ИТМО

В.Н. Кудашов, Е.Г. Селина

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$P\left(a \le Y_n \le b\right) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Санкт-Петербург
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.Н. Кудашов, Е.Г. Селина

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия
в качестве Учебно-методическое пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Санкт-Петербург
2025

Кудашов В.Н., Селина Е.Г., Задачи по теории вероятностей– СПб: Университет ИТМО, 2025. – 51 с.

Рецензент(ы):
Зайцев Андрей Викторович, кандидат технических наук, доцент, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") образовательного центра "Энергоэффективные инженерные системы", Университета ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 09.03.04 "Программная инженерия" и включает в себя краткие теоретические сведения, связанные с методами решения задач теории вероятностей и практические рекомендации по решению этих задач.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.
Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.
ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

1. Вероятностное пространство

1.1. Случайные события

В математике событие рассматривается как основное понятие, которое не требует дополнительного определения, а лишь описывается через свои свойства.

Достоверным событием называют такое событие, которое обязательно происходит, и его принято обозначать как Ω.

Невозможным событием называют событие, которое никогда не происходит, и оно обозначается как $\emptyset$.

Произведением событий A и B называется событие AB, которое происходит только в том случае, когда одновременно происходят оба события A и B. Если события A и B не могут происходить одновременно, то они называются *несовместными*, и в этом случае их произведение $AB = \varnothing$.

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, которое происходит, если произошло хотя бы одно из этих событий — A или B.

	Теория множеств	Теория вероятностей
Ω	пространство (основное множество)	пространство элементарных событий; достоверное событие
ω, $\omega \in \Omega$	элемент пространства ω	элементарное событие ω
A, $A \subset \Omega$	множество A	событие A
$A \cup B$, $A + B$	объединение множеств A и B	сумма событий A и B
$A \cap B$, AB	пересечение множеств A и B	произведение событий A и B
$A \setminus B$, $A - B$	разность множеств A и B	разность событий A и B
$\varnothing$	пустое множество	невозможное событие
$\overline{A}$	дополнение множества A	событие, противоположное событию A
$AB = \varnothing$	A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \subset B$	A есть подмножество B	A влечёт событие B

Разностью событий $A - B$ называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событием к A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Если $A \subset B$, то говорят, что событие A влечёт событие B. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что события A и B равносильны и записывают $A = B$.

Достоверное множество называется пространством элементарных событий. Элементы этого множества называются элементарными событиями. Если множество конечно, то обычно событиями являются все подмножества этого множества.

Особо следует отметить, что операции над событиями — это операции над подмножествами. В теории вероятностей используется своя терминология, связь которой с теоретико-множественной терминологией отражена в таблице.

В общем случае рассматриваются не все подмножества, а лишь некоторые классы этих подмножеств, которые называются **алгебрами** и σ-алгебрами множеств.

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathbf{\Omega}$ называется *алгеброй*, если

А1) $\mathbf{\Omega} \in \mathcal{A}$,

А2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,

А3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B,\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условии А3) достаточно потребовать, чтобы выполнялось либо $A \cup B \in \mathcal{A}$, либо $A \cap B \in \mathcal{A}$, в силу равенств

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},\; A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbf{\Omega}$ называется σ-*алгеброй*, если семейство $\mathcal{F}$ является алгеброй и

А3*) если $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{\Omega} - \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{\Omega} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n,$$

то в условии А3*) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \quad \text{или} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Пара $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F})$, состоящая из множества $\mathbf{\Omega}$ и σ-алгебры $\mathscr{F}$ подмножеств $\mathbf{\Omega}$, называется *измеримым пространством.*

Вероятностью на измеримом пространстве $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F})$ называется числовая функция $\mathsf{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре событий $\mathscr{F}$, удовлетворяющая условиям:

P1) $\mathsf{P}(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathscr{F}$ (неотрицательность P);

P2) $\mathsf{P}(\mathbf{\Omega}) = 1$ (нормированность P);

P3) $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathscr{F}$, $AB = \varnothing$ (аддитивность P);

P4) если $A_n \downarrow \varnothing$, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$$

(непрерывность P).

Тройку $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где $\mathbf{\Omega}$ — пространство элементарных событий, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра событий, P — вероятность на измеримом пространстве $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F})$, называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Тогда справедливы следующие свойства вероятности.

1. Справедливо равенство

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0. \tag{1.1}$$

2. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.

3. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

4. Для любого $A \in \mathscr{F}$

$$0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1. \tag{1.2}$$

5. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ для любого события A.

6. *Конечная аддитивность*: если $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i). \tag{1.3}$$

7. Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k). \tag{1.4}$$

8. Для любых событий A и B

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB). \qquad (1.5)$$

Задачи

1.1.1. Два волшебных кубика бросаются в магическом лесу, где каждый кубик может принять значения от 1 до 6. Пусть событие A — это ситуация, когда сумма очков на этих кубиках оказывается нечётной. Ведь в магическом лесу нечётные числа приносят удачу! И пусть событие B — это ситуация, когда хотя бы на одном из кубиков выпала единица. Появление единицы — знак того, что лес оживает, а лесные духи даруют подарок.

Опишите своими словами следующие события:

- произведение событий A и B,
- сумма событий A и B,
- событие, противоположное произведению событий A и B.

1.1.2. Пусть в некотором волшебном мире A, B и C — это события, связанные с тремя древними заклинаниями. Давайте изучим, какие мистические феномены могут происходить, если эти заклинания вступают в силу. Найдите выражения для событий, при которых происходят различные комбинации этих заклинаний.

a) Сработало только заклинание A (заклинания B и C не сработали),

b) Сработали только заклинания A и B,

c) Все заклинания сработали,

d) Сработало хотя бы одно заклинание,

e) Сработали хотя бы два заклинания,

f) Сработало одно и только одно заклинание,

g) Сработали два и только два заклинания,

h) Ни одно заклинание не сработало,

i) Сработало не более двух заклинаний.

1.1.3. Обозначим за A и B два важнейших события:

- Событие A: Студент сдал экзамен по математическому анализу,
- Событие B: Студент сдал экзамен по математике.

При каких условиях сработает следующее волшебное равенство: $AB = A$?

1.1.4. Пусть A, B, C — произвольные случайные события. При каких условиях сработают следующие волшебные равенства:

a) $ABC = A$,

b) $A + B + C = A$.

Приведите примеры.

1.1.5. Пусть A, B, C — произвольные случайные события. Упростить следующие выражения для событий:
а) $(A + B)(B + C)$;
б) $(A + B)(A + \overline{B})$;
в) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

1.1.6. Пусть A и B — произвольные случайные события. Доказать, что события A, $\overline{A}B$, $\overline{A + B}$ образуют разбиение достоверного события $\mathbf{\Omega}$.

1.1.7. Пусть A и B — произвольные случайные события. Доказать, что события

а) $(A + B)(A + \overline{B}) + (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$;

б) $(A + B)(\overline{A} + \overline{B}) + (A + \overline{B})(\overline{A} + B)$

достоверны.

1.1.8. Пусть A и B — произвольные случайные события. Доказать, что событие

$$(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$$

невозможно.

1.1.9. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

1.1.10. Пусть A и B — произвольные случайные события. Доказать тождества:

а) $\mathsf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(AB)$;

б) $\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A} \cdot B) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \cdot \overline{B})$;

1.2. Дискретное вероятностное пространство

Рассмотрим конечное вероятностное пространство. В этом случае пространство элементарных событий $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — конечное множество, $\mathcal{A}$ — алгебра всех подмножеств множества $\mathbf{\Omega}$. Так как $\mathbf{\Omega}$ конечно, то алгебра $\mathcal{A}$ автоматически является σ-алгеброй.

Вероятность задаётся следующим образом. Пусть заданы положительные числа p_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2.1}$$

Для события $A \subset \mathbf{\Omega}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = 1. \tag{2.2}$$

Для невозможного события $\varnothing$ считаем, что $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$. Легко проверить, что так определённая вероятность удовлетворяет всем аксиомам.

Частным случаем определения вероятности (2.2) является так называемое *классическое определения вероятности*, когда все p_i равны друг другу. В силу (2.1) в этом случае $p_i = \dfrac{1}{|\mathbf{\Omega}|}$ и

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\mathbf{\Omega}|}. \tag{2.3}$$

Модель вероятностного пространства, приводящая к классическому определению вероятности, используется в тех случаях, когда элементарные события обладают свойством *симметрии* в том смысле, что все элементарные события находятся в одинаковом отношении к тем условиям, которые определяют характер испытания.

Следующее пространство является обобщением конечного вероятностного пространства. Пусть

$$\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

— счётное множество, $\mathcal{F}$ — набор всех подмножеств $\mathbf{\Omega}$. Пусть p_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для всякого события $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{n \in \{n\colon \omega_n \in A\}}^{\infty} p_n. \tag{2.4}$$

Нетрудно показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

Отметим, что если $p_n = 0$ при $n > N$, то фактически мы имеем дело с конечным пространством $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

Задачи

1.2.1. В волшебном шахматном королевстве два магических ладьи — одна белая и одна чёрная — случайным образом оказываются на шахматной доске. Из-за их магической природы, ладьи могут атаковать друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали. Какова вероятность того, что эти ладьи не окажутся на одной линии и не смогут атаковать друг друга?

1.2.2. Представьте себе магическую колоду из 36 карт, тщательно перемешанную, так что все возможные расположения карт равновероятны. Рассмотрим два события:

- *Событие* A: Четыре туза в колоде оказались рядом.
- *Событие* B: Места, где расположены тузы, образуют арифметическую прогрессию с шагом 7.

Найдите вероятности этих событий.

1.2.3. Представьте, что ваше любимое число шесть. Вы в поисках удачи решили выбрать 7 костей из полного набора домино случайным образом, но, конечно, надеясь на везение. Какова вероятность, что среди этих 7 костей будет хотя бы одна с шестью очками?

1.2.4. (*Задача игрока де Мере*). Какое событие более вероятно: $\{$ при четырёх бросаниях кости хотя бы раз выпадет шесть очков $\}$ или $\{$ при двадцати четырёх бросаниях двух костей хотя бы раз выпадут две шестёрки $\}$

1.2.5. Представьте, что в группе из 8 человек нужно выбрать места на одной стороне прямоугольного стола. Какова вероятность того, что два конкретных человека окажутся рядом, если:

а)Количество мест на столе — 8.

б)Количество мест на столе — 12.

1.2.6. Группа из n человек случайным образом садится в ряд. Какова вероятность того, что два конкретных человека будут сидеть рядом? А как изменится эта вероятность, если те же самые люди садятся за круглый стол?

1.2.7. Вычислить вероятность того, что при размещении n различимых шаров по N ящикам, заданный ящик будет содержать ровно k шаров, где $0 \le k \le n$, при условии, что все возможные размещения имеют равные шансы.

1.3. Геометрические вероятности

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — это область в евклидово n-мерном пространстве с конечным n-мерным объёмом. Событиями будем называть подмножества $\mathbf{\Omega}$, для которых можно определить n-мерный объём. Множеством событий является σ-алгебра $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств $\mathbf{\Omega}$. Вероятность события A определяется как

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\mathbf{\Omega}|},$$

где $|V|$ означает n-мерный объём множества V.

Таким образом, мы получаем вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, где вероятность P определяется по формуле (3.1). Это вероятностное пространство служит моделью для задач, в которых частица случайным образом оказывается в области $\mathbf{\Omega}$. При этом предполагается, что её положение распределено равномерно в этой области, то есть вероятность того, что частица попадёт в область A, пропорциональна n-мерному объёму этой области.

Определим обобщение рассмотренного выше вероятностного пространства Пусть

$$\mathbf{\Omega} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

— n-мерное вещественное евклидово пространство, $\boldsymbol{\pi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неотрицательная функция, интегрируемая по Риману по любой квадрируемой области из $\mathbf{\Omega}$. Будем предполагать, что существует несобственный интеграл по $\mathbf{\Omega}$ от функции $\boldsymbol{\pi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\pi}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру, порождённую квадрируемыми областями в $\boldsymbol{\Omega}$. Для любого $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \int_A \pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.2}$$

Можно показать, что $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *абсолютно непрерывным вероятностным пространством.*

Задачи

1.3.1. Внутри круга расположен квадрат. Точка случайным образом выбирается внутри круга. Какова вероятность того, что точка попадёт в квадрат?

1.3.2. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не более x;

б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x.

1.3.3. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x, y) : \ |x| \le a, \ |y| \le a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

1.3.4. Значения a, b равновозможны в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий:

$$A = \{ \text{ корни уравнения } x^2 + 2ax + b = 0 \text{ действительны } \},$$

$$B = \{ \text{ корни уравнения } x^2 + 2ax + b = 0 \text{ положительны } \}.$$

1.3.5. В шар радиуса R случайным образом бросаются N точек. Необходимо найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, где $0 < a < R$.

1.3.6. (*Задача Бюффона*) На плоскости, разделённой параллельными прямыми линиями, расстояние между которыми равно $2a$, случайным образом бросается игла длиной $2l$. Необходимо найти вероятность того, что игла пересечёт одну из параллельных прямых, если $l < a$.

2. Условные вероятности. Независимость

2.1. Условные вероятности. Теорема умножения

Пусть A, B – некоторые события, причём $P(B) > 0$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии, что произошло событие B, называется величина

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

Для условной вероятности $P(A|B)$ применяется также обозначение $P_B(A)$.

Запишем (1.1) в виде

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) называется теоремой умножения.

Теорема 1. (Теорема умножения.)

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — последовательность событий, при этом выполняется условие $P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$. Тогда вероятность наступления всех этих событий можно выразить как

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}). \tag{1.3}$$

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.4}$$

Если это равенство не выполняется, то такие события называются зависимыми.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми, если для любых индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, где $2 \leq m \leq n$, выполняются следующие равенства:

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m}). \tag{1.5}$$

Если это условие не выполняется, то события считаются зависимыми. Когда несколько событий независимы друг от друга, говорят об их независимости в совокупности.

Задачи

2.1.1. Представьте, что мы подбрасываем игральную кость. Пусть два события:

- $A = \{$выпало простое число на грани$\}$ — это событие, когда на кости появляется одно из простых чисел,
- $B = \{$выпало чётное число на грани$\}$ — это событие, когда результат броска кости является чётным числом.

Наша задача — вычислить вероятность того, что при условии, что выпало чётное число, на самом деле выпало простое число. То есть, нужно найти условную вероятность $P(A|B)$.

2.1.2. Докажите неравенство $\mathsf{P}(A\,|B) \geq 1 - \dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

2.1.3. Представим, что мы на поле боя, где вероятность точно попасть во вражеский самолёт составляет 0,4, а вероятность сбить его при попадании — 0,1.

Наша задача — вычислить вероятность того, что при попадании в самолёт он будет уничтожен. То есть, нам нужно найти вероятность того, что самолёт будет сбит, при условии, что мы по нему попали.

2.1.4. Вероятность рождения мальчика или девочки в семье являются независимыми событиями с равной вероятностью, поскольку пол ребенка определяется наличием или отсутствием Y-хромосомы в сперматозоиде.

Если мы знаем, что в семье уже есть один мальчик, какова вероятность того, что второй ребенок тоже будет мужского пола? То есть, какова вероятность того, что второй ребёнок унаследует Y-хромосому, если первая хромосомная комбинация уже привела к рождению мальчика?

2.1.5. Пусть события A и B являются несовместными и выполняется $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$. Докажите, что в этом случае они зависимы.

2.1.6. Пусть события A и B являются независимыми. Докажите, что в этом случае независимыми являются события противоположные им события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

2.1.7. Представьте, что в ящике находится 12 красных, 8 зелёных и 10 синих шаров. Мы случайным образом вытаскиваем два шара.

Найдите вероятность того, что оба выбранных шара будут разного цвета, если нам точно известно, что синий шар остался в ящике.

2.2. Формула полной вероятности

Система событий B_1, B_2, ..., B_n называется *конечным разбиением* $\mathbf{\Omega}$, если они попарно несовместны и

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \mathbf{\Omega}. \tag{2.1}$$

Теорема. (Формула полной вероятности.) *Пусть события B_1, ..., B_n образуют конечное разбиение $\mathbf{\Omega}$ и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A справедлива формула*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k), \tag{2.2}$$

называемая формулой полной вероятности.

Задачи

2.2.1. Представьте, что у нас есть две партии лампочек: в первой партии 12 лампочек, а во второй — 10. В каждой партии имеется по одной бракованной лампочке. Одна случайная лампочка из первой партии переносится во вторую, после чего случайным образом выбирается лампочка из второй партии. Определите вероятность того, что из второй партии будет извлечена бракованная лампочка.

2.2.2. Представьте, что вы играете в домино и случайным образом вытаскиваете две кости из полного набора. Определите, какова вероятность, что эти две кости можно соединить? То есть, на одной из сторон второй кости должно быть такое же число, как на одной из сторон первой.

2.2.3. Представьте, что на детском празднике на двух столах лежат различные конфеты: на первом столе — m_1 белых и n_1 чёрных конфет, а на втором — m_2 белых и n_2 чёрных. Дети случайным образом берут по одной конфете с каждого стола, а затем выбирают одну из этих конфет, чтобы поделиться с другом. Какова вероятность, что выбранная конфета будет белой?

2.2.4. Представьте, что студент в ИТМО сдаёт экзамен, и он знает ответы только на 10 из 25 экзаменационных билетов. В какой ситуации у студента будет больше шансов получить знакомый билет — когда он тянет билет первым или вторым по счёту?

2.2.5. Представьте, что в кладовке хоккейной команды есть 20 шайб, из которых 15 — новые, а 5 — использованные. Для первой тренировки наугад выбираются две шайбы, которые после тренировки возвращаются обратно. Затем для второй тренировки снова случайным образом выбираются две шайбы.

Вопрос: какова вероятность того, что для второй тренировки будут выбраны только новые шайбы?

2.2.6. Представьте, что у вас есть список цен на товары $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Вы случайным образом выбираете два товара, при этом не возвращая их обратно в список. Какова вероятность того, что цена первого товара окажется хотя бы на m единиц выше, чем цена второго?

2.2.7. Представьте, что в магазине есть 8 исправных электрических чайников. Затем в этот магазин поступают 2 чайника, взятых со склада, но что 5% чайников на складе — бракованные.

Какова вероятность того, что случайно выбранный из пополненного магазина чайник окажется исправным?

2.3. Формулы Байеса

Теорема. *Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ образуют конечное разбиение $\boldsymbol{\Omega}$ и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A, $\mathsf{P}(A) > 0$, справедливы формулы*

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A\,|B_i)}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

называемые формулами Байеса.

Задачи

2.3.1. Представьте, что на празднике есть 10 вазочек с конфетами. В 9 из них по две чёрные и две белые конфеты, а в одной — пять белых и одна чёрная конфета. Вы случайным образом выбираете одну вазочку и вытаскиваете белую конфету.

Какова вероятность, что белая конфета была извлечена из вазочки, в которой содержится пять белых конфет?

2.3.2. Три игрока в пейнтбол делают по одному выстрелу по общей мишени. Вероятности того, что каждый из них попадёт в мишень, равны соответственно p_1, p_2 и p_3.

Вычислите вероятность того, что второй игрок промахнулся, если после выстрелов на мишени оказалось всего два попадания?

2.3.3. У ребёнка есть коробка с 3 красными и 2 синими игрушками. Он случайным образом берет две игрушки, не возвращая их обратно в коробку. Оказалось, что одна игрушка красная.

Какова вероятность того, что вторая игрушка тоже будет красной?

2.3.4. У ребёнка есть k_1 коробок, в каждой из которых содержатся m_1 жёлтых и n_1 зелёных игрушек, а также k_2 коробок, в которых лежат m_2 жёлтых и n_2 зелёных игрушек.

Ребенок случайным образом выбирает одну коробку и извлекает из неё одну игрушку. Оказалось, что игрушка жёлтая.

Какова вероятность того, что выбранная игрушка была извлечена из коробки первой группы?

2.3.5. В коробке находится n игрушек. До начала эксперимента неизвестно, сколько среди них оранжевых, а сколько другого цвета, и мы считаем любые предположения о числе оранжевых игрушек равновероятными.

Из коробки по очереди извлекаются k игрушек, причём после каждого извлечения игрушка возвращается обратно в коробку.

Вопрос: какова вероятность того, что в коробке только оранжевые игрушки, если ни одной игрушки другого цвета при извлечении не оказалось?

3. Последовательности независимых испытаний

3.1. Схема Бернулли

Независимые испытания, которые имеют два возможных исхода, называются *схемой Бернулли* или *испытаниями Бернулли*. В таких испытаниях вероятность каждого исхода остаётся постоянной и положительной для всех испытаний. Эти два исхода часто называют успехом и неудачей, и обозначают их через p и q соответственно. Очевидно, что $p > 0$, $q > 0$ и $p + q = 1$. (1.1)

Теперь рассмотрим вероятностное пространство для n испытаний Бернулли. Пусть каждый результат испытания может быть либо 0 (неудача), либо 1 (успех). Таким образом, исходом каждого испытания является значение 0 или 1. Множество всех возможных исходов будет представлять собой набор элементов вида:

$$\mathbf{\Omega} = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{У}, \text{Н}\}.$$

Формула для вычисления вероятности элементарного события

$$\mathsf{P}(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}.$$

Теорема 1.1. *Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, то*

$$\mathsf{P}(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.2}$$

Одинаковые независимые между собой испытания называются *полиномиальной схемой*, если при каждом испытании имеется только k возможных исходов, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний. Схема Бернулли является является частным случаем полиномиальной схемы когда $k = 2$.

Пусть E_1, E_2, ..., E_k — исходы испытаний и $p_i = \mathsf{P}(E_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $p_i > 0$ и

$$p_1 + \ldots + p_k = 1. \tag{1.3}$$

Теорема 1.2. *Рассмотрим полиномиальную схему, состоящую из n испытаний с возможными исходами E_1, E_2, ..., E_k. Вероятность того, что событие E_i произойдёт r_i раз, $i = 1, \ldots, k$, равна*

$$P_n(r_1, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}\, p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}. \tag{1.4}$$

Задачи

3.1.1. Представьте, что вы отправляете сообщение, состоящее из 10 символов, и вероятность того, что каждый символ будет искажен, равна 1/10. Теперь давайте рассмотрим различные сценарии и посчитаем вероятности:

1. Какова вероятность, что сообщение будет передано без искажений?

2. Какова вероятность, что в сообщении будет ровно 3 искаженных символа?

3. Какова вероятность, что количество искаженных символов в сообщении не превысит 3?

3.1.2. Допустим, что у вас есть три игральных кубика, которые вы подбрасываете. И пусть вы повторяете этот процесс 5 раз. Какова вероятность того, что ровно дважды из этих пяти подбрасываний на всех трёх кубиках выпадет по единичке?

3.1.3. Представьте, что вы идете по льду на реке, где каждый шаг — это испытание. В каждом испытании есть два возможных исхода: удачно пройти шаг (успех) или поскользнуться (неудача). Пусть вероятность успеха на каждом шаге равна p, а вероятность неудачи — $q = 1 - p$. Теперь, если вы сделаете $2n$ шагов, какова вероятность, что вы получите ровно $m + n$ успешных шагов, при этом все шаги с чётными номерами окажутся успешными?

3.1.4. Представьте, что два друга играют в игру, подбрасывая честную монету. Под честной монетой подразумевается монета, у которой вероятность выпадения "орел"и "решка"одинакова и равна 1/2 для каждого подбрасывания. Каждый из них подбрасывает монету n раз. Какова вероятность того, что оба друга получат одинаковое количество "орел"и "решка"после своих подбрасываний?

3.1.5. Сколько испытаний в схеме Бернулли с $p = 0{,}02$ нужно провести, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не меньше 1/2?

3.1.6. Два друга играют в игру, подбрасывая две игральных кубика. Они продолжают подбрасывать кубики, пока хотя бы на одном из них не выпадет шестерка. Какова вероятность того, что шестерка появится впервые именно при k-м бросании, где $k = 1, 2, \dots$?

3.1.7. Петя и Вася по очереди подбрасывают монету. Побеждает тот, кто первым получит "орел". Рассчитаем вероятности следующих событий:

1. Игра закончится до 4-го подбрасывания монеты.
2. Победит Петя, который начал первым.
3. Победит Вася, который подбрасывает монету после Пети.

3.1.8. Петя и Вася решили поиграть и бросают двенадцать игральных кубиков с цифрами на гранях. Какова вероятность того, что каждая цифра от 1 до 6 выпадет хотя бы дважды за эти двенадцать бросков?

3.1.9. Отрезок $[0, 10]$ точками 1, 2, 3, 4, 7 разделён на 4 отрезка длины 1 и 2 отрезка длины 3. Пусть $A_1, \dots, A_8$ — независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 10]$. Какова вероятность того, что из этих точек в два каких-либо отрезка длиной 1 попадёт по две точки, а в каждый из оставшихся отрезков — по одной точке?

3.2. Локальная и глобальная теоремы Муавра – Лапласа

Теорема 2.1.(Локальная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то для любого конечного промежутка $[a, b]$, $a \le b$,*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \left(1 + O(n^{-1/2})\right). \tag{2.1}$$

равномерно для $x \in [a, b]$ вида

$$x = x_{mn} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2.(Интегральная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то равномерно по $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx. \tag{2.3}$$

Пусть требуется вычислить вероятность $\mathsf{P}\{m_1 \le \mu \le m_2\}$. Вычисляем величины

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{2.4}$$

Затем полагаем

$$\mathsf{P}\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2.5}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx \tag{2.6}$$

— *функция нормального распределения.* Для функции $\Phi(x)$ имеются таблицы. Справедливы формулы

$$\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1. \tag{2.7}$$

Отметим формулы

$$\mathsf{P}\{0 \le \mu \le m_2\} \approx \Phi(x_2), \quad \mathsf{P}\{m_1 \le \mu \le n\} \approx 1 - \Phi(x_1). \tag{2.8}$$

Задачи

3.2.1. Представьте, что в саду растёт особенный цветок, который распускается с вероятностью 0,25 после каждого полива. Пусть за 243 полива садовник наблюдает за этим цветком. Какова вероятность того, что этот цветок распустится ровно 70 раз в течение всех поливов?

3.2.2. Садовник сажает семена цветов, и вероятность того, что росток прорастет из каждого семени, составляет 0,6. После посадки 2400 семян, какова вероятность того, что из них прорастет ровно 1400 ростков?

3.2.3. Николай играет в игру с подбрасыванием монеты. Монета подбрасывается $2N$ раз, где $N \gg 1$. Какова вероятность того, что "орёл"выпадет в $2m$ раз больше, чем "решка"?.

3.2.4. Представьте, что рыбак забрасывает удочку 2100 раз, и вероятность того, что он поймает рыбу в каждом забросе, равна 0,7. Найдите вероятность того, что он поймает рыбу:

1. Не менее 1470 раз и не более 1500 раз.
2. Не менее 1470 раз.
3. Не более 1469 раз.

3.2.5. Маша и Катя достают игрушки из ящика, в котором находится 1 розовая и 4 голубые игрушки. Они проводят 2500 извлечений игрушек по схеме случайного выбора с возвращением. Какова приближённая вероятность того, что количество извлечений розовой игрушки окажется между 480 и 540?

3.2.6. Представьте, что в лесу Маша и Катя собирают грибы. Каждый гриб, который они находят, либо съедобный, либо ядовитый. Вероятность того, что они найдут съедобный гриб, составляет $\frac{1}{2}$, и они находят грибы в n независимых попытках. Пусть μ_n — это количество съедобных грибов, которые они нашли за n попыток. Найдите, как будет изменяться число съедобных грибов μ_n в зависимости от общего числа попыток. С помощью теоремы Муавра – Лапласа найти приближённые значения

$$\mathsf{P}\left\{\left|\mu_n - \frac{n}{2}\right|\right\} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad \mathsf{P}\left\{\left|\mu_n - \frac{n}{2}\right|\right\} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

3.2.7. Представьте, что Маша и Катя собирают грибы в лесу, и вероятность того, что они найдут съедобный гриб в каждом отдельном случае, составляет 0,8. Сколько попыток им нужно сделать, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что они соберут не менее 75 съедобных грибов?

3.3. Распределение Пуассона

Теорема 3.1.(Теорема Пуассона.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{3.1}$$

Обозначим

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{3.2}$$

Полученное распределение вероятностей носит название *закона Пуассона.*

Задачи

3.3.1. Компания закупает оптом 1000 принтеров. Каждый принтер может оказаться неисправным с вероятностью 0,005. Какова приближённая вероятность того, что в партии будет неисправно не более трёх принтеров?

3.3.2. Представьте, что Алла пишет сочинение и делает ошибки с вероятностью 0,01 за каждое слово. Какова приближённая вероятность того, что при написании 100 слов она сделает не более трёх ошибок?

3.3.3. Алексей печатает реферат, на каждой странице 2400 знаков. При наборе Алексей текста вероятность искажения одного знака равна $\frac{1}{800}$. Какова приближённая вероятность того, что на странице будет не менее двух опечаток?

3.3.4. На фабрике насчитывается 500 работников. Какова вероятность того, что 15 февраля заболеют одновременно k работников данного предприятия?

3.3.5. Оценить среднее число изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы не более одной булочки из ста было без изюма.

4. Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — произвольное вероятностное пространство. Числовая функция $\xi(\omega)$ на множестве элементарных событий Ω называется *случайной величиной*, если для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \boldsymbol{\Omega} : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{0.1}$$

Функция

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}, \tag{0.2}$$

определённая при всех $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины* ξ. Функция распределения $F(x) = F_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

F1. $F(x)$ не убывает.

F2. $F(x)$ непрерывна слева.

F3.

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \tag{0.3}$$

4.1. Дискретные случайные величины

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если существует конечное или счётное множество чисел x_1, x_2, … таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi = x_n\} = p_n,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{1.1}$$

Случайная величина с дискретным распределением называется *дискретной случайной величиной*. Дискретную случайную величину также называют *случайной величиной дискретного типа*.

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ дискретной случайной величины ξ называется число

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n, \tag{1.2}$$

если ряд (1.2) абсолютно сходится. Если ряд (1.2) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Для случайной величины $g(\xi)$, где ξ — дискретная случайная величина, математическое ожидание определяется формулой

$$\mathsf{M}g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) p_n, \tag{1.3}$$

если ряд (1.3) абсолютно сходится.

Приведём основные свойства математического ожидания.

M1. *Если C — постоянная, то* $\mathsf{M}C = C$.

M2. *Если C — постоянная, то* $\mathsf{M}(C\xi) = C\mathsf{M}(\xi)$.

M3. *Для любых случайных величин* ξ_1 *и* ξ_2

$$\mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2.$$

Дисперсией случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\,(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2, \qquad (1.4)$$

если математическое ожидание, стоящее в правой части равенства, существует. Дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания. Величина $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины ξ.

Приведём основные свойства дисперсии

D1. *Для любой случайной величины* ξ *верно неравенство* $\mathsf{D}\xi \geq 0$.

D2. *Если C — постоянная, то* $\mathsf{D}C = 0$.

D3. *Если C — постоянная, то*

$$\mathsf{D}(C\xi) = C^2\mathsf{D}\xi, \quad \mathsf{D}(\xi + C) = \mathsf{D}\xi.$$

Модой дискретной случайной величины ξ называется такое возможное значение x_m, для которого

$$\mathsf{P}\{\xi = x_m\} = \max_k \mathsf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Таким образом, мода дискретной случайной величины есть её наиболее вероятное значение. Мода может не существовать, иметь единственное значение (*унимодальное распределение*) или иметь множество значений (*мультимодальное распределение*).

Приведём примеры часто встречающихся дискретных распределений.

1. *Вырожденное распределение*:

$$\mathsf{P}\,\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое распределение* (N, M, n — натуральные числа, $M \leq N$, $n \leq N$):

$$\mathsf{P}\,\{\xi = m\} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

3. *Биномиальное распределение* (n — натуральные число, $0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. *Геометрическое распределение* ($0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Задачи

4.1.1. На конкурсе участникам даются три типа заданий: лёгкие, средние и сложные. Пусть случайная величина X принимает значения -1, 0 и 1, где:

$X = -1$ означает выполнение лёгкого задания с вероятностью $\dfrac{1}{4}$;

$X = 0$ — выполнение среднего задания с вероятностью $\dfrac{1}{2}$;

$X = 1$ — выполнение самого сложного задания с вероятностью $\dfrac{1}{4}$.

Задание:

1. Найти функцию распределения $F_X(x)$ для этой случайной величины и построить её график.

2. Вычислить математическое ожидание M_X и дисперсию D_X.

4.1.2. Случайная величина ξ имеет следующее распределение вероятностей:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	$0,1$	$0,2$	$0,2$	$0,4$	$0,1$

Найти $\mathsf{P}\{|\xi| \leq 1\}$, $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$.

4.1.3. Случайная величина ξ распределена по следующему закону:

ξ	-1	0	1
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Найти $\mathsf{M}\xi^4$ и $\mathsf{D}\xi^4$.

4.1.4. Владислав проводит эксперимент: он трижды подбрасывает честную монету. Честная монета — это монета, у которой вероятность выпадения "орла"(герба) равна вероятности выпадения "решки т.е. каждая из сторон монеты имеет вероятность $\frac{1}{2}$ выпадения.

Случайная величина X представляет собой количество выпавших "орлов". Нужно:

1. Описать закон распределения этой случайной величины.

2. Вычислить функцию распределения $F_X(x)$, математическое ожидание M_X, дисперсию D_X и моду X.

4.1.5. Наталья решила провести эксперимент с игральными кубиками. Она подбрасывает один кубик и записывает количество выпавших очков, а затем подбрасывает два кубика и записывает их сумму.

1. Найти математическое ожидание и дисперсию для числа очков при одном броске игрального кубика.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию для суммы очков при броске двух игральных кубиков.

4.1.6. Никита решил провести эксперимент с игрушками, которые он хранит в своём шкафу. В шкафу у него есть m зелёных и n жёлтых игрушек. Он извлекает одну игрушку за раз, после чего возвращает её обратно в шкаф. Эксперимент продолжается до тех пор, пока не появится зелёная игрушка. Нужно найти математическое ожидание числа вынутых жёлтых игрушек до того, как будет вынута зелёная игрушка.

4.1.7. Платон и Виктор одновременно стреляют в тире, и каждый из них делает один выстрел. Вероятность попадания в мишень для Платона равна p_1, а для Виктора p_2. Суммарное количество попаданий в мишень в этом эксперименте обозначим случайной величиной ξ.

Необходимо описать закон распределения случайной величины ξ и вычислить математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi)$ и дисперсию $\mathsf{D}(\xi)$ для числа попаданий в мишень.

4.1.8. Вы ходите по лесу и собираете грибы до того момента, когда найдете боровик. Вероятность того, что очередной найденный гриб окажется боровиком, равна p. Необходимо вычислить математическое ожидание и дисперсию числа ξ найденных грибов до того, как вы найдете первый боровик.

4.1.9. Предположим, что случайная величина ξ представляет собой количество счастливых случайностей, которые могут произойти в течение дня. Эта величина может принимать целые неотрицательные значения $n \geq 0$

с вероятностями $p_n = A\,\dfrac{k^n}{n!}$. Найти A и k, если известно, что $\mathsf{M}\xi = a$. Найти моду величины ξ.

4.1.10. Пусть случайная величина ξ описывает количество ярких и необычных событий, которые могут произойти за лето. Это число — целое и неотрицательное, и оно может быть любым. Эта случайная величина принимает целые неотрицательные значения с вероятностями $P\{\xi = k\} = A\,\dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ $(a > 0)$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.

4.1.11. Предположим, что случайная величина ξ описывает количество успешно сданных экзаменов студентами за время сессии в ИТМО. Эта величина — целое неотрицательное число. Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi \geq k\}.$$

4.2. Непрерывные случайные величины

Распределение случайной величины ξ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du. \tag{2.1}$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*. Случайная величина с абсолютно непрерывным распределением называется *непрерывной случайной величиной*. Непрерывную случайную величину также называют *случайной величиной непрерывного типа*.

Для непрерывных случайных величин справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{a \leq \xi \leq b\} = \mathsf{P}\{a < \xi \leq b\} = \mathsf{P}\{a \leq \xi < b\} = \\ = \mathsf{P}\{a < \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ непрерывной случайной величины ξ называется число

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,dx, \tag{2.3}$$

если интеграл (2.3) абсолютно сходится. Если интеграл (2.3) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами M1 – M3, что и математическое ожидание дискретной случайной величины.

Для случайной величины $g(\xi)$, где ξ — непрерывная случайная величина а g — непрерывная функция, математическое ожидание определяется формулой

$$\mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_\xi(x)\,dx, \tag{2.4}$$

если интеграл (2.4) абсолютно сходится.

Дисперсия непрерывной случайной определяется той же формулой (1.7), что и дисперсия дискретной случайной величины, и обладает свойствами D1 – D3.

Модой непрерывной случайной величины ξ называется точка максимума плотности распределения ξ. Как и в дискретном случае мода непрерывной случайной величины может не существовать, иметь единственное значение (*унимодальное распределение*) или иметь множество значений (*мультимодальное распределение*).

Медианой непрерывной случайной величины ξ называется действительное число h_ξ, удовлетворяющее условию

$$\mathsf{P}\{\xi < h_\xi\} = \mathsf{P}\{\xi \geq h_\xi\},$$

т. е. корень уравнения

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Так как данное уравнение может иметь множество корней, то медиана определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Квантилью порядка p, $0 < p < 1$, распределения непрерывной случайной величины ξ называется действительное число t_p, удовлетворяющее уравнению

$$F_\xi(t_p) = p. \tag{2.6}$$

Как и медиана квантиль может быть неопределённой. Очевидно, что квантиль $t_{1/2}$ есть медиана.

Перечислим некоторые абсолютно непрерывные распределения, указав их плотность.

1. *Равномерное распределение на отрезке* $[a,b]$, $a < b$:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

2. *Нормальное распределение с параметрами* (m, σ^2) $(\sigma > 0,\ m \in \mathbb{R})$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение, также известное как гауссово распределение, с параметрами (0, 1) называется стандартным нормальным распределением.

3. *Показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Задачи

4.2.1. Возьмем случайную величину ξ непрерывного типа, которая принимает ненулевые значения только на отрезке $[-1,1]$, причём функция распределения вероятностей представляет собой квадратичную зависимость от x на этом отрезке.

а) Написать выражения для $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$.

б) Пусть дополнительно к этмому, известно, что плотность $p_\xi(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Построить график $F_\xi(x)$ в этом случае и вычислить математическое ожидание M_ξ и медиану h_ξ. Найти $\mathsf{P}\{\xi > 0\}$ и $\mathsf{P}\{-1/2 < \xi \leq 1/2\}$.

4.2.2. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение: следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} A, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Найти

а) коэффициент A;

б) функцию распределения и построить её график;

в) математическое ожидание $\mathsf{M}\xi$ и дисперсию $\mathsf{D}\xi$.

4.2.3. Плотность случайной величины ξ задана следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} A\cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти

а) коэффициент A;

б) функцию распределения и построить её график;

в) $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

4.2.4. Плотность случайной величины ξ задана следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Вычислить $\mathsf{P}\big\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \le 0{,}5\big\}$.

4.2.5. Случайная величина ξ распределена равномерно, причём $\mathsf{M}\xi = 4$, $\mathsf{D}\xi = 3$. Найти плотность величины ξ.

4.2.6. Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

а) построить график $F(x)$ и график плотности;

б) найти моду, медиану и среднее значение ξ;

в) вычислить вероятность $\mathsf{P}\big\{0{,}5 < \xi < 1{,}5\big\}$.

4.2.7. Случайная величина ξ распределена по *закону Коши*, определяемому функцией распределения вероятностей

$$F_\xi(x) = b + c \operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

а) Подобрать коэффициенты a, b и c таким образом, чтобы данное распределение соответствовало случайной величине непрерывного типа.

б) Найти плотность вероятности распределения Коши. Существует ли математическое ожидание и дисперсия у данного распределения?

в) Вычислить моду, медиану и квантиль t_p порядка $p = 0{,}75$ распределения Коши.

4.2.8. Непрерывная случайная величина ξ принимает неотрицательные значения, имеет конечное математическое ожидание и её функция распределения имеет вид $F_\xi(x)$. Докажите, что математическое ожидание такой случайной величины можно вычислить по формуле

$$\mathsf{M}\xi = \int_0^{+\infty} [1 - F_\xi(x)]\, dx.$$

5. Случайные векторы

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы n случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Данные случайные величины можно рассматривать как n-мерный вектор:

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)).$$

Величина ξ называется *случайным вектором.*

Функцией распределения случайного вектора (1.1) или *совместной функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется функция n переменных

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\, \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n \,\}.$$

Величину (1.2) ещё называют *многомерной функцией распределения.*

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми* (*в совокупности*), если

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n),$$

где $F_i(x_i) = \mathsf{P}(\xi_i < x_i)$ — одномерная функция распределения ξ_i.

Далее мы будем рассматривать только двумерный случай. Для двумерного вектора $\zeta = (\xi, \eta)$, имеем

$$F_\zeta(x, y) = F(x, y) = \mathsf{P}(\xi < x, \eta < y).$$

Функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ обладает следующими свойствами:

R1. $F_{\xi\eta}(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу x и y.

R2. $F_{\xi\eta}(x, y)$ непрерывна слева по каждому аргументу x и y.

R3. $F_{\xi\eta}(x, y)$ удовлетворяет соотношениям

$$F(+\infty, +\infty) = 1, \quad F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0,$$

при произвольных значениях x и y.

5.1. Случайные векторы дискретного типа

Двумерный случайный вектор (ξ, η) называется *случайным вектором дискретного типа* (сокращённо С.В.Д.Т.), если множество его значений не более, чем счётно. *Законом распределения* дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) называется перечень возможных значений этой величины, т. е. пар (x_i, y_j) и их вероятностей

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = \mathsf{P}\{\,\xi = x_i, \eta = y_j\,\}. \tag{1.1}$$

Очевидно, что величины $p_{i,j}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1. \tag{1.2}$$

Пусть $\varphi(x, y)$ некоторая функция двух переменных. Тогда $\varphi(\xi, \eta)$ является случайной величиной и справедлива формула

$$\mathsf{M}\varphi(\xi, \eta) = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j)\, p(x_i, y_j). \tag{1.3}$$

Если множество значений С.В.Д.Т. конечно, то закон распределения этой величины удобно представлять в виде следующей таблицы.

$\xi \ \backslash \ \eta$	y_1	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nm}

Одномерные законы распределения отдельных компонент С.В.Д.Т. выражаются через вероятности совместных значений $p_{i,j}$ по формулам

$$p_{i\cdot} = \mathsf{P}\{\,\xi = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = \mathsf{P}\{\,\eta = y_j\} = \sum_i p_{ij}. \tag{1.4}$$

Дискретные случайные величины ξ, η независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{\,\xi = x_i, \eta = y_j\,\} = \mathsf{P}\{\,\xi = x_i\}\,\mathsf{P}\{\,\eta = y_j\,\} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \tag{1.5}$$

для любых i, j.

Ковариацией случайных величин ξ_1, ξ_2 называется величина

$$\mathsf{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathsf{M}\left[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)\right] = \mathsf{M}\xi_1\xi_2 - \mathsf{M}\xi_1\mathsf{M}\xi_2.. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *Если для случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *существуют* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, *то при любых постоянных* $c_1, \ldots, c_n$ *справедливо равенство*

$$\mathsf{D}\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} c_i c_j \tag{1.7}$$

Полагая в (1.7) $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\mathsf{D}\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\xi_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j). \tag{1.8}$$

В частности

$$\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta). \tag{1.9}$$

Если случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Таким образом, если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, то случайные величины ξ_1, ξ_2 зависимы.

В качестве количественной характеристики степени зависимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 используется *коэффициент корреляции* $\rho(\xi_1, \xi_2)$, определяемый равенством:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi_1\, \mathsf{D}\xi_2}}. \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Если для случайных величин* ξ_1, ξ_2 *существуют конечные дисперсии, отличные о нуля, то*

COR1. $|\,\rho(\xi_1, \xi_2)\,| \le 1$;

COR2. *если* ξ_1, ξ_2 *независимы, то* $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$;

COR3. *равенство* $|\,\rho(\xi_1, \xi_2)\,| = 1$ *справедливо тогда и только тогда, когда* ξ_1 *и* ξ_2 *зависят друг от друга линейно.*

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются *некоррелироваными*, если $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$. Если $\rho(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, то ξ_1 и ξ_2 называются *коррелироваными.*

Задачи

5.1.1. Закон распределения дискретного случайного вектора (X, Y) задаётся следующей таблицей:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

а) Необходимо найти безусловные законы распределения для отдельных компонент случайного вектора (X, Y). Затем определить, являются ли компоненты X и Y зависимыми или независимыми.

б) Найти вероятности $\mathsf{P}\{\xi = 2,\ \eta \geq 0\}$ и $\mathsf{P}\{\xi > \eta\}$.

в) Определить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$, $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

5.1.2. Катерина ставит эксперимент. Она бросает игральный кубик. Далее изучает случайные величины: ξ — число появлений шестёрки, η — число появлений чётной цифры.

а) Помогите Катерине составить закон распределения случайного вектора (ξ, η).

б) Опишите законы распределения отдельных компонент ξ и η. Установите, являются ли зависимыми или независимыми компоненты ξ и η.

в) Определите вероятность $\mathsf{P}\{\xi \geq \eta\}$.

г) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$, $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

5.1.3. Степан делает два независимых выстрела по цели. Вероятность поражения цели Степаном при первом выстреле равна p_1, а при втором уже выше (Степан пристрелялся) p_2. Случайными величинами являются: ξ — количество поражений цели при первом выстреле, η — количество поражений цели при втором выстреле.

а) Выяснить закон распределения случайного вектора (ξ, η).

б) Описать законы распределения отдельных компонент ξ и η. Ответить на вопрос, зависимы или независимы компоненты ξ и η.

в) Вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$, $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

5.1.4. Осуществляются два выстрела по цели при постоянных условиях. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна p. Случайные величины: ξ — число выстрелов до первого поражения цели (включительно), η — число промахов.

а) Описать закон распределения случайного вектора (ξ, η).

б) Описать законы распределения отдельных компонент ξ и η. Установить, зависимы или независимы компоненты ξ и η. Вычислить вероятность $\mathsf{P}\{\xi \geq \eta + 1\}$.

в) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$. $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

5.1.5. Закон распределения случайных величин ξ и η таблицей:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-2	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,2

Найти $\mathsf{M}(\xi+\eta)$ и $\mathsf{D}(\xi+\eta)$.

5.2. Случайные векторы непрерывного типа

Двумерный случайный вектор (ξ, η) называется *случайным вектором непрерывного типа* (сокращённо С.В.Н.Т.), если функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ непрерывна на всей плоскости и существует такая неотрицательная интегрируемая функция $p_{\xi\eta}(x, y)$, называемая *плотностью распределения вероятностей* случайного вектора (ξ, η), что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} p_{\xi\eta}(s, t)\, ds\, dt. \tag{2.1}$$

Очевидно, что плотность распределения вероятностей удовлетворяет равенству:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) называется *условием нормировки*. Плотность распределения вероятностей отдельных компонент С.В.Н.Т. выражаются в виде интегралов от совместной плотности:

$$p_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x, y)\, dy, \quad p_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x, y)\, dx. \tag{2.3}$$

Если (ξ, η) — С.В.Н.Т., то вероятность попадания случайной точки в произвольную квадрируемую область $G \subset \mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$\mathsf{P}\{\, (\xi, \eta) \in G \,\} = \iint\limits_{G} p_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.4}$$

Пусть $\varphi(x, y)$ непрерывная функция двух переменных. Тогда $\varphi(\xi, \eta)$ является случайной величиной и справедлива формула

$$\mathsf{M}\varphi(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, p_{\xi\eta}(x, y)\, dx\, dy, \tag{2.5}$$

если интеграл в правой части (2.5) существует.

Непрерывные случайные величины ξ, η независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_\xi(x)\cdot p_\eta(y) \tag{2.6}$$

для любых x и y.

Ковариация и коэффициент корреляции для непрерывных случайных величин определяются формулами (1.6) и (1.10), при этом справедливы теоремы 1.1, 1.2 и формулы (1.8), (1.9) для дисперсии.

Задачи

5.2.1. Плотность распределения вероятностей случайного вектора (ξ,η) имеет следующий вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{при} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Определить константу c и вычислить вероятность $\mathsf{P}\big\{\xi+\eta<1\big\}$.

б) Найти законы распределения отдельных компонент ξ, η и установить, зависимы они или нет.

в) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$, $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

5.2.2. Плотность распределения вероятностей случайного вектора (ξ,η) непрерывного типа задана следующим образом:

$$p(x,y) = \begin{cases} c\sqrt{a^2-x^2-y^2}, & x^2+y^2<a^2, \\ 0, & x^2+y^2 \ge a^2. \end{cases}$$

а) Определить константу c и вычислить $\mathsf{P}\big\{(\xi,\eta)\in G\big\}$, где $G = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\big\}$ — первый квадрант плоскости OXY.

б) Найти законы распределения отдельных компонент ξ, η и установить, зависимы они или нет.

в) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$, $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

5.2.3. Из квадрата размером 6×6 с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям X и Y, вырезан квадрат размером 2×2 с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям. В указанную область наудачу брошена точка. Пусть (ξ,η) — координаты этой точки. Найти $p_{\xi\eta}(x,y)$, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$. Зависимы или нет случайные величины ξ и η?

6. Условные распределения

6.1. Дискретный случай

Пусть ξ и η — две дискретные случайные величины. Условная вероятность события $\{\eta = y_j\}$ при условии, что произошло событие $\{\xi = x_i\}$, задаётся соотношением

$$\mathsf{P}\{\eta = y_j \,|\, \xi = x_i\} = \frac{\mathsf{P}\{\eta = y_j,\, \xi = x_i\}}{\mathsf{P}\{\xi = x_i\}}. \tag{6.1}$$

Вероятность (6.1) определяется лишь в случае $\mathsf{P}\{\xi = x_i\} > 0$. Условное математическое ожидание ξ при условии $\{\xi = x_i\}$ задаётся формулой

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi = x_i) = \sum_j y_j \, \mathsf{P}\{\eta = y_j \,|\, \xi = x_i\} = \sum_j y_j \, \frac{\mathsf{P}\{\eta = y_j,\, \xi = x_i\}}{\mathsf{P}\{\xi = x_i\}}. \tag{6.2}$$

Наряду с (6.1) и (6.2) можно рассматривать более общие величины: условную вероятность события $\{\eta = y_j\}$ при условии $\xi \in B$, где B — некоторое подмножество возможных значений ξ, $\mathsf{P}(B) > 0$:

$$\mathsf{P}\{\eta = y_j \,|\, \xi \in B\} = \frac{\mathsf{P}\{\eta = y_j,\, \xi \in B\}}{\mathsf{P}\{\xi \in B\}}, \tag{6.3}$$

и условное математическое ожидание η при условии $\xi \in B$ $\{\xi = x_i\}$ задаётся формулой

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi \in B) = \sum_j y_j \, \frac{\mathsf{P}\{\eta = y_j,\, \xi \in B\}}{\mathsf{P}\{\xi \in B\}}. \tag{6.4}$$

при этом

$$\mathsf{P}\{\xi \in B\} = \sum_{x_i \in B} \mathsf{P}\{\xi = x_i\}, \tag{6.5}$$

$$\mathsf{P}\{\eta = y_j \,|\, \xi \in B\} = \sum_{x_i \in B} \mathsf{P}\{\eta = y_j,\, \xi = x_i\}, \tag{6.6}$$

где суммирование проводится по всем x_i, которые лежат в B.

Задачи

6.1.1. Распределение двумерной случайной величины с компонентами ξ и η задано таблицей:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
1	$1/6$	$1/4$	$1/6$
2	$1/8$	$1/6$	$1/8$

Найти $\mathsf{P}\{\eta = 1 \,|\, \xi = 1\}$, $\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi = 1)$, $\mathsf{M}(\xi \,|\, \eta \le 0)$, $\mathsf{P}\{\xi = 1 \,|\, \eta \le 0\}$.

6.1.2. Распределение двумерной случайныой величины с компонентами ξ и η задано таблицей:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
-1	$1/3$	0	$1/8$
1	$1/4$	$1/6$	$1/8$

Найти $\mathsf{P}\{\xi = -1 \,|\, \eta = 2\}$, $\mathsf{P}\{\xi = -1 \,|\, \eta \ge 1\}$, $\mathsf{M}(\xi \,|\, \eta = 1)$, $\mathsf{M}(\xi \,|\, \eta \ge 1)$.

6.1.3. Случайные величины ξ и η независимы, причём

$$\mathsf{P}\big\{\xi = 1\big\} = \mathsf{P}\big\{\eta = 1\big\} = p, \quad \mathsf{P}\big\{\xi = 0\big\} = \mathsf{P}\big\{\eta = 0\big\} = 1 - p.$$

Найти $\mathsf{M}(\xi\eta \,|\, \xi = 1)$, $\mathsf{M}(\xi + \eta \,|\, \xi = 0)$, $\mathsf{M}(\xi \,|\, \xi + \eta = 1)$.

6.1.4. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены. Найти $\mathsf{M}(\xi \,|\, \xi + \eta = z)$, если $\mathsf{P}\{\xi + \eta = z\} > 0$.

6.1.5. Пусть случайные величины ξ и η независимы, одинаково распределены, причём

$$\mathsf{P}\big\{\xi = k\big\} = \mathsf{P}\big\{\eta = k\big\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Найти $\mathsf{P}\{\xi = j \,|\, \xi + \eta = n\}$, $\mathsf{M}(\xi \,|\, \xi + \eta = n)$.

6.2. Непрерывный случай

Если задана совместная плотность случайных величин ξ и η, то условной плотностью $p_{\xi|\eta}(x \,|\, y)$ называется величина

$$p_{\xi|\eta}(x \,|\, \eta = y) = p_{\xi|\eta}(x \,|\, y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}, \quad p_\eta(y) > 0. \tag{2.1}$$

Аналогично,

$$p_{\eta|\xi}(y \,|\, \xi = x) = p_{\eta|\xi}(y \,|\, x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\xi(x)}, \quad p_\xi(x) > 0. \tag{2.2}$$

По определению будем считать, что $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = 0$, если $p_\eta(y) = 0$. *Условным математическим ожиданием* случайной величины ξ при условии $\eta = y$ называется величина

$$\mathsf{M}(\xi\,|\,\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}\,dx. \tag{2.3}$$

Аналогично,

$$\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}\,dy. \tag{2.4}$$

Задачи

6.2.1. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задаётся формулой

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найти $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)$.

6.2.2. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} (x+y)/216, & 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 6, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)$.

6.2.3. В условиях задачи 6.2.1 найти $\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = R\sqrt{3}/2)$.

6.2.4. В условиях задачи 6.2.2 найти $\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = 3)$.

7. Нормальное распределение

7.1. Нормальное распределение

Стандартная нормальная функция распределения определяется равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt. \tag{1.1}$$

Соответствующая *стандартная нормальная плотность вероятности* есть

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}. \tag{1.2}$$

С функцией $\Phi(x)$ тесно связаны специальные функции $\operatorname{erf} x$, $\operatorname{erfc} x$:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \tag{1.3}$$

называемые *функцией ошибок* и *дополнительной функцией ошибок* соответственно. Функция $\Phi(x)$ выражается через $\operatorname{erf} x$ следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим моменты стандартно нормальной функции распределения

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2/2}\, dt.$$

Очевидно, что все нечётные моменты равны нулю. Чётные моменты легко вычисляются с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-Ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\, A^{-\alpha/2}\, \Gamma(\alpha/2), \quad \alpha > 0,\ A > 0. \tag{1.5}$$

В результате получаем

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2s+1, \\ (2s-1)!!, & \text{при } k = 2s. \end{cases} \tag{1.6}$$

Случайная величина ξ называется *нормально распределённой с параметрами m и σ^2* или, короче, *нормальной* (m, σ^2), если функция распределения величины ξ есть $\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$, где $\sigma > 0$ и m — постоянные. Плотность вероятности равна

$$\frac{1}{\sigma}\, \Phi'\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \tag{1.7}$$

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$\mathsf{M}\xi = m, \quad \mathsf{D}\xi = \sigma^2. \tag{1.8}$$

Если случайная величина ξ нормальна (m, σ^2), то линейная функция $A\xi + B$ нормальна $(Am + B, A^2\sigma^2)$.

Задачи

7.1.1. Представьте себе, что случайная величина ξ живет в мире, где все распределено по законам нормального распределения. Ее параметры таковы: математическое ожидание $m = 1$ и стандартное отклонение $\sigma = 2$. Определите, как выглядит её функция распределения, используя известную функцию стандартного нормального распределения $\Phi(x)$. Другими словами, выразите $F_\xi(x)$ через $\Phi(x)$.

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

7.1.2. Случайная величина ξ распределена по закону $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Используя таблицу функции нормального распределения, найдите вероятность p_k того, что отклонение величины ξ от её математического ожидания будет не больше чем $k\sigma$ (решите задачу для трёх случаев: $k = 1$, 2, 3).

7.1.3. Студент проводит эксперименты с измеренной случайной величиной ξ, которая подчиняется нормальному распределению с параметрами $m = 10$ и $\sigma = 5$. Помогите ему найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с заданной вероятностью p попадет измеренное значение величины ξ.

Вам предстоит вычислить этот интервал для следующих значений вероятности:

- а) $p = 0{,}9974$;
- б) $p = 0{,}9544$;
- в) $p = 0{,}50$.

7.1.4. Допустим, у нас есть популяция растений, высоты которых следуют нормальному распределению. В этой популяции 15% растений имеют высоту ниже 12 см, а 40% — выше 16,2 см. Определите среднюю высоту и стандартное отклонение для этой популяции.

7.1.5. Представьте себе процесс производства патронов, где проверяется их диаметр. Патрон считается годным, если его диаметр ξ проходит через отверстие диаметром d_2, но не проходит через отверстие диаметром $d_1 < d_2$. Если диаметр патрона не соответствует этим условиям, то патрон считается бракованным.

Предполагается, что диаметр патрона ξ является случайной величиной, распределённой по закону

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(\frac{d_1+d_2}{2}, \alpha(d_2-d_1)\right),$$

где параметр α $(0 < \alpha < 1)$ определяет точность изготовления патронов.

Определите вероятность того, что патрон будет забракован, то есть его диаметр либо меньше d_1, либо больше d_2.

7.1.6. Продолжим рассматривать процесс производства патронов, где патрон считается годным, если его диаметр ξ проходит через отверстие диаметром d_2, но не проходит через отверстие диаметром $d_1 < d_2$. Патрон будет забракован, если его диаметр либо меньше d_1, либо больше d_2.

Как и в предыдущей задаче, диаметр патрона ξ является случайной величиной, распределённой по нормальному закону:

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(\frac{d_1+d_2}{2}, \alpha(d_2-d_1)\right),$$

где параметр α $(0 < \alpha < 1)$ определяет точность изготовления патронов.

Найдите такую точность изготовления, т.е. значение параметра α, чтобы вероятность брака составляла не более 2% всей продукции.

7.2. Нормальное распределение на плоскости

Случайный вектор (ξ, η) распределён по *нормальному закону*, если совместная плотность распределения вероятностей случайных компонент имеет вид

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2\rho(x-m_1)(x-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \quad (2.1)$$

где $m_1 = \mathsf{M}\xi$, $m_2 = \mathsf{M}\eta$, σ_1^2, σ_2 — среднеквадратичные отклонения случайных компонент вектора (ξ, η), ρ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Если компоненты случайного вектора (ξ, η), распределённого по нормальному закону, некоррелированы $(\rho = \rho(\xi, \eta) = 0)$, то они и независимы, так как в этом случае

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} = p_\xi(x)\,p_\eta(y). \quad (2.2)$$

Закон распределения (2.2) называется *каноническим нормальным законом.*

Задачи

7.2.1. Случайная точка на плоскости (ξ, η) распределена по каноническому нормальному закону с центром рассеивания $(m_1, m_2) = (0, 1)$ и среднеквадратичными отклонениями $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$. Вычислить вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ и $(-1, 3)$.

7.2.2. Случайная точка на плоскости (ξ, η) распределена по круговому нормальному закону ($\rho(\xi, \eta) = 0$, $\sigma_\xi = \sigma_\eta = 1$) с центром рассеивания в начале координат. Вычислить вероятности следующих событий:

а) $A = \{\xi > \eta\}$, $B = \{|\eta| > \xi\}$, $C = \{\eta < 3\xi\}$;

б) $D = \{|\xi| < 1\}$, $E = \{\xi < 1,\ \eta < 2\}$.

7.2.3. Координаты точек на плоскости независимы и распределены по законам $\mathcal{N}(a, \sigma)$ и $\mathcal{N}(b, \sigma)$. Найти радиус круга с центром в точке (a, b), вероятность попадания в который равна 0,997.

7.2.4. Случайный вектор (ξ, η) подчиняется нормальному распределению с параметрами $\mathsf{M}\xi = -1$, $\mathsf{M}\eta = 1$, $\sigma_\xi = 1$, $\sigma_\eta = 2$, $\rho(\xi, \eta) = 0$. Написать уравнение главного эллипса, ограничивающего область G, вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в которую равна 0,9.

7.2.5. Закон распределения случайного вектора (ξ, η) описывается плотностью распределения вероятностей следующего вида:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Записать выражение для безусловной плотности $p_\xi(x)$ и указать значения основных параметров совместного распределения.

8. Закон больших чисел

8.1. Неравенства Чебышева

Неравенство Чебышева 1. *Если случайная величина* $\xi \geq 0$ *имеет математическое ожидание, то для всякого* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\big\{\xi \geq \varepsilon\big\} \leq \frac{\mathsf{M}\xi}{\varepsilon}, \tag{1.1}$$

Неравенство Чебышева 2. *Если случайная величина* ξ *имеет ко-*

нечную дисперсию, то для всякого $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \tag{1.2}$$

Задачи

8.1.1. В условиях пустыни средняя скорость ветра у поверхности песка составляет 16 *км/ч*. Вычислите вероятность того, что скорость ветра в этой пустыне не превысит 80 *км/ч*.

8.1.2. В одной загадочной местности количество солнечных дней в году является случайной величиной. Среднее количество солнечных дней составляет 75, но в некоторые годы погода может быть более или менее благоприятной. Найдите вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 200 солнечных дней.

8.1.3. Экспериментатор наблюдает за некой случайной величиной ξ, чьи значения колеблются вокруг некоторого среднего значения, равного математическому ожиданию $\mathsf{M}\xi$. При этом, рассеяние этих значений вокруг среднего характеризуется средним квадратическим отклонением, которое составляет $\sigma = 0{,}2$.

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность неравенства $0{,}5 < \xi < 1{,}5$.

8.1.4. Виталик подбросил монету 100 раз и хочет оценить вероятность того, что частота выпадения герба отклонится от математического ожидания не более чем на 0,1. Помогите Виталику, используя неравенство Чебышева. Затем сравните результат, полученный с помощью неравенства Чебышева, с вероятностью, вычисленной через интегральную теорему Муавра — Лапласа, которая более точно оценивает вероятность в таких случаях.

8.1.5. На производственном предприятии ведётся контроль качества для 2500 независимых изделий. Дисперсия дефектов каждой единицы продукции не превышает 5. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического количества дефектов этих изделий от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,5.

8.2. Закон больших чисел

Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *закону больших чисел*, если для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{ \Big| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{M}\xi_k \Big| < \varepsilon \Big\} = 1. \tag{2.1}$$

Теорема Чебышева. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии. Если найдётся константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathsf{D}\xi_n \leq C, \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{2.2}$$

то последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет закону больших чисел.

Теорема Хинчина. *Если случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание $\mathsf{P}\xi_n = a$, то для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\Big\{ \Big| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - a \Big| \Big\} \to 1, \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

Теорема Маркова. *Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ такова, что при $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n^2}\mathsf{D}\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \Big) \to 0, \tag{2.4}$$

то последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет закону больших чисел.

Задачи

8.2.1. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, где каждая случайная величина ξ_n $(n \in \mathbb{N})$ может принимать одно из трёх значений: $-\sqrt{n}$, 0 или $\sqrt{n}$, с вероятностями, соответственно равными $\frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$ и $\frac{1}{n}$. Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

8.2.2. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, где каждая случайная величина ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, может принимать значения $-n\alpha$, 0, $n\alpha$ (α — положительная постоянная) с вероятностями, соответственно равными

а) $\dfrac{1}{2n^2}$, $1-\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{2n^2}$; б) $\dfrac{1}{2^n}$, $1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\dfrac{1}{2^n}$.

Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

8.2.3. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, где каждая случайная величина ξ_n может принимать только два значения: $\pm\sqrt{\ln n}$ с вероятностями, равными $\dfrac{1}{2}$. Проверьте, удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел?

8.2.4. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{M}\xi_n = 0$, $\mathsf{D}\xi_n = n^\alpha$ (α — постоянная, меньшая 1). Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

9. Производящие и характеристические функции

9.1. Производящие функции

Целочисленной случайной величиной называется такая случайная величина, которая может принимать только целые неотрицательные значения. Распределение этой величины определяется вероятностями, с которыми она принимает различные целочисленные значения.

$$p_n = \mathsf{P}\{\xi = n\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

для которых

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \tag{1.2}$$

Производящей функцией целочисленной случайной величины ξ, называется функция

$$\varphi_\xi(s) = \mathsf{M}s^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \tag{1.3}$$

который абсолютно сходится при $|s| \le 1$. Поскольку

$$p_n = \frac{1}{n!}\,\varphi_\xi^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

то между законами распределения $\{p_n\}$ и производящими функциями равенства (1.3) и (1.4) устанавливают взаимно однозначное соответствие.

Вместо моментов $\mathsf{M}\xi^r$ в случае целочисленных случайных величин удобнее иметь дело с *факториальными моментами* $\mathsf{M}\xi^{[r]}$, где

$$\xi^{[r]} = \xi(\xi - 1)\ldots(\xi - r + 1), \quad \xi^{[0]} = 1.$$

Через факториальные моменты $\mathsf{M}\xi^{[r]}$ можно выразить моменты $\mathsf{M}\xi^r$ и наоборот. Например,

$$\mathsf{M}\xi^{[1]} = \mathsf{M}\xi, \quad \mathsf{M}\xi^{[2]} = \mathsf{M}\xi^2 - \mathsf{M}\xi.$$

Следовательно,

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^{[2]} + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Факториальные моменты легко вычисляются через производные производящих функций в точке $s = 1$. Имеет место равенство

$$\mathsf{M}\xi^{[r]} = \varphi_\xi^{(r)}(1), \tag{1.5}$$

справедливое при любом неотрицательном r. Таким образом, $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$ можно следующим образом выразить через производные $\varphi_\xi(s)$:

$$\mathsf{M}\xi = \varphi'_\xi(1), \tag{1.6}$$

$$\mathsf{D}\xi = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - \left[\varphi'_\xi(1)\right]^2. \tag{1.7}$$

Задачи

9.1.1. Найти производящие функции целочисленных распределений:

в) равномерного:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N;$$

б) пуассоновского:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda < \infty;$$

в) геометрического:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = pq^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1;$$

г) биномиального:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1.$$

9.1.2. Используя результаты задачи 9.1.1, с помощью факториальных моментов найти математическое ожидание и дисперсию соответствующих случайных величин.

9.1.3. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией $\varphi(z)$. Определите производящие функции для случайных величин $\xi + n$ и $n\xi$, где n — целое неотрицательное число.

9.1.4. Найти распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\dfrac{1}{4}\,(1 + z)^2$; б) $p(1 - qz)^{-1}$, p, $q > 0$, $p + q = 1$;

в) $\mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$, $\lambda > 0$; г) $(p + qz)^n$; д) $\dfrac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}\,\mathrm{ch}\, z$.

9.1.5. Найти распределение, отвечающее производящей функции $\varphi(z)$, если

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

9.1.6. Доказать, что функция $\varphi(z) = |z|$ не может быть производящей функцией вероятностного распределения.

9.1.7. При каких значениях параметров дробно-линейная функция $\varphi(z) = \dfrac{a + bz}{c + dz}$ является производящей функцией вероятностного распределения?

9.2. Характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$f_\xi(t) = \mathsf{M}\mathrm{e}^{it\xi}. \tag{2.1}$$

Перечислим некоторые свойства характеристических функций.

1. $|f(t)| \leq 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$.

2. $f(t)$ равномерно непрерывна по t.

3. Если $\eta = a\xi + b$, где a и b — константы, то $f_\eta(t) = \mathrm{e}^{itb} f_\xi(at)$.

4. Если $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимы, то

$$f_{\xi_1 + \ldots + \xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t). \tag{2.2}$$

5. $f_\xi(-t) = \overline{f}_\xi(t)$.

6. Если $\mathsf{M}\xi^n$ конечно, то существуют все производные $f_\xi^{(k)}(t)$ с $k \le n$ и

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathsf{M}\xi^k. \tag{2.3}$$

7. Если $\varphi_\xi(s) = \mathsf{M}s^\xi$ — производящая функция целочисленной случайной величины ξ, то

$$f_\xi(t) = \varphi_\xi\left(\mathrm{e}^{it}\right). \tag{2.4}$$

Задачи

9.2.1. Дана $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, a и b — вещественные числа. Выясните, какой будет характеристическая функция случайной величины $a\xi + b$.

9.2.2. Производящая функция целочисленной случайной величины ξ равна $\varphi_\xi(z)$. Найти характеристическую функцию ξ.

9.2.3. Найти характеристические функции распределений:

а) пуассоновского:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda < \infty;$$

б) биномиального:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad p, q > 0, \ \ p + q = 1.$$

в) показательного:

$$p_\xi(x) = \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x \ge 0.$$

9.2.4. Характеристическая функция $f_\xi(t)$ принимает только вещественные значения. Доказать, что при любом вещественном t

$$f_\xi(t) = f_\xi(-t).$$

9.2.5. Найти характеристические функцию:

а) равномерного распределения на отрезке $[0, a]$;

б) *треугольного* распределения с плотностью

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(1 - \alpha|x|\,), & |x| \le \alpha^{-1}; \\ 0, & |x| > \alpha^{-1}; \end{cases}$$

в) распределения с плотностью

$$q_\alpha(x) = \frac{C_\alpha}{x^2}\left(1 - \cos\frac{x}{\alpha}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

В случае в) найти значение C_α, при котором $q_\alpha(x)$ оказывается плотностью вероятности.

9.2.6. Являются ли характеристическими функциями вероятностных распределений следующие функции:

а) $\exp(2(e^{it} - 1))$; д) $|\cos t|^{2/3}$;

б) $\cos t^2$; е) $\dfrac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$, 1 $(t = 0)$;

в) $\cos^2 t$; ж) e^{-2t} $(t \geq 0)$, $\dfrac{1}{1+t^2}$ $(t < 0)$;

г) $\cos(|t|^{2/3})$; з) $e^{-|t|}$?

9.2.7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристическая функция которой равна:

а) $\dfrac{1}{at}\sin at$, $a \neq 0$;

б) $\dfrac{4}{t^2}\cos t\,\sin^2\dfrac{t}{2}$; в) $\dfrac{4}{t^2}e^{it}\sin^2\dfrac{t}{2}$;

г) $\sqrt{2}e^{-a|t|/2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a|t|}{\sqrt{2}}\right)$ $(a > 0)$;

д) $(1 - it)^{-p}(1 + it)^{-q}$ $(p,\ q > 0)$;

е) $\dfrac{\arcsin(\theta e^{it})}{\arcsin\theta}$, $0 < \theta < 1$.

Список литературы

1. Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей.* — 3-е изд. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

2. Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей.* 3-е изд. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961. — 408 с.

3. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. *Теория вероятностей и её инженерные приложения.* — М.: Наука, 1988. — 480 с.

4. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* В 2-х томах.
   Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

5. Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* — М.: Наука, 1982. — 256 с.

6. Зубков А.М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Сборник задач по теории вероятностей.* — 2-е изд.— М.: Наука, 1989. — 320 с.

7. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. *Таблицы математической статистики.* — М.: Наука, 1983. — 416 с.

Содержание

Селина Елена Георгиевна
Кудашов Вячеслав Николаевич

Задачи по теории вероятностей

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А