

ИТМО

Е. Н. Попов

**Квантовые сенсоры и квантовые
вычисления**



Санкт-Петербург
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Е. Н. Попов

Квантовые сенсоры и квантовые вычисления

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

рекомендовано к использованию в университете ИТМО по
направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебно-методического пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ
высшего образования магистратуры

ИТМО

Санкт-Петербург
2025

Попов Е.Н., Квантовые сенсоры и квантовые вычисления– СПб: Университет ИТМО, 2025. – 99 с.

Рецензент:

Курапцев Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Высшей школы прикладной физики и космических технологий, СПбПУ;

Аннотация:

Данное учебное пособие содержит обзор по современным технологиям квантовых стандартов частоты, оптических гироскопов и гироскопов на основе магнитного резонанса, а также описание основных принципов создания квантовых вентилях. Пособие ставит своей задачей прежде всего знакомство студента с современным состоянием развития квантовых технологий в мире, которые согласно дорожной карте развития квантовых технологий в России относятся к двум субтехнологиям: квантовой сенсорике и квантовым вычислительным системам. Также в тексте можно найти краткий справочный и теоретический материал, который поможет моделировать процессы взаимодействия атомов с внешним излучением при разработке конкретных квантовых устройств.

ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента. ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2025

© Попов Е.Н., 2025

Оглавление

Введение	5
1 Элементы квантовой сенсорики	9
1.1 Квантовая метрология и её задачи	10
1.1.1 Предел точности, обусловленный неопределённостью Гейзенберга	12
1.1.2 Квантовое сжатие осциллятора как пример преодоления дробового шума при измерении	13
1.2 Стандарты частоты	17
1.2.1 Современное состояние проблемы, достигнутые показатели точности и стабильности часов	18
1.2.2 Технология стабилизации и обратная связь	21
1.2.3 Стандарт частоты на эффекте когерентного пленения населённости	25
1.2.4 Сверхточные атомные часы: цезиевый фонтан	29
1.2.5 Атомные часы на высокозаряженных ионах	32
1.3 Гироскопы	34
1.3.1 Современное состояние проблемы, достигнутые показатели дрейфа и чувствительности гироскопов	36
1.3.2 Лазерные и волоконные гироскопы	39
1.3.3 Интерферометры Саньяка в гироскопии	40
1.3.4 Атомные интерферометры	42
1.3.5 Гироскопы на эффекте магнитного резонанса	43
1.4 Контрольные вопросы	46
2 Квантовые вычислительные системы	48
2.1 Атомные технологии реализации квантовых регистров	52
2.1.1 Джозефсоновские кубиты	53
2.1.2 Кубиты на захваченных ионах	54
2.2 Световые кубиты, LOQC	57
2.2.1 Оптический направленный ответвитель	60

2.3	KLM-протокол квантовых вычислений	62
2.3.1	Светоделитель	64
2.3.2	Вентили Паули для однофотонных кубитов	65
2.3.3	CNOT вентиль	68
2.3.4	Вентиль нелинейного фазового сдвига	72
2.4	Хранение и передача кубитов	74
2.4.1	Оптическая квантовая память	75
2.4.2	Квантовые повторители	78
2.5	Контрольные вопросы	80
3	Приложение: атомные спектры	83
3.1	Стационарные состояния	83
3.2	Энергетический уровень и спонтанный распад	85
3.3	Двухуровневая система и резонанс	87
3.4	Квантовые числа	89
3.5	Спектральные термы	91
3.6	Контрольные вопросы	95
	Заключение	96

Предисловие

На момент появления идеи о создании данного курса, его программа выглядела совсем по-другому. Вначале он задумывался как специальный раздел квантовой теории излучения, наполненный большим количеством утверждений и математических выкладок. Именно строгий формализм представлялся автору ключевым аспектом этого текста ещё до его написания. Однако в ходе активных и зачастую неприятных обсуждений в коллективе коллег, друзей и единомышленников было принято решение отказаться от первоначального плана в пользу насыщенного обзорного курса про квантовые технологии, которые используются для решения научных и современных инженерных задач. И здесь автору хочется сказать искренние слова благодарности коллегам за то, что мотивировали на смену парадигмы и на написание предлагаемого учебного пособия. Для подготовки обзорного курса по современным квантовым технологиям потребовалось изучить много литературы, о существовании которой автор не знал раньше. По большей части это были научные статьи последнего десятилетия или несколько старше, а также книги (отдельные главы), посвящённые принципам работы самых разных квантовых устройств. Мир технологий, который открылся по итогам беглого охвата собранной литературы действительно огромен и он захватывает. Для убеждённого теоретика, который живёт в мире абстрактных идей и верит в материальность математических формул, технические подробности работы сенсоров, квантовых вентилях, стандартов частоты, магнитометров, квантовых компьютеров и атомных интерферометров показался эквивалентным вымышленному миру фэнтези с его магией и тайным знанием. Погружение в практическую плоскость той науки, которой занимаешься на протяжении ряда лет теоретически, расширяет сознание и приводит к пониманию языка эксперимента. Для развития это необходимо. Несмотря на такую, казалось бы, банальную истину, трудно заставлять себя выходить из привычной области исследований. Поэтому необходимость подготовки данного учебного пособия для автора оказалось ещё и сильной мотивацией освоения чего-то нового. Хочется верить, что студенты, изучающие квантовые технологии и прочитавшие данное учебное пособие, разделят с автором тот творческий порыв, который возникает при знакомстве с миром прикладной квантовой физики. В конце предисловия автору

хотелось бы упомянуть коллектив теоретической группы лаборатории квантовых процессов и измерений ИТМО в составе Антона Козубова, Андрея Гайдаша, Георгия Мирошниченко и Алексея Киселёва, которые поддерживали и помогали дельными советами при подготовке текста.

*н.с. лаборатории
квантовых процессов и измерений ИТМО
к.ф.-м.н. Попов Евгений
лето 2024*

Введение

Представленное учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с дорожной картой развития квантовых технологий Российской Федерации¹. Согласно ей, квантовые технологии делятся на три субтехнологии, две из которых являются предметом обсуждения в рамках изучения настоящей дисциплины — квантовая сенсорика и квантовые вычислительные системы.

Учебно-методическое пособие содержит две не связанные между собой содержательные части, посвящённые двум субтехнологиям, и приложение. В каждой из двух содержательных частей присутствует своё введение, в котором изложена актуальность изучаемой субтехнологии. Следует обратить внимание на главы о современном состоянии развития каждой квантовой технологии — это информация собрана на основе широкого обзора открытых ресурсов, доступных на 2024 год. В учебно-методическом пособии сделаны акценты на описание алгоритмов работы квантовых устройств, которые автор считает наиболее важными при обучении данной дисциплине, чтобы читатель сформировал образ общего подхода квантовой науки к процессам измерения и вычислениям. Учитывая то, что разнообразие квантовых технологий чрезвычайно велико и в рамках курса охватить их невозможно, мы перечислим те некоторые важные темы (далеко не все), которые остались вне рассмотрения. В квантовой сенсорике это магнитометры, фотонные детекторы, субатомные манипуляторы и спектроскопия одиночных молекул. В квантовых вычислительных системах это технологии спиновых кубитов, развиваемые в РКЦ кудиты и облачные квантовые вычисления. Автор настоятельно рекомендует читателю самостоятельно найти общую информацию об этих технологиях, чтобы самостоятельно определить для себя ту узкую область, которая вызывает у него наибольший отклик.

Приложение разделено на несколько глав. В первых главах разъяснены некоторые важные термины, которые встречаются в дисци-

¹<https://digital.gov.ru/uploaded/files/07102019kvantyi.pdf>

плине. Две заключительные главы демонстрируют структуру атомных энергетических уровней, без которой невозможно обсуждение квантовых технологий, основанных так или иначе на взаимодействии электромагнитного излучения с веществом. Автор рекомендует изучить содержание приложения не в конце, а в начале изучения дисциплины. Это поможет восстановить в памяти некоторые общие принципы устройства квантовых систем.

Литература:

Ниже приведена небольшая подборка классической учебной литературы, которая поможет в освоении данной дисциплины. Кроме неё в тексте присутствуют ссылки на источники информации для помощи в поиске дополнительных сведений по обсуждаемому вопросу: 23 ссылки в первой части и 20 ссылок во второй части.

- Львовский А. *Отличная квантовая механика*. // Springer, Пер. с англ. — М.: Альпина нон-фикшн, 2019. 422 с. ISBN 978-5-91671-952-9
- Прескилл Дж. *Квантовая информация и квантовые вычисления. Пер. с англ. Т.1* // URSS 2008. 464 с. ISBN 978-5-93972-651-1
- Прескилл Дж. *Квантовая информация и квантовые вычисления Т.2* // URSS 2011. 312 с. ISBN 978-5-4344-0030-5
- Риле Ф. *Стандарты частоты. Принципы и приложения: Пер. с англ.* URSS 2009. 512 с. ISBN 978-5-9221-1096-9
- Н.М. Померанцев, Г.В. Скроцкий *Физические основы квантовой гирокопии* // УФН 100 361–394 (1970)
- Bhat and Kurian *Bose Fundamentals of Navigation and Inertial Sensors* // PHI; 1st edition 2014. 425 p. ISBN-13: 978-8120348592
- Edward L. Wolf, Gerald B. Arnold, Michael A. Gurvitch, John F. Zasadzinski *Josephson Junctions History, Devices, and Applications* // Jenny Stanford Publishing 2017. 410 p. ISBN 9789814745475
- Гайдаш А.А., Егоров В.И., Иванова А.Е., Козубов А.В., Кынев С.М., Наседкин Б.А., Самсонов Э.О. *Квантовые технологии: учебно-методическое пособие*. // Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2023. 136 с.
- G. Steele and T. van der Sar *Quantum Sensing and Measurement* // TU Delft open 2023. (interactive textbook) <https://doi.org/10.59490/tb.82>
- G. Nemova *Laser Cooling Fundamental Properties and Applications* // Jenny Stanford Publishing 2016. 478 p. ISBN 9789814745048

Глава 1

Элементы квантовой сенсорики

Согласно дорожной карте развития квантовых технологий в России, квантовая сенсорика принадлежит одной из трёх субтехнологий, из которых состоят непосредственно "Квантовые технологии". Цитата из дорожной карты КТ:

Квантовые сенсоры и метрология – совокупность высокоточных измерительных приборов, основанных на квантовых эффектах. Высокая степень контроля над состоянием отдельных микроскопических систем позволяет создавать сверхточные квантовые сенсоры с пространственной разрешающей способностью, сравнимой с размером одиночных атомов, а также высокоточные атомные часы.

Мировой рынок квантовых сенсоров далёк от насыщения и продолжает быстро расти. Уровень подготовленности российского сегмента ко "второй квантовой революции" по шкале TRLs оценивался до 5 баллов из 9 на момент составления дорожной карты КТ (2019). К 2024 году средняя оценка варьируется в районе 3-6 баллов для разных направлений. По отдельным технологиям квантовой сенсорики, на которых сфокусировано целевое государственное финансирование (стандарты частоты и волоконно-оптические гироскопы), уровень подготовки дошёл до 8 баллов. Это значит, что квантовые сенсоры созданы в виде готового изделия и прошли процедуру сертификации. Уровень технологического развития квантовых сенсоров в США, которые являются лидерами в этой области, заметно выше и соответствует оценке 8-9 из 9 по шкале TRLs.

Развитие квантовой сенсорики является необходимым для усовершенствования навигации (стандарты частоты, гироскопы), медицины (магнитометры), электроники и оптокоммуникаций (фотонные детекторы) и геологии (магнитометры, гироскопы). В навигации квантовая сенсорика нужна для управления спутниками, само-

лётками, а также для решения стратегических задач. Точности существующих классических средств позиционирования объективно не хватает. В области медицины квантовые сенсоры магнитного поля с разрешающей способностью меньше пикоТесла позволяют проводить магнитную томографию высокого разрешения, а также исследовать работу нейронной сети головного мозга в интерактивном режиме, что на сегодняшний день является нерешённой перспективной задачей. В электронике и оптокоммуникациях квантовые однофотонные детекторы являются ключевым элементом протоколов квантовых вычислений и криптографии. В геологии точные средства позиционирования на основе квантовых технологий упростят процедуру поиска полезных ископаемых и трёхмерное картографирование Земли, к этой же области относится гравиметрия. Одним из главных событий квантовой сенсорики в рамках дорожной карты КТ стал ввод в строй нового эталона времени ГЭТ 1-2022, который обеспечил России паритет с мировыми лидерами в области синхронизации будущих квантовых сетей.

Квантовая сенсорики в её теоретической части представляет собой квантовую метрологию — науку о квантовых измерениях, а в практической части — проектирование, разработку и изготовление высокоточных средств измерения. Невозможно в рамках одного курса сделать полноценный обзор всех аспектов квантовой сенсорики, которые существуют на сегодняшний день. В данном пособии мы фокусируемся на кратком описании принципа проведения квантового эксперимента, а также обзоре тех двух областей квантовых технологий сенсорики, в которых Российская школа традиционно сильна — это квантовые стандарты частоты и гироскопы. При подготовке данного курса пришлось пожертвовать тремя большими областями квантовой сенсорики, а именно: квантовой магнитометрией, субатомными манипуляциями, а так же детекторами одиночных фотонов.

1.1 Квантовая метрология и её задачи

Классическая метрология развивается несколько сотен лет, её инструменты измерения физических величин (времени, массы, координат, направления, заряда, напряжённости электрического и индукции магнитного поля), многократно опробованы на практике. На сегодняшний день дальнейшее увеличение точности определения массы, времени, расстояний и полей становится невозможным

на субатомных масштабах, если продолжать использовать классические методы. Причиной является вероятностный характер результатов измерений. Таким образом, классическая метрология достигла своего предела точности и для его преодоления требуется использовать инструменты квантовой метрологии.

Говорить о том, что квантовые методы измерения позволяют непосредственно увеличить точность, было бы некорректно, так как квантовая физика изначально строится на ином механизме измерения. Главное отличие состоит в том, что измерение приводит к необратимому случайному изменению состояния квантовой системы, кроме того, результат обусловлен уже тем состоянием квантовой системы, которое получилось в итоге. Так как этот эффект представляет собой фундаментальное свойство квантовой физики, то предотвратить разрушение квантового состояния путём усовершенствования приборов невозможно. Задача квантовой метрологии состоит в том, чтобы предсказать вероятность того или иного результата измерения, а также заранее подготовить квантовую систему в такое состояние, чтобы процесс измерения произошёл с его наименьшим изменением. На вопрос о том, зачем измерять некоторую квантовую систему, если её перед этим уже подготавливают в определённое состояние, отвечаем: как правило, квантовая система, над которой производится измерение, является не непосредственно измеряемым объектом, а сенсором, который взаимодействует с тем объектом, некоторую физическую величину которого необходимо измерить. Тогда взаимодействие приведёт к отклонению состояния квантовой системы от того, в которое его заранее подготовили, и по статистике результатов измерения можно охарактеризовать измеряемый объект с точностью, превышающей таковую при тестировании объекта методами классической метрологии.

Квантовые методы измерения быстро обогащаются новыми схемами, появляются новые приборы и сенсоры, также продолжает развиваться теория. Поэтому в отличие от классической метрологии, появившейся очень давно, в квантовой метрологии ещё нет общего стандарта, который диктовал бы правила наиболее эффективно процесса измерения величин на субатомных масштабах. Подводя итог, **квантовая метрология** — это наука о квантовом измерении и обработке результатов этих измерений.

Вероятность случайного перехода системы в новое состояние $|\psi_b\rangle$ можно посчитать, если состояние квантовой системы до измерения

$|\psi_a\rangle$ известно:

$$\forall \hat{O} |\psi_b\rangle = \lambda_b |\psi_b\rangle : \quad P_{a \rightarrow b} = |\langle \psi_b | \psi_a \rangle|^2, \quad (1.1)$$

Здесь \hat{O} — это оператор измеряемой физической величины или их комбинации в случае комплексного измерения, λ_b — получившийся результат измерения. Таким образом, каждому результату измерения соответствует собственный скачок квантовой системы в новое состояние, причём строго определённый. Этот эффект используется как в квантовой метрологии для управления состоянием квантовой системы, так и в квантовых вычислениях и квантовых коммуникациях для реализации кубитов анциллы.

Далее мы коротко опишем ключевую особенность квантового процесса измерения — неопределённость результата измерения физической величины, а также один из примеров её преодоления с помощью подготовки квантовой системы в сжатое состояние.

1.1.1 Предел точности, обусловленный неопределённостью Гейзенберга

В отличие от классической физики, в квантовой физике существуют такие пары физических величин, которые не могут быть оба точно измерены в течение бесконечно малого промежутка времени. Причём это свойство является фундаментальным правилом, а не ограниченным функционалом современных измерительных приборов. Можно трактовать этот феномен как скачкообразное изменение состояния квантовой системы после изменения первой физической величины, которое приводит к появлению вероятностного распределения различных результатов измерения второй физической величины. Однако в действительности природа феномена одновременной неизмеримости некоторых пар физических величин находится на ещё более абстрактном уровне.

Давайте проведём мысленный эксперимент: подготовим сколько угодно большое количество квантовых систем в одинаковом состоянии и проведём у половины из них измерение первой физической величины, а у второй половины — второй физической величины. Над каждой системой проведём только один акт измерения, то есть измерения квантовой системы уже в изменённом состоянии не произойдёт ни в одном случае. Тем не менее, даже в условиях параллельного эксперимента, существуют такие пары физических величин, для которых невозможно подобрать квантовое состояние с одинаковым

результатом измерения первой физической величины у первой половины приготовленных квантовых систем и одинаковым результатом измерения второй физической величины у второй половины квантовых систем.

Для проверки одновременной неизмеримости двух физических величин, которые описываются операторами \hat{X} и \hat{Y} , следует использовать следующее неравенство:

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \hat{Z} \rangle \right|, \quad \hat{Z} = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}, \quad (1.2)$$

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\left\langle \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle}, \quad A \in \{X, Y\}. \quad (1.3)$$

Неравенство 1.2 называется **неопределённостью Гейзенберга**. Если коммутатор \hat{Z} строго равен нулю, то произведение среднеквадратичных отклонений $\Delta\hat{X}$ и $\Delta\hat{Y}$ физических величин при измерении может быть одновременно равно нулю. То есть многократное измерение одной и другой физической величины приводит к одинаковым результатам.

Неопределённость Гейзенберга играет важную роль в метрологии: она позволяет качественно оценить точность измерительного устройства на основе принципа работы его чувствительного элемента. Например, точность измерения импульса летящих частиц в потоке зависит от протяжённости области их улавливания L . Коммутатор операторов координаты и проекции импульса на эту координатную ось равен $i\hbar$. Тогда предельная точность измерения импульса частиц примерно равна $\pm\hbar/2L$.

1.1.2 Квантовое сжатие осциллятора как пример преодоления дробового шума при измерении

Зачастую квантовую систему можно описать с помощью безразмерных координат и импульсов, подобно классической физике. Операторы безразмерных координат обозначим \hat{q}_m , а операторы безразмерных импульсов обозначим \hat{p}_m , где m — это номер. Размерный множитель подберём таким образом, чтобы коммутатор оператора координаты и импульса был равен мнимой единице:

$$\hat{p}_m = -i \frac{\partial}{\partial q_m}, \quad (1.4)$$

$$[\hat{p}_m, \hat{q}_n] = i\delta_{m,n}. \quad (1.5)$$

Финитное движение квантовой системы около минимума потенциальной энергии можно часто приближённо описать как гармонический осциллятор, поэтому эта модель является важнейшей моделью квантовой механики. Уравнение Шрёдингера для одномерного гармонического осциллятора с частотой ω в безразмерных координатах имеет вид:

$$i\frac{\partial\Psi(q,t)}{\omega\partial t} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2)\Psi(q,t). \quad (1.6)$$

Методом разделения переменных q и t можно найти базис решений, которые представляют собой произведение функций q и t . Будем нумеровать такие решения индексом k :

$$\Psi_k(q,t) = \psi_k(q)f_k(t). \quad (1.7)$$

Накладываемые на волновую функцию условия непрерывности, гладкости и нормировки квадрата модуля на единицу приводят к дискретному набору решений, имеющих физический смысл. Запишем их аналитический вид:

$$\psi_k(q) = \frac{e^{-q^2/2}H_k(q)}{\sqrt{2^k k!}\sqrt{\pi}}, \quad f_k(t) = e^{-i\omega(k+\frac{1}{2})t}, \quad (1.8)$$

Уравнение 1.6 является линейным, поэтому и линейная комбинация факторизованных решений также является решением:

$$\Psi(q,t) = \sum_k C_k \psi_k(q) e^{-i\omega(k+\frac{1}{2})t}. \quad (1.9)$$

Более подробное решение задачи о гармоническом осцилляторе и выводе формул выше можно найти, например, в учебнике Давыдова¹ на странице 119.

Наиболее близким к классическому состоянию является когерентное состояние осциллятора $\Psi^{(coh)}(q,t)$, которое задаётся коэффициентами вида:

$$C_k(t) = C_k^{(coh)}(\alpha,t) \equiv e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}, \quad (1.10)$$

где α — это некоторое комплексное число, которое имеет смысл амплитуды когерентного состояния. Чтобы получить такое состояние,

¹Давыдов, А.С. *Квантовая механика* - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы; 1973. 704 С.

достаточно сместить основное состояние осциллятора на некоторую постоянную координату q_0 в времени $t = \varphi/\omega$, где φ — это аргумент комплексного числа α :

$$\Psi^{(coh)}(q, t)|_{\omega t = \varphi} = \psi_0(q - q_0). \quad (1.11)$$

В когерентном состоянии среднеквадратичные отклонения координаты и импульса равны друг другу и $1/\sqrt{2}$, что нетрудно проверить. Коммутатор операторов координаты и импульса при этом равен единице. То есть неопределённость Гейзенберга выполняется со знаком равенства:

$$\Delta q \Delta p = \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Отметим, что любой поворот системы координат (1.13–1.14) в пространстве q, p не приведёт к изменению условия (1.15):

$$\hat{q}' = \hat{q} \cos \theta - \hat{p} \sin \theta, \quad (1.13)$$

$$\hat{p}' = \hat{q} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta, \quad (1.14)$$

$$\Delta q' \Delta p' = \frac{1}{2}. \quad (1.15)$$

То есть в фазовом пространстве координат и импульсов для когерентного состояния всегда существует некоторая неопределённость при измерении координат и импульсов.

Теперь введём для квантового осциллятора две физические величины, которые соответствуют амплитуде его колебания A и фазе f , и выразим их через обобщённые координату и импульс:

$$q = A \cos f, \quad p = \sin f. \quad (1.16)$$

Амплитуду A и фазу f для когерентного состояния $\Psi^{(coh)}$ в момент времени t можно выразить с помощью поворота (1.13–1.14) на угол $\theta = \varphi - \omega t$. Тогда среднее значение и среднеквадратичное отклонение амплитуды примерно равно им же для новой координаты q' , а среднее значение и среднеквадратичное отклонение фазы примерно равно им же для нового импульса, делённого на среднюю амплитуду $p'/\langle \hat{A} \rangle$. В этой системе координат неопределённость Гейзенберга имеет вид:

$$\Delta A \langle \hat{A} \rangle \Delta f \approx \Delta a' \Delta p' = \frac{1}{2}. \quad (1.17)$$

Итак, ошибка измерения амплитуды и ошибка измерения фазы примерно равны друг другу. Найдём среднее квадратичное отклонение амплитуды с помощью непосредственной подстановки A из (1.16):

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{q}^2 + \hat{p}^2}, \quad (1.18)$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}. \quad (1.19)$$

Нас интересует случай, когда амплитуда когерентного состояния много больше единицы. Тогда можно записать, раскладывая корень $\langle \hat{A} \rangle^2$ по малому параметру $|\alpha|^{-2}$:

$$\hat{A} = \sqrt{2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad (1.20)$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \approx \sqrt{\langle 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - 2|\alpha|^2 - 1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.21)$$

При многократном измерении амплитуды когерентного состояния будут всякий раз получаться разные значения, причём отношение среднеквадратичного отклонения ΔA к среднему значению $\langle \hat{A} \rangle$ обратно пропорционально амплитуде колебаний. Это и есть квантовый дробовый шум. Можно заметить, что он уменьшается при увеличении амплитуды колебаний. То же самое будет происходить при измерении фазы. Чем больше амплитуда, тем точнее измеряется фаза.

Рассмотрим теперь некоторое стационарное состояние гармонического осциллятора:

$$\Psi(q, t) = \psi_{k_0} e^{-i\omega(k_0 + \frac{1}{2})t}. \quad (1.22)$$

Попробуем определить среднеквадратичное отклонение амплитуды для него. Для этого используем формулы 1.19 и 1.20. Непосредственной проверкой убеждаемся, что она стремится к нулю. Тогда отношение среднеквадратичного отклонения к средней амплитуде тоже равно нулю, и дробовый шум отсутствует. Согласно неопределённости Гейзенберга, среднеквадратичное отклонение фазы должно стремиться к бесконечности, то есть фаза в каждый момент времени будет принимать случайное значение.

Уменьшение среднеквадратичного отклонения одной из двух одновременно не измеримых физических величин ниже, чем предел неопределённости Гейзенберга для состояния, максимально близко к классическому, называется **сжатием**.

Сжатие применяется для увеличения точности квантовых измерительных приборов. Рассмотренный здесь пример квантового осциллятора особенно актуален, поскольку координата и импульс квантового осциллятора эквивалентны амплитуде напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля в выделенной квантованной моде. Если свет сжат по амплитуде, то детектирование разного количества фотонов для света, прошедшего через вещество, следует интерпретировать только как поглощение фотонов в среде, потому что дробовый шум отсутствует. Если свет сжат по фазе, то его можно эффективно использовать в интерферометрии. Разница фазы исследуемого сигнала и фазы сжатого света будет обусловлена только сдвигом, а не погрешностью измерения из-за неустраняемого в классическом случае фазового шума.

1.2 Стандарты частоты

Стандарты частоты — это устройства для генерации гармонического сигнала заданной частоты, которая не должна отклоняться от частоты стабилизации больше некоторого критического порога за время наблюдения. Квантовые стандарты частоты выполняют ту же самую функцию, но основаны на квантовых механизмах стабилизации. Преимущества квантовых стандартов по сравнению с классическими состоит в том, что частота стабилизации определяется некоторой фундаментальной характеристикой квантовой системы, которая не зависит от внешних условий, от времени, поэтому является одинаковой для разных устройств независимо от технологического процесса изготовления стандарта, например, частота атомного перехода. С другой стороны, измерение частоты имеет неустранимую ошибку, которая связана со случайной природой самого процесса измерения в квантовой физике.

Для описания стандарта частоты, как правило, используются две характеристики: долговременная стабильность и коротковременная стабильность (девиация Аллана). Смысл этих величин принципиально разный. Долговременная стабильность показывает, насколько может измениться частота за условное время наблюдения. Долговременная стабильность чаще всего задаётся в относительных величинах с указанием времени отклонения частоты от первоначального значения частоты стабилизации:

$$S = \frac{d\nu}{\nu_0}(T_{stable} = 10^7 c), \quad (1.23)$$

где ν_0 — это частота стабилизации в начальный момент времени (не зависит от времени для квантовых стандартов), $d\nu$ — это максимальное изменение частоты за период времени T_{stable} . Чем меньше величина S при одинаковом времени T_{stable} , тем лучше стандарт частоты. Причина отклонения частоты квантового стандарта на длительном интервале времени может быть разной, но, как правило, она связана с износом периферии, которая отвечает за процесс измерения частоты. Частота стабилизации, которую использует стандарт остаётся при этом неизменной. В классическом же стандарте сама частота стабилизации может меняться с течением времени из-за износа устройства генерации.

1.2.1 Современное состояние проблемы, достигнутые показатели точности и стабильности часов

По сегодняшний день классические кварцевые стандарты частоты чрезвычайно распространены в электронике ввиду их дешевизны, универсальности и лёгкости интегрирования в электронную схему. Во многих коммерческих задачах вполне хватает точности кварцевого стандарта для поддержания синхронных процессов. Долговременная стабильность современных кварцевых стандартов достигает 10^{-8} за сутки. Однако этой стабильности недостаточно для эффективной работы стратегической навигации или космических коммуникаций, в которых точность позиционирования источника сигнала играет критическую роль, например, спутника или корабля. В таком случае в пару к кварцевому стандарту прилагается калибрующее устройство, которое периодически корректирует сигнал кварцевого стандарта, улучшая его долговременную стабильность. Именно это калибрующее устройство имеет в основе некоторый квантовый процесс, который способен преодолеть классический предел точности измерения частоты колебания электрического поля внутри кварцевого стандарта.

Коммерческий квантовый стандарт частоты, который широко представлен на рынке, работает на насыщенном паре щелочного металла. Пар является наиболее простым способом создания ансамбля свободных атомов, в которых высокочастотный радиопереход практически не уширен взаимодействием с окружением. Температура, при которой работают такие стандарты, варьируется от 50 до 150 градусов Цельсия. Ценой простоты реализации атомного ансамбля в виде насыщенного пара является влияние стенок газовой ячейки, из-за которого стабильность ограничена временем жизни поляризо-

ванных атомов пара. Достигнутые показатели стабильности варьируются у разных производителей, но все они лежат в диапазоне от $10^{-10}c^{-1/2}$ до $10^{-11}c^{-1/2}$ при измерении девиации Аллана и около 10^{-11} – 10^{-13} относительного изменения частоты за сутки. Из российских производителей можно привести пример успешной реализации коммерческого стандарта для нужд телекоммуникаций и спутниковой навигации — это компании АО Время-Ч² и ФГУП ВНИИФТРИ³. Их рубидиевые стандарты, а также стандарты на водороде, конкурируют с мировыми лидерами в этой области. Традиционной проблемой российских квантовых стандартов коммерческого класса является не стабильность, а большая масса и энергопотребление. Помимо стандартов на щелочном паре, существуют коммерческие квантовые стандарты на водороде, стандарты-мазеры и другие успешные проекты. Однако они в меньшей степени представлены на рынке.

Помимо коммерческих квантовых стандартов частоты, существуют так называемые первичные стандарты сверхвысокой стабильности, которые используются для калибровки менее точных вторичных стандартов коммерческого класса, а также проведения фундаментальных исследований. Они практически не представлены на рынке ввиду их стратегической важности, так как выполняют утилитарные задачи навигации и производятся поштучно. Работу первичных квантовых стандартов сверхвысокой стабильности в России контролирует "Государственная служба времени, частоты и определения параметров вращения Земли" (ГСВЧ). Существуют различные технологии квантовых стандартов сверхвысокой стабильности: это цезиевые пучковые стандарты, стандарты на захваченных ионах в электромагнитных решётках, стандарты на холодных атомных ансамблях и другие. Несомненным лидером в области стандартов сверхвысокой стабильности является NIST⁴ — "National Institute of Standards and Technology USA". В их лаборатории создана серия стандартов фотонного типа NIST-F1⁵ (2002), NIST-F2⁶ (2014) и NIST-F3⁷ (2022). Стандарт NIST-2 является усовершенствованной версией NIST-1 и служит для задания эталонной меры времени. В то время как задачей самого современного стандарта NIST-3 является долговременная стабилизация высокочастотной гармоника.

²<https://vremya-ch.com/>

³<https://www.vniiftri.ru/>

⁴<https://www.nist.gov>

⁵<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0026-1394/39/4/1/meta>

⁶<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0026-1394/51/3/174>

⁷<https://www.nist.gov/publications/nist-f3-caesium-fountain-frequency-reference>

В настоящее время в NIST USA разрабатывается фонтанный стандарт NIST-F4, который должен заменить NIST-2 и превзойти его показатели на порядок. Именно серия первичных стандартов NIST-FX является сегодня основной технологий сверхточной калибровки остальных стандартов. Во многих лабораториях мира разрабатываются перспективные схемы квантовых стандартов и оптических часов, которые должны превзойти технологию атомных фонтанов. Например, это технологии квантовых стандартов на захваченных ансамблях холодных атомов⁸, которые взаимодействуют с оптическим излучением как единая многоионная квазимолекула. Когерентность между захваченными частицами позволяет стабилизировать частоту модуляции оптического излучения по сверхтонкому переходу намного точнее, чем в случае холодного фонтана или тем более горячего пара. Одной из самых успешных реализаций атомных часов на захваченных ионах является работа 2023 года⁹, в которой заявлена стабильность на два порядка выше, чем у стандарта NIST-1.

В России передовые разработки стандартов высокой стабильности ведутся во ВНИИФТРИ совместно с ФИАНом имени Лебедева. В 2022 году был принят новый эталон времени ГЭТ 1-2022¹⁰, который поддерживается стандартом частоты на основе цезиевого фонтана. Также в его состав входит репер частоты на холодных атомах рубидия и хранение эталона времени на холодных атомах стронция в оптической решётке. Подробнее об устройстве и характеристиках можно прочитать в работе "хранителя эталона" Игоря Борисовича Нореца, опубликованной в альманахе современной метрологии¹¹. По относительному отклонению частоты и стабильности стандарт частоты в основе ГЭТ 1-2022 соответствует NIST-F1, точности которого с запасом хватает для нужд геодезии и стратегической навигации, включая космическую навигацию. Также стоит упомянуть о большом вкладе ГЭТ 1-2022 в формирование международного времени UTC, которое в 2023 году была рекордной среди прочих национальных стандартов в мире. Также в России находится семь вторичных стандартов частоты с меньшей стабильностью, которые регулярно поверяются по первичному эталону для дальнейшего использования в различных задачах метрологии.

⁸<https://www.nature.com/articles/ncomms7896>

⁹<https://www.nature.com/articles/s41567-022-01794-7>

¹⁰<https://www.gost.ru/portal/gost/home/activity/documents/orders#/order/303264>

¹¹https://asm.vniiftri.ru/?page_id=12633

1.2.2 Технология стабилизации и обратная связь

Общий принцип работы любого квантового или классического стандарта основан на стабилизации частоты некоторого генератора на **репере** через обратную связь. Репер — это чувствительный элемент стандарта, который имеет собственную частоту, слабо меняющуюся с течением времени. Физический механизм формирования собственной частоты репера зависит от типа стандарта. Сравнение частоты генератора с частотой репера тоже может происходить по-разному для различных физических реализаций. Например, в цезиевых квантовых стандартах репером является радиопереход между двумя нижними сверхтонкими уровнями, у которых время жизни на много порядков больше периода обратной частоты этого реперного перехода.

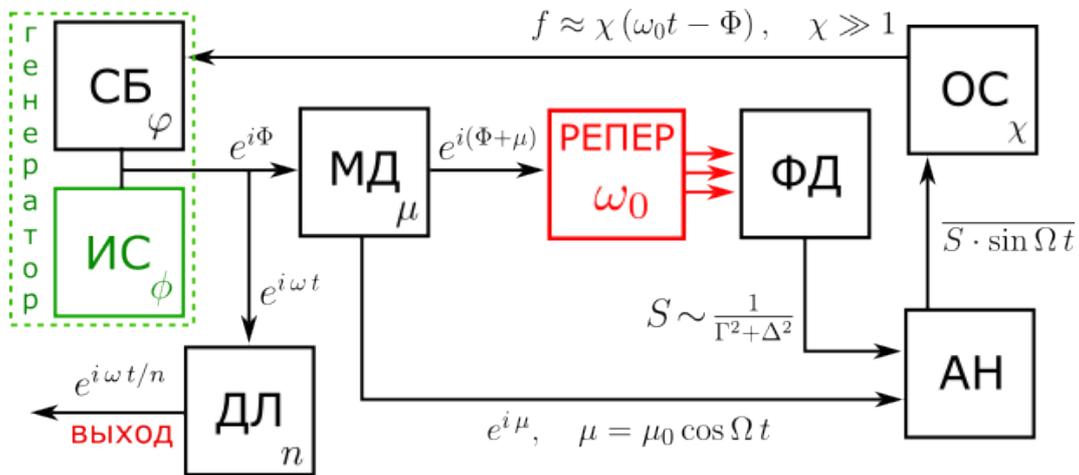


Рис. 1.1: Принципиальная схема стандарта частоты. ИС — источник сигнала с нестабильной фазой, СБ — стабилизатор, МД — модулятор, ДЛ — делитель частоты, ФД — фотодетектор, АН — анализатор, ОС — обратная связь. Красные стрелки обозначают оптический сигнал репера. Символы в квадратах СБ, ИС и МД обозначают фазу генерируемого сигнала. Формулы над стрелками обозначают сам сигнал. Символ ω_0 обозначает частоту репера, символ n в квадрате ДЛ характеризует кратность деления выходного стабилизированного сигнала. Горизонтальная линия над сигналом анализатора обозначает усреднение по времени.

На рисунке 1.1 показана общая схема практически любого стандарта частоты. Источник создаёт сигнал с переменной фазой ϕ , который в отсутствие стабилизации представляет собой гармонику с "плавающей" частотой. Фаза источника корректируется стабилизатором, вследствие чего генератор создаёт сигнал с фазой $\Phi = \phi + \varphi$. Далее сигнал генератора модулируется с частотой Ω , которая намного меньше выходной генерируемой частоты ω . Фаза модулятора

обозначается символом $\mu = \mu_0 \cos \Omega t$. Сигнал с суммарной переменной фазой $\Phi + \mu$ попадает в репер и сравнивается с его фазой $\omega_0 t$. Чаще всего сравнение частоты внешнего источника с частотой репера происходит при помощи резонанса, ширина которого определяется скоростью релаксации состояния репера Γ . Форма резонанса представляет собой контур Лоренца:

$$S \sim \frac{\Delta^2}{\Gamma^2 + \Delta^2}, \quad \Delta = \omega_0 - \frac{d(\Phi + \mu)}{dt}, \quad (1.24)$$

где Δ — это отстройка мгновенной частоты входящего сигнала от собственной частоты репера. Далее поле репера с интенсивностью S попадает на фотоэлемент, который преобразует оптический сигнал в электрический и отправляет в анализатор. Задача анализатора состоит в том, чтобы вычислять *сигнал ошибки*. В идеальной схеме его экспозиция должна быть равна возрастающей разнице фазы репера $\omega_0 t$ и фазы генератора Φ . Фазовая ошибка через блок обратной связи с множителем χ возвращается в генератор: блок стабилизации преобразует масштабированный сигнал ошибки f в фазовую поправку $\varphi = f$. Подставив вместо фазы стабилизатора φ сигнал обратной связи f , найдём фазу стабилизированного генератора без модуляции:

$$\varphi = \chi (\omega_0 t - \varphi - \phi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \beta (\omega_0 t - \phi), \quad (1.25)$$

$$\Phi = \beta \omega_0 t + \epsilon \phi, \quad (1.26)$$

$$\beta = \frac{\chi}{\chi + 1}, \quad \epsilon = \frac{1}{\chi + 1}, \quad \beta + \epsilon = 1, \quad \beta \gg \epsilon. \quad (1.27)$$

Таким образом, чем больше коэффициент обратной связи χ , тем больше мгновенная частота генератора ближе к собственной частоте репера.

Покажем, что среднее от произведения тока фотодетектора S и гармонической функции, смещённой по фазе относительно модулятора на 90 градусов и с его частотой Ω , приводит к требуемому сигналу ошибки:

$$\overline{S \cdot \sin \Omega t} = \int_T dt \frac{\left(\omega_0 - \frac{d(\Phi + \mu)}{dt}\right)^2 \sin \Omega t}{\Gamma^2 + \left(\omega_0 - \frac{d(\Phi + \mu)}{dt}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Считая, что скорость изменения фазы $\omega = \frac{d\Phi}{dt}$ стабилизированного генератора близка к ω_0 , можно разложить подынтегральную функцию по малому параметру $\delta = \omega_0 - \omega$:

$$\overline{S \cdot \sin \Omega t} = \int_T dt \left(\frac{\eta^2 \sin^3 \Omega t}{1 + \eta^2 \sin^2 \Omega t} + \frac{(2\eta\Gamma^{-1}) \sin^2 \Omega t}{(1 + \eta^2 \sin^2 \Omega t)^2} \delta + \dots \right), \quad (1.29)$$

где параметр $\eta = \mu_0\Omega/\Gamma$ имеет смысл глубины модуляции относительно ширины реперного резонанса Γ .

Первое слагаемое и слагаемые в правой части уравнения 1.29 с чётной степенью δ обращаются в ноль при интегрировании по периоду, слагаемые с нечётной степенью δ при условии медленного изменения отстройки δ за период T можно переписать в более простом виде:

$$\overline{S \cdot \sin \Omega t} = I_1(\eta) \cdot \delta + \dots, \quad (1.30)$$

$$I_1(\eta) = \int_T dt \frac{(2\eta\Gamma^{-1}) \sin^2 \Omega t}{(1 + \eta^2 \sin^2 \Omega t)^2}. \quad (1.31)$$

Экспозиция сигнала ошибки может быть получена интегрированием функции 1.30 по времени. Масштабируя экспозицию на некоторое число $\tilde{\chi}$ и отбрасывая малые поправки, пропорциональные старшим степеням δ , получим сигнал обратной связи:

$$f = \tilde{\chi} \int_0^t dt' I_1(\eta) \cdot \left(\omega_0 t' - \frac{d\Phi}{dt'} \right) = \chi (\omega_0 t - \Phi), \quad (1.32)$$

что и требовалось получить на блоке обратной связи для стабилизации фазы генератора по реперу.

В итоге генератор с источником и стабилизатором формирует гармонический сигнал с фазой Φ , которая меняется со скоростью ω , близкой к постоянной частоте репера. Делитель позволяетратно уменьшить выходную частоту для дальнейшего использования выходного тактового сигнала.

Сдвиги и шумы

Важной характеристикой, которая ограничивает предельную точность квантовых стандартов частоты, является шум. Каждый элемент вносит вклад в случайное блуждание фазы выходного сигнала

Ф. Это блуждание может быть эффективно скомпенсировано обратной связью, как было показано ранее. Однако существует шум репера, который существенно влияет на точностные характеристики и не может быть устранён методами внешней обработки по примеру обратной связи. Этот шум заключается в случайном или систематическом отклонении частоты репера ω_0 от номинальной.

Систематическая ошибка, как правило, обусловлена сдвигами энергетических уровней квантовой системы, на основе которой работает репер. Сдвиги приводят к монотонному набегу фазы в выходном сигнале. Подобные сдвиги можно откалибровать с помощью более точного стандарта, измерив смещение частоты репера. Отметим, что сдвиги могут медленно меняться с течением времени, усложняя процедуру калибровки квантового стандарта. Причины сдвигов энергетических уровней часто заключаются не в недостатках техники, а имеют фундаментальную природу, как например, лэмбовский сдвиг из-за взаимодействия с пустыми модами электромагнитного поля окружающего пространства. Поэтому теоретическое исследование природы подобных сдвигов представляет собой одну из важнейших задач квантовой физики.

Кроме систематической ошибки, которая приводит к монотонному набегу фазы и характеризуется погрешностью прибора, бывает также случайная ошибка. Она возникает из-за неточного определения количества фотонов за время наблюдения. Напомним, что именно ток фотодетектора поступает в анализатор и преобразуется в сигнал ошибки, а затем через обратную связь в стабилизатор. В квантовых стандартах частоты неточность в определении числа фотонов может носить фундаментальный характер, например дробовый шум измеряемого поля. Для наблюдателя он непрерывно отклоняет интенсивность поля то в положительную, то отрицательную сторону. Однако эти флуктуации поля интерпретируются системой как выход из резонанса и смещение частоты репера относительно номинальной. То есть в сигнале ошибки появляется неустранимый фазовый шум. Чтобы избежать усиления этого фазового шума обратной связью, требуется выделять истинный сигнал ошибки на выходе из анализатора на фоне фазовых флуктуаций. Таким образом, схема стабилизации не в состоянии компенсировать фазовую ошибку источника на уровне реперного шума. Квантовые стандарты частоты характеризуются соотношением сигнал шум SNR, который показывает отношение мощности сигнала ошибки при заданном отклонении частоты и мощности фазового шума, который вызван неустрани-

нимыми фундаментальными причинами. На сегодняшний день для улучшения предельных характеристик квантовых стандартов частоты предлагается применять квантовое сжатие, чтобы уменьшить неопределённость числа фотонов в излучении и тем самым редуцировать дробовый шум.

1.2.3 Стандарт частоты на эффекте когерентного пленения населённости

Существует схема стабилизации частоты, в которой репер основан на высокочастотном радио-переходе между двумя нижними сверхтонкими уровнями в щелочном атоме, будем обозначать эти уровни A и B . Этот переход есть у всех изотопов щелочных атомов с отличным от нуля моментом ядра, но на практике чаще всего используются ^{87}Rb или ^{133}Cs : они распространены в природе, являются летучими (высокая концентрация насыщенного пара в ячейке), и расстояние между нижними сверхтонкими уровнями достаточно большое, чтобы не происходило перекрытия линий поглощения в газовой ячейке. Перекрытие происходит, если одно и то же оптическое излучение, настроенное в резонанс только с одним переходом, опустошает сразу два нижних уровня, так как они близки по энергии. Важно, что переход между уровнями A и B запрещён, и поэтому они не уширены из-за взаимодействия с модами электромагнитного поля свободного пространства. Благодаря этим факторам можно построить схему, в которой частота этого радиочастотного перехода используется для стабилизации генерируемой гармоника.

Упрощённо щелочные атомы можно описать с помощью трёхуровневой Λ схемы, в которой два нижних уровня A и B связаны разрешёнными переходами с единственным верхним уровнем C . Запрещённый низкочастотный радио переход $A \leftrightarrow B$ можно возбудить двумя полями, которые настроены в резонанс с разрешёнными оптическими переходами $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$. То есть через возбуждённый уровень C происходит двухфотонный переход между двумя нижними уровнями A и B , которые метастабильны. Нас интересует поиск узкой линии резонанса в схеме возбуждения щелочных трёхуровневых атомов. Именно с помощью линии резонанса, ширина которой намного меньше ширины оптических переходов в щелочных атомах, можно настроить обратную связь для стабилизации частоты генерируемого сигнала. Подробную схему уровней щелочных атомов можно найти в приложении. Здесь на рисунке 1.2 мы приводим упрощённую схему для демонстрации приложения возбуждающих полей

и их отстройку от частот разрешённых оптических переходов.

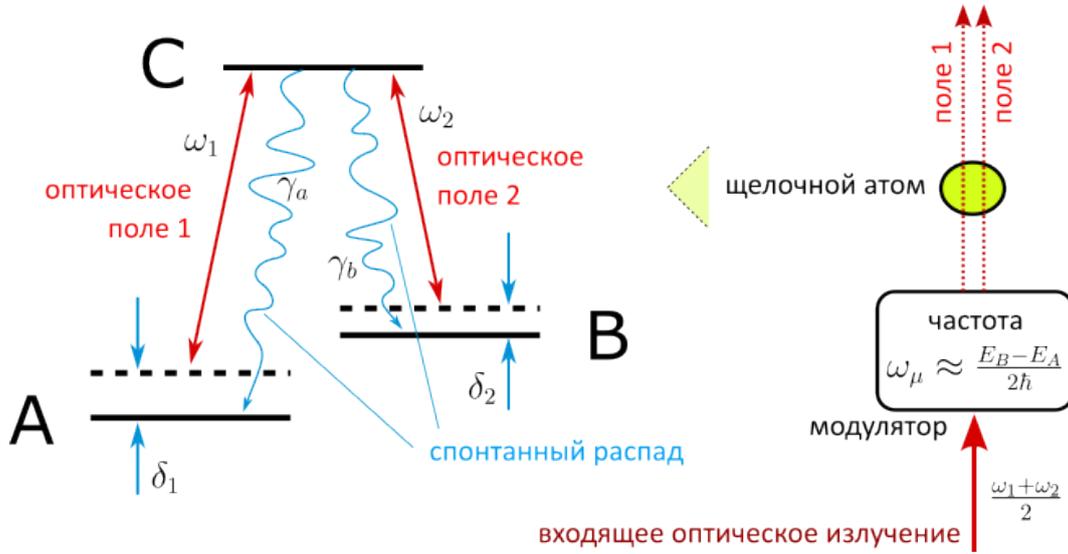


Рис. 1.2: Схема энергетических уровней Λ -атома в оптическом поле. Репер стандарта частоты на основе эффекта когерентного пленения населённости.

Запишем квантово-кинетическое уравнение фон-Неймана для матрицы плотности трёхуровневой системы, которая описывает горячий ансамбль щелочных атомов. Далее $\hat{\rho}$ — это зависящая от времени матрица плотности размерности (3×3) , которая представлена в ортогональном базисе стационарных состояний невозмущенного атома щелочного металла $|L\rangle$, где $L \in \{A, B, C\}$, \hat{H} — это оператор Гамильтона, \mathbf{E} — это напряжённость электрического поля в ячейке, \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — это амплитуды напряжённости оптических полей, возбуждающих разрешённые переходы $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$ в щелочных атомах, ω_1 и ω_2 — частоты этих полей, \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 — единичные векторы поляризации, \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — комплексные векторы дипольных переходов $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$, δ_1 и δ_2 — это отстройки от резонанса оптических переходов $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$, Ω_1 и Ω_2 — это частоты Раби оптических переходов $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$, E_L — энергия уровня L , \hat{P}_L — оператор проекции на подпространство уровня L . Линейное отображение \mathcal{L} описывает релаксационные процессы в насыщенном паре щелочного металла, γ_A и γ_B — это константы спонтанного распада с уровня C на уровни A и B , γ_1 и γ_2 — это скорости релаксации оптической когерентности дипольных моментов щелочных атомов на переходах $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow C$, Γ — это скорость релаксации низкочастотной когерентности между нижними уровнями A и B , которая намного медленнее остальных процессов релаксации, так как уровни метастабильны.

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \mathcal{L}\{\hat{\rho}\}, \quad (1.33)$$

$$\hat{H} = \sum_L E_L \hat{P}_L - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}), \quad (1.34)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{n \in \{1,2\}} \frac{\mathcal{E}_n \mathbf{l}_n}{2} e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (1.35)$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_1 |A\rangle \langle C| + \mathbf{d}_1^* |C\rangle \langle A| + \mathbf{d}_2 |B\rangle \langle C| + \mathbf{d}_2^* |C\rangle \langle B|. \quad (1.36)$$

Уравнение 1.33 можно преобразовать к более простому виду, если расписать его поэлементно и сделать замену переменных:

$$\rho_{AA} = r_a, \quad \rho_{BB} = r_b, \quad \rho_{CC} = 1 - r_a - r_b, \quad (1.37)$$

$$\rho_{AB} = s e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}, \quad \rho_{AC} = h_a e^{i\omega_1 t}, \quad \rho_{BC} = h_b e^{i\omega_2 t}. \quad (1.38)$$

После приближения вращающейся волны получим систему уравнений для медленно меняющихся по сравнению с быстро осциллирующей фазой элементов, кроме того, в системе расписано отображение \mathcal{L} для каждого элемента матрицы:

$$\dot{r}_a = i(\Omega_1^* h_a^* - \Omega_1 h_a) + \gamma_1(1 - r_a - r_b) - \Gamma r_a + \Gamma r_b, \quad (1.39)$$

$$\dot{r}_b = i(\Omega_2^* h_b^* - \Omega_2 h_b) + \gamma_2(1 - r_a - r_b) - \Gamma r_b + \Gamma r_a, \quad (1.40)$$

$$\dot{s} = i s (\delta_1 - \delta_2) - i\Omega_2 h_a + i\Omega_1^* h_b^* - \Gamma s, \quad (1.41)$$

$$\dot{h}_a = i\delta_1 h_a + i\Omega_1^* (1 - r_b - 2r_a) - i\Omega_2^* s - (\gamma_1 + \gamma_2) h_a, \quad (1.42)$$

$$\dot{h}_b = i\delta_2 h_b + i\Omega_2^* (1 - 2r_b - r_a) - i\Omega_1^* s^* - (\gamma_1 + \gamma_2) h_b. \quad (1.43)$$

Расшифруем некоторые обозначения:

$$\Omega_n = \frac{(\mathbf{d}_n^* \cdot \mathbf{l}_n) \mathcal{E}_n}{2\hbar}, \quad n \in \{1, 2\}, \quad (1.44)$$

$$\delta_1 = \frac{E_C - E_A}{\hbar} - \omega_1, \quad \delta_2 = \frac{E_C - E_B}{\hbar} - \omega_2. \quad (1.45)$$

Частоты Раби Ω_1 и Ω_2 описывают скорость возбуждения щелочных атомов двумя полями с частотами ω_1 и ω_2 . Эти поля в стандарте частоты получаются в результате амплитудной модуляции входного монохроматического света лазера радиочастотным полем. Тогда имеет смысл принять их равными друг другу, кроме того, не ограничивая общности, мы можем считать их вещественными. Также

для упрощения исследования будем считать энергетические уровни A и B разными, но эквивалентными друг другу, то есть скорости спонтанного распада атомов с уровня C на уровни A и B совпадают. Отстройки δ_1 и δ_2 удобно записывать через суперпозицию однофотонной Δ и двухфотонной δ отстроек. В итоге получаем пять параметров системы:

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \delta = \delta_1 - \delta_2, \quad (1.46)$$

$$\Omega = \Omega_1 = \Omega_2, \quad (1.47)$$

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2, \quad \Gamma. \quad (1.48)$$

Однофотонная отстройка показывает настройку обоих полей на резонанс. Она слабо влияет на итоговый результат и может быть принята равной нулю. Гораздо большую роль в системе играет двухфотонная отстройка. Напомним, что если два поля с частотами ω_1 и ω_2 получаются в результате модуляции монохроматического света с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$, то двухфотонная отстройка линейно зависит от частоты модуляции с линейным множителем 1. Значит, имея механизм управления двухфотонной отстройкой, можно стабилизировать частоту модуляции входного света.

Узкий резонанс когерентного пленения населённостей

Система (1.39–1.43) приводит к установившемуся состоянию, которое не меняется с течением времени. Чтобы его найти, можно приравнять производные к нулю и решить неоднородную систему линейных алгебраических уравнений.

Будем нормировать все константы на скорость спонтанного распада, которую примем равной единице $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Так как переход между нижними уровнями запрещён, а частота перехода $A \leftrightarrow B$ много меньше частоты оптических переходов между любым нижним и верхним уровнем, то константа релаксации Γ на несколько порядков меньше константы спонтанного распада γ . В стандарте частоты интенсивности оптических полей малы, чтобы не уширять уровни и не ухудшать точность частоты перехода $A \leftrightarrow B$. На рисунке 1.3 приведены несколько графиков зависимости населённости возбуждённого уровня от двухфотонной отстройки. Можно заметить, что глубина провала в середине графика увеличивается вместе с ростом частоты Раби. Однако вместе с этим растёт и его ширина.

Ширина резонанса может быть оценена по простому соотношению:

$$\text{FWHM} \approx \Gamma + \frac{\Omega^2}{\gamma}. \quad (1.49)$$

Поскольку в газовой ячейке время жизни когерентности между метастабильными уровнями может достигать десятка миллисекунд, то ширина уровня может быть сужена до сотни герц. Стабилизируя частоту модуляции входного света по этой узкой линии двухфотонного поглощения, можно создать стандарт частоты на ячейке с паром щелочного металла, который имеет большую стабильность, чем кварцевый резонатор.

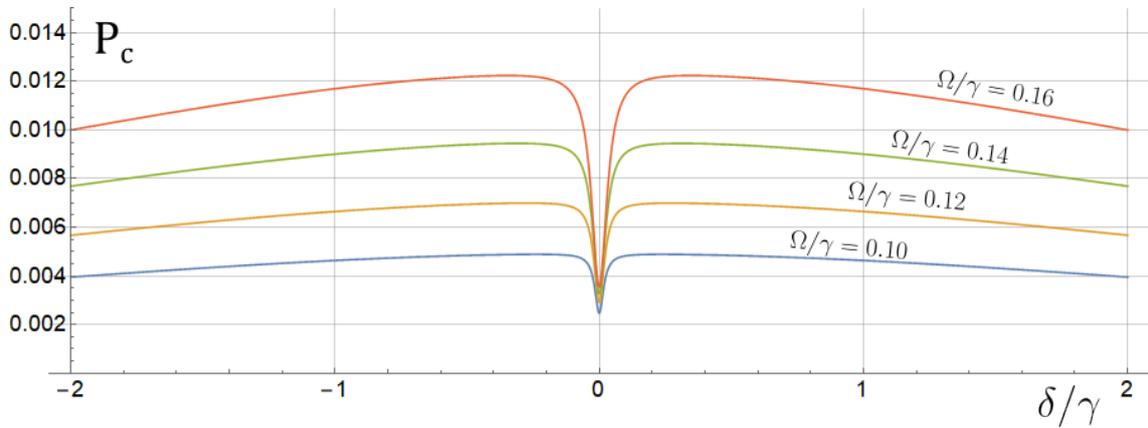


Рис. 1.3: График зависимости населённости возбуждённого уровня P_c от относительной двухфотонной отстройки δ/γ при разных частотах Раби. Отношение скоростей релаксации принято равным $\Gamma/\gamma = 0.01$

Близкое к предельному значение времени жизни поляризованных состояний пара было достигнуто в лабораторных условиях в 2010 году. Используя специальные покрытия на внутренней стенке ячейки, оказалось возможным довести время жизни до минуты¹².

1.2.4 Сверхточные атомные часы: цезиевый фонтан

Одним из наиболее точных методов стабилизации частоты является возбуждение облака холодных атомов, которые находятся в состоянии свободного движения, двумя последовательными импульсами радиополя определённой частоты с длительным интервалом времени между ними. Условно такую схему называют "атомный фонтан". В роли атомов чаще всего применяются щелочные металлы ^{87}Rb или ^{133}Cs .

¹²<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.105.070801>

Первая установка подобного типа была реализована в США в "National Institute of Standards and Technology". Стандарт на основе газовой ячейки с паром, о котором говорилось в предыдущем параграфе, миниатюрный и может работать при высокой температуре, кроме того, он мало чувствителен к внешним механическим воздействиям. Однако ширина резонансной линии около сотни герц существенно ограничивает использование стандарта в качестве эталона для калибровки других часов. В цезиевом фонтане используется тот же самый переход между нижними сверхтонкими уровнями, но, в отличие от стандарта на газовой ячейке со щелочным паром, облако цезия охлаждено практически до нуля кельвин и движется поступательно в свободном пространстве, очищенном от других атомов и полей. Таким образом, нижние метастабильные сверхтонкие уровни оказываются не уширенными внешними факторами. Атомы во время свободного полёта не сталкиваются между собой и не подвержены влиянию ни оптического поля накачки, ни стабилизируемого радиополя.

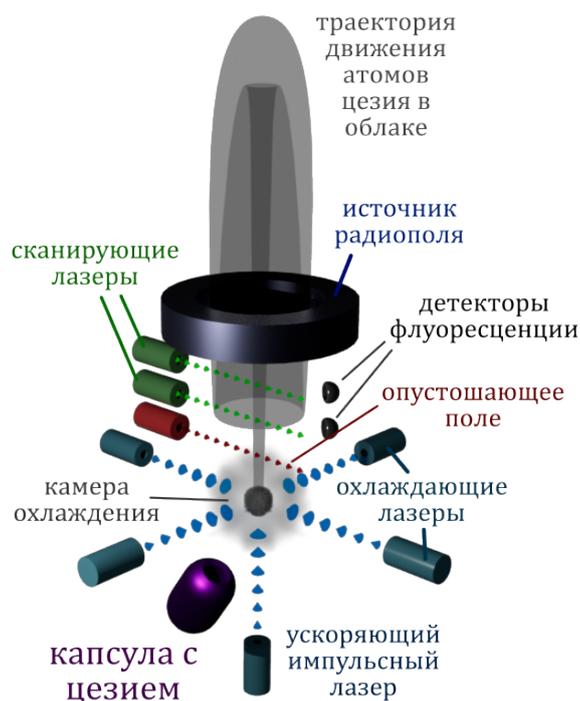


Рис. 1.4: Принципиальная схема чувствительного элемента цезиевого стандарта частоты, в которой стабилизируется частота радиополя микроволновой моды.

Принципиальная схема цезиевого фонтана приведена на рисунке 1.4. Из капсулы в камеру охлаждения испаряется металлический цезий, который заполняет всё пространство камеры. Три противо-

положно направленные пары лазерных лучей, которые перпендикулярны друг другу, светят в малую область камеры охлаждения. Под действием лазерного поля атомы цезия скапливаются около точки пересечения лучей и тормозятся, образуя концентрированное холодное облако с температурой несколько микрокельвин. Когда облако сформировалось, то охлаждающие лазеры выключаются, а затем один из лазеров направленным импульсом придаёт облаку строго определённый импульс вертикально вверх, при этом его частота отстроена далеко от резонанса атомного перехода внутри цезия, поэтому атомы остаются в основном состоянии.

Облако, двигаясь поступательно вверх, покидает камеру охлаждения и попадает в камеру оптического возбуждения и сканирования атомов. Сначала облако пролетает через луч, который опустошает нижний сверхтонкий уровень цезия $F = 4$, остаётся только один населённый уровень $F = 3$. Далее облако атомов пролетает через микроволновую моду, в которой поддерживается радиополе на частоте перехода между уровнями $F = 3$ и $F = 4$. При этом площадь импульса такова, что атомы не должны перейти с населённого уровня $F = 3$ на уровень $F = 4$, а оказаться в состоянии суперпозиции между этими метастабильными уровнями. Далее облако покидает микроволновую моду и оказывается в свободном вертикальном полёте. За время порядка секунды или несколько меньше, облако под действием силы тяжести останавливается и начинает падать обратно в область, где продолжает колебаться микроволновая мода. Пока атомы пролетают через поле вниз, они вторично оказываются под действием того же самого радиополя, что эквивалентно второму импульсу с такой же площадью и частотой, как и первый импульс. Если частота радиополя совпадает с частотой перехода между уровнями $F = 3$ и $F = 4$, то атомы из состояния суперпозиции перейдут на уровень $F = 4$. Если же частота радиополя отличалась от частоты перехода, то накопившаяся разница фаз за время свободного полёта облака приведёт к тому, что направление перехода для половины атомов, вторично попавших в область радиополя, станет противоположным, то есть половина атомов перейдёт обратно на уровень $F = 3$. Далее облако продолжает падение и оказывается в области сканирования, где оптическое поле просвечивает облако, возбуждая только те атомы, которые могли остаться на уровне $F = 3$. Если они действительно присутствуют в облаке, то рождается переизлучение, или флуоресценция, которая легко детектируется с помощью фотоэлементов около траектории движения облака. Если интенсивность

флуоресценции выше шума, то радиочастота настроена не в резонанс с переходом между уровнями $F = 3$ и $F = 4$, и обратная связь стремится вернуть частоту обратно. Поскольку уровни не уширены в свободном полёте, то ширина резонансной линии в зависимости интенсивности флуоресценции от частоты радиополя составляет меньше 1 Герц. Это более чем на два порядка меньше, чем ширина резонансной линии в стандарте на паре щелочных атомов. То есть стабильность частоты на цезиевом фонтане также должна быть на два-три порядка лучше. Здесь приведено упрощённое описание схемы, в действительности для повышения точности в радиополе могут вводиться искусственные повороты фазы на 90 градусов, а обратная связь строится на отношении задетектированной разницы населённости уровней $F = 3$ и $F = 4$, но такие подробности выходят за рамки нашего курса.

Если ввести гамильтониан взаимодействия между двухуровневыми атомами и внешним монохроматическим полем, то нетрудно описать зависимость вероятности населения уровня $F = 3$ от отстройки от резонанса. Мы оставляем эту задачу для самостоятельного решения. Подобная схема двухимпульсного резонанса называется "Рамзеевская схема опроса".

1.2.5 Атомные часы на высокозаряженных ионах

Стандарт на одиночном ионе основан на использовании мультипольного перехода между долгоживущим метастабильным уровнем и нижним уровнем иона иттербия $^{171}\text{Yb}^+$. Одиночный ион обладает преимуществом перед атомным ансамблем, так как его энергетические уровни не уширены из-за взаимодействия с окружением, как это происходит в случае газовой ячейки с паром щелочного металла и в меньшей степени в случае холодного облака щелочных атомов в свободном пространстве внутри защищенной от магнитных полей области.

В данной схеме стабилизируется удвоенная частота лазерного поля, которое распространяется через ту точку, в которой находится захваченный ион. Схема энергетических уровней иона приведена на рисунке 1.5. Протокол стабилизации содержит несколько последовательных шагов:

1. ион иттербия захватывается в ловушку полем на разрешённом дипольном переходе $^2S_{1/2}(F = 1) \leftrightarrow ^2P_{1/2}(F = 0)$ 370 нм;

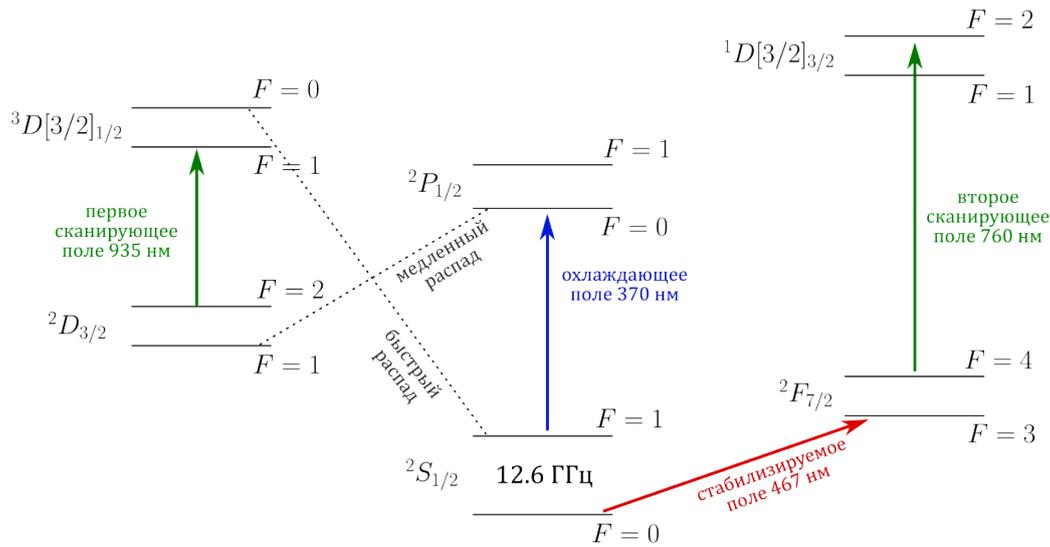


Рис. 1.5: Схема энергетических уровней иона иттербия $^{171}\text{Yb}^+$, которые задействованы в стандарте частоты

2. с течением времени происходит спонтанный распад иона на уровень $^2D_{3/2}$, что наблюдается в виде прекращения люминесценции, вызываемой распадом иона с уровня $^2P_{1/2}$ на уровень $^2S_{1/2}$ при непрерывном возбуждении "охлаждающим" полем 370 нм;
3. Пока ион находится на уровне $^2D_{3/2}$, "охлаждающее" поле 370 нм выключается, после чего выжидается интервал времени, достаточный для распада иона с уровня $^2D_{3/2}$ на уровень $^2S_{1/2}$;
4. Стабилизируемое поле 934 нм на удвоенной частоте направляется на захваченный ион и действует в течение времени около 500 мс, которое в случае точного резонанса соответствует углу Раби $\theta = \pi$, то есть ион должен в итоге оказаться на уровне $^2F_{7/2}$.
5. Ключевой этап - опрос иона. "Охлаждающее" поле 370 нм и первое сканирующее поле 935 нм направляются на ион: если флуоресценция не возникла, значит, ион находится на уровне $^2F_{7/2}$ ($F = 3$) и поэтому не взаимодействует с полями, стабилизируемое поле находится в резонансе и подстройка не требуется; в противном случае, если наблюдается флуоресценция, значит ион остался на уровне $^2S_{1/2}$ и поэтому интенсивно поглощает фотоны, тогда через обратную связь включается команда на подстройку частоты стабилизируемого поля.

6. Если ион перешёл на уровень ${}^2F_{7/2}$, то включается второе сканирующее поле 760 нм, которое переводит ион на уровень ${}^1[3/2]_{3/2}$, откуда он быстро распадается на основной уровень ${}^2S_{1/2}$, стабилизируемое поле находится в резонансе — подстройка не требуется. Если ион остался на уровне ${}^2S_{1/2}$, то второе сканирующее поле не включается, а обратная связь подстраивает стабилизируемое поле 934 нм по частоте. После этого в обоих случаях протокол возвращается на первый шаг.

Метод работы обратной связи может быть реализован по-разному в зависимости от оптической схемы. Самый эффективный способ состоит в том, чтобы периодически менять частоту стабилизации поля на левый и правый склон резонансного пика на его полувысоте.

Причина высокой точности стабилизации состоит в том, что октупольный переход ${}^2S_{1/2} \leftrightarrow {}^2F_{7/2}$ очень слабо выражен. Для возбуждения этого перехода требуется длительное воздействие резонансного света. Если время воздействия для перехода на другой уровень примерно равно 500 мс, то ширина оптического перехода с частотой $c/\lambda \approx 6.42 \cdot 10^{14}$ Гц получается около 1 Гц. Учитывая то, что относительная ширина резонанса равна 10^{-15} , можно с помощью длительного сбора статистики стабилизировать частоту оптического поля с относительной точностью до 10^{-17} .

Оптические часы на одиночных ионах сложны в реализации, но в будущем они должны заменить устаревающие цезиевые фонтаны в качестве первичного эталона.

1.3 Гироскопы

Позиционирование в пространстве любого объекта с жёсткой конструкцией условно можно разделить на местоположение и ориентацию. Для этого необходимо выбрать три опорные точки, не лежащие на одной прямой, и привязать их к геометрии объекта. Тогда местоположение задаётся тремя координатами центра треугольника (в качестве центра можно определить любую точку), в то время как ориентация задаётся тремя углами - первые два определяют направление выходящей из центра нормали к плоскости, содержащей три опорные точки, а третий угол определяет поворот треугольника вокруг нормали.

Задача гироскопов состоит в том, чтобы определять ориентацию прибора в пространстве без связи со внешними источниками. Если

гироскоп не только определяет, но и стабилизирует ориентацию, то он называется гиродин.

Можно по-разному классифицировать гироскопы в зависимости от того, какая его характеристика имеет наивысший приоритет.

Классификация по принципу работы:

- Гироскопы на законе сохранения момента импульса. Чувствительный элемент представляет собой квантовый или классический ротор, момент импульса которого сохраняет своё направление в инерциальной системе отсчёта. При изменении ориентации объекта с закреплённым на нём гироскопом в неинерциальной системе отсчёта гироскопа происходит поворот момента импульса чувствительного элемента.
- Гироскопы на эффекте Доплера. Чувствительный элемент представляет собой замкнутый контур, вдоль которого распространяется две встречные волны. При вращении контура возникает эффект Доплера, который создаёт разницу между длинами волн, бегущих навстречу друг другу. По величине фазового сдвига определяется изменение ориентации объекта, к которому прикреплён гироскоп.

Классификация по измеряемой величине:

- Чувствительный элемент гироскопа измеряет скорость вращения в неинерциальной системе отсчёта, связанной с объектом. Как правило, используются для стабилизации ориентации на коротком интервале времени.
- Чувствительный элемент гироскопа измеряет угол поворота вокруг опорной оси в неинерциальной системе отсчёта, связанной с объектом. Как правило, используется для стабилизации ориентации на длительном интервале времени.

Классификация по величине дрейфа:

- Гироскопы коммерческого класса: дрейф чувствительного элемента более 1 градуса в час.

- Гироскопы тактического класса: дрейф чувствительного элемента порядка 0.1 градуса в час.
- Гироскопы навигационного класса: дрейф чувствительного элемента порядка 0.01 градуса в час.
- Гироскопы стратегического класса: дрейф чувствительного элемента менее 0.001 градуса в час.

1.3.1 Современное состояние проблемы, достигнутые показатели дрейфа и чувствительности гироскопов

Наиболее точным гироскопом в истории является датчик поворота американской космической программы геодезических фундаментальных исследований Gravity Probe B¹³. Он был основан на электростатической подвеске шарообразного классического ротора с идеальной геометрией, момент импульса которого практически не имел затухания, обусловленного взаимодействием с внешней средой. Таким образом, отклонение оси вращения левитирующего ротора могло быть вызвано только эффектами кривизны пространства-времени. Гироскоп проработал в течение года на орбите Земли с 2004 по 2005 год. Дрейф самого точного в мире гироскопа по итогам обработки данных составил менее 10^{-9} градуса в час, что на шесть порядков превосходит требования стратегического класса точности. Мы привели пример самого точного гироскопа, однако он не является квантовым устройством, так как основан на сохранении классического момента вращения.

Не следует думать, что квантовые гироскопы по определению точнее классических. Их отличие только в принципе работы. На сегодняшний день можно назвать несколько направлений развития квантовых гироскопов — это волоконно-оптические гироскопы со сжатым светом, кольцевые лазерные гироскопы, атомные интерферометры, гироскопы на эффекте сохранения спина и другие менее известные схемы. В то же время нет квантовых гироскопов, которые имели бы полное преимущество над другими типами квантовых гироскопов, иначе они бы вытеснили с рынка все остальные. В разных условиях эксплуатации применяются разные типы квантовых гироскопов. Например, в условиях высоких вибраций и ускорений, а также перепадах температур лучшие показатели имеют менее точные, но устойчивые гироскопы на ядерном спине; в условиях силь-

¹³<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0273117789900057?via%3Dihub>

ных магнитных помех и требованиях к низкому энергопотреблению лучшие показатели демонстрируют волоконно-оптические гироскопы; а в условиях отсутствия внешних воздействий при требованиях компактности лучшие показатели имеют лазерные гироскопы. Кроме того, разные типы квантовых гироскопов представлены в разных классах точности в зависимости от параметров и цены их комплектующих деталей. Таким образом, отдавать приоритет квантовому гироскопу определённой технологии на сегодняшний день не имеет смысла.

Ниже мы приводим типичные характеристики разных типов гироскопов в наилучших условиях их работы

- Типичные волоконные гироскопы имеют показатели дрейфа $10^{-1} - 10^{-4}$ градуса в час. Рынок представлен многими фирмами, технологическими лидерами из которых являются: honeywell (США), emcore (США), Northrop Grumman LITEF (Германия), Nedaero (Нидерланды), ixblue (Франция), FOG Photonics inc (Гонконг), OPTOLINK (Россия), Электроприбор (Россия), Advanced Navigation (Австралия). Одним из лучших волоконно-оптических гироскопов мира является российский SRS5000 фирмы OPTOLINK¹⁴, который по показателям дрейфа около 10^{-3} градуса в час соответствует стратегическому классу точности. Волоконно-оптические гироскопы занимают второе место по охвату мирового рынка.
- Типичные кольцевые лазерные гироскопы имеют показатели дрейфа $10^{-1} - 10^{-3}$ градуса в час. Они в среднем менее точные, чем волоконно-оптические гироскопы. Тем не менее, появившись раньше, кольцевые лазерные гироскопы пока занимают первое место на мировом рынке по охвату. Отдельные экземпляры лазерных гироскопов имеют показатели дрейфа намного лучше серийных образцов, как например G ring laser¹⁵¹⁶ в геодезической лаборатории Веттцелль в Баварии. Будучи не ограниченными длиной волокна, лазерные гироскопы с большой базой имеют преимущество перед волоконно-оптическими гироскопами при проведении фундаментальных исследований. Фирмы, обладающие циклом разработки и производства лазерных гироскопов: Honeywell (США), Safran (Франция), Northrop

¹⁴http://www.optolink.ru/en/products/single_axis_fog/srs5000

¹⁵<https://web.infn.it/GINGER/index.php/it/component/tags/tag/gyroscopes>

¹⁶<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S163107051400142X>

Grumman (США), Aerosun Corporation (Китай), Ericco Inertial Systems (Китай). В России мелкосерийным производством кольцевых лазерных гироскопов занимаются НИИ "Полюс" им. М.Ф.Стельмаха, НПК "Электрооптика" и др. На 2022 год суммарный рынок лазерных гироскопов составлял около 900 миллионов долларов США в год.

- Гироскоп на эффекте ядерного магнитного резонанса пока не представлен на рынке, но его разработки активно ведутся. Сложный механизм возбуждения ядерной намагниченности долгое время не позволял развивать гироскопы подобного типа. Однако сейчас существует две успешных реализации макета гироскопа на ядерном магнитном резонансе: гироскоп Northrop Grumman (США)¹⁷, который доведён до готового миниатюрного прототипа с дрейфом нуля около 10^{-2} градуса в час, а также гироскоп-комагнитометр Принстонского университета (США) с высокой чувствительностью к углу поворота¹⁸, который создан в 2005 году для решения фундаментальных задач магнитометрии и навигации, его точность соответствовала требованиям стратегического класса. В России прототип гироскопа на ядерном магнитном резонансе разрабатывался в конце 2010-х годов в ЦНИИ "Электроприбор" и был доведён до работающего прототипа, однако его конечные характеристики не соответствовали заявленным требованиям — исследования продолжаются¹⁹. Судя по большому количеству публикаций, активная разработка гироскопов на ядерном магнитном резонансе ведётся и в Китае²⁰, тем не менее готового изделия для государственных задач или продажи на рынке на середину 2024 года китайскими инженерами не продемонстрировано. Учитывая невосприимчивость к перепадам температур и внешним механическим воздействиям, подобные гироскопы должны занять значительную долю коммерческого рынка гироскопов для нужд промышленности, гражданской авиации, космических полётов и геологии.

¹⁷<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1049250X16300064>

¹⁸<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.95.230801>

¹⁹<https://link.springer.com/article/10.1134/S2075108718030100>

²⁰<https://www.nature.com/articles/s41598-020-59088-y>

1.3.2 Лазерные и волоконные гироскопы

Волоконно-оптический гироскоп, так же как и лазерный гироскоп, основан на эффекте разницы оптической длины пути для двух волн, которые распространяются в противоположные стороны в замкнутом контуре. В отличие от кольцевого лазерного гироскопа, волоконный оптический гироскоп имеет внешний источник электромагнитного поля, которое распространяется по замкнутому контуру. При этом замкнутый контур не является резонатором, однако большая длина оптоволоконна позволяет значительно увеличить разницу противоположных путей, которые проходит свет внутри контура.

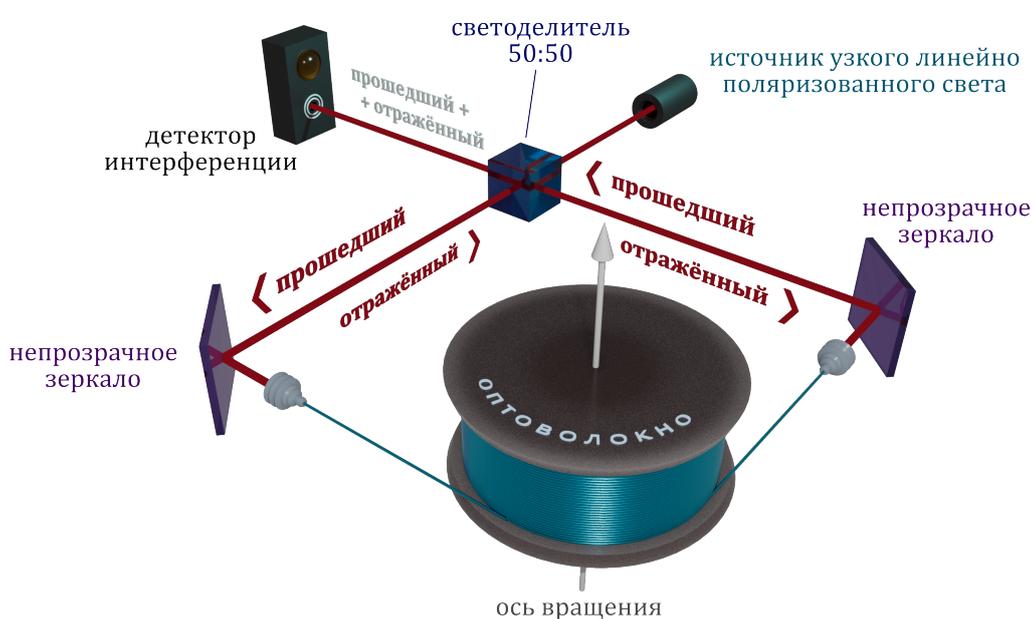


Рис. 1.6: Упрощённая схема волоконно-оптического гироскопа. Светоделитель может быть заменён на направленный ответвитель, в котором взаимодействуют отражённый и прошедший импульсы.

Принципиальная схема волоконно-оптического гироскопа приведена на рисунке 1.6. Световой импульс делится на два сфазированных на входе импульса, которые попадают внутрь волокна с разных концов. Далее импульсы проходят через волокно и выходят из него также с противоположных концов. Далее эти два импульса сводятся в один и регистрируются фотодетектором. Если катушка с волокном имела вращение, то разность фаз может быть оценена по формуле:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi SN}{\lambda c} \Omega, \quad (1.50)$$

где S — площадь контура катушки, N — количество витков, c — скорость света в вакууме, λ — длина волны в волокне.

Если частота вращения гироскопа равна нулю, то фазы разделённых импульсов совпадают и на фотодетекторе возникает конструктивная интерференция, то есть импульсы усиливают друг друга. Если частота вращения гироскопа равна $\lambda c/2SN$, то разность фаз разделённых импульсов отличаются на π и на фотодетекторе возникает деструктивная интерференция, то есть импульсы гасят друг друга. Условно можно считать угловую скорость вращения, при которой происходит деструктивная интерференция, границей диапазона измерения.

Преимуществом волоконно-оптического гироскопа является его высокая точность при небольших потребляемых мощностях, невысокие требования к ширине полосы лазерного импульсного источника, отсутствие механических элементов в контуре, таких как зеркала, что уменьшает зависимость характеристик гироскопа от вибраций.

Недостатками волоконно-оптических гироскопов являются зависимость от температуры из-за деформаций волокна; ограничение на предел чувствительности из-за поглощения световых импульсов в волокне; высокие требования к поляризации и когерентности поля из-за фундаментального предела точности измерения фазы импульсов заданной амплитуды. Отчасти можно решить последнюю проблему, используя источник сжатого по фазе света.

1.3.3 Интерферометры Саньяка в гироскопии

Лазерные гироскопы на эффекте Саньяка — это одни из наиболее старых квантовых гироскопов, которые и на сегодняшний день занимают наибольшую долю рынка квантовых гироскопов по сравнению с гироскопами на других технологиях.

Эффект Саньяка заключается в накоплении разницы фаз двух встречных электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся по одному и тому же контуру, в точке детектирования, если контур вращается вокруг нормали к плоскости этого контура. При описании лазерного гироскопа на эффекте Саньяка обычно говорят о появлении разницы частот двух встречных волн, которую можно оценить по простой формуле:

$$\Delta\nu \approx \frac{4S}{\lambda L} \Omega, \quad (1.51)$$

где S — это площадь, ограниченная контуром распространения лазерного поля, λ — длина волны лазерного поля в лабораторной системе координат, L — длина контура.

На рисунке 1.7 приведена простейшая схема кольцевого лазерного гироскопа без деталей оптической схемы, которая необходима для создания эффективной обратной связи. Активная среда находится прямо внутри кольцевого резонатора, в которой происходит генерация поля. Накачка активной среды осуществляется разными способами в зависимости от её природы, например, если гироскоп сконструирован на основе газового лазера, то накачка представляет собой разряд через анод и катод, которые установлены в нескольких точках по периметру резонатора.

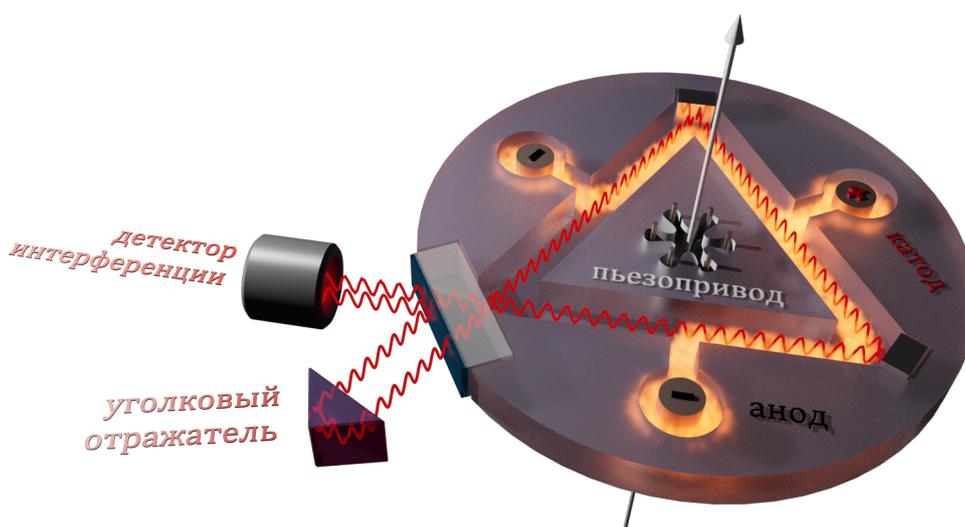


Рис. 1.7: Схема типового гироскопа на газовом лазере. Красная синусоида показывает стоячую волну внутри кольцевого резонатора с зеркалами по углам треугольника. Светящаяся область показывает район возбуждения активной среды электрическим разрядом.

Когда гироскоп начинает вращаться, то, как показано в формуле 1.51, появляется разница частот встречных волн. Электромагнитные волны с небольшой разницей по частоте формируют биения, которые видны наблюдателем в виде "движения" интерференционной картины на выходе из полупрозрачного зеркала. Детектируя изменение интерференционной картины, можно измерять угол поворота гироскопа. Как правило, лазерному гироскопу искусственно придаётся начальное вращение, чтобы более точно измерять угол поворота относительно некоторого монотонного смещения.

Отметим, что чем больше контур, тем больше коэффициент пропорциональности между разницей частот и скоростью вращения ги-

роскопа. А значит, большие кольцевые лазерные гироскопы имеют лучшие характеристики по сравнению с миниатюрными. Несмотря на это, неограниченное увеличение контура лазерного гироскопа не приведёт к эквивалентному улучшению его характеристик, так как существуют технические ограничения, связанные с юстировкой лазерного луча, устранением механических возмущений большой оптической схемы, температурной и магнитной стабильностью активной среды и так далее.

Преимущества кольцевых лазерных гироскопов заключаются в его высокой точности по сравнению с другими видами гироскопов при сопоставимых потребляемых мощностях и размерах. Кроме того, лазерная генерация обладает низкой инертностью, что обеспечивает быстрый выход в рабочий режим. Однако кольцевые лазерные гироскопы чувствительны к внешним температурным, магнитным и механическим воздействиям. Кроме того, лазеры имеют свойство старения, что снижает ресурс лазерных гироскопов и приводит к необходимости их частой замены. Эти факторы негативно сказываются на области применения кольцевых лазерных гироскопов.

1.3.4 Атомные интерферометры

Атомные интерферометры — это устройства, принцип работы которых похож на оптические интерферометры. Два пучка атомов обладают некоторой несущей фазой, и если эти фазы совпадают или не совпадают в области пересечения пучков, то возникает интерференционная картина. Способ детектирования интерференции зависит от того, какую природу имеет фаза атомов.

На данный момент в качестве несущей фазы гироскопов, основанных на интерференции атомов, выбрана фаза волны де-Бройля. Преимущество волновой природы атомных пучков по сравнению со световыми волнами состоит в том, что атомы пучка имеют большую массу и, следовательно, малую длину волны де-Бройля. Можно, например, оценить её для тепловых скоростей атомов стронция: скорость около 500 м/с, масса примерно равна 1.4510^{-25} кг, тогда длина волны де-Бройля $\lambda_{Sr} = 2\pi\hbar/p \approx 10^{-11}$ м. Это соответствует очень жёсткому гамма излучению и на пять порядков меньше длины волны света на границе инфракрасного диапазона. Столь малая длина волны наводит на мысль о возможности использования атомных волн для получения интерференционной картины плотности вероятности детектирования атомов в области пересечения пучков с высокой резкостью. Под резкостью следует понимать частоту смены

ярких и тёмных полос при варьировании разницы длины путей разделённых атомных пучков. Проблема метода заключается в высокой технической сложности формирования стабильных пучков атомов с одинаковым импульсом, которые распространяются в свободном пространстве без взаимодействия с термостатом. Другая проблема заключается в том, что при детектировании атомов возникает квантовый шум, который уменьшает видимость интерференционной картины. Квантовый шум тем больше, чем меньше плотность атомных пучков.

Теоретические оценки атомных интерферометров имеют очень низкие показатели дрейфа, на уровне лучших электростатических гироскопов для гравитационных измерений, однако пока они технически не реализуемы. В 2021 году был продемонстрирован работающий прототип атомного гироскопа, в котором достигнут показатель дрейфа 0.0002 градуса в час при времени наблюдения шесть часов²¹. Это примерно на порядок лучше, чем гироскопы на оптическом волокне. Чувствительность прибора составила $\approx 3 \times 10^{-8} \sqrt{Hz}$.

Следует также упомянуть о классической работе 2011 года, в которой подобная технология была применена для детектирования колебаний оси вращения Земли. Это одна из главных вех в области развития атомной гироскопии и интерферометрии²².

1.3.5 Гироскопы на эффекте магнитного резонанса

Гироскопы на ядерном магнитном резонансе являются квантовыми гироскопами, так как в основе стабилизации ориентации в пространстве лежит закон сохранения спинового состояния ядра. Чувствительный элемент представляет собой газовую ячейку со смесью благородного газа и пара щелочного металла. Причем, благородный газ содержит два разных изотопа одного и того же химического элемента.

Благородный газ

Благородный газ в ячейке хранит информацию о спиновом состоянии ядер и является непосредственным сенсором внутри гироскопа. По отличию в динамике спинового состояния ядер, принадлежащих разным изотопам, определяется скорость вращения газовой ячейки в пространстве. Принципиально можно обойтись одним изотопом, но

²¹<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.023319>

²²<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.133001>

два разных изотопа позволяют устранить проблему стабилизации магнитного поля внутри ячейки. В реально работающем прототипе в качестве благородного газа используются изотопы ^{129}Xe с моментом ядра $1/2$ и гиромагнитным отношением $11,8$ МГц/Тл и ^{131}Xe с моментом ядра $3/2$ и гиромагнитным отношением $-3,9$ МГц/Тл.

В газовой ячейке с помощью катушек создаётся постоянное магнитное поле направленное вдоль оси, вокруг которой измеряется скорость вращения гироскопа. Если спиновое состояние ядер, принадлежащих атомам одного и того же изотопа ксенона, совпадает, то в ячейке присутствует спиновая поляризация и ядерная намагниченность. Вместе они ведут себя во внешнем магнитном поле подобно механическому волчку с гиромагнитным отношением, совпадающим с таковым для ядер ксенона. То есть вектор ядерной намагниченности прецессирует вокруг внешнего магнитного поля B_0 с частотой $\omega_\alpha = |\gamma_\alpha| B_0$, где α обозначает конкретный изотоп ксенона.

Если ячейка вращается с угловой скоростью Ω , то регистрируемые частоты ω'_α прецессии изотопов ксенона будет отличаться на эту величину, так как ядерная намагниченность привязана к газу и не поворачивается вместе со стенками ячейки:

$$\omega'_{129} = |\gamma_{129}| B_0 + \Omega, \quad (1.52)$$

$$\omega'_{131} = |\gamma_{131}| B_0 - \Omega. \quad (1.53)$$

Минус перед частотой Ω во втором уравнении связан с тем, что гиромагнитные отношения изотопов противоположны по знаку, то есть прецессия одного из изотопов происходит в обратную сторону по отношению к механическому вращению.

Сигнал от намагниченности ячеек представляет собой двухгармоническую функцию, из которой частоты могут быть выделены с помощью алгоритма демодуляции. Складывая измеренные частоты, можно стабилизировать магнитное поле, которое формируется катушкой гироскопа, а исключая из уравнений магнитное поле, можно стабилизировать частоту вращения гироскопа:

$$\frac{\omega'_{129} + \omega'_{131}}{|\gamma_{129}| + |\gamma_{131}|} = B_0, \quad (1.54)$$

$$\frac{|\gamma_{131}| \omega'_{129} - |\gamma_{129}| \omega'_{131}}{|\gamma_{129}| + |\gamma_{131}|} = \Omega. \quad (1.55)$$

Таким образом, эффективность стабилизации частоты вращения гироскопа определяется точностью измерения частот прецессии изотопов ксенона.

Несомненное преимущество благородного газа состоит в том, что ядра защищены от внешнего воздействия заполненной электронной оболочкой. При столкновении со стенками и другими атомами атом благородного газа отталкивается, но вероятность спонтанного изменения спинового состояния ядра мала по сравнению с таковой для других химических элементов в любом фазовом состоянии вещества. В результате, если ядра атомов некоторого изотопа ксенона находятся в одном и том же состоянии, то для наблюдателя это будет иметь вид намагниченного механического волчка, момент импульса которого медленно затухает в течение среднего времени жизни спинового состояния. Предельное время жизни спиновой поляризации τ в 1 минуту было достигнуто в 2014 году²³. Это значит, что ширина спинового резонанса $1/(2\pi\tau)$ не превышает одной сотой герца. Такая точность позволяет довести точность гироскопа на ЯМР до навигационного класса.

Защищенность ядра благородного газа является преимуществом для точности прибора, однако создаёт проблему для непосредственного детектирования ядерной намагниченности. Атомы благородного газа не имеют разрешённых оптических переходов, поэтому для индуцирования и детектирования ядерной намагниченности используется пар щелочного металла.

Щелочной пар

Атомы щелочного пара осуществляют накачку продольной составляющей и детектирование поперечной составляющей ядерной намагниченности внутри газовой ячейки. Продольной и поперечной мы называем проекции вектора намагниченности, которые направлены параллельно и перпендикулярно стабилизируемому магнитному полю B_0 (оси Z).

Накачка ядерной намагниченности через щелочной пар происходит через два процесса: оптическое поле круговой поляризации возбуждает спиновую поляризацию внешних электронов щелочных атомов вдоль магнитного поля B_0 , а затем при длительных ван-дер-ваальсовых столкновениях спин электрона передаётся ядрам благородного газа по механизму спин-обменного взаимодействия²⁴.

Детектирование ядерной намагниченности ксенона происходит через три процесса: поперечная ядерная намагниченность по меха-

²³<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.105.070801>

²⁴<https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.69.629>

низму ферми-контактного взаимодействия при частых столкновениях формирует для атомов щелочного металла эффективное поперечное магнитное поле B_{Xe} , которое на несколько порядков больше поля ядерной намагниченности; далее в суммарном поле $B_0 + B_{Xe}$, которое не совпадает по направлению с B_0 , вызывается электронный спиновый резонанс щелочных атомов с помощью продольной модуляции поля B_0 , этот резонанс приводит к быстрой по сравнению с ядерной намагниченностью прецессии спиновой поляризации щелочных атомов вокруг поля $B_0 + B_{Xe}$, причём за счёт модуляции продольной составляющей B_0 прецессия имеет пульсирующий характер (то замедляясь - то ускоряясь), таким образом, по амплитуде пульсаций спиновой поляризации щелочных атомов определяется величина ядерной намагниченности, а по фазе пульсаций — направление поперечной составляющей ядерной намагниченности; и наконец, динамику спиновой поляризации щелочных атомов можно непосредственно пронаблюдать с помощью линейно поляризованного сканирующего света по обратному парамагнитному эффекту Фарадея: поляризация света поворачивается, если спиновая поляризация щелочных атомов имеет отличную от нуля проекцию вдоль оси распространения сканирующего света.

1.4 Контрольные вопросы

1. Какие вопросы ставит перед собой квантовая метрология?
2. Что происходит во время квантового измерения?
3. Что такое неопределённость Гейзенберга? Как она влияет на точность измерения прибора?
4. Каким образом можно преодолеть классический предел при измерении? Опишите процедуру сжатия для гармонического осциллятора.
5. Что такое стандарт частоты? Какие характеристики описывают качество стандарта частоты?
6. Какие квантовые технологии стандартов частоты используются на спутниках, на первичных эталонах, вторичных эталонах?
7. Как устроен квантовый стандарт частоты на облаке холодных атомов цезия?

8. Как устроен стандарт частоты на эффекте когерентного пленения населённости?
9. Как устроен стандарт частоты на запрещённом переходе иона иттербия?
10. Какие показатели стабильности достигнуты на сегодняшний день и на каких устройствах?
11. Что такое гироскоп и для чего он применяется? Каким образом классифицируют гироскопы?
12. Какие квантовые гироскопы существуют на сегодняшний день и как распределён рынок квантовых гироскопов?
13. Как устроен волоконно-оптический гироскоп? Приведите простые оценки точности гироскопа на конкретном примере.
14. Как устроен лазерный гироскоп на эффекте Саньяка? Приведите простые оценки точности гироскопа на конкретном примере.
15. Что является чувствительным элементом гироскопа на эффекте ядерного магнитного резонанса?
16. Для чего в квантовых сенсорах с двумя изотопами благородного газа присутствует щелочной пар?
17. Как рассчитывается чувствительность квантового сенсора? Сформулируйте понятие девиации Аллана.
18. Опишите динамику двухуровневого квантового сенсора без релаксации под действием двух монохроматических импульсов через определённый интервал времени.
19. Какой принцип лежит в основе атомных интерферометров? Где они могут быть использованы и чем ограничено их применение?
20. Докажите связь между скоростью распада энергетического уровня и шириной оптического резонанса на переходе, содержащим этот уровень.

Глава 2

Квантовые вычислительные системы

Квантовые вычислительные системы являются одной из трёх суб-технологий, которые входят в дорожную карту квантовых технологий России. Приведём цитату из дорожной карты КТ:

Квантовые вычислительные системы – новый класс вычислительных устройств, использующий для решения задач принципы квантовой механики. Прогнозируется, что в целом ряде задач квантовый компьютер будет способен дать многократное ускорение по сравнению с существующими суперкомпьютерными технологиями. Примерами являются сферы кибербезопасности, искусственного интеллекта и создание новых материалов.

Квантовые вычислительные системы на сегодняшний день является той областью, в которой развернулась острая конкуренция за лидерство среди технологически наиболее развитых стран мира. Вторая квантовая революция не может обойтись без новых средств работы с теми колоссальными объёмами данных, которые в ближайшее время будут задействованы на мировом рынке и в научной среде. Скачок объёма данных вызван появлением нескольких новых факторов: нейронные сети, которые необходимо обучать; виртуальная реальность, которая требует высокой скорости обновления цифрового трёхмерного мира; задачи молекулярного моделирования для фармакологии нового поколения; методы шифрования, которые, в отличие от классического RSA, должны быть устойчивыми к квантовым алгоритмам взлома кода. Кроме объёма данных, интерес к квантовым вычислительным системам обусловлен возможностями симуляции тех процессов, динамику которых невозможно спрогнозировать на классическом компьютере из-за эффекта комбинаторного взрыва, возникающего при описании волновой функции много-частичной квантовой системы.

По состоянию на 2019 год, когда была написана дорожная карта

КТ, готовность квантовых вычислительных систем в России была на низком технологическом уровне. В Москве функционировал двухкубитный квантовый компьютер, пригодный для демонстрации управления перепутанностью, но не пригодный для проведения полноценных квантовых вычислений. Согласно шкале TRL уровень можно было оценить от 1 до 3 баллов из 9. Несмотря на это, в России накоплен большой опыт фундаментальных исследований и конструкторских разработок в разных университетах и академических институтах. Этот задел позволил к 2024 году построить уже 16-кубитный (тестируется 20-кубитный) квантовый компьютер с применением кудитов на захваченных ионах. Кроме этого, во многих научных коллективах России создаются и тестируются оптические интегральные чипы для проведения простейших квантовых вычислительных операций. При сохранении подобных темпов развития уровень субтехнологии в России может вырасти до уровня технологического суверенитета в стратегической области в течение ближайших 10-ти лет. Для успешной конкуренции на мировом рынке требуется намного больший объём работ и финансирования, чем тот который существует на 2024 год. Если сравнивать уровень с мировыми лидерами в области квантовых вычислений - США и Китай, то российское научное сообщество пока находится в позиции догоняющего. В Китае в 2021 году был создан работающий квантовый компьютер Jiuzhang 2.0 на 113 кубитах¹. Основным преимуществом китайской технологии является чрезвычайно развитый сектор производства полупроводниковой электроники, что позволит быстрее других распространить новые квантовые технологии в случае успешных испытаний. В США наибольших успехов в области квантовых вычислений достигли коллективы IT-гигантов GOOGLE и IBM. По состоянию на 2024 год в GOOGLE создан квантовый компьютер на 70-ти кубитах², в IBM на конец 2022 года был продемонстрирован сверхпроводниковый квантовый компьютер OSPREY на 433 кубита³. Именно это устройство является знаковой вехой в истории квантовых вычислений, так как оно — первое, пригодное для решения коммерческих задач. В 2023 году IBM представили квантовый компьютер CONDOR на 1121 кубит, однако его производительность не выше, чем OSPREY, из-за сложности коррекции ошибок для более чем 1000-кубитной вычислительной системы.

¹<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.127.180502>

²<https://www.nature.com/articles/s41586-023-06505-7>

³<https://newsroom.ibm.com/2022-11-09-IBM-Unveils-400-Qubit-Plus-Quantum-Processor-and-Next-Generation-IBM-Quantum-System-Two>

Не следует оценивать достижение квантовых вычислений только количеством кубитов, так как не меньшую роль играет архитектура квантового ядра, его эффективность и память. IBM и GOOGLE используют сверхпроводниковую технологию, которая имеет преимущество в масштабируемости, но приводит к большому количеству ошибок. Альтернативным методом является технология на захваченных атомах и ионах, на которой в частности построен 16-кубитный квантовый компьютер в России. Она имеет большую точность и эффективность по сравнению с квантовыми компьютерами на сверхпроводниковых кубитах, но менее масштабируема из-за сложности физической реализации кубитов. Лидерами на 2023 год в области "ионных квантовых вычислений" является компания QUANTINUUM⁴ (56 кубит), основанная учёными Кембриджского университета, и компания IonQ⁵ (35 кубит), созданная при поддержке Дьюкского частного университета и университета Мерилэнда.

Одной из параллельных ветвей развития квантовых вычислений являются фотонные вычисления, в которых световые импульсы играют роль не только управляющих команд для работы вентилях, но и непосредственных носителей квантовой информации. Квантовые вычисления на одиночных фотонах имеют меньшую перспективу миниатюризации и создания полноценных квантовых компьютеров, зато обладают значительным преимуществом, если использовать их в качестве вычислительной периферии оптических квантовых коммуникаций. Учитывая то, что именно субтехнологии квантовых коммуникаций развиты в России больше по сравнению с субтехнологией квантовых сенсоров и субтехнологией квантовых вычислений, оптические вычислительные системы развиваются на многих научных площадках нашей страны. Университет ИТМО является одним из лидеров в этой области.

В данной главе методического пособия мы приводим описание физических принципов реализации кубитов на сверхпроводящей подложке, на захваченных ионах, а также на квантовых состояниях световых импульсов. Большой приоритет отдан именно однофотонным кубитам, так как в этой области коллектив нашей лаборатории имеет большой опыт работы. Напомним, что изучение математического формализма квантовых вычислений не входит в задачи данного курса. Курс посвящён именно физической реализации вентилях и квантовым технологиям, поэтому описание логики и алгоритмов

⁴<https://www.quantinuum.com/hardware/h2>

⁵<https://ionq.com/quantum-systems/harmony>

работы квантового компьютера в тексте отсутствует.

Перепутывание кубитов

Ключевым понятием для квантовых вычислений является перепутанность кубитов. Она не зависит от технологии реализации и является фундаментальным свойством квантовых объектов, состоящих из двух и более частиц.

Одиночный кубит $|q\rangle_k$ представляет собой суперпозицию двух ортогональных квантовых состояний $|0\rangle_k$ и $|1\rangle_k$ объекта или частицы, индекс n обозначает номер кубита:

$$|q\rangle_k = C_{0_k} |0\rangle_k + C_{1_k} |1\rangle_k. \quad (2.1)$$

Информация закодирована в комплексные коэффициенты C_{0_k} и C_{1_k} .

Перепутывание имеет следующий смысл: если группа N кубитов **не** перепутана, то их совместное состояние $|\Psi\rangle$ может быть описано с помощью тензорного произведения состояний каждого отдельного кубита:

$$|\Psi\rangle = \otimes \prod_{n=1}^N |q\rangle_n = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \cdots \sum_{n_N=0}^1 C_{n_1} C_{n_2} \cdots C_{n_N} |\nu\rangle, \quad (2.2)$$

$$|\nu\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle. \quad (2.3)$$

Количество комплексных чисел для описания такой системы равно $2N$. Если же кубиты перепутаны, то волновая функция системы $|\Psi\rangle$ для перепутанных кубитов описывается выражением:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \cdots \sum_{n_N=0}^1 C_{n_1, n_2, \dots, n_N} |\nu\rangle \langle \nu|, \quad (2.4)$$

где коэффициент перед состоянием $|\nu\rangle$ уже не может быть представлен в виде произведения отдельных коэффициентов C_{n_k} . Количество коэффициентов, необходимых для описания квантовой системы, состоящей из N перепутанных кубитов, равно 2^N , что больше, чем $2N$. То есть перепутанные кубиты нельзя рассматривать как независимые, а измерение состояния одного из них приводит к изменению состояния всей системы. На этом строится эффект распараллеливания квантовых вычислений, коррекция ошибок с применением анциллы, телепортация кубита, нелинейный фазовый сдвиг и другие манипуляции с группами кубитов. За простейшую операцию,

которая приводит к состоянию перепутанности между двумя изначально независимыми кубитами, отвечает двухкубитный квантовый вентиль SWAP. Напомним, что он может быть реализован с помощью трёх последовательных управляемых отрицаний CNOT, второе из которых инвертировано относительно управляющего и целевого кубитов.

2.1 Атомные технологии реализации квантовых регистров

Атомные технологии квантовых регистров предполагают следующую схему работы квантовых вычислительных устройств: каждый кубит закодирован в некоторую пару метастабильных уровней вещества, при этом эти пары могут принадлежать разным атомам, разным ионам или разным областям сверхпроводника; для осуществления логических операций на вещество воздействуют импульсами электромагнитного излучения, оно может выборочно взаимодействовать как с одиночными кубитами, так и с группами, меняя квантовое состояние регистра, тем самым реализуются однокубитные или многокубитные квантовые вентили.

Преимущество такой схемы состоит в том, что кубиты внутри вещества "статичны", в отличие от световых кубитов, которые постоянно перемещаются со скоростью света. Также для атомных регистров более эффективно работает синхронизация, так как моменты срабатывания квантовых вентилях определяются включением управляющих оптических импульсов. Ещё одним преимуществом атомных регистров по сравнению со световыми кубитами является то, что при измерении состояния кубита его носитель не исчезает, а только переходит в новое случайное состояние. В случае же световых регистров фотоны просто поглощаются. Многокубитные квантовые компьютеры были реализованы именно с помощью атомных технологий регистров.

Недостатками атомных регистров является высокая стоимость периферийного оборудования для поддержания стабильного состояния вещества — ионы или атомы должны длительное время удерживаться в ловушках, для работы джозефсоновских кубитов требуется устойчивое сверхпроводящее состояние вещества. Также проблемой является передача квантовой информации от одного узла к другому, которая при использовании кодирования в световые кубиты решается естественным путём с помощью их распространения.

Поскольку данный курс является частью образовательной программы, посвящённой фотонике, то ниже приведены лишь краткие сведения для знакомства с атомными технологиями квантовых регистров.

2.1.1 Джозефсоновские кубиты

Джозефсоновский кубит представляют собой простое по технологии и сложное по принципу работы миниатюрное квантовое устройство. Кубит основан на джозефсоновском переходе, который конструируется на диэлектрической поверхности. Существует большое визуальное разнообразие схем джозефсоновских переходов, нет смысла все их приводить. Ключевой особенностью перехода является пара близлежащих сверхпроводящих областей на диэлектрической подложке, которые разделены слоем изолятора толщиной менее одной оптической длины волны. Через него протекает квантовый ток куперовских пар электронов, которые движутся из одной сверхпроводящей области в другую по законам квантовой механики. Эти области выполняют функцию как конденсатора, так и индуктивности, образуя тем самым колебательный контур. Правильно подбирая геометрию сверхпроводящих областей и изолятора, можно строить джозефсоновские кубиты с разными значениями ёмкости и индуктивности. Для более подробного ознакомления с технологией изготовления джозефсоновских переходов можно ознакомиться с двумя обзорами, которые выложены в открытом доступе на архиве, 2005 года⁶ и 2024 года⁷.

Для ответа на вопрос о том, каким образом квантовый сверхпроводящий контур с туннелированием превращается в кубит, следует написать гамильтониан этой системы:

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} - \frac{I_0\Phi_0}{2\pi} \cos \hat{\epsilon} - \frac{I\Phi_0}{2\pi} \hat{\epsilon}, \quad (2.5)$$

где \hat{q} — это оператор заряда, $\hat{\epsilon}$ — оператор разницы фаз волновых функций куперовской пары по разные стороны изолятора, C — ёмкость кубита, I_0 — ток насыщения туннельного перехода, Φ_0 — константа квантового потока, I — средний ток, который протекает через контур. Оператор заряда и разницы фаз играют роли импульса и координаты для джозефсоновского кубита, что подтверждает их

⁶<https://arxiv.org/abs/cond-mat/0402415>

⁷<https://arxiv.org/abs/2405.20911>

коммутационное соотношение:

$$[\hat{\epsilon}, \hat{q}] = 2ie. \quad (2.6)$$

Считая, что первое слагаемое соответствует кинетической энергии квантового контура, а второе и третье слагаемые — потенциальной энергии контура, можно построить график зависимости потенциальной энергии от условной координаты ϵ . Зависимость потенциальной энергии от разницы фаз ϵ около локального минимума имеет характер ангармонического осциллятора, который обладает набором энергетических уровней, отстоящих друг от друга на разном расстоянии по энергии. Именно это свойство квантового сверхпроводящего туннельного контура и требуется для использования его в качестве кубита. Можно так подобрать частоту внешнего воздействия, что в нём будет задействован только переход между двумя нижними уровнями, в то время как переход между вторым и третьим уровнем останется не возбуждённым. То есть квантовый сверхпроводящий туннельный контур эквивалентен двухуровневой квантовой системе или кубиту.

Преимуществом джозефсоновских кубитов является медленная релаксация фазовой когерентности уровней, возможность компактного размещения сети кубитов на единой подложке для создания интегральных квантовых схем, а также эффективное управление состоянием кубита с помощью внешнего тока.

Недостатком джозефсоновских кубитов является высокие требования к защите от внешних воздействий. Так, излучение может вывести квантовый контур из сверхпроводящего состояния, а внешнее магнитное поле может изменить структуру энергетических уровней квантового контура, что приведёт к появлению непредсказуемого фазового сдвига в когерентности кубита. Другой технической проблемой является требование охлаждения квантового контура до сверхнизких температур для перехода вещества контура в сверхпроводящую фазу.

2.1.2 Кубиты на захваченных ионах

На сегодняшний день уже существует квантовый компьютер, который работает на захваченных ионах. Эта технология, несмотря на техническую сложность реализации, является приоритетной на сегодняшний день, так как квантовые регистры на ионах достаточно стабильны по сравнению с другими технологиями для проведения масштабных вычислений.

Технологически кубит представляет собой охлаждённый ион в оптической ловушке. В качестве иона могут быть выбраны разные химические элементы, мы будем говорить об ионе иттербия $^{171}\text{Yb}^+$, который обладает рядом преимуществ: не радиоактивен; обладает спином ядра $1/2$, то есть не имеет квадрупольного магнитного момента и соответствующего сдвига; тяжёлый, что упрощает охлаждение и захват; имеет много независимых переходов между энергетическими уровнями в оптическом диапазоне; распространён в природе.

Двумя состояниями кубита являются метастабильные подуровни двух сверхтонких уровней, не связанных между собой электродипольным переходом. При этом выбор метастабильных уровней для двух состояний кубита может быть разным. Двумя наиболее важными процедурами протокола квантовых вычислений на захваченных ионах являются точная инициализация кубита в состояние $|0\rangle$, из которого потом можно преобразовать его с помощью квантовых вентилях, а также считывание состояния кубита $|1\rangle$ при помощи интенсивной не пуассоновской флуоресценции. Однокубитные квантовые вентили над ионными кубитами организованы через двойной оптический резонанс через виртуальные возбуждённые уровни иона, отстроенные от "настоящих" уровней в целях исключения спонтанного распада и потери информации. Двухкубитные вентили устроены по принципу одновременного поглощения фотонов разными ионами, один из которых излучает фонон вибрационного движения, а другой поглощает его. Это один из наиболее эффективных способов перепутывания ионных кубитов, его предложили в 1999 году⁸. Реализация квантовых вентилях на ионах — это тема отдельного курса, которая здесь подробно не рассматривается. Подробнее с организацией квантового протокола в ионных вычислениях можно познакомиться в обзоре Durga Paudyal из департамента математики университета Айовы⁹, который был опубликован в 2021 году.

На рисунках 2.1 и 2.2 приведены принципиальные схемы инициализации и считывания состояния кубита, закодированного в ион иттербия $^{171}\text{Yb}^+$.

Ионы, захваченные внутрь оптической ловушки, достаточно разнесены в пространстве для того, чтобы взаимодействовать с ними через электромагнитное поле по отдельности. Лазерное поле проходит через оптический коммутатор, который расщепляет луч-источник

⁸<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.82.1971>

⁹<https://jdsmith.math.iastate.edu/math/YITQCCSA.pdf>

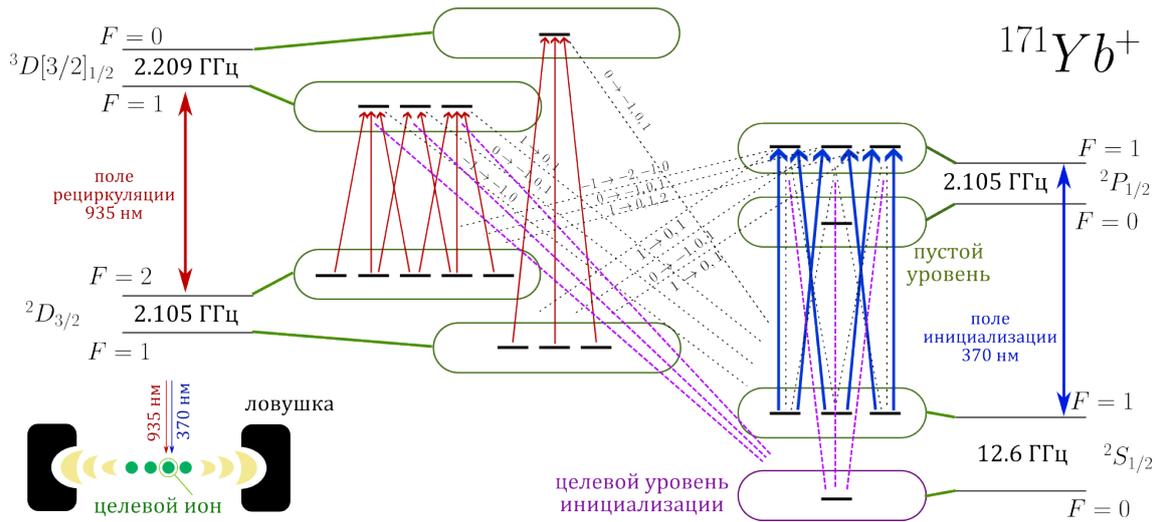


Рис. 2.1: Инициализация ионов $^{171}\text{Yb}^+$ в начальное состояние $^2S_{1/2}(F=0)$ для дальнейшей работы. Красные и синие стрелки обозначают оптическую накачку, серые пунктирные линии показывают направление спонтанного распада уровней, фиолетовые пунктирные линии показывают направление спонтанного распада на целевой уровень. Ион переходит в целевое состояние через серию возбуждений и распадов за менее чем 10 микросекунд. После этого рециркулирующее поле и поле инициализации выключаются.

на несколько управляющих лучей, направленных на разные ионы-кубиты. Управляющие лучи имеют необходимую частоту и амплитуду, чтобы привести группу ионов в новое состояние суперпозиции между метастабильными подуровнями, которые играют роль двух положений кубита $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Поскольку управляющие лучи получаются из единого источника, то с помощью коммутатора они формируются связанными по фазе — это очень важно для перепутывания состояния разных ионов, которые находятся в суперпозиции собственных уровней.

Одной из главных проблем квантовых вычислений с помощью квантового компьютера на захваченных ионах является поддержание перепутанного состояния между ионами. Для получения практической пользы от квантовых алгоритмов требуется хотя бы сто связанных между собой кубитов. Задача синхронного взаимодействия между ионами и светом через оптический коммутатор также чрезвычайно сложна и требует большого количества промежуточного оборудования, например, акусто-оптических модуляторов, поляризаторов и прочее. На 2024 год в России совместными усилиями РКЦ и ФИАН им. Лебедева создан 20-кубитный квантовый компьютер на захваченных ионах. Для достижения этого показателя российскими учёными была реализована схема на кубитах. Это

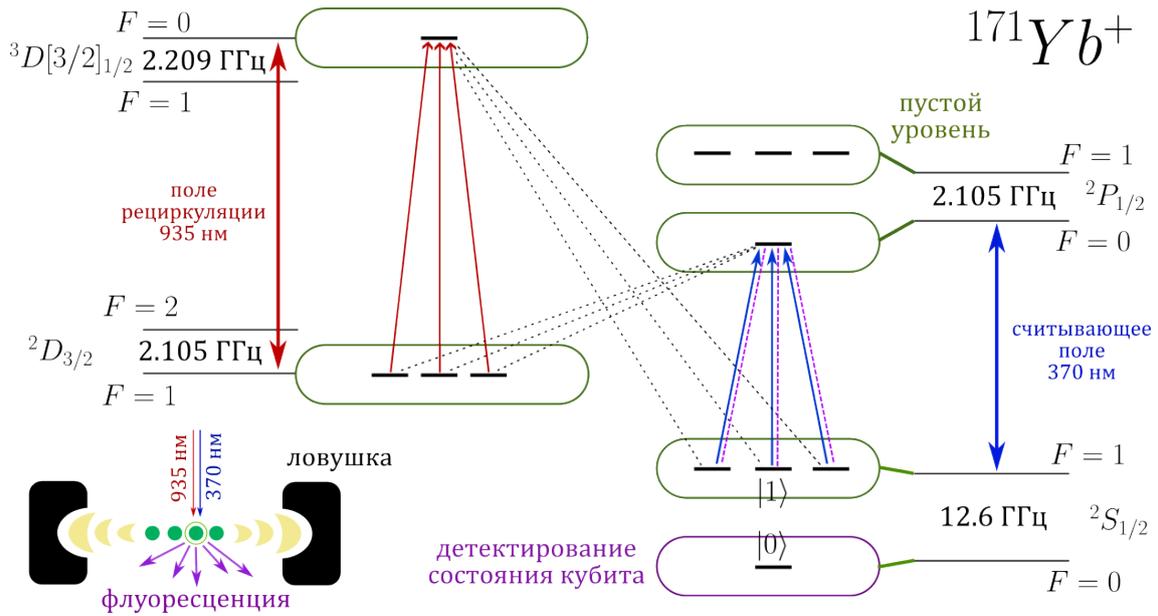


Рис. 2.2: Опрос иона. Если кубит находится в состоянии $|1\rangle$, то считывающее поле 370 нм вызывает интенсивную резонансную флуоресценцию, которая детектируется фотозлементом. Если ион распался на уровень $^2D_{3/2}$, то он возвращается в переход считывания через возбуждение полем рециркуляции и дальнейший распад высокочастотный распад. Переход в состояние $|0\rangle$ в ходе считывания не происходит из-за отсутствия электромагнитных переходов между уровнями с полными моментами $F = 0$. Если флуоресценция отсутствует, значит кубит находится в состоянии $|0\rangle$

квантовый алгоритм, при котором внутри каждого иона используется не два, а четыре метастабильных уровня, что удваивает количество кубитов и упрощает процедуру перепутывания между кубитами, находящимися внутри одного и того же иона-кудита. Преимущество квантового протокола на кудитах было теоретически обосновано российскими учёными в 2023 году¹⁰.

2.2 Световые кубиты, LOQC

Джозефсоновские кубиты, кубиты на спиновых состояниях, кубиты на одиночных ионах требуют чрезвычайно сложных технических решений для стабилизации их перепутанного состояния и коррекции ошибок. Между тем световой импульс, который распространяется в свободном пространстве или в прозрачной среде, также является квантовым объектом с большим количеством состояний, вероятность перехода между которыми намного меньше таковой для других кубитов. К тому же для поддержания когерентности между

¹⁰<https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevA.109.032619>

различными световыми импульсами можно использовать классическую линейную технику, которая описывается матрицами преобразования. Благодаря этим факторам появилась идея об использовании квантового света не только как метода записи и опроса квантовой информации во внешний регистр, а как непосредственного носителя этой информации. Импульсы распространяются со скоростью света, и удерживать их в некотором объёме длительное время намного сложнее, чем кубиты на ионах, спинах или сверхпроводящих контурах. Тем не менее, это не является проблемой, так как квантовые вычисления на световых кубитах, как правило, не требуют их длительного хранения. Если квантовый протокол требует хранения промежуточных результатов вычислений, то это существенно усложняет задачу и требует создания оптической квантовой памяти, что является отдельным направлением развития квантовых технологий.

Полноценный квантовый компьютер на световых кубитах собрать не удаётся из-за технологической сложности поддержания перепутанного состояния большого количества фотонов, эффекта группировки, а также исчезновения кубитов при их измерении. Область применения световых кубитов при проведении вычислений — это периферия квантовых коммуникаций, коммутаторы квантовых сетей и криптография. Если есть возможность проводить быстрые несложные вычисления с помощью оптических схем без перекодирования световых кубитов в атомные регистры, то это существенно удешевляет оптическую квантовую технологию.

Кодирование информации в квантовый свет может происходить по-разному, ниже приведены несколько примеров.

- Пространственное разделение светового импульса на две независимые бегущие волны. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответствуют однофотонному возбуждению одной пространственной моды и невозбуждённому состоянию другой.
- Поляризация светового импульса. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответствуют однофотонному возбуждению разных поляризационных мод волны с одним и тем же волновым вектором. Для подобного кодирования чрезвычайно важным является выбор поляризационного базиса, который приводит к наименьшей ошибке при измерении.
- Модуляция импульса света для разделения его по разным частотным модам. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответствуют однофотон-

ному возбуждению одной частотной моды и невозбуждённому состоянию другой.

- Модификация импульса с помощью управляемой временной задержки. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответствуют опережающему фотону и запаздывающему фотону в одном и том же канале или моде.

Для работы со световыми регистрами, где каждый кубит представляет собой возбуждённое квантовое состояние некоторой моды, можно использовать оптическую технику для линейного преобразования света. Такой протокол в англоязычной литературе называется "Linear optical quantum computing" (LOQC). Чтобы подробнее ознакомиться с исходным материалом, рекомендуется посмотреть классический обзор 2006 года¹¹.

Протокол LOQC предполагает следующий режим работы. Квантовый регистр, который состоит из N кубитов, приводится в запутанное состояние с помощью одновременного прохождения пар световых импульсов через светоделители. Каждый светоделитель имеет два входа и два выхода. Если на два входа в светоделитель подаются независимые импульсы, каждый из которых находится в некотором квантовом состоянии суперпозиции, то на выходе невозможно промаркировать фотоны по принадлежности к первому или второму импульсам на входе. То есть, выходные импульсы находятся в запутанном состоянии, а кубиты оказываются связанными между собой. Для записи квантовой информации в N световых кубитов требуется провести импульсы через серию светоделителей, которые будут попарно связывать требуемые кубиты между собой. Отметим, что условием корректной работы LOQC является синхронность прохождения световых кубитов через оптические элементы, поэтому принято делить операции над световыми кубитами на такты. Во время одного такта световые кубиты одновременно проходят каждый через свой оптический линейный преобразователь (светоделитель, поляризатор, фазовращатель и так далее). Если некоторое подмножество кубитов не должно измениться за текущий такт, то соответствующие импульсы пролетают через оптическую линию задержки, а линейное преобразование над кубитом считается тождественным.

¹¹<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0512071>

2.2.1 Оптический направленный ответвитель

Одним из главных преимуществ LOQC является возможность миниатюризации по сравнению с технологиями квантовых вычислений с использованием атомных или спиновых регистров. Основной идеей миниатюризации является создание оптических интегрированных микросхем с классической электронной периферией, в которых информация распространяется не в виде тока, а в виде одиночных фотонов, бегущим по выращенным световодам на слоистой подложке из полупроводника и диэлектрика. Оптические чипы сегодня быстро набирают популярность, о чем можно прочитать в обзоре 2023 года от классиков квантовой физики из центра квантовых наук и инжиниринга в Сингапуре¹².

При создании оптического чипа с требуемой квантовой логикой главную роль играет механизм коммутации фотонов внутри оптической схемы чипа. Для управления движения перепутанных фотонов используется **оптический направленный ответвитель**. Он представляет собой два связанных канала внутри чипа, по которым может распространяться свет, например два близлежащих волновода. Напомним, что за счёт эффекта нарушенного полного внутреннего отражения мода волновода распространяется и за его пределами, экспоненциально убывая при удалении от стенки. Значит, если два волновода расположить рядом так, чтобы моды перекрывались, то возникает взаимодействие между модами волноводов, и фотон может переместиться из одного волновода в другой. Так происходит переход фотона в суперпозиционное состояние возбуждения мод соседних волноводов.

Моды с ортогональными линейными поляризациями имеют разную поперечную форму, поэтому для двух близлежащих в плоскости XZ волноводов, протянутых вдоль оси Z , интеграл перекрытия двух X -поляризованных мод будет отличаться от интеграла перекрытия двух Y -поляризованных мод. В первом приближении можно принять, что перекрытие мод с ортогональными линейными поляризациями отсутствует из-за нулевого скалярного произведения. То есть вероятность изменения поляризации фотона при его пространственном туннелировании через стенки пары волноводов маловероятно. На рисунке 2.3 показан простейший способ реализации оптического направленного ответвителя. Схемы могут быть намного сложнее, с взаимодействием нескольких волноводов или с промежу-

¹²<https://www.nature.com/articles/s41377-023-01173-8>

точными волноводами в виде замкнутого кольца.

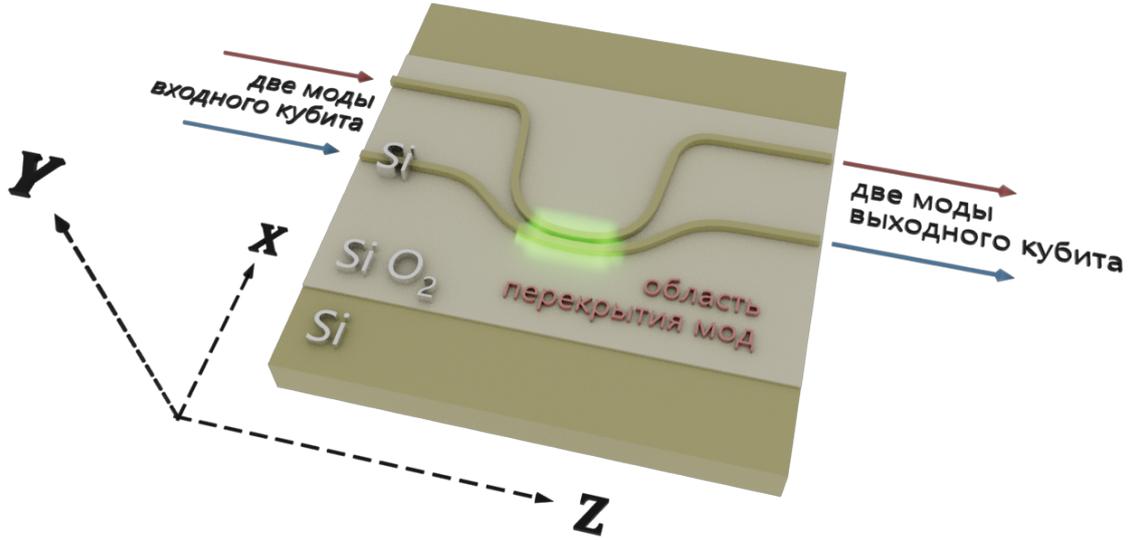


Рис. 2.3: Упрощённая схема направленного оптического ответвителя в оптическом чипе. Каналов входа и выхода может быть больше двух для больших интегральных оптических схем. Область перекрытия мод регулируется геометрией кремниевых волноводов. Оксид кремния выполняет функцию оптического изолятора.

Запишем оператор взаимодействия двух близлежащих волноводов, который является возмущением в гамильтониане поля:

$$\hat{H} = g_H \left(\hat{a}_{1,H}^\dagger \hat{a}_{2,H} + \hat{a}_{1,H} \hat{a}_{2,H}^\dagger \right) + g_V \left(\hat{a}_{1,V}^\dagger \hat{a}_{2,V} + \hat{a}_{1,V} \hat{a}_{2,V}^\dagger \right), \quad (2.7)$$

где g_H — константа взаимодействия мод с вектором поляризации, перпендикулярным плоскости, содержащей волноводы, g_V — константа взаимодействия мод с вектором поляризации, лежащим в плоскости, содержащей волноводы; первый нижний индекс обозначает номер волновода. Константы пропорциональны интегралам перекрытия и поэтому отличаются друг от друга.

В представлении взаимодействия нетрудно предсказать, как изменяются моды при прохождении через пару близлежащих волноводов:

$$|\psi'\rangle = \hat{U}(\tau) |\psi\rangle, \quad (2.8)$$

$$\hat{U}(\tau) = e^{-ig_H\tau(\hat{a}_{1,H}^\dagger \hat{a}_{2,H} + \hat{a}_{1,H} \hat{a}_{2,H}^\dagger)} \otimes e^{g_V\tau(\hat{a}_{1,V}^\dagger \hat{a}_{2,V} + \hat{a}_{1,V} \hat{a}_{2,V}^\dagger)}, \quad (2.9)$$

где \hat{U} — это оператор эволюции электромагнитного поля, которое состоит из четырёх мод (по две поляризационные моды на каждый волновод), $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle$ — это волновые функции состояния мод на входе и выходе из системы взаимодействующих волноводов.

Если представить себе простейший оптический чип, состоящий из одного оптического направленного ответвителя с двумя входами и двумя выходами, у которого на вход подали только один фотон с некоторой поляризацией H или V , то этот фотон будет циклически переходить из одной моды в другую в области взаимодействия волноводов, сохраняя при этом поляризацию. На выходе поле окажется в состоянии суперпозиции однократно возбуждённых мод разных выходов с одной и той же поляризацией. Это аналогично осцилляциям Раби. Часто это явление описывают как "перенос энергии" между связанными волноводами. Именно частота и время этих осцилляций для фотона с разной поляризацией определяет конечные характеристики коммутатора, работающего на ответвителе. Частота и время зависят от геометрии взаимодействующих волноводов. Разница в частоте Раби для различных поляризаций является не недостатком, а преимуществом, так как позволяет создавать на основе оптического направленного ответвителя элементы, подобные по своим характеристикам поляризационным делителям с требуемыми коэффициентами отражения и пропускания.

Если на два разных входа оптического направленного ответвителя подали по одному фотону, то поле на выходе окажется в состоянии суперпозиции всевозможных двухфотонных состояний, которые заполняют четыре выходных моды. Отбрасывая ошибочные состояния, в которых два фотона находятся в одном и том же выходе, причём это может быть или двухфотонное состояние выхода с одной и той же поляризацией или однофотонное возбуждение двух поляризационных мод одного и того же выхода, можно получить новое выходное состояние перепутанной пары фотонов. Несколько сопряжённых оптических направленных ответвителей позволяют реализовать прямо внутри чипа все основные вентили для квантовых вычислений.

2.3 KLM-протокол квантовых вычислений

Инструментарий при работе со световыми кубитами может быть разным в зависимости от способа кодирования квантовой информации, которые перечислены в начале главы 2.2. В протоколе LOQC допускается использование нелинейных элементов, которые коммутируют входные фотоны, например, оптические направленные ответвители. Нелинейная коммутация также применяется при квантовых вычислениях, основанных на time-bin кубитах.

Среди прочих существует протокол оптических квантовых вычислений, который основан исключительно на линейных преобразователях. Причём инструментарий представлен только несколькими необходимыми устройствами: зеркала, светоделители, поляризаторы, однофотонные детекторы и однофотонные источники. Его преимуществом является принципиальная простота элементов, комбинируя которые подобно конструктору можно создавать самые сложные квантовые сети. Недостатком является сложность миниатюризации, долгая юстировка и быстрая декогеренция перепутанных пар фотонов, разнесённых в пространстве. Впервые подобный протокол был предложен в работе 2001 года и впоследствии назван по фамилиям авторов **KLM протоколом**¹³.

Одной из проблем кодирования информации в оптические импульсы является то, что при прохождении кубитов через вентили на основе линейных оптических элементов требуемый результат может содержать неустранимую ошибку, связанную с особенностями оптических кубитов. Например, электромагнитное поле может оказаться в состоянии, которое не принадлежит подпространству состояний кубита. Напомним, что моды электромагнитного поля не обладают двумя выделенными метастабильными энергетическими уровнями, как в случае ионов или джозефсоновских кубитов. Согласно квантовой оптике, одно стационарное состояние группы мод электромагнитного поля может быть представлено комбинацией чисел заполнения фотонами каждой моды. Это свойство приводит к быстрому уменьшению эффективности протокола LOQC при росте количества вентилях на оптической схеме. Для уменьшения ошибок можно дублировать вентили, но это приведёт к взрывному усложнению процесса юстировки и невозможности реализации квантового компьютера на LOQC.

Одним из способов решения проблемы быстрого роста ошибок в протоколе KLM является добавление к оптическому импульсу, несущему информацию, дополнительных кубитов или кубита. Этот кубит с высокой точностью подготавливается в определённое состояние и проходит вместе с информационным кубитом через блок LOQC вентилях. Затем над частью выходных кубитов этого блока проводится процесс измерения. По результатам этого измерения можно судить о том, в каком состоянии находятся остальные выходные кубиты. Дополнительные входные кубиты в подготовленном состоянии и измеряемые выходные кубиты, состояние которых раз-

¹³<https://www.nature.com/articles/35051009>

рушается в процессе измерения, называются **анцилла**.

Если корректной операции изменения состояния информационного кубита соответствует только одно измеренное состояние анциллы из множества возможных, то отбором можно оставлять только те случаи срабатывания вентиля, которые привели к правильному результату. Если вероятность корректной операции и соответственно определённого состояния анциллы при измерении мала, то ценой подобной процедуры отбора является многократное повторение операции квантового вычисления на одном и том же вентиле. Однако это проще, чем размножение элементной базы.

2.3.1 Светоделитель

Мы не будем здесь приводить подробного описания принципов работы источников и детекторов одиночных фотонов, которые используются в протоколе KLM, предполагая, что читатель знаком с ними. Будем считать, что источники и детекторы идеальны, то есть эффективность детектирования стремится к единице, а источник создаёт однократное возбуждение моды, которая соответствует каналу передачи квантовой информации внутри схемы KLM.

Напомним, как описывается изменение состояния света при прохождении через светоделитель, который является основным элементом KLM протокола. Условимся нумеровать входные моды светоделителя следующим образом: первый индекс соответствует направлению распространения моды, второй индекс характеризует поляризацию — V соответствует случаю, при котором вектор поляризации перпендикулярен плоскости XU , H соответствует случаю, при котором вектор поляризации лежит в плоскости XU . Плоскость XU определяется направлением отражения светоделителя: она содержит как падающий, так и отражённый лучи. Учитывая то, что светоделитель является линейным преобразователем света, проще всего записать изменение состояния поля в представлении Гейзенберга для бозонных операторов:

$$\hat{a}'_{x,P} = t_P \hat{a}_{x,P} - r_P \hat{a}_{y,P}, \quad (2.10)$$

$$\hat{a}'_{y,P} = r_P \hat{a}_{x,P} + t_P \hat{a}_{y,P}, \quad (2.11)$$

$$P \in \{H, V\}. \quad (2.12)$$

Операторы рождения имеют такое же линейное преобразование. Конечно, уравнения имеют неточный характер, так как операторы дей-

ствуют в пространстве выходных и входных мод, которые, строго говоря, не являются решениями уравнения Максвелла в пространстве со светоделителем. Это просто удобный образ, который более-менее точно описывает эксперимент. При точных расчётах, где происходит взаимодействие между входными и выходными модами, это следует иметь в виду.

Следует обратить внимание на то, что в общем случае коэффициенты являются разными для разных поляризаций света. Если коэффициенты равны $t_H = t_V = r_H = r_V = 1/\sqrt{2}$, то это равномерный светоделитель 50:50, если коэффициенты равны $r_V = t_H = 1$ и $r_H = t_V = 0$, то это идеальный поляризационный светоделитель. Промежуточный вариант является частично поляризационным светоделителем. Тонкий слой между призмами светоделителя позволяет делать различные коэффициенты отражения r_P и пропускания t_P .

2.3.2 Вентили Паули для однофотонных кубитов

Техническое устройство вентиля LOQC зависит от того, как именно кодируется информация в оптический кубит. Здесь мы рассмотрим четыре стандартных однокубитных вентиля, которые используются для вычислений: это три вентиля Паули и вентиль Адамара.

Стоит напомнить, что вентили Паули (2.13) и вентиль Адамара (2.14) — это однокубитные вентили, которые можно записать с помощью матриц в базисе двух ортогональных состояний кубита $[0]$ и $[1]$.

$$[X]_{gate} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [Y]_{gate} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad [Z]_{gate} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$[H]_{gate} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Нетрудно проверить, что выполняется тождество $[Z]_{gate} [X]_{gate} = i [Y]_{gate}$, значит достаточно реализовать два вентиля Паули, а третий можно сделать их последовательным применением.

Поляризационный кубит

Два состояния кубита (0) и (1) представляют собой однофотонное возбуждение вертикальной и горизонтальной поляризационной

МОДЫ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ:

$$(0) \rightarrow |1\rangle_V \otimes |0\rangle_H, \quad (2.15)$$

$$(1) \rightarrow |0\rangle_V \otimes |1\rangle_H. \quad (2.16)$$

Однокубитные вентили (2.13,2.14) можно реализовать с помощью полуволновой и четвертьволновой пластин. При прохождении через полуволновую пластину поляризационная мода, направленная вдоль оси кристалла, смещается по фазе относительно поляризационной моды, направленной перпендикулярно оси кристалла, на π , а при прохождении через четвертьволновую пластину — на $\pi/2$. Это смещение можно использовать для управления поляризационным кубитом. На рисунке 2.4 показаны унитарные операторы эволюции для полуволновой и четвертьволновой пластин. С помощью их последовательности можно умножать операторы эволюции с различными углами α, δ и реализовать различные типы вентилей, в том числе вентили Паули и вентиль Адамара.

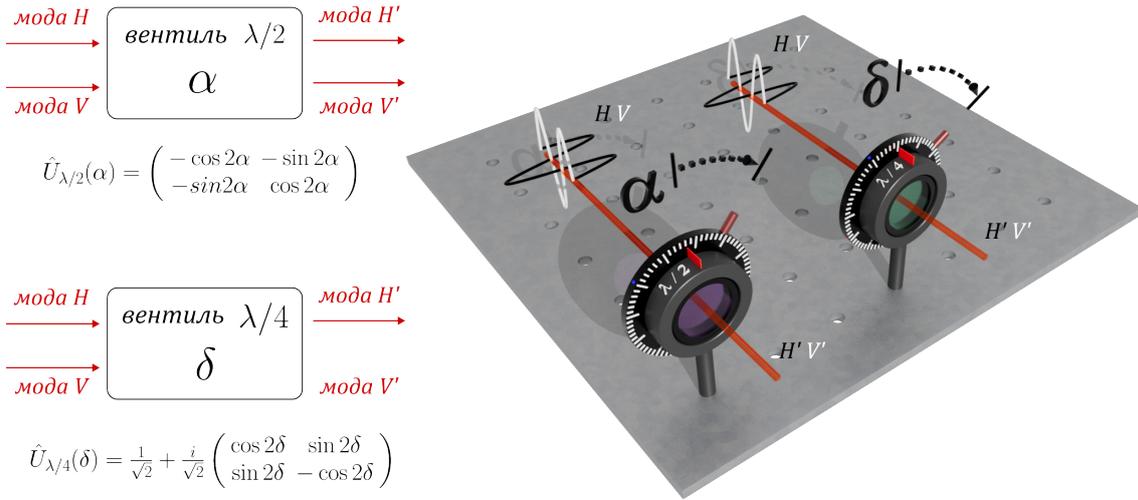


Рис. 2.4: Расшифровка однокубитных поляризационных вентилей, реализуемых с помощью полуволновой и четвертьволновой пластин. Угол α задаёт поворот поворот полуволновой пластины, а угол δ — четвертьволновой пластины.

Для реализации более сложных унитарных вентилей нужны сложные кристаллы с управляемым двулучепреломлением или поляризационный светоделитель, который перекодирует поляризационный кубит (типа II) в кубит пространственно разнесённых мод типа (типа I).

Кубит двух разнесённых в пространстве мод

Два состояния кубита (0) и (1) представляют собой однофотонное возбуждение двух независимых мод, которые близки по форме к плоским волнам, но локализованы в разных областях пространства:

$$(0) \rightarrow |1\rangle_a \otimes |0\rangle_b, \quad (2.17)$$

$$(1) \rightarrow |0\rangle_a \otimes |1\rangle_b, \quad (2.18)$$

где индексы a и b обозначают разные пространственные моды.

Однокубитные вентили (2.14) можно реализовать с помощью оптического фазовращателя, полностью отражающих зеркал и светоделителя. На рисунке 2.5 приведена схема расположения оптических элементов для универсального унитарного вентиля, который при правильном подборе коэффициента отражения светоделителя и толщины фазовращателей позволяет реализовать любой из вентиля Паули или вентиль Адамара.

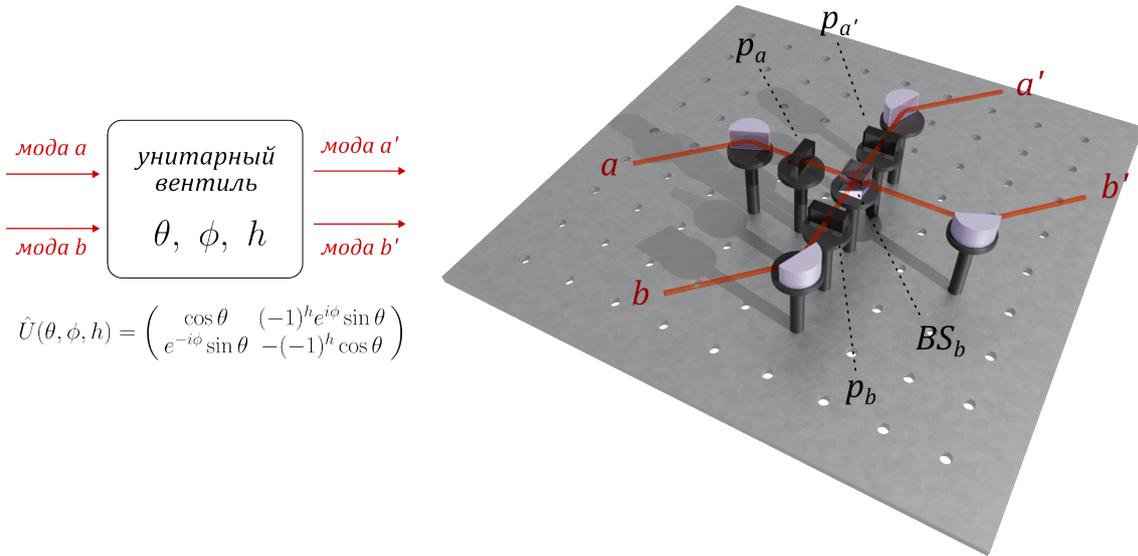


Рис. 2.5: Простейшая схема реализации произвольного однокубитного унитарного вентиля. Угол θ задаёт отражение светоделителя: $r = \cos \theta$, $t = \sin \theta$, фазовращатели p_a и $p_{a'}$ увеличивают оптическую длину пути и сдвигают фазу поля на ϕ и $2\pi - \phi$ соответственно, фазовращатель p_b увеличивает оптическую длину пути на π и обращает фазу поля, h может принимать значения 0 или 1, что соответствует присутствию или отсутствию фазовращателя p_b .

2.3.3 CNOT вентиль

Так же как и однокубитные вентили, двухкубитные вентили LOQC реализуются по-разному, в зависимости от того, к какому типу принадлежат оптические кубиты. Ключевым двухкубитным вентилем, который позволяет строить сложные квантовые вычислительные системы, является управляемое отрицание (CNOT). Последовательное применение трёх CNOT, у которых второй перевёрнут относительно входов контрольного и информационного кубитов, формирует другой важный вентиль - обменный или SWAP.

Напомним, как выглядит таблица истинности для CNOT вентиля, она приведена ниже.

ВХОД		ВЫХОД	
Контр. кубит	Инф. кубит	Контр. кубит	Инф. кубит
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Рассмотрим две разные схемы реализации вентиля CNOT для I и II типов кодирования оптического кубита. В обоих случаях будем обозначать информационный и контрольный кубиты индексами t и c от терминов *target* и *control*, а цифрой 0 или 1 — возбуждение той моды кубита, которая соответствует состоянию (0) или (1). Дополнительные "слепые" входные и выходные моды светоделителей будем обозначать просто номером.

Вентиль CNOT на светоделителях

Этот подход реализован для оптических кубитов, которые закодированы в однофотонное возбуждение пространственно разнесённых мод (тип I). Принципиальная оптическая схема приведена на рисунке 2.6. Положение светоделителей на схеме имеет важное значение, так как изменение фазы отражённого света на противоположную происходит только при отражении в одну сторону. Следует обратить внимание на две "слепые" моды, которые на входе не возбуждены, это стороны светоделителей, на которые не поступает световой импульс, по правилам квантовой оптики их невозможно купировать.

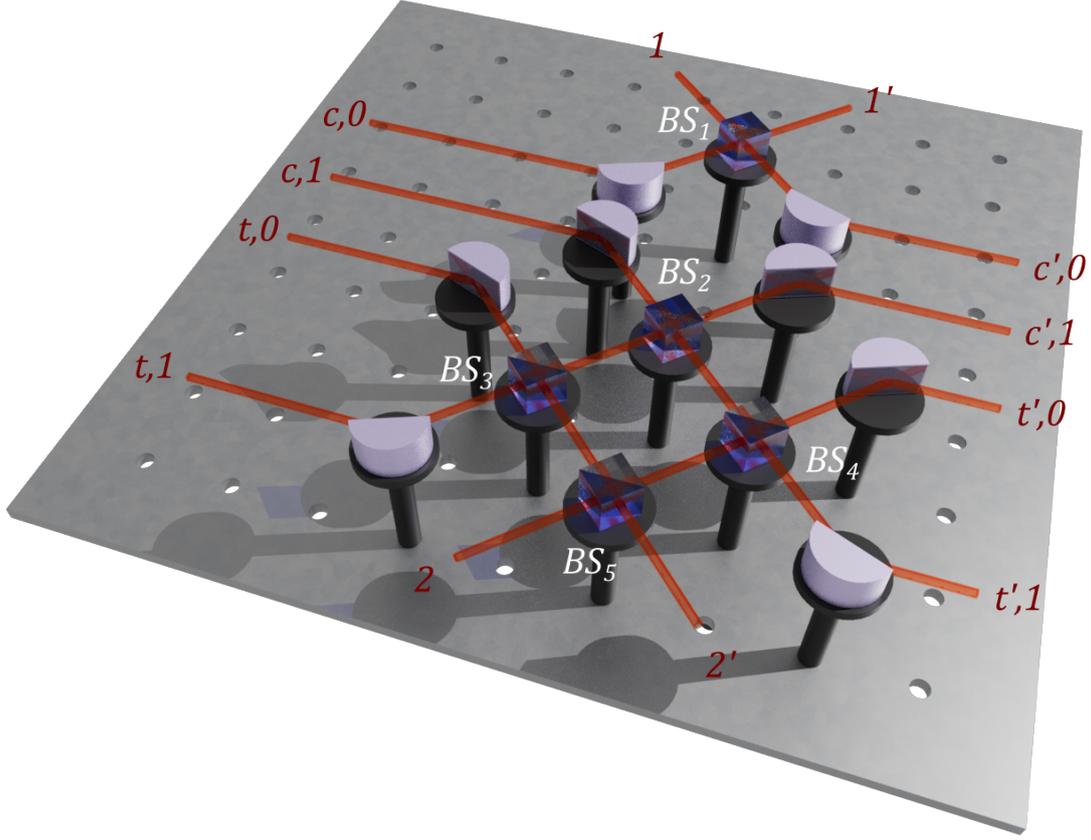


Рис. 2.6: Схема двухкубитного вентиля CNOT для пространственно разнесённых мод. Светоделители обращают фазу при отражении луча в сторону синего угла. Слепые моды 1' и 2' на выходе должны быть пустыми, в противном случае вентиль обрабатывает с ошибкой.

Используя правила (2.10) и (2.11), можно описать схему CNOT как три последовательных преобразования операторов рождения для шести мод:

$$\left(\hat{a}_{c,0}^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{a}_{c,0}^\dagger + \sqrt{2}\hat{a}_1^\dagger\right), \quad (2.19)$$

$$\left(\hat{a}_{c,1}^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\hat{a}_{c,1}^\dagger + \hat{a}_{t,0}^\dagger + \hat{a}_{t,1}^\dagger\right), \quad (2.20)$$

$$\left(\hat{a}_{t,0}^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{a}_{t,0}^\dagger + \hat{a}_{c,1}^\dagger + \hat{a}_2^\dagger\right), \quad (2.21)$$

$$\left(\hat{a}_{t,1}^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{a}_{t,0}^\dagger - \hat{a}_{c,1}^\dagger + \hat{a}_2^\dagger\right), \quad (2.22)$$

$$\left(\hat{a}_1^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\hat{a}_1^\dagger + \sqrt{2}\hat{a}_{c,0}^\dagger\right), \quad (2.23)$$

$$\left(\hat{a}_2^\dagger\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_{t,0}^\dagger + \hat{a}_{t,1}^\dagger\right). \quad (2.24)$$

Операторы со штрихами описывают выходные моды вентиля, операторы без штрихов — входные. Коэффициенты линейного преобразования получены для случая, когда первый второй и пятый светоделители имеют коэффициент отражения $1/3$, а третий и четвёртый светоделители — $1/2$.

Теперь можно применить полученное преобразование к двухкубитному состоянию и убедиться в том, что оно соответствует вентилю CNOT. Пусть входное двухкубитное состояние характеризуется волновой функцией $|\psi\rangle$, которая при входе в вентиль объединяется с двумя слепыми модами первого и пятого светоделителей:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle = \\ &= \left(\alpha \hat{a}_{c,0}^\dagger \hat{a}_{t,0}^\dagger + \beta \hat{a}_{c,0}^\dagger \hat{a}_{t,1}^\dagger + \gamma \hat{a}_{c,1}^\dagger \hat{a}_{t,0}^\dagger + \delta \hat{a}_{c,1}^\dagger \hat{a}_{t,1}^\dagger\right) |vac\rangle, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$|00\rangle = |10\rangle_c \otimes |10\rangle_t, \quad (2.26)$$

$$|01\rangle = |10\rangle_c \otimes |01\rangle_t, \quad (2.27)$$

$$|10\rangle = |01\rangle_c \otimes |10\rangle_t, \quad (2.28)$$

$$|11\rangle = |01\rangle_c \otimes |01\rangle_t, \quad (2.29)$$

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2. \quad (2.30)$$

Заменяя в волновой функции $|\Psi\rangle$ входные операторы на выходные из преобразования (2.19–2.24), можно получить состояние поля на выходе до процесса измерения:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{3} |\psi'\rangle \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \dots, \quad (2.31)$$

$$|\psi'\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \delta |10\rangle + \gamma |11\rangle. \quad (2.32)$$

Многоточие содержит слагаемые, которые приводят к ошибке квантовых вычислений: или один из выходных кубитов содержит более чем один фотон или не содержит ни одного фотона. Можно заметить, что в результате преобразования коэффициенты перед состояниями $|10\rangle$ и $|11\rangle$ поменялись местами, как требует таблица истинности CNOT вентиля, то есть предложенная схема действительно работает.

Недостатком схемы является то, что амплитуда вероятности корректного срабатывания вентиля равна одной третьей. Значит, примерно в восьми из девяти случаев операцию придётся повторять.

Вентиль CNOT на взаимодействии поляризационных мод

Этот подход реализован для оптических кубитов, которые закодированы в однофотонное возбуждение одной из ортогональных поляризаций бегущей моды (тип II). Можно привести две разные схемы для реализации вентиль CNOT, одна из которых содержит только идеальные поляризационные светоделители, а другая — светоделители с частичным разделением поляризаций. Несмотря на то, что вторая схема требует более сложных в изготовлении светоделителей, она более современная и компактная, поэтому рассмотрим именно её. На рисунке 2.7 приведено расположение светоделителей. Светоделитель PBS.2 отражает вертикальную поляризацию падающей волны полностью, а горизонтальную отражает на $1/\sqrt{3}$ по амплитуде и пропускает на $\sqrt{2/3}$ по амплитуде. Светоделители PBS.1 и PBS.3 пропускают горизонтальную поляризацию падающей волны полностью без отражения, а вертикальную отражают на $\sqrt{2/3}$ по амплитуде и пропускают на $1/\sqrt{3}$ по амплитуде.

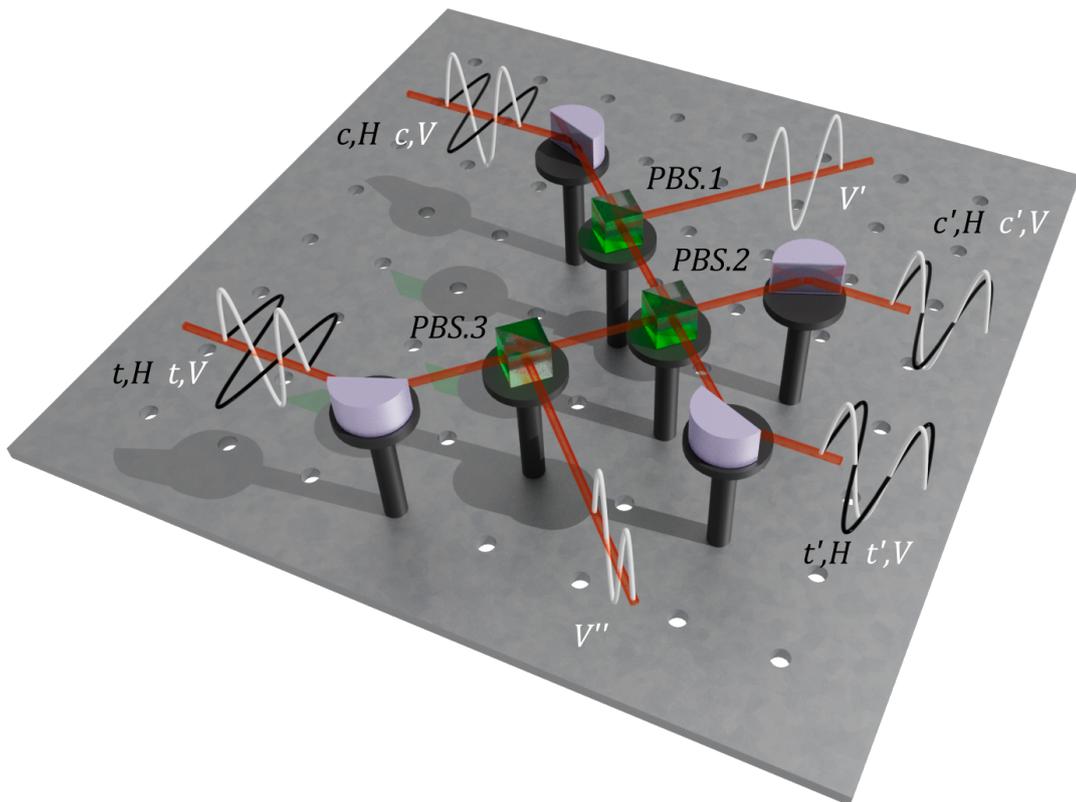


Рис. 2.7: Схема двухкубитного вентиль CNOT для поляризационных мод. Слепые моды V' и V'' на выходе должны быть пустыми, в противном случае вентиль отработал с ошибкой.

Используя свойства частично поляризационных светоделителей

и применяя правила (2.10) и (2.11) сначала для пары светоделителей PBS.1 и PBS.3, а затем для светоделителя PBS.2, можно записать линейные преобразования бозонных операторов, аналогично уравнениям (2.19–2.24). Как и в случае вентиля CNOT для пространственно разделённых мод, в поляризационной схеме встречаются слепые моды на выходе светоделителей PBS.1 и PBS.3, которые уменьшают вероятность успешного выполнения квантового вентиля. Мы предлагаем читателю самостоятельно рассчитать эффективность оптической схемы, как это сделано в формулах (2.25–2.32).

Реализация вентиля CNOT для поляризационных кубитов внутри оптического чипа принципиально не отличается от схемы на светоделителях¹⁴. Вместо двух входных лучей в открытом пространстве, проходящих через три поляризационных светоделителя, свет вводится в волноводы и затем проходит через три направленных оптических ответвителя с разным коэффициентом взаимодействия между поляризационными модами. Для этого необходимо правильно рассчитать длину и близость каналов, по которым проходит свет внутри чипа.

2.3.4 Вентиль нелинейного фазового сдвига

Рассмотрим вентиль нелинейного фазового сдвига, реализованный с помощью KLM-протокола. Нелинейным фазовым сдвигом называется изменение фазы двухфотонного состояния моды, несущей квантовую информацию, при сохранении фаз нульфотонного и однофотонного состояний:

$$[\text{NS}(\phi)]_{gate} |\psi\rangle_q = |\psi'\rangle_q, \quad (2.33)$$

$$|\psi\rangle_q = \left(\alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q + \gamma |2\rangle_q \right), \quad (2.34)$$

$$|\psi'\rangle_q = \left(\alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q + e^{i\varphi} \gamma |2\rangle_q \right). \quad (2.35)$$

На рисунке 2.8 приведена схема NS вентиля, где индексами \circ и \bullet обозначены моды анциллы, а символом q обозначена информационная мода. Если подготовить однофотонное состояние входной моды \circ и нульфотонное состояние входной моды \bullet , то начальное состояние поля перед входом в вентиль можно записать, используя операторы рождения:

$$|\Psi\rangle = \left(\alpha + \beta \hat{a}_q^\dagger + \gamma \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q^\dagger \right) \hat{a}_\circ^\dagger \hat{a}_\bullet^\dagger |\text{zero}\rangle, \quad (2.36)$$

¹⁴<https://www.nature.com/articles/ncomms1570>

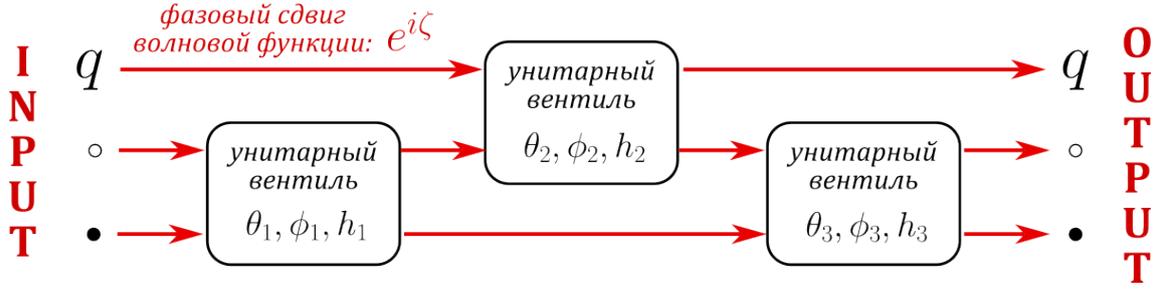


Рис. 2.8: Схема вентиля нелинейного фазового сдвига. Схема унитарного вентиля приведена на рисунке 2.5 вместе с формулой.

$$|\text{zero}\rangle = |0\rangle_q \otimes |0\rangle_\circ \otimes |0\rangle_\bullet. \quad (2.37)$$

Далее, следуя рисунку, можно последовательно сделать три преобразования операторов рождения \hat{a}^\dagger на каждом шаге вентиля в соответствии с правилом (ссылка на делитель и фазовращатель), при этом на первом шаге происходит умножение оператора \hat{a}_q^\dagger на фазу $e^{i\zeta}$.

После преобразований новое состояние трёх мод на выходе будет задано следующей формулой:

$$|\Psi'\rangle = \left(\alpha \cdot \mathcal{A} |0\rangle_q + \beta \cdot \mathcal{B} |1\rangle_q + \gamma \cdot \mathcal{C} |2\rangle_q \right) \otimes |1\rangle_\circ \otimes |0\rangle_\bullet + \dots \quad (2.38)$$

С помощью многоточия обозначены слагаемые, в которых совместное состояние мод анциллы иное, чем в первом слагаемом. Символы \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} являются функциями только параметров преобразования вентиля, то есть трёх пар углов θ и ϕ , а также фазы ζ . Особенность решения (2.38) заключается в том, что новые коэффициенты перед состояниями разного заполнения фотонами информационной моды не являются линейными комбинациями начальных коэффициентов. Значит, можно так подобрать параметры вентиля, что произойдёт требуемое изменение фазы коэффициента γ при неизменных коэффициентах α и β .

Если при измерении моды анциллы окажутся в состоянии $|1\rangle_\circ \otimes |0\rangle_\bullet$, то информационная мода гарантированно окажется в состоянии с изменённой фазой двухфотонного состояния. Если моды анциллы при измерении будут в другом состоянии, то результат измерения отбрасывается как неудачный.

Подобным методом реализованы и другие вентиля протокола KLM, например, перенос информационного кубита из одного канала в другой без изменения его состояния. Такой перенос считается успешным при измерении определённого состояния анциллы. По-

дробнее о различных конфигурациях оптических вычислительных узлов LOQC можно прочитать здесь¹⁵.

2.4 Хранение и передача кубитов

Квантовая память отличается от классической. Во время записи классической информации происходит копирование регистра в элемент памяти, при этом сам регистр может использоваться в дальнейшем. Это позволяет использовать память как активную часть вычислительной системы, которая дублирует информацию для её одновременного использования несколько раз. Квантовая физика запрещает клонирование квантового состояния системы в другую такую же систему. Это фундаментальное свойство накладывает ограничение на использование квантовой памяти при проведении квантовых вычислений или создании сетей квантовых коммуникации. Под квантовым состоянием следует иметь в виду суперпозицию стационарных состояний (уровней) квантовой системы с известными комплексными коэффициентами в начальный момент времени.

Принцип работы квантовой памяти можно разделить на два этапа: запись и воспроизведение. Во время записи квантовое состояние носителя по команде переносится в квантовую систему элемента памяти, причём для полноценной записи количество уровней памяти должно быть больше или равно количеству уровней носителя, в котором находилась квантовая информация. После записи состояние носителя случайно переходит в некоторое новое состояние, поэтому невозможно узнать, какая именно информация была записана без воспроизведения (строго говоря, даже после воспроизведения невозможно в точности сказать, какая информация была записана, из-за вероятностного характера результата измерения). Во время воспроизведения квантовая информация по команде переносится из элемента памяти в новый носитель, тождественный тому, в котором информация была до записи. В идеальном случае этот носитель должен оказаться в таком же состоянии суперпозиции, как и носитель, который передал информацию в память.

Давайте называть успешной записью или успешным воспроизведением произошедший перенос квантовой информации из носителя в память или обратно независимо от того, совпадают ли состояния носителей на входе и на выходе из элемента памяти. Квантовую

¹⁵<https://nanojournal.ifmo.ru/articles/volume3/3-4/physics/paper04/>

память, как правило, характеризуют тремя параметрами: эффективностью, время хранения и точность. Эффективность равна вероятности успешной записи квантовой информации. С течением времени квантовая память релаксирует в состояние термодинамического равновесия, поэтому время жизни — это не точный интервал, в течение которого хранится информация, а обратная скорость релаксации, при которой сохранённая информация разрушается. Разрушение происходит из-за расфазировки комплексных коэффициентов в состоянии суперпозиции, а также перемешивания населённости уровней внутри элемента памяти. Чем больше время хранения, тем выше вероятность успешного воспроизведения квантовой информации через фиксированный интервал времени. Если время хранения фиксировано, то эффективность можно переопределить как произведение вероятностей успешной записи и успешного воспроизведения. Точность квантовой памяти можно определить по-разному в зависимости от того, какую именно квантовую информацию хранит память. Если описывать элемент памяти для кубита, то логичнее всего определить её как среднее арифметическое от квадрата модуля скалярного произведения записанного и воспроизведённого кубитов. Точность не зависит от эффективности и времени хранения, так как вычисляется только при условии успешной записи и воспроизведения. Если говорить о квантовой памяти для аналоговой информации, то точность следует определять с помощью функции корреляции выходной и входной волновых функций носителя.

2.4.1 Оптическая квантовая память

Задача оптической квантовой памяти — поглощение фотона, который переносит кубит квантовой информации, и его дальнейшее воспроизведение по команде. Несмотря на невозможность клонирования квантовой информации и исчезновение фотона во время записи, такая процедура чрезвычайно важна в различных задачах квантовых вычислений. Во-первых, квантовая память симулирует оптическую задержку с управляемым временем, что решает проблему синхронизации в протоколах с использованием перепутанных пар фотонов или интерференцией слабых оптических импульсов. Во-вторых, квантовая память позволяет создавать контролируемые источники квантового излучения, в которых источник испускает пару или несколько фотонов, часть из которых измеряется, а часть записывается в память. Измерение приводит к коллапсу волновой функции, и в зависимости от результатов измерения квантовая ин-

формация окажется в новом состоянии внутри памяти уже после её записи.

Существует много разных схем оптической квантовой памяти и, разбор каждой из них займёт слишком много времени. Здесь мы перечисляем несколько наиболее известных схем, которые применяются на практике.

Долгоживущее фотонное эхо

Элемент памяти представляет собой плотный ансамбль атомов, у которых есть разрешённый дипольный переход между двумя уровнями¹⁶.

Память создаётся тремя оптическими импульсами, проходящими через среду по одному и тому же пути, первый импульс даёт команду о начале записи, второй проходит через среду, полностью поглощаясь в ней, и является несущим информацию кубитом, третий импульс даёт команду о начале воспроизведения и заново формирует в среде условия для рождения оптического импульса через интервал времени, равный интервалу между первым и вторым импульсами, рождённый импульс тождественен второму (информационному). Интервал времени между вторым и третьим импульсами соответствует времени хранения кубита. Физический принцип состоит в обращении динамики тех атомов, которые поглотили информационный импульс, третьим импульсом. Обращённая динамика приводит эти атомы в то поляризованное состояние, в котором они находились после поглощения второго импульса, то есть сразу после записи. Главное преимущество — высокая эффективность, главный недостаток — малое время хранения и фиксированная задержка при воспроизведении, равная временному промежутку между первым и вторым импульсами.

Электромагнитно-индуцированная прозрачность

Феномен электромагнитно-индуцированной прозрачности создаётся в ансамбле атомов, обладающих двумя метастабильными энергетическими уровнями A и B , не связанными между собой дипольным переходом и хотя бы одним возбуждённым уровнем C , связанным с обоими метастабильными уровнями дипольными переходами. Если среда просвечивается контрольным полем, частота которого ω_c близка к частоте ω_{BC} перехода $B \leftrightarrow C$, то в течение времени релаксации

¹⁶<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.84.022309>

оптической когерентности в среде создаётся особое поляризованное состояние. Его особенность состоит в том, что такая среда прозрачна для пробного поля, слабого по сравнению с контрольным полем, если частота определяется соотношением $\omega_p \approx \omega_{AC} + \omega_{BC} - \omega_c$, где ω_{AB} — частота перехода $A \leftrightarrow C$.

Запись происходит следующим образом. Во время распространения информационного импульса через активную среду с высоким коэффициентом преломления выключается контрольное поле и среда мгновенно становится оптически плотной. Она поглощает информационный импульс, "замораживая" его в ансамбле атомов¹⁷. Если релаксация атомов в состояние термодинамического равновесия достаточно медленная, то включение контрольного поля до их распада делает среду снова оптически прозрачной, и атомы, поглотившие информационный импульс, становятся поляризованными, воспроизводя тем самым кубит в том же самом состоянии, в котором он был поглощён. Главное преимущество памяти на ЭИП — это высокая точность и отсутствие задержки воспроизведения¹⁸. Главный недостаток — высокая сложность технической реализации из-за необходимости создания определённого временного профиля контрольного поля при сохранении стабильности лазера.

Протокол DLCZ

Метод записи кубита назван по фамилиям авторов Duan Lukin Cirac Zoller, впервые предложивших его в ставшей классической работе 2001 года¹⁹. Несмотря на то, что непосредственно сам протокол решал иную задачу квантовой оптики, его физический механизм оказался эффективен для создания элемента квантовой памяти. Среда хранения представляет собой холодный ансамбль атомов с двумя метастабильными энергетическими уровнями A и B , не связанными между собой дипольным переходом, и хотя бы одним возбуждённым уровнем C , связанным с обоими метастабильными уровнями дипольными переходами. Первоначально атомы находятся на уровне A . Запись квантовой информации происходит с помощью отстроенного классического поля, которое возбуждает в среде только один атом. В дальнейшем этот атом спонтанно переходит на уровень B , излучая тем самым фотон. Если этот рамановский фотон был задетектирован в некоторой убегающей моде, то среда гарантированно

¹⁷<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2040-8986/19/4/043001/meta>

¹⁸<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.120.183602>

¹⁹<https://www.nature.com/articles/35106500>

оказывается в суперпозиции состояний, в которых только один неизвестный атом находится на уровне B , а остальные на уровне A . Фазы коэффициентов в суперпозиции определяются тем, в какой моде был задетектирован фотон. Если через требуемое время среду облучить импульсным полем с частотой перехода $B \leftrightarrow C$, то единственный атом на уровне B перейдёт обратно на уровень A , переизлучив фотон при распаде с уровня C . Причём этот фотон будет переносить ту же самую квантовую информацию, что и фотон, задетектированный на этапе записи. Достоинством DLCZ памяти является длительное время хранения, а недостатком — невысокая эффективность из-за случайного характера рамановского излучения фотона на этапе записи.

Описанную схему не в полной мере можно считать квантовой памятью, так как запись осуществляется классическим полем сразу в элемент памяти без переносчика квантовой информации - фотона. Информация скорее не записывается, а приготавливается внутри элемента памяти. Тем не менее, она хранится в атомном ансамбле до команды воспроизведения, поэтому данный механизм следует считать разновидностью квантовой памяти. Протокол может быть использован как источник оптических кубитов в схемах, где требуется большое время задержки.

2.4.2 Квантовые повторители

Квантовый повторитель является одним из главных элементов квантовых сетей и квантовых вычислительных систем. Он решает задачу передачи кубита от входного узла к выходному, минуя канал распространения оптического импульса, который переносит этот кубит. Повторители относятся, скорее, к субтехнологии "квантовые коммуникации", но они также применяются в периферии квантовых вычислительных систем, и здесь будет уместным добавить объяснение принципа их работы. Подробная теория квантовых повторителей изложена в обзоре 2023 года от интернациональной команды исследователей²⁰. В России экспериментальные и теоретические исследования квантовых повторителей осуществляются на базе Казанского научного центра РАН под руководством Калачёва Алексея Алексеевича. В 2023 году вышел его обзор современных достижений в этой области, с которым следует ознакомиться²¹.

²⁰<https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.95.045006>

²¹<https://openrepository.mephi.ru/entities/publication/4dd11610-46fe-49ea-8fd2-48c376e97616>

Принципиальная математическая модель квантового повторителя выглядит следующим образом. Вход содержит два однокубитных канала, которые будем обозначать индексами in и bm , а выход содержит один однокубитный канал, который будем обозначать индексом out . На каналы bm и out отправляется заранее подготовленное состояние Белла $|\Phi_+\rangle$. Затем на входе происходит совместное измерение кубитов в каналах in и bm . Если в результате измерения кубиты на входе обнаружены в состоянии Белла $|\Phi'_+\rangle$, то по классическому каналу отправляется информация о том, что состояние кубита на единственном выходном канале тождественно состоянию кубита на входном канале in до Белловского измерения.

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{bm} \otimes |0\rangle_{out} + |1\rangle_{bm} \otimes |1\rangle_{out}), \quad (2.39)$$

$$|\Psi'_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{in} \otimes |0\rangle_{bm} + |1\rangle_{in} \otimes |1\rangle_{bm}). \quad (2.40)$$

Важно! В формулах выше цифры 0 и 1 соответствуют двум разным состояниям кубита, а не количеству фотонов. Перенос кубита из входного канала in в выходной канал out нетрудно объяснить с помощью формулы:

$$\langle \Psi'_+ | \zeta \rangle = \frac{1}{2} (c_0 |0\rangle_{out} + c_1 |1\rangle_{out}), \quad (2.41)$$

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0 |0\rangle_{in} + c_1 |1\rangle_{in}) \otimes |\Psi_+\rangle. \quad (2.42)$$

В формуле (2.41) происходит частичная свёртка трёхкубитного состояния квантового повторителя, она описывает коллапс при измерении состояния кубитов в двух каналах из трёх.

Квантовые повторители для эффективной работы должны иметь точный и быстрый генератор пар разнесённых в пространстве кубитов в состоянии Белла. Эта задача представляется трудоёмкой, однако выигрыш здесь в том, что зачастую на подготовку транспортируемого кубита требуется намного больше времени, чем на подготовку двух кубитов в перепутанном состоянии Белла. Другим случаем исключительной важности квантовых повторителей является транспортировка уникального кубита в неизвестном состоянии, стоимость потери которого намного выше стоимости потери состояния Белла, отправляемого в каналы bm и out , так как процедуру

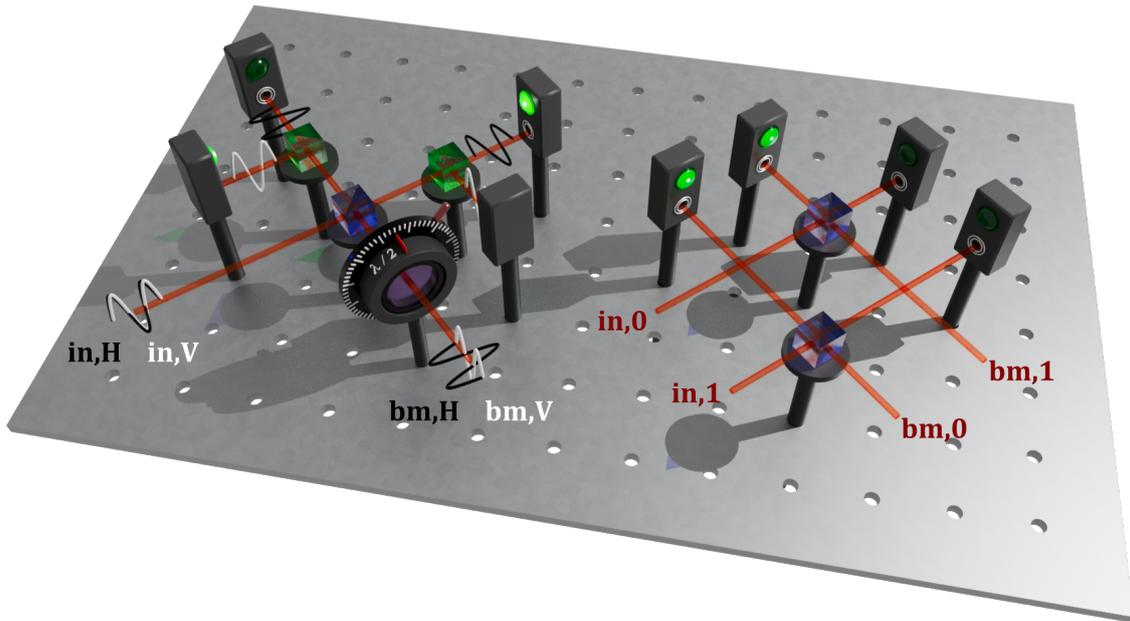


Рис. 2.9: Две альтернативные схемы для проведения измерений состояний Белла. Левая схема работает с поляризационными кубитами (типа II), правая схема — с кубитами, закодированными в пространственно разделённые моды (типа I). Полуволновая пластина повернута на угол 45 градусов. Все светоделители на схемах сбалансированы на 50 : 50, поляризационные светоделители — идеальные, то есть полностью отражают вертикальную поляризацию и полностью пропускают горизонтальную. Светящиеся лампы на двух фотоэлементах показывают конфигурацию, при которой на входе обнаружено состояние Белла $|\Psi'_+\rangle$.

его создания можно повторять многократно. Объединение нескольких повторителей в последовательную цепочку позволяет передавать кубиты описанным методом на большие расстояния. В такой цепочке на выходной канал предыдущего повторителя *out* и входной канал следующего повторителя *in* отправляется пара кубитов в состоянии Белла и записывается в квантовую память вплоть до задействования всей цепочки повторителей.

На рисунке 2.9 приведены принципиальные схемы белловских измерений, которые необходимы для реализации квантовых повторителей в KLM-протоколе.

2.5 Контрольные вопросы

1. Что такое квантовые вычисления и для чего они нужны?
2. Чем отличается единица квантовой информации (кубит) от единицы классической информации (бит)?

3. Что такое квантовая запутанность (перепутанность) между кубитами? Приведите пример запутанных состояний.
4. Как происходит белловское измерение перепутанных оптических кубитов?
5. Как устроена схема инициализации кубита в ионном квантовом компьютере?
6. Как устроена схема опроса кубита в ионном квантовом компьютере?
7. Что такое джозефсоновский кубит и как он устроен?
8. Какие виды кодирования оптических кубитов Вы знаете? Дайте краткую характеристику каждого из них.
9. Что такое протокол LOQC и где он применяется?
10. По какому принципу работает направленный оптический ответвитель и в чём его преимущество перед светоделителем?
11. Что такое протокол KLM и где он применяется?
12. Как с помощью светоделителя и фазовращателей собрать унитарный квантовый вентиль?
13. Что такое анцилла в квантовых вычислениях? Как работает вентиль нелинейного фазового сдвига?
14. Как устроена оптическая схема двухкубитного CNOT вентиля для кубитов, закодированных в возбуждение пространственно разнесённых мод?
15. Как устроена оптическая схема двухкубитного CNOT вентиля для поляризационных кубитов?
16. Какие квантовые компьютеры существуют на сегодняшний день? Чем они отличаются друг от друга?
17. Какие принципиальные проблемы оптического кодирования квантовой информации Вы знаете? Почему многокубитные квантовые компьютеры на фотонах до сих пор не созданы?

18. Для чего нужна оптическая квантовая память? Чем она характеризуется?
19. Что такое квантовый повторитель?
20. Как система из пар повторителей позволяет передавать оптический кубит без потерь на большие расстояния?
21. Какие виды оптической квантовой памяти Вы можете назвать? Опишите принцип работы хотя бы одной из них.

Глава 3

Приложение: атомные спектры

Важнейшим понятием в квантовой физике, которое часто используется на практике, является энергетический уровень атома или молекулы. В тексте часто используются термины: ширина уровня, время жизни уровня, населённость уровня, опустошение и накачка уровня, расщепление уровня. В данном приложении даны краткие разъяснения этих терминов с базовыми математическими выкладками.

3.1 Стационарные состояния

Для описания квантовой системы можно использовать любой базис состояний в гильбертовом пространстве, в котором она обитает. Базисные состояния выбираются таким образом, чтобы их волновые функции были ортогональными и обладали определённым физическим смыслом. Тогда суперпозиция базисных состояний действительно передаёт некоторую информацию о системе, её динамике и вероятности того или иного результата измерения.

Стационарные состояния — это квантовые состояния, в которых функция распределения вероятностей измерения того или иного значения любой физически наблюдаемой величины не зависит от времени.

Запишем уравнение Шрёдингера для волновой функции любой замкнутой квантовой системы:

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

где \hat{H} — это оператор Гамильтона, который явно не зависит от времени, а Ψ — это волновая функция квантовой системы без уточнения координат (их может быть сколько угодно в зависимости от свойств квантовой системы). Раскладывая волновую функцию по

базису собственных функций оператора \hat{H} , можно привести уравнение к системе независимых уравнений для коэффициентов C_n :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k C_k(t) |k\rangle, \quad \hat{H} |k\rangle \equiv E_k |k\rangle, \quad (3.2)$$

$$i\hbar \sum_k \frac{dC_k(t)}{dt} |k\rangle = \sum_k C_k(t) E_k |k\rangle, \quad |\langle n | \dots, \quad (3.3)$$

$$i\hbar \sum_k \frac{dC_k(t)}{dt} \langle n | k \rangle = \sum_k C_k(t) E_k \langle n | k \rangle, \quad (3.4)$$

$$i\hbar \frac{dC_n(t)}{dt} = E_n C_n(t) \Rightarrow C_n(t) = C_n(0) \exp \left\{ -i \frac{E_n t}{\hbar} \right\}. \quad (3.5)$$

Если в начальный момент времени только один коэффициент C_n с некоторым $n = s$ отличен от нуля, то волновая функция $|\Psi(t)\rangle$ из формулы 3.2 согласно решению 3.5 будет в каждый момент времени совпадать с первоначальной функцией с точностью до некоторой фазы. Обозначим такую функцию $|\Psi_s(t)\rangle$:

$$C_n(0) \equiv \delta_{ns} e^{i\varphi} \quad |\Psi_s(t)\rangle = C_s(0) \exp \left\{ -i \frac{E_s t}{\hbar} \right\} |s\rangle. \quad (3.6)$$

Важно, что если состояние $\Psi_s(t)$ разложить по базису любого эрмитового оператора \hat{O} физически наблюдаемой величины λ , то коэффициенты разложения будут зависеть от времени только меняющейся фазой с частотой $E_s t / \hbar$:

$$\hat{O} |\Lambda_r\rangle \equiv \lambda_r |\Lambda_r\rangle, \quad |\Psi_s(t)\rangle = \sum_r A_r(t) |\Lambda_r\rangle, \quad (3.7)$$

$$A_r(t) \equiv \langle \Lambda_r | \Psi_s(t) \rangle = \exp \left\{ i\varphi - i \frac{E_s t}{\hbar} \right\} \langle \Lambda_r | s \rangle. \quad (3.8)$$

Учитывая то, что вероятность измерения λ_r обусловлена квадратом модуля коэффициента разложения, можем сделать вывод о неизменности предсказания результата эксперимента с течением времени. Значит, состояние $\Psi_s(t)$ является стационарным.

С точки зрения математики, стационарными состояниями являются собственные состояния оператора Гамильтона замкнутой системы. А собственные значения, которые соответствуют собственным состояниям оператора Гамильтона, являются энергиями этих стационарных состояний.

3.2 Энергетический уровень и спонтанный распад

В квантовой физике для описания атомной системы во внешнем электромагнитном поле часто используется базис энергетических уровней. Не следует путать понятия стационарного состояния и энергетического уровня, хотя они тесно связаны.

Энергетический уровень — это двойной термин, который в зависимости от контекста может обозначать как группу стационарных состояний *свободного* атома (или молекулы) с одинаковой энергией, так и само значение энергии этой группы. Если энергетический уровень состоит из двух и больше стационарных состояний, то он называется **вырожденным**. Группа может состоять из одного стационарного состояния, тогда энергетический уровень однозначно характеризует состояние квантовой системы. Если требуется конкретизировать некоторое состояние из группы, принадлежащей уровню, то говорят об **энергетическом подуровне**. Если группа состояний, принадлежащих одному и тому же энергетическому уровню, из-за внешнего воздействия приобретают разную поправку к энергии, то говорят о **расщеплении** энергетического уровня.

Множество дискретных энергетических уровней является бесконечным и ограниченным с обеих сторон. Энергетический уровень с наименьшей энергией называется основным. Об уровнях с меньшей энергией говорят, что они *ниже*, и наоборот, об уровнях с большей энергией говорят, что они *выше*. При переходе с одного уровня на другой атом поглощает или излучает энергию в зависимости от направления перехода. Если атому передать энергию, которая больше разницы верхней границы множества уровней и энергии его текущего уровня, то произойдёт ионизация: структура уровней иона станет другой.

Каждый энергетический уровень (кроме основного) имеет свойство самопроизвольно переходить на один из уровней ниже. Это называется **спонтанным распадом** атома. Константа спонтанного распада γ — это плотность вероятности этого процесса во времени, она является постоянной характеристикой энергетического уровня. Время жизни энергетического уровня оценивается как γ^{-1} , и оно равно интервалу, через который вероятность того, что атом ещё не перешёл хотя бы на некоторый из уровней ниже, равна e^{-1} . Спонтанный распад обусловлен взаимодействием с модами электромагнитного поля свободного пространства. Если искусственно изменить ло-

кальную структуру мод окружающего пространства, поместив атом в резонатор, например, то константы распада станут другими, причём изменение констант может быть порядка величины самих констант. Этот эффект впервые описал Парселл в 1946 году¹.

Конечное время жизни энергетического уровня приводит к тому, что согласно неопределённости Гейзенберга $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ говорить о точном значении энергии уровня при измерении невозможно. Поэтому каждый уровень имеет **ширину**, которая определяется как разброс вероятных значений энергии фотона, который излучается во время спонтанного распада. Если переход атома на другой уровень обусловлен только спонтанным распадом, то говорят об **естественной ширине** уровня. Уровни могут быть *уширены* внешним воздействием, которое приводит к дополнительным атомным переходам и тем самым уменьшает время пребывания атома на *уширенном* уровне.

Во многих задачах имеет смысл рассматривать только несколько нижних уровней. Такое ограничение обусловлено знанием об энергиях возбуждения атомов в системе. Если разница энергии между возбуждённым и основным уровнем намного больше передаваемой атому энергии, то вероятность перехода на такой уровень стремится к нулю и уровень можно не рассматривать. Если в системе присутствует много атомов, то вероятность нахождения атома в некотором состоянии можно интерпретировать как долю атомов, которые заполняют некоторый энергетический уровень, поэтому вероятность также называют **населённостью**. **Опустошение** энергетического уровня — это процесс, который приводит к уменьшению его населённости, напротив, **накачка** уровня — это процесс, который приводит к увеличению его населённости.

Дополнительная информация

Согласно **копенгагенской интерпретации**, именно энергетические уровни атома — это те состояния, в которых реально находится атом. При внешнем воздействии он скачкообразно переходит с одного уровня на другой, излучая при этом квант энергии. Расчёт позволяет судить только о вероятности обнаружения атома на том или ином уровне. Подобная интерпретация устанавливает более высокий приоритет базису собственных состояний оператора Гамильтона по сравнению с базисами других операторов и не имеет математических оснований. Тем не менее, эта интерпретация обладает

¹<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.69.674.2>

наибольшей интуитивной ясностью и соответствием между измерением и образом наблюдателя.

3.3 Двухуровневая система и резонанс

Одной из важнейших моделей взаимодействия излучения и вещества является динамика двухуровневого атома под действием внешнего монохроматического поля. С помощью этой модели объясняется резонансный переход с одного энергетического уровня на другой. **Двухуровневым атомом** называется любая квантовая система, у которой в ходе наблюдения населёнными могут быть только два энергетических уровня.

Для описания системы будем использовать матрицу плотности $\hat{\rho}$ в базисе двух энергетических уровней $|g\rangle$ (ground) и $|e\rangle$ (excited). При этом энергия уровня $|e\rangle$ выше, чем уровня $|g\rangle$.

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Диагональные элементы имеют смысл населённости уровня, а недиагональные элементы описывают когерентность между уровнями, которая обуславливает дипольное взаимодействие с внешним полем. Динамика матрицы плотности описывается уравнением фон-Неймана. В отличие от уравнения Шрёдингера, в уравнение фон-Неймана могут быть добавлены релаксационные слагаемые, которые описывают необратимые процессы в квантовой системе, например, спонтанный распад. Тогда уравнение называется обобщённым уравнением фон-Неймана:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \mathcal{L}\{\hat{\rho}\}, \quad (3.10)$$

где \hat{H} — это оператор Гамильтона, \hat{H}_0 — оператор Гамильтона свободного атома, \hat{V} — оператор дипольного взаимодействия, а \mathcal{L} — линейное отображение, которое описывает релаксацию. В рассматриваемой модели двухуровневого атома под действием монохроматического поля с частотой ω и амплитудой \mathcal{E} можем записать явный вид слагаемых:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{V} = -\hat{d} \mathcal{E} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.11)$$

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}, \quad \hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}\{\hat{\rho}\} = -\gamma(\hat{\rho} - \hat{\rho}_0), \quad \hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Здесь E_g и E_e — это энергии уровней, а d — величина дипольного перехода. Нули по диагонали оператора \hat{d} обозначают, что атом в обоих стационарных состояниях в свободном пространстве не обладает дипольным моментом. В ходе спонтанного распада система стремится оказаться на основном уровне, которому соответствует матрица $\hat{\rho}_0$, γ — это константа спонтанного распада.

Заменой переменных 3.14 можно привести уравнение к более простому виду 3.15:

$$\hat{\xi} = \hat{\epsilon}\hat{\rho}\hat{\epsilon}^\dagger, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\xi}] + \mathcal{L}\{\hat{\xi}\}, \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\delta & \Omega e^{2i\omega t} + \Omega^* \\ \Omega + \Omega^* e^{-2i\omega t} & \delta \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\Omega = \frac{d\mathcal{E}e^{-i\varphi}}{\hbar}, \quad \delta = \omega_0 - \omega, \quad \omega_0 = \frac{E_e - E_g}{\hbar}, \quad (3.17)$$

где Ω — это частота Раби, а δ — отстройка монохроматического поля от частоты атомного перехода ω_0 . Слагаемыми с удвоенными частотами в показателе экспоненты можно пренебречь как быстро убывающими при усреднении по половине малого периода осцилляций. Тогда уравнение для матрицы $\hat{\xi}$ становится простой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для поиска резонанса следует рассмотреть случай установившейся динамики, в которой производная по времени в уравнении 3.15 равна нулю:

$$\gamma(\hat{\xi}_{stable} - \hat{\rho}_0) = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\xi}_{stable}]. \quad (3.18)$$

Решение данной алгебраической системы имеет вид:

$$\hat{\xi}_{stable} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\Xi} & \frac{-\delta\Omega^* - i\gamma\Omega^*}{\Xi} \\ \frac{-\delta\Omega + i\gamma\Omega}{\Xi} & 1 - \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\Xi} \end{pmatrix}, \quad \Xi = \gamma^2 + \delta^2 + \Omega\Omega^*. \quad (3.19)$$

Обратим внимание на нижний диагональный элемент в матрице $\hat{\xi}_{stable}$, который показывает вероятность обнаружить атом в возбуждённом состоянии. Он стремится к нулю, если отстройка δ стремится к бесконечности, и максимален при $\delta = 0$. Кроме того, значение этого элемента вдвое меньше максимального, если $\delta = \sqrt{\gamma^2 + \Omega\Omega^*}$. Таким образом, в рассматриваемой системе при совпадении частоты внешнего поля ω и собственной частоты перехода ω_0 наблюдается резонанс, ширина которого в равной степени определяется как скоростью релаксации, так и интенсивностью внешнего поля.

3.4 Квантовые числа

Квантовое число описывает движение частицы вдоль некоторой степени свободы. Такие числа появляются в результате разделения переменных во время поиска решения стационарного уравнения Шрёдингера. Напомним, что каждое решение соответствует стационарному состоянию квантовой системы и характеризуется определённой энергией. Удобно пронумеровать стационарные состояния и энергетические уровни квантовыми числами, при подстановке которых получается конкретное стационарное состояние и уровень энергии. Если электронная оболочка атома имеет N ярко выраженных степени свободы, то её стационарное состояние (электронную орбиталь) принято индексировать N числами.

Приведём пример появления квантовых чисел для движения частицы в центральносимметричном поле в трёхмерном пространстве. Этот случай интересен как наиболее типичный для большой группы атомов и ионов, в которых электрон движется в квазицентральносимметричном поле. Гамильтониан и стационарное уравнение Шрёдингера в координатном представлении примут вид:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r), \quad \mathcal{E}\psi(\mathbf{r}) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}), \quad (3.20)$$

где Δ — оператор Лапласа в трёхмерном пространстве, m — масса частицы, \mathcal{E} — полная энергия стационарного состояния, V — координатная функция потенциальной энергии, \mathbf{r} — радиус-вектор частицы, r — расстояние до центра координат. Далее можно записать стационарное уравнение в сферической системе с углами θ и ϕ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{ang} \psi(\mathbf{r}) + (k^2 - \mathcal{V}(r)) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.21)$$

$$\Delta_{ang}\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2}, \quad (3.22)$$

$$k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad \mathcal{V}(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}. \quad (3.23)$$

Будем искать стационарное решение в факторизованном виде $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)T(\theta)\Phi(\phi)$. Теперь можно разделить расстояние r и углы θ, ϕ :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + (kr)^2 - r^2\mathcal{V}(r) = c_1, \quad (3.24)$$

$$\frac{\sin\theta}{T(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta} \right) + c_1 \sin^2\theta = c_2, \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \cdot \frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = -c_2, \quad (3.26)$$

где c_1 и c_2 — некоторые вещественные числа. Учитывая то, что функция $\Phi(\phi)$ периодична, c_2 может принимать только целые значения, а два линейно независимых решения при некотором $c_2 = m$ имеют вид:

$$m \in \mathcal{Z}, \quad \Phi_m(\phi) = \exp\{\pm im\phi\}. \quad (3.27)$$

Подставив $c_2 = m$ в уравнение (3.25), можно обнаружить, что решение $T(\theta)$ непрерывно и конечно при всех углах θ только при следующих условиях:

$$c_1 = l(l+1), \quad l \in \mathcal{N}_0, \quad |m| \leq l. \quad (3.28)$$

При определённых выбранных l и m вид решения уравнения (3.25) проще всего записать с помощью присоединённых полиномов Лежандра:

$$T_{l,m}(\theta) = P_l^m(\cos\theta). \quad (3.29)$$

Теперь можно подставить любое число $c_1 = l(l+1)$ в уравнение (3.24) и решить его:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + ((kr)^2 - r^2\mathcal{V}(r) - l(l+1)) R(r) = 0. \quad (3.30)$$

Решение $R(r)$ будет физическим только при определённых числах k . Сами решения записать невозможно, так как центральносимметричная функция потенциальной энергии задана произвольно. Однако их можно пронумеровать по возрастанию числа k : наименьшее k —

это k_0 , затем k_1 и так далее. Всякому $k_{n'}$ при определённом значении l соответствует решение $R_{n,l}(r)$ и энергия $\mathcal{E}_{n,l}$, где для удобства часто делается замена $n = n' + l + 1$. Каждое линейно независимое решение стационарного уравнения Шрёдингера для энергии $\mathcal{E}_{n,l}$ можно записать следующим образом:

$$\psi_{n,l,m}(\mathbf{r}) = R_{n,l}(r)P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \quad (3.31)$$

Числа n , l и m являются квантовыми числами, которые характеризуют радиальную и две угловые степени свободы квантовой системы. Число l называют орбитальным квантовым числом, а m — магнитным квантовым числом. Число m часто бывает переопределено, если происходит взаимодействие между угловыми моментами и спинами внутри квантовой системы.

Подводя итог, энергетический уровень $\mathcal{E}_{q_1, q_2, \dots, q_N}$ можно характеризовать некоторым набором квантовых чисел q_j , которые соответствуют степеням свободы x_j движения квантовой системы. Каждому энергетическому уровню соответствует множество ортогональных стационарных состояний $|q_1, q_2, \dots, q_N, u_1, u_2, \dots, u_M\rangle$ (множество может состоять из единственного состояния), которые в координатном представлении имеют вид многомерных волновых функций

$$\psi_{q_1, q_2, \dots, q_N, u_1, u_2, \dots, u_M}(x_1, x_2, \dots, x_N, x'_1, x'_2, \dots, x'_M).$$

Квантовые числа u_j характеризуют движение вдоль степеней свободы x'_j , которые не влияют на полную энергию системы, как например, магнитное квантовое число и угол ϕ в рассмотренном выше случае центральносимметричного потенциала.

3.5 Спектральные термы

Квантовые технологии так или иначе основаны на квантовых эффектах взаимодействия электромагнитного поля с веществом, причём вещество представляет собой квантовую систему из атомов с некоторым набором энергетических уровней. Для классификации энергетических уровней существуют **спектральные термы**, которые содержат краткую характеристику энергетического уровня. Чем больше частиц в атоме или молекуле, тем богаче разнообразие спектральных термов. Напомним, что точного аналитического решения уравнения Шрёдингера для трёх и более взаимодействующих частиц не существует, поэтому каждый энергетический уровень многоэлектронного атома является индивидуальной сущностью, для

точного описания которой необходимо численно построить многомерную комплекснозначную волновую функцию. То есть термы не дают полную характеристику стационарного состояния, зато удачно классифицируют их: с помощью термов можно быстро определить относительное положение уровней на шкале энергии, а также по правилам отбора оценить восприимчивость перехода между уровнями к внешнему электромагнитному полю.

Тонкая и сверхтонкая структура уровней одиночного электрона в центрально-симметричном поле

Ниже приведён разбор спектральных термов квантовой системы, в которой один электрон находится в электрическом поле с потенциалом, близком к $-1/r$. Таким потенциалом обладают атомы щелочных металлов и ионы редкоземельных металлов, так как в них все электроны, кроме одного, заполняют компактную область внутри атома, которая называется заполненной электронной оболочкой. Эти внутренние электроны и ядро образуют одиночный (для атома) или двойной (для иона) положительный элементарный заряд, распределённый квазиизотропно около начала координат. Отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, состоит в присутствии дополнительной степени свободы — **спина**. Она выражается дискретной переменной s , которая может принимать значения от $-\mathcal{S}$ до \mathcal{S} с шагом 1, где \mathcal{S} — это спиновое квантовое число. Для электрона $\mathcal{S} = 1/2$. Чтобы найти новые стационарные состояния, требуется решить уравнение Шрёдингера для суперпозиции ортогональных волновых функций с разной переменной s :

$$|\psi\rangle \rightarrow \sum_{s=\pm 1/2} C_s \psi(\mathbf{r}, s). \quad (3.32)$$

Гамильтониан одиночного электрона в центрально-симметричном потенциале $V(r) = -e/r$ можно записать с помощью формулы (3.20), но необходимо добавить в него оператор взаимодействия между спином электрона и орбитальным моментом движения:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{S}, \quad (3.33)$$

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}, \quad \hat{S} = \frac{\beta}{r^3} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}), \quad (3.34)$$

$$\beta = \frac{\hbar e^2}{4m^2 c^2}, \quad (\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}) = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sigma_\alpha \hat{L}_\alpha, \quad (3.35)$$

где $\hat{\sigma}_\alpha$ — спиновые матрицы Паули, действующие в пространстве спиновой переменной, \hat{L}_α — компоненты оператора орбитального момента внешнего электрона. Оператор спин-орбитального взаимодействия является скалярным произведением, поэтому не меняется при повороте системы координат и не нарушает изотропии Гамильтониана \hat{H} — это важно для сохранения возможности разделения переменных при решении. Множитель β/r^3 на атомарных масштабах достаточно малый, чтобы рассматривать \hat{S} как возмущение уровней. Тогда собственные состояния оператора (3.33) можно записать как суперпозицию невозмущённых стационарных состояний (3.31), но с дополнительной спиновой переменной:

$$\hat{H}\psi_{n,l|j,m'}(\mathbf{r}) = (\mathcal{E}_{n,l} + \Delta\mathcal{E}_{n,l,j})\psi_{n,l|j,\mu}(\mathbf{r}), \quad (3.36)$$

$$\psi_{n,l|j,m'}(\mathbf{r}) = \sum_{s,m} C_{n,l,m,s}^{j,m'}\psi_{n,l,m}(\mathbf{r}, s). \quad (3.37)$$

Несмотря на большое количество индексов, смысл уравнения (3.37) нетрудно понять. Индексы n, l характеризуют невозмущённый энергетический уровень, собственная энергия которого $\mathcal{E}_{n,l}$ не зависит от магнитного квантового числа m , о чём говорится в предыдущем параграфе. При взаимодействии спина электрона и орбитального момента происходит перемешивание равных по энергии подуровней, которые характеризуются разными квантовыми числами m или разными значениями дискретной спиновой переменной s . Напомним, что m имеет смысл проекции орбитального момента. Количество перемешиваемых подуровней таким образом равно $N_s \cdot N_m$, где $N_s = 2\mathcal{S} + 1$ — это количество возможных значений спиновой переменной, а $N_m = 2l + 1$ — количество подуровней с разными квантовыми числами m . Благодаря симметричным свойствам скалярного произведения (3.35) новые собственные функции $\psi_{n,l|j,m'}$ группируются так, что поправка к энергии $\Delta\mathcal{E}_{n,l,j}$ оказывается одинаковой для некоторых подгрупп из них. Причём количество подгрупп с разными поправками равно $\eta = \min(2\mathcal{S} + 1, 2l + 1)$. Поправки будем индексировать буквой j . Каждая подгруппа j содержит $2j + 1$ собственных состояний с одинаковой энергией, которые индексируются буквой m' :

$$L_\uparrow = \max(\mathcal{S}, l), \quad L_\downarrow = \min(\mathcal{S}, l), \quad (3.38)$$

$$j = (L_\uparrow - L_\downarrow), (L_\uparrow - L_\downarrow + 1), \dots, (L_\uparrow + L_\downarrow - 1), (L_\uparrow + L_\downarrow), \quad (3.39)$$

$$m' = (-j), (-j + 1), \dots, (j - 1), (j). \quad (3.40)$$

По смыслу j и m' напоминают квантовые числа орбитального момента и его проекции, поэтому логично сделать вывод о том, что из-за сильной связи между спином и орбитальным моментом возник полный момент электронной оболочки j вместе с его проекцией m' . В пользу этого говорит тот факт, что коэффициенты $C_{n,l,m,s}^{j,m'}$ повторяют правила сложения моментов в квантовой механике. Зачастую именно из-за этого спин интерпретируют как аномальный момент вращения, которого для точечного электрона не может быть.

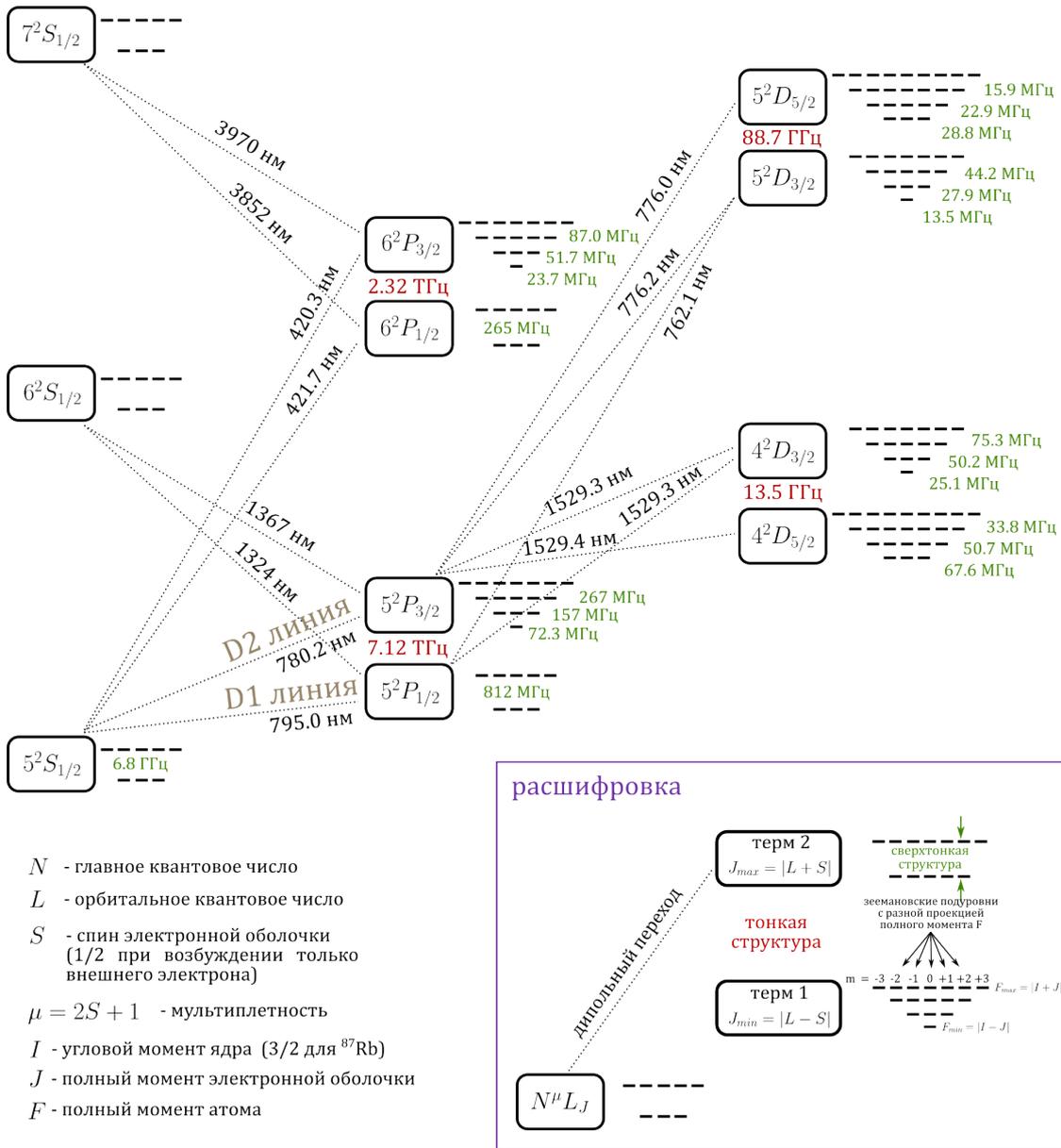


Рис. 3.1: Схема энергетических уровней ^{87}Rb с указанием некоторых часто используемых переходов.

Теперь с помощью индексов n, l, m, s можно классифицировать уровни энергии атомов щелочных металлов и однократно заряжен-

ных ионов редкоземельных металлов с одним внешним электроном. Для этого на диаграмме по вертикали зададим шкалу энергии (можно неравномерную), а по горизонтали — любую характеристику для удобства визуализации. Каждый уровень кодируется записью $N^{\mu}L_j$, где N — это главное квантовое число орбитали, μ — мультиплетность, которая показывает количество новых уровней вместо расщеплённого из-за спин-орбитального взаимодействия, буква L характеризует орбитальный момент расщеплённого уровня, а J характеризует полный момент электронной оболочки с учётом спина, или номер поправки к энергии. Такая запись называется **спектральный терм**. Для примера на рисунке 3.1 приведена схема энергетических уровней изотопа рубидия ^{87}Rb . Следует обратить внимание на то, что, кроме поправки из-за спин-орбитального взаимодействия, появляется ещё одна поправка, которая намного меньше по абсолютной величине энергии. Её природа такая же, но вместо спина электрона и орбитального момента происходит перемешивание спина ядра и полного момента электронной оболочки. Правила расщепления энергетических уровней с определённым J остаются точно такими же, так как обусловлены появлением в гамильтониане ещё одного слагаемого, пропорционального скалярному произведению оператора спина ядра и суммы операторов орбитального момента и спина электрона.

3.6 Контрольные вопросы

1. Что такое энергетический уровень и стационарное состояние?
2. Как описать спонтанный распад с верхнего уровня на нижний?
3. Расшифруйте схему энергетических уровней атома ^{87}Rb , приведённую на рисунке 3.1.
4. Что такое квантовые числа и спектральный терм?
5. Почему появляются тонкая и сверхтонкая структура уровней атомов?

Заключение

Перед завершением курса хотелось бы отметить, что информация, представленная в настоящем учебно-методическом пособии, имеет свойство устаревать. А в квантовых технологиях это происходит особенно быстро ввиду их развития в нашей стране и во всём мире. Поэтому в дальнейшем предполагается обновление содержательной части пособия. Тем не менее, на данный момент пособие представляет собой срез существующих на мировом рынке квантовых технологий в 2024 году. Желательно, чтобы изучение данного курса происходило параллельно или предваряло изучение дисциплины о квантовых коммуникациях — субтехнологии, наиболее развитой среди прочих, согласно дорожной карте квантовых технологий в России. Успехов вам, уважаемые студенты, и яркого насыщенного будущего в вашей профессиональной деятельности, которая непременно должна быть связана с квантовой наукой.

Попов Евгений Николаевич

Квантовые сенсоры и квантовые вычисления
Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н. Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО**

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А