$\left. \frac{dJ_*}{dt} \right|_{u=u_0} = \min_{u \in U} \frac{dJ_*}{dt} = 0.$$

Отметим также, что выбор множителей Лагранжа $\mu(t)$ ограничен выбором уравнений Эйлера (45) и связи (34). Поэтому на скалярное уравнение (48) можно смотреть как на вполне определенное условие выбора всех подвижных величин $(x(t_1), t_1)$ в функционале J_*, или только значений $x(t_1)$, которым они должны удовлетворять в подвижный момент времени t_1, или только значений t_1.

3.5 Второе основное утверждение

Полагая условие локальной оптимальности (48) во временной точке t_1 выполненным, получим тем самым, исходя из выражения (47), выполненным соотношение

$$\delta J_* = dJ_* = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau}\,\delta \tau \right] dt. \tag{49}$$

В интеграле (49) для второго слагаемого, с учетом обозначения (40), выберем набор множителей Лагранжа $\lambda(t) \in R^m$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\, G(x,u,\tau,t)}{\partial \tau} = 0, \tag{50}$$

приводящее к системе m уравнений Эйлера по τ :

$$\frac{\partial\, F(x,u,\tau,t)}{\partial\, \tau(t)} + \mu^*(t)\,\frac{\partial\, f(x,u,\tau,t)}{\partial\, \tau(t)} + \lambda^*(t)\,\frac{\partial\, \varphi(\tau,\dot{\tau},t)}{\partial\, \tau(t)} = 0. \tag{51}$$

Система (51) может быть разрешена как система алгебраических уравнений относительно вектора $\lambda(t)$ при том, что квадратная матрица $\partial\, \varphi(\tau,\dot{\tau},t)/\partial \tau \in R^m \times R^m$ невырожденная:

$$\lambda(t) = -\left[\left(\frac{\partial\, \varphi(\tau,\dot{\tau},t)}{\partial \tau} \right)^* \right]^{-1} \left(\frac{\partial\, F(x,u,\tau,t)}{\partial \tau} + \mu^*\, \frac{\partial\, f(x,u,\tau,t)}{\partial \tau} \right)^*.$$

Таким образом, принимая во внимание соотношения (52)–(59), интеграл (49) запишется в следующем виде:

$$\delta J_* = dJ_* = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial G(x,u,\tau,t)}{\partial u}\,\delta u\,dt. \qquad (53)$$

Для обеспечения необходимых условий стационарности критерия качества J_* (т.е. $\delta J = \delta J_* = dJ_* = 0$), очевидно, надо потребовать, чтобы в интеграле (53):

$$\frac{\partial G(x,u,\tau,t)}{\partial u} = 0. \qquad (54)$$

Легко видеть, что система n уравнений Эйлера по u (54) может быть переписана с учетом обозначения (40) в виде системы уравнений

$$\frac{\partial F(x,u,\tau,t)}{\partial u(t)} + \mu^*(t)\,\frac{\partial f(x,u,\tau,t)}{\partial u(t)} = 0. \qquad (55)$$

Совокупность $2n + m$ уравнений (45), (50), (54) вместе с уравнениями связей (34), (35) представляет собой замкнутую систему уравнений для нахождения вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, $\tau(t)$, $\mu(t)$, $\lambda(t)$, обеспечивающих решение исходной условной вариационной задачи (задачи оптимального адаптивного управления) с подвижной границей на правом конце.

Результатом проведенного вариационного анализа по синтезу условной управляемой динамической системы, отслеживающей m независимых дифференциальных (голономных) связей, может служить следующая теорема.

Теорема 4. *Тройка вектор-функций* $(x(t),\ u(t),\ \tau(t))$, *реализующих экстремум* (*минимум*) *функционала* (32) *при наличии условий* (34) *и* (35), *удовлетворяет при соответствующем выборе множителей* $\mu_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, *и* $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, *уравнениям Эйлера, составленным для функционала* J_* (38). *Уравнения Эйлера для определения функций* $x(t)$, $u(t)$, $\tau(t)$, $\mu(t)$ *и* $\lambda(t)$ *имеют вид уравнений* (45), (50), (54) *с уравнениями связей* (34), (35). *Решение задачи* (34), (35), (46) *порядка* $2n+m$, *где управление* $u(t) \in U \subset R^n$ *определяется уравнением* (55), *осуществляется при наличии* n *на-*

чальных условий $x_0 = x(t_0)$ *на левом конце и* n *краевых условий* (45) *на правом конце.*

Напомним, что для достижения локального минимума критерия качества, когда $J \to \min_{u \in U}$, необходимо выполнение условия $\delta^2 J = \delta^2 J_* \geq 0$, $\forall\, \delta u(t) \neq 0$.

И еще одно замечание. Традиционная запись

$$\frac{\partial\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{\partial t_1} + \frac{\partial\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)}\, \dot{x}(t_1) = \frac{d\, V[\, x(t_1), t_1\,]}{d t_1} \tag{56}$$

означает взятие полной производной от функции $V[\, x(t_1), t_1\,]$ по переменной величине t_1 с учетом разложения (39):

$$\delta x \,\Big|_{t=t_1} + \dot{x}(t_1)\, dt_1 = d\, x(t_1),$$

где обозначено: $d\, x(t_1) \equiv \delta x(t_1)$, $dt_1 \equiv \delta t_1$. Очевидна связь между двумя этими последними соотношениями: при задании $V[\, x(t_1), t_1\,] = x(t_1)$ и домножении (56) на dt_1 получим равенство (39) в новых обозначениях.

3.6 Модельный пример

В качестве простого примера рассмотрим одноосное (по оси x) прямолинейное движение материальной точки с медленно меняющейся во времени неизвестной массой $m(t)$ под действием управляющей силы (управления) $u(t)$, приложенной к точке. Будем считать, что реактивной $\dot{m}(t)$ и гиперреактивной $\ddot{m}(t)$ составляющими массы $m(t)$ можно пренебречь.

Предполагается, что это движение осуществляется вдоль опоры, когда сила тяжести уравновешена силой реакции опоры в отсутствии силы трения, т.е. при наличии абсолютно гладкой поверхности (прямолинейной траектории) движения.

В этом случае движение точки будет описываться уравнением:

$$m(t)\, \ddot{q} = u(t), \tag{57}$$

где $q = q(t)$ — обобщенная (лагранжева) координата, соответствующая отклонению точки от центра системы координат O. Движение точки (57) определяется величиной кинетической энергии

$T = m\dot{q}^2/2:$
$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\,Q(t) = F(t). \tag{58}$$

Соотношение (58), отвечающее второму закону Ньютона, приводит к уравнению (57) для $Q(t) = m\dot{q}$ — количество движения, $F(t) = u(t)$ — действующая активная сила. Считаем также, что измерению подлежат $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, но не $\ddot{q}(t)$.

Требуется оптимальным образом в данных условиях синтезировать управляемое движение материальной точки с тем, чтобы обеспечить минимизацию энергетического функционала качества:

$$J = x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} \left[\, x^2(t) + \dot{x}^2(t)\,\right] dt \;= \tag{59}$$

$$=\; x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} \left[\, x^2(t) + f^2(x,u,\tau)\,\right] dt \to \min_{u\in U},$$

где введены обозначения для векторов $x, f \in R^2$, скалярного управления $u(t) \in R$ и скалярного неизвестного параметра $\tau(t) \in R$ с обозначением $\tau \equiv 1/m,\ V(x,t) = x^2(t):$

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \tau u \end{pmatrix}, \quad x^2 = q^2 + \dot{q}^2, \quad f^2 = \dot{q}^2 + \tau^2 u^2$$

относительно компонентов уравнения движения, переписанного в нормальном виде так:

$$\dot{x} = f(x,u,\tau), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} x_2 \\ \tau u \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Здесь $u(t) \in U$ — управляющая сила (функция управления), приложенная к точке и выбираемая из множества допустимых управлений $U = C^1[\,0, t_1\,]$, где $C^1[\,0, t_1\,]$ — множество непрерывно дифференцируемых по t функций, определенных на промежутке времени $[\,0, t_1\,]$. Векторная величина $x_0 = x(0)$ предполагается заданной. Величины $x(t_1)$ и t_1 будут задаваться из некоторых дополнительных условий.

Отметим, что функционал качества J (59) в терминах x, u и τ может быть записан также в виде

$$J = x^2(t_1) + \int_0^{t_1} [\, x^* A x + \tau^2 u^2 \,]\, dt, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

где A — положительно определенная $\forall\, t \in [\,0, t_1\,]$ матрица, x^* — вектор, транспонированный по отношению к вектору x. Видим, что подынтегральная функция $G(x, u, \tau) > 0$ представляет собой сумму положительно определенной квадратичной формы по x и положительной функции $\tau^2 u^2$.

Приступим к решению поставленной условной вариационной задачи со свободным правым концом путем сведения ее к безусловной задаче. Согласно полученным результатам имеем дифференциальную неголономную связь по x и голономную связь по τ соответственно:

$$\begin{gathered} \psi(x, \dot{x}, u, \tau) = f(x, u, \tau) - \dot{x} = 0, \\ \varphi(\tau) = \dot{\bar{\tau}} + \alpha\,(\bar{\tau} - \tau) = 0, \quad \alpha > 0, \quad \dot{\tau} \sim 0. \end{gathered} \tag{62}$$

Второе соотношение (62) можно представить в виде линейного неоднородного дифференциального уравнения по $\bar{\tau}(t)$:

$$\dot{\bar{\tau}} + \alpha\, \bar{\tau}(t) = \alpha\, \tau(t), \qquad \alpha > 0$$

с известным асимптотическим решением [45]: если монотонно $\tau(t) \to \beta$ $(t \to \infty)$, то тогда монотонно и $\bar{\tau}(t) \to \beta$ $(t \to \infty)$, а значит $\|\, \bar{\tau}(t) - \tau(t) \,\| < \delta$ при $t \to t_1$ (см. [45]). Этот результат непосредственно вытекает из решения данного уравнения: $\bar{\tau}(t) = e^{-\alpha t} \left(C + \int_0^t \alpha \tau(s)\, e^{\alpha s}\, ds \right)$, где C — произвольная постоянная, откуда

$$\bar{\tau}(t) = e^{-\alpha t}\, C + \int_0^t \alpha \tau(s)\, e^{\alpha\,(s-t)}\, ds \ =$$

$$= \ C\, e^{-\alpha t} + \int_0^t \tau(s)\, d\, e^{\alpha\,(s-t)} = C\, e^{-\alpha t} + \tau(s)\, e^{\alpha\,(s-t)}\, \Big|_0^t \, -$$

$$
- \int\limits_0^t e^{\alpha\,(s-t)}\, d\,\tau(s) \xrightarrow[t\to\infty]{} \tau(t)
$$

в предположении, что $d\,\tau(t) = \dot\tau(t)\,dt \sim 0$.

Вспомогательный функционал с учетом соотношений (61) и (62) тогда запишется так:

$$
J_* = x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} \bigl[\, x^2(t) + f^2(x,u,\tau) +
$$

$$
+ \mu^*(t)\,\psi(x,\dot x,u,\tau) + \lambda(t)\,\varphi(\tau)\,\bigr]\,dt, \tag{63}
$$

где $\mu(t) = (\mu_1(t),\, \mu_2(t))^* \in R^2$, $\lambda(t) \in R$ — множители Лагранжа, либо, проводя интегрирование по частям в функционале (63), найдем

$$
J_* = x^2(t_1) - \mu^*(t)\,x(t)\,\bigr|_0^{t_1} + \int\limits_0^{t_1} \bigl[\, x^2(t) + f^2(x,u,\tau) +
$$

$$
+ \mu^*(t)\,f(x,u,\tau) + \dot\mu^*(t)\,x(t) + \lambda(t)\,\varphi(\tau)\,\bigr]\,dt. \tag{64}
$$

Составим далее по разработанной схеме вариацию функционала (64) согласно выражению (41):

$$
\delta J_* = [\,2x(t_1) - \mu(t_1)\,]^*\,\delta x(t_1) +
$$

$$
+ [\,x^2(t_1) + f^2(t_1) + \mu^*(t_1)\,f(t_1) + \dot\mu^*(t_1)\,x(t_1) + \mu^*(t_1)\,\dot x(t_1)\,]\,\delta t_1 +
$$

$$
+ \int\limits_0^{t_1} \bigl[\,(2x_1 + \dot\mu_1)\,\delta x_1 + (4x_2 + \mu_1 + \dot\mu_2)\,\delta x_2 + (2\tau^2 u + \mu_2\tau)\,\delta u +
$$

$$
+ (2\tau u^2 + \mu_2 u - \alpha\lambda)\,\delta\tau\,\bigr]\,dt. \tag{65}
$$

В соотношении (65) выберем множители $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ так, чтобы выполнялись уравнения Эйлера (45) по x_1 и x_2 с граничными условиями на правом конце:

$$
\dot\mu_1 = -\,2x_1, \qquad \mu_1(t_1) = 2x_1(t_1),
$$

$$
\dot{mu}_2 = -\,\mu_1 - 4x_2, \qquad \mu_2(t_1) = 2x_2(t_1).
$$

Следовательно, при наличии этих соотношений выражение для J_* (65) перепишется в виде

$$\delta J_* = \big[\, x^2(t_1) + f^2(t_1) + \mu^*(t_1)\, f(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\, x(t_1) + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) \,\big]\, \delta t_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \big[\, (2\tau^2 u + \mu_2 \tau)\, \delta u + (2\tau u^2 + \mu_2 u - \alpha\lambda)\, \delta\tau \,\big]\, dt.$$

Пусть выполнено условие трансверсальности (48), а именно, обеспечено требование на выбор момента времени t_1 :

$$x^2(t_1) + f^2(t_1) + \mu^*(t_1)\, f(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\, x(t_1) + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) = 0,$$

где все слагаемые слева могут быть выписаны через элементы соответствующих векторов

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad f^2 = x_2^2 + \tau^2 u^2, \qquad \mu^* f = \mu_1 x_2 + \mu_2 \tau u,$$

$$\dot{\mu}^* x = \dot{\mu}_1 x_1 + \dot{\mu}_2 x_2, \qquad \mu^* \dot{x} = \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_2 \dot{x}_2.$$

Тогда, очевидно, получим

$$\delta J_* = \int\limits_0^{t_1} \big[\, (2\tau^2 u + \mu_2 \tau)\, \delta u + (2\tau u^2 + \mu_2 u - \alpha\lambda)\, \delta\tau \,\big]\, dt.$$

Наступил черед выбрать множитель Лагранжа $\lambda(t)$, пользуясь тем, что вторую скобку в написанном подынтегральном выражении можно положить равной нулю. Имеем отсюда: $\lambda = (2\tau u^2 + \mu_2 u)/\alpha$.

Таким образом, для обеспечения стационарности функционала качества J_* получим формулу для задания оптимального адаптивного управления $u_0(t)$:

$$u(t) = u_0(t) = -\,\frac{\mu_2(t)}{2\tau(t)}. \tag{66}$$

Отметим, что найденная формула для u_0 (66) может быть названа также формулой для «идеального» оптимального управления [91, 92, 100], поскольку она включает в себя зависимость от неизвестной функции $\tau(t)$.

В этой ситуации для разрешения возникшей проблемы можно поступить, применяя различные подходы и использовать, например: 1) субоптимальную стратегию, т.е. в формуле (66) поменять $\tau(t)$ на оценку $\bar{\tau}(t)$; 2) метод убывающих функций Ляпунова (метод самонастройки); 3) метод интегральных преобразований; 4) фильтрацию высших производных вектора состояния и т.д. Адаптивные схемы 1), 2) характерны для работы [100], 3), 4) — для работ [87-89, 91, 92].

Представляется, что в рассматриваемой задаче наиболее эффективной процедурой может оказаться применение метода заданной адаптивной модели, использующей в качестве неизвестной величины конечный момент времени t_1. На самом деле, неизвестность t_1 является чисто условной, поскольку t_1 определяется с помощью граничных условий и уравнения трансверсальности.

Итак, в общем случае можно задать модель изменения $\tau(t)$ в виде формулы: $\tau(t) = \tau_0\, g(t)$, где $m_0 = m(0)$, а $g(t)$, $g(0) = 1$ — это известная функция времени, которая при $t = t_1$ принимает заданное значение $\omega: \ g(t_1) = \omega > 0$. Описанная модель изменения $m(t)$ определяется соображениями чисто физического характера, исходя из наблюдения и изучения процесса данного управляемого движения.

Пусть, к примеру, $m(t) = m_0\, e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, причем $m(t_1) = m_0\, e^{-\gamma t_1} = \omega$. Тогда, очевидно, $m(0) = m_0 = \omega\, e^{\gamma t_1}$, т.е.

$$m(t) = \omega\, e^{-\gamma\,(t-t_1)}, \qquad t \in [\,0, t_1\,]. \tag{67}$$

В формуле (67) положим величины ω и γ достаточно малыми с тем, чтобы $\dot{m}(t) \sim 0$. В дальнейшем значение t_1 будет найдено в виде корня соответствующего уравнения по t_1.

Рассмотрим далее системы дифференциальных уравнений для определения переменных $x(t)$ и $\mu(t)$ при заданных $x(0)$ и $x(t_1)$ после подстановки в них $u_0(t)$ (66) и $m(t)$ (67):

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2(t)\\ -\,\mu_2(t)/2\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot{\mu}_1(t)\\ \dot{\mu}_2(t)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2x_1(t)\\ \mu_1(t) + 4x_2(t)\end{pmatrix}.$$

Для нахождения общего решения введем вектор $z = (x_1, x_2, \mu_1, \mu_2)^*$ относительно линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей коэффициентов системы:

$$\dot{z}(t) = B\,z(t), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разрешим затем характеристическое уравнение $\Delta = \det(B - \lambda I) = 0$ с единичной матрицей I размерности 4, где λ — набор собственных значений. Найдем, что $\Delta = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0$, откуда получим собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ кратности 2. Применяя далее стандартные приемы поиска фундаментальной системы решений $z^{(\lambda_1)}(t)$ и $z^{(\lambda_2)}(t)$ для случая кратных корней характеристического уравнения, найдем

$$z^{(\lambda_1)}e^{-t} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 + C_2 t \\ 2(C_2 - C_1 - C_2 t) \\ -2(2C_2 + C_1 + C_2 t) \end{pmatrix}, \; z^{(\lambda_2)}e^{t} = \begin{pmatrix} C_3 + C_4 t \\ C_4 - C_3 - C_4 t \\ 2(C_4 + C_3 + C_4 t) \\ 2(2C_4 - C_3 - C_4 t) \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Чтобы однозначно определить экстремаль $x(t)$:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 + C_2 t \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} C_3 + C_4 t \\ C_4 - C_3 - C_4 t \end{pmatrix} e^{-t},$$

т.е. найти постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и конечный момент времени t_1, надо задать четыре граничных условия с выбранными числами $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

и условие трансверсальности (48) для нахождения момента времени t_1 :

$$\frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial t_1} + \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial\, x(t_1)} \cdot \dot{x}(t_1) + G\big[\,x(t_1),\, u(t_1),\, \tau(t_1),\, t_1\,\big] = 0,$$

где

$$V[\,x(t_1)\,] = x^2(t_1), \quad \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial\, x(t_1)} = \big(2x_1(t_1),\, 2x_2(t_1)\big),$$

$$G\big[\,x(t_1),\, u_0(t_1),\, \tau(t_1),\, t_1\,\big] = -\,\big(x_1^2 + 2x_2^2 + \mu_2^2/4\big)\,\big|_{t=t_1} = -\,\big(x_1^2 + 3x_2^2\big)\,\big|_{t=t_1}.$$

Следовательно, условие трансверсальности приобретает вид

$$2x_1(t_1)\,\dot{x}_1(t_1) + 2x_2(t_1)\,\dot{x}_2(t_1) = x_1^2(t_1) + 3x_2^2(t_1),$$

либо

$$\xi_1\,\big[\,(C_1 + C_2 + C_2 t_1)\,e^{t_1} + (C_4 - C_3 - C_4 t_1)\,e^{-t_1}\,\big] +$$

$$+\,\eta_1\,\big[\,(C_1 + 2C_2 + C_2 t)\,e^{t_1} + (C_3 - 2C_4 + C_4 t_1)\,e^{-t_1}\,\big] = \big(\xi_1^2 + 3\eta_1^2\big)/2.$$

Отметим в качестве заключения, что в этой части представлена вычислительная схема синтеза адаптивного оптимального управления динамических систем в рамках решения условной вариационной задачи со свободным правым концом траектории и нефиксированным временем окончания процесса регулирования.

Различные алгоритмы вычисления вариаций функционалов качества в задачах вариационного исчисления и оптимального управления динамическими системами предлагались многими исследователями, в том числе зарубежными (см., например, работы [10, 133, 134]).

Отметим также, что в общем случае для граничных условий на правом конце при $t = t_1$ величины ξ_1 и η_1 могут быть заданны функциями параметра t_1, т.е. $\xi_1 = \xi_1(t_1)$ и $\eta_1 = \eta_1(t_1)$, которые выбираются из каких-либо конкретных физических требований на состояние управляемой динамической системы в момент времени t_1. Понятно, что в зависимости от этих условий уравнение трансверсальности будет иметь то или иное решение.

Помимо этого, укажем еще на один аспект решения этой задачи, который, по сравнению с рассмотренным выше, является значительно более сложным и громоздким. Речь идет о варианте задачи со свободной правой трансграницей, когда первоначально не задаются величины $\big(x(t_1),\, t_1\big)$.

Их можно определить исходя из заданных начальных данных $\bigl(x(0),\,\mu(0)\bigr)$ для определения постоянных интегрирования C_i, $i = \overline{1,4}$ в алгебраической системе из общего решения:

$$z(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ \mu(0) \end{pmatrix} \equiv EC = D,$$

где обозначено:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Здесь $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \bigl(x_1(0),\, x_2(0),\, \mu_1(0),\, \mu_2(0)\bigr)$ — заданные начальные данные, $\det E \neq 0$, откуда может быть найдено решение по $C_i = C_i(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $i = \overline{1,4}$, в функции значений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

В следующем параграфе продолжим изучение тематики решения оптимальных (субоптимальных) трансграничных задач применительно к нелинейным динамических системам управления в условиях действия на объект управления внешних ограниченных возмущений.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается вариационная задача адаптивного оптимального управления?

2. Что такое условие трансверсальности?

3. В чем отличие внутренней задачи адаптивного управления от внешней?

Глава 4

Внешняя вариационная задача адаптивного субоптимального управления с подвижной правой границей

Считается, что на систему действуют детерминированные равномерно ограниченные внешние нерегулярные возмущения, причем, по-прежнему, полагаем промежуток времени адаптации и оптимизации заранее не заданным, т.е. величина времени t_1 окончания процесса регулирования подлежит варьированию.

4.1 Введение

В задачах оптимизации в условиях недостаточной априорной информации о действующих возмущениях важно организовать *процесс адаптации* — процесс восполнения недостающей информации в ходе управления динамическим объектом. Процесс адаптации, под которым подразумевается выбор определенной стратегии, предполагает возможность идентификации действующих на объект управления возмущений с помощью специальным образом сформированной адаптивной обратной связи.

Обратим внимание на то, что замена идеального оптимального управления, зависящего от неизвестных параметров, на *адаптивное субоптимальное управление*, зависящее от известных настраиваемых параметров (оценок неизвестных параметров), происходит обычно по правилу: в найденный идеальный закон оптимального управления подставляют вместо неизвестных параметров их настраиваемые оценки.

Очевидно, что такая процедура обеспечивает сходимость субоптимальных значений функционала качества к его оптимальным значениям по мере сходимости процесса адаптивной параметрической идентификации, т.е. сходимости настраиваемых параметров к их истинным значениям.

Задачи субоптимизации адаптивных динамических систем в рамках линейной модели активно изучались в работах многих авторов разными методами и приемами. Отметим лишь некоторые из них, оказавших большое влияние на последующее развитие теории [7, 13, 49, 56, 69, 76, 100, 111, 112, 116, 127]. Нелинейным моделям ввиду сложности анализа уделялось значительно меньше внимания [50, 91]. Этот параграф посвящен изучению вопросов качественного вариационного синтеза субоптимальных систем адаптивного управления для нелинейных динамических объектов регулирования.

4.2 Постановка задачи

Пусть имеется функционал вида (32):

$$J = V[\, x(t_1), t_1\,] + \int\limits_{t_0}^{t_1} F[\, x(t),\, \dot{x}(t),\, v(t),\, t\,]\, dt \to \text{extr}, \tag{68}$$

где гладкие скалярные функции $V(\cdot)$ и $F(\cdot)$ имеют тот же смысл, что и ранее; $x(t) \in R^n$ — измеряемый $\forall\, t \in [\, t_0, t_1\,]$ вектор состояния, $v(t) \in R^n$ — неизмеряемый, неизвестный вектор внешних равномерно ограниченных возмущений: $\sup_{t\in[\, t_0,t_1\,]} \;\|\, v(t)\, \| \le C_v$, где $C_v > 0$ — известная константа. Движение исходной системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) + v, \qquad x, u, v \in R^n, \tag{69}$$

где $u(t) \in U \subset R^n$ — вектор управлений, U — множество допустимых ограниченных непрерывных функций $u(t)$, $t \in [\, t_0, t_1\,]$. Предполагается, что начальные значения $\big(x(t_0), t_0\big)$ заданы, но не известны заранее значения правой трансграничной точки $\big(x(t_1), t_1\big)$. Считаем вектор-функцию $f(\cdot) \in R^n$ гладкой и заданной.

Уравнение (68) накладывает на управляемую систему векторную неголономную связь вида

$$\psi(x, \dot{x}, u, v, t) = f(x, u, t) + v - \dot{x} = 0. \tag{70}$$

Помимо этого считаем, что вектор-функция неизвестных возмущений $v(t)$ удовлетворяет уравнениям настройки ее оценок $\bar{v}(t)$, т.е. интегральным уравнениям связей, формирующих оптимальное управление $u_0(t) = u_0[\,x(t),\, \bar{v}(t),\, t\,]$. Эти связи задают сходящийся алгоритм адаптации по правилу

$$\varphi\left[\, v(t), \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\, ds,\, t\,\right] \; =$$

$$= \;\left[\, \bar{v}(t) - v(t)\,\right] + \alpha \left(\int\limits_{t_0}^{t} \left[\, \bar{v}(s) - v(s)\,\right] ds \right) + \beta = 0, \tag{71}$$

где $\bar{v}(t),\, v(t) \in R^n$, $\alpha > 0$, $\beta = v(t_0) - \bar{v}(t_0)$ — заданные числа. Интегральное уравнение Вольтерра 2–го рода (71) имеет решение

$$\bar{v}(t) - v(t) = -\,\beta\, e^{-\alpha\,(t - t_0)} \;\xrightarrow[t \to \infty]{}\; 0, \tag{72}$$

приводящее к асимптотической сходимости оценок $\bar{v}(t)$ к $v(t)$ в зависимости от требуемой точности оценивания $\delta > 0$:

$$\overline{\lim_{t \to t_1}}\; \|\, \bar{v}(t) - v(t)\, \| < \delta, \tag{73}$$

и времени окончания процесса оптимизации и адаптации t_1.

Требуется найти тройку неизвестных вектор-функций $\big(x(t),\, u(t),\; v(t)\big)$ со значениями в R^n, $t \in [\, t_0, t_1\,]$, удовлетворяющую начальным условиям $\big(x(t_0),\, v(t_0),\, t_0\big)$ и обеспечивающую выполнение условий, а именно: $J \to \mathrm{extr}$ (68) наряду с обеспечением требований $\psi(x, \dot{x}, u, v, t) = 0$ (70) и $\varphi\left(v,\, \int_{t_0}^{t} v(s),\, t\right) = 0$ (71), где $\psi(\cdot),\, \varphi(\cdot) \in R^n$.

Задачу на условный экстремум сведем к задаче на безусловный экстремум с помощью введения множителей Лагранжа. С учетом условий (69), (70) и (71) запишем вспомогательный функционал качества в следующем виде:

$$J_* = V[\, x(t_1),\, t_1\,] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{\, F\,[\, x,\, f(x, u, t) + v,\, v(t),\, t\,]\, dt \,+$$

$$+\ \mu^*(t)\,\psi(x,\dot{x},u,v,,t) + \lambda^*(t)\,\varphi\Big(v,\int\limits_{t_0}^{t} v(s)\,ds,\,t\Big)\Big\}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad (74)$$

где $\mu(t)$, $\lambda(t)$ — неопределенные множители Лагранжа; $\mu(t)$, $\lambda(t) \in R^n$; $*$ сверху — знак транспонирования.

Как и раньше, отмечаем, что $\delta x\,\big|_{t=t_1} \neq \delta x(t_1)$, где $\delta x(t_1)$ — это полное приращение $x(t_1)$ при перемещении граничной точки в положение $\big(x(t_1)+\delta x(t_1),\, t_1+\delta t_1\big)$, т.е. с точностью до малых высокого порядка:

$$\delta x(t_1) = \delta x\,\big|_{t=t_1} + \dot{x}(t_1)\,\delta t_1. \quad (75)$$

4.3 Алгоритм адаптации и его асимптотические свойства

Запишем интегральный алгоритм адаптации (71) в виде

$$y(t) + \alpha\int\limits_{t_0}^{t} y(s)\,ds + \beta = 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta = \mathrm{const}, \quad (76)$$

где обозначено: $y(t) = \bar{v}(t) - v(t)$, $\beta = v(t_0) - \bar{v}(t_0)$, и найдем его решение в асимптотике при $t \to \infty$.

С этой целью удобно ввести в рассмотрение еще одно обозначение:

$$z(t) = z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} y(s)\,ds, \qquad \dot{z}(t) = y(t).$$

Тогда алгоритм адаптации (76) преобразится к виду

$$\dot{z}(t) + \alpha\,[\,z(t) - z(t_0)\,] + \beta = 0, \quad (77)$$

или к виду линейного однородного дифференциального уравнения в новых обозначениях по $z(t)$:

$$\dot{z}(t) + \alpha\,z(t) = 0, \quad (78)$$

поскольку здесь

$$\dot{z}(t) + \alpha\,z(t) + [\,-\alpha\,z(t_0) + \beta\,] = 0$$

и $z(t_0) = \beta/\alpha$, что дает: $[\,-\alpha\, z(t_0) + \beta\,] = 0$.

Решение ДУ (78) хорошо известно

$$z(t) = z(t_0)\, e^{-\alpha\,(t-t_0)} = \frac{\beta}{\alpha}\, e^{-\alpha\,(t-t_0)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

$$\dot z(t) = z(t_0)\, e^{-\alpha\,(t-t_0)}\,(-\,\alpha) = -\,\beta\, e^{-\alpha\,(t-t_0)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

т.е. имеем

$$\dot z(t) = y(t) = \bar v(t) - v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

либо $\bar v(t) \to v(t)$ при $t \to \infty$. Отметим также, что из уравнения (76) следует требование на выбор начального условия: $y(t_0)+\beta = 0 \Longrightarrow \beta = v(t_0) - \bar v(t_0)$.

4.4 Основные результаты

Из интегрирования по частям в функционале (74) получим

$$J_* = V[\,x(t_1), t_1\,] - \mu^*(t)\, x(t)\,\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x,u,v,t)\, dt,$$

$$G(x,u,v,t) \equiv G\big[\,x,u,v,t,\ \mu(t),\ \dot\mu(t),\ \lambda(t)\,\big] \ = \tag{79}$$

$$= F(x,u,v,t) + \mu^*(t)[f(x,u,t)+v] + \dot\mu^*(t)x(t) + \lambda^*(t)\varphi\Bigg(v, \int\limits_{t_0}^{t} v(s)ds, t\Bigg).$$

Величину вариации функционала J_* (79) на экстремальных движениях с подвижной трансграницей $\big(x(t_1),\, t_1\big)$, где $\delta x(t_0) = 0$, с учетом возникающих вариаций $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta v(t)$, $\delta x(t_1)$, δt_1 с точностью до величин второго порядка малости представим в формулировке следующей теоремы.

Теорема 5. *С учетом непрерывной дифференцируемости по всем своим переменным функций* V, G, *а также справедливости выполнения соотношения* (75) *для* $\delta x\,\big|_{t=t_1}$, *вариация функционала* J_* (79) *задается выражением*

$$\delta J_* = dJ_* = \left(\frac{\partial\, V[\,x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)} - \mu^*(t_1)\right) \delta x(t_1) \ +$$

$$+\left(\frac{\partial V[\,x(t_1),t_1\,]}{\partial t_1}+G(x,u,v,t)\,\big|_{t=t_1}+\mu^*(t_1)\,\dot{x}(t_1)\right)\delta t_1\,+ \qquad (80)$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\,\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial u}\,\delta u+\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial v}\,\delta v\right]dt,$$

полученным с точностью до малых второго порядка.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 и поэтому здесь не приводится. Далее выберем векторный множитель $\mu(t)$ так, чтобы функциональные коэффициенты при $\delta x(t_1)$, $\delta x(t)$ в соотношении (80) обратились в нуль. Получим тем самым систему n уравнений Эйлера по x с граничным условием на правом конце:

$$\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial x}=0, \qquad \mu(t_1)=\left(\frac{\partial\,V[\,x(t_1),t_1\,]}{\partial\,x(t_1)}\right)^*, \qquad (81)$$

либо с учетом обозначения (79) получим систему уравнений

$$\dot{\mu}(t)=-\left(\frac{\partial\,F(x,u,v,t)}{\partial\,x(t_1)}+\mu^*(t)\,\frac{\partial\,f(x,u,t)}{\partial\,x(t)}\right)^* \qquad (82)$$

с граничным условием $\mu(t_1)$ (81).

Таким образом, выражение (80) при наличии требований (81) переписывается в виде

$$\delta J_*=dJ_*=\left(\frac{\partial\,V[\,x(t_1),t_1\,]}{\partial t_1}+G(x,u,v,t)\,\Bigg|_{t=t_1}+\mu^*(t_1)\,\dot{x}(t_1)\right)\delta t_1\,+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\,\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial u}\,\delta u+\frac{\partial\,G(x,u,v,t)}{\partial v}\,\delta v\right]dt. \qquad (83)$$

Допустим, что в равенстве (83) круглая скобка справа равна нулю:

$$\frac{\partial\,V[\,x(t_1),t_1\,]}{\partial t_1}+G\big[\,x(t_1),\,u(t_1),\,v(t_1),\,t_1\,\big]+\mu^*(t_1)\,\dot{x}(t_1)=0,$$

откуда, используя граничное условие (81), получим

$$\frac{\partial V[\,x(t_1), t_1\,]}{\partial t_1} + \frac{\partial V[\,x(t_1), t_1\,]}{\partial\, x(t_1)}\, \dot{x}(t_1) + G\big[\,x(t_1),\, u(t_1),\, v(t_1),\, t_1\,\big] = 0,$$

или в более компактной форме

$$\frac{d\,V[\,x(t_1), t_1\,]}{dt_1} + G\big[\,x(t_1),\, u(t_1),\, v(t_1),\, t_1\,\big] = 0,$$

что в итоге дает

$$\frac{dJ_*}{dt_1} = 0. \tag{84}$$

Требование (84) представляет собой условие трансверсальности в граничной точке t_1. Полагая условие (84) в точке $t = t_1$ выполненным, получим, исходя из выражения (83), выполненным также и соотношение

$$\delta J_* = dJ_* = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\, \frac{\partial\, G(x,u,v,t)}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial\, G(x,u,v,t)}{\partial v}\, \delta v \right] dt. \tag{85}$$

В интеграле (85) для второго слагаемого с учетом обозначения (79) выберем набор множителей Лагранжа $\lambda(t) \in R^n$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\, G(x,u,v,t)}{\partial v} = 0, \tag{86}$$

приводящее к системе n уравнений Эйлера по v :

$$\frac{\partial\, F(x,u,v,t)}{\partial\, v(t)} + \mu^*(t)\cdot I + \lambda^*(t)\, \frac{\partial\, \varphi\Big(v,\ \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds,\ t\Big)}{\partial\, v(t)} = 0, \tag{87}$$

где через $I \equiv \partial\, v(t)/\partial\, v(t)$ обозначена единичная матрица размерности n. Следовательно, интеграл (85) запишется так:

$$\delta J_* = dJ_* = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\, G(x,u,v,t)}{\partial u}\, \delta u\, dt. \tag{88}$$

С целью обеспечения необходимых условий стационарности (экстремума) критерия качества J_* надо потребовать, очевидно, чтобы в интеграле (88) выполнялось равенство

$$\frac{\partial G(x,u,v,t)}{\partial u} = 0. \tag{89}$$

Система n уравнений Эйлера по u (89) может быть записана с помощью обозначения (79) в виде системы уравнений

$$\frac{\partial F(x,u,v,t)}{\partial u(t)} + \mu^*(t)\,\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)} = 0. \tag{90}$$

Совокупность $3n$ уравнений (81), (86), (89) вместе с уравнениями связей (70), (71) представляет собой замкнутую систему уравнений для нахождения вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $\mu(t)$, $\lambda(t)$, обеспечивающих решение исходной условной вариационной задачи оптимального (субоптимального) адаптивного управления с подвижной границей на правом конце.

Полученный результат вариационного исследования для синтеза условной управляемой возмущенной динамической системы, отслеживающей n независимых связей, запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Тройка вектор-функций* $\big(x(t),\, u(t),\, v(t)\big)$, *реализующих экстремум (минимум) функционала* (68) *при наличии условий* (70), (71), *удовлетворяет при соответствующем выборе множителей* $\mu_k(t)$, $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, *уравнениям Эйлера, составленным для функционала* J_* (74). *Уравнения Эйлера для определения функций* $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $\mu(t)$ *и* $\lambda(t)$ *имеют вид уравнений* (81), (86), (89) *с уравнениями связей* (70), (71). *Решение задачи* (69), (71), (82) *порядка* $3n$, *где управление* $u(t) \in U \subset R^n$, *определяется уравнением* (90) *и осуществляется при наличии* n *начальных условий* $x_0 = x(t_0)$ *на левом конце и* n *краевых условий* (81) *на правом конце.*

К сказанному остается добавить, что для выполнения минимума критерия качества, когда $J \to \min_{u\in U}$, необходимо требование: $\delta^2 J = \delta^2 J_* \geq 0$, $\forall\, \delta u(t) \neq 0$.

4.5 Модельный пример. Синтез субоптимального адаптивного управления

Вновь в качестве достаточно наглядного и простого примера возьмем задачу с одноосным (по оси x) прямолинейным движением материальной точки с известной постоянной массой m под действием управляющей силы (управления) $u(t)$, приложенной к точке, и неизвестного равномерно ограниченного возмущения $v(t)$, $\sup_{t\in[\,t_0,t_1\,]} \|\,v(t)\,\| \le C_c$, $C_v > 0$ — некоторая постоянная.

Считаем, что это движение осуществляется вдоль абсолютно гладкой опоры (поверхности), когда сила тяжести уравновешена силой реакции опоры в отсутствии силы трения. В этом случае движение точки будет описываться уравнением

$$m\,\ddot{q}(t) = u(t) + v(t), \tag{91}$$

где $q = q(t)$ — обобщенная (лагранжева) координата, представляющая собой отклонение точки от центра СК O. Движение точки (91) определяется величиной кинетической энергии $T(t) = m\,\dot{q}^2(t)/2$:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,T(t)}{\partial\,\dot{q}(t)} = \frac{d}{dt}\,Q(t) = F(t), \tag{92}$$

где уравнение (92) отвечает второму закону динамики Ньютона для количества движения $Q(t) = m\,\dot{q}(t)$ и действующей на точку активной силы $F(t) = u(t) + v(t)$. Полагаем при этом, что $\forall\,t \in [\,t_0, t_1\,]$ измерению подлежат $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, но не $\ddot{q}(t)$.

Требуется оптимальным образом при данных условиях сформировать управляемое движение материальной точки с тем, чтобы обеспечить минимизацию энергетического функционала качества вида (59):

$$J = x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} [\,x^2(t) + \dot{x}^2(t)\,]\,dt \ = \tag{93}$$

$$= \ x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} \{\,x^2(t) + g^2[\,u(t),\,v(t)\,]\,\}\,dt \to \min_{u\in U},$$

где введены обозначения для векторов $x, g \in R^2$, скалярного управления $u(t) \in R$ и скалярного возмущения $v(t) \in R$; $\tau \equiv 1/m = \mathrm{const}$, $V(x,t) = x^2(t)$:

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \qquad g = f + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \tau\,(u+v) \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \tau u \end{pmatrix},$$

$$x^2 = q^2 + \dot{q}^2, \quad g^2 = \dot{q}^2 + \tau^2\,(u+v)^2, \quad g^2 = f^2 + \tau^2 v\,(2u+v)$$

относительно компонентов уравнения движения, переписанного в нормальном виде

$$\dot{x} = g(x,u,v), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} x_2 \\ \tau\,(u+v) \end{pmatrix}. \tag{94}$$

Функция управления $u(t) \in U$, $U \in C^1[\,0, t_1\,]$ — множество непрерывно дифференцируемых по $t \in [\,0, t_1\,]$ функций. Вектор $x_0 = x(0)$ задается, а величины $x(t_1), t_1$ определяются из дополнительных условий.

Функционал качества J (93) можно представить так:

$$J = x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} [\,x^* A x + \tau^2\,(u+v)^2\,]\,dt, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

где A — положительно определенная матрица. В энергетическом функционале J (95) подынтегральная функция $F(x,u,v) > 0$ представляет собой сумму положительно определенной квадратичной формы $x^* A x$ и положительной функции $\tau^2\,(u+v)^2$.

Далее перейдем к решению искомой условной вариационной задачи. Имеем два введённых ранее уравнения связей по x и по v соответственно:

$$\psi(\cdot) = g(x,u,v) - \dot{x}(t) = 0, \tag{70}$$

$$\varphi(\cdot) = [\,\bar{v}(t) - v(t)\,] + \alpha \left(\int\limits_0^t [\,\bar{v}(s) - v(s)\,]\,ds \right) + \beta = 0. \tag{71}$$

Тогда вспомогательный функционал с помощью соотношений (70), (71) запишется в виде

$$J_* = x^2(t_1) + \int\limits_0^{t_1} \Big[x^2(t) + g^2(x,u,v) +$$

$$+ \mu^*(t)\,\psi(x,\dot{x},u,v) + \lambda(t)\,\varphi\Big(v,\, \int\limits_0^t v(s)\,ds,\, t\Big) \Big]\,dt, \qquad (96)$$

где $\mu(t) = \big(\mu_1(t),\, \mu_2(t)\big)^* \in R^2$, $\lambda(t) \in R$ — множители Лагранжа. Интегрируя по частям в функционале (96), получим

$$J_* = x^2(t_1) - \mu^*(t)\,x(t)\,\big|_0^{t_1} + \int\limits_0^{t_1} \Big[x^2(t) + g^2(x,u,v) +$$

$$+ \mu^*(t)\,g(x,u,v) + \dot{\mu}^*(t)\,x(t) + \lambda(t)\,\varphi\Big(v,\, \int\limits_0^t v(s)\,ds,\, t\Big) \Big]\,dt. \qquad (97)$$

Затем выпишем по известной схеме вариацию функционала (97) согласно выражению (80):

$$\delta J_* = \big[\,2x(t_1) - \mu(t_1)\,\big]^*\,\delta x(t_1) + \big[\,x^2(t_1) + g^2(t_1) +$$

$$+ \mu^*(t_1)\,g(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\,x(t_1) + \mu^*(t_1)\,\dot{x}(t_1)\,\big]\,\delta t_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \Big[(2x_1 + \dot{\mu}_1)\,\delta x_1 + (4x_2 + \mu_1 + \dot{\mu}_2)\,\delta x_2 + \qquad (98)$$

$$+ (2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau)\,\delta u +$$

$$+ \Big(2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau - \lambda - \alpha\,\frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^t v(s)\,ds \Big)\,\delta v \Big]\,dt.$$

В выражении (98) выберем множители $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ так, чтобы выполнялись уравнения Эйлера (81) по x_1 и x_2 с граничными условиями на правом конце:

$$\dot{\mu}_1 = -\,2x_1, \quad \mu_1(t_1) = 2x_1(t_1), \quad \dot{\mu}_2 = -\,\mu_1 - 4x_2, \quad \mu_2(t_1) = 2x_2(t_1).$$

Тогда при наличии этих соотношений выражение для J_* (98) запишется в виде

$$\delta J_* = \left[\, x^2(t_1) + g^2(t_1) + \mu^*(t_1)\, g(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\, x(t_1) + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) \,\right] \delta t_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \Bigg[\left(2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau\right) \delta u +$$

$$+ \left(2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau - \lambda - \alpha \frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^t v(s)\, ds \right) \delta v \Bigg] dt,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^t v(s)\, ds = \frac{v(t)}{\dot{v}(t)} = \frac{1}{d\,(\ln v)/dt}.$$

Полагая, что выполнено условие трансверсальности, получим уравнение для выбора момента времени t_1 :

$$x^2(t_1) + g^2(t_1) + \mu^*(t_1)\, g(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\, x(t_1) + \mu^*(t_1)\, \dot{x}(t_1) = 0,$$

где

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad g^2 = x_2^2 + \tau^2\,(u+v)^2, \quad \mu^* g = \mu_1 x_2 + \mu_2 \tau\,(u+v),$$

$$\dot{\mu}^* x = \dot{\mu}_1 x_1 + \dot{\mu}_2 x_2, \qquad \mu^* \dot{x} = \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_2 \dot{x}_2.$$

В этом случае получим

$$\delta J_* = \int\limits_0^{t_1} \Bigg[\left(2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau\right) \delta u +$$

$$+ \left(2\tau^2 u + 2\tau^2 v + \mu_2 \tau - \lambda - \alpha \frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^t v(s)\, ds \right) \delta v \Bigg] dt.$$

В этом интеграле выберем множитель $\lambda(t)$ так, чтобы вторая скобка в подынтегральном выражении была равна нулю, т.е.

$$\lambda = 2\tau^2\,(u+v) + \mu_2 \tau - \alpha \frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^t v(s)\, ds.$$

Тем самым, из стационарности функционала качества J_* получим формулу для задания оптимального адаптивного управления $u_0(t)$:

$$u(t) = u_0(t) = -\left[\frac{\mu_2(t)}{2\tau} + v(t)\right]. \tag{99}$$

Важно отметить, что зависимость $u_0(t)$ (99), называемая «идеальной», включает в себя неизвестную функцию внешнего возмущения $v(t)$, а это значит, что формулой (99) напрямую, к сожалению, воспользоваться нельзя.

Формулу для $u_0(t)$ (99) можно применить для перехода к субоптимальному адаптивному управлению согласно следующей зависимости:

$$\bar{u}_0(t) = -\left[\frac{\mu_2(t)}{2\tau} + \bar{v}(t)\right], \tag{100}$$

где $\bar{v}(t)$ — оценка $v(t)$, удовлетворяющая выходу алгоритма параметрической настройки (71) – (76).

При такой замене $\big(u_0(t)$ на $\bar{u}_0(t)\big)$, очевидно, исходный функционал качества J (93) будет принимать другие, большие значения. Обратимся в этой связи к известному определению [100], по которому управление $\bar{u}_0(t) \in U$ при некотором числе $\rho \in [\,0;1\,]$ называется *субоптимальным с уровнем оптимальности* ρ для функционала качества J, если выполнено неравенство

$$\min_{u \in U} J = J\,\Big|_{u=u_0} \;\geq\; \rho J\,\Big|_{u=\bar{u}_0}, \tag{101}$$

где $u_0(x, v, t)$ — оптимальное, а $\bar{u}_0(x, \bar{v}, t)$ — субоптимальное управления.

В соответствии с критерием (101) число ρ оценивает близость величины $J\,\Big|_{\bar{u}_0}$ к наименьшему значению функционала J (93). Приближение ρ к единице свидетельствует о приближении величины $J\,\Big|_{\bar{u}_0}$ к минимально возможному значению. При $\rho = 1$ субоптимальное управление $\bar{u}_0$ становится оптимальным: $J\,\Big|_{\bar{u}_0} = \min_{u \in U} J$. Последнее требует, вообще говоря, сколь угодно большого времени адаптации или, другими словами, времени шумовой (параметрической) идентификации объекта управления: $\bar{v}(t) \to v(t)$ при $t \to \infty$.

Понятно, что смена оптимального режима функционирования системы на субоптимальный режим будет сопровождаться ухудшением качества показателей характеристик работы системы. Кроме того, решение задачи субоптимального управления сопряжено с такой серьезной трудностью, как требованием измерения лишь фазового вектора $x(t)$, $t \in [\,0, t_1\,]$ и отсутствием какой-либо информации о векторе скоростей $\dot{x}(t)$. Для решения этой проблемы поступим следующим образом.

В алгоритм адаптации (71):

$$[\,\bar{v}(t) - v(t)\,] + \alpha\left(\int\limits_0^t [\,\bar{v}(s) - v(s)\,]\,ds\right) + \beta = 0$$

вместо $v(t)$ подставим приближенное значение $v_*(t)$, пользуясь аппроксимацией уравнения движения (69): $\dot{x}_2 = \tau\bar{u}_0 + \tau v$, куда вместо $\dot{x}_2$ подставим приближенное значение, выраженное с помощью запаздывания по времени на малую величину $\varepsilon > 0$:

$$\dot{x}_2 \ \sim \ \frac{x_2(t) - x_2(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \tau\,\bar{u}_0(t) + \tau\,v_*(t),$$

где

$$v_*(t) = \frac{x_2(t) - x_2(t-\varepsilon)}{\varepsilon\tau} - \bar{u}_0(t). \tag{102}$$

При рассмотрении системы дифференциальных уравнений для определения переменных $x(t)$ и $\mu(t)$ при заданных $x(0)$ и $x(t_1)$ после подстановки в них $\bar{u}_0(t)$ (100):

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2(t)\\ -\mu_2(t)/2 - \tau\,y(t)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot{\mu}_1(t)\\ \dot{\mu}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x_1(t)\\ -\mu_1(t) - 4x_2(t)\end{pmatrix},$$

либо с учетом соотношений (71) – (76):

$$y(t) = \bar{v}(t) - v(t) = [\,\bar{v}(0) - v(0)\,]\,e^{-\alpha t},$$

полагая, что величина $v(0)$ известна, получим

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-x_2\\ \mu_2/2 + \tau\beta\,e^{-\alpha t}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot{\mu}_1\\ \dot{\mu}_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2x_1\\ \mu_1 + 4x_2\end{pmatrix}.$$

Для нахождения общего решения введем вектор $z = (x_1, x_2, \mu_1, \mu_2)^*$ относительно линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей коэффициентов системы:

$$\dot{z}(t) = B\,z(t) + w(t),\; z(t) = \big(z_i(t)\big)_{i=\overline{1,4}}, \tag{103}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1/2_{¸} - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & & & & \end{pmatrix},\; w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau\beta\, e^{-\alpha t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы $z(t)$ (103) представляет собой, как известно, сумму общего решения $\widehat{z}(t)$ однородной системы $\dot{z}(t) = B\,z(t)$ и какого-либо частного решения $\widetilde{z}(t)$ неоднородной системы ДУ (103): $z(t) = \widehat{z}(t) + \widetilde{z}(t)$.

Общее решение $\widehat{z}(t)$ можно определить (подробности см. в работах [21, 92]) с помощью фундаментальной системы решений:

$$\widehat{z}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 + C_2 t \\ 2(C_2 - C_1 - C_2 t) \\ -2(2C_2 + C_1 + C_2 t) \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} C_3 + C_4 t \\ C_4 - C_3 - C_4 t \\ 2(C_4 + C_3 + C_4 t \\ 2(2C_4 - C_3 - C_4 t) \end{pmatrix} e^{-t},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Что же касается частного решения $\widetilde{z}(t)$, то его следует задавать в известном виде с неопределенными коэффициентами:

$$\widetilde{z}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} t + \gamma_{12} \\ \gamma_{21} t + \gamma_{22} \\ \gamma_{31} t + \gamma_{32} \\ \gamma_{41} t + \gamma_{42} \end{pmatrix} e^{-\alpha t}, \qquad \gamma_{ij} = \mathrm{const}, \qquad i = \overline{1,4},\; j = 1, 2,$$

поскольку коэффициент $-\tau\beta$ при $e^{-\alpha t}$ — это многочлен нулевой степени (число), а число $-\alpha$ в показателе степени у экспоненты $e^{-\alpha t}$ не является корнем характеристического уравнения: $\det(B - \lambda I) = 0$. Многочлен при $e^{-\alpha t}$ должен иметь степень на единицу больше, чем многочлен нулевой степени. Подставляя выражение

$\widetilde{z}(t)$ с неопределенными коэффициентами γ_{ij} в систему (103):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_4/2 \\ -2z_1 \\ -4z_2 - z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\alpha t}, \qquad \sigma \equiv -\tau\beta,$$

получим после сокращения на $e^{-\alpha t}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} - \alpha\,(\gamma_{11}t + \gamma_{12}) \\ \gamma_{21} - \alpha\,(\gamma_{21}t + \gamma_{22}) \\ \gamma_{31} - \alpha\,(\gamma_{31}t + \gamma_{32}) \\ \gamma_{41} - \alpha\,(\gamma_{41}t + \gamma_{42}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21}t + \gamma_{22} \\ -\gamma_{41}t/2 - \gamma_{42}/2 \\ -2\gamma_{11}t - 2\gamma_{12} \\ -4\gamma_{21}t - 4\gamma_{22} - \gamma_{31}t - \gamma_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая далее коэффициенты слева и справа при t и свободном члене, будем иметь алгебраическую линейную неоднородную систему уравнений по γ_{ij}, решая которую, найдем

$$\gamma_{11} = \kappa\,(24 + 10\alpha^2 - 3\alpha^4), \qquad \kappa \equiv \frac{\sigma}{(\alpha^2+6)(2\alpha^4 - 5\alpha^2 + 8)},$$

$$\gamma_{12} = \frac{\kappa\,(\alpha^6 + 8\alpha^2 + 16)}{\alpha}, \qquad \gamma_{21} = \kappa\alpha\,(3\alpha^4 - 10\alpha^2 - 24),$$

$$\gamma_{22} = \kappa\,(2\alpha^2 - 3\alpha^4 - \alpha^6 + 8), \qquad \gamma_{31} = \frac{\kappa\,(\alpha^2 - 2)(4 - 3\alpha^2)}{\alpha},$$

$$\gamma_{32} = \kappa\,(\alpha^4 + 8), \qquad \gamma_{41} = 2\kappa\alpha\,(2 - \alpha^2)(\alpha^2 + 6), \qquad \gamma_{41} = 0.$$

Чтобы однозначно определить субэкстремаль при $\bar{u}_0(t)$: $x(t) = \widehat{x}(t) + \widetilde{x}(t)$:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 + C_2t \\ C_1 + C_2 + C_2t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} C_3 + C_4t \\ C_4 - C_3 - C_4t \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \gamma_{11}t + \gamma_{12} \\ \gamma_{21}t + \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{-\alpha t},$$

т.е. чтобы найти постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и конечный момент времени t_1, надо задать четыре граничных условия с выбранными числами $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

и условие трансверсальности (84) для нахождения момента времени t_1 :

$$\frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial t_1} + \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial\, x(t_1)} \cdot \dot{x}(t_1) + G\big[\,x(t_1),\, u(t_1),\, v(t_1),\, t_1\,\big] = 0,$$

где

$$V[\,x(t_1)\,] = x^2(t_1), \quad \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial V[\,x(t_1)\,]}{\partial\, x(t_1)} = \big(2x_1(t_1),\, 2x_2(t_1)\big),$$

$$G\big[\,x(t_1),\, \bar{u}_0(t_1),\, v(t_1),\, t_1\,\big] = -\,\big[\,x_1^2 + 2x_2^2 + \mu_2^2/4\,\big]_{t=t_1} + \beta^2\, e^{-2\alpha t_1} \; = \\ = \; -\big(x_1^2 + 3x_2^2\big)_{t=t_1} + \beta^2\, e^{-2\alpha t_1}.$$

Здесь надо пояснить, что

$$G(\cdot)\,\big|_{t=t_1} \; = x^2(t_1) + g^2(t_1) + \mu^*(t_1)\, g(t_1) + \dot{\mu}^*(t_1)\, x(t_1) \; = \\ = \; x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + \tau^2\, (\bar{u} + v)^2 + \mu_1 x_2 + \mu_2 \tau\, (\bar{u}_0 + v) \, + \\ + \, \dot{\mu}_1 x_1 + \dot{\mu}_2 x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + \tau^2\, (\mu_2/(2\tau) + y)^2 \, + \\ + \, \mu_1 x_2 + \mu_2 \tau\, (\mu_2/(2\tau) + y) + \dot{\mu}_1 x_1 + \dot{\mu}_2 x_2; \qquad t = t_1,$$

где $\dot{\mu}_1 = -2x_1$, $\dot{\mu}_2 = -\mu_1 - 4x_2$ при $t = t_1$,

$$\mu_1(t_1) = 2x_1(t_1), \qquad \mu_2(t_1) = 2x_2(t_1),$$

причем

$$y(t_1) = \bar{v}(t_1) - v(t_1) = -\,\beta\, e^{-\alpha t_1}, \qquad \beta = -\,y(0).$$

Следовательно, условие трансверсальности приобретает вид

$$2x_1(t_1)\, \dot{x}_1(t_1) + 2x_2(t_1)\, \dot{x}_2(t_1) = x_1^2(t_1) + 3x_2^2(t_1) - \beta^2\, e^{-2\alpha t_1},$$

либо

$$\xi_1 \Big\{ (C_1 + C_2 + C_2 t_1)\, e^{t_1} + (C_4 - C_3 - C_4 t_1)\, e^{-t_1} +$$

$$+ \big[\, \gamma_{11}\,(1 - \alpha t_1) - \alpha\gamma_{12}\, \big]\, e^{-\alpha t_1} \Big\} +$$

$$+ \eta_1 \Big\{ (C_1 + 2C_2 + C_2 t_1)\, e^{t_1} + (C_3 - 2C_4 + C_4 t_1)\, e^{-t_1} +$$

$$+ \big[\, \gamma_{21}\,(1 - \alpha t_1) - \alpha\gamma_{22}\, \big]\, e^{-\alpha t_1} \Big\} = \frac{\xi_1^2 + 3\eta_1^2 - \beta^2\, e^{-2\alpha t_1}}{2}.$$

Подведем некоторые итоги. Основным результатом проведенного анализа можно считать детальное качественное изучение новых типов оптимальных (субоптимальных) нелинейных управляемых динамических систем в условиях действия на них детерминированных (не наделенных статистическими свойствами) равномерно ограниченных внешних неизвестных возмущений, когда промежуток времени адаптивного оценивания и оптимизации предполагается заранее не заданным.

Важно еще отметить, что итогом всего представленного здесь вариационного исследования можно считать полученный замкнутый синтез адаптивной субоптимальной алгоритмической схемы, в рамках которой гарантируется достижение субоптимального режима функционирования исходной управляемой системы с вполне определенным уровнем оптимальности.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается процесс адаптации?

2. В чем отличие адаптивного оптимального управления от адаптивного субоптимального управления?

3. Как записать условие на точность оценивания, когда время регулирования ограничено?

4. Как выглядит алгоритм адаптации?

5. Что из себя представляет алгоритм управления с обратной связью?
6. В чем состоит смысл адаптивного алгоритма синтеза?

Часть II

Приложения

Введение в теорию обучаемых опознающих систем

Говоря о теории обучаемых опознающих систем (ООС), будем, прежде всего, иметь в виду ее *математическую* составляющую, которая, начиная от ее истоков появления и до нынешнего состояния, трансформировалась в научно-техническое направление огромных масштабов под названием «искусственный интеллект» (ИИ).

Что касается используемой для написания этих Приложений 1-4 литературы, то отметим, что основной его текст представляет собой краткое выборочное изложение материала, помещенного в работе [99], которая, в свою очередь, включает в себя результаты, отображенные в списке большинства цитируемой литературы Глав 1-4.

ООС призваны моделировать функционирование искусственных органов чувств и мышления человека в разных условиях работы и, в частности, в условиях существенной априорной неопределенности о свойствах окружающей среды. Задачи создания таких систем приводят к необходимости формирования управляющих сходящихся алгоритмов настройки системных параметров на основе обработки поступающей информации для выполнения целевых установок. Такие системы называются *обучаемыми* или *адаптивными системами.*

Алгоритмы обучения или, иначе, *алгоритмы адаптации* определяют схему (правило, закон), по которому происходит изменение параметров или структуры системы в зависимости от поступающей на вход системы информации. Как правило, алгоритмы обучения представляют собой градиентные, псевдоградиентные либо поисковые процедуры экстремизации некоторого *целевого функционала* (*целевой функции*). Задание последнего связано с особенностями обучаемой системы.

В Приложениях 1-4 бегло излагаются некоторые хорошо известные методы решения различных задач обучения и самообучения опознающих систем и кратко анализируются алгоритмические процедуры для их решения.

В Приложении 1 в общих чертах рассматривается задача построения обучаемых опознающих систем. Большое внимание уделено методу конечно-сходящихся алгоритмов (КСА), с помощью которых решаются поставленные целевые неравенства, а тем самым и общая задача функционирования ООС. Кратко изучаются: задача об экстраполяции функции, рекуррентные алгоритмы обучения в виде алгоритмов с поощрением и среднеквадратическое приближение. Представлена задача ООС персептронного вида как задача использования КСА с поощрением. Рассмотрена нелинейная разделимость классов изображений, в рамках которой введены понятия дискриминантных функций (ДФ), спрямляющего пространства, вероятности ошибки распознавания, пороговой функции, комитета неравенств и т.д.

Приложение 2 посвящено знакомству с основными элементами статистической теории ООС. Исследуется задача построения ООС в вероятностной постановке. Здесь речь идет о минимизации функционала среднего риска. При классификации классов изображений вводятся ошибки первого и второго рода, матрица стоимости, веса ошибок, оптимальное байесово правило, коэффициент подобия, отношение правдоподобия, критерий отношения вероятностей Вальда и т.д.

В Приложении 3 изучается метод стохастической аппроксимации и соответствующие подходы, использующие рекуррентные процедуры, которые позволяют найти решающее правило (т.е. ДФ), минимизирующее средний риск. Достаточно подробно проанализирована процедура Роббинса-Монро, задача нахождения корней уравнения регрессии, приведены известные условия сходимости процесса Роббинса-Монро. Эти результаты дополнены также общими рассуждениями о методе потенциальных функций в теории ООС, который часто воспринимается как специальный класс процедур Роббинса-Монро. Приведены условия сходимости процедур метода потенциальных функций.

Завершается эта часть пособия Приложением 4 с рассказом о задаче самообучения, или обучения «без учителя». Очень кратко, без лишних деталей обсуждается задача о самообучении с привлечением рекуррентной процедуры самообучения. Даются формулировки условий сходимости этого алгоритма.

Приложение 1

Метод КСА и детерминированные ООС

Ниже рассматривается общая задача ООС, решение которой основано на методе *конечно-сходящихся алгоритмов* (КСА) для решения целевых неравенств. Здесь возникает задача оценивания неизвестного структурного параметра опознающей системы, которая трактуется как задача решения счетной системы целевых неравенств. Эта задача, в свою очередь, решается с помощью рекуррентных схем в виде так называемых *алгоритмов с поощрением*, которые при определенных условиях сходятся за конечное число шагов.

П1.1 Экстраполяция функций, алгоритмы обучения, среднеквадратическое приближение

1. *Задача об экстраполяции функции.* Пусть $f(x)$ — вещественная функция, $x \in R^q$, с известными значениями в точках x_1, ..., x_m. Отсюда возникает задача о продолжении $f(x)$ на произвольные значения x.

Данная задача экстраполяции не является определенной, и ее решение ищется в заданном классе функций для функции, наилучшей в смысле некоторого критерия.

Для этого задается набор функций $\{\, a_i(x) \,\}$, $i = \overline{1, N}$, значения которых известны $\forall\, x \in R^q$; функцию $f(x)$ будем приближать линейной комбинацией функций

$$a_i(x): \; f(x) \sim \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)}\, a_k(x). \tag{$*$}$$

Требуется найти коэффициенты $\tau^{(k)}$ по заданным значениям $f(x)$ в точках x_1, ..., x_m.

Отметим, что персептронная схема Розенблатта в таком ключе допускает свою математическую переформулировку. Пусть x — описание изображения (набор реакций S-элементов, которые поступают на входы A-элементов при предъявлении персептрону данного изображения). A-элемент — это вещественная функция, определенная на множестве $\{ x \}$ всех выходов совокупности S-элементов.

Обозначая A-элементы через $a_1(x)$, ..., $a_N(x)$, где N — число A-элементов, будем полагать, что все множество изображений, т.е. входных сигналов, разбито на два непересекающихся класса. Считаем при этом, что эти классы не пересекаются в пространстве признаков; это значит, что не существует ни одной пары изображений из разных классов, для которых наборы реакций S-элементов будут одинаковыми.

Далее обозначим: $X^{(1)}, X^{(2)}$ — отображения исходных классов изображений, найденных с помощью S-элементов. По условию $X^{(1)}, X^{(2)}$ — не пересекаются: $X^{(1)} \bigcap X^{(2)} = \oslash$. Положим, что функция $f(x)$ определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in X^{(1)}; \\ -1, \text{ если } x \in X^{(2)}. \end{cases} \qquad (*)$$

Допустим, что возможна аппроксимация $(*)$. Тем самым задача о построении ООС сводится к подбору коэффициентов $\tau^{(k)}$, которые называются *весами* A-элементов. Если известны значения $f(x)$ на тренировочной последовательности x_1, ..., x_m, т.е. принадлежность каждого члена тренировочной последовательности к определенному классу, то веса A-элементов могут быть определены. Здесь важно понимать соответствие в $(*)$. Укажем на следующие часто используемые приближения:

A. $f(x_n) \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)} a_k(x_n) > 0, \qquad n = \overline{1, m},$

$\mathbf{B}_\varepsilon$. $\left| f(x_n) - \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)} a_k(x_n) \right| < \varepsilon, \qquad n = \overline{1, m},$

$\mathbf{C}_\alpha$. $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left| f(x_n) - \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)} a_k(x_n) \right|^\alpha = \min,$

где $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ — некоторые величины. Случай **A** отвечает приближению функции $f(x)$ линейной комбинацией функций $\{ a_k(x) \}$ по знаку, $\mathbf{B}_\varepsilon$ — равномерному, а $\mathbf{C}_\alpha$ — среднеквадратическому приближениям. В результате решения полученной системы уравнений или неравенств можно найти числа $\tau^{(k)}$, а затем вычислить согласно $(*)$ значения функции $f(x)$ в произвольной точке x.

Итак, задача об экстраполяции функции $f(x)$ сводится к решению систем уравнений или неравенств. Неравенства вида $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\varepsilon$ разрешимы не всегда. Уравнения, порождаемые задачей $\mathbf{C}_\alpha$, всегда разрешимы, а задача $\mathbf{C_2}$ может быть сведена к решению неравенств типа $\mathbf{B}_\varepsilon$. В самом деле, решение задачи $\mathbf{C_2}$ совпадает с решением *нормальной системы уравнений*:

$$A\tau = \psi, \tag{П1}$$

где матрица $A = \bigl(A_{ij}\bigr),\ i, j = \overline{1, N}$, векторы $\tau = \bigl(\tau^{(i)}\bigr)$, $\psi = \bigl(\psi^{(i)}\bigr)$:

$$A_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} a_i(x_n)\, a_j(x_n), \qquad \psi^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} a_i(x_n)\, f(x_n).$$

Зададим число $\varepsilon > 0$ и заменим уравнение (П1) неравенствами

$$\bigl|\, (b_i, \tau) - \psi^{(i)} \,\bigr| < \varepsilon, \qquad i = \overline{1, N}, \tag{П2}$$

где векторы $b_i = \bigl(A_{ij}\bigr)$, $j = \overline{1, N}$, выражение (a, b) означает скалярное произведение векторов a и b. Видно, что неравенства (П2) имеют вид неравенств $\mathbf{B}_\varepsilon$.

2. *Рекуррентные алгоритмы обучения.* Ограничения на память системы сводятся к требованию рекуррентности алгоритма обучения. Это означает, что алгоритм обучения имеет вид уравнения (1) (см. главу 1). При построении некоторого алгоритма обучения надо указать алгоритм изменения параметров σ_n и требовать, чтобы размерность вектора параметров σ_n была минимальной или ограниченной равномерно по n.

Рекуррентный алгоритм (1) называется *алгоритмом с поощрением*, если его можно представить в виде соотношений (2), (3) (глава 1). Если система работает правильно ($\theta_n = 0$), то вектор весов на n-м шаге алгоритма не изменяется; в противном случае изменяется по некоторому закону.

Там же вводится понятие конечно-сходящегося алгоритма (КСА) как алгоритма с поощрением (2), (3). Таким образом, если алгоритм обучения конечно-сходящийся, то опознающая система «обучается» за конечное (неизвестное заранее) число шагов. При этом обученная система не обязательно правильно опознает все элементы тренировочного множества. Правильно классифицироваться будет лишь остаток бесконечной тренировочной последовательности.

3. *Среднеквадратическое приближение.* Рассмотрим еще задачу $\mathbf{C_2}$ о среднеквадратической аппроксимации функции $f(x)$, где в качестве алгоритма берется модифицированная процедура метода Гаусса решения систем нормальных линейных уравнений в случае, когда они могут быть вырождены или плохо обусловлены.

Требуется найти компоненты $\tau^{(k)}$ вектора τ для минимизации квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{m} \Big| \, f(x_n) - \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)} \, a_k(x_n) \, \Big|^2, \qquad \text{(П3)}$$

где x_1, ..., x_m — заданные точки тренировочной последовательности в пространстве R^q; $a_k(x)$ — известные функции (A-элементы), а $f(x)$ — функция с известными значениями на тренировочной последовательности. Вектор τ, доставляющий min форме (П3), называют *оптимальным.*

Этот вектор τ должен удовлетворять системе линейных уравнений (П1), в которой определитель матрицы A равен или близок к нулю, что усложняет использование методов, в которых задействована процедура обращения матрицы A. Из-за возможности вырождения A предлагается искать не решение системы уравнений (П1), а решение системы неравенств (П2) при некотором $\varepsilon > 0$. При этом алгоритм решения при неособой A и достаточно малом ε должен обеспечить совпадение данного решения с оптимальным вектором τ. Также надо, чтобы при решении системы неравенств (П2) получаемое решение было равномерно ограничено по m.

С этой целью вводится понятие *L-оптимального алгоритма* решения системы неравенств (П2). Решение, найденное с его помощью, удовлетворяет следующим условиям:

1) при обратимости матрицы A в результате применения L-оптимального алгоритма, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая, будем иметь оптимальный вектор τ;

2) полученное с помощью L-оптимального алгоритма решение неравенств (П2) будет равномерно по m ограничено.

Подробное описание L-оптимального алгоритма приведено в работе [99]; там же имеется утверждение, согласно которому при выполнении неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\, \tau^{(j)} - \psi^{(i)} \right| < C\varepsilon, \qquad i = \overline{1, N},$$

для компонент вектора τ справедлива оценка: $|\,\tau^{(k)}\,| \leq C\delta^{-r}$, $\delta = \varepsilon^2$, $r + q = N$, где постоянная C зависит от величин $\max_{x \in R^q, i} |\, a_i(x)\,|$, $\max_{x \in R^q} |\, f(x)\,|$; здесь $\alpha_{ij} = (a_i, a_j)/m$.

П1.2 Алгоритмы обучения с поощрением

Вновь обратимся к главе 1. Алгоритм (2), (3), как уже было сказано, является алгоритмом с поощрением. Там же рассматривалась некоторая вещественная заданная функция $\varphi(x, \tau)$, $x \in X \subset R^q$, $\tau \in R^p$, для которой были бы выполнены условия 1) – 3) и определен алгоритм с поощрением (4). Утверждалось при этом, что алгоритм (4) является конечно-сходящимся при выборе соответствующих коэффициентов. Значения этих коэффициентов были указаны.

Главный смысл этого утверждения, которое в работе [99] было названо *основной теоремой*, состоит в доказательстве существования постоянных, задающих величину шага в направлении градиента и обеспечивающих сходимость алгоритма за конечное число шагов; причем, отметим, эти постоянные пересчитываются через известные на каждом шаге величины.

Важно еще подчеркнуть, что идея доказательства основной теоремы основана на убывании построенной функции Ляпунова, убывающей на траекториях исследуемого алгоритмического процесса.

Задача ООС персептронного вида может быть решена с помощью КСА с поощрением. Пусть имеются два множества (два класса) изображений $X^{(1)}, X^{(2)}$. Считаем, что они не пересекаются и их можно разделить плоскостью: это значит, что $\exists\, v$ — вектор и число γ, характеризующие плоскость, такие что: $(x, v) + \gamma > 0$, если $x \in X^{(1)}$ и $(x, v) + \gamma < 0$, если $x \in X^{(2)}$.

Для нахождения таких v и γ их оценки получают на основе информации о принадлежности элементов тренировочной последовательности x_1, x_2, ... к определенному классу. Требуется найти плоскость $\{\, v, \gamma\,\}$, разделяющую соответствующим образом тренировочное множество.

Введем функцию $f(x)$ $(*)$ из раздела П1.1. Тогда задача будет состоять в нахождении решения относительно v и γ для системы неравенств

$$f(x_n)\,\big[\,(x_n, v) + \gamma\,\big] > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

которые можно переписать так:

$$\big(a(x_n),\, \tau\big) > 0, \qquad a(x) \equiv \begin{pmatrix} f(x)\, x \\ f(x) \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} v \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В этих неравенствах, решаемых относительно τ, векторы $a(x_n)$ — заданные. Итак, задача о построении плоскости, разделяющей два множества, сводится к задаче о нахождении решения однородной системы неравенств.

Если надо построить ООС, разделяющую несколько классов, то действуют по следующей схеме. Пусть $X^{(1)}$, ..., $X^{(l)}$ — классы изображений. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая на каждом классе принимает свое постоянное значение. При условии $\exists$–я такого вектора τ, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ разрешима система неравенств

$$\big|\, f(x) - (x, \tau)\,\big| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in X = \bigcup_{i=1}^{l} X^{(i)}, \tag{П4}$$

некоторый КСА (например, алгоритм «Полоска» [99]) найдет этот вектор за конечное число шагов.

Обычно предположение о разрешимости системы (П4) не выполняется. Полагая, что каждый класс $X^{(1)}$, ..., $X^{(l)}$ отделен от остальных плоскостью, можно, используя какой-либо алгоритм нахождения решения однородной системы неравенств, найти эти плоскости с помощью тренировочной последовательности и построить разделяющую эти классы систему. Данную задачу можно также переформулировать к задаче, которая рассматривалась в основной теореме.

Отметим еще, что для надежности работы ООС, обучаемой различению двух классов изображений, надо выбирать разделяющую плоскость, наиболее удаленную от изображений тренировочного множества. Такой плоскостью будет являться плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего две ближайшие точки выпуклых оболочек классов изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, перпендикулярно этому отрезку.

П1.3 Нелинейная разделимость классов изображений

Рассмотренные выше алгоритмы ООС используются, как правило, для построения линейных разделяющих дискриминантных функций (ДФ). В случае, если классы изображений разделить плоскостью не удается, то можно воспользоваться следующими схемами построения более сложных ДФ.

1. В *первом* случае ввести дополнительные A-элементы, с помощью которых попытаться отобразить исходные классы изображений в новое, так называемое, *спрямляющее пространство* так, чтобы образы классов были бы линейно-разделимыми. В новом пространстве плоскость является ДФ.

2. Во *втором* случае попытаться построить более сложные, чем линейные, ДФ, что связано с необходимостью хранить в компьютерной памяти большое число параметров. При этом процесс оценки параметров становится сложным и оперирует большими объемами тренировочных множеств.

Изучим ниже задачу о переходе в спрямляющее пространство. Пусть $x \in X$; $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... — вещественные функции, определенные на множестве X. При введении операций сложения и умножения на вещественное число множество таких функций представляется линейным.

Поставим задачу об аппроксимации вещественной функции $f(x)$, $x \in X$, с помощью системы A-элементов, в качестве которых берутся функции $\{ a_n(x) \}$. Для этого введем в рассматриваемом линейном пространстве понятие близости его элементов, прибегнув к следующим двум видам расстояния:

1) равномерное:

$$\| f(x) \|_C = \sup_{x \in X} \, | f(x) |; \tag{П5}$$

2) среднеквадратическое:

$$\| f(x) \|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_X | f(x) |^2 \, F(dx)}. \tag{П6}$$

В формуле (П6) можно предположить, что на множестве X задано некоторое распределение $F: \; F(X) = 1$. Обозначение C и L_2 в соотношениях (П5), (П6) отвечает множествам функций с данными нормами. Если считать, что x — случайная величина со значениями в X, с распределением F, то в этом случае норма (П6) запишется так:

$$\| f(x) \|_{L_2} = \sqrt{M\{ \, | f(x) |^2 \, \}} = \left(\int\limits_\Omega \left| f(x(\omega)) \right|^2 dP \right)^{1/2}.$$

Аналогичный вероятностный подход можно использовать и для нормы (П5).

Пусть имеется система элементов a_1, a_2, ... линейного нормированного пространства. Эта система называется *полной*, если любой элемент этого пространства (в его метрике) может быть приближен сколь угодно точно линейными комбинациями элементов исходной системы. Иначе говоря, *линейная оболочка* такой системы является плотной в этом пространстве. В случае ограниченной плотности у функции распределения F пространство $C \subset L_2$, причем полная система элементов в C будет полной и в L_2.

В теории ООС функция $f(x)$ является ДФ, а приближение функции$f(x)$ линейной комбинацией A-элементов — есть ДФ, построенная в результате «обучения» системы. Понятно, что чем лучше функция $f(x)$ будет аппроксимирована линейной комбинацией функций $\{ \, a_j(x) \, \}$, тем меньше будет ошибаться «обученная» система. Для уяснения этого утверждения введем понятие о вероятности ошибки распознавания.

Рассмотрим, простоты ради, два класса изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2}$: $X^{(1)} \bigcup X^{(2)} = X$. Пусть $a_1(x)$, ..., $a_N(x)$ — фиксированный набор A-элементов, полученных в приближении функции $f(x)\,(*)$ путем использования линейной комбинации функций $\{\, a_j(x) \,\}_{j=\overline{1,N}}$. Тогда *вероятностью ошибки распознавания* называется величина

$$p(\tau) = F\biggl\{\, x \,\bigl|\, f(x) \sum_{k=1}^{N} \tau^{(k)}\, a_k(x) \le 0 \,\biggr\},$$

где $\tau = \{\, \tau^{(k)} \,\}_{k=\overline{1,N}}$; F — распределение на X : $P(X) = 1$. При наличии нескольких классов изображений вероятность ошибки распознавания вводится аналогичным образом.

Теорема П1. *Пусть система функций $\{\, a_j(x) \,\}_{j=\overline{1,\infty}}$ является полной в L_2. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$–ют: число N_0 и коэффициенты $\tau^{(1)}$, ..., $\tau^{(N)}$ такие, что при $N \ge N_0$ имеет место оценка $p(\tau) < \varepsilon$.*

Подытожим. Итак, в том случае, если система A-элементов полная в L_2, то для произвольной ДФ $f(x)$ существует конечный набор A-элементов такой, что при некотором наборе весов этих A-элементов ООС будет «ошибаться» как угодно редко.

Хотелось бы далее затронуть вопрос о пороговых функциях, которые играют заметную роль при построении ООС. С их помощью описывают работу нейронных сетей и, в принципе, благодаря полной системе пороговых функций возможно построить ООС, способную реализовать сколь угодно сложную ДФ.

Для этого опишем эти функции и сформулируем утверждение об их полноте. Пусть X — множество изображений, а $l(x)$ — линейный функционал на X. *Пороговой функцией* на X называется функция вида: $a(x) = \theta[\, l(x) - \gamma \,]\,(**)$, где γ — вещественное число, $\theta(z)$ — *функция Хевисайда*: $\theta(z) = \{\, 1,\ \text{если } z \ge 0;\ 0,\ \text{если } z < 0 \,\}$. Обозначим через $\{\, a \,\}$ множество пороговых функций вида $(**)$.

Теорема П2. *Пусть X — произвольное ограниченное замкнутой множество из R^q. Тогда любую заданную на X непрерывную вещественную функцию $f(x)$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить линейной комбинацией конечного числа пороговых функций из $\{\, a \,\}$.*

Из этой теоремы следует, что для обеспечения требуемого приближения достаточно взять довольно узкий подкласс пороговых функций $\{\, a \,\}$, а именно: линейные функционалы $l(x) = (p, x)$, определяемые векторами p с целочисленными компонентами и числами γ_j (т.е. пороги), которые могут выбираться из неравенств $0 \le \gamma_j \le N$.

Завершим параграф коротким рассказом о комитете неравенств, когда обсуждается случай построения разделяющей ДФ без предварительного перехода исходного пространства в спрямляющее.

Пусть, как и раньше, множество изображений $X \subset R^q$, $X = X^{(1)} \bigcup X^{(2)}$, $X^{(1)} \bigcap X^{(2)} = \oslash$. Кроме того, предположим, что $\exists\, L_j = \left\{ c_*^{(j)},\, \gamma_*^{(j)} \right\}$, $j = \overline{1, 2N+1}$ — конечное число плоскостей таких, что $\forall\, x \in X$, имеет место неравенство

$$f(x) \sum_{j=1}^{2N+1} \operatorname{sign}\left[\, \left(c_*^{(j)},\, x\right) + \gamma_*^{(j)} \,\right] > 0, \tag{П7}$$

где функция $f(x)$ имеет вид $(*)$, а $\operatorname{sign} z$ — это знак z. Геометрически неравенство (П7) означает, что каждая плоскость L_j «голосует» за принадлежность элемента x множеству $X^{(1)}$ или $X^{(2)}$. При этом, если $\operatorname{sign}\left[\, \left(c_*^{(j)},\, x\right) + \gamma_*^{(j)} \,\right] > 0$, то плоскость L_j относит x к классу $X^{(1)}$; если это неравенство имеет обратный знак — то к классу $X^{(2)}$. В целом же система классифицирует x по большинству поданных «голосов». Отсюда и такое название: набор плоскостей $\{\, L_j \,\}$ указанного вида называется *комитетом неравенств*, основанном на принципе большинства голосов; число $2N+1$ называется здесь *порядком комитета*. В работе [99] этот набор назван *комитетом-I*.

Можно дать другие определения комитетов неравенств. К примеру, пусть имеется набор плоскостей $L_j = \left\{ c_*^{(j)},\, \gamma_*^{(j)} \right\}$, $j = \overline{1, N}$, таких, что $\forall\, x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \min_j \left[\, \left(c_*^{(j)},\, x\right) + \gamma_*^{(j)} \,\right] > 0,$$

означающее, что если все плоскости L_j «голосуют» за x, т.е. если $\left(c_*^{(j)},\, x\right) + \gamma_*^{(j)} > 0$, $\forall\, j$, то $x \in X^{(1)}$; иначе $x \in X^{(2)}$. Такой набор плоскостей $\{\, L_j \,\}$ называют *комитетом плоскостей*, основанном на принципе единогласия, или *комитетом-II*, а число N — порядком этого комитета.

Когда существуют указанные комитеты? Относительно комитета-II ответ прост: если выпуклая оболочка множества $X^{(1)}$

отделена положительным расстоянием от множества $X^{(2)}$, то комитет-II конечного порядка существует. Для комитета-I имеет место такое утверждение: если классы $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ ограничены и разделены положительным расстоянием, то существует комитет-I конечного порядка. Из этого утверждения следует, что в принятых условиях ДФ может быть аппроксимирована «по знаку» линейной комбинацией пороговых функций.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое линейное, равномерное и среднеквадратическое приближение?
2. В чем состоит смысл основной теоремы для алгоритма обучения с поощрением?
3. Какая функция называется пороговой?

Приложение 2

Элементы статистической теории ООС

В том случае, если в пространстве признаков классы изображений пересекаются, формирование схем безошибочной классификации изображений становится невозможным. И тогда надо использовать новые методы построения дискриминантных функций (ДФ) или, иначе, решающих правил, в которых задействован аппарат статистических решений. Отметим, что большинство работ по распознаванию образов использует статистические методы. В теории ООС статистические процедуры принятия решений играют важную роль, как и во всякой теории, оперирующей недетерминированными объектами.

П2.1 Задача построения ООС в вероятностной постановке

К задаче обучения можно подойти как к задаче нахождения решающего правила из условия минимизации некоторого функционала, называемого *функционалом среднего риска.*

Пусть $x(\omega)$ — случайная величина (с.в.), $x:\ \Omega \to R^q$ и пространство элементарных событий Ω разбито на два непересекающихся подмножества Ω_{1*} и Ω_{2*}, $\Omega = \Omega_{1*} \bigcup \Omega_{2*}$, $\Omega_{1*} \bigcap \Omega_{2*} = \oslash$. Если подмножества $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ не пересекаются, тогда по наблюдаемым реализациям с.в. x можно однозначно определить, какому подмножеству — Ω_{1*} или Ω_{2*} принадлежит данное элементарное событие. Если считать Ω_{1*} и Ω_{2*} классами изображений, то получим задачу построения ДФ в пространстве признаков в виде пространства значений с.в. $x(\omega)$. В детерминированной постановке именно так рассматривалась эта задача в Приложении 1.

В случае же, если классы изображений $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ пересекаются в пространстве признаков, нельзя достоверно определить, элементарному событию из какого класса отвечает какая-либо наблюдаемая реализация с.в. Теория статистических решений предоставляет способ, по которому после изучения события $\{ x(\omega) = x \}$, где x — фиксированная точка пространства R^q, можно с минимальной вероятностью ошибки ответить на вопрос, какому подмножеству: Ω_{1*} или Ω_{2*}, отвечает значение с.в. $x(\omega)$.

При классификации решений различают ошибки разного рода. Пусть имеются две гипотезы: $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$, означающая, что $\omega \in \Omega_{1*}$, если $\omega : \ x(\omega) = x$, и $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$, где $\omega \in \Omega_{2*}$. Считается, что *ошибка первого рода* допускается тогда, когда отклоняется гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ при том, что она верна, и допускается *ошибка второго рода*, если принимается гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$, хотя справедлива гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. Ошибку первого рода еще называют *пропуском цели*, а ошибку второго рода — *ложной тревогой.*

Примем далее, что $s_*(\omega)$ — функция, определенная на Ω, такая, что $\{ s_* > 0 \} = \Omega_{1*}$, $\{ s_* \le 0 \} = \Omega_{2*}$. Введем *матрицу стоимости* (c_{ij}), $i, j = 1, 2$, с числовыми элементами c_{ij}, которые представляются как *штраф*, выплачиваемый, если элементарное событие $\omega \in \Omega_{i*}$, а относится принимающим гипотезу к классу Ω_{j*}.

Поясним сказанное. Введем вещественную функцию $f(x)$, определенную в R^q и рассматриваемую на ДФ. Получим тогда разбиение Ω на непересекающиеся подмножества Ω_1 и Ω_2 :

$$\Omega_1 = \big\{ f(x(\omega)) > 0 \big\}, \qquad \Omega_2 = \big\{ f(x(\omega)) \le 0 \big\}.$$

В этом случае c_{ij} соответствует элементарным событиям из множества $\Omega_{i*} \bigcap \Omega_j$. Для заданной функции $f(x)$ можно составить вероятностную величину

$$W = \sum_{i,j=1}^{2} P\big(\Omega_{i*} \cap \Omega_j\big)\, c_{ij}, \tag{П8}$$

которая называется *средней ошибкой* или *средним риском.*

При выборе различных $f(x)$ будем получать различные разбиения пространства Ω, а тем самым и различные значения средней ошибки. Задача заключается в поиске функции $f(x)$, дающей минимальное в некотором классе ДФ (решающих правил) значение величине W. Функция $f(x)$ в этом случае называется *оптималь-*

ной. Для вещественной $f(x)$ оптимальную функцию можно найти с помощью так называемого *оптимального байесова правила.*

Это правило получается следующим образом. Пусть для простоты $c_{11} = c_{22} = 0$, т.е. при правильном распознавании система не штрафуется. Тогда величина (П8) будет иметь вид

$$W = c_{12}\, P\big(\Omega_{1*} \cap \Omega_2\big) + c_{21}\, P\big(\Omega_{2*} \cap \Omega_1\big), \tag{П9}$$

где c_{12}, c_{21} называются *весами ошибок* первого и второго рода соответственно.

Обозначим затем через $I_{\Omega_{1*}}$, $I_{\Omega_{2*}}$, I_{Ω_1}, I_{Ω_2} индикаторы событий $\Omega_{1*}, \Omega_{2*}, \Omega_1$, Ω_2, а через $D_\varepsilon(x)$ — шар достаточно малого радиуса ε с центром в точке x. Перепишем величину W (П9) в виде: $W = M\,\varphi(x)$ со с.в. $\varphi(x)$, зависящей от x, как от параметра:

$$\varphi(x) = M\big\{\, c_{12}\, I_{\Omega_{1*}}\, I_{\Omega_2} + c_{21}\, I_{\Omega_{2*}}\, I_{\Omega_1} \,\big|\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\big\}.$$

Введем далее индикатор $I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}}$ события $\{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\}$ и воспользуемся определением условного мат. ожидания, чтобы переписать $\varphi(x)$ на множестве $\{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\}$ так:

$$\varphi[\, x(\omega) \,]\, I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}} = \big(M I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}} \big)^{-1} \times$$

$$\times M\big\{ \big(c_{12}\, I_{\Omega_{1*}}\, I_{\Omega_2} + c_{21}\, I_{\Omega_{2*}}\, I_{\Omega_1}\big)\, I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}} \big\}. \tag{П10}$$

Радиус ε шара $D_\varepsilon(x)$ предполагается достаточно малым, поэтому событие $\{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\}$ принадлежит либо подмножеству Ω_1, либо подмножеству Ω_2 в случае, если $f(x)$ — непрерывная функция x. Так как функция $\varphi(x)$ для оптимального решающего правила $f_{opt}(x)$ должна принимать наименьшее значение, то из выражения (П10) вытекает, что функция $f_{opt}(x)$ в точке x должна определяться условиями

$$f_{opt}(x)\ (> \bigvee <)\ 0, \quad \text{если} \quad c_{12}\, M\big\{\, I_{\Omega_{1*}}\, I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}} \,\big\}\ (> \bigvee <)$$

$$(> \bigvee <)\ c_{21}\, M\big\{\, I_{\Omega_{2*}}\, I_{\{\, x(\omega)\in D_\varepsilon(x)\,\}} \,\big\},$$

т.е. знак функции $f_{opt}(x)$ зависит от выполнения знака неравенства

$$\frac{P\big(\{\, s_* > 0 \,\} \cap \{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\}\big)}{P\big(\{\, s_* < 0 \,\} \cap \{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\}\big)} \; (> \bigvee <) \; \frac{c_{21}}{c_{12}} \equiv \theta, \tag{П11}$$

$$c_{12} > 0, \; c_{21} > 0,$$

где через $(> \bigvee <)$ обозначено альтернативное неравенство: $\{>\}$ или $\{<\}$.

Величина θ называется *коэффициентом подобия*. Перепишем формулу (П11). Для этого введем условную плотность вероятности: $p\big(x \,|\, \Omega_{1*}\big)$ — *условная плотность распределения изображений* первого класса, $p\big(x \,|\, \Omega_{2*}\big)$ — условная плотность распределения изображений второго класса:

$$\begin{aligned} p(x \,|\, \Omega_{1*}) &= \lim\nolimits_{\varepsilon \to 0} \; \frac{P\big(\{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\} \cap \Omega_{1*}\big)}{p_1 \, V_\varepsilon(x)}, \\ p(x \,|\, \Omega_{2*}) &= \lim\nolimits_{\varepsilon \to 0} \; \frac{P\big(\{\, x(\omega) \in D_\varepsilon(x) \,\} \cap \Omega_{2*}\big)}{(1 - p_1) \, V_\varepsilon(x)}, \end{aligned} \tag{П12}$$

где $V_\varepsilon(x)$ — лебегов объем шара $D_\varepsilon(x)$; $p_1 = P(\Omega_{1*})$ — априорная вероятность появления изображений первого класса. Считаем, конечно же, что пределы (П12) существуют в каждой точке x.

Правило определения $f_{opt}(x)$ теперь можно записать в виде (см. соотношение (П11)):

$$\frac{p(x \,|\, \Omega_{1*})}{p(x \,|\, \Omega_{2*})} \; (> \bigvee <) \; \frac{(1 - p_1)\, \theta}{p_1} \iff f_{opt}(x) = \pm\, 1. \tag{П13}$$

Итак, заключаем, что решающее правило, минимизирующее средний риск, сравнивает отношение условных плотностей с некоторым пороговым значением θ, которое является постоянным для определенных значений c_{12} и c_{21}. Отношение плотностей (П13) иногда называют *отношением правдоподобия*.

Теория статистических решений часть интерпретирует задачу ООС как задачу нахождения или оценки условных плотностей распределения вероятностей в пространстве описаний (пространстве признаков). Найти оценки этих плотностей можно, определив относительные частоты, с которыми появляется данное изображение.

На практике часто пользуются знанием того, к каким известным законам принадлежат условные распределения. Тогда по обучающей выборке достаточно будет оценить параметры предполагаемых законов.

П2.2 Критерий Вальда

Ниже рассмотрим очень кратко понятие о последовательном *критерии отношения вероятностей Вальда* [81, 86]. В сложных задачах каждое изображение x может характеризоваться набором x^N из N параметров $\left(x^{(1)}, ..., x^{(N)}\right)$, т.е. имеем пространство признаков размерности N. Для байесова оптимального правила (в случае полного набора признаков x^N) для отнесения изображения к одному из двух классов изображений надо: 1) вычислить отношение условных плотностей вероятностей: $p(x^N \,|\, \Omega_{1*})/p(x^N \,|\, \Omega_{2*})$ и 2) сравнить его с отношением подобия λ_N, которое задается величинами априорных вероятностей и стоимостей ошибок.

Пусть замеры $x^{(1)}, ..., x^{(N)}$ служат для построения такой ДФ, которая давала бы разделение классов при возможно меньшем числе замеров (признаков). Для этого воспользуемся последовательным критерием отношения вероятностей Вальда, который позволяет в среднем сократить время (число) измерений и, тем самым, ускорить процедуру принятия решения.

Обозначим через x^n, $n \le N$, набор, состоящий из первых n признаков $\left\{ x^{(1)}, ..., x^{(n)} \right\}$ изображения x. Соответствующие условные плотности распределения внутри классов Ω_{1*} и Ω_{2*} обозначим через $p(x^n \,|\, \Omega_{1*})$ и $p(x^n \,|\, \Omega_{2*})$. На n-ом шаге последовательного измерения признаков вычислим отношение вероятностей:

$$\lambda_n = \frac{p(x^n \,|\, \Omega_{1*})}{p(x^n \,|\, \Omega_{2*})}. \tag{П14}$$

Выражение (П14) при $n = N$ ведет к байесовой ДФ. Вычислив λ_n,, применяем такую схему отнесения изображения $x(\omega) = x$ к одному из двух классов. Возьмем два каких-либо положительных числа A и B, $A < B$,, которые называются *порогами*; затем принимаем решение: a) $\omega \in \Omega_{1*}$, если $\lambda_n \ge B$;, b) $\omega \in \Omega_{2*}$, если $\lambda_n \le A$;, c) надо вычислить λ_{n+1}, если $A < \lambda_n < B$.. В случае c) производим дополнительный замер x^{n+1}, а после вычисления λ_{n+1} процедуру принятия решения с теми же A и B повторяем.

Предположим, что гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ истинна, и мы хотим получить решение в пользу этой гипотезы с относительной вероятностью $\geq 1 - e_{21}$, т.е. если принято решение отнести x к первому классу изображений, то относительное число ошибок при такой классификации не должно превышать e_{21}. Если же истинна гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$, то решение в пользу этой гипотезы должно иметь относительную вероятность $\geq 1 - e_{12}$, т.е. при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$ относительная вероятность события $\{\,\omega \in \Omega_{1*}\,\} \cap \{\,x(\omega) = x\,\}$ не превосходила бы e_{12}. Эти условия позволяют выбирать нужные пороги A и B. Покажем, как надо их выбрать.

Пусть задано изображение x. Обозначим через $D^n_\varepsilon(x^n)$ шар малого радиуса ε с центром в точке x^n; шар берется в n-мерном пространстве признаков. Введем величину

$$e_n(x) = \lim_{\varepsilon} \bigl(V^n_\varepsilon(x^n)\bigr)^{-1} P\bigl(\{\,x^n(\omega) \in D^n_\varepsilon(x^n)\,\} \cap \Omega_{1*}\bigr) = \\ = p_1 p\bigl(x^n \,|\, \Omega_{1*}\bigr), \tag{П15}$$

где $p_1 = P(\Omega_{1*})$, $V^n_\varepsilon(x^n)$ — объем шара в предположении, что соответствующие плотности существуют. Величина $p_n^{-1}(x)\, e_n(x)$ выражает относительную частоту ошибок, если принята гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$;

$$p_n(x) = \lim_{\varepsilon} \bigl(V^n_\varepsilon(x^n)\bigr)^{-1} P\bigl\{\,x^n(\omega) \in D^n_\varepsilon(x^n)\,\bigr\}.$$

Аналогично, если принята гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ величина $p_n^{-1}(x) \times \times \bigl[\,p_n(x) - e_n(x)\,\bigr]$ выражает относительную частоту ошибок.

Будем считать, что n — наименьшее число, для которого для изображения x впервые оказалось выполненным неравенство $\lambda_n \geq B$, либо $\lambda_n \leq A$. Пусть для определенности $\lambda_n \geq B$. Тогда в силу соотношения (П15) имеем

$$B \leq \frac{p\bigl(x^n \,|\, \Omega_{1*}\bigr)}{p\bigl(x^n \,|\, \Omega_{2*}\bigr)} = \frac{(1 - p_1)\, e_n(x)}{p_1 \bigl[\,p_n(x) - e_n(x)\,\bigr]}, \tag{П16}$$

или

$$p_n^{-1}(x)\, e_n(x) \geq \left(1 + \frac{1-p_1}{p_1 B}\right)^{-1}.$$

Итак, относительное число правильных решений $p_n^{-1}(x)\, e_n(x)$ при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ удовлетворяет неравенству (П16). Если же требуется, чтобы решение в пользу истинности гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ принималось с относительной вероятностью $\geq 1 - e_{21}$, то число B надо найти из неравенства

$$\left(1 + \frac{1-p_1}{p_1 B}\right)^{-1} \geq 1 - e_{21},$$

или

$$B \geq \frac{1-p_1}{p_1} \cdot \frac{1-e_{21}}{e_{21}}. \tag{П17}$$

Аналогично поступаем и в случае, если выполнено неравенство $\lambda_n \leq A$ и принимается истинной гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. Тогда приходим к оценке:

$$A \geq \frac{(1-p_1)\, e_n(x)}{p_1 \left[\, p_n(x) - e_n(x)\, \right]},$$

или

$$1 - p_n^{-1}(x)\, e_n(x) \geq \left(1 + \frac{p_1 A}{1-p_1}\right)^{-1},$$

где левая часть неравенства: $1-p_n^{-1}(x)\, e_n(x)$ — относительное число правильных решений, которое получается при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. При выполнении требования

$$1 - p_n^{-1}(x)\, e_n(x) \geq 1 - e_{12},$$

число A надо выбирать из условия

$$A \leq \frac{e_{12}}{1-e_{12}} \cdot \frac{1-p_1}{p_1}. \tag{П18}$$

Таким образом, если пороги A и B выбраны из неравенств (П17), (П18), то при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ гарантируется, что относительная вероятность ошибки $\leq e_{21}$, а при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$ относительная вероятность ошибки $\leq e_{12}$. Здесь относительная вероятность характеризует отношение числа ошибочных решений к числу всех принимаемых решений. Отметим также, что величины e_{12} и e_{21} могут быть произвольными из промежутка $[0, 1]$. Из неравенств (П17), (П18) получим неравенство $A \le B$, если $e_{12} + e_{21} \le 1$. При $e_{12} + e_{21} > 1$ возможно $A > B$ и некоторые изображения, для которых $B < \lambda_n < A$, будут считаться как принадлежащие одновременно двум классам. Как правило, величины e_{12} и e_{21} имеют малые значения, поэтому каждое изображение может быть отнесено лишь к одному из классов.

Рассмотренная выше процедура «сортировки» или, иначе, классификации, которая делит все множество изображений X на три подмножества: $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и $X^{(0)}$. Множество $X^{(1)}$ состоит из изображений, для которых величина λ_n впервые при замерах $x^{(1)}$, ..., $x^{(n)}$ выходит за интервал (A, B) вправо; элементы множества $X^{(1)}$ тогда принимаются как отвечающими первому классу изображений. Множество $X^{(2)}$ включает в себя изображения, для которых λ_n осуществляет первый выход за интервал (A, B) влево — это множество отвечает второму классу изображений. Множество $X^{(0)}$ состоит из изображений, для которых все величины λ_n, $n = \overline{1, N}$, оказались в интервале (A, B); $X^{(0)}$ называется *множеством неопределенности* (*отказа*) и оно отвечает условиям, когда решение не может быть принято.

Отметим здесь также, что с ростом числа замеров множества $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ будут лишь расширяться, а множество $X^{(0)}$ — только сужаться. И еще: с некоторыми результатами процедур, связанных с оптимальными байесовыми критериями в многоальтернативной задаче распознавания, можно будет более детально ознакомиться по работам [74, 99].

Вопросы для самоконтроля

1. При классификации изображений различают ошибки разного рода. Какие и в чем они заключаются?
2. Сформулируйте оптимальное байесово правило.
3. Что такое отношение правдоподобия?
4. В чем состоит Критерий Вальда?

Приложение 3

Метод стохастической аппроксимации

В этом параграфе будут изучены некоторые подходы, основанные на использовании рекуррентных процедур, которые позволяют по реализациям функции риска найти решающее правило (дискриминантную функцию (ДФ)), минимизирующее средний риск. Данные подходы обрели общее название *методов стохастической аппроксимации* (МСА).

Некоторые известные процедуры ООС с учетом используемых итеративных процедур, минимизирующих некоторые функционалы в виде средних значений от функций качества, могут рассматриваться как некоторые процедуры стохастической аппроксимации.

П3.1 Процедура Роббинса-Монро

Работы [132, 135] заложили основы МСА: в первой из них был предложен итеративный метод, по которому по реализации можно было найти корень уравнения регрессии; во второй из обозначенных предлагалась стохастическая процедура для нахождения минимума условного мат. ожидания (функционала среднего риска).

В дальнейшем, особенно после обнаружения связи МСА с рекуррентными процедурами обучения [107], поток работ по этому методу стал поистине бурным и широким (отметим здесь только некоторые публикации [15, 16, 27, 28, 33, 38, 46, 47, 51, 52, 54, 59, 61, 67, 75, 84, 85, 107-110, 114, 115, 121, 131].

Остановимся на постановке задачи подробнее. Будем считать, что ξ — с.в. такая, для которой $\xi: \ \Omega \to R^q$, а $Q(\xi, \tau)$ — некоторая функция качества, где τ — векторный параметр. Надо найти наименьшее значение функционала среднего риска:

$$W(\tau) \equiv M\,Q(\xi, \tau) \ =$$

$$= \int\limits_{\Omega} Q(\xi,\tau)\,dP = \int\limits_{R^q} Q(x,\tau)\,F(dx) \equiv M_x Q(x,\tau), \tag{П19}$$

где F — распределение с.в. ξ.

Отметим здесь, что задача $\mathbf{C_2}$ (см. раздел П1.1) сводится к такой же задаче, если там положить

$$Q(x,\tau) = \bigl|\, f(x) - \bigl(a(x),\,\tau\bigr)\,\bigr|^2. \tag{П20}$$

Тогда функционал (П19) примет вид

$$W(\tau) = \int\limits_{R^q} \bigl|\, f(x) - \bigl(a(x),\,\tau\bigr)\,\bigr|^2\,F(dx). \tag{$*$}$$

При условии, что функция $Q(x,\tau)$ дифференцируема по параметру τ, задача минимизации функционала (П19) сводится к задаче нахождения корней *уравнения регрессии*:

$$\int\limits_{R^q} \nabla_\tau\, Q(x,\tau)\,F(dx) = 0, \tag{П21}$$

где $\nabla_\tau\,(\cdot)$ — градиент по τ; для векторного τ соотношение (П21) дает систему уравнений для определения τ. Следует указать, что для известного F уравнение (П21) в общем случае представляет систему нелинейных уравнений относительно τ. Для $Q(x,\tau)$ вида (П20) имеем линейную систему уравнений (П21).

В задачах ООС распределение F, как правило, неизвестно; при этом имеется обучающая последовательность x_1, x_2, ..., для которой считается, что функция $\nabla_\tau\, Q(x,\tau)$ может быть измерена в точках $x = x_1$, x_2, ... С учетом этих предположений можно построить алгоритм последовательного перебора параметра τ_n по правилу:

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n\,\nabla_\tau\, Q(x_n,\tau_n), \quad n = 1, 2, \,\dots\,, \tag{П22}$$

где $\gamma_n \geq 0$ — некоторые числа, а τ_1 — некоторый начальный вектор, выбираемый произвольно.

Процедура (П22) называется *процедурой Роббинса-Моро* и она является основной МСА. Согласно ей вектор τ меняется таким образом, чтобы функция $Q(x,\tau)$ уменьшилась в точке x. Сходимость процесса (П22) к вектору τ, минимизирующему функционал $W(\tau)$, очевидно, требует определенных ограничений на функцию качества $Q(x,\tau)$ и числовую последовательность $\{\gamma_n\}$.

Выбор различных функций $Q(x,\tau)$ приводит к различным алгоритмам ООС. Отметим некоторые из них.

1. Пусть

$$Q(x,\tau) = \big[\,\mathrm{sign}\, f(x) - \mathrm{sign}\,\big(a(x),\,\tau\big)\,\big]\,\big(a(x),\,\tau\big),$$

тогда

$$\nabla_\tau\, Q(x,\tau) = \big[\,\mathrm{sign}\, f(x) - \mathrm{sign}\,\big(a(x),\,\tau\big)\,\big]\,a(x).$$

При этом процесс

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n\,\big[\,\mathrm{sign}\, f(x_1) - \mathrm{sign}\,\big(a(x_n),\,\tau_n\big)\,\big]\,a(x_n) \qquad (\text{П}23)$$

— это алгоритм с поощрением (см. главу 1, соотношения (2), (3)). Если $\exists\,\tau_*$ — вектор такой, что $f((x)\,\big(a(x),\,\tau_*\big) > \varepsilon_* > 0$, то алгоритм (П23) дает решение системы неравенств: $f(x)\,\big(a(x),\,\tau\big) > 0$.

2. Пусть на этот раз

$$Q(x,\tau) = \big|\, f(x) - \big(a(x),\,\tau\big)\,\big|,$$

где

$$\nabla_\tau\, Q(x,\tau) = -\,\mathrm{sign}\,\big[\, f(x) - \big(a(x),\,\tau\big)\,\big]\,a(x).$$

Имеем алгоритм

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n\,\big\{\mathrm{sign}\,\big[\, f(x_n) - \big(a(x_n),\,\tau_n\big)\,\big]\,\big\}\,a(x_n). \qquad (\text{П}24)$$

В алгоритме (П24) взят обобщенный градиент функции $Q(x,\tau)$, поскольку эта функция качества при некоторых значениях аргументов не имеет производную.

Допустим, что здесь $\exists\,\tau_*$ — вектор такой, что $\big|\, f(x) - \big(a(x),\,\tau_*\big)\,\big| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; тогда $M_x Q(x,\tau_*) < \varepsilon$, а значит, $\min_\tau\, M_x\, Q(x,\tau)$ достигается на векторе τ, для которого выполнено неравенство: $\big|\, f(x) - \big(a(x),\,\tau\big)\,\big| < \varepsilon$ (имеем алгоритм «Полоска» [2]).

3. Возьмем

$$Q(x,\tau) = \big|\, f(x) - \big(a(x),\,\tau\big)\,\big|^2,$$

где

$$\nabla_\tau\, Q(x,\tau) = -\,2\,\big[\, f(x) - \big(f(x) - \big(a(x),\,\tau\big)\,\big]\,a(x).$$

Приходим к алгоритму

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n \left[\, f(x_n) - \big(a(x_n),\, \tau_n\big) \,\right] a(x_n), \tag{П25}$$

который участвует в решении задачи $\mathbf{C_2}$ из раздела П1.1. Иногда алгоритм (П25) называют итеративной процедурой метода наименьших квадратов.

Возьмем вместо функционала (П19) функционал вида

$$W(\tau,\alpha) = M_x\, R(z), \qquad z \equiv f(x) \left[\, \big(a(x),\, \tau\big) - \alpha \,\right], \tag{П26}$$

где $\alpha \geq 0$ — некоторый параметр, а $R(z) > 0$ — некоторая функция z. Получим тогда рекуррентный алгоритм

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n^{(1)}\, R'(z_n)\, f(x_n)\, a(x_n),$$

и, кроме того,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma_n^{(2)} \left\{\, R'(z_n) + \left|\, R'(z_n) \,\right| \,\right\},$$

где обозначено

$$z_n = f(x_n) \big(a(x_n),\, \tau_n\big) - \alpha_n, \qquad \alpha_1 > 0, \qquad R'(z) = \frac{d\,R(z)}{dz};$$

$\{\, \gamma_n^{(1)} \,\}$, $\{\, \gamma_n^{(2)} \,\}$ — заданные числовые последовательности.

Отметим также, что функционал (П26) минимизируется по параметрам τ и α, при том, что $\alpha \geq 0$. В обозначениях: $v = (\tau,\alpha)^*$, $y = \big(f(x)\, a(x),\, -f(x)\big)^*$ перепишем его в виде

$$M(v) = M_y\, R(y,v). \tag{П27}$$

Стало быть, имеем задачу минимизации функционала (П27) в области: $(v,e) > 0$, где e — вектор с единицей в последней компоненте и остальными нулями.

Ниже приведены известные условия сходимости процесса Роббинса-Монро.

Теорема П2. *При выполнении условий:*

1) $x_1, x_2, \ldots$ — *последовательность независимых с.в., имеющих одинаковое распределение* F*;*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty, \quad \gamma_n \geq 0$*;*

3) $M_x \| \nabla_\tau Q(x,\tau) \|^2 \leq C \left(1 + \| \tau \|^2\right),\ C$ *— некоторая* const*;*

4) $\exists\, \tau_*$ *— такой вектор, что*

$$M_x\, Q(x, \tau_*) = \min_{\tau}\ M_x\, Q(x,\tau),$$

$$\inf_{\varepsilon < \| \tau - \tau_* \| < 1/\varepsilon}\ M_x\big(\nabla_\tau\, Q(x,\tau),\, \tau_* - \tau\big) > 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

.

процедура (П22) *сходится к* τ_* *п.н. и в среднеквадратическом смысле при произвольном выборе начального вектора* τ_1. При выборе функции $Q(x,\tau) = R\big[\, f(x) - \big(a(x),\, \tau\big)\,\big]$ условия 3), 4) справедливы для функций $R(z)$ из класса выпуклых кусочно-непрерывных функций, растущих не быстрее параболы. Условия 1), 2) типичны для методов стохастической аппроксимации: условие $\sum \gamma_n = \infty$ обеспечивает возможность неограниченного приближения к τ_*; условие $\sum \gamma_n^2 < \infty$ означает, что набор возмущений будет ограничен в среднеквадратическом, если ограничена $\| \nabla_\tau\, Q(x,\tau) \|$. Условие 4) выражает условие единственности минимума функционала $W(\tau)$.

Доказательство процедуры Роббинса-Монро основано на наличии супермартингальных свойств отклонения τ_n от искомого решения. Однако можно дать оценку такого отклонения, не зависящую от случая. Пусть, к примеру, требуется минимизировать квадратичный функционал качества вида ($*$) (см. соотношения (П19), (П20)) при выполнении условий теоремы П2. Из доказательства теоремы П2, в частности, вытекает неравенство [99]:

$$M\Delta_{n+1}^2 \leq \left(1 - 2\alpha\gamma_n + K\gamma_n^2\right) M\Delta_n^2 + K\gamma_n^2,$$

или

$$M\Delta_{n+1}^2 \leq \alpha_n\, M\Delta_n^2 + \kappa,$$

где обозначено:

$$\Delta_{n+1}^2 = \| \tau_{n+1} - \tau_n \|^2, \qquad \alpha_n = 1 - 2\alpha\gamma_n + K\gamma_n^2, \qquad \kappa_n = K\gamma_n^2,$$

α — наименьшее собственное значение ковариационной матрицы $A: \ A = \int_{R^q} a(x)\, a^*(x)\, F(dx)$. Здесь условие 3) теоремы П2 для функционала $(*)$ выполняется, если $f(x)$ и $a(x)$ ограничены; условие 4) же означает, что матрица A неособая. Далее, поскольку $\alpha_n < 1$ при достаточно больших n, то можно выбрать числовые последовательности β_n, ограничивающие сверху величины $M\Delta_n^2$.

Теорема П3. *Предположим, что найдется последовательность положительных чисел β_n таких, что, начиная с некоторого $n = n_*$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

$$1.\ \beta_{n+1}^{-1}\,\alpha_n\beta_n \le 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1}^{-1}\,\kappa_n < \infty,$$

$$2.\ \beta_{n+1}^{-1}\left(\alpha_n\beta_n + \kappa_n\right) \le 1.$$

Тогда $\exists C > 0$ — такая постоянная, что справедлива оценка: $M\Delta_n^2 \le C\beta_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

Отметим также, что в работе [99] большое внимание уделено так называемым псевдоградиентным процедурам стохастической аппроксимации [75], разбор которых сюда не включен по банальной причине ограниченности объема всего Приложения.

П3.2 Метод потенциальных функций в теории ООС

Поговорим ниже о методе потенциальных функций в теории обучаемых систем, не вдаваясь в излишние подробности, о которых можно узнать по соответствующим работам [2, 53, 69].

Этот метод основан на использовании особых рекуррентных процедур, с помощью которых можно решить широкий класс аппроксимационных задач. Особенность данных процедур заключается в требовании каждый раз, при каждом конкретном случае выбирать вид некоторой *потенциальной функции*, участвующей в данной процедуре. Более того, алгоритмы метода потенциальных функций часто могут восприниматься как специальный класс процедур Роббинса-Монро.

Перейдем теперь к изложению идеи метода потенциальных функций и записи общей рекуррентной процедуры. Пусть изображения или, иначе, объекты рассматриваются как точки в евклидовом пространстве R^q. Пусть, простоты ради, имеем два класса изображений и им отвечают непересекающиеся множества, что отвечает наличию ДФ, разделяющей в R^q классы изображений.

Рассмотрим функцию $K(x,y) > 0$; $x, y \in R^q$, убывающую при удалении точки x от точки $y = x_*$. При фиксированном $y = x_*$ функция $K(x,y)$ играет роль потенциала заряда, находящегося в точке x_*. В трехмерной интерпретации имеем: $x = \big(x^{(1)},\, x^{(2)}\big)$, $x_* = \big(x_*^{(1)},\, x_*^{(2)}\big)$, $z = K(x,y)$, $K(x,y) = K(x,x_*)$. Типичные примеры потенциальных функций таковы:

$$K(x,y) = e^{-\,\alpha\,\|\,x-y\,\|},\ \text{либо}\ K(x,y) = \big(1+\alpha\,\|\,x-y\,\|\big)^{-1},\ \alpha > 0.$$

Важно иметь в виду, что каждый класс изображений характеризуется своим общим суммарным потенциалом — его знание позволяет построить ДФ. В таком случае обучение системы состоит в построении потенциалов классов изображений с использованием обучающей выборки.

Возьмем, к примеру, простую процедуру обучения, когда по обучающей выборке $\{\,x_n\,\}$ из объединения $X^{(1)} \cup X^{(2)}$ классов изображений определяются функции

$$K_{X^{(1)}}(x) = \sum_{\{\,x_n \in X^{(1)}\,\}} K(x,x_n), \quad K_{X^{(2)}}(x) = \sum_{\{\,x_n \in X^{(2)}\,\}} K(x,x_n),$$

взятых в качестве потенциалов в точке x первого и второго классов изображений соответственно. Когда процесс обучения завершен, ДФ определяется по правилу: $f(x) = K_{X^{(1)}}(x) - K_{X^{(2)}}(x)$, т.е. к первому (второму) классу изображений относятся все точки x, для которых $K_{X^{(1)}}\ (>\ \bigvee\ <)\ K_{X^{(2)}}(x)$. Такие же рассуждения можно применить и к большему числу непересекающихся классов.

В данной процедуре обучения используется информация о принадлежности элементов обучающей выборки к какому-либо классу изображений. Поэтому указанная процедура называется *обучением с учителем.* В противном случае, если нет такой информации об элементах обучающей выборки, то можно построить функцию потенциала $\Phi(x)$ в точке x, где потенциал «создается» всей обучающей выборкой:

$$\Phi(x) = \sum_{\{ x_n \in X^{(1)} \cup X^{(2)} \}} K(x, x_n).$$

Иногда к задаче обучения можно применить подход, называемый *обучением без учителя* или *самообучением.* Суть его заключается в том, что можно допустить относительно поверхности, определяемой функцией $\Phi(x)$, ее соответствие разбиению R^q на классы изображений. Затем определить линии равного уровня функции $\Phi(x)$ и выделить области в R^q,, относящиеся к различным классам.

Построение ДФ — это аппроксимационная задача. Допустим, что в R^q существует конечная или бесконечная система функций $\{ a_j(x) \}$,, при которой любая разделяющая ДФ могла бы быть представлена разложением

$$f(x) = \sum_i \tau^{(i)} a_i(x) = \big(\tau,\, a(x)\big), \tag{П28}$$

где $\tau^{(i)}$ — числовые коэффициенты. Для бесконечной системы $\{ a_j(x) \}$ на коэффициенты $\tau^{(i)}$ надо накладывать некоторые условия убывания, придающие «гладкость» рассматриваемым ДФ, т.е. «регулярность» разделяющим классам объектов.

В методе потенциальных функций различают задачи: 1) о восстановлении функции $f(x)$, т.е. об оценке ее коэффициентов в разложении (П28) и 2) о приближении функции $f(x)$, когда разложения (П28) может не быть и ставится задача о наилучшем приближении $f(x)$ с помощью линейных комбинаций функций $\{ a_j(x) \}$.

Возьмем в качестве потенциальной функции $K(x, y)$ функцию вида

$$K(x, y) = \sum_i \lambda_i^2 \, a_i(x) \, a_i(y) < C,$$

где $\sum_i \lambda_i^2 < \infty$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Опишем процедуру метода потенциальных функций. Пусть $\{ x_n \}$, $n = 1, 2, \ldots$ — тренировочная, обучающая последовательность изображений. На n–ом шаге обучения строится $(n{+}1)$–ое приближение $f_{n+1}(x)$ ДФ $f(x)$, подлежащей аппроксимационному восстановлению. Построение проводим, пользуясь рекуррентной процедурой

$$f_{n+1}(x) = q_n\, f_n(x) + r_n\, K(x_n, x), \tag{П29}$$

где q_n и r_n — некоторые числовые последовательности. Схеме (П29) можно придать другую форму, например,

$$f_n(x) = \sum_i \tau_n^{(i)}\, a_i(x), \qquad \tau_{n+1}^{(i)} = q_n \tau_n^{(i)} + r_n\, \psi^{(i)}(x_n),$$

где $\psi^{(i)}(x) = \lambda_i\, a_i(x)$.

Рассмотрим следующую задачу обучения распознаванию изображений, положив, что в пространстве признаков R^q задана система функций $\{\, a_j(x)\,\}$ и что ДФ $f_*(x)$ представлена в виде

$$f_*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\tau}_*^{(i)}\, a_i(x), \tag{П30}$$

где последовательность $\{\, \tilde{\tau}_*^{(i)}\,\}$ такова, что существует, в свою очередь, последовательность чисел $\lambda_i > 0$, для которой имеют место ограничения:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \bigl(\lambda_i^{-1}\, \tilde{\tau}_*^{(i)}\bigr)^2 < \infty. \tag{П31}$$

Конечность сумм (П31) определяет гладкость вводимых ДФ и, по сути, является основным условием метода потенциальных функций.

При введении пространства Z с координатами $z^{(i)} = \lambda_i\, a_i(x)$ получим *спрямляющее пространство*. В пространстве Z точки z непересекающихся классов, которые отвечают множествам $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, разделяются плоскостью:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_*^{(i)} z^{(i)} = (\tau_*,\, z) = 0, \qquad \tau_*^{(i)} = \lambda_i^{-1} \tilde{\tau}_*^{(i)}.$$

Вместе с тем, сам алгоритм имеет вид

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + r_n\, K(x, x_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{П32}$$

где $K(x, y)$ — потенциальная функция. Числовая последовательность r_n : $r_n = r_n(x_n)$ записывается так:

$$r_n(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sign} f_*(x) - \operatorname{sign} f_n(x)\right], \tag{П33}$$

где $f_*(x)\left\{ > 0,\ x \in X^{(1)},\ \text{либо}\ < 0,\ x \in X^{(2)} \right\}$. В силу соотношения (П30) получим, что $f_*(x)\big(\tau_*,\ \psi(x)\big) > 0$ при $x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}$.

Алгоритм (П32) можно представить в виде

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} + r_n\,\psi^{(i)}(x_n),\ \text{или}\ \tau_{n+1} = \tau_n + r_n z_n, \tag{П34}$$

где $z_n = \psi(x_n)$. Так как $r_n = 0$, если $f_*(x_n)\, f_n(x_n) > 0$, то $\tau_{n+1} \neq \tau_n$ тогда, когда $f_*(x_n)\, f_n(x_n) < 0$; при этом точка τ_n перемещается в направлении, определяемом вектором z_n на расстояние $\|\, z_n \,\|$, т.е. процесс (П33) — это алгоритм обучения с поощрением.

Функционал, минимизируемый процедурой (П32), имеет вид

$$W(\tau) = M_x\, Q(x, \tau) = M_x\, G\Bigg(\sum_i \tau^{(i)}\,\psi_i(x),\ f_*(x)\Bigg),$$

где

$$G\big(f(x),\ f_*(x)\big) = -\int\limits_{f_*(x)}^{f(x)} \left[\operatorname{sign} f_*(x) - \operatorname{sign} s\right] ds\ =$$

$$=\ -f(x)\left[\operatorname{sign} f_*(x) - \operatorname{sign} f(x)\right]. \tag{П35}$$

Процедура (П34), следовательно, является стохастически градиентной по отношению к функционалу

$$W_{f_*}(f) = M_x \left\{ f(x)\left[\operatorname{sign} f(x) - \operatorname{sign} f_*(x)\right] \right\}.$$

Ниже допускаются выполненными основные условия (П30), (П31) о потенциальной функции: $K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2\, a_i(x)\, a_i(y)$. Тогда имеет место следующая теорема о сходимости процедур метода потенциальных функций.

Теорема П4. *Пусть множества* $X^{(1)}$ *и* $X^{(2)}$ *в пространстве* R^q *и система функций* $\{\, a_j(x) \,\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *таковы, что:*

1) *выполнены условия* (П30), (П31) *и* $f_*(x)$ *удовлетворяет ограничениям:* $f_*(x)$ $\Big\{\le\ -\varepsilon$, *если* $x \in X^{(1)}$, *либо* $\ge\ \varepsilon$, *если* $x \in X^{(2)}\Big\}$*;*

2) *появление точек обучающейся последовательности — независимые события, определяемые плотностью вероятности* $p(x)$*.*

Тогда в силу алгоритма (П32) *имеем сходимость:*

$$M_x\left(\big|\operatorname{sign} f_*(x) - \operatorname{sign} f_n(x)\big|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{(п.н.).} \tag{П36}$$

Отметим, что если для произвольной $f(x)$ ввести величину

$$p_n = \int\limits_{\{\,f_*(x)\,f_n(x)\le 0\,\}} p(x)\,dx,$$

которая называется *вероятностью ошибки распознавания*, то соотношение (П36) означает сходимость п.н.: $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим еще, что процедура (П34) является процедурой с поощрением. Для нее можно получить утверждение о конечной сходимости почти каждой реализации, а также получить равномерную оценку сверху для числа изменений вектора τ_n.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем смысл метода стохастической аппроксимации?
2. В чем заключается процедура Роббинса-Монро?
3. Что лежит в основе метода потенциальных функций?

Приложение 4

Самообучение. Общая постановка задачи

Самообучением, или *обучением «без учителя»*, как было указано в работе [99], «называют задачу построения разделяющей поверхности с помощью тренировочного множества, относительно элементов которого не известна принадлежность к тому или иному классу изображений». Имеем, следовательно, неопределенную задачу. Ниже рассматривается один из методов решения задачи о самообучении, основанный на использовании некоторого функционала, зависящего от разделяющей функции. В этом случае самообучение сводится к минимизации этого функционала с помощью специальных рекуррентных процедур.

Общая постановка задачи о самообучении, которая далее обсуждается, возникла из общего подхода (см., например, работы [5, 20, 36, 37, 39, 42, 57, 58, 62, 79, 80, 81, 102, 113, 117, 118]). Отметим при этом, что разработанные в этих рамках рекуррентные процедуры самообучения схожи с процедурами Роббинса-Монро, но в отличие от последних требуют для доказательства сходимости иных, модифицированных алгоритмических приемов решения.

Достаточно подробно динамическая задача о самообучении была рассмотрена в главе 2. Поэтому, опуская постановочную и доказательную части этой задачи,а также зависимость от времени t, обратимся к итоговым соотношениям (30) и (31) в виде необходимых условий решения данной экстремальной задачи:

$$\int\limits_{S_+^{(k)}} \nabla_\tau R_k\big(x - \tau^{(k)}\big)\, p(x)\, dx = 0, \tag{П37}$$

где $\forall\, x$, принадлежащего границе множеств $X^{(q)}$ и $X^{(r)}$, когда $p(x) \neq 0$, должно также необходимо выполняться условие

$$R_q\bigl(x-\tau^{(q)}\bigr) = R_r\bigl(x-\tau^{(r)}\bigr). \tag{П38}$$

Там же, в Главе 2, было отмечено в заключение, что экстремальные множества $X^{(k)}(t)$ и их особые точки (центры, параметры) $\tau^{(k)}(t)$ должны удовлетворять условиям (30) ((П37)) и (31) ((П38)). Опуская t, при том, что $x = x(\omega)$ — с.в., требование (30) ((П37)) можно записать так:

$$M\,\bigl\{\,\nabla_\tau\, R_k\bigl[\,x(\omega)-\tau^{(k)}\,\bigr]\, I^{(k)}(x(\omega))\,\bigr\} = 0,\ \ k=\overline{1,l}, \tag{П39}$$

Написанные условия дают уравнения для нахождения особых точек $\tau^{(k)}$ классов множества изображений, зная которые можно затем однозначно из соотношения (31) ((П38)) определить множества $X^{(k)}$.

Уравнение (П39) весьма схоже с уравнением регрессии, для решения которого была изучена рекуррентная процедура Роббинса-Монро. Разница имеется лишь в множителе $I^{(k)}(x)$, стоящем под знаком мат. ожидания в уравнении (П39). Однако, как выясняется, это отличие имеет принципиальный характер и не позволяет воспользоваться теоремой П2 о сходимости процедуры Роббинса-Монро.

Между тем, этот множитель не мешает написать для функционала (П39) стохастическую процедуру для оценки параметров $\tau^{(k)}$, согласно алгоритму:

$$\tau^{(k)}_{n+1} = \tau^{(k)}_n - \gamma_n\, I^{(k)}_n\,(x_n)\,\nabla_\tau\, R_k\,\bigl(x_n-\tau^{(k)}_n\bigr), \tag{П40}$$

где $k=\overline{1,l}$, $n = 1, 2, \,\ldots\,;\ x_1, x_2,\, \ldots$ — элементы обучающей выборки, а $\{\,\tau^{(k)}_1\,\}$, $k=\overline{1,l}$, — начальные значения центров, которые выбираются произвольно.

В правую часть алгоритма (П40) входят неизвестные величины $I^{(k)}_n(x_n)$ и поэтому его пока нельзя считать эффективным. Тем не менее, с помощью соотношений (П38) эту трудность можно обойти.

В самом деле, $I^{(k)}_n(x)$ — индикатор множества $\bigl\{\, f^{(k)}_n(x) > 0\,\bigr\}$. Следовательно, для определения значения величины $I^{(k)}_n(x)$ достаточно узнать, какая из функций R_k принимает в точке $x = x_n$ наименьшее значение. Так как $R_k(x)$ представляют собой монотонные функции типа расстояния, то при заданных центрах $\tau_n^{(1)}$, ..., $\tau_n^{(l)}$ точка x принадлежит тому из множеств $\{ f_n^q(x) > 0 \}$, для которого

$$R_q\big(x - \tau_n^{(q)}\big) = \min_k \ R_k\big(x - \tau_n^{(k)}\big). \tag{П41}$$

Условие (П41) служит для определения значений $I_n^{(k)}(x_n)$ в алгоритме (П40). В развернутой форме алгоритм (П40) выглядит так:

$$\tau_{n+1}^{q)} = \tau_n^{(q)} - \gamma_n \nabla_\tau R_q\big(x_n - \tau_n^{(q)}\big), \tag{П42}$$

если $\quad R_q\big(x_n - \tau_n^{(q)}\big) = \min\limits_k R_k\big(x_n - \tau_n^{(k)}\big), \quad \tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} \quad$ при $\quad k \neq q$

и в таком виде напоминает алгоритмы с поощрением. Можно также сформулировать рекуррентный алгоритм для функционала, в котором каждая из функций R_k зависит сразу от всех центров $\tau^{(1)}$, ..., $\tau^{(l)}$. Прежние рассуждения при этом мало изменятся, но сами соотношения станут более громоздкими. Выбирая в алгоритме (П42) различные функции R_k и числовые последовательности γ_n, будем получать различные процедуры самообучения.

Предположим далее, что выполнены условия:

1. Функции $R_k(x)$ в функционале W (15) (см. главу 2) при игнорировании переменной t одинаковы и имеют вид: $R_k(x) = \| x \|^2$, $k = \overline{1, l}$.

2. Обучающая последовательность x_1, x_2, ... состоит из независимых с.в., имеющих одинаковое распределение с плотностью $p(x)$.

3. Плотность $p(x)$ непрерывна и финитна, что означает, что носитель $X(p) = \{ x \,|\, p(x) \neq 0 \}$ функции есть ограниченное множество.

4. Числовая последовательность γ_n удовлетворяет условиям:

$$0 \le \gamma_n < 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty.$$

5. Начальный набор $\{\tau_1^{(k)}\}$ центров множеств состоит из различных точек, каждая из которых принадлежит выпуклой оболочке множеств $X(p)$ — носителя функции $p(x)$.

В предположениях 1-5, при игнорировании времени t функционал W (15) и процедура (П42) могут быть записаны в виде

$$W(\tau) = \sum_{k=1}^{l} \int\limits_X \| \tau^{(k)} - x \| \, I^{(k)}(x) \, p(x) \, dx,$$

$$\tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} + \gamma_n \, I_n^{(k)}(x_n) \left(x_n - \tau_n^{(k)} \right), \; k = \overline{1, l}, \; n = 1, 2, \ldots, \quad (\text{П43})$$

где $I_n^{(k)}(x)$ — индикатор множества $X_n^{(k)}$, а τ — набор векторов $\{\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(l)}\}$. Отметим, что разбиение $\{X_n^{(k)}\}$ множества X на каждом шаге алгоритма определяется по правилу

$$\{ x \in X_n^{(k)} \} \iff \{ \| \tau_n^{(k)} - x \| < \min_{j \neq k} \| \tau_n^{(j)} - x \| \}. \quad (\text{П44})$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема П5. *При выполнении перечисленных выше условий* $1-5$ *для последовательностей* $\{\tau_n^{(k)}\}$, *полученных с помощью алгоритма* (П43), *существует п.н. предел*

$$\lim_{n \to \infty} W(\tau_n) = W_0, \quad (\text{П45})$$

причем для некоторой подпоследовательности

$$\lim_{s \to \infty} \left(p_{n_s}^{(k)} \, \tau_{n_s}^{(k)} - M_{n_s}^{(k)} \right) = 0 \quad (\textit{п.н.}), \quad k = \overline{1, l}, \quad (\text{П46})$$

где

$$p_n^{(k)} = \int\limits_X I_n^{(k)}(x) \, p(x) \, dx, \qquad M_n^{(k)} = \int\limits_X x \, I_n^{(k)}(x) \, p(x) \, dx.$$

Предельное соотношение (П45) означает, что последовательность наборов $\{\tau_n^{(k)}\}$ сходится в смысле функционала $W(\tau)$; из соотношения (П46) следует, что W_0 — это одно из экстремальных значений функционала $W(\tau)$, так как при $\inf p_{n_s}^{(k)} \neq 0$ из (П46) вытекает, что центры $\tau_{n_s}^{(k)}$ стремятся к «центрам тяжести» $M_{n_s}^{(k)}/p_{n_s}^{(k)}$ соответствующих классов $X_{n_s}^{(k)}$, а это отвечает экстремальности функционала $W(\tau)$ согласно соотношениям (П37), (П38). При этом, надо отметить, теорема П5 вовсе не гарантирует ни единственности предельных точек последовательности $\{\,\tau_n^{(k)}\,\}$, ни существования их пределов.

Здесь возникает вопрос о том, в каких случаях соотношение (П46) будет выполнено не на подпоследовательности, а на всей последовательности и когда можно гарантировать выполнение условий

$$\inf_{k,n}\, p_n^{(k)} > 0 \quad (\text{п.н.}). \tag{П47}$$

Перейдем к формулировке следующих результатов.

Теорема П6. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы* П4. *Пусть функция*

$$P(\tau,\alpha) = \int\limits_{\{\,(\tau,x)-\alpha>0\,\}} p(x)\,dx$$

непрерывно дифференцируема по параметрам τ *и* α *при* $\tau \neq 0$. *Тогда справедливы утверждения:*

a) $\lim_{n\to\infty}\bigl(p_n^{(k)}\,\tau_n^{(k)} - M_n^{(k)}\bigr) = 0$ *(п.н.)* $(*)$, *где* $k=\overline{1,l}$, $l=2,3$, *причем при* $l=2$ *выполнены неравенства* (П47);

b) при выполнении неравенств (П47) *соотношения* $(*)$ *справедливы при любом натуральном* l;

c) при выпуклом носителе $X(p)$ *функции* $p(x)$ *справедливы неравенства* (П47).

Условие (П47), таким образом, гарантирует сходимость центров $\{\,\tau_n^{k)}\,\}$ к соответствующим «центрам тяжести» в смысле стремления к нулю расстояния между ними; при этом выпуклость множества $X(p)$ является достаточным условием для выполнимости неравенств (П47).

Ниже приведем схему доказательства теоремы П6. Для этого введем величину

$$V(\tau) = \sum_{k=1}^{l} \bigl\|\,p^{(k)}\,\tau^{(k)} - M^{(k)}\,\bigr\|^2,$$

где

$$p^{(k)} = p^{(k)}(\tau) \equiv \int\limits_{X^{(k)}(\tau)} p(x)\,dx, \;\; M^{(k)} = M^{(k)}(\tau) \equiv \int\limits_{X^{(k)}(\tau)} x\,p(x)\,dx.$$

Здесь $\{\,X^{(k)}(\tau)\,\}$ — разбиение множества X, производимое с помощью набора точек $\tau = \{\,\tau^{(1)}, ..., \tau^{l)}\,\}$ в соответствии с правилом (П44).

Из теоремы П5 получим, что п.н. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\, V(\tau_n)$ и $\exists\ \lim_{n\to\infty} W\,(\tau_n)$. Для доказательства теоремы П6 надо установить оценки для $V(\tau_n)$ типа неравенств

$$V(\tau_{n+1}) \le V(\tau_n) + C\gamma_n, \qquad C = \mathrm{const} > 0. \tag{П48}$$

Из оценок (П48) и сходимости ряда $\sum \gamma_n\, V(\tau_n)$ следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\ V(\tau_n) = 0. \tag{П49}$$

Сами же оценки получаются из рекуррентного соотношения (П41) в предположении, что

$$\inf_n\ \min_{i\neq j}\ \left\|\,\tau_n^{(i)} - \tau_n^{(j)}\,\right\| > 0 \quad (\text{п.н.}). \tag{П50}$$

Укажем на то, что в задачах с $l = 2, 3$ неравенства (П50) можно установить лишь в условиях теоремы П6. В случае $l > 3$ (П50) удается установить при дополнительном предположении о выпуклости носителя функции $p(x)$. Вместе с неравенствами (П50) тогда получим и неравенство $\inf_{n,k}\, p_n^{(k)} > 0$, что совместно с соотношением (П49) приводит к остальным утверждениям теоремы П6.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается задача самообучения или обучения «без учителя»?

2. Как выглядит рекуррентная процедура самообучения?

3. Сформулируйте условия сходимости этой процедуры.

Дополнение 1 Задача о построении классификатора

Раздел, посвященный задаче о классификаторе, выполняет вспомогательную методологическую функцию, а именно: ему отведена роль дополнительного, *с одной стороны*, поясняющего теоретического материала, который не попал в соответствующее Приложение, но который, как представляется, заслуживает быть упомянутым и *с другой стороны*, в этом разделе ставится вполне конкретная задача, предназначенная для самостоятельного решения и относящаяся к рассматриваемому вопросу теории. Данная задача поясняется настолько, чтобы ее решение не превратилось в некую сложную проблему.

Рассматривается пример [74] на использование статистических методов в задаче устройства системы, способной классифицировать два класса объектов — берутся для этого монеты и жетоны.

Основным измеряемым признаком объекта служит его вес. Считается, что веса x_1 и x_2 обоих объектов меняются в определенных диапазонах и распределены по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\,(x-\mu_1)^2/(2\sigma^2)},\ f_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\,(x-\mu_2)^2/(2\sigma^2)}. \quad (\text{Д}1)$$

Известно, что монеты предъявляются чаще, чем жетоны. Априорная вероятность предъявления монеты $p(\mu_2)$ отождествляется с частотой предъявления. Априорная вероятность предъявления жетона $p_1 = 1 - p(\mu_2)$. Можно задать потери (стоимости, риски) правильных и неправильных решений. Пусть c_{12} — ошибка первого рода, когда жетон принимается за монету, и это стоимость такого решения, а c_{21} — это стоимость ошибки второго рода, когда монета принимается за жетон. Кроме того, c_{11} и c_{22} соответственно означают стоимость правильных решений, т.е. правильного распознавания монеты и жетона.

В виде матрицы цен далее можно записать условные стоимости: $(c_{11}, c_{12}/c_{21},\ c_{22})$. Из этих данных можно вычислить среднюю цену, которую придется заплатить (средний риск) при многократном распознавании системой монет и жетонов.

Средняя цена (стоимость) будет равна сумме всех стоимостей, умноженных на вероятности их получения с учетом априорной вероятности:

$$W = (1-p)\left(c_{11}\int\limits_{-\infty}^{x_0} f_1(x)\,dx + c_{12}\int\limits_{x_0}^{\infty} f_1(x)\,dx\right) +$$

$$+\,p\left(c_{22}\int\limits_{x_0}^{\infty} f_2(x)\,dx + c_{21}\int\limits_{-\infty}^{x_0} f_2(x)\,dx\right), \qquad \text{(Д2)}$$

где x_0 — искомый параметр. Параметр x_0 определяет решающее правило: если для предъявленного объекта x будет $x > x_0$,, то x объявляется монетой, иначе — жетоном. Для нахождения *оптимального решения* x_0, которое минимизирует средний риск, надо вычислить производную dW/dx_0 и приравнять ее нулю:

$$\frac{dW}{dx_0} = (1-p)(c_{11}-c_{12})\,f_1(x_0) + p\,(c_{22}-c_{21})\,f_2(x_0),$$

откуда найдем отношение правдоподобия

$$\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)} = \frac{(1-p)(c_{12}-c_{11})}{p\,(c_{21}-c_{22})} = \Lambda_0.$$

С учетом законов распределения (Д1) получим

$$\Lambda_0 = \exp\left\{-\,\frac{(x_0-\mu_2)^2-(x_0-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$x_0 = \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \;-\; \frac{\sigma^2}{\mu_1-\mu_2}\cdot\ln\frac{(1-p)(c_{12}-c_{11})}{p\,(c_{21}-c_{22})}. \qquad \text{(Д3)}$$

Выражение для x_0 (Д3) после подстановки в выражение для W (Д2) приводит к $W_{\min}$ — *минимальному среднему риску*, или *минимальной стоимости* применения стратегии, при которой: если вес объекта будет больше x_0,, то принимается решение «монета», а если меньше x_0,, то «жетон». Это правило, когда порог выбирается, чтобы минимизировать среднюю стоимость, называется *критерием Байеса*.

При решении поставленной задачи возможно применить другой критерий — *минимаксный критерий*, используемый в случае, когда неизвестны априорные вероятности $p = p(\mu_2)$, $p_1 = 1 - p(\mu_2)$. Минимаксная стратегия является осторожной в том смысле, что она гарантирует, что даже в худшем случае $W_{\min}$ не превысит некоторой величины.

Найдем значение среднего риска, если в действительности априорная вероятность $p(\mu_2) = p_2$, а ищется при этом оптимальное решение x_0 в предположении, что $p(\mu_2) = p_1$. При фиксированном x_0 средний риск W в соответствии с формулой (Д2) является линейной функцией априорной вероятности p. Легко убедиться, что функция $W(p)$ при фиксированном x_0 является прямой, касательной к кривой $W_{\min}$ в точке $p = p_1$. В самом деле, дифференцируя $W_{\min}(p)$ в точке $p = p_1$, будем иметь

$$\left.\frac{dW_{\min}}{dp}\right|_{p=p_1} = \left.\frac{\partial W_{\min}}{\partial p}\right|_{p=p_1} + \left.\frac{\partial W_{\min}}{\partial x_0}\,\frac{dx_0}{dp}\right|_{p=p_1}.$$

Однако с учетом соотношения (Д3) и согласно определению точки $x_0 : \ \partial W_{\min}/\left.\partial x_0\right|_{p=p_1} = 0$. Значит,

$$\left.\frac{dW_{\min}}{dp}\right|_{p=p_1} = \left.\frac{\partial W_{\min}}{\partial p}\right|_{p=p_1},$$

что и требовалось показать. Таким образом, средний риск, найденный с помощью точки x_0 (точки оптимального решения для $p(\mu_2) = p_1$), будет равен $W(p_2)$. Итак, применение минимаксного критерия гарантирует, что каково бы ни было действительное значение $p(\mu_2)$, средний риск будет равен $\max W_{\min}$.

Часто во многих случаях бывает сложно определить и априорные вероятности, и матрицу стоимости. Тем не менее, в этих случаях можно предъявить некоторые требования к уровням вероятностей и тогда можно воспользоваться *критерием Неймана-Пирсона.* С этой целью потребуем, чтобы условная вероятность *ложной тре-*

воги (см. раздел П2.1) $F_* = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x)\,dx$ была равна заданной величине: $F_* = F^0$; надо найти условную вероятность *пропуска сигнала* $F_{**} = \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x)\,dx$.

Вероятность ошибки второго рода, т.е. условная вероятность ложной тревоги, называется в теории проверки гипотез *размером испытания*. Условная вероятность $D = 1 - F_{**}$ правильного распознавания называется *мощностью испытаний*. К примеру, для нормального распределения

$$F_* = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-(x-\mu_1)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1 - F\left(\frac{x_0-\mu_1}{\sigma}\right), \qquad (\text{Д}4)$$

$$D = 1 - F\left(\frac{x_0-\mu_2}{\sigma}\right), \qquad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt, \qquad (\text{Д}5)$$

где $F(z)$ — функция Лапласа.

В координатах (F_*, D) можно построить *рабочую характеристику*. Схема ее построения сводится к следующим этапам: 1) по заданному F_* с помощью формул (Д4) и (Д5) определяется значение x_0; 2) по найденному x_0 с помощью (Д5) вычисляется значение $D = D(F_*)$. Геометрическое место точек $\{\,F_*,\, D(F_*)\,\}$ в плоскости (F_*, D) как раз и представляет ту самую рабочую характеристику.

Задача состоит в том, чтобы показать, что описываемый критерий эквивалентен заданию определенных стоимостей, зависящих от функции F_*, т.е. надо показать, что критерий Неймана-Пирсона сводится к некоторому отношению правдоподобия.

В качестве замечания отметим, что указанные три критерия позволяют оценить правильность классификации объектов по величине отношения правдоподобия Λ_0. Поэтому на рабочей характеристике можно обнаружить значение порога x_0 для исходных данных, отвечающих каждому из трех критериев.

Дополнение 2 Процедура последовательной классификации

Данная схема касается критерия отношения вероятностей Вальда (см. раздел П2.2) и результатов работ [99, 104]. Обозначим через $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... — независимые замеры признаков с одномерной гауссовой функцией плотности $p(x \,|\, \Omega_{i*})$ со средним значением m_i и дисперсией σ^2, $i = 1, 2$. Простоты ради будем вычислять $\ln \lambda_n$ вместо λ_n (см. формулу (П14)). После выполнения первого измерения получим

$$\ln \lambda_1 = \ln \frac{p(x^{(1)} \,|\, \Omega_{1*})}{p(x^{(1)} \,|\, \Omega_{2*})} = \ln \frac{\exp\left[\, - (x^{(1)} - m_1)^2/(2\sigma^2) \,\right]}{\exp\left[\, - (x^{(1)} - m_2)^2/(2\sigma^2) \,\right]} =$$

$$= \left[\,(m_1 - m_2)\, x^{(1)} - (1/2)\,(m_1^2 - m_2^2)\,\right]/\sigma^2.$$

Сравним $\ln \lambda_1$ с $\ln A$ и $\ln B$ при следующих возможных ситуациях:

1)
$$x^{(1)} \geq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln B + (1/2)(m_1 + m_2).$$
В этом случае заключаем, что $\omega \in \Omega_{1*}$, т.е. изображение x относим к первому классу;

2)
$$x^{(1)} \leq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln A + (1/2)(m_1 + m_2).$$
Тогда заключаем, что $\omega \in \Omega_{2*}$;

3)
$$(m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln A < x^{(1)} - (1/2)(m_1 + m_2) <$$
$$< (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln B.$$
Тогда надо перейти ко второму шагу процесса, а именно, следует произвести замер $x^{(2)}$.

После второго замера будем иметь $x^2 = \{\, x^{(1)},\, x^{(2)} \,\}$ и

$$\ln \lambda_2 = \ln \frac{p(x^{(1)} \,|\, \Omega_{1*})}{p(x^{(1)} \,|\, \Omega_{2*})} + \ln \frac{p(x^{(2)} \,|\, \Omega_{1*})}{p(x^{(2)} \,|\, \Omega_{2*})} \;=$$

$$= \; \sigma^2 \,[\, x^{(1)} + x^{(2)} - (m_1 + m_2) \,]/(m_1 - m_2).$$

Здесь по-прежнему, если

$$x^{(1)} + x^{(2)} \geq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln B + (m_1 + m_2),$$

то принимаем гипотезу $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ (в качестве пояснения укажем, что запись $\Gamma(x \sim \Omega_{i*})$ означает гипотезу о том, что элементарное событие ω, $x(\omega) = x$, принадлежит событию Ω_{i*}).. Если

$$x^{(1)} + x^{(2)} \leq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln A + (m_1 + m_2)$$

то принимаем гипотезу $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$.. Если

$$(m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln A < x^{(1)} + x^{(2)} - (m_1 + m_2) < (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \; B,$$

то надо произвести замер $x^{(3)}$ и перейти к третьему шагу.

На n-м шаге процесса имеем

$$\ln \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{p(x^{(i)} \,|\, \Omega_{1*})}{p(x^{(i)} \,|\, \Omega_{2*})} = \frac{m_1 - m_2}{\sigma^2} \; \sum_{i=1}^{n} [\, x^{(i)} - (1/2)(m_1 + m_2) \,].$$

Требуется показать, что процедура классификации будет выглядеть следующим образом:

Если

$$\sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \geq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln B + (n/2)(m_1 + m_2),$$

то принимаем гипотезу $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$. Если

$$\sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \leq (m_1 - m_2)^{-1}\, \sigma^2 \ln A + (n/2)(m_1 + m_2),$$

то принимаем гипотезу $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. Если

$$(m_1 - m_2)^{-1}\,\sigma^2 \ln A + (n/2)(m_1 + m_2) < \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \ <$$

$$<\ (m_1 - m_2)^{-1}\,\sigma^2 \ln B + (n/2)(m_1 + m_2),$$

то производится замер $x^{(n+1)}$ и процедура повторяется.

Надо указать также на то, что если неравенства в последних соотношениях меняются на равенства, то решающие границы, определяемые этими формулами, определяют, тем самым, две параллельные гиперплоскости в соответствующих пространствах признаков.

Кроме того, отметим, что расстояние между границами в виде ширины области неопределенности равно

$$\left[\sqrt{n}\,(m_1 - m_2)\right]^{-1} \sigma^2 \,(\ln A - \ln B) \simeq -\left[\sqrt{n}\,(m_1 - m_2)\right]^{-1} \sigma^2 \ln e_{12}\, e_{21}.$$

Видно, что с ростом n эта величина убывает. Пусть вероятности ошибок e_{12}, e_{21} заданы. Тогда среднее число измерений, требуемых для завершения процесса, пропорционально σ^2 и обратно пропорционально $(m_1 - m_2)$.

Список литературы

1. Автоматический анализ сложных изображений / Сб. переводов. Под ред. Э.М. Бравермана. — М.: Мир, 1969 — 310 с.

2. *Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин. — М.: Наука, 1970. — 384 с.

3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

4. *Аркадьев А.Г., Браверман Э.М.* Обучение машины классификации объектов. — М.: Наука, 1971. — 192 с.

5. *Аркадьевич А.Г., Браверман Э.М.* Обучение машины распознаванию образов. — М.: Наука, 1964. — 110 с.

6. *Бабушкин М.В., Тертычный-Даури В.Ю.* Вариационные методы решения задач, связанных с искусственным интеллектом // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 919-932.

7. *Барабанов А.Е.* Адаптивное субоптимальное управление линейным объектом со стационарными (детерминированными) помехами // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979. — С. 107-116.

8. *Барабаш Ю.Л., Варский Б.В., Зиновьев В.Т., Кириченко В.С., Санегин В.Ф.* Вопросы статистической теории распознавания. — М.: Сов. радио, 1967. — 400 с.

9. *Блисс Г.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950. — 348 с.

10. *Блэтт Д., Лайнесс Д.* Практическое использование вариационных принципов в нелинейной механике // Механика. Сб. переводов. — М.: Мир. — 1964. — № 5. — С. 3-11.

11. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.

12. *Бонгард М.М.* Проблема узнавания. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

13. *Бондарко В.А.* Адаптивное субоптимальное управление решения линейных разностных уравнений // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 270, № 2. — С. 301-303.

14. *Браиловский В.Л., Лунц А.Л.* Формулировка задачи распознавания объектов со многими параметрами и методы ее решения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1964. — № 1. — С. 20-31.

15. *Вазан М.Т.* Стохастическая аппроксимация. — М.: Мир, 1972. — 296 с.

16. *Вайсборд Э.М., Юдин Д.Б.* Обзор некоторых результатов в стохастической аппроксимации (Дополнение к переводу монографии М. Вазана "Стохастическая аппроксимация"). — М.: Мир, 1972. — С. 244-275.

17. *Вапник В.Н.* Задача обучения распознаванию образов. — М.: Знание, 1971. — 60 с.

18. *Вапник В.Н* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Алгоритмы обучения распознаванию образов. — М.: Сов. радио, 1973. — С. 5-24.

19. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов. — М.: Наука, 1974. — 416 с.

20. *Васильев В.И.* Распознающие системы / Справочник. — Киев: Наукова думка, 1969. — 292 с.

21. *Ведяков А.А., Милованович Е.В., Тертычный-Даури В.Ю., Тимофеева Г.В.* Оптимальное управление как условная вариационная задача с подвижной правой границей // Научно-техн. вестник информац. технологий, механики и оптики. — 2019. — Т. 19, № 1. — С. 59-66.

22. *Ведяков А.А., Милованович Е.В., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю.* Вариационная задача адаптивного оптимального управления. Теоретический и прикладной компьютерный анализ // Научно-техн. вестник информац. технологий, механики и оптики. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 252-262.

23. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. — М.: Сов. радио, 1968. — 326 с.

24. *Галушкин А.И.* Синтез многослойных систем распознавания образов. — М.: Энергия, 1974. — 367 с.

25. *Гелиг А.Х., Жукова Л.К.* Применение обучаемой опознающей системы для классификации игровых ситуаций // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1971. — Вып. 6. — С. 99-104.

26. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с.

27. *Гладышев Е.Г.* О стохастической аппроксимации // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — Т. 10, № 2. — С. 297-300.

28. *Глушков В.М.* Теория обучения одного класса дискретных персептронов // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 2. — С. 317-335.

29. *Глушков В.М.* К вопросу о самообучении в персептроне // Журн. выч. математики и матем. физики. — 1962. — Т. 2, №$\tilde{6}$. — С. 1102-1110.

30. *Глушков В.М.* Введение в кибернетику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1964. — 324 с.

31. *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Построение систем распознавания. — М.: Высш. школа, 2004. — 260 с.

32. *Грановская Р.М.* Восприятие и модели памяти. — Л.: Наука, 1974. — 361 с.

33. *Девятериков И.П., Пропой А.И., Цыпкин Я.З.* О рекуррентных алгоритмах обучения распознаванию образов // Автоматика и телемеханика. — 1967. — № 1. — С. 122-133.

34. *Дегтярев Г.Л.* Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами с помощью функций Ляпунова // Прямой метод в теории устойчивсти и его приложения. — Новосибирск: Наука, 1981. — С. 75-83.

35. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989. — 143 с.

36. *Дорофеюк А.А.* Обучение машины распознаванию образов без поощрения // Вопросы технической кибернетики / Под ред. Я.З. Цыпкина. — М.: Наука, 1966. — С. 102-115.

37. *Дорофеюк А.А.* Алгоритмы автоматической классификации // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 12. — С. 78-122.

38. *Ермольев Ю.М.* О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квазифейеровских последовательностях // Кибернетика. — 1969. — № 2. — С. 73-83.

39. *Живоглядов В.П., Медведев А.В.* Непараметрические алгоритмы адаптации. — Фрунзе: Илим, 1974. — 134 с.

40. *Завалишин Н.В., Мучник И.Б.* Модели зрительного восприятия и алгоритмы анализа изображений. — М.: Наука, 1974. — 344 с.

41. *Загоруйко Н.Г.* Методы распознавания и их применение. — М.: Сов. радио, 1972. — 206 с.

42. *Ивахненко А.Г. (ред.).* Персептрон — система распознавания. — Киев: Наукова думка, 1975. — 431 с.

43. *Ивахненко А.Г.* Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. — Киев: Техніка, 1969. — 391 с.

44. *Ивахненко А.Г.* Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. — Киев: Техніка, 1971. — 372 с.

45. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

46. *Катковник В.Я.* Задача аппроксимации функции многих переменных // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 2. — С. 181-185.

47. *Катковник В.Я.* Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. — М.: Наука, 1976. — 487 с.

48. *Ковалевский В.А.* Современное состояние проблемы распознавания образов // Кибернетика. — 1967. — № 5. — С. 78-86.

49. *Красовский А.А.* Субоптимальный адаптивный алгоритм оценивания непрерывных процессов // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 230, № 3. — С. 538-540.

50. *Красовский А.А.* Аналитическая форма субоптимального адаптивного управления нелинейными объектами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 137-145.

51. *Красулина Т.П.* Замечание о некоторых процессах стохастической аппроксимации // Теория вероятностей и ее приложения. — 1962. — № 7. — С. 108-113.

52. *Красулина Т.П.* О процессе Роббинса-Монро в случае нескольких корней // Теория вероятностей и ее приложения. — 1967. — № 12. — С. 386-390.

53. *Красулина Т.П.* Исследование асимптотических свойств алгоритмов метода потенциальных функций, предназначенных для восстановления характеристик объектов по наблюдаемым значениям // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 2. — 114-121.

54. *Красулина Т.П.* О применении алгоритмов стохастической аппроксимации к задачам автоматического управления при наличии сильных помех // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 5. — С. 104-107.

55. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 446 с.

56. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Об оптимальном и адаптивном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 1. — С. 79-83.

57. *Левин М.Ю., Фомин В.Н.* Рекуррентные процедуры в задаче самообучения // Вестник Ленингр. ун-та. — 1974. — № 19. — С. 51-58.

58. *Левин М.Ю., Фомин В.Н.* Сходимость рекуррентных процедур в задаче обучения без учителя // Вестник Ленингр. ун-та. — 1975. — № 7. — С. 35-42.

59. *Литваков Б.М.* О сходимости рекуррентных алгоритмов обучения распознаванию образов // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 142-150.

60. *Литваков Б.М.* Экстремальный подход к определению условий сходимости алгоритмов метода потенциальных функций // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 9. — С. 98-108.

61. *Логинов Н.В.* Методы стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 4. — С. 98-108.

62. *Мазуров В.Д.* Математические методы распознавания образов. — Екатеринбург: Изд-во Уральск. ун-та, 2010. — 101 с.

63. *Мазуров В.Д.* Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 140-146.

64. *Матвеев А.С.* Вариационный анализ в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами и вектор-функции множества // Сибирский матем. журнал. — 1990. — Т. 31, № 6. — С. 127-141.

65. *Минский М., Пейперт С.* Персептроны. — М.: Мир, 1971. — 261 с.

66. *Вайнцвег М. Н.* Моделирование обучения и поведения. — М.: Наука, 1975. — 239 с.

67. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.

68. *Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Васин Ю.Г., Брейдо М.Д.* Распознавание образов и медицинская диагностика. — М.: Наука, 1972. — 328 с.

69. *Немировский А.С., Цыпкин Я.З.* Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 12. — С. 64-77.

70. *Нильсон Н.Дж.* Обучающиеся машины. — М.: Мир, 1967. — 180 с.

71. *Панченков А.Н.* Экстремальные задачи управления движением с локальными функционалами // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. — Новосибирск: Наука, 1979. — С. 190-202.

72. *Пенев Г.Д.* Об одном классе адаптивных систем «с учителем» // Вестник Ленингр. ун-та. — 1971. — № 19. — С. 46-51.

73. *Первозванский А.А.* Распознавание абстрактных образов как задача линейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1965. — № 4. — С. 41-44.

74. *Пересада В.П.* Автоматическое распознавание образов. — Л.: Энергия, 1970. — 91 с.

75. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 3. — С. 45-68.

76. *Пономаренко В.И., Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в задачах субоптимального адаптивного управления динамическими объектами // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977. — С. 16-28.

77. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики. Персептроны и теория механизмов мозга. — М.: Мир, 1965. — 480 с.

78. *Розенфельд А.* Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин. — М.: Мир, 1972. — 230 с.

79. *Ружанский В.И.* Алгоритм для распознавания знаков // Выч. техника и вопросы программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. — Вып. 3. — С. 63-68.

80. *Ружанский В.И., Фрадков А.Л.* Об одном алгоритме самообучения распознающих систем // Выч. техника и вопросы кибернетики. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1971. — Вып. 6. — С. 88-98.

81. *Ружанский В.И.* Некоторые алгоритмы обучения "без поощрения"распознающих автоматов // Вычислительная техника и вопросы программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1965. — Вып. 4. — С. 75-84.

82. *Соколов Б.М.* Градиентный алгоритм обучения опознающей системы // Методы вычислений. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. — Вып. 4. — С. 137-143.

83. *Стратонович Р.Л.* Существует ли теория синтеза оптимальных адаптивных, самообучающихся и самонастраивающихся систем? // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 96-107.

84. *Стратонович Р.Л.* Оптимальные алгоритмы распознавания // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 2. — С. 110-113.

85. *Стратонович Р.Л.* Об оптимальных алгоритмах типа стохастической аппроксимации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1970. — № 1. — С. 24-32.

86. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991. — 215 с.

87. *Тертычный-Даури В.Ю.* Решение вариационных динамических задач в условиях параметрической неопределенности // Проблемы передачи информации. — 2005. — Т. 41, вып. 1. — С. 53-67.

88. *Тертычный-Даури В.Ю.* Вариационные динамические задачи с параметрами и их адаптивная интерпретация // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 9. — С. 114-128.

89. *Тертычный-Даури В.Ю.* Условная задача оптимального управления: адаптивный метод решения // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 3. — С. 54-67.

90. *Тертычный-Даури В.Ю.* Оптимальная стабилизация в задачах адаптивной ядерной кинетики // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 3. — С. 374-384.

91. *Тертычный-Даури В.Ю.* Галамех. Т. 1. Адаптивная механика. — М.: Физматлит, 2019. — 544 с.

92. *Тертычный-Даури В.Ю.* Галамех. Т. 4. Оптимальная механика. — М.: Физматлит, 2019. — 608 с.

93. *Тимофеев А.В., Удовченко С.П., Харичев В.В., Шмидт А.А.* Полные и непрерывные системы инвариантов в задаче распознавания изображений // Вестник Ленингр. ун-та. — 1972. — № 19. — С. 142-144.

94. *Тимофеев А.В., Якубович В.А.* Об одном классе самообучающихся систем, обладающих целесообразным поведением // Управление и информационные процессы в живой природе. — М.: Наука, 1971. — С. 111-115.

95. *Файн В.С.* Опознавание изображений. Основы непрерывногрупповой теории и ее приложения. — М.: Наука, 1970. — 296 с.

96. *Фельдбаум А.А.* Процессы обучения людей и автоматов // Методы оптимизации автоматических систем / Под ред. Я.З. Цыпкина. — М.: Энергия, 1972. — С. 109-147.

97. *Фомин В.Н.* Об одном алгоритме опознающих систем // Выч. техника и вопросы программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1965. — Вып. 4. — С. 72-75.

98. *Фомин В.Н.* Стохастические аналоги конечно-сходящихся алгоритмов обучения опознающих систем // Выч. техника и вопросы программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1971. — Вып. 6. — С. 68-87.

99. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — 236 с.

100. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

101. *Фомин В.Н., Якубович В.А.* Обучаемые опознающие системы и рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы // Алгоритмы обучения распознавания образов. — М.: Сов. радио, 1973. — С. 29-42.

102. *Фрадков А.Л.* К задаче синтеза самообучающихся распознающих систем // Вестник Ленингр. ун-та. — 1972. — № 19. — С. 70-76.

103. *Француз А.Г.* Некоторые вопросы статистической теории опознания образов // Бионика. — М.: Наука, 1965. — С. 23-32.

104. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

105. *Харичев В.В., Шмидт А.А., Якубович В.А.* Об одной новой задаче распознавания образов // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 1. — С. 109-122.

106. *Хармон Л.* Распознавание образов при помощи цифровых вычислительных машин. — М.: Мир, 1974. — 164 с.

107. *Цыпкин Я.З.* Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 1. — С. 23-61.

108. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968. — 399 с.

109. *Цыпкин Я.З.* Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970. — 251 с.

110. *Цыпкин Я.З.* Об одном классе обучающихся систем // Адаптивные обучающиеся истемы. — М.: Наука, 1972. — С. 43-57.

111. *Цыпкин Я.З.* Оптимальные адаптивные системы управления // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 277, № 5. — С. 1091-1096.

112. *Цыпкин Я.З.* Оптимальность в задачах и алгоритмах оптимизации при наличии неопределенности // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 1. — С. 75-80.

113. *Цыпкин Я.З., Кельманс Г.К.* О рекуррентных алгоритмах самообучения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1967. — № 5. — С. 78-87.

114. *Цыпкин Я.З., Позняк А.С.* Обучающиеся конечные автоматы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1972. — № 3. — С. 127-140.

115. *Цыпкин Я.З.* А все же существует ли теория синтеза оптимальных систем? // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 108-115.

116. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // Прикл. математика и механика. — 1990. — Т. 54, вып. 6. — С. 883-893.

117. *Шибанов Г.П.* Распознавание в системах автоконтроля. — М.: Машиностроение, 1973. — 424 с.

118. *Шлезингер М.И.* О самопроизвольном различении образов // Читающие автоматы и распознавание образов / Под ред. В.А. ковалевского. — Киев: Наукова думка, 1965. — С. 24-34.

119. *Штейнбух К.* Автомат и человек. Кибернетические факты и гипотезы. — М.: Сов. радио, 1967. — 494 с.

120. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

121. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 399 с.

122. *Якубович В.А.* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Методы вычислений. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. — Вып. 2. — С. 95-131.

123. *Якубович В.А.* Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем // Выч. техника и вопросы программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1965. — Вып. 4. — С. 3-72.

124. *Якубович В.А.* Три теоретические схемы обучающихся опознающих систем // Самообучающиеся автоматические системы / Под ред. А.А. Фельдбаума. — М.: Наука, 1966. — С. 21-28.

125. *Якубович В.А.* Об одной задаче обучения целесообразному поведению // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 8. — С. 119-139.

126. *Якубович В.А.* Об одном классе адаптивных систем и о результатах моделирования на ЭВМ процесса их самообучения // Механизмы и принципы целенаправленного поведения / Под ред. П.К. Анохина. — М.: Наука, 1972. — С. 50-79.

127. *Якубович В.А.* Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии запаздывания в управлении // Кибернетика. — 1976. — № 1. — С. 26-43.

128. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1976. — С. 32-64.

129. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.

130. *Blum J.* Multidimensional stochastic approximation method // Ann. Math. Statistics. — 1954. — V. 25, № 4. — P. 737-744.

131. *Dvoretzky A.* On stochastic approximation // Proc. the 3-rd Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. — 1956. — V. 1. — P. 39-55.

132. *Kiefer E., Wolfowitz J.* Stochastic estimation of the maximum of a regression function // Ann. Math. Statistics. — 1952. — V. 23, № 3. — P. 462-466.

133. *Leitmann G.* The Calculus of Variations and Optimal Control. — NY.: Plenum Press, 1986. — 312 p.

134. *Mayne D.Q., Polak E.* First order strong variation algorithm for optimal control // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1975. — V. 16, № 3/4. — P. 277-301.

135. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statistics. — 1951. — V. 22, № 1. — P. 400-407.

136. *Tertychny-Dauri V.Yu.* Adaptive Mechanics. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 507 p.

Бабушкин Максим Владимирович
Ведяков Алексей Алексеевич
Ведякова Анастасия Олеговна
Милованович Екатерина Воиславовна
Слита Ольга Валерьевна
Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

Математические методы решения некоторых задач, связанных с искусственным интеллектом

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.В. Бабушкин, А.О. Ведякова
Дизайн обложки В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе