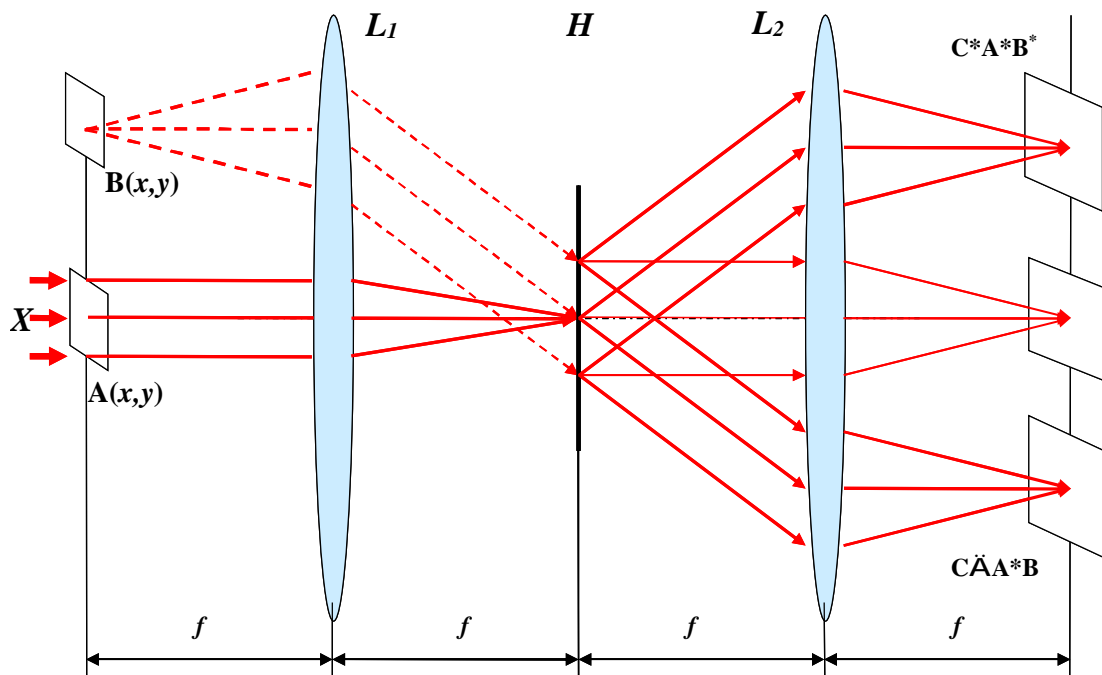


# ИТМО

А.В. Павлов

## ОПТИЧЕСКИЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ. Т1.



Санкт-Петербург  
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.В. Павлов**

**ОПТИЧЕСКИЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ  
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОБРАБОТКИ  
ИНФОРМАЦИИ**

Учебное пособие

Том 1.

Основы оптических информационных технологий,  
использующих преобразование Фурье и метод голографии

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика  
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования магистратуры

**ИТМО**

Санкт-Петербург

2025

А.В. Павлов, Оптические и корреляционные методы вычислений и обработки информации / Учебное пособие. В 2-х т. Т.1. – СПб: Университет ИТМО, 2025. – 89 с.

Рецензент: Цыпкин Антон Николаевич, д.ф-м.н., доцент НОЦ фотоники и оптоинформатики ИТМО.

Даны учебные материалы по курсу «Оптические и корреляционные методы вычислений и обработки информации» по направлению подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика», профиль «Прикладная фотоника». С упором на фундаментальные основания рассматриваемых методов изложены базовые сведения из области Фурье-оптики, голографии Фурье, вейвлет-анализа и методах обработки информации, реализующих концепцию операционного исчисления при естественно-параллельной обработке двумерных массивов информации. Особое внимание уделено корреляционным методам передачи, хранения и обработки информации, включая "фантомные" методы и технику голографии. Пособие предназначено для самостоятельной работы при освоении лекционного курса и углубленного изучения теории при выполнении лабораторного практикума, по которому имеется отдельное пособие.

# ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) – национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития – научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд – в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в РФ по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Санкт-Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2025

© А.В. Павлов, 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии

	Стр.
Список обозначений и сокращений	4
<b>Введение.</b>	5
<b>1. Тема 1.</b> Преобразование Фурье и его применение в оптической обработке информации	6
1.1. Базовые математические операции и их реализация в оптике	6
1.1.2. Преобразование Фурье	7
1.1.3. Примеры преобразования Фурье	8
1.1.4. Физический смысл преобразования Фурье в оптике	9
1.1.5. Свойства преобразования Фурье	10
1.1.6. Принцип дополнительности (неопределенности) в оптике	12
<b>1.2.</b> Оптическая реализация концепции операционного исчисления на основе преобразования Фурье	12
<b>1.3.</b> Уравнение $4f$ -схемы голографии Фурье	15
Голографический коррелятор совместного преобразования	17
Вопросы для самоконтроля освоения темы	18
<b>2. Тема 2.</b> Погрешности оптической реализации преобразования Фурье с использованием тонкой положительной линзы	20
<b>3. Тема 3.</b> Преобразования, реализуемые в оптике на основе преобразования Фурье	36
3.1. Дифференцирование функций и его применение в задаче распознавания	36
3.2. Оператор Лапласа	39
3.3. Восстановление качества изображений методом десвертки	39
3.4. Интегрирование функций	40
3.5. Вычисление моментов	40
3.6. Преобразование Френеля	41
3.7. Преобразование Меллина	41
3.8. Преобразование Радона	42
3.9. Вычитание изображений	43
<b>4. Тема 4.</b> Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений	45
<b>5. Тема 5.</b> Корреляционные методы восстановления изображений	58
5.1. Голографическая ассоциативная память с линейной голограммой Фурье	58
5.2. Голографическая ассоциативная память с нелинейной голограммой Фурье	61
5.3. Голографическая реализация модели линейной регрессии	63
<b>6. Тема 6.</b> Корреляционный метод передачи изображений: Ghost Imaging или фантомное изображение	67

## Список сокращений и обозначений

АКФ	Авто-корреляционная функция
ВКФ	Взаимно-корреляционная функция
ГМ АКФ	Глобальный максимум авто-корреляционной функции
ГРС	Голографическая регистрирующая среда
ЭХ	Экспозиционная характеристика
ККФ	Кросс-корреляционная функция
BD	Bucket detector (интегрирующий сенсор)
IS	Imaging sensor (изображающий сенсор)
RM	Rotating mirror
$j$	Мнимая единица
$F$	Символ преобразования Фурье, фурье-образ (спектр) функции
$\mathcal{H}$	Гильбертово пространство
$\mathcal{F}, \mathcal{T}$	Подпространства, хранящие образы $F$ и $T$
$\mathbf{k}$	Волновой вектор
$k$	Волновое число
$\lambda$	Длина волны
$\tau$	Пропускание
$\zeta, \eta$	Пространственные координаты в частотной плоскости
$v_x, v_y$	Пространственные частоты
$\omega_x, \omega_y$	Круговые пространственные частоты
*	Символ операции свертки
$\otimes$	Символ операции корреляции

## Введение

В настоящее время актуальна задача разработки моделей, методов и устройств вычислений и обработки информации, относящихся к категории вычислительно затратных. В этой связи практический интерес представляют методы и технологии, свободные от характерной для электронных компьютеров проблемы комбинаторного взрыва. В первую очередь это методы, основанные на физических явлениях и механизмах, реализующих концепцию операционного исчисления при естественном параллелизме обработки информации. К их числу относятся и оптические, включая голографические, а также квантово-подобные методы. В рамках нашего курса они объединены в силу ряда глубоких аналогий на уровне фундаментальных физических явлений и/или математических моделей, которые мы детально рассмотрим их в ходе изучения курса.

С учетом этих аналогий наш курс по преимуществу сфокусирован на моделях и методах, ориентированных на решение тех вычислительно-затратных задач, в которых важны методы операционного исчисления, естественный параллелизм представления и обработки массивов информации. Оптические методы и технологии реализации классического (фон-неймановского) компьютера оставлены за рамками курса. Также за рамками курса оставлены и те вопросы квантовых вычислений, которые детально изучаются в специализированных на этом предмете курсах.

Важнейший атрибут информации, отличающий её от белого шума – внутренняя связность её элементов, т.е. внутренняя коррелированность. Другой важнейший аспект – взаимная коррелированность массивов информации. Это может быть как квантовая, так и классическая коррелированность. Феномен коррелированности используется в ряде моделей обработки информации, например, в развитой в теории случайных процессов модели линейной регрессии (внутренняя коррелированность) или в активно разрабатываемом в последние годы методе фантомных изображений, основанном на взаимной коррелированности.

Курс охватывает как фундаментальные вопросы – физические основы оптических информационных технологий, это темы 1-4, так и рассмотрение конкретных моделей, методов и оптических схем.

Курс состоит из четырех взаимосвязанных частей:

- в первой рассмотрены фундаментальные основания описываемых методов;
- вторая посвящена разбору конкретных моделей, методов и схем их реализации;
- в третьей рассмотрены как фундаментальные аспекты – алгебраические основания, так и оптические методы построения логических процессоров;
- четвертая часть посвящена реализации квантово-подобных моделей обработки информации.

# **Тема 1. Преобразование Фурье в оптике и его применение в оптической обработке информации**

## **1.1. Базовые математические операции и их реализация оптическими методами [1-5]**

### **1.1.1. Комплексное представление гармонического сигнала**

При аналитическом описании оптических схем и явлений в приближении дифракционной оптики часто используется экспоненциальная форма представления гармонического сигнала [1-5], удобная в плане простоты математического формализма. Из формул Эйлера следует, что

$$\exp j\varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi \Rightarrow A \cos \varphi = A \operatorname{Re}(\exp j\varphi).$$

Символ действительной части  $\operatorname{Re}$  по умолчанию опускается, и функция косинус формально описывается экспонентой  $\exp(j\varphi)$ . [1-5]

Плоская монохроматическая волна в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  может быть представлена в виде произведения двух функций

$$s(x, y, z, t) = v(x, y, z)u(t),$$

где

$$v(x, y, z) = E \exp(j\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(-j\varphi) = E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right] \exp(-j\varphi);$$

$$u(t) = \exp(-j\omega t).$$

Здесь  $E$  – амплитуда колебаний электрического поля;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, его модуль (волновое число)  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega n}{c}$ ;  $\lambda$  – длина волны;  $\omega = 2\pi\nu$  – круговая частота;  $\nu$  – частота;  $n$  – показатель преломления среды;  $\varphi$  – начальная фаза волны, т.е. в момент времени  $t=0$ . При описании взаимодействия (интерференции) когерентных волн зависимость от времени не важна, поскольку соотношение их параметров стабильно во времени, поэтому для описания поля достаточно члена, зависящего от пространственных координат:

$$E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right].$$

**1.1.2. Преобразование Фурье**, для обозначения которого используем здесь литеру  $F$ , функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле [1-5]:

1. функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема;
  2. функция  $f(x)$  непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в любых конечных пределах;
  3. функция  $f(x)$  не имеет разрывов второго рода;
- определяется следующим выражением:

$$F(f(x)) = F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi vx) dx . \quad (1.1)$$

Результат преобразования (1.1) называется фурье-образом или спектром функции  $f(x)$ , его мы будем обозначать  $F(v)$ , где  $v$  – частота, т.е. координата в частотном пространстве – пространстве Фурье. В общем случае фурье-образ – функция комплексно-значимая [1-5].

Если аргумент функции – пространственная координата, то и частота  $v$  – пространственная, а если аргумент – время, то и частота тоже временная. Важно четко различать два смысла термина «пространственная частота» в волновой физике:

1. Пространственная частота как физический смысл волнового числа  $k=2\pi/\lambda$  – здесь речь о пространственной частоте бегущей волны (при её мысленной остановке), т.е. вдоль направления её распространения;

2. Мы будем иметь дело с пространственной частотой структуры (решетки) в плоскости, находящейся под некоторым углом к направлению распространения волны, например, освещаемого волной транспаранта, интерференционной картины, дифракционной решетки, etc.

**Обратное преобразование Фурье** связывает фурье-образ  $F(v)$  с его прообразом, т.е. самой функцией или функцией-оригиналом:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(j2\pi vx) dv . \quad (1.2)$$

В силу гипотезы сохранения имеет место  $F(v)dv = F(\omega)d\omega$ , поэтому

$$F(v) = F(\omega) \frac{d\omega}{dv} = F(\omega) \frac{2\pi dv}{dv} = 2\pi F(\omega),$$

откуда имеем представление фурье-образа как функции круговой частоты [1-5]:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx . \quad (1.3)$$

Обратим внимание, что формально прямое преобразование Фурье отличается от обратного только знаком под экспонентой. Выбор этого знака в математике не принципиален и является предметом договоренности. А в оптике для прямого преобразования Фурье физически обусловлен знак «-».

Прежде чем перейти к обсуждению физического смысла и погрешностей преобразования Фурье в оптике, рассмотрим несколько частных случаев.

### **Фурье-преобразование функции двух независимых переменных**

Волновые поля описываются функциями двух переменных. Фурье-образ функции двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющей условиям Дирихле, определяется аналогично (1.1):

$$F(v_x, v_y) = F(f(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp(-j2\pi(v_x x + v_y y)) dx dy . \quad (1.4)$$



Можно видеть, что свойства, определенные для преобразования Фурье функции одной переменной, справедливы и для случая двух (и более) переменных. При этом практически важно, что функция  $F(v_x, v_y)$  в общем не сводима к ее сечениям по отдельным координатам, т.е. замена исследования функции двух переменных исследованием двух функций одной переменной в общем неправомерно. Но в частном случае функций с разделяющимися переменными такая замена возможна. [1-5]

**Функция с разделяющимися переменными** определяется как функция нескольких независимых аргументов, которая может быть представлена в виде произведения функций одного аргумента. Например, в декартовой системе координат для функции с разделяющимися переменными  $f(x,y)=f(x)f(y)$  её фурье-образ также есть функция с разделяющимися переменными  $F(v_x, v_y)=F(v_x)F(v_y)$ .

У функции с осевой симметрией  $f(\rho, \varphi)$ , значения которой определяются только радиус-вектором  $\rho$ , в цилиндрической системе координат переменные также разделяются  $f(\rho, \varphi)=f(\rho)$ .

**1.1.3. Примеры фурье-преобразований** в допущении о разделимости переменных. [1-5]

**Прямоугольный импульс**

А. В декартовых координатах прямоугольная апертура размером  $2L_x \times 2L_y$  описывается функцией с разделяющимися переменными:

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \\ 0 & \text{при } |x| > L_x, |y| > L_y \end{cases} = A(x) \cdot A(y).$$

Её фурье-образ:

$$F(A(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp(-j\omega_x x) dx = \int_{-L}^L A(x) \exp(-j\omega_x x) dx = \frac{1}{-j\omega_x} \exp(-j\omega_x x) \Big|_{-L}^{L_x} = \frac{\exp(j\omega_x L_x) - \exp(-j\omega_x L_x)}{j\omega_x} = \frac{2 \sin(\omega_x L_x)}{\omega_x} = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x)$$

Аналогично и для её фурье-образа  $F(A(y))$ , тогда имеем описание картины дифракции Фраунгофера на прямоугольной апертуре

$$F(A(x, y)) = F(v_x) \cdot F(v_y) = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x) \cdot 2L_y \text{Sinc}(\omega_y L_y) . \tag{1.5}$$

**Б. Дифракция Фраунгофера на круглой апертуре.** Круглая апертура в силу осевой симметрии в цилиндрической системе координат адекватно описывается функцией одного аргумента – радиуса:  $A(\rho, \varphi)=A(\rho)$ . Тогда:

$$F(A(\rho, \varphi)) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} A(\rho, \varphi) \exp(-j2\pi v \rho \cos(\varphi - \theta)) \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi v \rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi.$$

Внутренний интеграл в полученном выражении есть функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(2\pi kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi kr \cos(\varphi - \theta)) d\varphi,$$

следовательно, искомый фурье-образ не зависит от фазового угла  $\theta$ , а только от пространственной частоты  $v$ , т.е.

$$F(v) = 2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(2\pi v \rho) \rho d\rho. \quad (1.6)$$

Этот вид двумерного преобразования Фурье для осесимметричных функций известен также как преобразование Фурье-Бесселя или преобразование Ганкеля нулевого порядка. Если

$$A(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{if } \rho > \rho_0 \end{cases},$$

то, применив формулу приведения функций Бесселя, получим

$$F(v) = 2\pi \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi v \rho) \rho d\rho = \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(2\pi v \rho_0)}{2\pi v \rho_0}.$$

Иногда деленную на свой аргумент функцию Бесселя первого порядка  $\frac{J_1(2\pi v \rho_0)}{2\pi v \rho_0}$  по аналогии с функцией Sinc на научном жаргоне называют «бесинк». Несмотря на визуальную схожесть сечений функций (1.5) и (2.6), замена одной функции другой, что, к сожалению, иногда встречается, ведет к существенным ошибкам в результатах, так как координата первого нуля в картине дифракции Фраунгофера на прямоугольной апертуре  $x_0 = \lambda f / 2L_x$ , а в картине Эйри –  $r_0 = 1.22\lambda f / 2\rho_0$ . [1-5]

**Гармоническое колебание, промодулированное прямоугольным импульсом** – это дифракционная решетка с синусоидальным профилем штриха, ограниченная прямоугольной апертурой. Здесь мы используем рассмотренное свойство делимости переменных и для координаты  $x$ :

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 x) &= \frac{1}{2} (\exp(j\omega_0 x) + \exp(-j\omega_0 x)) \\ F(A(x) \cos(\omega_0 x)) &= \frac{1}{2} F(A(x) \exp(j\omega_0 x)) + \frac{1}{2} F(A(x) \exp(-j\omega_0 x)) = . \quad (1.7) \\ &= LSinc(L(\omega + \omega_0)) + LSinc(L(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

Выражение (1.7) полезно с точки зрения перехода к следующему этапу.

**1.1.4. Физический смысл преобразования Фурье, реализуемого в схеме с тонкой положительной линзой (Рис.1.1).** Изначально сам Жан-Батист Жозеф Фурье рассматривал предложенный им метод как сугубо абстрактный, лишенный какого-либо физического смысла. Однако в оптике оно имеет очень простой и наглядный физический смысл.

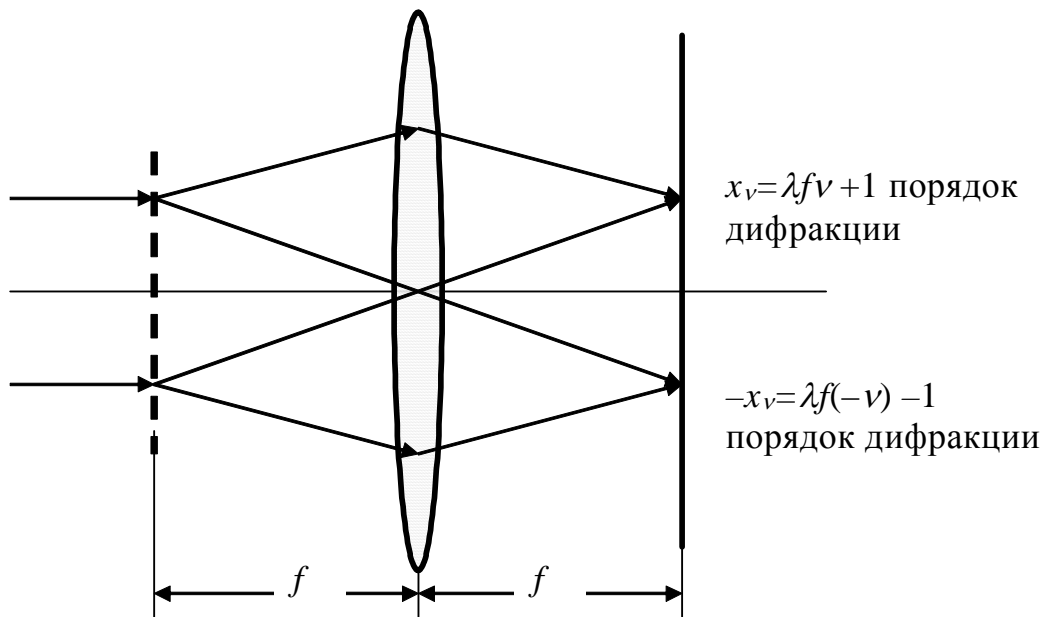


Рис.1.1. Дифракция света на одной решетке – механизм, лежащий в основе формирования Фурье-спектра изображения как суммы решеток

Смысл разложения по Фурье (гармонического анализа, разложения по гармоникам, спектрального анализа) заключается в представлении любой непрерывной на заданном интервале функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, в виде суммы гармонических колебаний различных частот. Применительно к оптической обработке информации это означает, что любое изображение, которое может быть аналитически описано функцией пропускания (для транспаранта) или амплитуды (для поля) от пространственных координат, может быть физически – подчеркнем это – именно физически, т.е. реально – представлено суммой дифракционных решеток с синусоидальным профилем штриха различных периодов и дифракционной эффективности. Поскольку угол дифракции на решетке зависит от ее частоты, то волна, дифрагировавшая на каждой такой решетке, в соответствии с (1.7) фокусируется в задней фокальной плоскости линзы в точках, отстоящих от главной оптической оси линзы на расстояние  $x_v = \lambda f v$ , где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $v$  – пространственная частота решетки, измеряемая, как правило, в обратных линейных единицах, например, обратных миллиметрах ( $\text{мм}^{-1}$ ) или линиях (штрихах) на миллиметр. Сумма этих дифракционных максимумов, образованных дифрагировавшими на каждой элементарной решетке плоскими волнами и описываемых (1.7), и образует спектр или фурье-образ изображения. [1-5]

### 1.1.5. Свойства преобразования Фурье

А. Свойство симметрии фурье-образа:

$$F(f^*(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \exp(-j\omega x) dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j(-\omega)) x dx \right)^* = F^*(-v).$$

Б. Изменение масштаба аргумента функции (Рис.1.2.):

$$F(f(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \exp(-j\omega x) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(-j \frac{\xi \omega}{a}) d\xi = \frac{1}{a} F(\frac{\nu}{a}) . \quad (1.8)$$

Чем выше частота дифракционной решетки, тем больше угол дифракции и, соответственно, тем дальше от оптической оси расположен соответствующий спектральный максимум (рис.1.2).

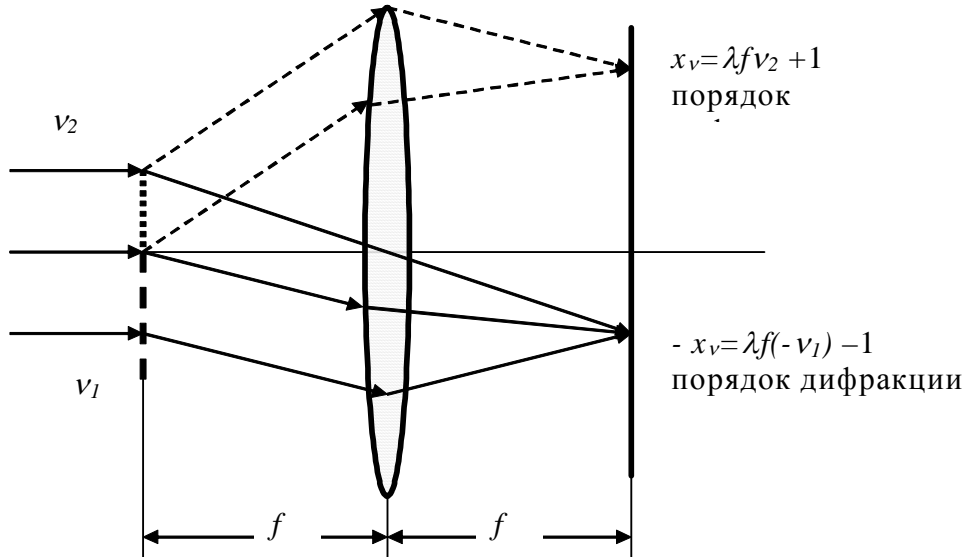


Рис.1.2. Изменение масштаба аргумента функции

В. Сдвиг аргумента функции (Рис.1.3.)

$$F(f(x - x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \exp(-j\omega x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \exp(-j\omega(x_1 + x_0)) dx_1 = (f(x_1)) \exp(-j\omega x_0) = F(\nu) \exp(-j\omega x_0) . \quad (1.9)$$

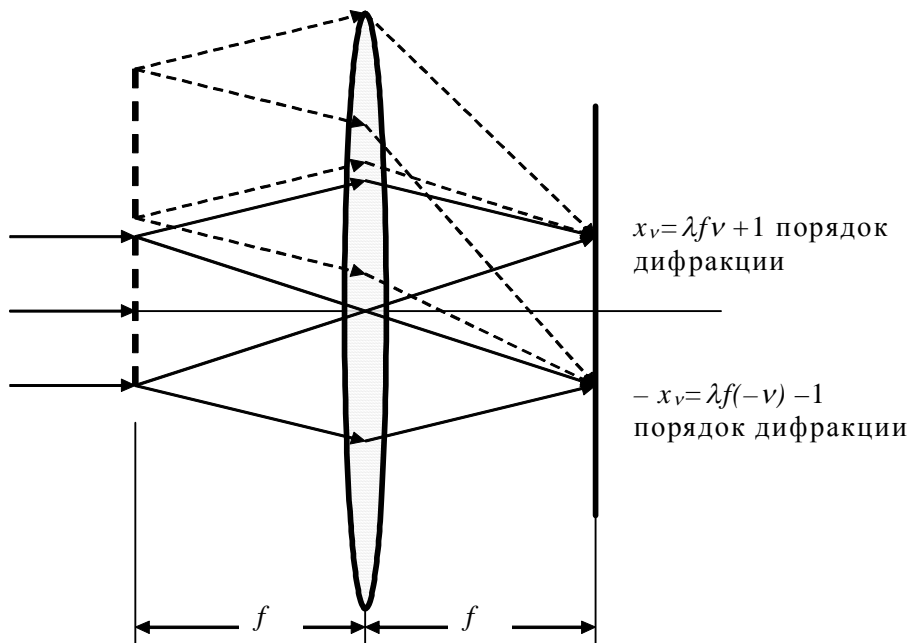


Рис.1.3. Сдвиг аргумента функции

Смещение фурье-образа по шкале частот:

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(F(v + v_0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v + v_0) \exp(j(\omega)x) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_1) \exp(j(\omega_1 - \omega_0)x) d\omega_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_1) \exp(j\omega_1 x) \exp(-j\omega_0 x) d\omega_1 = f(x) \exp(-j\omega_0 x)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

### 1.1.6. Принцип дополнительности (неопределенности) в оптике

Выше мы описывали поле функцией от пространственных координат  $E \exp[j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ . Пространство  $(x, y, z)$  – это конфигурационное пространство описываемой системы. Его достаточно для исчерпывающего описания статичной системы, но недостаточно для системы динамической – необходимо также описание в пространстве импульсов. Объединение этих двух пространств называется фазовым пространством системы. При этом абсолютная точность описания (измерения) в одном пространстве, например, в конфигурационном, ведет к невозможности описания (измерения) в импульсном – в этом смысл принципа дополнительности, впервые сформулированного в квантовой механике. В классической физике этот принцип актуален в форме принципа неопределенности.

Применительно к дифракционной оптике можно видеть, что преобразование Фурье (1.1) переводит описание из конфигурационного пространства в импульсное. Полученные выше выражения (1.5) и (1.6) для фурье-образов прямоугольной и круглой апертур как раз и выражают принцип неопределенности: абсолютно точное определение пространственной частоты описывается дельта-функцией, которой в конфигурационном пространстве соответствует бесконечная апертура, то есть полная неопределенность пространственной локализации.

## 1.2. Оптическая реализация концепции операционного исчисления на основе преобразования Фурье

**1.2.1. Операция свертки двух функций** определяется выражением:

$$S(\Delta) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx \tag{1.11}$$

**1.2.2. Операция корреляции двух функций** изначально получила развитие в теории случайных процессов. Ковариация двух случайных процессов (или случайных функций)  $X(t)$  и  $Y(t)$  – это второй центральный момент, определяемый для комплексных функций следующим образом [4,5]:

$$R_{XY}(t + \Delta, t) = \left\langle (X(t + \Delta) - \langle X \rangle)(Y(t) - \langle Y \rangle)^* \right\rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю (набору реализаций). Термин "центральный" означает нормировку на первый момент – математическое ожидание процесса. Из этого определения видно, что ковариация – функция от сдвига  $X(t)$  относительно  $Y(t)$ .

Корреляция определяется как второй начальный момент

$$K_{XY}(t + \Delta, t) = \left\langle (X(t + \Delta))(Y(t))^* \right\rangle.$$

Для центрированных процессов, т.е. процессов с нулевым математическим ожиданием, ковариация и корреляция совпадают. Если процессы не центрированы, то эти функции связаны простым выражением

$$R(t + \Delta, t) = K(t + \Delta, t) - \langle X \rangle \langle Y \rangle.$$

Если случайные процессы стационарны в широком смысле, т.е. в смысле независимости двух первых моментов от начала отсчета, то ковариационная и корреляционная функции реализаций этих процессов зависят только от сдвига одной реализации относительно другой  $\Delta$ .

Если  $X(t) = Y(t)$ , то имеем автоковариационную функцию процесса (АКФ). Тогда при значении  $\Delta = 0$  ковариация дает дисперсию процесса

$$R_{XX}(t + \Delta, t) \Big|_{\Delta = 0} = \left\langle (X(t) - \langle X(t) \rangle)(X(t) - \langle X(t) \rangle) \right\rangle = \sigma_X^2,$$

а корреляция – энергию обрабатываемой реализации процесса длиной  $L_x$ :

$$K(0) = \sigma^2 L_x.$$

Коэффициент корреляции определяется как отношение максимального значения корреляционной функции на значение автокорреляции при  $\Delta = 0$ :

$$\rho(\Delta) = \frac{K(\Delta)}{K(0)}.$$

Корреляционная функция показывает статистическую связь значений процесса, отстоящих друг от друга на расстояние  $\Delta$ . Радиус (или длина) корреляции  $r_\alpha$  определяется как значение  $\Delta$ , при котором коэффициент корреляции убывает до заданного значения

$$r_\alpha : \rho(r_\alpha) = \alpha; \alpha \in [0, 1].$$

Понятие корреляции дало мощный инструмент обработки сигналов и изображений, описываемых детерминированными функциями. Применение корреляционного формализма к детерминированным функциям основано на их трактовке как реализаций стационарного случайного процесса при принятии гипотезы эргодичности. Она правомочна при выполнении условия

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} K(\Delta) = 0.$$

Отметим, что даже в случае детерминированных функций, которые не могут трактоваться как реализации случайных процессов, понятие корреляции правомочно и практически значимо в силу того, что:

– показывает внутреннюю связность их элементов (внутреннюю коррелированность функций), являющуюся атрибутом, отличающим

информацию от дельта-коррелированного шума (для последнего  $r_\alpha = 0; \alpha \in [0,1)$ , т.е. даже ближайшие значения полностью независимы);

– служит мерой сходства функций, поскольку при  $\Delta = 0$  корреляционная функция дает скалярное произведение  $K_{XY}(0) = \langle (X(t))(Y^*(t)) \rangle$ , здесь угловые скобки означают уже не усреднение, а скалярное произведение! Тогда функция взаимной корреляции двух функций по определению:

$$K_{f_1 f_2}(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx . \quad (1.12)$$

### **1.2.3. Свойства операций свертки и корреляции**

#### **А. Некоммутативность корреляции:**

$$K_{f_1 f_2}(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx \Big|_{x + \Delta = z} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2^*(z - \Delta) dz = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z - \Delta) f_1^*(z) dz \right)^* = K_{f_2 f_1}^*(-\Delta) . \quad (1.13)$$

Отсюда следует, что для действительных функций АКФ обладает свойством четности  $K_{f_1 f_1}(-\Delta) = K_{f_1 f_1}(\Delta)$ .

Заметим, что если согласно (2.12) корреляция вычисляется перемножением значений функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  при сдвиге первой на величину  $\Delta$ , то из (2.13) следует правомочность сдвига второй функции  $f_2(x)$ , но в противоположном направлении. Свойство некоммутативности корреляции понадобится нам при рассмотрении голографических методов вычисления корреляции – голографических корреляторов. [1-5]

**Б. Прямая теорема свертки** (теорема Бореля о свертке) – фурье-образ свертки двух функций равен произведению их фурье-образов:

$$F(f_1(x) * f_2(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{\Delta - x = z} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z) dx \exp(-j\omega x) \exp(-j\omega z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz = F_1(\nu) F_2(\nu)$$

**В. Прямая теорема корреляции** – фурье-образ функции корреляции двух функций равен произведению фурье-образа одной функции на комплексно-сопряженный фурье-образ другой функции:

$$F(f_1(x) \otimes f_2(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{x + \Delta = z} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2^*(x) dx \exp(-j\omega(z-x)) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) \exp(-j\omega z) dz \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \exp(-j\omega x) dx \right)^* = F_1(v) F_2^*(v)
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Часто встречается и другое определение операции корреляции, которое может быть приведено к (1.13) заменой переменной:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(x-\Delta) dx \Big|_{z=x-\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z+\Delta) f_2^*(z) dz .$$

Именно прямые теоремы свертки и корреляции, представляющие собой с точки зрения логики частный случай закона де Моргана, лежат в основе их реализации методами операционного исчисления в математике, а в физике – голографии: корреляторами и конволверами, соответственно. Рассмотрим их в рамках аналитического описания 4f-схемы фурье-голографии (Рис.1.4).

Выполнение вычислительно затратных операций – в нашем случае интегральных операций типа свертки – через умножение фурье-образов операндов с последующим применением обратного (или повторного с инверсией координат) преобразования Фурье к результату их умножения и есть основная идея операционного исчисления – перевод вычислений в другое пространство, в котором задача вычислительно существенно менее затратна, чем в пространстве её первоначальной формулировки. [1-5]

### 1.3. Уравнение 4f-схемы голографии Фурье [1-5]

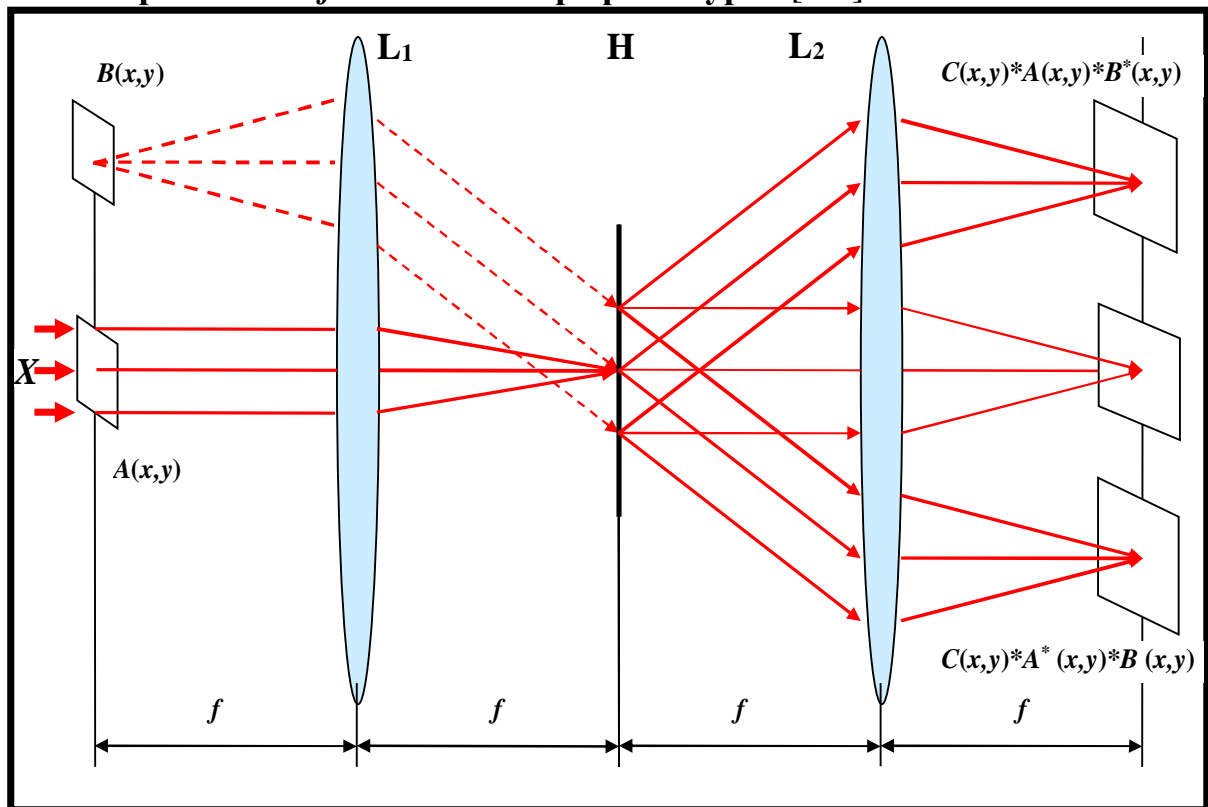


Рис.1.4. 4f-схема голографии Фурье



Пусть во входной плоскости  $In$  схемы рис.1.4 помещены два транспаранта, функции амплитудного пропускания которых описываются посредством  $A(x,y)$  и  $B(x,y)$ . Будем считать изображение  $A(x,y)$  эталонным, а  $B(x,y)$  – опорным. **Обратим внимание, что терминология отличается от принятой в других областях голографии.** В частности, то, что в других разделах голографии называется объектным изображением, в корреляционной обработке принято называть эталонным, а объектным – распознаваемое, т.е. предъявляемое на входе схемы с уже записанной голограммой. Плоскость  $In$  – передняя фокальная плоскость первой фурье-преобразующей линзы  $L_1$ . Транспаранты освещаются плоским волновым фронтом  $X$ . Примем, что амплитуда  $X$  равна 1. Тогда в задней фокальной плоскости линзы  $L_1$  формируется поле амплитуд

$$F(A(x,y)) + F(B(x,y)).$$

При помещении в эту плоскость регистрирующей среды  $H$  на ней, после экспозиции и соответствующей обработки, будет записано распределение

$$\eta\left(\left(F(A(x,y)) + F(B(x,y))\right)\left(F(A(x,y)) + F(B(x,y))\right)^*\right),$$

где  $\eta$  – оператор регистрирующей среды, а астериск обозначает комплексное сопряжение. При помещении проявленной голограммы в положение, соответствующее положению среды при записи, и помещении в плоскость  $In$  вместо изображения  $A(x,y)$  (эталонного) изображения  $C(x,y)$  (объектное изображение), за голограммой получим

$$F(C(x,y))\eta\left(\left(F(A(x,y)) + F(B(x,y))\right)\left(F(A(x,y)) + F^*(B(x,y))\right)\right) = \\ F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(A(x,y))\right) + F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(B(x,y))\right) + \\ + F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F^*(A(x,y))\right) + F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F^*(B(x,y))\right)$$

Входящие в это выражение слагаемые описывают компоненты дифрагировавшей на голограмме волны, распространяющиеся в разных направлениях, а именно: компоненты

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(A(x,y))^*\right) \text{ и } F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F(B(x,y))^*\right)$$

распространяются в направлении распространения  $F(C(x,y))$  и формируют нулевой порядок дифракции; дифрагировавшая волна

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)$$

распространяется в направлении  $F(B(x,y))$  – это +1 порядок дифракции;

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(B(x,y))^*\right)$$

распространяется в направлении, симметричном, относительно главной оптической оси, направлению распространения при записи голограммы опорного пучка  $F(B(x,y))$ , и формирует –1 порядок дифракции.

Соответственно, в фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы  $L_2$  формируются три области – три порядка дифракции: члены

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(A(x,y))^*\right)\right) \text{ и}$$

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F(B(x,y))^*\right)\right)$$

описывают поле в нулевом порядке дифракции, который в рамках нашего рассмотрения нас не интересует;

в +1 порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)\right), \quad (1.15)$$

а в –1 порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(B(x,y))^*\right)\right). \quad (1.16)$$

Если оператор голографической регистрирующей среды  $\eta$  линеен, а  $B(x,y)=\delta(x,y)$ , т.е. точечный источник (напомним, что фурье-образ точечного источника – плоская волна), то к выражениям (1.15) и (1.16) можно применить теоремы корреляции и свертки, соответственно, что даст

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(\delta(x,y))\right)\right) = C(x,y) \otimes A(x,y), \quad (1.17)$$

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(\delta(x,y))^*\right)\right) = C(x,y) * A(x,y), \quad (1.18)$$

где символы  $\otimes$  и  $*$  обозначают операции корреляции и свертки, соответственно. Такую схему фурье-голографии, в которой используется только +1 порядок дифракции, называют **коррелятором Ван дер Люгта**, а голограмму – голографическим согласованным фильтром, поскольку её передаточная характеристика согласована со спектром эталона  $A(x,y)$ . [1-5]

### **Коррелятор совместного преобразования.**

Другой метод вычисления функции взаимной корреляции двух функций посредством  $4f$ -схемы голографии Фурье может быть реализован, если в (1.15) и (1.16) принять за  $\delta$ -функцию не опорное изображение  $B(x,y)$ , а объектное  $C(x,y)$ . Тогда:

$$F\left(F(\delta(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)\right) = B(x,y) \otimes A(x,y), \quad (1.19)$$

$$F\left(F(\delta(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(B(x,y))\right)\right) = A(x,y) \otimes B(x,y), \quad (1.20)$$

т.е. и в +1, и в –1 порядках дифракции формируются функции взаимной корреляции изображений, использованных при записи голограммы. Понятия опорного и сигнального пучков в этом случае смысла не имеют. Поскольку на голограмме записывается картина интерференции спектров тех двух изображений, функция корреляции которых вычисляется, то такая схема, показанная на рис.1.5, называется коррелятором совместного преобразования (Joint Transform Correlator – JTC). [1-6]

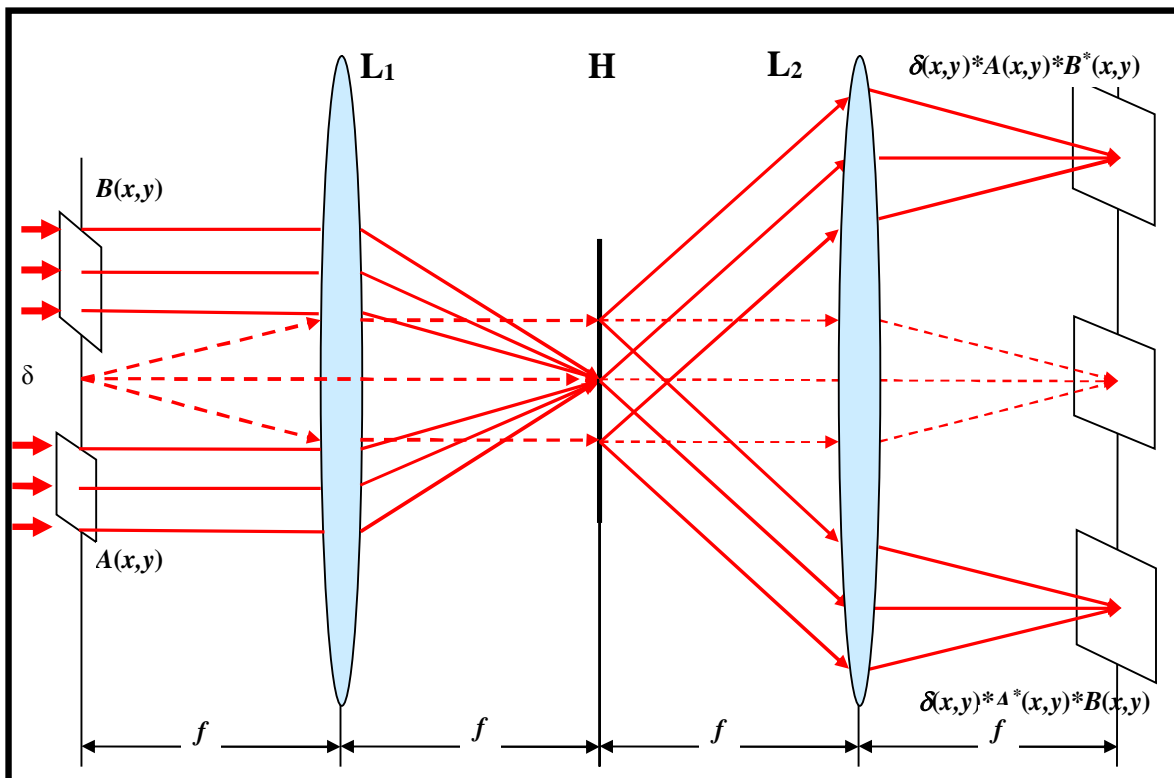


Рис.1.5. Схема голографического коррелятора совместного преобразования: освещающий голограмму пучок показан штрихами

### Вопросы для самоконтроля освоения темы №1

1. Напишите определения прямого и обратного преобразования Фурье.
2. Что такое функции с разделяющимися переменными? Какие реальные объекты адекватно описываются такими функциями?
3. Что является синонимом термина «фурье-образ»?
4. Фурье-образ действительно-значимой функции – это какая функция?
5. Какими функциями описываются спектры амплитуд круглой и прямоугольной апертур? В чем их важное количественное различие?
6. Обладает ли преобразование Фурье свойством инвариантности к сдвигу аргумента функции? Если да, то с каким важным уточнением?
7. Обязательна ли линза для оптического преобразования Фурье?
8. Какое фундаментальное явление волновой физики описывается преобразованием Фурье и в каком приближении?
9. Реализуемо ли в оптике обратное преобразование Фурье?
10. Какие интегральные преобразования реализуются применением преобразования Фурье?
11. Что является операндами в преобразованиях типа свертки?
12. Объясните геометрический смысл операторов свертки и корреляции.
13. Для решения какой практической задачи обработки информации применяется оператор корреляции?

14. Обладает ли функция корреляции инвариантностью к каким-либо искажениям одной из сравниваемых функций относительно другой? Если да, то к каким?
15. Чем отличаются функции автокорреляции и кросс-корреляции? Мерой чего служит нормированная амплитуда глобального максимума автокорреляционной функции?
16. Чем отличаются функции корреляции и ковариации? Когда они идентичны?
17. В чем основная идея операционного исчисления?
18. Почему связаны голография и концепция операционного исчисления?

### Литература к теме 1

1. *Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л.* Оптическая голография. – М.: Мир, 1973. – 686 с.
2. *Василенко Г.И., Цибулькин Л.М.* Голографические распознающие устройства. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
3. *Мирошников М.М.* Теоретические основы оптико-электронных приборов. – Л.: Машиностроение, 1977. – 600 с.
4. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 280 С.
5. *Павлов А.В.* Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
6. *Pierre Ambs* A short history of optical computing: rise, decline and evolution // Ninth International Conference on Correlation Optics, edited by Oleg V. Angelsky, Proc. of SPIE Vol. 7388, 73880H, 2009. CCC code: 0277-786X/09/\$18. doi: 10.1117/12.849816
7. *Гончаров Д.С., Стариков Р.С.* Когерентные оптико-цифровые корреляторы изображений с нейросетевой обработкой выходных сигналов // XI Межд. конференция по фотонике и информационной оптике. Сборник научных трудов. Москва, 2022. С. 42-43.
8. *Liangcai Cao, Qingsheng He, Qiang Ma, Guofan Jin* Parallel data processing based on high density volume holographic correlator // Proc. of SPIE Vol. 7420, 74200O-1, 2009. DOI: 10.1117/12.825450.
9. *Jyoti Bikash Mohapatra, Naveen K. Nishchal, Jyothish Monikantan* Object Recognition in Foggy and Hazy Conditions Using Dark Channel Prior-Based Fringe-Adjusted Joint Transform Correlator // Photonics **11**(12), 1142 (2024); <https://doi.org/10.3390/photonics11121142>

## Тема 2. Погрешности оптической реализации преобразования Фурье [1-6]

В первой лекции мы рассмотрели реализацию преобразования Фурье в оптике и увидели, что положительная линза в своей задней фокальной плоскости строит поле комплексных амплитуд, соответствующее Фурье-образу поля амплитуд в плоскости перед или за линзой. Но это утверждение нуждается в ряде уточнений, которым и посвящена настоящая лекция. [1-6]

Рассмотрим показанную на рис.2.1 оптическую схему с тонкой положительной линзой L. Плоскости P<sub>1</sub> и P<sub>2</sub> находятся перед линзой и за ней на расстояниях d и f, соответственно, где f – фокусное расстояние линзы (т.е. P<sub>2</sub> – задняя фокальная плоскость линзы), x, y и ζ, η – координаты в плоскостях P<sub>1</sub> и P<sub>2</sub>, соответственно. Ось z – главная оптическая ось линзы L.

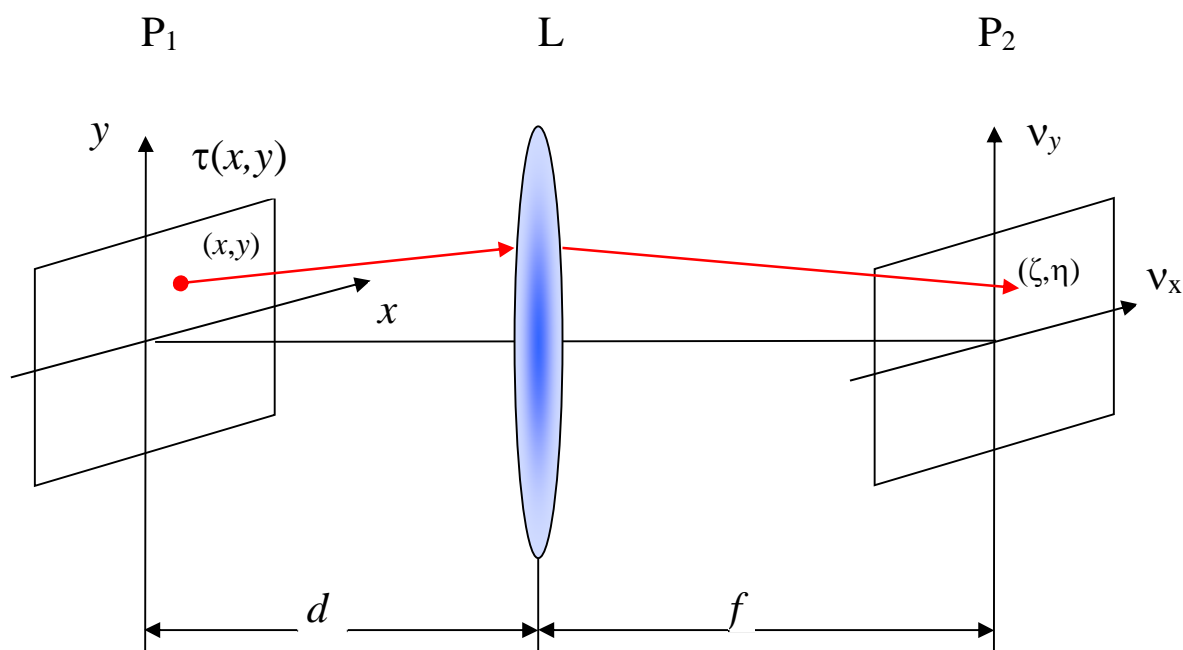


Рис.2.1. Схема с тонкой положительной линзой, реализующая двумерное преобразование Фурье

Пусть  $E(x, y)$  – распределение комплексных амплитуд света в плоскости P<sub>1</sub>, а  $E(\zeta, \eta, z)$  – распределение амплитуд в плоскости P<sub>2</sub>, отстоящей от P<sub>1</sub> на расстояние z. Выражение для связи комплексной амплитуды в плоскости P<sub>2</sub> с амплитудой в плоскости P<sub>1</sub> дается хорошо известным из курса оптики [1] дифракционным интегралом Френеля-Кирхгофа

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-j}{\lambda} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} \cos \theta dx dy, \quad (2.1)$$

где выбор знака перед интегралом – предмет договоренности, j – мнимая единица, r – расстояние от точки ζ, η плоскости P<sub>2</sub> до точек плоскости P<sub>1</sub>, дающих свой вклад в амплитуду в этой точке,  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число, θ –

угол между рассматриваемым лучом и нормалью к плоскости  $P_1$  в точке  $x, y$ ,  $\cos \theta$  – коэффициент наклона, учитывающий различия в количестве света, излучаемого из плоскости  $P_1$  в разных направлениях. Можно видеть, что если в схеме присутствует тонкая безабберационная положительная линза с бесконечной апертурой, как на рис.2.1, то этот коэффициент не зависит от координат  $x, y$  в плоскости  $P_1$  и может быть представлен в виде

$$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}. \quad (2.2)$$

Тогда, с учетом (2.2), выражение (2.1) можно переписать в виде

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-jf}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} dx dy. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что для нахождения амплитуды в точке  $(\zeta, \eta)$  необходимо определить длины оптического пути  $r$  к этой точке от всех точек  $x, y$ . Обычно для этого используется парааксиальное приближение, в рамках которого

$$r = (f + d) - \frac{\zeta}{f} x - \frac{\eta}{f} y. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.3) и дает выражение, соответствующее строгому математическому определению преобразования Фурье.

Но точное выражение для длины оптического пути  $r$ :

$$r = R(\zeta, \eta) - \alpha x - \beta y, \quad (2.5)$$

где

$$R(\zeta, \eta) = \frac{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}.$$

$$\beta = \frac{\eta}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \quad (2.6)$$

Эти выражения легко получить самостоятельно, если рассмотреть схему обратного распространения излучения из точки  $(\zeta, \eta)$  в точку  $(x, y)$ , приведенную на рис.2.2, и решить треугольники, образованные исходя из соображений равенства длин оптических путей.

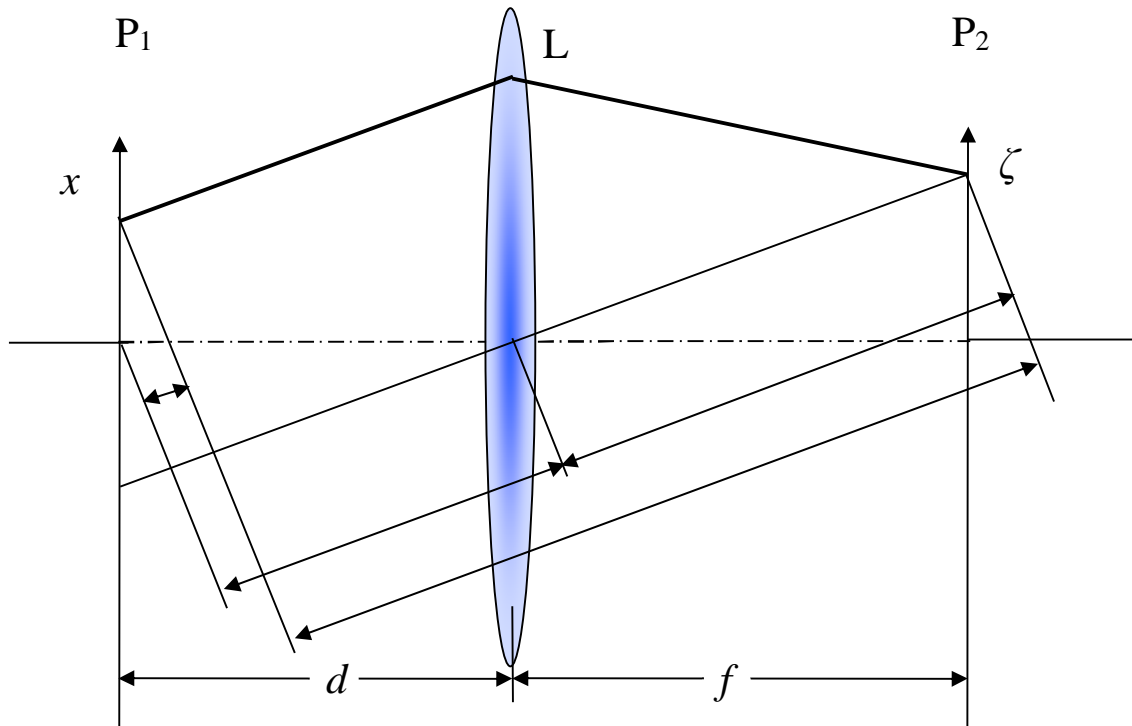


Рис.2.2. Схема для определения оптической длины пути между точками  $(x)$  и  $(\zeta)$  для одномерного случая

Подстановка (2.5) и (2.6) в (2.3) дает:

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-jf}{\lambda} \exp jkR(\zeta, \eta) \iint \frac{E(x, y) \exp[-jk(\alpha x + \beta y)]}{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df - x\zeta - y\eta} dx dy. \quad (2.7)$$

Введем новые переменные, имеющие смысл пространственных частот:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\zeta}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \\ \mu_y &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Почему мы использовали здесь для обозначения пространственных частот букву  $\mu$ , а не привычную  $\nu$ , станет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Подставив (2.8) в (2.7), вынесем  $\frac{1}{f^2 + df}$  из-под знака интеграла и, проведя ряд элементарных преобразований, получим выражение, описывающее распределение комплексных амплитуд в плоскости  $P_2$ :

$$\begin{aligned}
E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] dx dy - \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Первый интеграл в выражении (2.9) с точностью до фазового множителя описывает фурье-образ поля  $E(x, y)$ .

Второй член (2.9) описывает погрешность оптического преобразования Фурье, выполняемого идеальной положительной линзой. Если знаменатель подынтегрального выражения второго слагаемого существенно больше числителя, то и само второе слагаемое становится пренебрежимо малым. Для этого, как видно из (2.10), необходимо соответствующим образом подобрать соотношение максимальных значений  $x, y$  и  $\zeta, \eta$ , т.е. апертуры в соответствующих плоскостях, и фокусное расстояние линзы. [1-6]

Для того, чтобы получить количественную оценку погрешности оптического преобразования Фурье в зависимости от параметров оптической схемы, перепишем выражение (2.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Сравним полученное выражение с определением преобразования Фурье, введенном нами в первой лекции:

$$F(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy. \quad (2.11)$$

Рассмотрим вклад отдельных компонент выражения (2.10), точно описывающего поле в плоскости  $P_2$ , но отсутствующих в (2.11). [5,6]

### Частотная погрешность [5,6]

В (2.8) мы ввели новые переменные, имеющие смысл пространственных частот. Можно видеть, что тонкая положительная линза формирует фурье-образ не в своей фокальной плоскости, а на сфере радиуса  $f$ . Эта сфера



касается фокальной плоскости только в точке ее пересечения с главной оптической осью, и в фокальной плоскости формируется проекция фурье-образа, сформированного на сфере. Соответственно, при измерениях в плоскости возникают систематические ошибки. Рассмотрим их подробнее.

Подставим (2.8) в строгое определение преобразования Фурье (2.11):

$$E\left(\frac{\zeta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}, \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\zeta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}x + \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}y\right)\right] dx dy \quad (2.12)$$

Полученное выражение отличается от точного тем, что введенная нами пространственная частота  $\mu_x$  зависит не только от координаты  $\zeta$ , но также и от координаты  $\eta$ . Последней зависимости в строгом определении преобразования Фурье быть не должно, аналогично и для частоты  $\mu_y$ . Эта зависимость от «чужой» координаты и определяет частотную погрешность.

Преобразуем выражения (2.8) к виду

$$\mu_x = \frac{\zeta}{\lambda f} \left[ \sqrt{1 + \frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

$$\mu_y = \frac{\eta}{\lambda f} \left[ \sqrt{1 + \frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1}$$

Разложим выражение в квадратных скобках в ряд:

$$\mu_x = \frac{\zeta}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right] \quad (2.14)$$

$$\mu_y = \frac{\eta}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right]$$

В рамках параксиального приближения  $\frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2} \ll 1$ , т.е. можно пренебречь всеми членами ряда (2.14), начиная со второго. Тогда получим:

$$\mu_x = \frac{\zeta}{\lambda f} \quad (2.15)$$

$$\mu_y = \frac{\eta}{\lambda f}$$

Подстановка (2.15) в (2.12) и ведет к точному выражению для преобразования Фурье:

$$E\left(\frac{\zeta}{\lambda f}, \frac{\eta}{\lambda f}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\zeta}{\lambda f}x + \frac{\eta}{\lambda f}y\right)\right] dx dy. \quad (2.16)$$

Таким образом, линейная зависимость между пространственными координатами  $\zeta$ ,  $\eta$  и пространственными частотами  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  имеет место только в параксиальной области. Вне параксиальной области масштаб оси частот с ростом частоты уменьшается.

Введем относительную частотную погрешность оптического преобразования Фурье при линейной аппроксимации оси частот следующим образом:

$$\Delta_f = \frac{\frac{\zeta/\lambda f}{\zeta/\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}}{\frac{\zeta/\lambda f}{\zeta}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2}} - 1. \quad (2.17)$$

Определим рабочую апертуру в задней фокальной плоскости

$$\rho = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2},$$

в пределах которой проводятся измерения. Введем отношение

$$a = \frac{\rho}{f}.$$

Тогда относительная частотная погрешность может быть переписана:

$$\Delta_f = \sqrt{1 + a^2} - 1. \quad (2.18)$$

В результате, зная допустимую относительную частотную погрешность, при заданном фокусном расстоянии можно определить радиус рабочей апертуры, в пределах которой заданная точность измерений будет гарантирована. Соответственно, можно определить и максимальную пространственную частоту, для которой погрешность еще не превышает заданную:

$$v_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{\lambda f} = \frac{a}{\lambda}. \quad (2.19)$$

Пользуясь формулами (2.18) и (2.9), нетрудно количественно оценить параметры оптической схемы, обеспечивающие проведение измерений с заданной погрешностью. [5,6]

### **Амплитудная погрешность [5,6]**

Амплитудная погрешность возникает в силу неточного учета длины оптического пути между точками  $x, y$  плоскости  $P_1$  и точками  $\zeta, \eta$  плоскости  $P_2$ , а также коэффициента наклона для этих точек.

Вернемся к выражению (2.10):

$$E(\zeta, \eta) = \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\ \times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy$$

Сравним его с выражением для точного преобразования Фурье:

$$E(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy.$$

Из сравнения этих выражений видно, что распределение комплексных амплитуд, описываемое выражением (2.10), отличается от точного преобразования Фурье вторым членом в фигурных скобках. Именно этот член и описывает влияние изменения оптического пути между точками плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  и коэффициента наклона.

Определим относительную амплитудную погрешность как отношение второго члена в фигурных скобках к значению выражения в этих скобках:

$$\Delta_a = \frac{\left( \frac{\zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta}{f^2 + df + \zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta} \right)}{\left( \frac{f^2 + df}{f^2 + df + \zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta} \right)} = \frac{(\zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta)}{f(f+d)}. \quad (2.20)$$

Введем в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  полярные координаты  $r, \psi$  и  $\rho, \varphi$ , соответственно. Тогда в полярных координатах

$$\Delta_a = \frac{[\rho^2 - \rho r \cos(\varphi - \psi)]}{f(f+d)}. \quad (2.21)$$

Очевидно, что амплитудная погрешность максимальна, если  $\cos(\varphi - \psi) = -1$ . Для этого крайнего случая получим выражение для максимальной амплитудной погрешности:

$$\Delta_{aMax} = \frac{(\rho^2 + \rho r)}{f(f+d)}. \quad (2.22)$$

Отсюда видим, что амплитудная погрешность зависит от апертур как во входной плоскости  $P_1$ , так и в плоскости Фурье  $P_2$ . При этом она более чувствительна к радиусу апертуры в частотной плоскости  $\rho$ .

Введем относительные апертуры как отношения  $\frac{\rho}{f}$  и  $\frac{r}{f}$ . Тогда максимальная амплитудная погрешность может быть представлена в виде

$$\Delta_{aMax} = \frac{\left[ \left( \frac{\rho}{f} \right)^2 + \frac{\rho}{f} \frac{r}{f} \right]}{\left[ 1 + \frac{d}{f} \right]}. \quad (2.23)$$

Отсюда получим оценку максимального значения относительной апертуры в частотной плоскости при заданном значении апертуры во входной плоскости и допустимой величине амплитудной погрешности:

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{1}{2} \frac{r_{Max}}{f} \left[ \sqrt{1 + 4\Delta_{aMax} \frac{1 + \frac{d}{f}}{\left( \frac{r_{Max}}{f} \right)^2} - 1} \right]. \quad (2.24)$$

Для того, чтобы определить связь радиусов  $r$  и  $\rho$  с радиусом апертуры линзы  $R_L$ , рассмотрим схему, данную на рис.2.3.

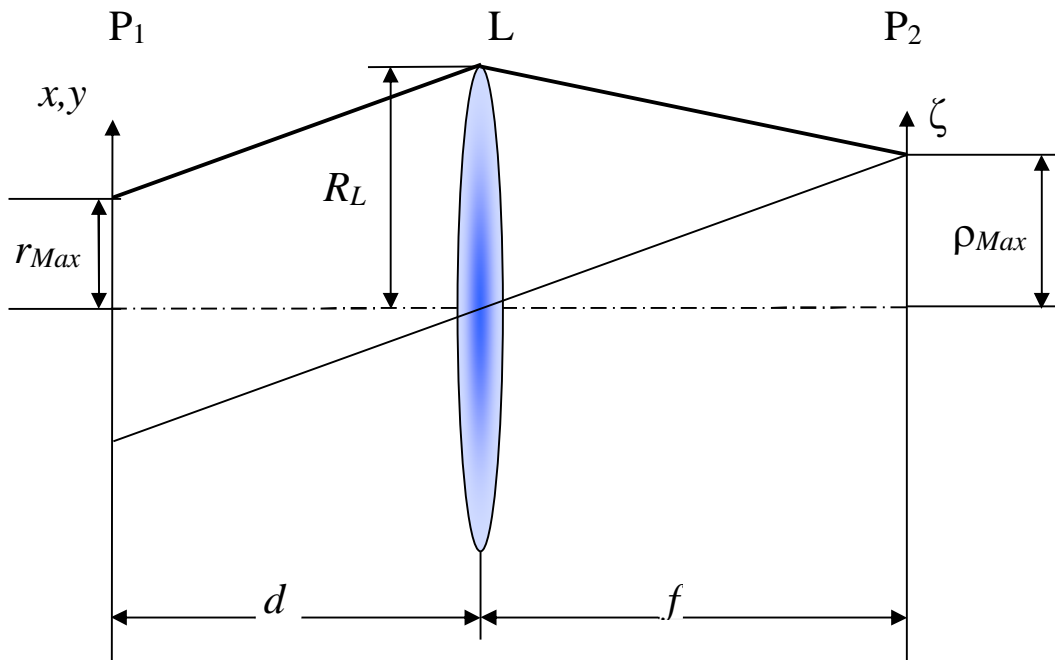


Рис.2.3. Схема, иллюстрирующая взаимную связь апертур во входной и выходной плоскостях с апертурой линзы при двумерном преобразовании Фурье

Из геометрического построения, приведенного на рис.2.3, следует

$$r_{Max} = R_L - d \frac{\rho_{Max}}{f}. \quad (2.25)$$

Введем относительное отверстие линзы  $O = \frac{2R_L}{f}$  и перепишем (2.25):

$$\frac{r_{Max}}{f} = \frac{R_L}{f} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{O}{2} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f}. \quad (2.26)$$

И аналогично для относительной апертуры в плоскости  $P_2$ :

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{\left[ \frac{R_L}{f} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} = \frac{\left[ \frac{O}{2} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}}. \quad (2.27)$$

Формулы (2.24), (2.26) и (2.27) позволяют рассчитать параметры оптического анализатора Фурье – при заданном фокусном расстоянии определить размеры апертур, обеспечивающие выполнение преобразования Фурье поля заданного размера с заданной погрешностью. [1-6]

### Фазовая погрешность [5,6]

Примем, что размеры апертур в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  схемы Рис.2.1. выбраны исходя из обеспечения требуемых частотной и амплитудной погрешностей. Тогда распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \iint E(x, y) \exp \left[ -j2\pi(\mu_x x + \mu_y y) \right] dx dy = \\ &= \frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} F(E(x, y)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Фазовая погрешность оптического преобразования Фурье обусловлена экспоненциальным членом  $\exp jkR(\zeta, \eta)$  перед интегралом в (2.28). [5,6]

Все приемники – квадратичные: они регистрируют не комплексную амплитуду, а интенсивность – скалярный квадрат амплитуды, поэтому при измерениях в частотной плоскости этот член на результат не влияет:

$$E(\zeta, \eta) E^*(\zeta, \eta) = \frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} \left( \frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} \right)^* (F(E(x, y)))^2$$

Но при записи голограммы Фурье этот экспоненциальный множитель регистрируется на голограмме и, тем самым, в зависимости от схемы, может оказывать влияние на результаты обработки и измерений. [5,6]

В предположении линейной записи в схеме Рис.1.6 эталона  $A$  с опорным изображением  $B$ , на голограмме Фурье будет записано распределение

$$\begin{aligned} H(v_x, v_y) &= \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) + \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) \right) \times \\ &\times \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) + \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) \right)^* = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y))^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y))^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y))^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y))^* \right) = \\
&= \left( F(A(x, y)) F(A(x, y))^* \right) + \left( F(B(x, y)) F(B(x, y))^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y))^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y))^* \right) . \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Соответственно, при освещении обработанной соответствующим образом (проявленной и зафиксированной) голограммы объектным изображением  $C(x, y)$  поле сразу за голограммой описывается выражением

$$\begin{aligned}
&\frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(C(x, y)) H(v_x, v_y) = \\
&= \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(C(x, y)) \left( F(A(x, y)) F(A(x, y))^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(C(x, y)) \times \\
&\times \left( \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y))^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(C(x, y)) \times \\
&\times \left( \frac{-j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(B(x, y)) - \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(A(x, y))^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(C(x, y)) \left( F(B(x, y)) F(B(x, y))^* \right) . \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Если в качестве опорного источника  $B(x, y)$  используется дифракционно-ограниченный точечный источник (т.е. голограмма записывается по схеме с внеосевым плоским опорным пучком, показанным пунктиром на Рис.2.4), то выражение (2.30) можно упростить:

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(C(x, y)) H(v_x, v_y) = \\
& = \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(C(x, y)) \left( F(A(x, y)) F(A(x, y))^* \right) + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(C(x, y)) \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(A(x, y)) + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(C(x, y)) \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(A(x, y))^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(C(x, y))
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Для упрощения выкладок мы опустили постоянные коэффициенты. Если объектное изображение помещено в то же положение, что и эталонное при записи голограммы, то возможно дальнейшее упрощение этого выражения:

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(C(x, y)) H(v_x, v_y) = \\
& = \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(C(x, y)) \left( F(A(x, y)) F(A(x, y))^* \right) + \\
& + \frac{j \exp jk(R(\zeta_C, \eta_C) + R(\zeta_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(C(x, y)) F(A(x, y)) + \\
& + \frac{j \exp jk(R(\zeta_C, \eta_C) - R(\zeta_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(A(x, y)) F(A(x, y))^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(C(x, y)).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Из (2.32) видно, что, строго говоря, фазовая погрешность несущественна при голографическом методе обработки информации только при работе в +1 порядке дифракции (третье слагаемое в (2.32))  $4f$  схемы голографии Фурье в случае, если объектное изображение находится в том же положении, что и эталонное при записи голограммы, т.е.

$$d_C = d_A.$$

Условие

$$(\zeta_C, \eta_C) \leq (\zeta_A, \eta_A)$$

выполняется автоматически, поскольку физический размер голограммы не превосходит  $(\zeta_A, \eta_A)$  (с учетом ограничений, обусловленных ограниченностью динамического диапазона регистрирующей среды).

Обратим внимание, что при выводе (2.32) мы рассмотрели только запись голограммы. Но  $4f$  схема голографии Фурье предполагает также и второе преобразование Фурье, выполняемое над дифрагировавшим на голограмме пучком. Это преобразование мы здесь еще не рассмотрели. Если схема используется как коррелятор или конволвер, то в задней фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы регистрируется интенсивность, т.е. возникающая при втором преобразовании фазовая погрешность несущественна. Если же  $4f$  схема – часть более сложной, то эта погрешность может оказаться существенной.

Оговоренные выше условия имеют силу для коррелятора Ван дер Люгта, поскольку функция взаимной корреляции формируется в +1 порядке дифракции. При работе в -1 порядке дифракции (второе слагаемое) в (2.32) фазовые погрешности складываются.

Оценим величину фазовой погрешности. Величина множителя  $\frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)}$  зависит от величины  $R(\zeta, \eta)$ , которая, в свою очередь, в соответствии с (2.6) зависит от  $(\zeta, \eta)$ , т.е. от  $\rho$  - радиуса апертуры в частотной плоскости  $P_2$ . Обычно полагают, что в пределах  $\rho_{Max}$  изменения  $\xi$  и  $\eta$  достаточно малы для того, чтобы экспоненциальный множитель  $\exp jkR(\zeta, \eta)$  в выражении (2.28) можно было считать постоянным. Вернемся к точному выражению для  $R(\zeta, \eta)$  (2.6) и преобразуем его:

$$\begin{aligned} R(\zeta, \eta) &= \frac{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} = \frac{f^2 + \rho^2 + df}{\sqrt{f^2 + \rho^2}} = \\ &= (f+d) - (f-d) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} \right) + 2f \left( \frac{\left( 1 - \frac{\rho^2}{2f^2} \right)}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если разложить второе и третье слагаемые в степенной ряд, ограничившись первым приближением, то (2.33) после несложных преобразований примет вид

$$R(\zeta, \eta) = (f+d) + \frac{1}{2}(f-d)\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{1}{2}f\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2. \quad (2.34)$$

Подставим (2.34) в выражение для экспоненциального множителя:



$$\frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} = \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jk(f+d) \exp \left( \frac{1}{2} jk(f-d) \frac{\rho^2}{f^2} \right) \exp \left( \frac{1}{2} jkf \left( \frac{\rho^2}{f^2} \right)^2 \right). \quad (2.35)$$

Принятая при разложении (2.33) в степенной ряд аппроксимация только первыми членами допустима в определенных пределах. Например, если выполняется условие  $\rho \leq 0.14f$ , то погрешности, определенные согласно (2.35) и (2.33), различаются не более, чем на 2%.

Из (2.35) наглядно видно, почему при реализации преобразования Фурье линзой транспарант с преобразуемым изображением обычно помещается в переднюю фокальную плоскость, т.е. выполняется условие

$$d = f. \quad (2.36)$$

Действительно, в этом случае второй сомножитель в (2.35) становится равным единице и фазовая погрешность минимизируется:

$$\frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} = \frac{j}{2\lambda f} \exp jk2f \exp \left( \frac{1}{2} jkf \left( \frac{\rho^2}{f^2} \right)^2 \right). \quad (2.37)$$

### Влияние фазовой погрешности на результат обработки изображения оптической схемой

Выше мы упомянули, что при измерениях в спектральной плоскости, выполняемых квадратичным приемником, фазовый член, определяющий фазовую погрешность, исчезает (поскольку квадратичный приемник измеряет не комплексную амплитуду, а интенсивность). Однако в более сложных системах эта погрешность может вносить существенный вклад в результат обработки. Рассмотрим систему из двух положительных линз, задняя и передняя фокальные плоскости которых совпадают (Рис.2.4).

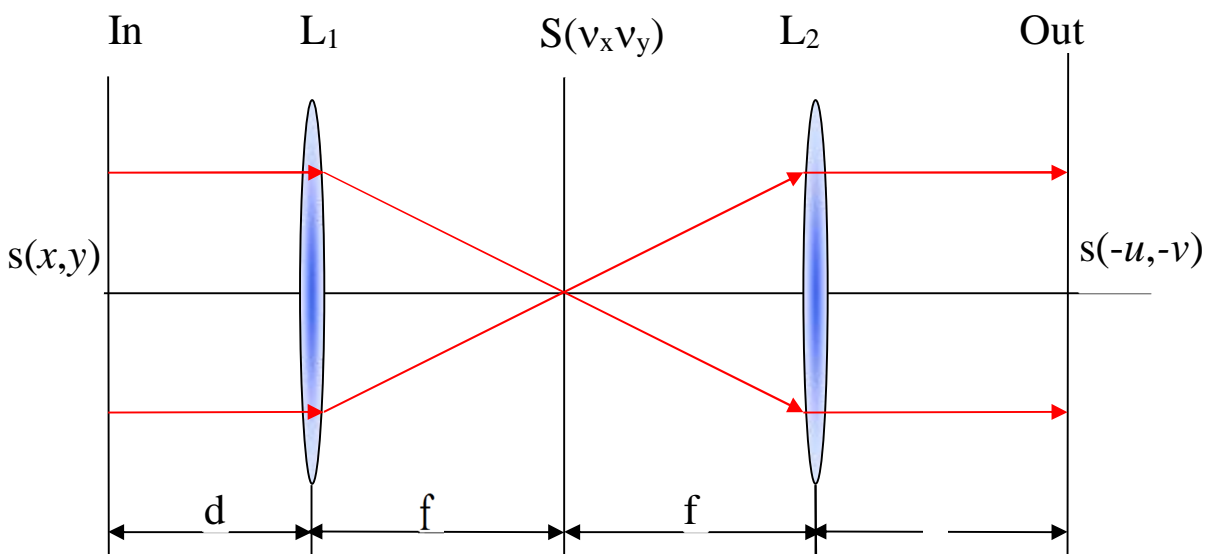


Рис.2.4. Схема двойного оптического преобразования Фурье

Поскольку в схеме выполняются последовательно два преобразования (2.28), то, в предположении, что входная плоскость совпадает с передней фокальной плоскостью первой линзы ( $d=f$ ), в задней фокальной плоскости линзы  $L_1$  распределение амплитуд  $S(\zeta, \eta)$  описывается выражением

$$\begin{aligned} S(\zeta, \eta) &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp\left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2}\right)^2\right) \times \\ &\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy = \\ &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp\left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2}\right)^2\right) S(v_x, v_y), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $S(v_x, v_y)$  – фурье-образ распределения амплитуд во входной плоскости. Линза  $L_2$  выполняет второе преобразование над этим распределением:

$$\begin{aligned} Out(u, v) &= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp\left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2}\right)^2\right) \times \\ &\times \iint S(\zeta, \eta) \exp[-j2\pi(v_x u + v_y v)] dv_x dv_y = \\ &= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp\left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2}\right)^2\right) \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \times \\ &\times \iint \exp\left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2}\right)^2\right) S(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x u + v_y v)] dv_x dv_y. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для оценки влияния экспоненциального фазового множителя (2.35) на результат преобразования, выполняемого системой рис.2.5, рассмотрим прохождение через неё гармонического сигнала, представленного в передней фокальной плоскости линзы  $L_1$ :

$$s(x) = A_0 + B \cos 2\pi v_0 x. \quad (2.40)$$

Примем для упрощения выражений  $d=f_1=f_2=f$  и обозначим множители, стоящие перед интегралом,  $C_1$  и  $C_2$ , соответственно. Тогда в спектральной плоскости для гармонического сигнала (2.40) получим распределение

$$S(v_x, v_y) = C_1 \left[ A_0 \delta(v_x) + \frac{B}{2} (\delta(v_x - v_0) + \delta(v_x + v_0)) \right], \quad (2.41)$$

где для упрощения выражений символом  $\delta(\dots)$  мы обозначили распределение амплитуд в дифракционном максимуме. Отсюда, распределение комплексных амплитуд в выходной плоскости

$$Out(u, v) = C_3 \left[ A_0 + B \exp\left(\frac{jkf(\lambda v_0)^4}{2}\right) \cos 2\pi v_0 u \right], \quad (2.42)$$

где множитель  $C_3$  определяется из (2.38) и (2.39).

Для преобразования без фазовой погрешности распределение амплитуд в выходной плоскости должно описываться выражением

$$Out_{ideal}(u, v) = C_3 (A_0 + B \cos 2\pi v_0 u). \quad (2.43)$$

Сравнив (2.42) с (2.43), увидим, что фазовая погрешность оптического преобразования Фурье для рассматриваемой схемы рис.2.4 выражается экспоненциальным множителем перед сигнальным членом  $B \cos 2\pi v_0 u$ .

Перейдем от амплитуд в выходной плоскости к интенсивности, тогда выражения (2.42) и (2.43) примут вид, соответственно:

$$\begin{aligned} \langle Out(u, v) \rangle^2 = \\ = |C_3|^2 \left[ A_0^2 + 2A_0 B \cos \left( \frac{kf(\lambda v_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi v_0 u + B^2 \cos^2 2\pi v_0 u \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

и

$$\langle Out_{ideal}(u, v) \rangle^2 = |C_3|^2 (A_0^2 + 2A_0 B \cos 2\pi v_0 u + B^2 \cos^2 2\pi v_0 u). \quad (2.45)$$

Из сравнения этих выражений видно, что интенсивность гармоники  $v_0$  (сигнала) ослаблена, это ослабление представлено коэффициентом

$$M = \cos \left( \frac{kf(\lambda v_0)^4}{2} \right). \quad (2.46)$$

Для изображения этот коэффициент является функцией частоты:

$$M(v) = \cos \left( \frac{kf(\lambda v)^4}{2} \right). \quad (2.47)$$

Таким образом, в области низких пространственных частот влияние фазовой погрешности минимально, так как при малых  $v$ , как следует из (2.47),  $M(v) \approx 1$ . С ростом частоты величина  $M(v)$  уменьшается. Напомним, что пространственная частота связана с пространственной координатой в частотной плоскости соотношением  $v_x = \frac{\zeta}{\lambda f}$ . [5,6]

## Вопросы для самоконтроля освоения темы №2

1. Какие виды погрешностей имеют место при описании реального поля, формируемого в задней фокальной плоскости тонкой положительной линзы, преобразованием Фурье?

2. Чем обусловлена амплитудная погрешность, какие параметры оптической схемы влияют на её величину и как?

3. Чем обусловлена частотная погрешность, какие параметры схемы влияют на её величину и как?
4. Чем обусловлена фазовая погрешность, какие параметры схемы влияют на её величину и как?
5. Актуальна ли фазовая погрешность при измерении поля в задней фокальной плоскости линзы квадратичным сенсором (приемником)?
6. Для какой оптической схемы актуальна фазовая погрешность? Как она проявляется?
7. В чем смысл при работе с преобразованием Фурье помещения транспаранта с анализируемым изображением в переднюю фокальную плоскость положительной линзы?
8. Можно ли для получения фурье-образа поместить транспарант с анализируемым изображением вне передней фокальной плоскости положительной линзы?
9. Можно ли для получения фурье-образа поместить транспарант с анализируемым изображением не перед, а после положительной линзы, перед её задней фокальной плоскостью? Что в этом случае изменится в описании поля в задней фокальной плоскости по сравнению с вариантом расположения транспаранта перед линзой?

### **Литература к теме 2**

1. *Борн М., Вольф. Э.* «Основы оптики», изд. 2-е. Пер. с англ. М., Главная редакция физико-математической литературы. «Наука», 1973. – 814 с.
2. *Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л.* «Оптическая голография», М.: Мир, 1973. – 686 с.
3. *Василенко Г.И., Цибулькин Л.М.* «Голографические распознающие устройства», М.: Радио и связь, 1985. – 312с.
4. *Мирошников М.М.* «Теоретические основы оптико-электронных приборов». Л., Машиностроение, 1977. – 600 с.
5. *С.Б. Гуревич В.Б. Константинов, В.К. Соколов, Д.Ф. Черных* Передача и обработка информации голографическими методами. М.: Сов. Радио, 1978. – 304 с.
6. *Павлов А.В.* Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
7. *Дж. Гудмен* Введение в Фурье-оптику. М.: «Мир», 1970. – 364 с.
8. *К. Престон* Когерентные оптические вычислительные машины. М.: Мир, 1974. – 382 с.
9. *А. Папулис* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. – 495 с.

## **Тема 3. Преобразования, реализуемые в оптике на основе преобразования Фурье [1-3]**

В первой лекции мы ознакомились с интегральными преобразованиями типа свертки. Эти интегральные преобразования реализуются оптическими методами на основе двух последовательных преобразований Фурье, что точно соответствует принципу операционного исчисления – переводу вычислительно сложной задачи в другое пространство, в котором она решается легко, и возвращением решения в пространство исходной формулировки задачи. Поскольку фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексно-значимая функция, то для реализации этих преобразований необходима технология записи и восстановления полей комплексно-значимых амплитуд – голография [1,2].

Теперь мы ознакомимся с рядом других преобразований, применяемых при обработке информации и реализуемых оптическими методами. [1-2]

### **3.1. Дифференцирование функций**

Операция дифференцирования может быть реализована в оптике двумя методами [1,2]. Первый из них основан на следующем соотношении:

$$F[E^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F[E(x)], \quad (3.1)$$

где  $E^{(n)}(x)$  –  $n$ -ая производная функции  $E(x)$ . Отсюда следует формула для оптической реализации  $n$ -ой производной от функции  $E(x)$ :

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = F^{-1}[(j\omega)^n F(E(x))]. \quad (3.2)$$

Таким образом, для того, чтобы реализовать операцию дифференцирования, необходимо в спектральной плоскости ввести амплитудный фильтр, функция пропускания которого имеет вид

$$H(\omega) = \omega^n. \quad (3.3)$$

Напомним, что в силу нереализуемости в оптике обратного преобразования Фурье и использования прямого преобразования вместо обратного, имеет место инверсия координат в выходной плоскости. [1-2]

#### Применение дифференцирования изображений в задаче распознавания

Такой способ оптического дифференцирования актуален в задаче распознавания образов, когда распознаваемый образ (эталон) и помеха имеют отчасти сходную форму. Классический пример, иллюстрирующий эффект дифференцирования – корреляционное распознавание печатного текста. Рассмотрим буквы I и E – их сечения по горизонтали отчасти сходны между собой. Аналогична ситуация и при распознавании фигур одинаковой формы, но разного размера, как это показано на рис.3.1. [1-2]

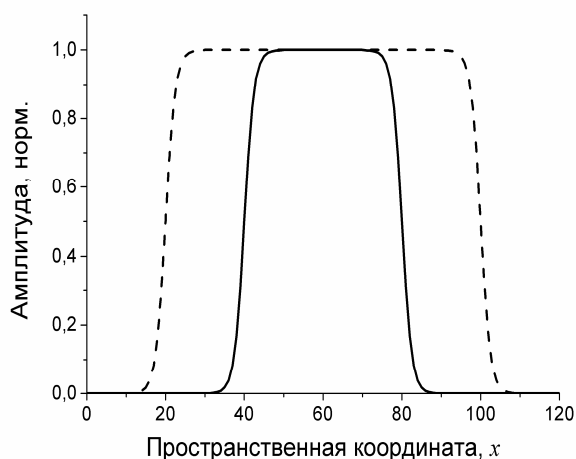


Рис.3.1. Пример одинаковых фигур, отличающихся в сечении только размером [2]

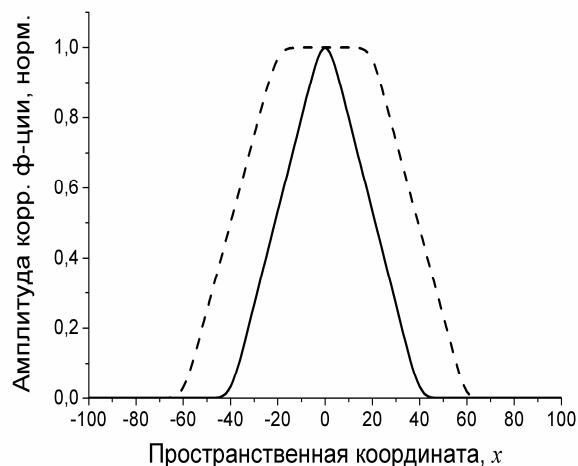


Рис.3.2. Функции автокорреляции I (сплошная линия) и кросскорреляции I и E (штрихи) [2]

Пример на рис.3.1 можно рассматривать как сечения букв I (сплошная линия) и E (штриховая линия) по оси  $x$ .

Если поставлена задача распознать букву I, то буква E будет помехой. На рис.3.2 приведены сечения по оси  $x$  АКФ буквы I и кросс-корреляции букв I и E, т.е. сигнала и помехи. Энергия кросс-корреляционного отклика (площадь под кривой) больше для помехи, поэтому будет принято ошибочное решение – буква E будет распознана как буква I.

Теперь дифференцируем исходные функции – в нашем примере буквы E и I. Производные по оси  $x$  будут иметь вид, показанный на рис. 3.3, а их (производных) авто- и кросс-корреляционные функции даны на рис.3.4.

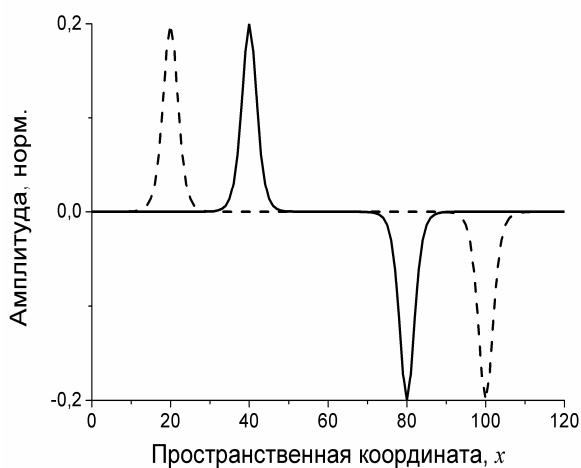


Рис.3.3. Производные функций, представленных на Рис.3.1 [2]

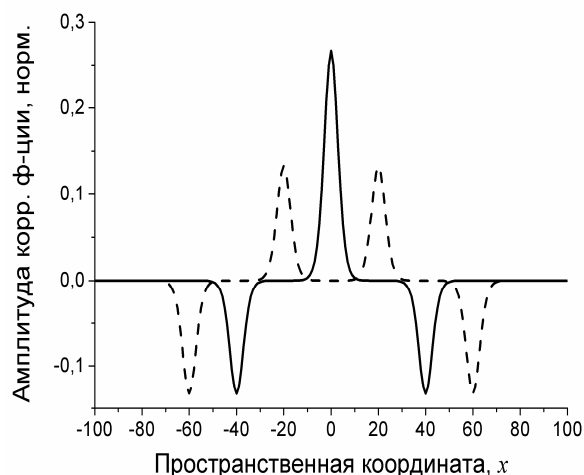


Рис.3.4. Функции авто- (сплошная) и кросс-корреляции (штрихи) дифференцированных образов [2]

Как видно из рис.3.4, при работе не с самими изображениями, а с их производными распознавание произойдет правильно, так как глобальный максимум АКФ по амплитуде в два раза превосходит боковые максимумы функции кросс-корреляции (пунктир). Квадратичный приемник измеряет мощность и отношение сигнал-помеха 4:1, как это показано на рис.3.5.

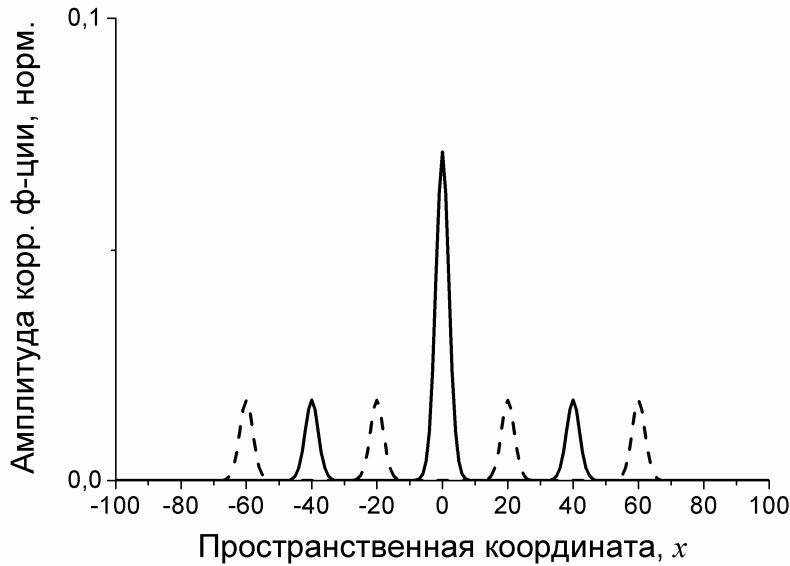


Рис.3.5. Функции автокорреляции (сплошная линия) и взаимной корреляции (штриховая) при измерении квадратичным приемником [2]

Второй способ оптического дифференцирования основан на фильтрующем свойстве  $\delta$ -функции и её производных [1,2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \delta^{(n)}(x - \xi) d\xi = (-1)^n E^{(n)}(x), \quad (3.4)$$

где  $\delta^{(n)}(x - \xi)$  –  $n$ -ая производная  $\delta$ -функции. Отсюда получим:

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = (-1)^n E(x) * \delta^{(n)}(x). \quad (3.5)$$

Выражения (3.3) и (3.5) применимы и к функциям двух переменных: частная производная порядка  $n+m$  будет описываться выражением:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) (-1)^{n+m} \delta^{(n)}(x - \xi) \delta^{(m)}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (3.6)$$

Следовательно, для реализации оператора дифференцирования первого порядка по одной координате  $\frac{\partial}{\partial x} E(x, y)$  необходима весовая функция  $-\delta'(x)\delta(y)$ , а по двум координатам  $\frac{\partial}{\partial x \partial y} E(x, y) - \delta'(x)\delta'(y)$ . [1,2]

### 3.2. Оператор Лапласа

Оператора Лапласа (лапласиан) определяется следующим образом [1,2]:

$$\Delta E(x, y) = \nabla^2 E(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y)$$

Из (3.5) следует, что для его реализации необходима весовая функция

$$\delta''(x)\delta(y) + \delta(x)\delta''(y). \quad (3.7)$$

Возможна реализация оператора Лапласа также и посредством преобразования Фурье – из (3.2) следует, что для этого необходимо фурье-образ функции  $E(x)$  умножить на функцию

$$-(\omega_x^2 + \omega_y^2), \quad (3.8)$$

описывающую амплитудный фильтр в частотной плоскости.

### 3.3. Восстановление качества изображений методом десвертки

Дифференцирование изображений – частный случай инверсной фильтрации. Одно из её практических применений – восстановление качества изображений методом десвертки. [1,2]

Пусть имеется некоторая система, преобразующая функцию на входе  $In(x)$  в функцию на выходе  $Out(\zeta)$ . Если это преобразование может быть представлено в виде (для простоты используем дискретное представление)

$$In(x) = \sum_n in_n(x); Out(\zeta) = \sum_n H_n in_n(x),$$

где  $H_n$  – скаляры, то такая система называется линейной. Приведенное выше выражение очевидным образом соотносится с преобразованием Фурье (1.1), здесь  $in_n(x)$  –  $n$ -я гармоника, а совокупность коэффициентов  $H_n$  образует в пространстве Фурье передаточную функцию системы

$$H(v) = \frac{F(Out(\zeta))}{F(In(x))}.$$

Тогда на выходе системы имеем

$$Out(\zeta) = F(F(In(x)) \cdot H(v)) = In(\zeta) * h(\zeta), \quad (3.9)$$

где  $h(\zeta) = F(H(v))$  – импульсный отклик системы, т.е. её отклик на дельта-функцию на входе, в оптике это функция рассеяния точки, а передаточная функция в оптике – частотно-контрастная характеристика.

Если наша система – изображающая, например, объектив, то её импульсный отклик описывает размытие точки – потерю разрешения формируемого изображения  $Out(\zeta)$  относительно разрешения объекта  $In(x)$ . Для того, чтобы из размытого изображения  $Out(\zeta)$  получить изображение с исходным разрешением, как у  $In(x)$ , надо к  $Out(\zeta)$  применить операцию, обратную свертке (3.9), она называется десверткой. Но как её реализовать?

Тут на помощь снова приходит концепция операционного исчисления – надо реализовать не абстрактную операцию десвертки, а перенести задачу в пространство Фурье, в котором и умножить фурье-образ полученного размытого изображения  $Out(\zeta)$  на функцию, обратную передаточной:

$$F(In(x)) = \frac{F(Out(\zeta))}{H(v)}.$$



Но в оптике мы умеем умножать – эта операция описывает модуляцию света функцией пропускания транспаранта по определению пропускания (или отражения для зеркала). А делить не умеем.

Для решения этой проблемы есть, как минимум, два пути:

1. Сэндвич-фильтр – фильтр, составленный из двух компонент: согласованного фильтра – голограммы Фурье точечного источника, и амплитудного фильтра – негативной регистрирующей среды, на которой записан спектр мощности, его пропускание

$$\tau(\nu) = \frac{1}{F(\delta(x-x_0)) \cdot F^*(\delta(x-x_0))},$$

а пропускание всего сэндвич-фильтра

$$H^{Inv}(\nu) = \frac{F^*(\delta(x-x_0))}{F(\delta(x-x_0)) \cdot F^*(\delta(x-x_0))} = \frac{1}{F(\delta(x-x_0))}. \quad (3.10)$$

2. Второй вариант – использование инверсного участка экспозиционной характеристики голографической регистрирующей среды – в этом случае также получаем необходимый инверсный фильтр.

Таким образом, задача десвертки решается в спектральном пространстве посредством инверсной фильтрации. Но за всё надо платить, плата за выигрыш в разрешении – потери энергии при инверсной фильтрации. [1,2]

### 3.4. Интегрирование функций

Интегрирование функции может рассматриваться как вычисление её фурье-образа в точке  $\nu = 0$ . [1,2]

Другой подход к интегрированию функций возможен через её свертку с функцией, тождественно равной единице [1,2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx = E(x) * 1(x). \quad (3.11)$$

### 3.5. Вычисление моментов [1,2]

Моменты функции  $n$ -го порядка определяются следующим образом:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n E(x) dx. \quad (3.12)$$

Их вычисление возможно посредством операций преобразования Фурье и дифференцирования. Представим экспоненциальное ядро в выражении для фурье-образа функции  $E(x)$  степенным рядом:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \left[ 1 - j\omega x + \frac{(-j\omega x)^2}{2!} + \frac{(-j\omega x)^3}{3!} + \dots \right] dx. \quad (3.13)$$

Соотнеся (3.13) с определением момента (3.12), видим их связь:

$$F(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (-j\omega)^n.$$

Отсюда получим интересующее нас выражение для вычисления моментов:

$$m_n = (-j)^n \frac{dn}{d\omega^n} F(0). \quad (3.14)$$

Таким образом,  $n$ -кратное дифференцирование фурье-образа анализируемой функции в точке  $\nu = 0$  дает её моменты  $n$ -го порядка. [1,2]

### 3.6. Преобразование Френеля [1,2]

Преобразование Френеля определяется следующим образом:

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j(2\pi\nu + x)^2) dx. \quad (3.15)$$

Введем новую переменную  $\mu = 2\nu$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j2\pi\mu x) \exp(-j2\pi\nu^2) \exp(-jx^2) dx = \\ &= \exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) \exp(-jx^2)] \exp(-j2\pi\mu x) dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) видим, что для преобразования Френеля функции  $E(x)$  её необходимо умножить на  $\exp(-jx^2)$ , затем выполнить преобразование Фурье и полученный фурье-образ  $F(\mu)$  умножить на

$$\exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right).$$

Другой метод реализации преобразования Френеля основан на использовании теоремы Бореля о свертке и табличном значении:

$$F\left(\exp(-jx^2)\right) = j\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{j(2\pi\nu)^2}{4}\right). \quad (3.17)$$

Отсюда получим выражение для преобразования Френеля через свертку фурье-образа с экспоненциальной функцией:

$$\Phi(\nu) = j\sqrt{\pi} \exp\left[j\left((2\pi\nu)^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right] F(2\nu) * \exp(j\nu^2). \quad (3.18)$$

### 3.7. Преобразование Меллина [1,2]

Двумерное преобразование Меллина функции  $E(x, y)$  по определению:

$$M(p, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(x, y) x^{p-1} y^{s-1} dx dy; \quad p = \sigma_p + j\mu, \quad s = \sigma_s + j\nu.$$

В оптической обработке информации используется его частный случай:

$$M(j\mu, j\nu) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(x, y) x^{-j\mu-1} y^{-j\nu-1} dx dy. \quad (3.19)$$

Преобразование Меллина представляет интерес в силу того, что его модуль, в отличие от преобразования Фурье, инвариантен к изменению масштаба. Действительно, если имеются две функции:  $E(x, y)$  и  $E(ax, by)$ , где  $a$  – масштаб по оси  $x$ , то из определения (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} M(E(ax, by)) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(ax, by) x^{-j\mu-1} y^{-j\nu-1} dx dy \Bigg|_{\substack{\zeta=ax \\ \eta=by}} = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(\zeta, \eta) \frac{\zeta^{-j\mu-1} \eta^{-j\nu-1}}{a^{-j\mu-1} b^{-j\nu-1}} d\frac{\zeta}{a} d\frac{\eta}{b} = \\ &= a^{j\mu} b^{j\nu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(\zeta, \eta) \zeta^{-j\mu-1} \eta^{-j\nu-1} d\zeta d\eta = a^{j\mu} b^{j\nu} M(E(\zeta, \eta)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из (3.19) видно, что преобразование Меллина функции  $E(x, y)$  может быть представлено как преобразование Фурье функции  $E(\exp(\zeta), \exp(\eta))$ :

$$M(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\exp(\zeta), \exp(\eta)) \exp(-j2\pi(\zeta\mu + \eta\nu)) d\zeta d\eta. \quad (3.21)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Меллина функции  $E(x, y)$ , необходимо выполнить логарифмическое преобразование её координат  $\zeta = \ln x$ ,  $\eta = \ln y$ , а затем преобразование Фурье. Логарифмическое преобразование координат легко выполнить в телевизионном (тепловизионном) тракте ввода, поскольку в элементы изображения вводятся последовательно (развертка изображения). [1,2]

### 3.8. Преобразование Радона [1, 2]

Преобразование Радона используется в томографии для получения информации о строении трехмерного объекта по совокупности его проекций. Преобразование Радона ставит в соответствие функции  $E(r, \varphi)$ , заданной в полярных координатах, функцию  $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$ , при этом значение  $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$  в точке  $(l, \Theta)$  обозначается  $[\mathfrak{R}_E](l, \Theta)$ . Радоновский образ функции  $E(r, \varphi)$  определяется следующим образом:

$$[\mathfrak{R}_E](l, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\sqrt{l^2 + z^2}, \Theta + \arctg\left(\frac{z}{l}\right)\right] dz. \quad (3.22)$$

При  $l = 0$  радоновский образ имеет вид

$$[\mathfrak{R}_E](0, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[z, \Theta + \frac{\pi}{2}\right] dz. \quad (3.23)$$

Радоновский образ представляет собой интеграл от функции  $E(r, \varphi)$  вдоль некоторой прямой  $L$ , расположенной на расстоянии  $l$  от начала

координат и образующей угол  $\Theta$  с положительным направлением оси  $u$ . Для того, чтобы связать преобразования Радона и Фурье, используем теорему о проекциях, непосредственно следующую из их определений.

Введем двумерное преобразование Фурье в полярных координатах:

$$[F_{EP}](R, \Phi) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r| E(r, \varphi) \exp[-2\pi jrR \cos(\Phi - \varphi)] dr d\varphi. \quad (3.24)$$

Введем одномерное преобразование Фурье функции двух переменных вдоль линии  $L$ , которое обозначим  $F_{EL}$ . Можно видеть, что имеет силу

$$F_P = F_L \mathfrak{R}. \quad (3.25)$$

Отсюда видим, что для выполнения преобразования Радона достаточно выполнить двумерное и одномерное преобразования Фурье. [1,2]

### 3.9. Вычитание изображений [1, 2]

Как мы уже знаем, при записи голограммы Фурье изображения  $E_1(x)$  с опорной волной, формируемой внеосевым точечным источником в передней фокальной плоскости фурье-преобразующей линзы в точке  $x_0$ , в предположении линейного оператора голографической регистрирующей среды, голограмма описывается выражением

$$\begin{aligned} H_1(v) &= [\exp(j2\pi vx_0) + F_1(v)] [\exp(j2\pi vx_0) + F_1(v)]^* = \\ &= 1 + F_1(v) F_1^*(v) + F_1(v) \exp(-j2\pi vx_0) + F_1^*(v) \exp(j2\pi vx_0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Запишем вторую голограмму Фурье  $H_2(v)$  с опорной волной, имеющей сдвиг фазы  $i\pi$  по сравнению с опорной волной первой голограммы:

$$\begin{aligned} H_2(v) &= [\exp(j2\pi vx_0 + i\pi) + F_2(v)] [\exp(j2\pi vx_0 + i\pi) + F_2(v)]^* = \\ &= 1 + F_2(v) F_2^*(v) + F_2(v) \exp(-j(2\pi vx_0 - i\pi)) + F_2^*(v) \exp(j(2\pi vx_0 + i\pi)) = \\ &= 1 + F_2(v) F_2^*(v) - F_2(v) \exp(-j2\pi vx_0) - F_2^*(v) \exp(j2\pi vx_0) \end{aligned}$$

Сложим эти голограммы, например, методом наложенных, т.е. последовательно записанных на одном участке регистрирующей среды:

$$\begin{aligned} H_1(v) + H_2(v) &= 2 + |F_1(v)|^2 + |F_2(v)|^2 + \\ &+ (F_1(v) - F_2(v)) \exp(-j2\pi vx_0) + (F_1^*(v) - F_2^*(v)) \exp(j2\pi vx_0). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Осветим мультиплексную голограмму (3.27) плоской волной и выполним преобразование Фурье поля сразу за голограммой:

$$\begin{aligned} F(H_1(v) + H_2(v)) &= 2\delta(x) + F(F_1(v) F_1^*(v)) + F(F_2(v) F_2^*(v)) + \\ &+ (E_1(x) - E_2(x)) * \delta(x - x_0) + (E_1^*(x) - E_2^*(x)) * \delta(x + x_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в (3.28) описывает дифракционно-ограниченное изображение точечного источника, его координата  $x=0$  (в предположении, что восстанавливающий голограмму пучок формируется точечным источником, расположенным на главной оптической оси). Второй и третий члены – автокорреляционные функции полей  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ , а четвертое и пятое – интересующие нас результаты вычитания функций  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ , смещённые симметрично относительно главной оптической оси на  $x_0$ . [1,2]

### Вопросы для самоконтроля освоения темы №3

1. Какие математические преобразования над полями комплексно-значимых амплитуд могут быть физически реализованы в оптике посредством преобразования Фурье?
2. Какую пользу и в каких ситуациях может принести пользу дифференцирование изображений при распознавании образов?
3. Где в голографической схеме вводится пространственно-частотный фильтр, реализующий дифференцирование изображения?
4. Что такое инверсный фильтр?
5. Какими методами можно реализовать инверсный фильтр?
6. Что такое передаточная функция линейной системы? В каком пространстве она определяется и как может быть измерена?
7. Как передаточная функция системы связана с импульсным откликом?
8. Какое преобразование обладает инвариантностью к масштабу?
9. При реализации преобразования Меллина через преобразование Фурье сохраняется ли присущая второму инвариантность к сдвигу?
10. Чем различаются опорные пучки наложенных голограмм при реализации голографического метода вычитания изображений?
11. Где локализуются поля, описываемые результатом вычитания эталона одной из наложенных голограмм из эталона другой?

### Литература к теме 3

1. *Г.И.Василенко, Л.М.Цибулькин*, Голографические распознающие устройства, М.: Радио и связь, 1985. – 312с.
2. *Павлов А.В.* Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
3. Application of Optical Fourier Transforms. Ed. by H. Stark. Acad. Press, London, 1982.
4. *I. S. Sullivan, M. F. Morales, B. J. Hazelton, et.al.* Fast Holographic Deconvolution: a New Technique for Precision Radio Interferometry // The Astrophysical Journal, **759**(1), 17 (2012). DOI: 10.1088/0004-637X/759/1/17

## Тема 4. Отношение сигнал/помеха при корреляционном распознавании образов

В первой лекции мы рассмотрели  $4f$  схему голографии Фурье (рис.4.1) и увидели, что в  $+1$ -м порядке дифракции она формирует поле комплексно-значимых амплитуд, описываемое функцией корреляции двух образов: эталонного, записанного на голограмме Фурье, и объектного, предъявляемого во входной плоскости схемы с записанной голограммой (рис.4.1). В рамках настоящего рассмотрения термины «изображение» и «образ» суть синонимы, обозначающие ограниченную апертурой реализацию (фрагмент) поля комплексно-значимых амплитуд.

В  $+1$ -м порядке дифракции голограмма Фурье реализует модель согласованного фильтра и называется голографическим согласованным фильтром (ГСФ), а схема – голографическим коррелятором Ван дер Люгта (ГК ВдЛ). Также в первой лекции мы увидели возможность применения ГК ВдЛ в задаче распознавания образов. Решение о распознавании принимается по критерию превышения величиной отношения сигнал/помеха в корреляционной плоскости заданного порога. В этом разделе рассмотрим факторы, влияющие на это отношение – характеристики оптической схемы и обрабатываемых ей образов [2-4].

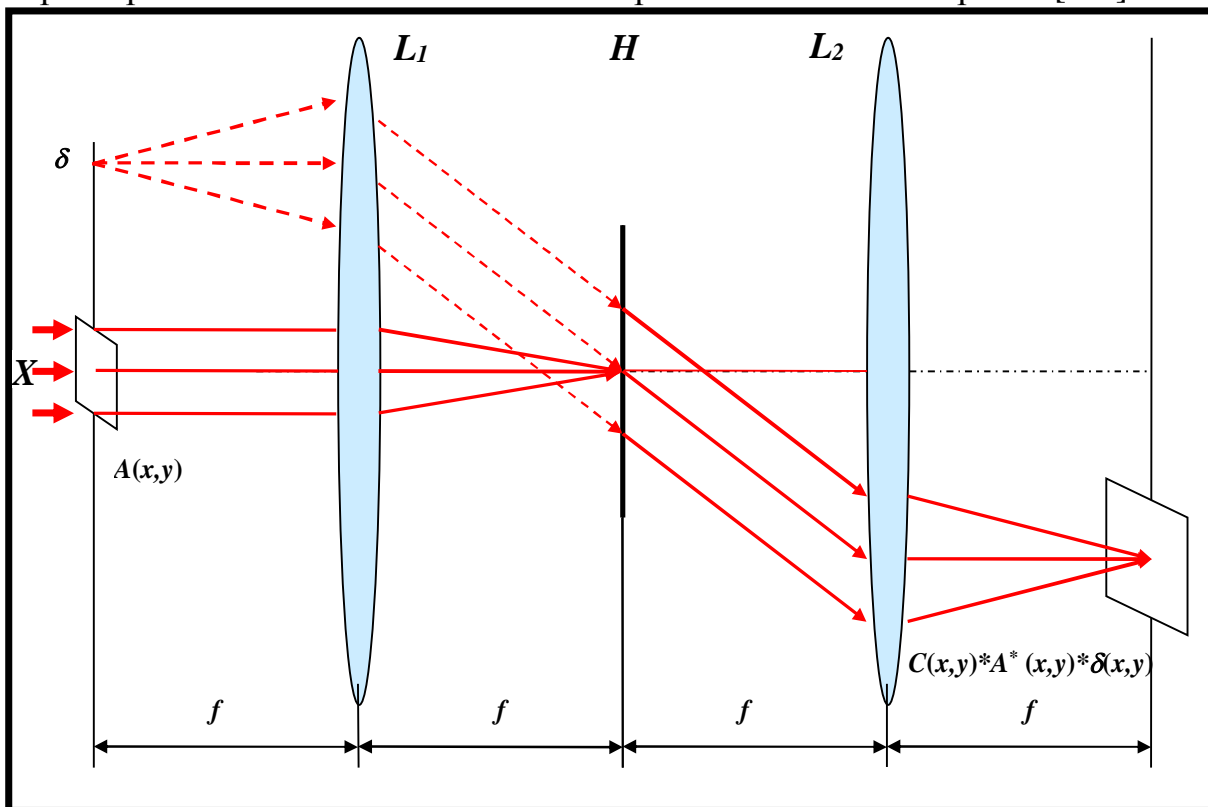


Рис.4.1.  $4f$  схема голографии Фурье – коррелятор Ван дер Люгта

На рис.4.2 красной линией показан пример автокорреляционной функции (АКФ), тут хорошо заметен глобальный максимум (ГМ) АКФ, который и служит сигналом распознавания. На научном жаргоне его часто

называют корреляционным пиком. Синим пунктиром дана АКФ кадрового окна – прямоугольной апертуры, описываемой функцией  $\text{Rect}(x)$ . [4]

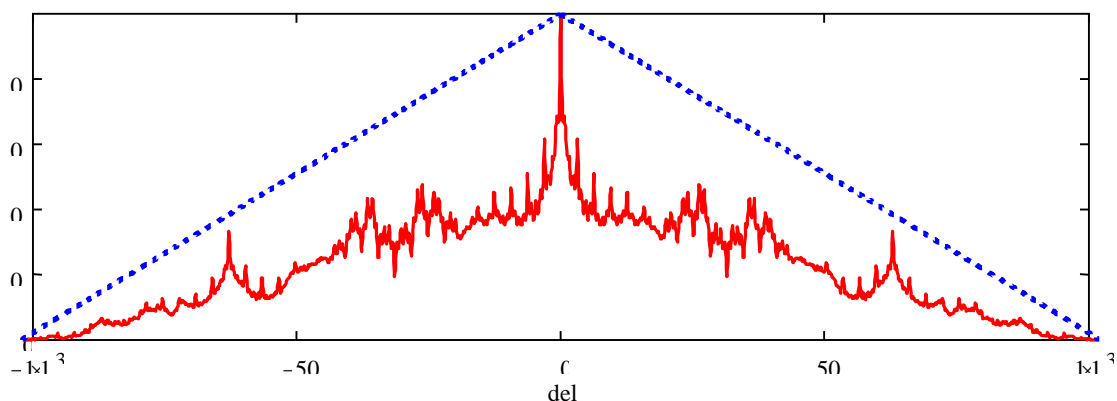


Рис.4.2. Автокорреляционные функции ограниченного апертурой сигнала со сложным спектральным составом (красная сплошная кривая) и прямоугольного импульса  $\text{Rect}(x)$  (синий пунктир) [4]

На рис. 4.2 хорошо видно, что кроме ГМ в составе АКФ присутствуют также и боковые максимумы (БМ) АКФ [2]. Если эталонный и объектный образы не идентичны, то функцию их корреляции в первом, достаточно грубом приближении можно рассматривать как сумму АКФ идентичных частей и ВКФ отличающихся. ВКФ различающихся изображений не имеет ГМ – на рис.4.3 синим пунктиром приведен пример нормированной на её значение в начале координат  $\Delta=0$  ВКФ образа и его зеркальной, т.е. с инвертированными координатами, версии. [4] Видно, что БМ ВКФ по амплитуде превосходят её значение в точке  $\Delta=0$ . Спад ВКФ, как и АКФ, к краям обусловлен ограниченностью апертуры, вырезающей из поля ограниченную реализацию, и непосредственно следует из введенного в первой теме определения функции корреляции (1.12)

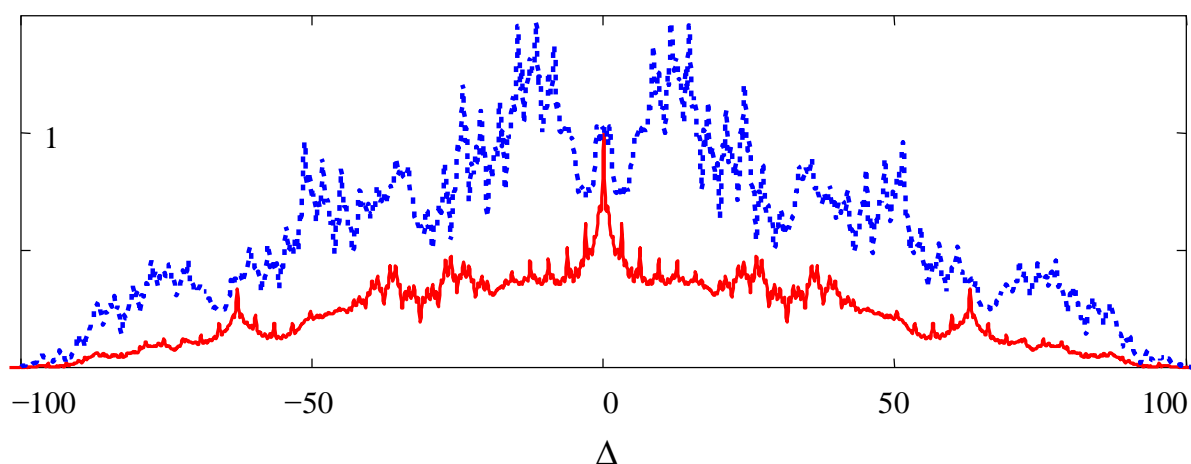


Рис.4.3. АКФ (красная сплошная линия) и ВКФ (синий пунктир) [4]

Эти БМ АКФ и/или БМ ВКФ и играют роль помехи при распознавании. Все измерения проводятся квадратичным приемником, поэтому отношение сигнал/помеха оценим как отношение интенсивностей ГМ и БМ. [4]

Важное замечание. Иногда в литературе боковые максимумы АКФ и ВКФ называются шумом. Но, как мы увидим далее, при рассмотрении голографической реализации модели линейной регрессии (тема 5), БМ АКФ и ВКФ несут в себе информацию об изображениях, на которой и построена модель регрессии. Поэтому называть их шумом некорректно.

Примем для описания обрабатываемых схемой образов модель изотропного случайного поля с функцией ковариации (раздел 1.2.2)

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \rho(r), \quad (4.1)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия поля,  $\rho(r) = \frac{R(\Delta_x, \Delta_y)}{\sigma^2}$  – нормированная функция ковариации поля,  $r$  – радиус корреляции. Поле  $E(x, y)$  примем статистически однородным в широком смысле, т.е. с возможностью нормировки первого (математическое ожидание) и второго (дисперсия, ковариация) случайных моментов [2-4]:

$$R_{1,2}(\Delta_x) = \langle (E_1(x + \Delta_x) - \langle E_1 \rangle)(E_2(x) - \langle E_2 \rangle) \rangle, \quad (4.1.a)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. Корреляция как второй начальный момент связана с ковариацией:

$$K_{1,2}(\Delta_x) = \langle E_1(x + \Delta_x) E_2(x) \rangle = R_{1,2}(\Delta_x) + \langle E_1 \rangle \langle E_2 \rangle. \quad (4.1.b)$$

Коэффициент корреляции по определению  $\rho_{1,2} \triangleq \frac{K_{1,2}(\Delta_x, \Delta_y)}{K_{1,2}(0,0)}$ .

**NB!** Ещё раз напомним, что эти определения заимствованы из теории случайных процессов, т.е. предполагают усреднение по ансамблю.

Образ определим как часть поля  $E(x, y)$ , ограниченную апертурой  $c(x, y)$ , эталонное изображение, записанное на голограмме Фурье, обозначим нижним индексом  $R$ .

Отклик схемы с записанной голограммой в +1-м порядке дифракции на объектный образ  $c(x, y)E(x, y)$ , предьявляемый во входной плоскости,

$$C(\Delta_x, \Delta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) E_R^*(x, y) dx dy. \quad (4.2)$$

Средняя величина отношения сигнал/помеха по энергии

$$V_0 = \frac{\langle C(0,0) \rangle^2}{\mu^2}, \quad (4.3)$$



где  $\langle K(0,0) \rangle^2$  – среднее по ансамблю значение интенсивности (мощности) ГМ АКФ, а  $\mu^2$  – средний квадрат помехи – средняя интенсивность БМ ВКФ. Помеху определим как среднюю интенсивность кросс-корреляции эталонного фрагмента поля  $E_R(x,y)$  и его дополнения до полного поля  $\bar{E}_R(x,y)$ , которое будем обозначать чертой сверху. [2-4]

Математическое ожидание ВКФ (4.2) по ансамблю реализаций [2-4]:

$$\begin{aligned} \langle C(\Delta_x, \Delta_y) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \langle E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) E_R^*(x, y) \rangle dx dy = \\ &= K(\Delta_x, \Delta_y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = S_R K(\Delta_x, \Delta_y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $S_R$  – площадь эталонного изображения в предположении, что функция апертуры равномерна, т.е.

$$c(x, y) = \text{Rect}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \\ 0 & \text{при } |x| > L_x, |y| > L_y \end{cases}$$

Таким образом, сигнальная функция в корреляционной плоскости в среднем повторяет АКФ поля  $K(\Delta_x, \Delta_y)$ , математическое ожидание её максимального значения равно энергии опознаваемого образа  $W$  [2-4]:

$$\langle C(0,0) \rangle = K(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = (\sigma^2 + \langle E_R \rangle \langle E \rangle) S_R = W. \quad (4.5)$$

Опознаваемый образ – это фрагмент эталонного, наличествующий в объектом. Математическое ожидание мощности БМ, т.е. помехи [2-4]:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) \overline{E}_R(x_1 + \Delta_x, y_1 + \Delta_y) E_R(x_1, y_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{E}_R(x_2 + \Delta_x, y_2 + \Delta_y) E_R(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) K^2(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\Delta_x, \Delta_y) K_c(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $K_c(\Delta_x, \Delta_y)$  – АКФ апертуры, показанная на рис.4.2 синим пунктиром. Выше мы использовали свойство независимых случайных функций [4,5]:

$$\begin{aligned} \langle E_R(x + \Delta_x) \overline{E}_R(x + \Delta_x) E_R(x) \overline{E}_R(x) \rangle &= \\ = \langle E_R(x + \Delta_x) E_R(x) \rangle \langle \overline{E}_R(x + \Delta_x) \overline{E}_R(x) \rangle &= K_1(\Delta_x) K_2(\Delta_x), \\ \langle E(x_1) E(x_2) \rangle &= K(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Если в линейном размере (длине) эталонного образа укладывается достаточно много длин (радиусов) корреляции поля  $r$ , то АКФ кадрового

окна  $K_C(\Delta_x, \Delta_y)$  в пределах радиуса корреляции поля  $r$  (радиуса ГМ АКФ) можно принять постоянным (см. рис.4.2) и (4.6) упростить:

$$\begin{aligned} \mu^2 &\approx K_c(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_R^2(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(x, y) dx dy \int_0^{\infty} r K^2(r) dr = \\ &= 2\pi S_R \sigma^4 \int_0^{\infty} r \rho^2(r) dr = 2\pi k S_R \sigma^4 r^2 = 2kW^2 \frac{S_k}{S_R}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $S_R$  – площадь апертуры (эталонного образа),  $S_k = \pi r^2$  – площадь корреляции,  $k$  – коэффициент, определяемый моделью АКФ поля. [2-4]

Из (4.7) видно, что средняя мощность помехи прямо пропорциональна энергии эталонного образа и обратно пропорциональна отношению его линейного размера к радиусу корреляции поля  $r$ .

Тогда из (4.5) и (4.7) получим оценку отношения сигнал/помеха по интенсивности [2-4]:

$$V_0 \approx \frac{1}{2k} \frac{S_R}{S_k}. \quad (4.8)$$

Из (4.8) видим, что отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений прямо пропорционально числу зон корреляции поля (площадей ГМ АКФ  $\pi r^2$ ), покрывающих площадь апертуры или эталонного изображения, если апертура на этапе предъявления объектного изображения больше размера эталона. Отсюда следует практически значимый вывод, что отношение сигнал/помеха может быть увеличено как увеличением размера эталона, так и уменьшением радиуса корреляции поля, последнее достигается высокочастотной фильтрацией на голограмме.

### 1. Строчный коррелятор.

Если коррелятор работает с функциями только одного аргумента и имеет равномерную апертуру:

$$c(x) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L}\right), \quad (4.9)$$

где  $L$  – её длина, то АКФ апертуры имеет треугольную форму (рис.4.2):

$$R_c(\Delta_x) = 2L\Lambda\left(\frac{\Delta_x}{2L}\right), \quad (4.10)$$

где  $\Lambda$  – треугольная функция.

Максимальное значение ГМ АКФ

$$\langle K(0) \rangle = 2L\sigma^2 = W, \quad (4.11)$$

а математическое ожидание интенсивности помехи

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x) R_c(\Delta_x) d\Delta_x = 4L \int_0^{\infty} R^2(\Delta_x) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L}\right) d\Delta_x. \quad (4.12)$$

Если процесс характеризуется экспоненциальной АКФ

$$R(\Delta_x) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\Delta_x}{r}\right), \quad (4.13)$$

то математическое ожидание мощности помехи

$$\mu^2 = 2L\sigma^4 r \left(1 - \frac{r}{4L}\right) = \frac{W^2 r}{2L} \left(1 - \frac{r}{4L}\right), \quad (4.14)$$

и отношение сигнал/помеха

$$V_0 = 2\frac{L}{r} \left(1 - \frac{r}{4L}\right)^{-1}. \quad (4.15)$$

При достаточно большом числе радиусов корреляции  $r$  в длине эталона  $L$  отношение сигнал/помеха будет ему пропорционально  $V_0 \propto \frac{L}{r}$ . [2-4]

## 2. Площадной коррелятор, прямоугольная апертура размером $2L_x \times 2L_y$ .

Прямоугольная апертура описывается функцией с разделяющимися переменными:

$$c(x, y) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L_x}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{2L_y}\right). \quad (4.16)$$

Максимальное значение мощности ГМ АКФ:

$$\langle K(0,0) \rangle = 4L_x L_y \sigma^2 = W, \quad (4.17)$$

а математическое ожидание мощности помехи:

$$\mu^2 = 16L_x L_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left(1 - \frac{\Delta_y}{2L_y}\right) d\Delta_x d\Delta_y. \quad (4.18)$$

При экспоненциальной АКФ поля

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}{r}\right),$$

воспользуемся табличными значениями, приведенными в [2], и получим:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[ \int_{\Delta_x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 - \Delta_x}} \exp\left(-\frac{2y}{r}\right) dy - \int_{\frac{2\Delta_x}{r}}^{\infty} y \exp(-y) dy \right] d\Delta_x = \\ &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[ \Delta_x K_1\left(\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r^2}{8L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r\Delta_x}{4L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) \right] d\Delta_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16L_x L_y \sigma^4 \left[ \frac{r}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{r^3}{8L_y} \Gamma(2) \Gamma(1) - \frac{r^2}{8L_x} + \frac{3r^4}{64L_x L_y} \right] = \\
&= 2\pi L_x L_y \sigma^4 r^2 \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right] = W^2 \frac{S_K}{S_R} \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right],
\end{aligned}$$

где  $K_1(x)$  – цилиндрическая функция мнимого аргумента,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Отсюда получим выражение для отношения сигнал/помеха:

$$V_0 = 2 \frac{S_R}{S_K} \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right]^{-1}. \quad (4.19)$$

Здесь мы снова видим, что отношение сигнал/помеха пропорционально числу зон корреляции, укладываемых в эталонном изображении, но уже не по длине  $\frac{L}{r}$ , как в случае строчного коррелятора, а по площади  $\frac{S_R}{S_c}$ .

Аналогичные результаты были получены в [2] и для других форм кадрового окна (круглого) и других функций автокорреляции поля – величины отношения сигнал/помеха во всех случаях пропорциональны числу зон корреляции в эталонном изображении, различаясь лишь коэффициентами. Для иллюстрации на рисунке 4.4 приведены в логарифмических координатах зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов. Пунктиром показаны прямо пропорциональные зависимости, к которым стремится отношение при увеличении числа радиусов корреляции в размере изображения. [2-4]

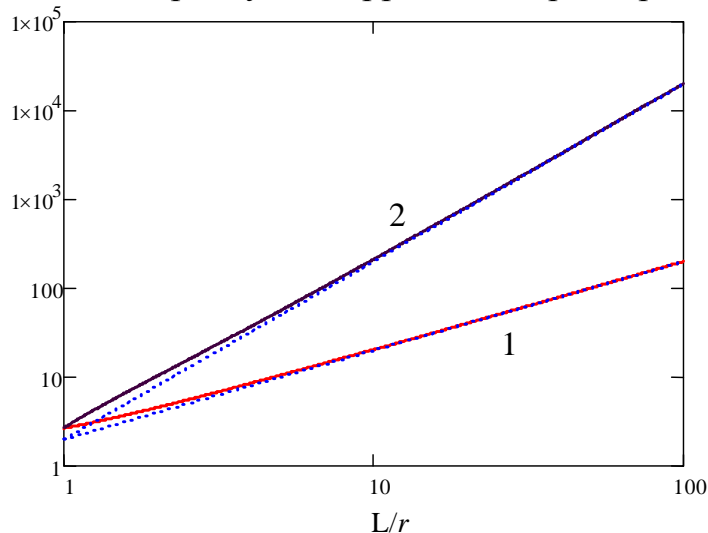


Рис.4.4. Зависимости величины сигнал/помеха от отношения линейного размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов [2]

Как видно из (4.20), отношение сигнал/помеха в корреляционной плоскости должно увеличиваться с уменьшением радиуса корреляции.

Последнее может быть получено введением высокочастотной фильтрации (ВЧФ) в спектральной плоскости – плоскости голограммы. Для этого не обязательно применять отдельный ВЧ фильтр, но можно грамотно использовать фундаментальное свойство нелинейности (ограниченности) экспозиционных характеристик голографических регистрирующих сред (ЭХ ГРС).

Запись голограммы Фурье условно может быть разбита на два этапа:

1 – формирование картины интерференции сигнального и опорного пучков;

2 – регистрация этой интерференционной картины на ГРС.

Первый этап иллюстрирует рис.4.5 – на верхнем графике показаны сечения в фурье-плоскости сигнального (аппроксимированный функцией Гаусса модуль спектра  $S_R(\nu)$ ,) – синяя кривая 1, и плоского опорного  $R(\nu) = \text{Const}$  – красная кривая 2, пучков, а на нижнем черной кривой 3 условная картина интерференции (по интенсивности) этих пучков и красными штрихами 4 – зависимость её видности от координаты (пространственной частоты) в плоскости голограммы Фурье.

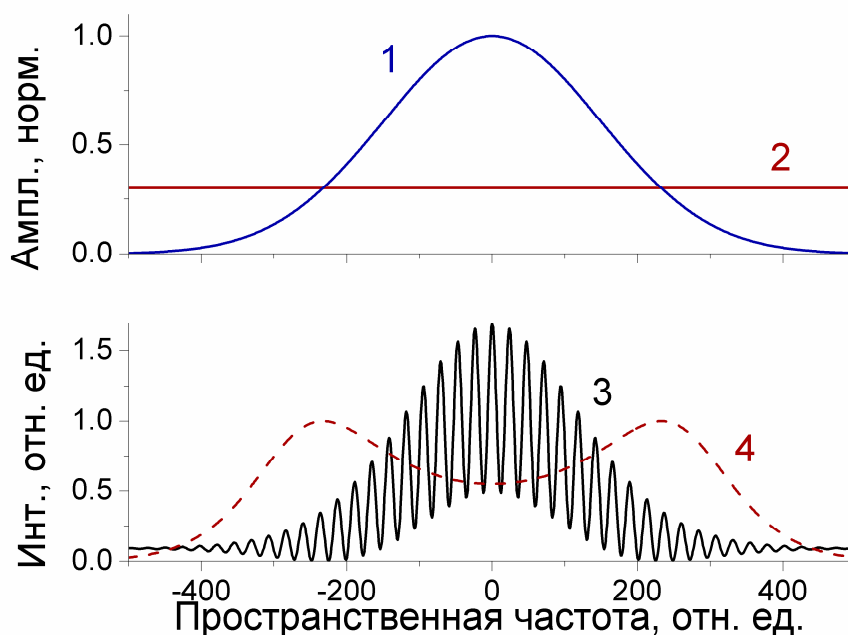


Рис.4.5. Пример пространственного распределения амплитуд сигнального (синяя линия 1) и опорного (2) пучков при записи голограммы, внизу – интенсивности интерференционной картины (3) и её видности (4) [4]

Видность максимальна на частоте равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков. Второй этап – запись голограммы на негативной ГРС, иллюстрирует рис.4.6, на котором условно квазилинейный (рабочий) участок динамического диапазона ЭХ ГРС для наглядности аппроксимирован жирной прямой. В области более низких экспозиций имеем участок недоэкспозиции (низкой чувствительности ГРС), а более высоких – переэкспозиции или насыщения [4]

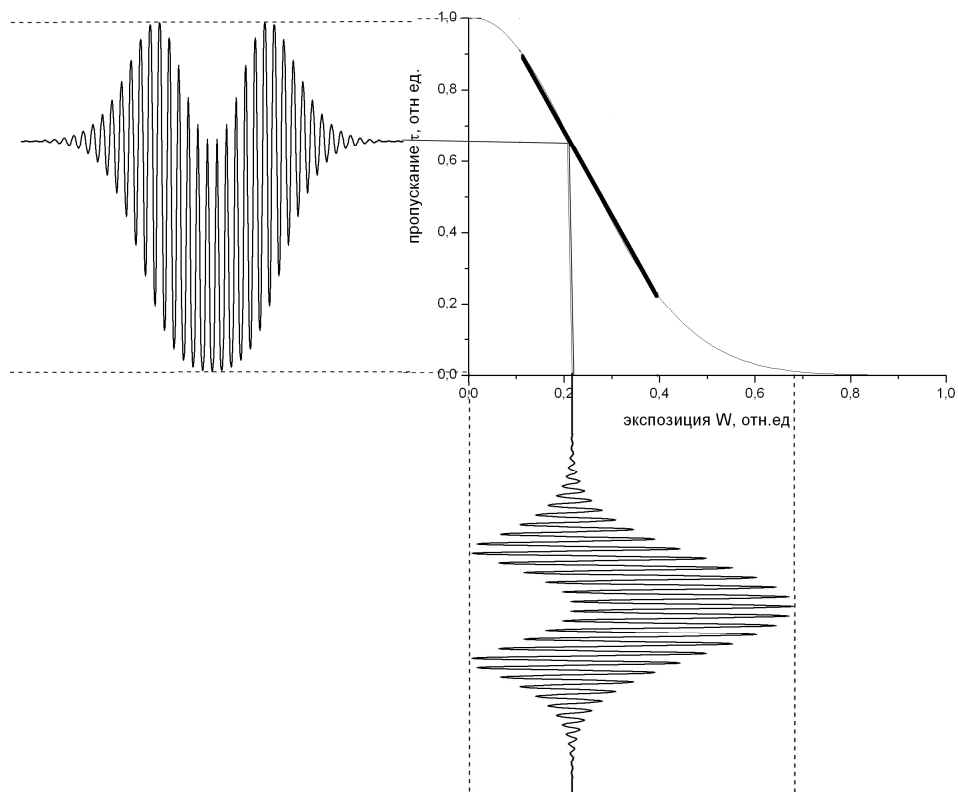


Рис.4.6. Формирование голограммы как дифракционной решетки в результате записи интерференционной картины рис.4.5 [4]

Подбор оптимальных условий экспозиции нацелен на попадание в рабочий участок ЭХ ГРС той части интерференционной картины, в которой зависимость её видности от частоты соответствует ходу спектра амплитуд эталонного изображения, т.е. в области частот, выше частоты равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков, которую обозначим  $\nu_0$ . Такой вариант и изображен на рис.4.6 – в нижней его части условно показана интерференционная картина, поступающая на вход ЭХ ГРС как её (ГРС) передаточной функции, а слева вверху – голограмма как дифракционная решетка. Можно видеть, что голограмма согласована со спектром амплитуд, т.е. выполняется определение согласованного фильтра

$$\eta(\nu_x, \nu_y) \propto S_R^*(\nu_x, \nu_y),$$

именно в ограниченной области частот выше частоты равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков при записи голограммы  $\nu_0$ . Эта область согласования ограничена снизу частотой  $\nu_0$  – в области частот, ниже  $\nu_0$  имеет место сначала постоянство, а затем и спад зависимости локальной дифракционной эффективности от частоты  $\eta(\nu)$  – это область уже не согласованной, а инверсной фильтрации. Для иллюстрации на рис.4.7 дана зависимость  $\eta(\nu)$  для варианта записи голограммы, представленного на рис.4.5 и 4.6.

Таким образом, выбор частоты равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков при записи голограммы  $\nu_0$  ведет к выбору фактического частотного диапазона голограммы – при  $\nu_0=0$  имеем низкочастотную голограмму, увеличение  $\nu_0$  влечет за собой рост высокочастотности голограммы. Иными словами, ограниченность, а более широко – нелинейность ЭХ ГРС, неизбежно ограничивающая частотный диапазон голограммы Фурье, при грамотном её использовании превращается в полезный инструмент управления радиусом корреляции и, следовательно, величиной отношения сигнал/помеха.

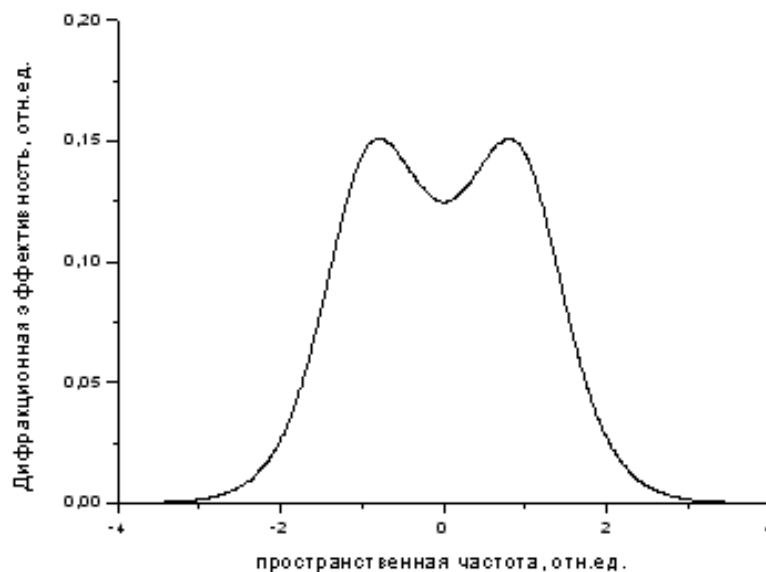


Рис.4.7. Зависимость локальной дифракционной эффективности от частоты в +1 порядке дифракции при записи голограммы рис.4.5 и 4.7 [4]

Выше мы рассмотрели идеальный случай распознавания – предъявление фрагментированной, но неискаженной версии эталона. В действительности объектный образ всегда отличен от эталонного, например, по масштабу, повороту или за счет другого угла зрения на него. Ниже кратко рассмотрим влияние на отношение сигнал/помеха этих декоррелирующих факторов – геометрических искажений объектного образа относительно эталонного, следуя [6-8]. Очевидно, что в рамках принятого допущения об описании всех образов реализациями однородного изотропного случайного поля декоррелирующие факторы на среднюю интенсивность помехи  $\mu^2$  не влияют, поэтому рассмотрим их влияние только на сигнал распознавания (4.4) – ГМ АКФ. Начнём с анализа самого простого фактора – изменения масштаба.

Для одной гармоники эталонного образа

$$g(x, y) = A(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp(j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)), \quad (4.20)$$

масштабирование  $m$  описывается

$$g(m_x x, m_y y) = A(v_x, v_y) \cdot \exp(j2\pi(m_x v_x x + m_y v_y y)), \quad (4.21)$$

и в корреляционной плоскости получаем отклик

$$K_{v_x, v_y}(\Delta_x, \Delta_y) \propto g(m_x x, m_y y) \otimes g(x, y) = \\ = |A(v_x, v_y)|^2 \exp(j2\pi(v_x \Delta_x + v_y \Delta_y)). \quad (4.22)$$

$$\cdot 2L_x \text{Sinc}(L_x 2\pi v_x \Delta_x (1 - m_x)) 2L_y \text{Sinc}(L_y 2\pi v_y \Delta_y (1 - m_y))$$

Для образа со сложным спектральным составом имеем

$$K(\Delta_x, \Delta_y) \propto \iint_{v_x, v_y} K_{v_x, v_y}(\Delta_x, \Delta_y) dv_x dv_y \propto \\ \propto 4L_x L_y \iint_{v_x, v_y} \text{Sinc}(L_x 2\pi v_x \Delta_x (1 - m_x)) \text{Sinc}(L_y 2\pi v_y \Delta_y (1 - m_y)) \cdot \\ \cdot |A(v_x, v_y)|^2 \exp(j2\pi(v_x \Delta_x + v_y \Delta_y)) dv_x dv_y \quad (4.23)$$

Из сравнения (4.23) и (4.22) видим, что если для гармонического образа его масштабирование, т.е. изменение его частоты, не меняет форму отклика – меняется (деградирует) только его амплитуда, то для образа со сложным спектральным составом масштабирование ведет к изменению как амплитуды, так и формы корреляционного отклика. Компонента подинтегрального выражения в (4.23)

$$\text{Sinc}(L_x 2\pi v_x \Delta_x (1 - m_x)) \text{Sinc}(L_y 2\pi v_y \Delta_y (1 - m_y)) \quad (4.24)$$

описывает низкочастотный фильтр, изменяющий форму корреляционного отклика – увеличивающий радиус корреляции  $r$ . [7]

Масштабирование относится к аффинным преобразованиям. В случае более сложных геометрических искажений, относящихся уже к классу проективных, результат (4.23) может быть использован при представлении искажений как локальных искажений масштаба, зависящих от координат [8]. Такой подход позволяет работать с любыми типами геометрических искажений при наличии их аналитического описания.

Для анализа влияния на корреляционный отклик поворота объектного образа относительно эталонного на угол  $\varphi$  представим его, как это предложено в [7], сдвигом в фурье-плоскости каждой гармоники  $v_x$  на величину  $v_x^\varphi \approx v_x \cdot \varphi$ , аналогично по координате  $y$ . Такая аппроксимация правомочна, поскольку анализ имеет смысл в диапазоне небольших углов поворота  $\varphi$ , в котором спектральные максимумы эталона и объектного образа перекрываются. Тогда для одной гармоники корреляционный отклик

$$K(\Delta_x, \Delta_y) \propto 4L_x L_y |A(v_x, v_y)|^2 \cdot \exp(j2\pi(v_x \Delta_x + v_y \Delta_y)) \cdot \\ \cdot \text{Sinc}(L_x 2\pi v_x \varphi) \text{Sinc}(L_y 2\pi v_y \varphi) \quad (4.25)$$

а для образа со сложным спектральным составом отклик описывается как



$$K(\Delta_x, \Delta_y) \propto 4L_x L_y |A(v_x, v_y)|^2 \cdot \iint_{v_x, v_y} \exp(j2\pi(v_x \Delta_x + v_y \Delta_y)) \text{Sinc}(L_x 2\pi v_x \varphi) \text{Sinc}(L_y 2\pi v_y \varphi) dv_x dv_y. \quad (4.26)$$

Таким образом, влияние поворота на сигнал распознавания аналогично влиянию масштабирования – убывает амплитуда ГМ АКФ и увеличивается радиус корреляции  $r$ . [7]

Выше анализ проведен для прямоугольной апертуры. Для круглой апертуры ситуация качественно аналогична, но количественно отличается, поскольку, как мы это видели в первой лекции, функции Sinc должны быть заменены функцией, на научном жаргоне часто называемой «Бесинк» – отношением функции Бесселя первого рода к своему аргументу. Сечения этих функций визуально схожи, но отличаются значения аргументов этих функций, при которых значения этих функций равны нулю – в 1,22 раза.

#### **Вопросы для самопроверки освоения темы 4.**

1. Что понимается под сигналом и что под помехой в контексте отношения сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений?
2. Чем отличаются авто- и кросс-корреляционные функции?
3. Чем отличаются корреляционная и ковариационная функции? Как они связаны друг с другом? В каком случае они идентичны?
4. Взаимно-корреляционная и кросс-корреляционная функции – это синонимы или нет?
5. Что такое согласованный фильтр? Как он реализуется методом голографии Фурье?
6. От каких характеристик обрабатываемого изображения зависит отношение сигнал/помеха?
7. Как можно изменить радиус корреляции изображения?
8. Как влияет ограниченность динамического диапазона экспозиционной характеристики голографической регистрирующей среды на частотный диапазон, в котором голограмма Фурье согласована с эталоном?
9. В каком частотном диапазоне и при каких условиях голограмма Фурье может быть инверсной?
10. Как будет меняться частотный диапазон, в котором голограмма Фурье согласована с эталонным изображением, по мере уменьшения амплитуды опорного пучка с плоским волновым фронтом?
11. Как будет меняться радиус корреляции записанного на голограмме Фурье эталонного изображения с уменьшением амплитуды опорного пучка с плоским волновым фронтом при постоянстве амплитуды сигнального пучка?

12. Как будет меняться величина отношения сигнал/помеха с ростом амплитуды опорного пучка с плоским волновым фронтом при постоянстве амплитуды сигнального пучка?
13. Как будет меняться величина отношения сигнал/помеха по мере уменьшения амплитуды опорного пучка с плоским волновым фронтом?
14. Как влияет изменение масштаба объектного изображения относительно эталонного на амплитуду и форму глобального максимума АКФ для гармонического сигнала и образа со сложным спектральным составом?
15. Можно ли при моделировании и расчете схемы голографии Фурье с круглой апертурой во входной плоскости использовать для аппроксимации зависимости корреляционного отклика от масштаба и поворота объектного образа функцию Sinc?

#### **Литература к Теме 4.**

1. *A. Van der Lugt* Signal detection by complex spatial filtering // IEEE Trans. Inf. Theory **10**(2), 139-145 (1964).  
<https://doi.org/10.1109/TIT.1964.1053650>
2. *Шубников Е.И.*, Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений // Оптика и спектроскопия, 1987, т.62., вып.2., стр.450 – 456.
3. *Шубников Е.И.*, Влияние аддитивных и мультипликативных помех при корреляционном сравнении изображений // Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62. № 3. С.653 – 658.
4. *Павлов А.В.* Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
5. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 280 С.
6. *Шубников Е.И., Кулешов А.М.* Влияние изменения масштаба и поворота изображения и сдвига фильтра на величину сигнала в голографическом корреляторе // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 55. № 1. С.1611153 – 169.
7. *Кулешов А.М., Павлов А.В., Шубников Е.И.* Влияние наклона изображения на сигнал голографического коррелятора // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 59. № 2. С. 415 – 419.
8. *Павлов А.В.* Влияние геометрических искажений на корреляцию изображений // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. №6. С. 1337 – 1341.

## Тема 5. Корреляционные методы хранения и восстановления изображений (голографическая ассоциативная память)

### 5.1. Голографическая ассоциативная память с линейной голограммой Фурье – авто- и гетеро-ассоциативная память

Голография во многом началась с памяти [1,2]. Рассмотрим реализацию авто-ассоциативной памяти  $4f$  схемой с мультиплексной голограммой Фурье, приведенной на рис.5.1. [3] Пусть в памяти хранятся два образа  $A(x)$  и  $B(x)$ . Их может быть больше, мы ограничимся только двумя.

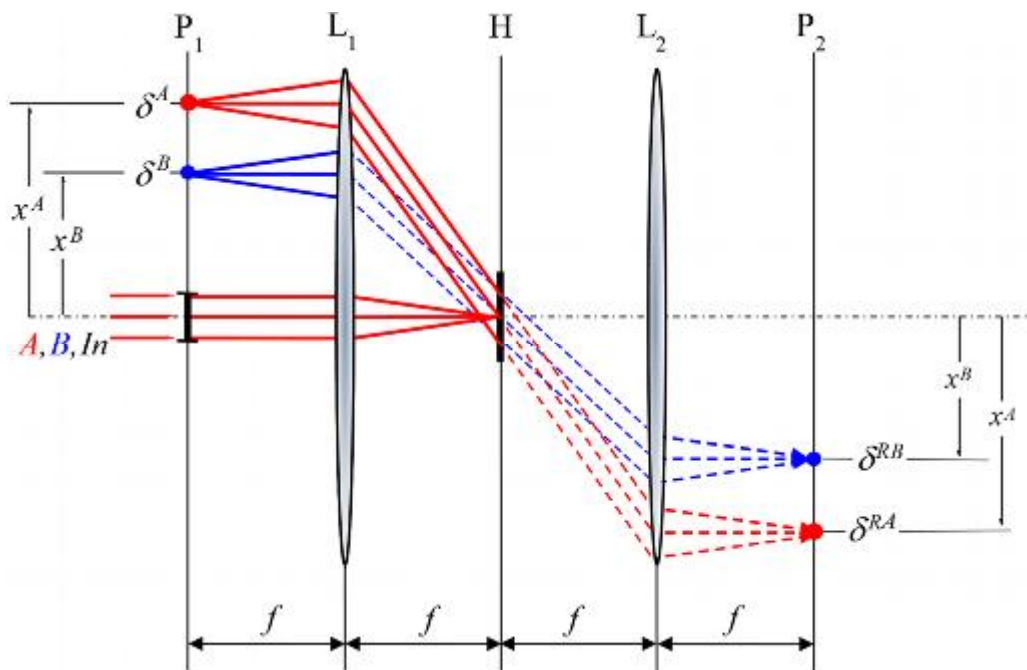


Рис.5.1.  $4f$  схема голографии Фурье для двух наложенных голограмм:  $A$ ,  $B$  – эталонные образы,  $In$  – объектный образ,  $P_1$  – плоскость образов,  $L_1$ ,  $L_2$  – первая и вторая фурье-преобразующие линзы,  $H$  – плоскость голограммы,  $P_2$  – задняя фокальная плоскость линзы  $L_2$  – плоскость откликов голограммы. Штрихами линиями показан ход лучей, дифрагировавших на наложенной голограмме  $H_A$  и восстанавливающих в плоскости  $P_2$  изображение точечного опорного источника  $\delta^2_A$

При записи наложенных голограмм в фурье-плоскости  $H$  – задней фокальной плоскости первой фурье-преобразующей линзы  $L_1$  – формируются подлежащие записи на ГРС распределения интенсивностей:

$$I_A(v) \propto [R_A \cdot \exp(j\omega x_A) + F(A(x))] \cdot [R_A \cdot \exp(j\omega x_A) + F(A(x))]^*, \quad (5.1)$$

$$I_B(v) \propto [R_B \cdot \exp(j\omega x_B) + F(B(x))] \cdot [R_B \cdot \exp(j\omega x_B) + F(B(x))]^*, \quad (5.2)$$

где  $v = \frac{\zeta}{\lambda f}$  – пространственная частота,  $\zeta$  – пространственная координата в фурье-плоскости  $H$ ,  $\omega = 2\pi v$  – круговая пространственная частота,  $j$  –

мнимая единица,  $R_A$  и  $R_B$  – амплитуды плоских волновых фронтов, пропорциональные амплитудам точечных опорных источников, описываемых дельта-функциями  $\delta_A(x)$  и  $\delta_B(x)$ ,  $x_A$  и  $x_B$  – их координаты, соответственно. Если наложенные голограммы записаны линейно, то их компоненты, описывающей дифракцию в +1 порядок:

$$H_A^{+1}(v) = R_A F^*(A(x)) \cdot \exp(j\omega x_A), \quad (5.3)$$

$$H_B^{+1}(v) = R_B F^*(B(x)) \cdot \exp(j\omega x_B). \quad (5.4)$$

При предъявлении во входной плоскости  $P_1$  объектного образа  $C(x)$ , отклики этих наложенных голограмм в +1 порядок дифракции:

$$Corr_{CA}(\Delta) = (C(x) \otimes A(x)), \quad (5.5)$$

$$Corr_{CB}(\Delta) = (C(x) \otimes B(x)), \quad (5.6)$$

где  $Corr$  означает «корреляция»,  $\Delta$  – координата в корреляционной плоскости  $P_2$ ,  $\otimes$  – символ операции корреляции. Выражения (5.5) и (5.6) описывают восстановленное изображение точечных опорных источников с учетом дифракции на голограмме, т.е. их размытия и ореола вокруг.

На этом этапе  $4f$  схема голографии Фурье рис.1.6 работает как голографический коррелятор Ван дер Люгта, а максимальные значения ВКФ (5.5) и (5.6) описываются скалярным произведением как квадратичной мерой сходства входного образа  $C(x)$  с эталонами  $A(x)$  и  $B(x)$ :

$$\delta_{CA} = \max [C(x) \otimes B(x)] = \langle C(x) B(x) \rangle, \quad (5.7)$$

$$\delta_{CB} = \max [C(x) \otimes B(x)] = \langle C(x) B(x) \rangle, \quad (5.8)$$

где  $\langle \rangle$  – символ скалярного произведения. Введем коэффициент, описывающий отношение амплитуд ГМ АКФ (5.7) и (5.8):

$$k = \frac{\langle C(x) A(x) \rangle}{\langle C(x) B(x) \rangle}. \quad (5.9)$$

Для того, чтобы схема работала не как коррелятор, а как память, т.е. сформировала на выходе эталонное изображение, на которое наиболее похоже, «по её мнению», входное поле  $C(x)$ , в корреляционную плоскость  $P_2$  помещается обращаемое волновой фронт зеркало – ОВФ или фазосопрягающее зеркало, английский термин – Phase Conjugate Mirror (PCM). Термин ОВФ акцентирует внимание на феномене, т.е. внешнем проявлении работы устройства, а термин «фазо-сопрягающее» – на математическом описании механизма его работы.

Очевидно, что для того, чтобы голограмма восстановила записанное на ней поле, её надо осветить пучком, идентичным использованному при записи опорному. Поскольку наложенные голограммы Фурье (5.3) и (5.4) записаны с опорными пучками с плоскими волновыми фронтами  $R_A \cdot \exp(j\omega x_A)$  и  $R_B \cdot \exp(j\omega x_B)$ , то нужны освещающие пучки  $\exp(-j\omega x_A)$  и  $\exp(-j\omega x_B)$  соответственно. Для того, чтобы получить освещающие

пучки с плоскими волновыми фронтами, из корреляционных полей (5.5) и (5.6) надо выделить только глобальные максимумы автокорреляционных функций (ГМ АКФ) (5.7) и (5.8) – дифракционно-ограниченные точечные источники  $\delta_{CA} \delta_{CB}$ . Для этого используется нелинейность либо самого ОВФ зеркала, либо дополнительного устройства, помещаемого в плоскость  $P_2$ , пропускающая только один, с максимальной амплитудой, ГМ АКФ и режектирующая все более слабые ГМ АКФ и все боковые максимумы КФ.

Тогда в обратном ходе лучей от плоскости  $P_2$  к плоскости  $P_1$  схема рис.5.1 восстановит в плоскости  $P_1$  поле, описываемое распределением амплитуд

$$\begin{aligned} Out(x) &= Out_A(x) + Out_B(x) = \\ &= R_A \cdot A(x) \cdot \langle C(x)A(x) \rangle + R_B \cdot B(x) \cdot \langle C(x)B(x) \rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отношение интенсивностей эталонных образов  $A(x)$  и  $B(x)$  в восстановленном образе

$$V = \left( \frac{\langle C(x)A(x) \rangle}{\langle C(x)B(x) \rangle} \right)^2 = k^2, \quad (5.11)$$

Для того, чтобы в восстановленном поле (5.10) был только один эталонный образ – наиболее близкий к входному по корреляционной мере, нелинейность в плоскости  $P_2$  должна подавлять не только боковые максимумы корреляционных функций, но и все другие ГМ АКФ, кроме максимального. Для этого используется сигмоидальная нелинейная функция и итерационный режим схождения к решению, реализуемый помещением ОВФ зеркала также и в плоскость  $P_1$ . Такая схема образует линейный резонатор, записанные на голограмме эталоны – его моды.

Такая память называется нелинейной голографической автоассоциативной памятью – термин «нелинейная» здесь принципиально важен. Нелинейность вводится в корреляционной плоскости  $P_2$ , а сама голограмма Фурье работает как линейная. [3-8]

Возможно также построение АП без ОВФ – для этого к плоскости  $P_2$  схемы рис.5.1 надо добавить аналогичную, но развернутую слева направо схему, как это показано на рис.5.2. В этой схеме могут быть реализованы как ААП – если обе голограммы  $H_1$  и  $H_2$  идентичны, так и гетероассоциативная (ГАП), т.е. восстанавливающая эталон, связанный с искаженной версией предъявляемого – для этого на голограмме  $H_2$  должны быть записаны другие эталоны, но с таким же положением точечных опорных источников, как и для голограммы  $H_1$  – связь эталонов, записанный на первой голограмме, с эталонами, записанными на второй, осуществляется через опорные источники. Возможны два варианта реализации итерационного режима схождения к устойчивому состоянию:

- либо ОВФ зеркало должно быть помещено в выходную плоскость  $P_3$  – это линейный резонатор;

- либо схема должны быть закольцована системой зеркал так, чтобы плоскости  $P_3$  и  $P_1$  совпадали – это кольцевой резонатор.

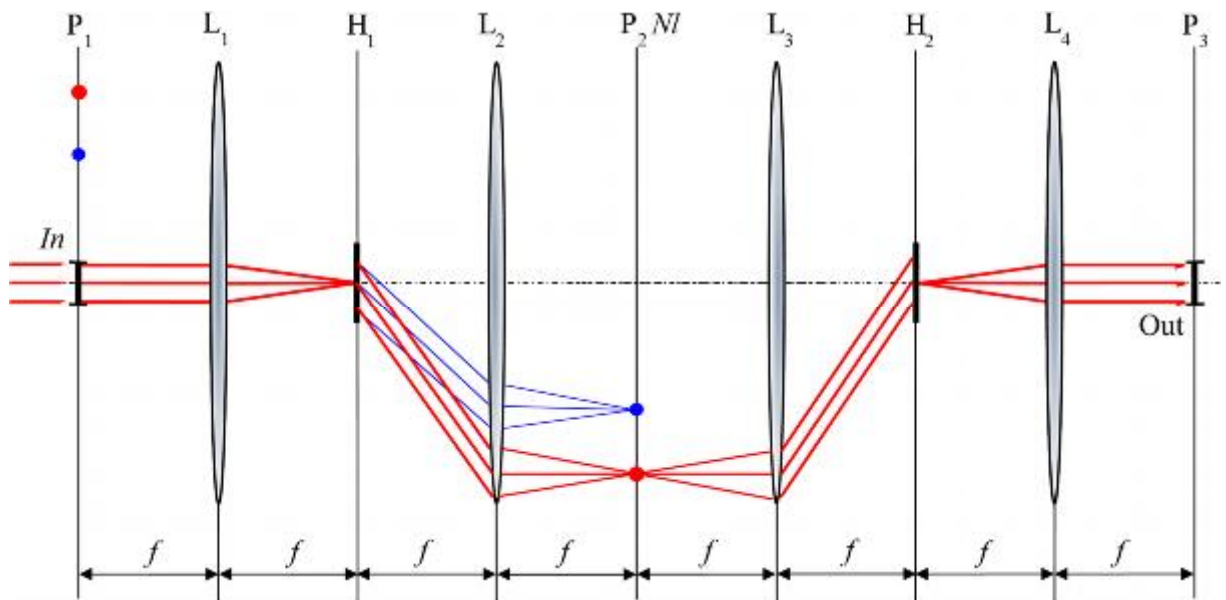


Рис.5.2. Схема реализации голографической ассоциативной памяти: если голограммы  $H_1$  и  $H_2$  идентичны – ААП, если различны, то ГАП

## 5.2. Голографическая ассоциативная память с нелинейной голограммой Фурье – гетеро-ассоциативная память

ГАП может быть реализована на основе двух схем с линейно записанными голограммами Фурье, рис.5.2: первая хранит один эталон, а вторая – другой. Но интерес представляет ГАП, способная к самостоятельному ассоциированию образов. Такой вариант возможен за счет использования свойства нелинейности породить комбинационные частоты [9], для голографии это было теоретически показано в [10].

Если скрытое изображение в ГРС проявляется после записи всех наложенных голограмм (5.1) и (5.2), а нелинейная экспозиционная характеристика голографической регистрирующей среды (ЭХ ГРС) может быть аппроксимирована двумя первыми членами её разложения в степенной ряд, то зависимость локальной дифракционной эффективности голограммы по амплитуде от пространственной частоты

$$H(\nu) = H^1(\nu) + H^2(\nu) =$$

$$h^1 \left\{ \left[ D^A \exp(j2\pi\nu x^A) + F(A(x)) \right] \cdot \left[ D^A \exp(j2\pi\nu x^A) + F(A(x)) \right]^* + \right. \\ \left. + \left[ D^B \exp(j2\pi\nu x^B) + F(B(x)) \right] \cdot \left[ D^B \exp(j2\pi\nu x^B) + F(B(x)) \right]^* \right\} +$$

$$+ h^2 \left\{ \left[ D^A \exp(j2\pi\nu x^A) + F(A(x)) \right] \cdot \left[ D^A \exp(j2\pi\nu x^A) + F(A(x)) \right]^* + \right. \\ \left. + \left[ D^B \exp(j2\pi\nu x^B) + F(B(x)) \right] \cdot \left[ D^B \exp(j2\pi\nu x^B) + F(B(x)) \right]^* \right\}^2$$

где верхние индексы 1 и 2 указывают линейный и квадратичный члены разложения,  $h^1$  и  $h^2$  – коэффициенты, зависящие от ЭХ и условий проявления ГРС,  $D$  – амплитуды опорных пучков. Нас сейчас интересует только квадратичный член, его разложение (элементарные, но громоздкие

выкладки опустим) дает, среди прочих, также и два слагаемых, каждое описывает картину интерференции не интерферирующих в действительности эталонов  $A(x)$  и  $B(x)$

$$H^{B^2}(v) = h^2 D^A D^B F^*(A(x)) F(B(x)) \exp(j2\pi v(x^A - x^B)), \quad (5.12.a)$$

$$H^{A^2}(v_x) = h^2 D^A D^B F(A(x)) F^*(B(x)) \exp(-j2\pi v(x^A - x^B)). \quad (5.12.b)$$

Эти компоненты мультиплексной голограммы назовем квадратичными субголограммами.

При предъявлении во входной плоскости  $P_1$  схемы рис.5.1 образа  $In(x)$ , субголограммы формируют в выходной плоскости  $P_2$  два отклика, локализованных симметрично относительно главной оптической оси на расстояниях  $(x^A - x^B)$  и  $-(x^A - x^B)$ , как показано на рис.5.3:

$$B^R(\Delta) = h^2 D^A D^B F \left[ F(In(x)) F^*(A(x)) F(B(x)) \exp(j2\pi v(x^A - x^B)) \right] \infty, \quad (5.13.a)$$

$$\infty B(x) * [In(x) \otimes A(x)] * \delta(x^A - x^B)$$

$$A^R(\Delta) =$$

$$= h^2 D^A D^B F \left[ F(In(x)) F(A(x)) F^*(B(x)) \exp(j2\pi v(x^B - x^A)) \right] \infty, \quad (5.13.b)$$

$$\infty A(x) * [In(x) \otimes B(x)] * \delta(x^B - x^A)$$

где  $R$  в верхних индексах означает «восстановленный»,  $\Delta$  – координата в плоскости  $P_2$ ,  $*$  и  $\otimes$  – символы операций свертки и корреляции, соответственно.

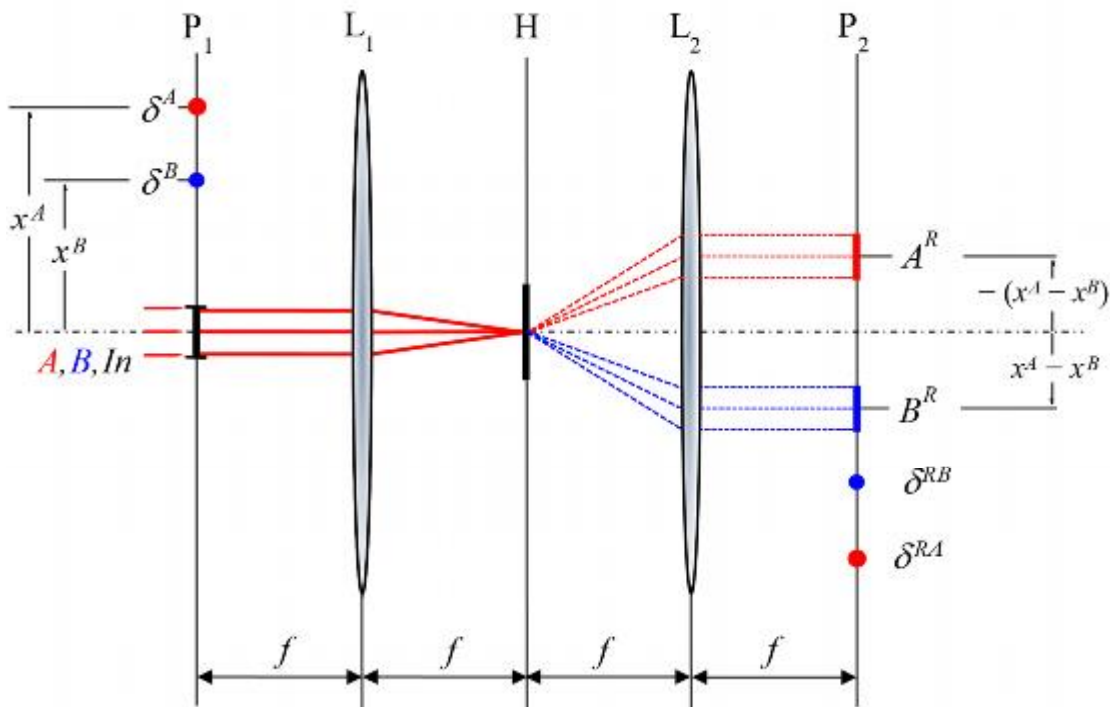


Рис.5.3. Отклики, формируемые квадратичными субголограммами

Отклики (5.13.a) и (5.13.b) каждой из квадратичных субголограмм (5.12.a) и (5.12.b) суть свертки одного из эталонов с взятой в квадратные скобки функцией корреляции образов – входного и другого эталонного, который в рамках данного описания формально, поскольку физически эталоны  $A(x)$  и  $B(x)$  не интерферируют, имеет смысл опорного. Восстанавливаемый субголограммой эталон будем, также формально, называть сигнальным. Это различие эталонов как сигнального и опорного условно – оно имеет смысл только применительно к конкретной субголограмме, для второй субголограммы определения меняются местами.

Таким образом, при записи независимых образов методом наложенных голограмм на ГРС с квадратичной нелинейностью ЭХ, самостоятельно формирующиеся в составе мультиплексной голограммы квадратичные субголограммы ассоциируют независимые эталоны – имеем не просто гетеро-ассоциативную память, но реализацию такого атрибута интеллекта, как способность к самостоятельному связыванию фрагментов информации, независимо предъявляемых в разное время [11]. Отметим также, что использование нелинейности ЭХ ГРС позволяет существенно упростить схему – не требуется двукратного прохождения света, как для ААП.

Как видно из (5.13), механизм работы такой памяти, т.е. восстановления эталонного образа, именно корреляционный.

### 5.3. Голографическая реализация модели линейной регрессии

В теории случайных процессов рассматривается задача наилучшей оценки значения случайного процесса: интерполяция и экстраполяция [12-15]. Её решение возможно в силу внутренней коррелированности. Теорема проекции [14] говорит, что наилучшая оценка есть всегда, но проблема в нахождении её конкретного математического описания. В частном случае стационарных случайных процессов наилучшее решение по критерию минимума среднего квадрата ошибки дает модель линейной регрессии.

Пусть  $A(x)$  – реализация стационарной в широком смысле случайной функции (процесса) с автокорреляционной функцией  $C(\Delta)$ , наблюдаемой на интервале  $[x_{Min}, x_0]$ , где  $x_0 = 0$  – момент или точка наблюдения. Тогда наилучшая линейная оценка значения случайной величины  $\hat{A}(x_k)$ ,  $k > 0$ , т.е. за границами наблюдаемой реализации, определяется выражением [14]

$$\hat{A}(x_k) = \int_{x_{Min}}^{x_0} A(x_0 - x) \cdot a(x) d(x), \quad (5.14)$$

где  $a(x)$  определяется из решения уравнения

$$\int_{x_{Min}}^{x_0} a(x) \cdot C(|x - \Delta|) d(x) = C(x_k + \Delta), \quad (5.15)$$

где  $C(\Delta)$  – АКФ процесса.

Для совместного решения (5.14) и (5.15) применим операционный подход – переведем задачу в фурье-пространство: выражение (5.15) примет вид



$$F(a(x)) \cdot F(C(\Delta)) = F(C(x_k + \Delta)),$$

откуда получим

$$F(a(x)) = \frac{F(C(x_k + \Delta))}{F(C(\Delta))}.$$

Подставив это выражение в (5.13), получим

$$\widehat{A}(x_k) = F^{-1} \left( F(A(x)) \frac{F(C(x_k + \zeta))}{F(C(\zeta))} \right).$$

Применив к этому результату теорему Винера-Хинчина и учтя инверсию координат, получаем выражение математического ожидания в точке  $x_k$

$$\widehat{A}(x_k) = F \left( \frac{F(C(x_k + \Delta))}{F^*(A(x))} \right). \quad (5.16)$$

Обратим внимание, что в модели (5.14), (5.15) и, соответственно, в полученном нами решении (5.16) используется не ГМ АКФ, как в ААП, а именно боковые максимумы КФ, сам ГМ АКФ в этой модели не нужен.

Получение решения (5.16) методом голографии Фурье достаточно очевидно: оно достигается в  $4f$  схеме с обращением волнового фронта в корреляционной плоскости в два шага:

1. При прохождении света от входной к корреляционной плоскости голограмма Фурье формирует корреляционное поле  $C(x_k + \Delta)$ , рис.5.4.

2. При обратном прохождении света от корреляционной  $P_2$  к плоскости изображений  $P_1$  формируется описываемый моделью (5.16) ореол вокруг восстановленного ГМ АКФ эталона. Этот ореол формируется как сумма смещенных друг относительно друга и подвергнутых дополнительной инверсной фильтрации эталонов  $A^{-1}(x - \Delta)$ , взвешенных относительной амплитудой того БМ АКФ, который его и формирует в обратном ходе как точечный источник (рис.5.5).

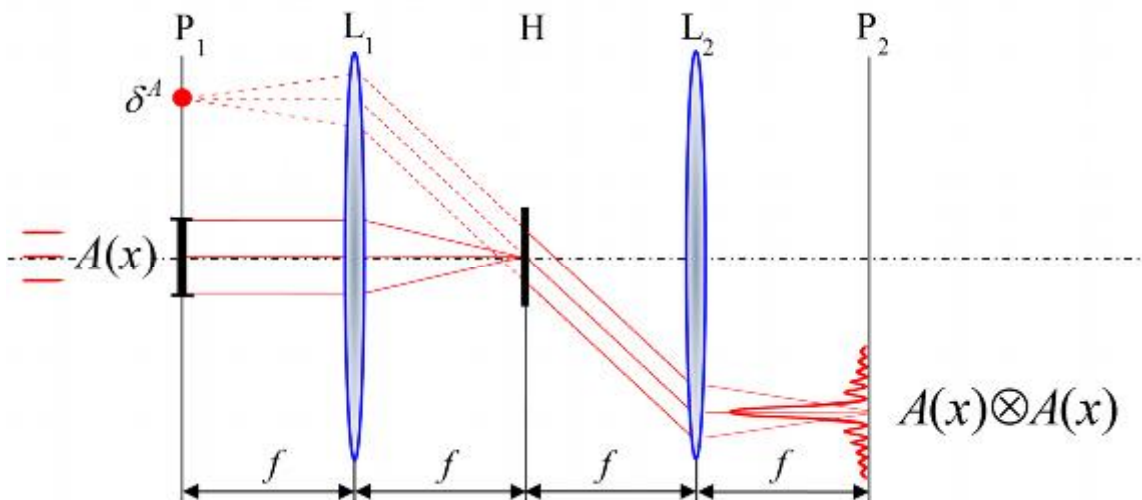


Рис.5.4. Первый этап решения задачи – формирование АКФ

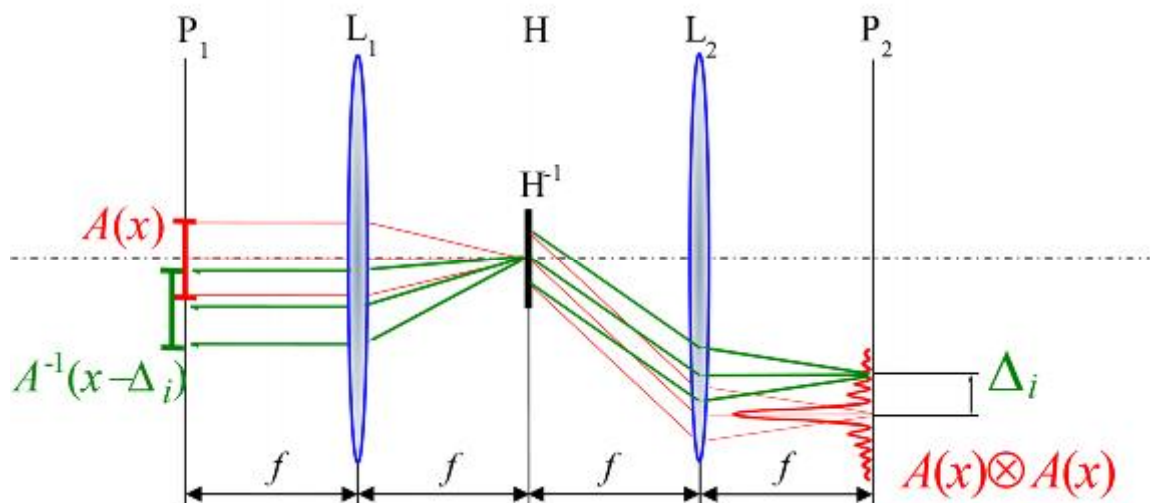


Рис.5.5. Второй этап решения задачи – формирование линейного предсказания инверсной голограммой в обратном ходе  $P_2 \rightarrow H^{-1} \rightarrow P_1$ : зеленым показан ход лучей от БМ АКФ, отстоящего на  $\Delta_i$  от ГМ АКФ

Важно отметить, что модель линейной регрессии (5.14), (5.15) использует теоретическую КФ (ТКФ), т.е. КФ процесса, а  $4f$  схема голографии Фурье – измеренную КФ ограниченной реализации. Отсюда, т.е. из ограниченности реализации, возникают погрешности реализации модели.

Задача предсказания практически значима: предсказание в реальном времени трафика телекоммуникационных сетей позволяет оптимизировать работу их узлов [16-19], аналогично и дорожного трафика [20-22].

### Вопросы для самоконтроля освоения темы №5

1. Чем авто-ассоциативная память отличается от гетеро-ассоциативной?
2. Что такое обращение волнового фронта? Как оно описывается математически и чем отличается от обычного отражения в зеркале?
3. Зачем при реализации АП нужна нелинейность и где?
4. Что такое задача наилучшей оценки?
5. Почему в названии метода присутствует термин регрессия? Нужен ли ГМ АКФ при реализации модели линейного предсказателя?

### Литература к теме 5

1. Van Heerden P.J. A new optical method of storage and retrieving information // Applied Optics. 1963. V. 2. №4. P. 387–392.
2. Van Heerden P.J. Theory of optical information storage in solids // Applied Optics. 1963. V. 2. №4. P. 393–400.
3. Павлов А.В. Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с. <https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
4. Psaltis D., Farhat N. Optical information processing based on an associative-memory model of neural nets with thresholding and feedback // Opt. Lett. 1985. V.10. № 2. P. 98 – 100.

5. *Farhat N. H., Psaltis D., Prata A., Paek E.* Optical Implementation of the Hopfield Method // *Appl. Opt.* 1985. V.24. P. 1469 – 1475.
6. *Soffer B.H., Dunning G.J., Owechko Y., Marom E.* Associative holographic memory with feedback using phase-conjugate mirrors // *Optics Letters.* 1986. V. 11. № 2. P.118 – 120.
7. *Paek E.G., Psaltis D.* Optical associative memory using Fourier transform holograms // *Optical Engineering,* 1987. V. 26. №5. P. 428 – 433.
8. *Owechko Y., Dunning G. J., Marom E., and Soffer B. H.* Holographic associative memory with nonlinearities in the correlation domain// *Appl. Opt.* 1987 V.26. P. 1900 – 1910.
9. *Kozlov S.A., Samartsev V.V.* Fundamentals of femtosecond optics. Washington, Elsevier Ltd: 2013. 253 P. DOI: 10.1533/9781782421290 .
10. *Орлов В.В.* О решетках, возникающих при нелинейной записи наложенных голограмм // *Письма в ЖТФ.* **30(24),** 77–81 (2004). <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/13252>.
11. *Орлов В.В.* Ассоциативные связи между словами согласно голографической модели памяти // *Опт/ журнал.* 2011. **78(9).** С. 50-52.
12. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и инженерные приложения, М. Высшая школа, 2000.
13. *Вентцель А.Д.,* Курс теории случайных процессов, М. Наука, 1975.
14. *Grimmet G.R., Sterzaker D.R.,* Probability and Random Processes, Oxford. Oxford Sc. Publ., Clarendon Press, 1992.
15. *Павлов А.В.* О применимости модели линейной регрессии к описанию Фурье-голографии // *Оптика и спектр.* 2005. Т.98. №6. С. 1033 – 1037.
16. *Grossglauser M., Bolot J.C.* On the Relevance of Long-Range Dependence in Network Traffic, //*IEEE Trans. on Networking,* 1999, v.7, №5.
17. *Roughan M., Veitch D., Abry P.* Real-Time Estimation of the Parameters of Long-Range Dependence// *IEEE Trans. on Networking,* 2000, v.8, №4.
18. *Yoo S.J., et/al.* Predictive and Measurement-based Dynamic Resource Management and QoS Control for Videos // *Comp. Comm.,* 2003, **26(14).**
19. *Deekshetha H. R., Shreyas Madhav A. V., Amit Kumar Tyagi* Traffic Prediction Using Machine Learning. In book: *Evolutionary Computing and Mobile Sustainable Networks.* LNDECT. V.116. P. 969-983. March 2022. DOI: [10.1007/978-981-16-9605-3\\_68](https://doi.org/10.1007/978-981-16-9605-3_68)
20. *Fuad Efendi* Traffic Prediction: Using Models to Predict Traffic Flow and Congestion. (July 7, 2024). <https://softwarepatternslexicon.com/machine-learning/domain-specific-patterns/smart-cities/traffic-prediction/>
21. *Аль-Свейти М.* Методы машинного обучения для прогнозирования трафика в многоуровневой облачной архитектуре для сервисов автономных транспортных средств // *Труды учебных заведений связи,* 2022, **8(4),** С. 89-98. DOI: 10.31854/1813-324X-2022-8-4-89-99
22. *M. Shaygana, C. Meesea, W. Lib, X. Zhaoc, M. Nejad.* Traffic Prediction using Artificial Intelligence: Review of Recent Advances and Emerging Opportunities. <https://arxiv.org/pdf/2305.19591> (2023)

## **Тема 6. Ghost Imaging (фантомные изображения) – корреляционный метод передачи информации**

Ghost Imagine – это технология передачи информации, изначально инициированная изучением феномена квантовой корреляции [1–4] применительно к парам фотонов, испускаемых при спонтанном параметрическом рассеянии света [5, 6]. Затем было показано, что эта идея может быть реализована использованием не только спутанных фотонов, но и классических полей, полученных от тепловых источников [7-11].

На сегодня это направление применяется для решения широкого круга практических задач передачи изображений, среди них: эндоскопия трехмерных прозрачных объектов [12-14], поляриметрия [15, 16], дистанционное зондирование [17], криптография [18-20], микроскопия [21, 22], etc. В его основе лежит связность, т.е. коррелированность, двух полей интенсивности: объектного, считывающего информацию об объекте, но регистрируемого интегрирующим сенсором, и опорного, с объектом не взаимодействующего, но регистрируемого изображающим сенсором.

К пониманию сути метода подойдем, последовательно находя ответы на ряд вопросов, первый из них – можно ли передать изображение, используя однопиксельный (неразрешающий) датчик, интегрирующий всё излучение, модулированное транспарантом с передаваемым изображением (рис.6.1)?

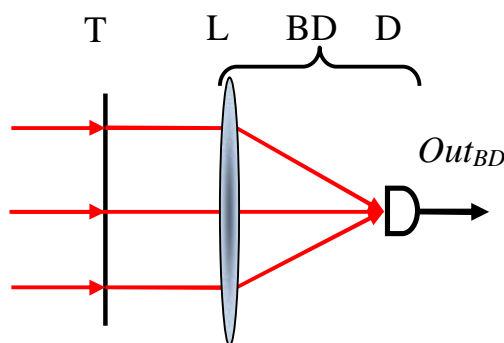


Рис.6.1. Схема освещения транспаранта широким пучком: свет, прошедший через транспарант Т, собирается положительной линзой L, в фокусе которой установлен фотодетектор D, собирающая линза и детектор образуют интегрирующий фотоприемник BD (bucket detector)

Сигнал на выходе однопиксельного (single pixel) фотодетектора BD:

$$Out_{BD} = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) dx ,$$

где  $2x_T$  – апертура транспаранта Т, описываемого зависимостью его пропускания по интенсивности от пространственной координаты  $\tau(x)$ ; во избежание излишнего загромождения выражений мы описываем приведенную схему функциями только одного аргумента – координаты  $x$ .

Задача решается усложнением схемы – сканированием транспаранта узким пучком, например, с помощью качающегося зеркала RM (рис.6.2).

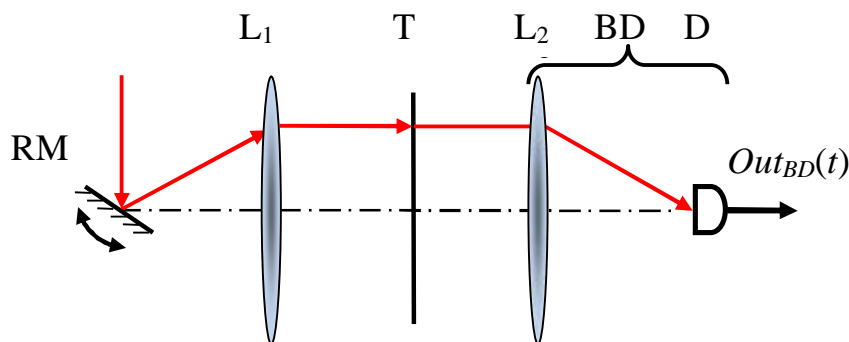


Рис.6.2. Оптическая схема сканирования транспаранта узким пучком: RM – качающееся зеркало, остальные обозначения соответствуют рис.6.1

На выходе фотодетектора получаем видеосигнал как функцию времени

$$Out_{BD}(t) = \tau(t(x)), \quad (6.1)$$

где  $t(x)$  – закон сканирования – преобразования функции пространственной координаты  $x$  в функцию времени. Исходное изображение  $\tau(x)$  восстанавливается из видеосигнала (6.1) посредством обратного преобразования  $t^{-1}(x)=x(t)$  – пространственной разверткой видеосигнала. Видим, что передача изображений по линиям связи включает три этапа:

1. сканирование как преобразование пространственного сигнала  $\tau(x)$  или поля  $\tau(x, y)$  во временной  $Out_{BD}(t)$  по закону сканирования  $t(x)$ ;
2. передача временного сигнала  $Out_{BD}(t)$  по каналу связи;
3. обратное преобразование – развертка временного сигнала в пространственный применением обратного преобразования  $t^{-1}(x)=x(t)$ .

Таким образом, для восстановления изображения нам нужно знать закон сканирования – он либо стандартизирован, как в бытовом телевидении, либо должен быть передан отправителем (Алисой) получателю (Бобу).

Очевидно, что закон сканирования может быть произвольным, например,  $t(x)$  может быть реализацией случайного процесса. В этом случае для его знания нужен ещё один сенсор, как это показано на рис.6.3 – схема дополнена светоделителем BS, формирующим два связанных канала: в опорном канале передаваемое изображение отсутствует, в нём стоит изображающий сенсор IS для регистрации только закона сканирования, а изображение присутствует в сигнальном канале, но сенсор в нём интегрирующий, передаваемое изображение не разрешающий.

Сигнал  $Out_{IS}(t)$  сенсора IS несет информацию о законе сканирования  $t(y)=t(x)$ , для развертки временного сигнала интегрирующего детектора BS в изображение необходимы сигналы обоих каналов:

$$\tau(x) = t^{-1}(Out_{BD}(t)). \quad (6.2)$$

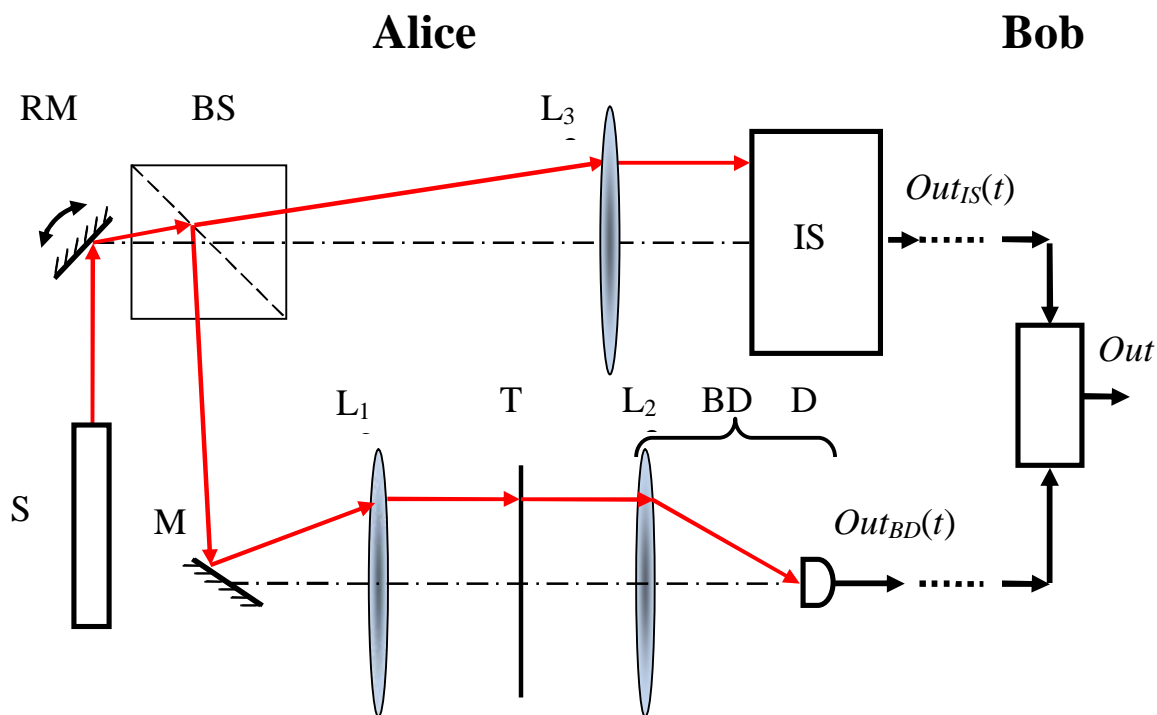


Рис.6.3. Принципиальная схема сканирования транспаранта узким пучком света:  $S$  – источник узкого пучка света (не обязательно лазер, может быть любой),  $BS$  – светоделитель,  $IS$  – сенсор, формирующий изображение (камера),  $Out_{IS}(t)$  – его выходной сигнал,  $M$  – зеркало, остальные обозначения соответствуют обозначениям на рис.6.1 и 6.2

Очевидно, что поскольку видеосигнал несет информацию о зависимости интенсивности от времени, то восстановление изображения возможно и из сигнала сканирования – для этого нужно присвоить ему интенсивность сигнала  $BD$  в данный момент. Пусть  $\tau \in \{0,1\}$ , тогда  $\tau(x_i) = 0 \Rightarrow Out_{BD}(t_i) = 0$ ,  $\tau(x_i) = 1 \Rightarrow Out_{BD}(t_i) = 1$ .  $\tau(x) = Out_{IS}(t)Out_{BD}(t)$ .

Вновь усложним задачу – пусть изображение сканируется не узким пучком, а случайным полем  $S$ , зависящим и от пространственной, и от временной координат:  $S_T(x, t)$  в плоскости  $T$  и  $S_{IS}(y, t)$  в плоскости  $IS$ .

Пространственная структура освещающего поля может быть случайной, например – спекл-структурой, формируемой диффузором в когерентном свете, как это показано на рис.6.4, пример спекл-структуры дан на рис.6.5, либо заранее вычисляться исходя из соображений оптимизации процесса обработки: повышения качества восстановленного изображения, уменьшения объема вычислений, etc., в этом случае поле вводится в схему пространственно-временным модулятором света (ПВМС), а для вычисления полей используются базисы Фурье, Адомара и др. [23].

Изменение поля во времени для случайных спекл-структур может быть обусловлено как источником излучения, так и случайным движением диффузора – его смещениями и/или поворотами, а для сгенерированных полей – вычислением оптимального набора реализаций [16, 23].

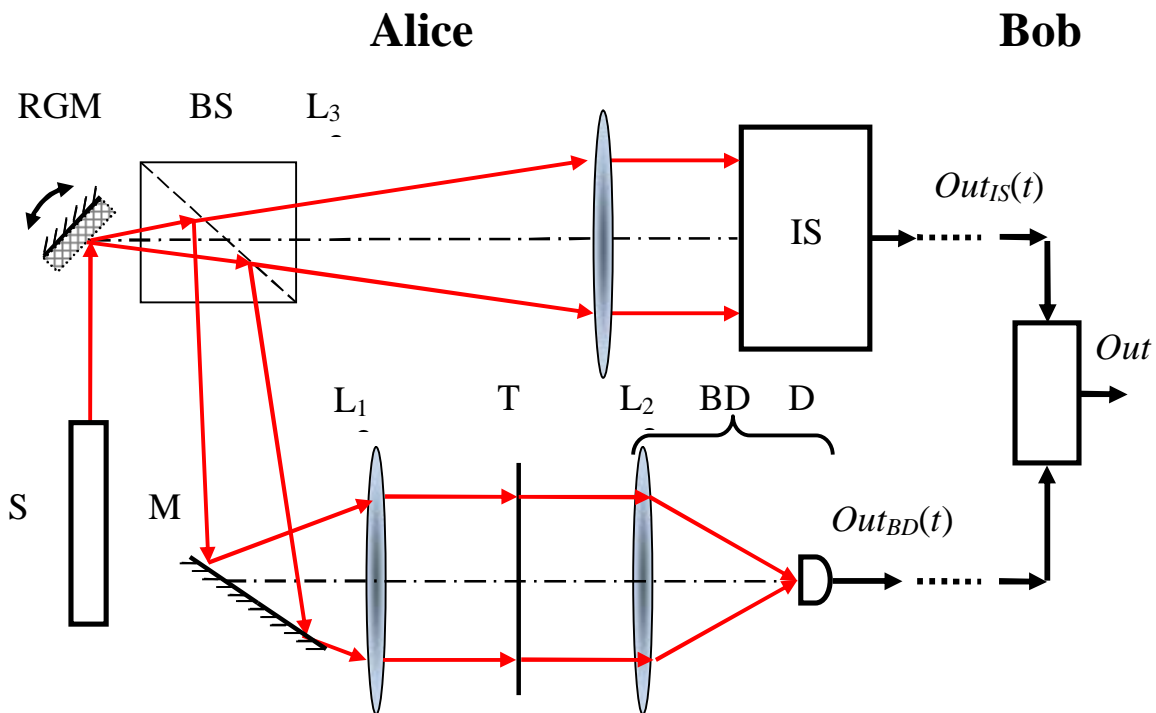


Рис.6.4. Принципиальная схема сканирования прозрачного поля, имеющего спекл-структуру: RGM – качающийся диффузор, остальные обозначения соответствуют обозначениям на рис.5.3

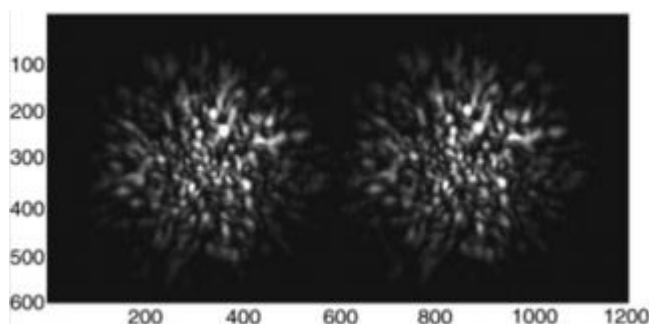


Рис.6.5. Спекл-структура – освещающие поля в плоскостях IS и T [10]

Сигнал интегрирующего фотодетектора BD при освещении полем:

$$Out_{BD}(t) = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) S_T(x, t) dx \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) описывает удельный вес передаваемого изображения в сигнале в каждый момент времени  $t$  – рис.6.6 наглядно объясняет это для  $\tau \in \{0,1\}$ . Возьмем  $N$  реализаций опорного поля  $S_{IS}(y, t)$ , полученных от сенсора IS в интервале  $[t_{\max}, t_{\min}]$ , т.е.  $N$  кадров длительностью  $t_f$  каждый:  $N = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_f}$ , и усредним их с учетом удельного веса изображения (6.3):

$$I(y) = \frac{1}{N} \sum_i S_{IS}(y, t_i) Out_{BD}(t_i), \quad (6.4)$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  – номер кадра в передаваемой последовательности, т.е. в усредняемом ансамбле реализаций. Подставив (6.3) в (6.4), получим:

$$I(y) = \frac{1}{N} \sum_i S_{IS}(y, t_i) \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) S_T(x, t_i) dx = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) \langle S_T(x, t) S_{IS}(y, t) \rangle dx, \quad (6.5)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю из  $N$  изображений.

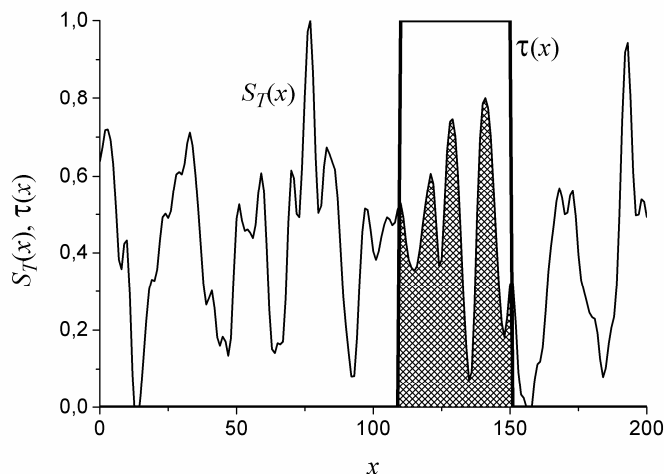


Рис.6.6. Поле  $S_T(x)$ , освещающее бинарный транспарант  $\tau(x)$ , заштрихована область, описываемая  $\tau(x) \cdot S_T(x)$

Обратимся к определению ковариационной функции процесса  $S$ , ранее приведенному при рассмотрении темы 4:

$$R_S(y-x) = \langle S_T(x) - \langle S \rangle \rangle \langle S_{IS}(y) - \langle S \rangle \rangle = \langle S_T(x) S_{IS}(y) \rangle - \langle S \rangle^2. \quad (6.6)$$

Подставив определение (6.6) в (6.5), получим следующее выражение:

$$I(y) = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) R_S(y-x) dx + \langle S \rangle^2 \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) dx. \quad (6.7)$$

Первое слагаемое в выражении (6.7) есть свертка функции пропускания транспаранта  $\tau(x)$  с функцией ковариации освещающих полей  $S_T$  и  $S_{IS}$ . А поскольку согласно рис. 6.4 освещающие поля  $S_T$  и  $S_{IS}$  суть реализации одного поля, то  $R_S(y-x)$  – функция автоковариации освещающего поля  $S$ .

Второе слагаемое в (6.7) играет роль помехи, в которой тонет полезный сигнал  $\tau(x)$ . Эту помеху можно убрать, введя в тракт сигнала фильтр, режектирующий нулевую частоту – математическое ожидание поля  $\langle S \rangle$  в (6.7) [10].

Таким образом, убрав второе слагаемое в (6.7) посредством фильтрации, мы можем восстановить изображение  $\tau(x)$  из сигнала, формируемого сенсором IS, который не видит само передаваемое изображение. Для этого нужно обработать сигнал изображающего сенсора (опорный), согласно (6.4) – суммировать  $N$  кадров, каждый с его статистическим весом (6.3), информацию о котором несет сигнал интегрирующего детектора ВД  $\tau(x, t_j)$ .



Передаваемая и подлежащая восстановлению информация «сокрыта» в первом члене (6.7) – в свертке с функцией ковариации поля

$$I(y) = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x)R(y-x)dx, \quad (6.8)$$

следовательно, неизбежна потеря разрешения в восстановленном изображении. Эта потеря может быть минимизирована оптимальным выбором статистических характеристик поля. Если поля дельта-коррелированы и ковариационная функция имеет ярко выраженный ГМ, т.е.  $R_S(y-x)=\delta(y-x)$ , то в силу фильтрующего свойства дельта-функции потери разрешения нет. Но для восстановления изображения нужен не только ГМ АКФ, но согласно (6.8) и боковые максимумы КФ. Поэтому нужна не сама по себе дельта-коррелированность, а накладывается требование на радиус корреляции – он должен быть в 2-3 раза меньше размера пикселя освещающего поля. В противном случае потеря разрешения неизбежна, но для его восстановления возможно применение метода десвертки, который мы рассмотрели в разделе 3.3.

Строго говоря, следует учесть также и временную функцию ковариации, но если время отклика сенсоров много меньше времени корреляции полей  $S_T(x,t)$  и  $S_{IS}(y,t)$ , то ей можно пренебречь.

Дальнейшее развитие метода фантомных изображений – переход к вычислительному методу с отказом от опорного канала IS и заменой случайных освещающих полей S специально подобранными полями. Этот шаг замыкает спираль развития возвратом к исходной идее телевидения, но на новом уровне. Для иллюстрации важности выбора статистических характеристик освещающего поля в табл.6.1 приведены результаты восстановления буквы А (рис.6.7) в зависимости от освещающего поля и числа итераций при вычислениях (кадров при регистрации в схеме рис.6.6 с двумя каналами)  $N$ , а на рис. 6.8 – АКФ освещающих полей.



Рис.6.7. Передаваемый образ в плоскости T схемы рис. 6.6

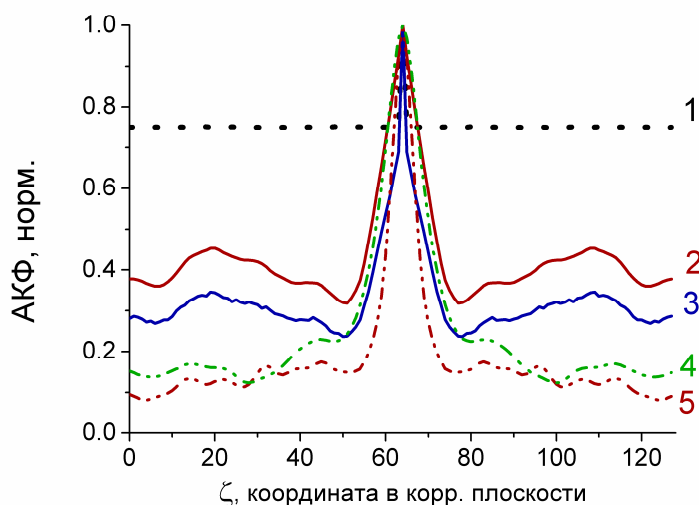
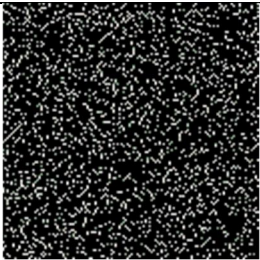
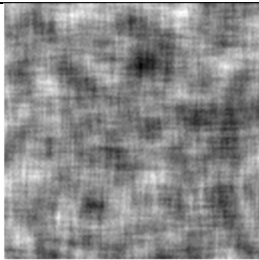
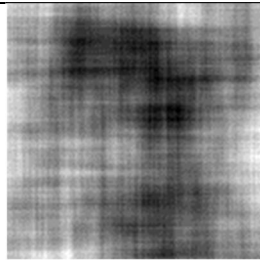
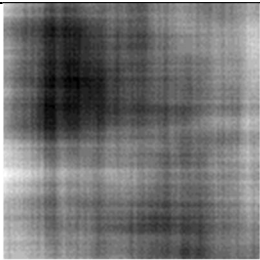


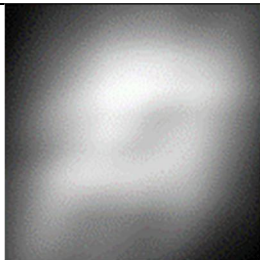





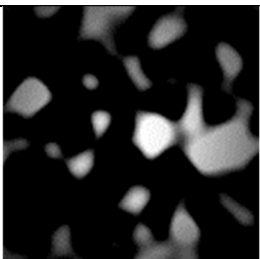
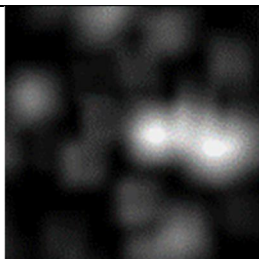
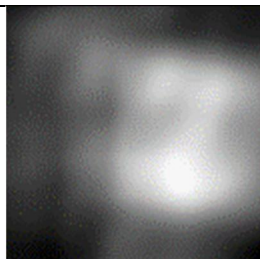

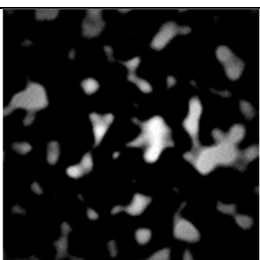
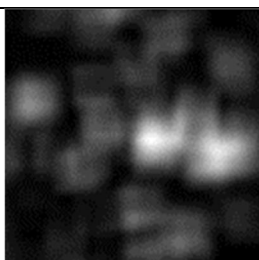
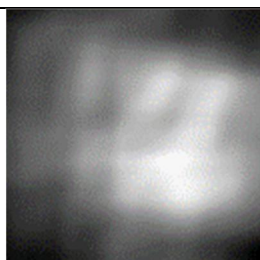
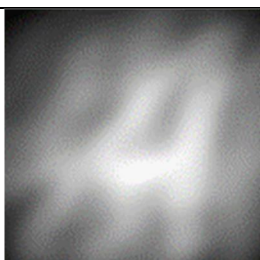


Рис.6.8. Сечения АКФ освещающих полей: номера кривых соответствуют строкам в Табл.6.1

Таблица 6.1. Результаты восстановления образа  $A$  (рис.6.7) в зависимости от освещающего поля и числа итераций  $N$

	Освещающее поле 256×256 пкс	Восстановленный образ		
		$N=441$	$N=1,681 \cdot 10^3$	$N=4,04 \cdot 10^4$
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Из результатов, представленных в табл. 6.1., видна важность правильного выбора освещающего поля. В строке 1 освещающее поле дельта-коррелировано, радиус его корреляции 1, но в силу дельта-

коррелированности это поле – не информация, а белый шум. Аналогично, и строки 2, 3 наглядно иллюстрируют, что заливка освещающего поля (строка 2) дельта-коррелированным полем качество восстановления информации не улучшает. Причина этого понятна из анализа рис.6.8 – заливка дельта-коррелированным полем обостряет лишь самую верхушку ГМ АКФ, а амплитуды боковых максимумов лишь немного понижаются (кривая 3 сравнительно с 2).

Сравнение строк 3 и 4 показывает, что уменьшение радиуса корреляции (кривые 3 и 4 на рис.6.8) одного и того же поля уменьшением размера его элементов с повышением резкости их краев ведет к повышению резкости краев и восстановленного образа – буквы *A*. Но сравнение этих же строк показывает и необходимость корректного подбора структуры поля – наличие квазипериодичности, явно видимой в сечениях АКФ на рис.6.8, влечет за собой и наличие квазиприодичности в восстановленном изображении – двоении восстановленной буквы *A*.

Изображения, представленные в табл. 6.1, наглядно показывают, почему в названии метода присутствует определение «фантомный» – освещающее поле трансформируется в восстанавливаемое изображение с ростом числа суммируемых кадров *N* и становится похожим на передаваемое изображение с приближением *N* к числу пикселей в освещающем поле.

Таким образом, метод отличается вычислительной затратностью – за выигрыш в размере сенсора, что критично в ряде практических приложений, например, в эндоскопии [12,13], приходится платить ростом вычислительной затратности и времени регистрации – надо последовательно осветить передаваемое изображение всем набором освещающих полей. Поэтому развитие метода связано с решением задачи уменьшения его вычислительной/временной затратности. Здесь можно выделить ряд направлений, в числе которых подбор специальных моделей (шаблонов) освещающих полей и редукция числа измерений (метод сжатых измерений) [12].

В первом случае появляется возможность существенного упрощения реальной схемы за счет отказа от изображающего сенсора IS и всего канала – остается только канал с интегрирующим сенсором BD, а регистрация освещающих полей заменяется численным моделированием. В настоящее время такой вариант фантомной визуализации обычно называется визуализацией однопиксельной (Single-Pixel Imaging – SPI).

Метод сжатых измерений (разрежение отсчетов) основан на возможности решения задачи оптимизации. Рассмотрим его, следуя [12]. Измерения при фантомной визуализации в общем могут быть формализованы и представлены в виде

$$\xi = \hat{A} \tau + \nu, \quad (6.9)$$

где  $\xi$  – вектор результата измерений, его компоненты – показания интегрирующего фотодетектора BD (6.1),  $\xi \in \mathcal{X}$ ,  $\tau$  – вектор, описывающий

передаваемое изображение,  $\tau \in \mathcal{F}$ , оператор  $\hat{A}$  описывается матрицей, строки которой представляют сканированные освещающие поля, т.е. это оператор измерения,  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{F}$  – конечномерные евклидовы пространства, а  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}$  – погрешность измерений.

Тогда восстановление изображения может быть описано моделью

$$\sum_{j=1}^{\dim \mathcal{X}} \left( \xi_j - \frac{1}{\dim \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{X}} \xi_k \right) \left( \mathbf{a}_j - \frac{1}{\dim \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{X}} \mathbf{a}_k \right), \quad (6.10)$$

где  $\mathbf{a}_j$  –  $j$ -ая строка оператора измерения  $\hat{A}$ , описывающая  $j$ -ое освещающее поле, а  $\xi_j$  – показания интегрирующего фотодетектора ВД при освещении транспаранта  $T$   $j$ -м полем.

Если имеется некоторое изображение, отчасти подобное передаваемому и описываемое вектором  $\mathbf{g}$ , то в силу своей подобности передаваемому оно может быть принято в качестве эталонного (или тестового), и задачу оптимизации числа измерений можно представить как задачу минимизация по  $\mathbf{g}$  следующего функционала:

$$\Delta(\hat{A} \mathbf{g}, \xi) + \alpha \Omega(\mathbf{g}) \sim \min_{\mathbf{g} \in \mathcal{F}}. \quad (6.11)$$

В выражении (6.11) первый функционал характеризует отклонение фактического результата измерения (6.9) от ожидаемого результата для тестового изображения  $\mathbf{g}$ , во втором слагаемом  $\alpha$  – параметр регуляризации,  $\Omega$  – регуляризирующий функционал, характеризующий регулярность изображения, обычно – гладкость описывающей его функции  $\tau(x)$ , поскольку разрежение отсчетов в принципе возможно только для изображений, характеризующихся определенной близостью значений интенсивности близкорасположенных пикселей, т.е. не очень маленьким радиусом корреляции как мерой внутренней связности информации

В качестве входящего в функционал оптимизации (6.11) функционала  $\Delta$  на практике применяются разные модели: это может быть и классический функционал наименьших квадратов, и логарифм функции правдоподобия, и иные – список открыт, т.к. функционал должен каждый раз подбираться под конкретную задачу по критерию его адекватности, т.е. под статистику как предполагаемых к передаче изображений, так и самой схемы, включая характеристики интегрирующего детектора ВД – статистику его фотоотсчетов и шумов. [12]

### Вопросы для самопроверки освоения темы 6.

1. Какой детектор устанавливается в канале с передаваемым изображением?
2. Что именно, какая информация передается в сигнальном канале?

3. Зачем нужен опорный канал в методе фантомных изображений?
4. Какой тип сенсора (детектора) устанавливается в опорном канале?
5. Почему метод фантомных изображений относится к корреляционным?
6. Функция корреляции амплитуд или интенсивностей используется в методе фантомных изображений?
7. Какова методика восстановления изображения?
8. Как влияет радиус корреляции функции взаимной корреляции на качество восстанавливаемого изображения?
9. Сколько каналов нужно для передачи изображения в классическом методе фантомных изображений и сколько – в вычислительном?

### Литература к теме 6

1. *Клышко Д. Н.* Простой метод приготовления чистых состояний оптического поля, реализации эксперимента Эйнштейна, Подольского, Розена и демонстрации принципа дополнительности // УФН, 1988. Т. 154. №1. С.133–152. <http://ufn.ru/ru/articles/1988/1/e/>
2. *Д. Н. Клышко* Effect of focusing on photon correlation in parametric light scattering // ЖЭТФ **94**(6), 82-90. (1988). [http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e\\_067\\_06\\_1131.pdf](http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_067_06_1131.pdf)
3. *D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko, and Y. H. Shih* Observation of two-photon ‘ghost’ interference and diffraction // Phys. Rev. Lett., 1995. V.74 (18). P. 3600–3603 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.3600>
4. *T. B. Pittman, Y. H. Shih, D. V. Strekalov, and A. V. Sergienko.* Phys. Rev. A **52** (5), R3429(R) (1995). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.R3429>
5. *D. N. Klyshko* Photons and Nonlinear Optics / Gordon & Breach, N.Y., 1989.
6. *Д. Н. Клышко* Когерентный распад фотонов в нелинейной среде // Письма в ЖЭТФ **6**(1), 490-492. (1967). [http://jetpletters.ru/ps/820/article\\_12610.pdf](http://jetpletters.ru/ps/820/article_12610.pdf)
7. *R.S. Bennik, S.J. Bently, R.W. Boyd, J.C. Howell.* Phys. Rev. Lett. **92**(3), 033601 (2004). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.033601>
8. *A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L.A. Lugiato.* Phys. Rev. Lett. **93**(9), 093602 (2004) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.093602>
9. *Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A.* Phys. Rev. A. **70**(1), 013802 (2004) DOI: [10.1103/PhysRevA.70.013802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.013802)
10. *L. Basano, P. Ottonello* Ghost imaging: Open secrets and puzzles for undergraduates // Am. J. Phys. 2007. V. 75. #4. P. 343 – 351.
11. *G. Scarcelli, V. Berardi, and Y. Shih* Phase-conjugate mirror via two-photon thermal light imaging // Appl. Phys. Lett., 2006. V.88, 061106-1–3.
12. *Балакин Д.А., Агапов Д.П., Гостев П.П. и др.* ЖЭТФ. **162**(6), 811-822 (2022). <https://doi.org/10.31857/S004445102212001X>.
13. *Агапов Д. П., Беловолов И. В., Магницкий С. А., и др.* ЖЭТФ. **164**(5), 722-730 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0044451023110032>.
14. *Белинский А.В. и др.* Письма в ЖЭТФ **117**(3-4)(2), 207-212. (2023) <https://doi.org/10.31857/S1234567823030059>

15. Kellock H., Setälä T., Friberg A.T., et al.. J. Opt. **16**(5), 055702 (2014).  
<https://doi.org/10.1088/2040-8978/16/5/055702>
16. Шумигай В.С., Морева П.Е., Наседкин Б.А., и др. Оптический журнал. **91**(5), 25–32 (2024). <http://doi.org/10.17586/1023-5086-2024-91-05-25-32>
17. Li X., Deng C., Chen M., et al. Photonics Research. 2015. **3**(4), 153–157 (2015). <https://doi.org/10.1364/PRJ.3.000153>
18. Wu J., Xie Z., Liu Z., et al. Opt. Comm. **359**, 38–43 (2016).  
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2015.09.039>
19. S. Yuan, L. Wang, X. Liu, X. Zhou. Opt. Lett. **45** (14), 3917-3920 (2020).  
<https://doi.org/10.1364/OL.392424>
20. Z. Leihong, Z. Zhisheng, et. al. Applied Physics B, **126**,136 (2020).  
<https://doi.org/10.1007/s00340-020-07487-4>
21. R.V. Vinu., Z. Chen, R. Kumar Singh, Ji-X. Pu. Optica. **7**(12), 1697 (2020).  
<https://doi.org/10.1364/OPTICA.409886>
22. Vinu Raveendran Pillai Vasantha Kumari, Z. Chen, R. Kumar Singh, J. Pu. Ch. 2 in: Holography: Recent Advantages and Applications. Ed. by J. Rosen. EBOOK ISBN: 978-1-80356-595-1 (2023).  
<https://doi.org/10.5772/intechopen.107011>
23. Gibson G.M., Johnson S.D , Padgett M.J. Single-pixel imaging 12 years on: A review // Opt. Exp. **28**(19). P. 28190–28208, (2020).  
<https://doi.org/10.1364/OE.403195>
24. Hoshizawa T. et al. Holographic optical correlator-based single pixel imaging with deep learning image reconstruction // Optics Continuum, **4**(2), 333 (2025). <https://doi.org/10.1364/optcon.550531>
25. Павлов А.В. Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>

## Тема 7. Основы вейвлет-анализа

В предшествующих разделах курса мы рассмотрели модели обработки информации, основанные на преобразовании Фурье, в том числе модели, соответствующие концепции операционного исчисления. Сравним введенные ранее определения преобразования Фурье (1.1) функции  $f(x)$ :

$$F(f(x)) = F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-j2\pi vx) dx ,$$

и функцию корреляции двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  (1.12), служащую, как мы видели в разделе 1.2.2, математическим инструментом оценивания сходства двух функций:

$$K_{f_1 f_2}(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx .$$

Можно видеть определенную аналогию этих определений и, основываясь на ней, трактовать преобразование Фурье как вычисление значений корреляции анализируемой функции  $f(x)$  с набором гармоник разной частоты – опознавание гармоник в анализируемой функции. В этом и заключается идея классического спектрального анализа при взгляде на неё с точки зрения задачи распознавания. Тогда спектр функции можно трактовать как набор значений её корреляции с эталонами – гармониками.

Достаточно часто возникают ситуация, когда в анализируемой функции необходимо найти какую-либо локальную особенность и, поскольку она локальная, то определить и её локализацию – координату. На практике такие задачи встречаются весьма часто, например, при анализе данных сейсморазведки, в аэро- и гидро-динамике, при сжатии изображений, распространении ультракоротких импульсов, etc. Здесь вступает в действие ранее упомянутый нами принцип дополнительности – спектр мощности дельта-функции, т.е. функции с абсолютной точностью локализации, в фурье-пространстве представляется распределением с постоянной спектральной плотностью – белым шумом как бесконечным набором гармоник – информация о локализации дельта-функции в спектральном пространстве при работе только со спектром мощности полностью теряется. Преобразование Фурье дает эту информацию, но она представлена в спектральном пространстве мнимой частью фурье-образа, и поэтому в классическом спектральном анализе, использующем измерение в спектральной области квадратичным приемником, она теряется. [1-3]

Если особенность имеет некоторую протяженность по координате  $x$ , то спектральная плотность её спектра мощности уже не постоянна, но набор гармоник достаточно велик и, главное – их сумма должна сформировать искомую особенность именно в точке её локализации. Для этого нужна информация о взаимном сдвиге гармоник – спектр фаз, т.е. нужна технология регистрации комплексно-значимых функций – голография.

На рис.7.1 показано колебание постоянной частоты, но со сбоем фазы в точке 400. На рис.7.2 даны спектры мощности: гармоники без сбоя и со сбоем. Из рис.7.2 видно, что сбой фазы ведет к обогащению спектра мощности более высокими частотами, но сам вид спектра мощности позволяет сделать вывод только о нарушении гармоничности колебания, но ни о виде этого нарушения, ни о его локализации информации нет. [1-3]

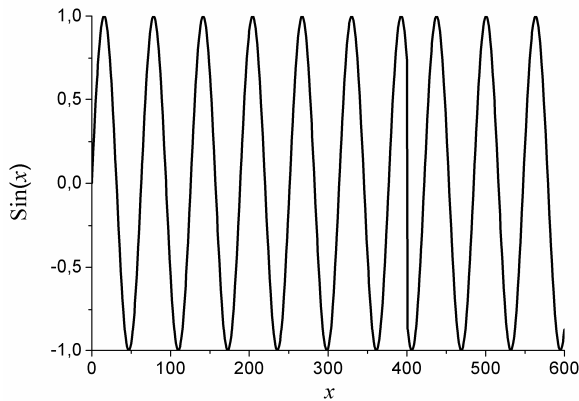


Рис.7.1. Гармоника со сбоем фазы в точке  $x=400$  [1]

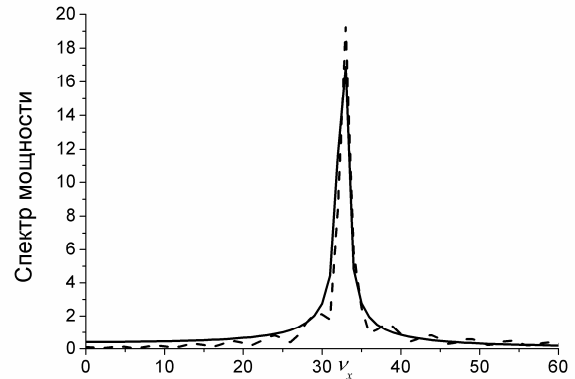


Рис.7.2. Спектры мощности: сплошная – гармоника, штрих – гармоника со сбоем фазы [1]

Достаточно очевидно, что для эффективного распознавания локальных особенностей корреляционным методом (а мы сейчас трактуем преобразование Фурье как разновидность корреляционного метода), эталон должен быть в максимальной степени похож на искомую особенность. Так и поступим – найдем функцию  $\psi(x)$ , похожую на искомую особенность, и вычислим их взаимную корреляцию, которую обозначим  $W(\Delta)$  – букву  $W$  мы взяли, поскольку хотим подойти к понятию вейвлета – wavelet:

$$W_{f\psi}(\Delta) = f(x) \otimes \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) \psi^*(x) dx . \quad (7.1)$$

Задача заключается в нахождении функции  $\psi(x)$ , похожей на искомую особенность. Попробуем функцию

$$\psi(x, a) = \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot m^2}\right) = -\frac{x^2}{a^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot m^2}\right), \quad (7.2)$$

её графическое представление для двух значений параметра  $a$ , входящего в (7.2), дано на рис. 7.3, а известна она как WAVE-вейвлет.

На рисунках 7.4 и 7.5 показаны результаты вычисления (7.1): на рис.7.4.а использована функция (7.2) с неудачно подобранным значением параметра  $m$  – очевидным образом не похожая на искомую особенность, а на рис 7.5 значение параметра  $m$  подобрано удачно – функция похожа. На рис.7.4.б хорошо видно, что вычисление (7.1) в поиске локализации сбоя не помогло, а вот использование явно похожей функции (7.2) – для этого мы подобрали оптимальное с точки зрения похожести значение параметра



$t$  – принесло успех, показанный на рис.7.5.б – прекрасно виден хорошо локализованный в точке сбоя  $x=400$  глобальный максимум, существенно выделяющийся как по форме, так и по амплитуде из всей функции (7.1).

Для иллюстрации важности правильного подбора эталона на рис.7.6 и рис.7.7 показаны результаты вычисления (7.1) – сравнения процесса с вейвлетами Хаара и DOG, соответственно. Сам сбой по фазе увидеть можно, но хорошо выделяемого из всей функции (7.1) сигнала, пригодного не только для визуального распознавания, но и для его аппаратного детектирования – измерения квадратичным приемником, нет.

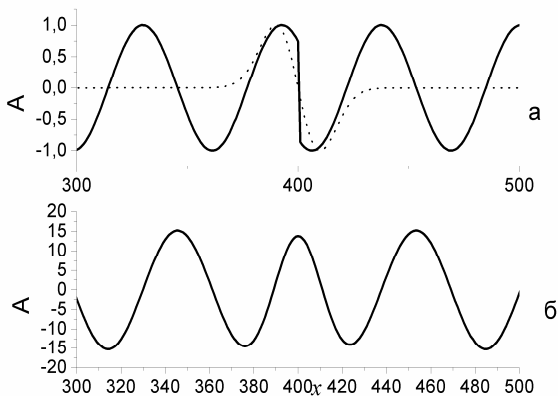
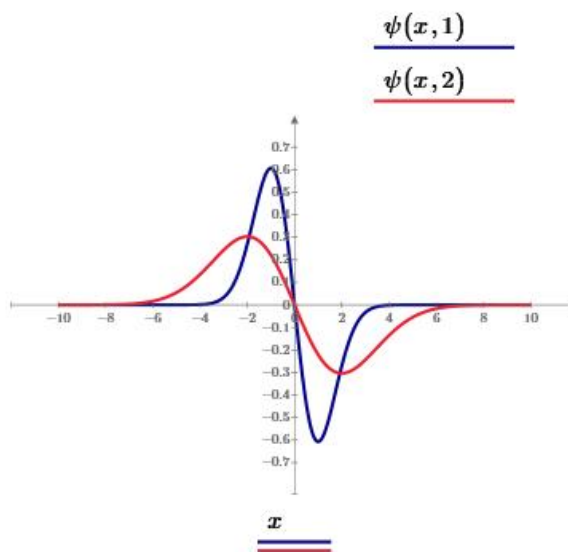


Рис.7.4. Неудачно подобранный по масштабу WAVE-вейвлет и результат его использования [4]

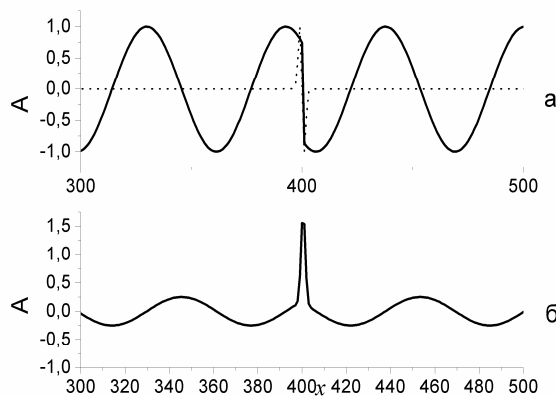


Рис.7.5. Удачно подобранный по масштабу WAVE-вейвлет и результат его использования [4]

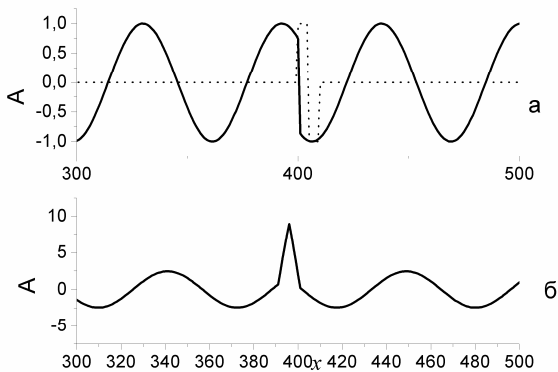


Рис.7.6. Вейвлет Хаара и результат его использования для поиска особенности [1]

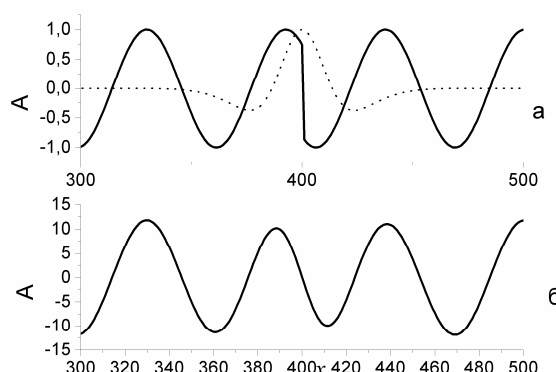


Рис.5.7. DOG-вейвлет и результат его использования для поиска особенности [1]

В этом и заключается идея вейвлет-анализа, предполагающего регистрацию спектра именно квадратичным приемником. Сам термин «вейвлет» введен в научный оборот в середине 80-х годов XX-го века А. Гроссманом и Ж. Морле (Alexander Grossmann, Jean Morlet), занимавшихся анализом акустических и сейсмических сигналов. В отечественном научном сообществе сначала предпринимались попытки найти русские аналоги, в основном использовались два варианта: «волночка», т.е. буквальный перевод (калька) с английского, и «всплеск». Но на сегодня термин «вейвлет» используется без перевода, он, как и многие другие, исходно «заморские» слова, уже органично вошел в русский язык. [1-4]

Обратим ещё раз внимание на рисунки 7.4 и 7.5 – если мы заранее не знаем оптимальное значение параметра эталонной функции, а параметр  $m$  представляет здесь масштаб, то для успешного решения задачи необходимо дать системе возможность перебора, как это имеет место и с параметром сдвига  $\Delta$ . Отсюда следует, что результат вычисления (7.1) должен быть функцией двух аргументов – не только параметра сдвига  $\Delta$ , но и масштаба  $m$ . Соответственно, вейвлет-образ функции одного аргумента должен быть функцией двух аргументов – пространственного сдвига  $\Delta$  и масштаба  $m$ . [1-5]

Теперь рассмотрим ещё одну «слабость» такого мощного инструмента, как преобразование Фурье – адекватность математики физической реальности с точки зрения конечности энергии реальной функции. [1-4]

Рассмотрим пространство функций  $L^2(0, 2\pi)$  со скалярным произведением, ограниченным на интервале  $(0, 2\pi)$ :

$$\|E\|_2 = \langle E(x), E(x) \rangle = \int_0^{2\pi} E(x), E^*(x) dx < \infty, x \in (0, 2\pi). \quad (7.3)$$

Согласно (7.3)  $E(x)$  – кусочно-непрерывная функция на заданном интервале  $(0, 2\pi)$ . Расширим её до периодической на оси  $R(-\infty, \infty)$ :

$$E(x) = E(x - 2\pi), x \in R. \quad (7.4)$$

Разложим её в ряд Фурье:

$$E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp(jnx) \quad (7.5)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x) \exp(-jnx) dx, n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Если мы работаем с непериодическими функциями, то конечная норма энергии для них должна быть определена на всей оси действительных числе  $R(-\infty, \infty)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 dx < \infty. \quad (7.6)$$

Из определения конечной нормы (7.6) следует, что среднее значение любой функции из пространства  $L^2(R)$  стремится к нулю на бесконечности. Гармоника как периодическая функция (7.4), принадлежащая пространству  $L^2(0, 2\pi)$ , этому требованию не удовлетворяет. Отсюда с очевидностью следует, что гармоника не может формировать базис пространства реальных функций  $L^2(R)$ , реальных в силу конечности нормы энергии именно на бесконечном интервале действительных чисел. [1,2] Введенная же нами ранее функция (7.2) (рис. 7.3) требованию на убывание среднего значения полностью соответствует, т.е. может быть базисом разложения – для этого необходимо обеспечить механизм порождения семейства таких функций, покрывающих диапазоны изменений масштабов (параметр  $i$  в (7.2)) и сдвигов  $\Delta$ , и удовлетворяющих условию ортогональности. Для дискретного семейства базисных функций (7.6) масштабирование аргумента функции имеет смысл определить через целые степени двойки.

Поскольку мы работаем в рамках традиционного определения квадратичной нормы как скалярного произведения (7.3), то очевидно, что для любой нормированной функции  $\psi(x) \in L^2(R)$  имеет силу сохранение нормировки и для всего семейства образующих базис разложения функций  $\{\psi_{m\Delta}\}$ , порожденных из исходной её сдвигами  $\Delta$  и масштабированием  $m$

$$\|\psi(2^m x - \Delta)\|_2 = 2^{-m/2} \|\psi(x)\|_2. \quad (7.7)$$

Желательно добавить также и требование ортогональности, поскольку работать с ортонормированным базисом разложения удобно:

$$\forall \psi_{m\Delta}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - \Delta): \langle \psi_{m\Delta}, \psi_{n\epsilon} \rangle = \delta_{m\Delta}, \delta_{n\epsilon}. \quad (7.8)$$

Очевидно, что базис пространства  $L^2(R)$  может быть построен также и для непрерывного диапазона значений сдвигов и масштаба вейвлета, как это имеет место и для преобразования Фурье:

$$\forall \psi \in L^2(R), m, \Delta \in R: \psi_{m\Delta}(x) = |m|^{-1/2} \psi\left(\frac{x - \Delta}{m}\right), \quad (7.9)$$

откуда получим ранее введенное из интуитивных соображений выражение (7.1), дополненное масштабам:

$$\begin{aligned}
W_\phi(E(x)) &= W_\phi(m, \Delta) = |m|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \psi^* \left( \frac{x - \Delta}{m} \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \psi_{m, \Delta}^*(x) dx
\end{aligned} \tag{7.10}$$

где астериск, как и ранее, обозначает комплексное сопряжение.

Для строгого определения вейвлета введём вспомогательную R-функцию, определив её как функцию из пространства  $L^2(R)$  такую, что существуют две константы  $A$  и  $B$  такие, что  $0 < A \leq B < \infty$  и условие

$$A \left\| \{c_{m, \Delta}\} \right\|_2^2 \leq \left\| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} c_{m, \Delta} \psi_{m, \Delta} \right\|_2^2 \leq B \left\| \{c_{m, \Delta}\} \right\|_2^2 \tag{7.11}$$

выполняется для любой ограниченной и дважды квадратично суммируемой последовательности значений  $\{c_{m, \Delta}\}$ , удовлетворяющей условию конечности скалярного произведения на бесконечном интервале сдвигов

$$\left\| \{c_{m, \Delta}\} \right\|_2^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} \{c_{m, \Delta}\} \{c_{m, \Delta}^*\} < \infty. \tag{7.12}$$

Эти  $\{c_{m, \Delta}\}$  – коэффициенты разложения функции  $E(x)$  согласно (7.10):

$$c_{m, \Delta} = W_\phi \left( \frac{1}{2^m}, \frac{\Delta}{2^m} \right). \tag{7.13}$$

Тогда, если для локализованной R-функции существует обратная функция  $\psi^{-1}$ , также принадлежащая пространству  $L^2(R)$ , и имеет силу

$$\begin{aligned}
\psi_{m\Delta}(x) &= 2^{m/2} \psi(2^m x - \Delta) \\
\psi^{m\Delta}(x) &= \psi_{m\Delta}^{-1}(x) = 2^{m/2} \psi^{-1}(2^m x - \Delta), m, \Delta \in R
\end{aligned} \tag{7.14}$$

то эта функция – вейвлет. [1-4] Требование на наличие обратной функции интуитивно понятно – если мы «разобрали» какую-либо функцию (стадия анализа), то затем мы должны её и «собрать» (стадия синтеза) без потерь и искажений. Иначе это будет уже не анализ, а просто ломание.

Перечислим существенные признаки вейвлета [1-4]:

1. Локализация как в частотном пространстве, так и во временном представлениях.
2. Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 0. \tag{7.15}$$

Свойство нулевого среднего позволяет уже при взгляде на графическое представление функции определить, может ли она быть вейвлетом.

3. Ограниченность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty. \quad (7.16)$$

Свойства локализации и ограниченности могут быть совместно выражены следующим образом:

$$|\psi(x)| < (1 + |x|^n)^{-1}. \quad (7.17)$$

4. Автомодельность базиса или свойство самоподобия обусловлено тем, что все функции, формирующие базис, порождаются масштабированием и сдвигом их базового вейвлета. [1,2]

Базис может быть не только вещественным, но и комплексным.

Обратим внимание, что для вейвлет-преобразования также, как и для преобразования Фурье, актуален принцип неопределенности, который может быть сформулирован также в терминах постоянства относительной разрешающей способности по частоте  $\nu$ :

$$\frac{d\nu}{\nu} = \text{const},$$

или, что эквивалентно, постоянства площади частотно-временного (частотно-пространственного) окна:

$$d\nu \cdot dt = \text{const}$$

$$d\nu \cdot dx = \text{const}$$

Некоторые, ставшие уже классическими, вейвлеты даны в табл.7.1.

Таблица.7.1. Примеры вейвлетов

Название	Формула	Графическое представление
<b>Вещественные дискретные базисы</b>		
Вейвлет Хаара (Haar)	$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases}$	
Французская шляпа (French hat)	$y(x) := \begin{cases} 1 & \text{if }  x  \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \text{if } \frac{1}{3} <  x  \leq 1 \\ 0 & \text{if }  x  > 1 \end{cases}$	

Вещественные непрерывные базисы		
DOG-вейвлет (Difference of Gaussians)	$z(x) := \exp\left[-\frac{( x )^2}{2}\right] - 0.5 \exp\left[-\frac{( x )^2}{8}\right]$	
Вейвлет первого порядка WAVE-вейвлет	$m(x) := \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	
Комплексные базисы		
Вейвлет Морле	$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right) \cdot \left[ \exp(iw_0 t) - \exp\left(-\frac{w_0^2 a^2}{4}\right) \right]$ <p>Фурье-образ вейвлета Морле:</p> $\Psi(t) = a\sqrt{\pi} \left[ \exp\left(-\frac{a^2(w_0 - w)^2}{4}\right) - \exp\left(-\frac{a^2(w_0 + w)^2}{4}\right) \right]$	<p>Мнимая и действительная части вейвлета Морле</p>

Вейвлет-преобразование позволяет получить именно квадратичным приемником, в отличие от анализа Фурье, информацию как о спектральном составе анализируемого процесса, так и о его временном или пространственном развитии / изменении. Поэтому область его преимущественного применения – анализ существенно нестационарных процессов, например, климатических изменений, геофизической информации (сейсморазведка), турбулентных потоков и т.п.

Вейвлет-образ называют вейвлет-спектром или масштабно-временным спектром. Вейвлет-спектр функции одного аргумента описывает поверхность в трехмерном пространстве, и на практике обычно его представляют проекцией на плоскость сдвиг-масштаб в виде полутоновой картины (рис.7.8. – средний ряд) или изолиний, представляющих

экстремумы (рис.7.8. – нижний ряд) – это представление называется скелетоном.

На рис.7.8 приведены два варианта суммы двух синусоид, различающихся по частоте, и представление их вейвлет-спектров полутоновыми картинками и скелетонами [1,4,5].

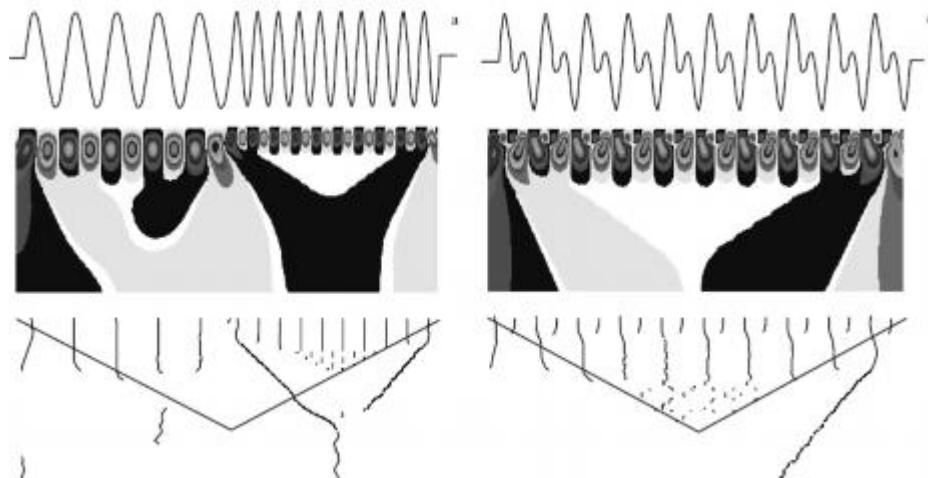


Рис.7.8. Два сигнала, представляющие собой сумму двух гармоник – на рис.7.8.а. гармоники разной частоты предъявляются последовательно, на рис.7.8.б. – параллельно. Копия из [2]

Интересно применение вейвлет-анализа для анализа климатических процессов и выявления глобальных циклов. Например, на рис.7.9 показан временной ряд метеорологического явления Эль-Ниньо и его вейвлет-образ, позволяющий определить периодичность этого явления и тем самым проследить закономерности климатических изменений в общепланетарном масштабе. [1,2]

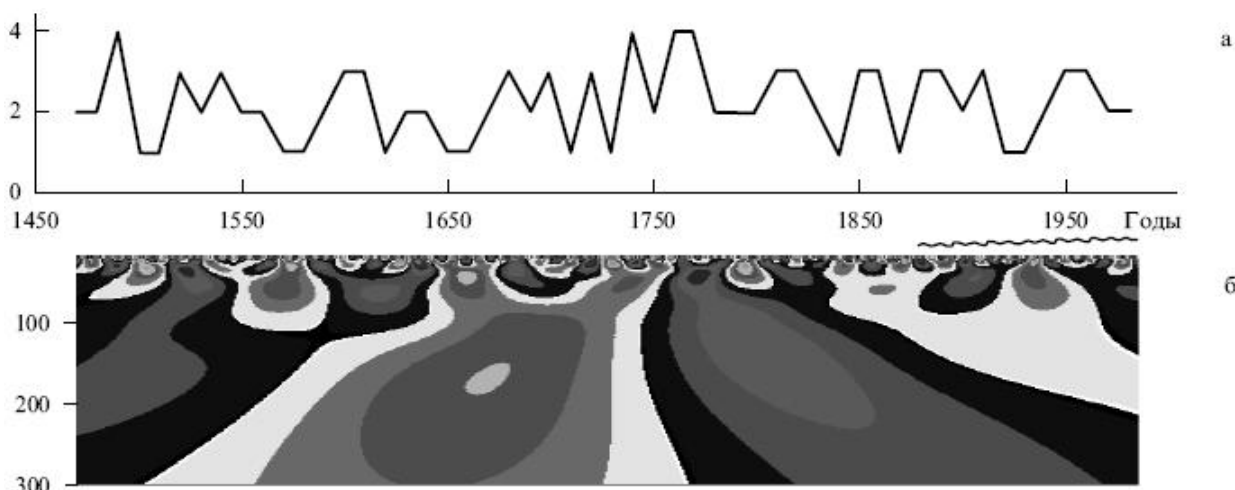


Рис.7.9. Временной ряд Эль-Ниньо и его вейвлет-спектр на протяжении 500 лет наблюдений, копия из [2]

На рис.7.10 дан другой пример – вейвлет-анализ потоков солнечного ветра.

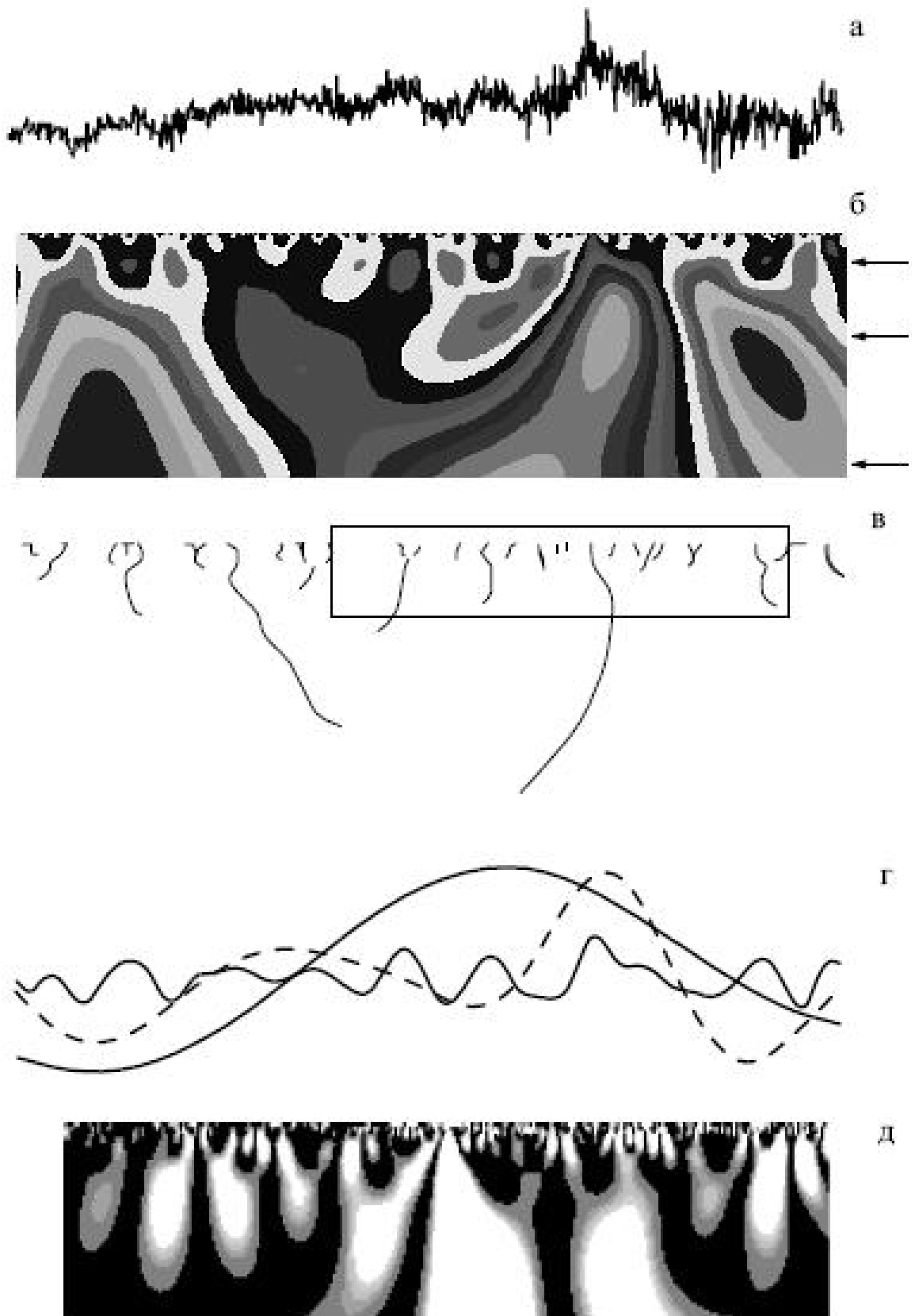


Рис.7.10. Временной ряд потоков ионов солнечного ветра (7.10.а), его вейвлет-спектр (7.10.б.) при разложении по МНАТ-вейвлету, его скелетон (7.10.в.), зависимость коэффициентов вейвлет-разложения от времени при значениях масштаба, отмеченных стрелками (7.10.г.) и распределение плотности энергии для фрагмента в рамке на 7.10.в. (7.10.д.), копия из [2]



Вейвлет-анализ, как и другие интегральные преобразования, вычислительно затратен и, следовательно, актуально такое конкурентное преимущество оптических методов, как естественный параллелизм реализации интегральных преобразований. Видим, что выражение (7.10) описывает свертку исследуемой функции с ядром – комплексно-сопряженным выбранным вейвлетом. Поэтому естественным образом напрашивается применение здесь ранее рассмотренной нами  $4f$  схемы голографии Фурье. [1] Но, в отличие от голографического коррелятора, на выходе вейвлет-анализатора мы должны получить не один глобальный максимум автокорреляционной функции, а весь вейвлет-спектр – для анализируемой функции одного аргумента это двумерная картина.

Принципиальная схема оптического вейвлет-анализатора показана на рис.7.11. [1,6]

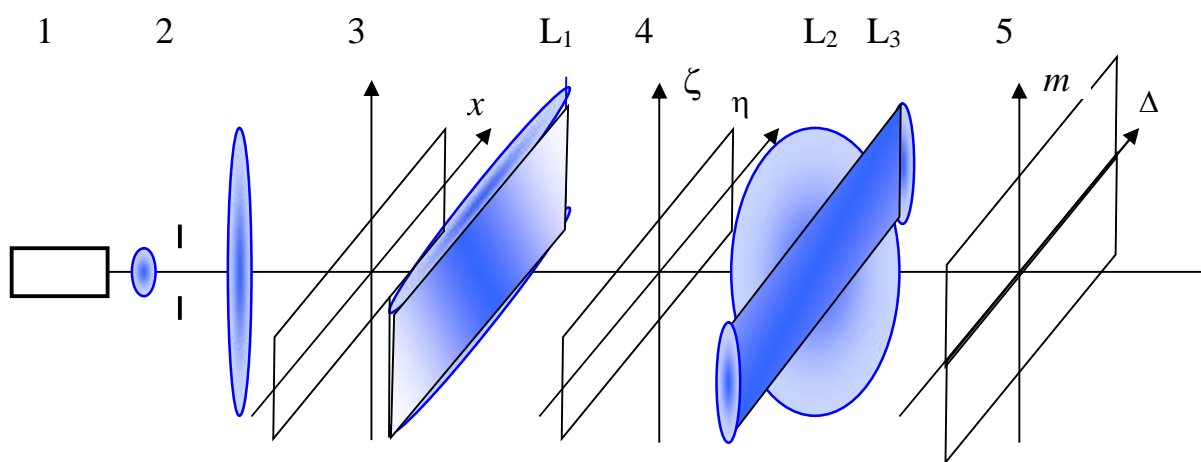


Рис.7.14. Схема оптического вейвлет-анализатора [1,6]

Излучение лазера 1, расширенное коллиматором 2, освещает транспарант 3, представляющий анализируемую функцию  $f(x)=\tau(x)$ , по второй координате  $y$  зависимость просто растянута из линии в широкую полосу. Цилиндрическая линза  $L_1$  выполняет одномерное преобразование Фурье этой функции, в её задней фокальной плоскости 4 помещен голографический фильтр, представляющий фурье-образы выбранного базиса вейвлет-преобразования: по оси  $\eta$ , соответствующей оси  $x$  в пространстве функций, представлены (в неявной форме) сдвиги – тут используется свойство сдвиговой инвариантности как преобразования Фурье, рассмотренное нами ранее, так и тонкой голограммы, а по оси  $\zeta$  – масштабы, представленные разнесёнными по оси  $\zeta$  масштабированными фурье-образами базисной функции. Второе преобразование Фурье по одной координате и проецирование по другой координате выполняется системой из цилиндрической и сферической линз  $L_2$  – в плоскости 5 имеем двумерный вейвлет-образ анализируемой функции  $f(x)$ .

Разложение по wavelet-базису применяется при сжатии изображений, распознавании, например, отпечатков пальцев [7], спектров [8], обработке информации [9]. В частности, применение вейвлетов как базиса разложения позволило при сжатии по стандарту JPEG 2000 убрать такие артефакты, как мультиплицирование резких краев, наблюдавшиеся при сжатии изображений в более ранних версиях JPEG.

### **Вопросы для самоконтроля освоения темы 7**

1. Соответствует ли базис разложения Фурье реальности? Если нет, то в чём проблема?
2. На каком интервале гармоника имеет конечную норму энергии?
3. На каком интервале конечную норму энергии имеет вейвлет-функция?
4. Позволяет ли регистрация спектра мощности определить локализацию особенности анализируемого процесса?
5. Почему задача локализацию особенности анализируемого процесса успешно решается методом голографии Фурье? В чем отличие метода голографии Фурье от классического спектрального анализа?
6. Какова размерность Wavelet-образа функции одной переменной?
7. Какие атрибуты вейвлета позволяют уже при взгляде на графическое представление функции определить, является ли она вейвлетом?

### **Литература к Теме 7**

1. *Павлов А.В.* Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений – СПб: Университет ИТМО, 2021. Т.1. – 90с.  
<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2723.pdf>
2. *Н.М. Астафьева* Вейвлет-анализ: основы теории и применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166. – №11. – с.1145-1170.
3. *И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло* Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т.171. – №5. – с.467-500.
4. *А.П.Петухов* Введение в теорию базисов всплесков. СПб ГТУ, 1999.
5. *А.Н.Яковлев.* Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирский ГТУ, 2003.
6. *В.Ю.Петрунькин, Е.Т.Аксенов, Г.А.Стариков* Оптический вейвлет-процессор для обработки сложных сигналов // Письма в ЖТФ. 2001. Т.2., вып.22. с.24-29.
7. *К. Chalasińska-Macukow* Fingerprint Identification by Using Artificial Neural Network with Optical Wavelet Preprocessing. 2003.  
<https://www.semanticscholar.org/CorpusID:18102173>
8. *Yang Xi, et.al.* A Novel Pre-Processing Algorithm Based on the Wavelet Transform for Raman Spectrum // Appl. Spectrosc. **72**, 1752-1763 (2018).  
<https://opg.optica.org/as/abstract.cfm?URI=as-72-12-1752>
9. *Waleed A. Mahmoud Al-Jawher* Swin Wavelet Transformer (SWT): Mixing Tokens with Wavelet and Multiwavelet Transforms // Journal Port Science Research, **7**(3), 2024. <https://doi.org/10.36371/port.2024.3.14>

Павлов Александр Владимирович

**Оптические и корреляционные методы вычислений и  
обработки информации. Том 1. Основы оптических  
информационных технологий, использующих  
преобразование Фурье и метод голографии**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А