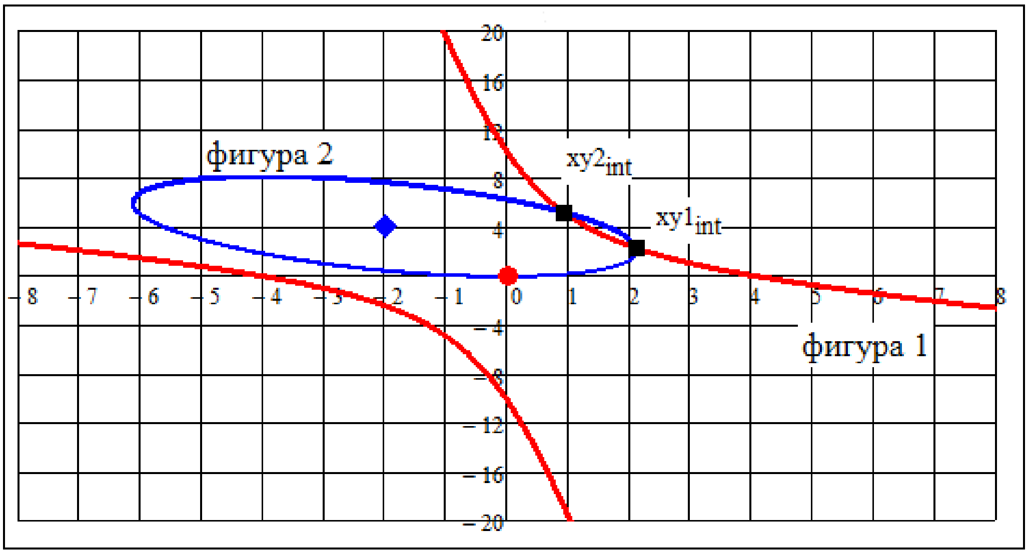
С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков,
В.В. Пеленко

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Ч. II. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУР



Санкт-Петербург
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков, Пеленко В.В.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15. Ч. II. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУР

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по укрупненным группам направлений подготовки: 09.00.00, 12.00.00, 13.00.00, 15.00.00, 16.00.00, 18.00.00, 19.00.00, 24.00.00, 27.00.00
в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Санкт-Петербург
2025

Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В., Пеленко В.В. Решение систем уравнений в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. II. Нелинейные уравнения. Пересечение фигур – СПб: Университет ИТМО, 2025, – 104 с.

Рецензент(ы):
Тертычный Владимир Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, доцент факультета информационных технологий и программирования, Университета ИТМО.

Пособие содержит сведения о решении систем нелинейных уравнений. Снабжено большим количеством примеров решения задач пересечения плоских фигур. В пособии приведены задачи для самостоятельного решения и тестовые вопросы с подробными пояснениями по изучаемому методу. Предназначено для обучения бакалавров по укрупненным группам направлений подготовки: 09.00.00, 12.00.00, 13.00.00, 15.00.00, 16.00.00, 18.00.00, 19.00.00, 24.00.00, 27.00.00

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Системы нелинейных уравнений нашли широкое применение при решении разнообразных технических задач, в том числе и оптимизационных. Решение систем нелинейных уравнений могут быть получено аналитическим способом (в редких случаях) и численно, с использованием пакетов прикладных программ, таких, как Mathematica, Maple, MathCAD, Matlab.

Студенты университета имеют возможность изучать и использовать все эти пакеты: Mathematica, Maple, MathCAD, Matlab. При обучении студентов линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, теории вероятности, математической статистике, изучении численных методов часто предпочтение отдается пакету MathCAD. В данном пакете можно эффективно осуществлять численные расчеты и выполнять аналитические преобразования, используя символьный процессор от Maple. Поэтому пакет MathCAD востребован как исследователями, занимающими научными разработками, так и техническими специалистами, выполняющими сложные вычисления. Важным обстоятельством является наличие в репозитарии ИТМО значительного количества пособий, посвященных изучению применения пакета MathCad при решении различных вычислительных и оптимизационных задач в разных областях науки и техники. Поэтому в данном пособии для практического решения систем нелинейных уравнений использовался пакет MathCAD.

В качестве аналитических выражений, рассмотренных в пособии, использовались уравнения плоских фигур: прямая, круг, эллипс, парабола, гипербола в различных вариантах. Решением систем уравнений являлись точки пересечения фигур. Такой подход позволяет более наглядно проиллюстрировать рассмотренный в пособии тему.

В первой главе содержатся аналитические выражения, описывающие фигуры во всех модификациях. Во второй главе приведен расчет точек пересечения различных вариантов фигур в пяти примерах. В третьей главе приведены около 70 контрольных вопросов по теории и практики рассматриваемой в пособии темы. Четвертая глава содержит 16 заданий для самостоятельной работы. Приложение содержит подробное с комментариями решение примеров, изложенных в главе 2, в пакете MathCAD. В примерах показана практика использования символьных инструментов MathCAD при упрощении и структурировании математических выражений.

Учебное пособие предназначено студентам для освоения методов линейной алгебры и аналитической геометрии. Оно может быть использовано для обучения в рамках дисциплин (модулей) "Линейная алгебра" в учебном процессе образовательных программах подготовки бакалавров: 09.00.00 (информатика и вычислительная техника); 12.00.00 (фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии); 13.00.00 (электро- и теплоэнергетика); 15.00.00 (машиностроение); 16.00.00 (физико- технические науки и технологии) 18.00.00 (химические технологии); 19.00.00 (промышленная экология и биотехнологии); 24.00.00 (авиационная и ракетно-космическая техника); 27.00.00 (управление в технических системах).

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИГУР

1.1. Общие положения

При решении задачи нахождения точки пресечения фигур необходимо:

- рассчитать точки пресечения фигур;
- построить графики фигур, нанести опорные точки фигур и точки пересечения фигур.

Задача нахождения точек пересечения фигур сводится и решению системы нелинейных уравнений, в которой количество неизвестных равно количеству уравнений.

1.2. Аффинные преобразования

Аффинные преобразования используются для модификации исходных выражений, описывающих двумерные фигуры при их параллельном перемещение относительно осей координат и повороте вокруг точки на заданный угол. Возможные перемещения фигур относительно координатных осей:

- смещение – параллельный перенос фигуры на $\vartriangle x$ и $\vartriangle y$ по осям $0X$ и $0Y$, соответственно;
- поворот фигуры относительно на угол α;
- смещение и поворот фигуры одновременно.

Для получения расчетных выражений при манипуляции фигур вводится локальная система координат ($0^I X^I Y^I$), которая устанавливается таким образом, чтобы положение фигуры было тоже, что и у фигуры до перемещения (поворота) в глобальной системе координат. Затем производится пересчет координат из локальной системы координат ($0^I X^I Y^I$) в глобальную систему координат ($0XY$) с использование аффинных преобразований [21, 22].

1.2.1. Параллельное смещение фигуры

При параллельном переносе фигуры аффинные преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x^I = x - \vartriangle x; \\ y^I = y - \vartriangle y, \end{cases} \tag{1.1}$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ – расстояние по осям $0X$ и $0Y$ между началом глобальной и локальной систем координат.

В матричной форме аффинные преобразования примут вид:

$$XY^I = XY - \vartriangle XY\ , \tag{1.2}$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ – координаты точки в локальной системе координат, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – вектор параллельного смещения точек.

1.2.2. Поворот прямой на заданный угол

При повороте фигуры на угол α аффинные преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha), \end{cases} \tag{1.3}$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, α – угол поворота фигуры относительно горизонтальной оси в локальной системе координат. Положительный угол α против часовой стрелки.

В матричной форме:

$$XY^I = M\alpha \cdot XY\,, \tag{1.4}$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ - координаты точки в локальной системе координат, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота.

1.2.3. Одновременное смещение и поворот фигур вокруг точки

При одновременном параллельном переносе на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ и повороте фигуры на угол α аффинные преобразования имеют вид [21–23]:

$$\begin{cases} x' = (x - \vartriangle x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -(x - \vartriangle x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \vartriangle y) \cdot \cos(\alpha), \end{cases} \tag{1.5}$$

где x^I – абсцисса точки в локальной системе координат, y^I – ордината точки в локальной системе координат, x, y – координаты точки в глобальной системе координат, $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ – расстояние по осям $0X$ и $0Y$ между началом глобальной и локальной систем координат, α – угол поворота фигуры относительно горизонтальной оси в локальной системе координат. Положительный угол α против часовой стрелки.

В матричной форме:

$$XY^I = M\alpha \cdot (XY - \vartriangle XY), \qquad (1.6)$$

где $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix}$ – координаты точки в локальной системе координат, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты точки в глобальной системе координат, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – вектор параллельного смещения точек по осям $0X$ и $0Y$.

1.3. Уравнения фигур и манипуляции с фигурами

1.3.1. Круг

Канонический вид уравнения круга

Уравнение круга с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1 = 0, \qquad (1.7)$$

где R – радиус круга.

Матричная форма записи:

$$XY^T \cdot AB3 \cdot XY - 1 = 0, \qquad (1.8)$$

где $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB3 = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов круга.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad (1.9)$$

то есть график состоит из двух кривых.

Параллельный перенос круга

Уравнение круга со смещенным центром относительно начала координат с учетом (1.1) примет вид:

$$\frac{(x - \vartriangle x)^2}{R^2} + \frac{(y - \vartriangle y)^2}{R^2} - 1 = 0, \qquad (1.10)$$

где $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ – смещение центра круга относительно начала координат по осям $0X$ и $0Y$, соответственно.

Матричная форма записи:

$$\left(XY - \vartriangle XY\right)^T \cdot AB3 \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0, \tag{1.11}$$

где $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB3 = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов круга, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – смещение центра круга по осям координат.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - \left(x - \vartriangle x\right)^2} + \vartriangle y, \tag{1.12}$$

то есть график состоит из двух кривых.

1.3.2. Эллипс

Канонический вид уравнения эллипса

Уравнение эллипса с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0, \tag{1.13}$$

где A, B – полуоси эллипса.

Матричная форма записи:

$$XY^T \cdot AB3 \cdot XY - 1 = 0, \tag{1.14}$$

где $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB4 = \begin{pmatrix} 1/A^2 & 0 \\ 0 & 1/B^2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов эллипса.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}, \tag{1.15}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Параллельный перенос эллипса

Вид уравнения эллипса при параллельном смещении центра эллипса на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям $0X$ и $0Y$ относительно начала координат с учетом (1.1) имеет вид.

$$\frac{\left(x - \vartriangle x\right)^2}{A^2} + \frac{\left(y - \vartriangle y\right)^2}{B^2} - 1 = 0. \tag{1.16}$$

Матричная форма записи:

$$\left(XY - \vartriangle XY\right)^T \cdot AB4 \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0, \qquad (1.17)$$

где $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB4 = \begin{pmatrix} 1/A^2 & 0 \\ 0 & 1/B^2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов эллипса, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ – смещение центра эллипса по осям координат.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - \left(x - \vartriangle x\right)^2} + \vartriangle y, \qquad (1.18)$$

то есть график состоит из двух кривых.

Поворот эллипса

Вид уравнения при повороте эллипса в локальной системе координат:

$$\frac{x^{l2}}{A^2} + \frac{y^{l2}}{B^2} - 1 = 0. \qquad (1.19)$$

Вид уравнения при повороте эллипса в глобальной системе координат с учетом (1.3) имеет вид:

$$\left(\frac{\cos(\alpha)^2}{A^2} + \frac{\sin(\alpha)^2}{B^2}\right) \cdot x^2 + \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right) \cdot x \cdot y + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\sin(\alpha)^2}{A^2} + \frac{\cos(\alpha)^2}{B^2}\right) \cdot y^2 - 1 = 0. \qquad (1.20)$$

Матричная форма записи с учетом (1.4) примет вид:

$$\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot XY}{A1}\right]^2 + \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot XY}{B1}\right]^2 - 1 = 0, \qquad (1.21)$$

где $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{A \cdot B \cdot \sqrt{A^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + B^2 \cdot \sin(\alpha)^2 - x^2} + \dfrac{x}{2} \cdot \sin(2\alpha)\left(A^2 - B^2\right)}{A^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + B^2 \cdot \sin(\alpha)^2}; \\ y_2 = -\dfrac{A \cdot B \cdot \sqrt{A^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + B^2 \cdot \sin(\alpha)^2 - x^2} - \dfrac{x}{2} \cdot \sin(2\alpha)\left(A^2 - B^2\right)}{A^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + B^2 \cdot \sin(\alpha)^2}, \end{cases} \tag{1.22}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Поворот и параллельный перенос эллипса

Вид уравнения при повороте эллипса в локальной системе координат:

$$\frac{x^{l2}}{A1^2} + \frac{y^{l2}}{B1^2} - 1 = 0. \tag{1.23}$$

Вид уравнения при повороте эллипса в глобальной системе координат с учетом (1.5) имеет вид:

$$\frac{x_{\alpha\vartriangle}^2}{A1^2} + \frac{y_{\alpha\vartriangle}^2}{B1^2} - 1 = 0, \tag{1.24}$$

где $x_{\alpha\vartriangle} = (x - {\vartriangle}x) \cdot \cos(\alpha) + (y - {\vartriangle}y) \cdot \sin(\alpha)$, $y_{\alpha\vartriangle} = -(x - {\vartriangle}x) \cdot \sin(\alpha) + (y - {\vartriangle}y) \cdot \cos(\alpha)$.

Матричная форма записи:

$$\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T (XY - {\vartriangle}XY)}{A1}\right]^2 + \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T (XY - {\vartriangle}XY)}{B1}\right]^2 - 1 = 0. \tag{1.25}$$

где $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ – матрица поворота, ${\vartriangle}XY = \begin{pmatrix} {\vartriangle}x \\ {\vartriangle}y \end{pmatrix}$ – вектор смещения.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\left(A1^2 - B1^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot K1} \cdot \left(x - {\vartriangle}x\right) + {\vartriangle}y + \dfrac{A1 \cdot B1 \cdot \sqrt{K1 - \left(x - {\vartriangle}x\right)^2}}{K1}; \\ y_2 = \dfrac{\left(A1^2 - B1^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot K1} \cdot \left(x - {\vartriangle}x\right) + {\vartriangle}y - \dfrac{A1 \cdot B1 \cdot \sqrt{K1 - \left(x - {\vartriangle}x\right)^2}}{K1}. \end{cases} \tag{1.26}$$

где $K1 = A^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + B^2 \cdot \sin(\alpha)^2$, то есть график состоит из двух кривых.

1.3.3. Гипербола

Канонический вид уравнения гиперболы

Уравнение гиперболы с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{A1^2}-\frac{y^2}{B1^2}-1=0, \tag{1.27}$$

где $A1$ – расстояние до вершины гиперболы от начала координат, O(0,0); между вершинами полуфигур гиперболы и началом координат, O(0,0); $B1=\sqrt{c^2-A1^2}$ – положительное число, c – расстояние до фокуса гиперболы от точки O(0,0).

Матричная форма записи:

$$XY^T\cdot AB4\cdot XY-1=0, \tag{1.28}$$

где $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB4=\begin{pmatrix}1/A^2 & 0\\ 0 & -1/B^2\end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов гиперболы.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$y=\pm\frac{B1}{A1}\sqrt{x^2-A1^2}, \tag{1.29}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Параллельный перенос гиперболы

Вид уравнения гиперболы при параллельном смещении центра гиперболы на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$ по осям $0X$ и $0Y$ относительно начала координат с учетом (1.1) имеет вид:

$$\frac{(x-\vartriangle x)^2}{A1^2}+\frac{(y-\vartriangle y)^2}{B1^2}-1=0. \tag{1.30}$$

Матричная форма записи:

$$(XY-\vartriangle XY)^T\cdot AB4\cdot(XY-\vartriangle XY)-1=0, \tag{1.31}$$

где $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, $AB4=\begin{pmatrix}1/A^2 & 0\\ 0 & -1/B^2\end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов эллипса, $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$ – смещение центра эллипса по осям координат.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$y = \pm\frac{B1}{A1}\sqrt{\left(x - \vartriangle x\right)^2 - A1^2} + \vartriangle y\,, \tag{1.32}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Поворот гиперболы

Вид уравнения при повороте эллипса в локальной системе координат:

$$\frac{x^{I2}}{A1^2} - \frac{y^{I2}}{B1^2} - 1 = 0\,, \tag{1.33}$$

где $x^I = x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha)$, $y^I = -x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha)$.

Вид уравнения при повороте гиперболы в глобальной системе координат с учетом (1.3) имеет вид:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\cos(\alpha)^2}{A^2} - \frac{\sin(\alpha)^2}{B^2}\right)\cdot x^2 + \sin(2\cdot\alpha)\cdot\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)\cdot x\cdot y + \ldots \\ + \left(\frac{\sin(\alpha)^2}{A^2} - \frac{\cos(\alpha)^2}{B^2}\right)\cdot y^2 - 1 = 0.\end{gathered} \tag{1.34}$$

Матричная форма записи с учетом (1.4) примет вид:

$$\left[\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY}{A1}\right]^2 - \left[\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY}{B1}\right]^2 - 1 = 0\,, \tag{1.35}$$

где $M\alpha = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\left(A^2 + B^2\right)\sin(2\alpha)\,x}{2\left(B^2\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2\right)} - \dfrac{2A\cdot B\sqrt{B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2 + x^2}}{2\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2\right)}; \\ y = \dfrac{\left(A^2 + B^2\right)\sin(2\alpha)\,x}{2\left(B^2\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2\right)} + \dfrac{2A\cdot B\sqrt{B^2\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2 + x^2}}{2\left(B^2\sin(\alpha)^2 - A^2\cos(\alpha)^2\right)}, \end{cases} \tag{1.36}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Поворот и параллельный перенос гиперболы

Вид уравнения при повороте гиперболы в локальной системе координат:

$$\frac{x^{I2}}{A1^2} - \frac{y^{I2}}{B1^2} - 1 = 0\,. \tag{1.37}$$

Вид уравнения при повороте гиперболы и параллельном пертносе относительно осей $0X$ и $0Y$ в глобальной системе координат с учетом (1.5) имеет вид:

$$\frac{{x_{\alpha\vartriangle}}^2}{A1^2}-\frac{{y_{\alpha\vartriangle}}^2}{B1^2}-1=0\,, \qquad (1.38)$$

где $x_{\alpha\vartriangle}=(x-\vartriangle x)\cdot\cos(\alpha)+(y-\vartriangle y)\cdot\sin(\alpha)$, $y_{\alpha\vartriangle}=-(x-\vartriangle x)\cdot\sin(\alpha)+(y-\vartriangle y)\cdot\cos(\alpha)$.

Матричная форма записи:

$$\left[\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^T\right)^{<0>}\right)^T(XY-\vartriangle XY)}{A1}\right]^2-\left[\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^T\right)^{<1>}\right)^T(XY-\vartriangle XY)}{B1}\right]^2-1=0\,. \qquad (1.39)$$

где $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота, $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$ – вектор смещения.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{A1\cdot B1\sqrt{K2+\left(\vartriangle x-x\right)^2}+\left[-\vartriangle y\cdot K2-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)}{2}\left(\vartriangle x-x\right)\cdot\left(A1^2-B1^2\right)\right]}{K2}; \\ y_2=\dfrac{A1\cdot B1\sqrt{K2+\left(\vartriangle x-x\right)^2}-\left[-\vartriangle y\cdot K2-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)}{2}\left(\vartriangle x-x\right)\cdot\left(A1^2-B1^2\right)\right]}{K2}, \end{cases} \qquad (1.40)$$

где $K2=-A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2$, то есть график состоит из двух кривых.

1.3.4. Парабола

Канонический вид уравнения параболы (*как в высшей математике (ВМ)*):

$$y^2-2\cdot p\cdot x=0\,, \qquad (1.41)$$

где p – фокусный параметр, $p/2$ – фокусное расстояние, $A3=2p$ – ширина параболы.

Вершина параболы совпадает с началом координат, ветви параболы направлены вдоль положительной оси $0X$.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$y=\pm\sqrt{2\cdot p\cdot x}\,, \qquad (1.42)$$

то есть график состоит из двух кривых.

Канонический вид (*как в школе*). Ветви параболы расположены вдоль оси $0Y$:

$$x^2 - 2 \cdot p \cdot y = 0, \qquad (1.43)$$

Вершина параболы совпадает с началом координат, ветви параболы направлены вдоль положительной оси $0Y$.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \frac{x^2}{2 \cdot p}. \qquad (1.44)$$

Параллельный перенос параболы (как в ВМ)

Вид уравнения параболы (*как* в *ВМ*) при параллельном смещении вершины параболы на $\vartriangle x, \vartriangle y$ по осям $0X$ и $0Y$ относительно начала координат с учетом (1.1) имеет вид:

$$\left(y - \vartriangle y\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \left(x - \vartriangle x\right) = 0, \qquad (1.45)$$

Вершина параболы смещена от начала координат по осям $0X$ и $0Y$ на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$, ветви параболы направлены вдоль положительной оси x.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot \left(x - \vartriangle x\right)} + \vartriangle y, \qquad (1.46)$$

то есть график состоит из двух кривых.

Вид функции при параллельном смещении параболы (*как в школе*):

$$\left(x - \vartriangle x\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \left(y - \vartriangle y\right) = 0. \qquad (1.47)$$

Вершина параболы смещена $\vartriangle x, \vartriangle y$ относительно начала координат.

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x)$ и равна:

$$y = \frac{\left(x - \vartriangle x\right)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y. \qquad (1.48)$$

Поворот параболы

Вид уравнения при повороте параболы (*как в ВМ*) вокруг центра на заданный угол в локальной системе координат:

$$y^{I2} - 2 \cdot p \cdot x^I = 0, \qquad (1.49)$$

где $x^I = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha)$, $y^I = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$.

Вид уравнения при повороте параболы в глобальной системе координат с учетом (1.3) имеет вид:

$$\left(-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)\right)^2-A_3\left(x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)\right)=0. \qquad (1.50)$$

Матричная форма записи:

$$\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T XY\right]^2-A3\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T XY\right]=0, \qquad (1.51)$$

где $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, A – ширина параболы.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{\sqrt{A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha)}+\sin(\alpha)\cdot\left(A+2\cdot x\cdot\cos(\alpha)\right)}{2\cdot\cos(\alpha)^2};\\ y_2=\dfrac{-\sqrt{A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha)}+\sin(\alpha)\cdot\left(A+2\cdot x\cdot\cos(\alpha)\right)}{2\cdot\cos(\alpha)^2}, \end{cases} \qquad (1.52)$$

то есть график состоит из двух кривых.

Вид функции при повороте параболы (*как в школе*) вокруг центра на заданный угол:

$$x^{I2}-2\cdot p\cdot y^I=0, \qquad (1.53)$$

где $x^I=x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)$, $y^I=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)$.

Вид уравнения при повороте параболы в глобальной системе координат с учетом (1.3) имеет вид:

$$\left(x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)\right)^2-A_3\cdot\left(-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)\right)=0. \qquad (1.54)$$

Матричная форма записи:

$$\left(\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY\right)^2-A3\cdot\left(\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY\right)=0, \qquad (1.55)$$

где $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, $A3$ – ширина параболы.

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{A\cdot\left(A\cdot\cos(\alpha)^2 - 4\cdot x\cdot\sin(\alpha)\right)} + \cos(\alpha)\cdot\left(A - 2\cdot x\cdot\sin(\alpha)\right)}{2\cdot\sin(\alpha)^2}; \\ y_2 = -\dfrac{\sqrt{A\cdot\left(A\cdot\cos(\alpha)^2 - 4\cdot x\cdot\sin(\alpha)\right)} + x\cdot\sin(2\cdot\alpha) - A\cdot\cos(\alpha)}{2\cdot\sin(\alpha)^2}, \end{cases} \tag{1.56}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Поворот и параллельный перенос параболы

Вид функции параболы, повернутый на угол α и смещенной на по осям координат (*как в ВМ*):

$$y^{I2} - 2\cdot p\cdot x^I = 0, \tag{1.57}$$

где $x^I = (x - \triangle x)\cdot\cos(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\sin(\alpha)$, $y^I = -(x - \triangle x)\cdot\sin(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\cos(\alpha)$.

Вид уравнения при повороте параболы в глобальной системе координат с учетом (1.5) имеет вид:

$$\begin{gathered} \left(-(x - \triangle x)\cdot\sin(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\cos(\alpha)\right)^2 - \ldots \\ \ldots - A_3\cdot\left((x - \triangle x)\cdot\cos(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\sin(\alpha)\right) = 0. \end{gathered} \tag{15.8}$$

Функция для построения графика имеет вид $y = f(x, \alpha, \triangle x, \triangle y)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{A^2\sin(\alpha)^2 + 4A\cos(\alpha)\left(x - \triangle x\right)} + \dfrac{\sin(2\alpha)}{2}\left[\begin{gathered} 2\left(x - \triangle x\right) + \ldots \\ +2\triangle y\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + A\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{gathered}\right]}{2\cos(\alpha)^2}; \\ y_2 = \dfrac{-\sqrt{A^2\sin(\alpha)^2 + 4A\cos(\alpha)\left(x - \triangle x\right)} + \dfrac{\sin(2\alpha)}{2}\left[\begin{gathered} 2\left(x - \triangle x\right) + \ldots \\ +2\triangle y\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + A\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{gathered}\right]}{2\cos(\alpha)^2}, \end{cases} \tag{1.59}$$

то есть график состоит из двух кривых.

Вид функции повернутой на заданный угол вокруг центра параболы (как в школе):

$$x^{I2} - 2\cdot p\cdot y^I = 0, \tag{1.60}$$

где $x^I = (x - \triangle x)\cdot\cos(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\sin(\alpha)$, $y^I = -(x - \triangle x)\cdot\sin(\alpha) + (y - \triangle y)\cdot\cos(\alpha)$.

Вид уравнения при повороте параболы в глобальной системе координат с учетом (1.5) имеет вид:

$$\begin{gathered}\left((x-\vartriangle x)\cdot\cos(\alpha)+(y-\vartriangle y)\cdot\sin(\alpha)\right)^2-\ldots\\ \ldots-A_3\cdot\left(-(x-\vartriangle x)\cdot\sin(\alpha)+(y-\vartriangle y)\cdot\cos(\alpha)\right)=0.\end{gathered} \tag{1.61}$$

Функция для построения графика имеет вид $y=f(x)$ и равна:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{\sqrt{A^2\cos(\alpha)^2-4A\sin(\alpha)\left(x-\vartriangle x\right)}+\begin{bmatrix}\cos(\alpha)\left(A+2\vartriangle y\cos(\alpha)\right)+\ldots\\ -\sin(2\cdot\alpha)\left(x-\vartriangle x\right)\end{bmatrix}}{2\cdot\sin(\alpha)^2};\\ y_2=\dfrac{-\sqrt{A^2\cos(\alpha)^2-4A\sin(\alpha)\left(x-\vartriangle x\right)}+\begin{bmatrix}\cos(\alpha)\left(A+2\vartriangle y\cos(\alpha)\right)+\ldots\\ -\sin(2\cdot\alpha)\left(x-\vartriangle x\right)\end{bmatrix}}{2\sin(\alpha)^2}, \end{cases} \tag{1.62}$$

то есть график состоит из двух кривых.

2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ФИГУР

При выполнении примеров и заданий студент должен знать следующие разделы MathCad:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и многострочной функций и их вызов.
- Векторизация.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция ***augment()***.
- Блок ***Given-Find***.
- Символьные операции: ***simplify***, ***solve***, ***substitute***, ***collect***.
- Матричные операции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых.

Пример № 2.1. Найти точки пересечения прямой и круга.

1.Описание используемых объектов:

- Опорная прямая, проходящая через точки (x1, y1) и (x2, y2);

- Фигура 1: круг радиусом R с координатами центра x_c, y_c*;*

- Фигура 2: опорная прямая повернута на угол β *и параллельно смещена в базовую точку (*x_b, y_b*);*

2. Рассчитать координаты двух точек на фигуре 2 через которые она проходит, используя точки (x1, y1) и (x2, y2) на опорной прямой.

3. Получить аналитические выражения для построения фигур и опорной прямой.

4. Рассчитать точки пересечения двух фигур (прямой и круга). Форма представления уравнений - аналитическая, использовать блок ***Given-Find*** *при нахождении точек пересечения и численный метод – Левенберга-Марквардта.*

5. Построить графики фигур, опорные точки фигур, точки пересечения фигур, базовую точку, опорную прямую и точки, через которые она проходит.

Исходные данные

Опорная прямая: $x1=-1$, $y1=-4$, $x2=2$, $y2=2$.

Фигура 1: $R=5$, $x_c=2$, $y_c=4$.

Фигура 2: $\beta = -25^0$, $xy_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Функции для построения графиков

1.1. Опорная прямая:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

или после подстановки значений $y = 2 \cdot x - 2$.

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Фигура 1.

Аффинные преобразования при параллельном перемещении фигуры:

$$\begin{cases} x' = x - \vartriangle x; \\ y' = y - \vartriangle y. \end{cases}$$

Уравнение круга в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{R^2} + \frac{\left(y^I\right)^2}{R^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика круга:

$$y = y_c \pm \sqrt{R^2 - \left(x - x_c\right)^2},$$

или после подстановки конкретных значений $y = 4 \pm \sqrt{25 - \left(x - 2\right)^2}$.

Координаты центра круга:

$$xy_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.3. Фигура 2.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол и параллельное смещение прямой:

$$\begin{cases} x' = \left(x - \vartriangle x\right) \cdot \cos(\alpha) + \left(y - \vartriangle y\right) \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -\left(x - \vartriangle x\right) \cdot \sin(\alpha) + \left(y - \vartriangle y\right) \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y=\frac{\sin(\alpha)(x1-x2)+\cos(\alpha)(y1-y2)}{\cos(\alpha)(x1-x2)-\sin(\alpha)(y1-y2)}\left(x-\vartriangle x\right)+\vartriangle y+\frac{x1y2-x2y1}{\cos(\alpha)(x1-x2)-\sin(\alpha)(y1-y2)}.$$

Необходимо определить величины $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена (после поворота) и проходит через базовую точку (x_b, y_b).

Заданы $XY^I=\begin{pmatrix}x^I\\ y^I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x1\\ y1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}$ координаты первой точки на прямой (может быть взята любая точка на прямой) в локальной системе координат, $M\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.906 & -0.423\\ 0.423 & 0.906\end{pmatrix}$ – матрица поворота фигуры 2, $XY_b=\begin{pmatrix}x_b\\ y_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$ – базовая точка через которую проходит фигура 2. Тогда вектор $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$ определится по выражению [20]:

$$\vartriangle XY=XY_b-M\beta\cdot XY^I=\begin{pmatrix}3.597\\ 8.203\end{pmatrix}.$$

После подстановки конкретных значений уравнение фигуры 2 примет вид $y=0.794\cdot x+4.206$.

Координаты точек, через которые проходит прямая (фигура 2).

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy3$, $xy4$) на фигуре 2.

Пересчет координат первой точки ($x1$, $y1$) опорной прямой.

Точка 1 ($xy3$) на фигуре 2. Точка $xy3$ совпадает с базовой точкой, следовательно $xy3=XY_b=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$.

Пересчет координат второй точки ($x2$, $y2$) опорной прямой.

Точка 2 ($xy4$) на фигуре 2. Координаты точки $xy4$ рассчитываются по выражению [20]:

$$xy4=M\beta^{-1}\cdot xy2-\vartriangle XY=\begin{pmatrix}6.255\\ 9.17\end{pmatrix},$$

где $M\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.906 & -0.423\\ 0.423 & 0.906\end{pmatrix}$, $xy4=\begin{pmatrix}x2\\ y2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$, $\vartriangle XY=\begin{pmatrix}3.597\\ 8.203\end{pmatrix}$.

2. Рассчитать точку пересечения прямой и круга.

Задача нахождения двух точек пересечения фигур (прямой и круга) $xy_{\mathrm{int}}{}^{T}=\left[\begin{pmatrix}x1_{\mathrm{int}}\\ x2_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y1_{\mathrm{int}}\\ y2_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\right]$ сводится к решению системы двух нелинейных уравнений численно с использованием блока ***Given-Find*** в MathCAD.

Система нелинейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\left[(x-\vartriangle x)\cos(\beta)+(y-\vartriangle y)\sin(\beta)\right]-x1}{x2-x1}-\dfrac{\left[-(x-\vartriangle x)\cdot\sin(\beta)+(y-\vartriangle y)\cos(\beta)\right]-y1}{y2-y1}=0;\\ (x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2,\end{cases}$$

или после подстановки значений:

$$\begin{cases}0.232\cdot x-0.292\cdot y+1.228=0;\\ (x-2)^2+(y-4)^2=25.\end{cases}$$

Численное решение системы нелинейных уравнений методом Левенберга-Марквардта при начальных приближениях $x=\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$ нашло две точки пересечения прямой и круга с координатами

$$xy_{\mathrm{int}}{}^{T}=\left[\begin{pmatrix}x1_{\mathrm{int}}\\ x2_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y1_{\mathrm{int}}\\ y2_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-2.632\\ 4.885\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.118\\ 8.083\end{pmatrix}\right].$$

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 1–Рис. А 6, стр. 68–73.

Пример № 2.2. Найти точки пересечения прямой и круга.

1. Описание используемых объектов:

Опорная прямая, проходящая через точки (x1, y1) и (x2, y2);

Фигура 1: круг радиусом R с координатами центра x_c, y_c*;*

Фигура 2: опорная прямая повернута на угол β;

2. Рассчитать координаты двух точек на фигуре 2, через которые она проходит, используя точки (x1, y1) и (x2, y2) на опорной прямой.

3. Получить аналитические выражения для построения фигур.

4. Рассчитать точки пересечения прямой и круга, Форма представления уравнений – матричная, использовать блок ***Given-Find*** *при нахождении точек пересечения и численный метод – Левенберга-Марквардта.*

5. Построить графики фигур, опорные точки фигур, точку пересечения фигур, опорную прямую и точки, через которые она проходит.

Исходные данные

Опорная прямая: $x1 = 3$, $y1 = 1$, $x2 = -1$, $y2 = -2$.

Фигура 1: $R = 5$, $x_c = 1.5$, $y_c = 4$.

Фигура 2: $\beta = 30^0$.

1. Функции для построения графиков

1.1. Опорная прямая:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

или после подстановки значений $y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{5}{4}$.

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1.2. Фигура 1 – круг.

Аффинные преобразования при параллельном перемещении фигуры 1:

$$\begin{cases} x' = x - \vartriangle x; \\ y' = y - \vartriangle y. \end{cases}$$

Уравнение круга в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{R^2} + \frac{\left(y^I\right)^2}{R^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика круга:

$$y = y_c \pm \sqrt{R^2 - \left(x - x_c\right)^2},$$

или после подстановки конкретных значений $y = 4 \pm \sqrt{25 - \left(x - 1.5\right)^2}$.

Координаты центра круга:

$$xy_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.3. Фигура 2 – опорная прямая повернута на угол β.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \\ y' = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0\,.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y = -\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)}\cdot x + \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{\mathrm{in}(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)}$$

или после подстановки конкретных значений уравнение фигуры 2 примет вид $y = 2.34\cdot x - 2.546$.

Координаты точек, через которые проходит прямая (фигура 2).

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy3$, $xy4$) на фигуре 2.

Пересчет координат первой точки ($x1$, $y1$) опорной прямой.

Точка 1 ($xy3$) на фигуре 2.

Координаты точки $xy3$ рассчитываются по выражению [20]:

$$xy3 = M\beta^{-1}\cdot xy1 = \begin{pmatrix} 2.098 \\ 2.366 \end{pmatrix},$$

где $M\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.906 & -0.423 \\ 0.423 & 0.906 \end{pmatrix}$, $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пересчет координат второй точки ($x2$, $y2$) опорной прямой.

Точка 1 ($xy3$) на фигуре 2.

Координаты точки $xy3$ рассчитываются по выражению [20]:

$$xy4 = M\beta^{-1}\cdot xy2 = \begin{pmatrix} 0.134 \\ -2.232 \end{pmatrix},$$

где $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Рассчитать точку пересечения фигур (прямой и круга).

Для нахождения точек пересечения прямой и круга $xy1_{\mathrm{int}} = \begin{pmatrix} x1_{\mathrm{int}} \\ y1_{\mathrm{int}} \end{pmatrix}$, $xy2_{\mathrm{int}} = \begin{pmatrix} x2_{\mathrm{int}} \\ y2_{\mathrm{int}} \end{pmatrix}$ сводится к решению системы двух нелинейных уравнений численно с использованием блока ***Given-Find*** в MathCAD.

Система нелинейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \left(AB^{T} \cdot M\beta\right) \cdot xy + c = 0; \\ \left(xy - xy_c\right)^{T} \cdot AB3 \cdot \left(xy - xy_c\right) - 1 = 0, \end{cases}$$

где

$$xy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ xy_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \end{pmatrix},\ AB3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{x1 - x2} \\ \dfrac{1}{y1 - y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.333 \end{pmatrix},\ M\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix},$$

$$c = \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2} = 0.417\ .$$

Численное решение системы нелинейных уравнений методом Левенберга-Маркварда при начальных приближениях $xy1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$(для первой точки) и $xy2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$(для второй точки) нашло две точки пересечения прямой и круга с координатами $xy1_{\text{int}} = \begin{pmatrix} x1_{\text{int}} \\ y1_{\text{int}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.504 \\ 7.997 \end{pmatrix}$, $xy2_{\text{int}} = \begin{pmatrix} x2_{\text{int}} \\ y2_{i\text{nt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.689 \\ -0.934 \end{pmatrix}$.

Следует отметить, что при матричной форме задания уравнений оператор векторизации в MathCAD не может использоваться, поэтому каждая точка находится с использование отдельного блока ***Given-Find***.

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 7–Рис. А 12, стр. 74–79.

Пример № 2.3. Найти точки пересечения прямой и эллипса.

1. Исследуемые объекты:

Опорная прямая: проходит через точки (x1, y1) и (x2, y2);

Фигура 1: Эллипс (A, B – полуоси) с координатами центра x_c, y_c *повернут вокруг центра на угол* β;

Фигура 2: опорная прямая повернута на угол γ *и параллельно смещена в базовую точку* (x_b, y_b);

2. Рассчитать координаты двух точек на фигуре 2 через которые она проходит, используя точки (x1, y1) и (x2, y2) на опорной прямой.

3. Получить аналитические выражения для построения фигур.

4. Рассчитать точки пересечения прямой и эллипса, Форма представления уравнений – аналитическая, использовать блок ***Given-Find*** *при нахождении точек пересечения и численный метод – Квази-Ньютон.*

5. Построить графики фигур, опорные точки фигур, точки пересечения фигур, базовую точку, опорную прямую и точки, через которые она проходит.

Исходные данные

Опорная прямая: $x1 = -4$, $y1 = 3$, $x2 = -1$, $y2 = 2$.

Фигура 1: $A = 5$, $B = 3$, $x_c = -2$, $y_c = 4$, $\beta = 45^0$.

Фигура 2: $\gamma = 45^0$, $xy_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Функции для построения графиков

1.1. Опорная прямая:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

или после подстановки значений $y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \cdot x$.

Координаты точек, через которые проходит прямая:

точка 1 $xy1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, точка 2 $xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Фигура 1.

Аффинные преобразования при повороте и параллельном перемещении фигуры имеют вид:

$$\begin{cases} x' = (x - x_c) \cdot \cos(\beta) + (y - y_c) \cdot \sin(\beta); \\ y' = -(x - x_c) \cdot \sin(\beta) + (y - y_c) \cdot \cos(\beta). \end{cases}$$

Уравнение эллипса в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{A^2} + \frac{\left(y^I\right)^2}{B^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика эллипса:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\left(A^2 - B^2\right)\sin(2\beta)}{2\left(A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta)^2\right)}\left(x - x_c\right) + y_c + \dfrac{AB\sqrt{A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta)^2 - \left(x - x_c\right)^2}}{A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta)^2}; \\ y_2 = \dfrac{\left(A^2 - B^2\right)\sin(2\beta)}{2\left(A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta)^2\right)}\left(x - x_c\right) + y_c - \dfrac{AB\sqrt{A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta) - \left(x - x_c\right)^2}}{A^2\cos(\beta)^2 + B^2\sin(\beta)^2}, \end{cases}$$

или после подстановки конкретных значений получим:

$$\begin{cases} y1 = \dfrac{84 + 15\cdot\sqrt{13 - 4\cdot x - x^2} + 8\cdot x}{17}, \\ y2 = \dfrac{84 - 15\cdot\sqrt{13 - 4\cdot x - x^2} + 8\cdot x}{17}. \end{cases}$$

Координаты центра эллипса:

$$xy_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Фигура 2.

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол и параллельное смещение прямой:

$$\begin{cases} x' = \left(x - \vartriangle x\right)\cdot\cos(\gamma) + \left(y - \vartriangle y\right)\cdot\sin(\gamma); \\ y' = -\left(x - \vartriangle x\right)\cdot\sin(\gamma) + \left(y - \vartriangle y\right)\cdot\cos(\gamma). \end{cases}$$

Уравнение прямой в локальной системе координат:

$$\frac{x^I - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y^I - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y и упрощения получим выражение для построения графика:

$$y = \frac{\sin(\alpha)(x1 - x2) + \cos(\alpha)(y1 - y2)}{\cos(\alpha)(x1 - x2) - \sin(\alpha)(y1 - y2)}\cdot\left(x - \vartriangle x\right) + \vartriangle y + \frac{x1y2 - x2y1}{\cos(\alpha)(x1 - x2) - \sin(\alpha)(y1 - y2)}.$$

Необходимо определить величины $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена (после поворота) и проходит через базовую точку (x_b, y_b).

Заданы $XY^I = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ координаты первой точки на прямой (может быть взята любая точка на прямой) в локальной системе координат,

$M\beta = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$ – матрица поворота фигуры 2, $XY_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ – базовая точка через которую проходит фигура 2. Тогда вектор $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$ определится выражению [20]:

$$\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} = XY_b - M\beta \cdot XY^I = \begin{pmatrix} 1.95 \\ 6.707 \end{pmatrix}.$$

или после подстановки конкретных значений функции для построения графика фигуры 2 $y = 0.5 \cdot x + 6.77$.

Координаты точек, через которые проходит прямая.

Пересчитать координаты точек на опорной прямой ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) в соответствующие координаты точек ($xy3$, $xy4$) на фигуре 2.

Пересчет координат первой точки ($x1$, $y1$) опорной прямой.

Точка 1 ($xy3$) на фигуре 2. Точка $xy3$ совпадает с базовой точкой, следовательно $xy3 = XY_b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Пересчет координат второй точки ($x2$, $y2$) опорной прямой.

Точка 2 ($xy4$) на фигуре 2. Координаты точки $xy4$ рассчитываются по выражению [20]:

$$xy4 = M\beta^{-1} \cdot xy2 - \vartriangle XY = \begin{pmatrix} -0.172 \\ 7.414 \end{pmatrix},$$

где:

$$M\beta = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}, \; xy2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.95 \\ 6.707 \end{pmatrix}.$$

2. Рассчитать точку пересечения прямой и эллипса.

Нахождение точек пересечения гиперболы и эллипса $xy_{\mathrm{int}}{}^T = \left[\begin{pmatrix} x1_{\mathrm{int}} \\ x2_{\mathrm{int}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1_{\mathrm{int}} \\ y2_{\mathrm{int}} \end{pmatrix} \right]$ сводится к решению системы двух нелинейных уравнений численно с использованием блока ***Given-Find*** в MathCAD.

Система нелинейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\left[\left(x-\vartriangle x\right)\cos(\gamma)+\left(y-\vartriangle y\right)\sin(\gamma)\right]-x1}{x2-x1}-\dfrac{\left[-\left(x-\vartriangle x\right)\sin(\gamma)+\left(y-\vartriangle y\right)\cos(\gamma)\right]-y1}{y2-y1}=0; \\ \dfrac{\left[\left(x-x_c\right)\cos(\beta)+\left(y-y_c\right)\sin(\beta)\right]^2}{A^2}+\dfrac{\left[-\left(x-x_c\right)\sin(\beta)+\left(y-y_c\right)\cos(\beta)\right]^2}{B^2}-1=0, \end{cases}$$

или после подстановки значений:

$$\begin{cases} -0.472\cdot x+0.943\cdot y-7.071=0; \\ 0.076\cdot x^2+\left(-0.071\cdot y+0.587\right)\cdot x+0.076\cdot y^2-0.747\cdot y+1.08=0. \end{cases}$$

Численное решение системы нелинейных уравнений методом Квази-Ньютон при начальных приближениях $x=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ нашло две точки пересечения гиперболы и эллипса с координатами:

$$xy_{\text{int}}^{\ T}=\left[\begin{pmatrix}x1_{\text{int}}\\x2_{\text{int}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y1_{\text{int}}\\y2_{\text{int}}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-5.09\\0.901\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4.955\\7.95\end{pmatrix}\right].$$

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 13–Рис. А 21, стр. 80–88.

Пример № 2.4. Найти точки пересечения гиперболы и эллипса.

1. Исследуемые объекты:

Фигура 1: гипербола (A1, B1 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) повернута вокруг центра на угол β, с координатами центра $x1_c$, $y1_c$ совпадающими с началом координат;

Фигура 2: эллипс (A2, B2 – полуоси) с координатами центра $x2_c$, $y2_c$ повернут вокруг центра на угол γ;

2. Получить аналитические выражения для построения фигур.

3. Рассчитать точки пересечения гиперболы и эллипса, Форма представления уравнений – аналитическая, использовать блок ***Given-Find*** *при нахождении точек пересечения и численный метод – Квази-Ньютон.*

5. Построить графики фигур, опорные точки фигур, точки пересечения фигур.

Исходные данные

Фигура 1 (гипербола): $A1=3$, $B1=5$, $x_c=0$, $y_c=0$, $\beta=35^0$.

Фигура 2 (эллипс): $A2=5$, $B2=3$, $x2_c=-2$, $y2_c=4$, $\gamma=-45^0$.

1. Функции для построения графиков

1.2. Фигура 1 (гипербола).

Аффинные преобразования при повороте фигуры вокруг центра имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\beta) + y \cdot \sin(\beta); \\ y' = -x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta). \end{cases}$$

Уравнение гиперболы в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{A1^2} - \frac{\left(y^I\right)^2}{B1^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика гиперболы:

$$\begin{cases} y1 = \dfrac{\left(A1^2 + B1^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \beta) \cdot x}{2 \cdot \left(B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2\right)} - \dfrac{2 \cdot A1 \cdot B1 \cdot \sqrt{B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2 + x^2}}{2 \cdot \left(B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2\right)}; \\ y2 = \dfrac{\left(A1^2 + B1^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \beta) \cdot x}{2 \cdot \left(B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2\right)} + \dfrac{2 \cdot A1 \cdot B1 \cdot \sqrt{B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2 + x^2}}{2 \cdot \left(B1^2 \cdot \sin(\beta)^2 - A1^2 \cdot \cos(\beta)^2\right)}, \end{cases},$$

или после подстановки конкретных значений получим:

$$\begin{cases} y1 = -(7.263 \cdot x + 6.818 \cdot \sqrt{x^2 + 2.2}); \\ y2 = -7.263 \cdot x + 6.818 \cdot \sqrt{x^2 + 2.2}. \end{cases}$$

Координаты центра эллипса:

$$xy_c = \begin{pmatrix} x1_c \\ y1_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Фигура 2 (эллипс).

Аффинные преобразования при повороте фигуры на заданный угол и параллельном смещении центра эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x' = \left(x - x2_c\right) \cdot \cos(\gamma) + \left(y - y2_c\right) \cdot \sin(\gamma); \\ y' = -\left(x - x2_c\right) \cdot \sin(\gamma) + \left(y - y2_c\right) \cdot \cos(\gamma). \end{cases}$$

Уравнение эллипса в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{A2^2} + \frac{\left(y^I\right)^2}{B1^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика эллипса:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\left(A2^2 - B2^2\right)\cdot \sin(2\cdot\gamma)}{2\cdot\left(A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2\right)}\cdot\left(x - x2_c\right) + \\ + y2_c + \dfrac{A2\cdot B2\cdot\sqrt{A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2 - \left(x - x2_c\right)^2}}{A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2}; \\ y_2 = \dfrac{\left(A2^2 - B2^2\right)\cdot \sin(2\cdot\gamma)}{2\cdot\left(A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2\right)}\cdot\left(x - x2_c\right) + \\ + y2_c - \dfrac{A2\cdot B2\cdot\sqrt{A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2 - \left(x - x2_c\right)^2}}{A2^2\cdot\cos(\gamma)^2 + B2^2\cdot\sin(\gamma)^2}, \end{cases}$$

или после подстановки конкретных значений получим:

$$\begin{cases} y1 = 3.059 + 0.883\cdot\sqrt{16.995 - (x+2)^2} - 0.471\cdot x; \\ y2 = 3.059 - 0.883\cdot\sqrt{16.995 - (x+2)^2} - 0.471\cdot x. \end{cases}$$

Координаты центра эллипса:

$$xy_c = \begin{pmatrix} x2_c \\ y2_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Рассчитать точку пересечения гиперболы и эллипса.

Для нахождения точек пересечения гиперболы и эллипса $xy_{\text{int}}{}^T = \left[\begin{pmatrix} x1_{\text{int}} \\ x2_{\text{int}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y1_{\text{int}} \\ y2_{i\,\text{nt}} \end{pmatrix}\right]$ сводится к решению системы двух нелинейных уравнений численно с использованием блока ***Given-Find*** в MathCAD.

Система нелинейных уравнений имеет вид^

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x\cos(\beta) + y\sin(\beta)\right)^2}{A1^2} - \dfrac{\left(-x\sin(\beta) + y\cos(\beta)\right)^2}{B1^2} - 1 = 0; \\ \dfrac{\left(\left(x - x2_c\right)\cos(\gamma) + \left(y - y2_c\right)\sin(\lambda)\right)^2}{A2^2} + \dfrac{\left(-\left(x - x2_c\right)\sin(\gamma) + \left(y - y2_c\right)\cos(\gamma)\right)^2}{B2^2} - 1 = 0, \end{cases}$$

или после подстановки значений:

$$\begin{cases} 0.061\cdot x^2 + 0.142\cdot x\cdot y + 9.778\cdot 10^{-3}\cdot y^2 = 0; \\ 0.076\cdot x^2 + \left(0.071\cdot y + 0.018\right)\cdot x + 0.076\cdot y^2 - 0.462\cdot y - 0.058 = 0. \end{cases}$$

Численное решение системы нелинейных уравнений методом Квази-Ньютон при начальных приближениях $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ нашло две точки пересечения гиперболы и эллипса с координатами:

$$xy_{\mathrm{int}}{}^{T} = \left[\begin{pmatrix} x1_{\mathrm{int}} \\ x2_{\mathrm{int}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1_{\mathrm{int}} \\ y2_{i\,\mathrm{nt}} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} -5.09 \\ 0.901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.955 \\ 7.95 \end{pmatrix}\right].$$

Листинг программы приведен в MathCAD на Рис. А 22–Рис. А 28, стр. 89–95.

Пример № 2.5. Найти точки пересечения параболы и гиперболы.

1. Исследуемые объекты:

Фигура 1: парабола (как в ВМ), (ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0X), вершина смещена в точку $x1_p$, $y1_p$, парабола повернута вокруг вершины на угол β, A1 – ширина параболы.

Фигура 2: гипербола (A2, B2 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) повернута вокруг центра на угол γ, с координатами центра $x1_g$, $y1_g$, совпадающими с началом координат.

2. Получить аналитические выражения для построения фигур.

*3. Рассчитать точки пересечения гиперболы и эллипса, Форма представления уравнений – аналитическая, использовать блок **Given-Find** при нахождении точек пересечения и численный метод – Квази-Ньютон.*

5. Построить графики фигур, опорные точки фигур, точки пересечения фигур.

Исходные данные

Фигура 1 (парабола): $A1 = -1.5$, $x1_p = 5$, $y1_p = 3$, $\beta = 45^0$.

Фигура 2(гипербола): $A2 = 3$, $B2 = 4$, $x1_g = 0$, $y1_g = 0$, $\gamma = 45^0$.

1. Функции для построения графиков

1.1. Фигура 1 (парабола).

Аффинные преобразования при повороте фигуры 1 вокруг вершины на заданный угол и параллельном смещении центра параболы имеют вид:

$$\begin{cases} x' = \left(x - x1_p\right)\cdot\cos(\beta) + \left(y - y1_p\right)\cdot\sin(\beta); \\ y' = -\left(x - x1_p\right)\cdot\sin(\beta) + \left(y - y1_p\right)\cdot\cos(\beta). \end{cases}$$

Уравнение параболы в локальной системе координат:

$$\left(y^I\right)^2 - A1\cdot x^I = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика параболы:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{A1^2 \sin\beta^2 + 4A1\cos\beta\left(x - x1_p\right)} + \dfrac{\sin 2\beta}{2}\left[2\left(x - x1_p\right) + 2y1_p\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + A1\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right]}{2\cos\beta^2}; \\ y_2 = \dfrac{-\sqrt{A1^2 \sin\beta^2 + 4A1\cos\beta\left(x - x1_p\right)} + \dfrac{\sin 2\beta}{2}\left[2\left(x - x1_p\right) + 2y1_p\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + A1\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right]}{2\cos\beta^2}, \end{cases}$$

или после подстановки конкретных значений получим:

$$\begin{cases} y1 = -3.061 + 1.5 \cdot \sqrt{-1.886 \cdot x + 9.928} + x; \\ y2 = -3.061 - 1.5 \cdot \sqrt{-1.886 \cdot x + 9.928} + x. \end{cases}$$

Координаты центра параболы^

$$xy_p = \begin{pmatrix} x1_p \\ y1_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.2. Фигура 2 (гипербола).

Аффинные преобразования при повороте фигуры вокруг центра имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\gamma) + y \cdot \sin(\gamma); \\ y' = -x \cdot \sin(\gamma) + y \cdot \cos(\gamma). \end{cases}$$

Уравнение гиперболы в локальной системе координат:

$$\frac{\left(x^I\right)^2}{A2^2} - \frac{\left(y^I\right)^2}{B2^2} - 1 = 0.$$

После подстановки выражений аффинных преобразований вместо x^I, y^I и решения уравнения относительно y получим два выражения для построения графика гиперболы:

$$\begin{cases} y1 = \dfrac{\left(A2^2 + B2^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \gamma) \cdot x}{2 \cdot \left(B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2\right)} - \dfrac{2 \cdot A2 \cdot B2 \cdot \sqrt{B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2 + x^2}}{2 \cdot \left(B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2\right)}; \\ y2 = \dfrac{\left(A2^2 + B2^2\right) \cdot \sin(2 \cdot \gamma) \cdot x}{2 \cdot \left(B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2\right)} + \dfrac{2 \cdot A2 \cdot B2 \cdot \sqrt{B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2 + x^2}}{2 \cdot \left(B2^2 \cdot \sin(\gamma)^2 - A2^2 \cdot \cos(\gamma)^2\right)}, \end{cases},$$

или после подстановки конкретных значений получим:

$$\begin{cases} y1 = -3.573 \cdot x + 3.43 \cdot \sqrt{x^2 + 3.499}; \\ y2 = -3.573 \cdot x - 3.43 \cdot \sqrt{x^2 + 3.499}. \end{cases}$$

Координаты центра гиперболы:

$$xy_g = \begin{pmatrix} x1_g \\ y1_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассчитать точку пересечения гиперболы и параболы.

Нахождение точек пересечения гиперболы и эллипса

$$xy_{\mathrm{int}}{}^{T}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}x1_{\mathrm{int}}\\x2_{\mathrm{int}}\\x3_{\mathrm{int}}\\x4_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y1_{\mathrm{int}}\\y2_{\mathrm{int}}\\y3_{\mathrm{int}}\\y4_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

сводится к решению системы двух нелинейных уравнений численно с использованием блока ***Given-Find*** в MathCAD.

Система нелинейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}\left(-(x-x1_p)\cdot\sin(\beta)+(y-y1_p)\cdot\cos(\beta)\right)^2-A1\cdot\left((x-x1_p)\cdot\cos(\beta)+(y-y1_p)\cdot\sin(\beta)\right)=0;\\ \dfrac{\left(x\cdot\cos(\gamma)+y\cdot\sin(\gamma)\right)^2}{A2^2}-\dfrac{\left(-x\cdot\sin(\gamma)+y\cdot\cos(\gamma)\right)^2}{B2^2}-1=0,\end{cases}$$

или после подстановки значений:

$$\begin{cases}-0.938\cdot x+3.06\cdot y+0.5\cdot x^2+0.5\cdot y^2-x\cdot y-6.485=0;\\ 0.024\cdot x^2+0.174\cdot x\cdot y+0.024\cdot y^2-1=0.\end{cases}$$

Численное решение системы нелинейных уравнений методом Квази-Ньютон при начальных приближениях:

$$x=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\2\end{pmatrix}$$

нашло четыре точки пересечения параболы и гиперболы с координатами:

$$xy_{\mathrm{int}}{}^{T}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}x1_{\mathrm{int}}\\x2_{\mathrm{int}}\\x3_{\mathrm{int}}\\x4_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y1_{\mathrm{int}}\\y2_{\mathrm{int}}\\y3_{\mathrm{int}}\\y4_{\mathrm{int}}\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}4.863\\0.261\\-4.056\\1.739\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0.496\\-7.408\\-0.828\\2.546\end{pmatrix}\end{bmatrix}.$$

Листинг программы приведен в MathCAD (Рис. А 29–Рис. А 35, стр. 96–102).

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

3.1. Круг

1. Каноническое уравнение круга в аналитической форме имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}-1=0$.

2. Каноническое уравнение круга в аналитической форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}-1=0$
2. $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}+1=0$
3. $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}-1=0$
4. $\frac{(x-y_c)^2}{R^2}+\frac{(y-x_c)^2}{R^2}-1=0$
5. $\frac{(x-x_c)^2}{R}+\frac{(y-y_c)^2}{R}+1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 3.

3. Уравнение круга с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}-1=0$.

4. Уравнение круга с центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $XY^T\cdot AB\cdot XY-1=0$, $XY=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$.

5. Уравнение круга с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}-1=0$
2. $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}+1=0$
3. $\frac{(x+x_c)^2}{R^2}+\frac{(y+y_c)^2}{R^2}-1=0$
4. $\frac{(x-y_c)^2}{R^2}+\frac{(y-x_c)^2}{R^2}-1=0$
5. $\frac{(x-x_c)^2}{R}+\frac{(y-y_c)^2}{R}-1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

6. Функция для построения графика круга с центром в начале координат имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

7. Функция для построения графика круга с центром в начале координат имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y=\sqrt{R^2-x^2}$
2. $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$
3. $y=\pm\sqrt{R^2+x^2}$
4. $y=\pm\sqrt{R+x}$
5. $y=\sqrt{R^2+x^2}$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

8. Функция для построения графика круга с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y=\pm\sqrt{R^2-(x-\vartriangle x)^2}+\vartriangle y$.

9. Уравнение круга центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $XY^T \cdot AB \cdot XY + 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$
2. $XY^T \cdot AB \cdot XY + 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$
3. $XY^{-1} \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$
4. $XY^T \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$
5. $XY^T \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

10. Функция для построения графика круга с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\sqrt{R^2 - (x - \vartriangle x)^2 + \vartriangle y}$
2. $y = \pm\sqrt{R^2 + (x + \vartriangle x)^2} + \vartriangle y$
3. $y = \pm\sqrt{R^2 - (x - \vartriangle x)^2} + \vartriangle y$
4. $y = \sqrt{R^2 - (x - \vartriangle x)^2 + \vartriangle y}$
5. $y = \sqrt{R^2 + (x + \vartriangle x)^2 + \vartriangle y}$
6. Нет выражения

Ответ: 3.

11. Уравнение круга с центром, смещенным относительно начала координат на $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left(XY - \vartriangle XY\right)^T AB\left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$,

$\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

12. Уравнение круга с центром, смещенным относительно начала координат на $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left(XY + \vartriangle XY\right)^T \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$
2. $\left(XY + \vartriangle XY\right)^T \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$
3. $\left(XY + \vartriangle XY\right)^{-1} \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$
4. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^T \cdot AB3 \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$
5. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^T \cdot AB3 \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) + 1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

3.2. Эллипс

13. Каноническое уравнение эллипса в аналитической форме имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0$.

14. Каноническое уравнение эллипса в аналитической форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0$
2. $\frac{\left(x-x_c\right)^2}{A^2}+\frac{\left(y-y_c\right)^2}{B^2}+1=0$
3. $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1=0$
4. $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-1=0$
5. $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}+1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

15. Уравнение эллипса с центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $XY^T\cdot AB\cdot XY-1=0$, $XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{B^2}\end{pmatrix}$.

16. Уравнение эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{\left(x-x_c\right)^2}{A^2}+\frac{\left(y-y_c\right)^2}{B^2}-1=0$.

17. Уравнение эллипса центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $XY^T \cdot AB \cdot XY + 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} \end{pmatrix}$
2. $XY^T \cdot AB \cdot XY + 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$
3. $XY^{-1} \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
4. $XY^T \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
5. $XY^T \cdot AB \cdot XY - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

18. Уравнение эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left(XY - \vartriangle XY\right)^T AB\left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$.

19. Функция для построения графика эллипса имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}$.

20. Уравнение эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}+\frac{(y-y_c)^2}{B^2}+1=0$
2. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}-\frac{(y-y_c)^2}{B^2}+1=0$
3. $\frac{(x+x_c)^2}{A^2}+\frac{(y+y_c)^2}{B^2}-1=0$
4. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}+\frac{(y-y_c)^2}{B^2}-1=0$
5. $\frac{(x-y_c)^2}{A}+\frac{(y-x_c)^2}{B}-1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

21. Функция для построения графика эллипса имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-x^2}$
2. $y=\frac{B}{A}\sqrt{A^2-x^2}$
3. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2+x^2}$
4. $y=\pm\frac{A}{B}\sqrt{A^2+x^2}$
5. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{B^2-x^2}$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

22. Функция для построения графика эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-(x-x_c)^2}+y_c$.

23. Уравнение эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left(XY - \Delta XY\right)^{-1} \cdot AB \cdot \left(XY - \Delta XY\right) + 1 = 0,\ \Delta XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
2. $\left(XY + \Delta XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY + \Delta XY\right) - 1 = 0,\ \Delta XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
3. $\left(XY - \Delta XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \Delta XY\right) - 1 = 0,\ \Delta XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
4. $\left(XY - \Delta XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \Delta XY\right) - 1 = 0,\ \Delta XY = \begin{pmatrix} x_c & 0 \\ 0 & y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$
5. $\left(XY - \Delta XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \Delta XY\right) - 1 = 0,\ \Delta XY = \begin{pmatrix} x_c & 1 \\ 1 & y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 3.

24. Уравнение эллипса с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $$\left(\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 0\rangle}\right)^{T} \cdot XY}{A1}\right)^2 + \left(\frac{\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right)^{T} \cdot XY}{B1}\right)^2 - 1 = 0,$$

$$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

25. Уравнение эллипса с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
2. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
3. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{T}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{T}\cdot XY}{B1}\right]^2+1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
4. $\left(\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{T}\cdot XY}{A1}\right)^2-\left(\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{T}\cdot XY}{B1}\right)^2+1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
5. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{T}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{T}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0,$ $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 5.

26. Уравнение эллипса при повороте на угол α и параллельном смещении относительно начала координат на $\triangle x,\ \triangle y$, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot(XY+\triangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot(XY+\triangle XY)}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \triangle XY=\begin{pmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{pmatrix}$
2. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{B1}\right]^2+1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \triangle XY=\begin{pmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{pmatrix}$
3. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \triangle XY=\begin{pmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{pmatrix}$
4. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^T\cdot(XY-\triangle XY)}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \triangle XY=\begin{pmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{pmatrix}$
5. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot(XY-\triangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot(XY-\triangle XY)}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \triangle XY=\begin{pmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 3.

27. Функция для построения графика эллипса с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - (x - x_c)^2} - y_c$
2. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - (x - x_c)^2} + y_c$
3. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 + (x + x_c)^2} + y_c$
4. $y = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - (x - x_c)^2} + y_c$
5. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{B^2 - (x - x_c)^2} + y_c$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

28. Уравнение эллипса при повороте на угол α и параллельном смещении относительно начала координат на $\vartriangle x$, $\vartriangle y$, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left(\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot (XY - \vartriangle XY)}{A1}\right)^2 + \left(\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot (XY - \vartriangle XY)}{B1}\right)^2 - 1 = 0$,

$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vartriangle XY = \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix}$.

3.3. Гипербола

29. Уравнение гиперболы с центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$.

30. Каноническое уравнение гиперболы в аналитической форме имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-1=0$.

31. Каноническое уравнение гиперболы в аналитической форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0$
2. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}+\frac{(y-y_c)^2}{B^2}+1=0$
3. $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1=0$
4. $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-1=0$
5. $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}+1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

32. Уравнение гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}-\frac{(y-y_c)^2}{B^2}+1=0$
2. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}-\frac{(y-y_c)^2}{B^2}-1=0$
3. $\frac{(x+x_c)^2}{A^2}+\frac{(y+y_c)^2}{B^2}-1=0$
4. $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}+\frac{(y-y_c)^2}{B^2}-1=0$
5. $\frac{(x-y_c)^2}{A}-\frac{(y-x_c)^2}{B}-1=0$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

33. Уравнение гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\frac{(x-x_c)^2}{A^2}-\frac{(y-y_c)^2}{B^2}-1=0$.

34. Уравнение гиперболы центром в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $XY^T\cdot AB\cdot XY+1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}-\frac{1}{A} & 0\\ 0 & \frac{1}{B}\end{pmatrix}$
2. $XY^T\cdot AB\cdot XY+1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$
3. $XY^{-T}\cdot AB\cdot XY-1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{B^2}\end{pmatrix} XY^T\cdot AB\cdot XY-1=0$
4. $XY^T\cdot AB\cdot XY-1=0$, $XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{B^2}\end{pmatrix}$
5. $XY^T\cdot AB\cdot XY-1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{A} & 0\\ 0 & -\frac{1}{B}\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 3.

35. Функция для построения графика гиперболы имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{x^2-A^2}$.

36. Уравнение гиперболы с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot XY}{A1}\right]^2 - \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot XY}{B1}\right]^2 - 1 = 0$,

$M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

37. Функция для построения графика гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{(x - x_c)^2 - A^2} + y_c$.

38. Функция для построения графика гиперболы имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}$
2. $y = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 + x^2}$
3. $y = \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
4. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{x^2 + A^2}$
5. $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
6. Нет выражения

Ответ: 5.

39. Уравнение гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left(XY - \vartriangle XY\right)^{T} AB\left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0, \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}, XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B^2} \end{pmatrix}.$

40. Уравнение гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
2. $\left(XY + \vartriangle XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY + \vartriangle XY\right) - 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
3. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
4. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) - 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c & 0 \\ 0 & y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$
5. $\left(XY - \vartriangle XY\right)^{T} \cdot AB \cdot \left(XY - \vartriangle XY\right) + 1 = 0,\ \vartriangle XY = \begin{pmatrix} x_c & 1 \\ 1 & y_c \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

41. Уравнение гиперболы при повороте на угол α и параллельном смещении относительно начала координат на $\vartriangle x,\ \vartriangle y$, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot(XY-\vartriangle XY)}{A1}\right]^2-\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot(XY-\vartriangle XY)}{B1}\right]^2-1=0$,

$M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$.

42. Уравнение гиперболы с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0$, $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
2. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0$, $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
3. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY}{A1}\right]^2=\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY}{B1}\right]^2+1=0$, $M\alpha=\begin{pmatrix}-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
4. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY}{A1}\right]^2-\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0$, $M\alpha=\begin{pmatrix}-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

5. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 0\rangle}\right)^T \cdot XY}{A1}\right]^2 + \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 1\rangle}\right)^T \cdot XY}{B1}\right]^2 - 1 = 0,\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

43. Уравнение гиперболы при повороте на угол α и параллельном смещении относительно начала координат на $\Delta x,\ \Delta y$, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 0\rangle}\right)^T \cdot (XY + \Delta XY)}{A1}\right]^2 + \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 1\rangle}\right)^T \cdot (XY + \Delta XY)}{B1}\right]^2 - 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \Delta XY = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
2. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 0\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{A1}\right]^2 - \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 1\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{B1}\right]^2 - 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \Delta XY = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
3. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 0\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{A1}\right]^2 + \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^T\right)^{\langle 1\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{B1}\right]^2 - 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \Delta XY = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
4. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{\langle 0\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{A1}\right]^2 - \left[\frac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{\langle 1\rangle}\right)^T \cdot (XY - \Delta XY)}{B1}\right]^2 - 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \Delta XY = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

5. $\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{\langle 0\rangle}\right)^{-1}\cdot(XY-\vartriangle XY)}{A1}\right]^2+\left[\frac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{\langle 1\rangle}\right)^{-1}\cdot(XY-\vartriangle XY)}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \vartriangle XY=\begin{pmatrix}\vartriangle x\\ \vartriangle y\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

44. Функция для построения графика гиперболы с центром, смещенным в точку x_c, y_c, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{(x-x_c)^2-A^2}-y_c$
2. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-(x-x_c)^2}+y_c$
3. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{(x+x_c)^2+A^2}+y_c$
4. $y=\frac{B}{A}\sqrt{A^2-(x-x_c)^2}+y_c$
5. $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{(x-x_c)^2-A^2}+y_c$
6. Нет выражения

Ответ: 5.

3.4. Парабола

45. Каноническое уравнение параболы (как в ВМ) в аналитической форме имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y^2-2\cdot p\cdot x=0$.

46. Каноническое уравнение параболы (как в школе) в аналитической форме имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $x^2-2\cdot p\cdot y=0$.

47. Каноническое уравнение параболы (как в ВМ) в аналитической форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 1 = 0$
2. $x^2 - 2 \cdot p \cdot y = 0$
3. $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$
4. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x^2 = 0$
5. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x = 0$
6. Нет выражения

Ответ: 5.

48. Каноническое уравнение параболы (как в школе) в аналитической форме имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 1 = 0$
2. $x^2 - 2 \cdot p \cdot y = 0$
3. $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$
4. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x^2 = 0$
5. $y^2 - 2 \cdot p \cdot x = 0$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

49. Уравнение параболы (как в ВМ) с вершиной в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $XY1^T \cdot AB \cdot XY = 0$, $XY1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \cdot p \end{pmatrix}$.

50. Уравнение параболы (как в школе) с вершиной в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $XY^T \cdot AB \cdot XY1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $XY1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \cdot p \end{pmatrix}$.

51. Уравнение параболы (как в ВМ) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\left(y-y_c\right)^2-2\cdot p\cdot\left(x-x_c\right)=0$.

52. Уравнение параболы (как в школе) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $\left(x-x_c\right)^2-2\cdot p\cdot\left(y-y_c\right)=0$.

53. Уравнение параболы (как в школе) с вершиной в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $XY1^T\cdot AB\cdot XY=0,\ XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
2. $XY^T\cdot AB\cdot XY1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}A&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
3. $XY^T\cdot AB\cdot XY1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\cdot p\end{pmatrix}$
4. $XY^T\cdot AB\cdot XY1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
5. $XY^T\cdot AB\cdot XY1-1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

54. Уравнение параболы (как в школе) с вершиной в начале координат в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $XY1^T\cdot AB\cdot XY=0,\ XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
2. $XY^T\cdot AB\cdot XY1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}A&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
3. $XY^T\cdot AB\cdot XY1-1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$
4. $XY^T\cdot AB\cdot XY1=0,\ XY=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, XY1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\cdot p\end{pmatrix}$

5. $XY^T \cdot AB \cdot XY1 = 0$, $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, XY1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \cdot p \end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

55. Уравнение параболы (как в ВМ) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $(x + x_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (y + y_c) = 0$
2. $(x - x_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (y - y_c) = 0$
3. $(y - y_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (x - x_c) = 0$
4. $(y - y_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (x - x_c) = 0$
5. $(x - x_c)^2 + 2 \cdot p \cdot (y - y_c) = 0$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

56. Уравнение параболы (как в ВМ) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c в аналитической форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $(x - x_c)^2 + 2 \cdot p \cdot (y - y_c) = 0$
2. $(x - x_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (y - y_c) = 0$
3. $(x + x_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (y + y_c) = 0$
4. $(y - y_c)^2 - 2 \cdot p \cdot (x - x_c) = 0$
5. $(y - y_c)^2 + 2 \cdot p \cdot (x - x_c) = 0$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

57. Функция для построения графика параболы (как в ВМ) имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$.

58. Функция для построения графика параболы (как в школе) имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \frac{x^2}{2 \cdot p}$.

59. Функция для построения графика параболы (как в ВМ) имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$
2. $y = \frac{x^2}{2 \cdot p}$
3. $y = \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
4. $y = \frac{\left(x - \vartriangle x\right)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y$
5. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot \left(x - \vartriangle x\right)} + \vartriangle y$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

60. Функция для построения графика параболы (как в школе) имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$
2. $y = \frac{x^2}{2 \cdot p}$
3. $y = \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
4. $y = \frac{\left(x - \vartriangle x\right)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y$
5. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot \left(x - \vartriangle x\right)} + \vartriangle y$
6. Нет выражения

Ответ: 2.

61. Функция для построения графика параболы (как в ВМ) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot \left(x - x_c\right)} + y_c$.

62. Функция для построения графика параболы (как в ВМ) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$
2. $y = \dfrac{x^2}{2 \cdot p}$
3. $y = \dfrac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
4. $y = \dfrac{(x - \vartriangle x)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y$
5. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot (x - \vartriangle x)} + \vartriangle y$
6. Нет выражения

Ответ: 5.

63. Функция для построения графика параболы (как в школе) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c имеет вид ______ (вписать выражение).

Ответ: $y = \dfrac{(x - \vartriangle x)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y$.

64. Функция для построения графика параболы (как в школе) с вершиной, смещенной в точку x_c, y_c имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$
2. $y = \dfrac{x^2}{2 \cdot p}$
3. $y = \dfrac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}$
4. $y = \dfrac{(x - \vartriangle x)^2}{2 \cdot p} + \vartriangle y$
5. $y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot (x - \vartriangle x)} + \vartriangle y$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

65. Уравнение параболы (как в ВМ) с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY\right]^2 - A\cdot\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY\right]=0,\ M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},$ $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
2. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY}{A1}\right]^2+\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY}{B1}\right]^2-1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
3. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY\right]^2 + A\cdot\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY\right]=0,\ M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},$ $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
1. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T\cdot XY\right]^2 - A\cdot\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T\cdot XY\right]=0,\ M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},$ $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
5. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{-1}\cdot XY\right]^2 + A\cdot\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{-1}\cdot XY\right]+1=0,$ $M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix},\ XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
6. Нет выражения

Ответ: 1.

66. Уравнение параболы (как в школе) с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (выбрать из списка).

1. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot XY\right]^2 - A \cdot \left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot XY\right] = 0,\ M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$ $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
2. $\left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<0>}\right)^{-1} \cdot XY}{A1}\right]^2 + \left[\dfrac{\left(\left((M\alpha)^{-1}\right)^{<1>}\right)^{-1} \cdot XY}{B1}\right]^2 - 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
3. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot XY\right]^2 + A \cdot \left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot XY\right] = 0,\ M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$ $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
4. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^T \cdot XY\right]^2 - A \cdot \left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^T \cdot XY\right] = 0,\ M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$ $XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
5. $\left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<1>}\right)^{-1} \cdot XY\right]^2 + A \cdot \left[\left(\left((M\alpha)^T\right)^{<0>}\right)^{-1} \cdot XY\right] + 1 = 0,$ $M\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
6. Нет выражения

Ответ: 4.

67. Уравнение параболы (как в школе) с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left[\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 0\rangle}\right)^{T}\cdot XY\right]^{2}-A\cdot\left[\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right)^{T}\cdot XY\right]=0,$

$M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, A – ширина параболы.

68. Уравнение параболы (как в ВМ) с центром в начале координат при повороте на угол α, в матричной форме, имеет вид ______ (вписать выражение, развернуть входящие массивы).

Ответ: $\left[\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right)^{T}\cdot XY\right]^{2}-A\cdot\left[\left(\left(\left(M\alpha\right)^{T}\right)^{\langle 0\rangle}\right)^{T}\cdot XY\right]=0,$

$M\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица поворота, $XY=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ – вектор переменных, A – ширина параболы.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 4.1. Найти точку пересечения прямой и круга.

Фигура 1: прямая проходит через точки ($x_1 = -1$, $y_1 = -2$) и ($x_2 = 5$, $y_2 = 3$).Фигура 2: круг радиусом R = 6 с координатами центра $x_c = 1$, $y_c = -2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точки пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.
4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.2. Найти точку пересечения прямой и эллипса.

Фигура 1: прямая пересекает ось 0*X* в точке $x = 5$, ось 0*Y* в точке $y = 2$.

Фигура 2: эллипс (*A* = 7, *B* = 5 – параметры) повернута на угол $\beta = 40^0$ относительно центра. Центр эллипса $x_e = -2$, $y_e = 0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.
4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.3. Найти точку пересечения круга и гиперболы.

Фигура 1: гипербола (*A* = 2, *B* = 3 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0*X*) повернута на угол $\beta = 20^0$ относительно центра. Центр гиперболы $x_g = -1$, $y_g = -2$.

Фигура 2: круг радиусом R = 4 с координатами центра $x_c = 1$, $y_c = -2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.
4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.4. Найти точку пересечения круга и эллипса.

Фигура 1: эллипс (*A* = 7, *B* = 5 – параметры) повернута на угол $\beta = -30^0$ относительно центра. Центр эллипса $x_e = -2$, $y_e = -3$.

Фигура 2: круг радиусом R = 5 с координатами центра $x_c = -1$, $y_c = 2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.
4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.5. Найти точку пересечения двух кругов.

Фигура 1: круг радиусом R = 6 с центров в начале координат.

Фигура 2: круг радиусом $R1$ = 5 с координатами центра $x1_c = 3$, $y1_c = 2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.6. Найти точку пересечения эллипса и гиперболы.

Фигура 1: гипербола ($A1$ = 3, $B1$ = 3 – параметры, ветви расположены вдоль оси $0X$) повернута на угол $\beta = -45^0$ относительно центра. Центр гиперболы $x_g = -2$, $y_g = -3$.

Фигура 2: эллипс ($A2$ = 6, $B2$ = 4 – параметры) с центром в точке $x_c = -3$, $y_c = 1$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.7. Найти точку пересечения двух эллипсов.

Фигура 1: эллипс ($A1$ = 4, $B1$ = 3 – параметры) повернут на угол $\beta = 45^0$ относительно центра. Центр эллипса $x1_e = 1$, $y_c = 1$.

Фигура 2: эллипс ($A2$ = 6, $B2$ = 4 – параметры) с центром в точке $x2_e = -3$, $y2_e = 1$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.8. Найти точку пересечения эллипса и гиперболы.

Фигура 1: гипербола ($A1$ = 3, $B1$ = 5 – параметры, ветви расположены вдоль оси $0X$) повернута на угол $\beta = 35^0$ относительно центра. Центр гиперболы совпадает с началом координат.

Фигура 2: эллипс ($A2$ = 5, $B2$ = 3 – параметры) с центром в точке $x_c = -2$, $y_c = 4$, повернут вокруг центра на угол $\gamma = 55^0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.9. Найти точку пересечения эллипса и круга.

Фигура 1: круг R = 5. Центр круга $x_c = 2$, $y_c = 0$.

Фигура 2: эллипс (A2 = 5, B2 = 3 – параметры) с центром в точке $x1_c = -2$, $y1_c = 4$, повернут вокруг центра на угол $\gamma = 55^0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.10. Найти точку пересечения эллипса и параболы (как в ВМ).

Фигура 1: парабола (как в ВМ) (A1 = –1.5 – ширина параболы, ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0X) повернута на угол $\beta = 45^0$ вокруг вершины. Вершина параболы расположен в точке $x_p = 5$, $y_p = 3$.

Фигура 2: эллипс (A2 = 20, B2 = 4 – параметры) с центром в точке $x_c = -2$, $y_c = 4$, повернут вокруг центра на угол $\gamma = -90^0$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.11. Найти точку пересечения двух гипербол.

Фигура 1: гипербола (A1 = 3, B1=5 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) повернута на угол $\beta = 35^0$ относительно центра. Центр гиперболы совпадает с началом координат.

Фигура 2: гипербола (A2 = 2, B2 = 3 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) с центром в точке $x_c = 2$, $y_c = -3$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.12. Найти точку пересечения гиперболы и параболы.

Фигура 1: парабола (как в ВМ) (ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0X) повернута на угол $\beta = 45^0$ относительно центра. Вершина параболы расположена в точке с координатами $x_c = 5$, $y_c = 3$.

Фигура 2: гипербола (A2 = 3, B2 = 4 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) с центром, совпадающим с началом координат.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.13. Найти точку пересечения круга и гиперболы.

Фигура 1: круг (R = 6) с центром в точке $x_c = 1,\ y_c = -1.$

Фигура 2: гипербола ($A2$ = 2, $B2$ = 3 – параметры, ветви расположены вдоль оси 0X) с центром в точке $x1_c = 2,\ y1_c = -3,$ повернута на угол $\beta = 25^0$ относительно центра.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.14. Найти точку пересечения двух параболы.

Фигура 1: парабола (как в ВМ) (ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0X) повернута на угол $\beta = 45^0$ относительно вершины. Вершина параболы расположена в точке с координатами $x_c = -1$, $y_c = 1$.

Фигура 2: парабола (как в школе) (ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0Y) повернута на угол $\chi = -15^0$ относительно вершины. Вершина параболы расположена в точке с координатами $x1_c = -1$, $y1_c = 13$

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.15. Найти точку пересечения двух эллипсов.

Фигура 1: эллипс ($A1$ = 5, $B1$ = 3 – параметры) с центром в начале координат, повернут вокруг центра на угол $\gamma = 65^0$.

Фигура 2: эллипс ($A2$ = 5, $B2$ = 3 – параметры) с центром в точке $x1_c = -2$, $y1_c = 2$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

Задание 4.16 Найти точку пересечения прямой и параболы.

Фигура 1: прямая пересекает ось $0X$ в точке $x = 5$, ось $0Y$ в точке $y = 2$.

Фигура 2: парабола (как в ВМ) (ветви параболы направлены в сторону положительных значений оси $0X$) повернута на угол $\beta = 45^0$ относительно вершины. Вершина параболы расположена в точке с координатами $x1_c = -13$, $y1_c = -1$.

2. Получить аналитические зависимости для построения графиков фигур.

3. Рассчитать точку пересечения фигур, используя блок ***Given-Find***.

4. Построить графики фигур и опорные точки, указать точки пересечения фигур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.
2. Дьяконов В.П. MathCAD 11/12/13 в математике: Справ. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.
3. Использование MathCAD в теории матриц: Метод. указания / И.В. Кудрявцева, В.А. Рыков, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011. – 50 с.
4. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MathCAD: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
6. Практические занятия в пакете MathCAD по исследованию систем линейных алгебраических уравнений: Пособие / В.А. Рыков, С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. – 107 с.
7. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгстел К. Оптимизация в технике. В 2 кн. Кн. 1. – М.: Мир, 1986. – 349 с.
8. Хаммельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: изд. «МИР», 1975. – 534 с.
9. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков, Е.Д. Скобов. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2014. – 166 с.
10. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. II: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. – 178 с.
11. Практикум по работе в математическом пакете MathCAD: Пособие / С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, В.А. Рыков. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2015. – 84 с.
12. Некоторые главы MathCAD необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Основы программирования, массивы, графики: учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, П.С. Поцелуева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГМТУ, 2023. – 286 с.
13. Некоторые главы MathCAD необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Решение уравнений, собственные функции, символьные расчеты: учеб. пособие / Д.Э. Гуськова, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГМТУ, 2023. – 181 с.
14. Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В., Рыков В.А., Старков К.А., Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть VII. Многомерная оптимизация. Численный метод нулевого порядка. Метод наилучшей пробы. – СПб: Университет ИТМО, 2020, – 91 с.

15. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 3. Многомерная оптимизация. Аналитические методы: Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 164 с.

16. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 4. Методы оптимизации. Тесты с ответами: Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 85 с.

17. Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 5 Многомерная оптимизация. Численные методы. Метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге. Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2020. – 109 с.

18. Гуськова Д.Э., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков С.В. Некоторые главы Mathcad необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Решение уравнений, собственные функции, символьные расчеты: Учебное пособие. – СПб.: СПбГМТУ, 2023. – 266 с.

19. Кудрявцева И.В., Поцелуева П.С., Рыков С.А., Рыков С.В. Некоторые главы Mathcad необходимые для освоения дисциплины «Методы оптимизации». Основы программирования, массивы, графики: Учебное пособие. – СПб.: СПбГМТУ. 2023. – 285 с.

20. Рыков С.А., Кудрявцева И.В., Рыков С.В. Решение систем уравнений в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I. Линейные уравнения. Пересечение прямых: Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2024, – 75 с.

21. Кузнецова С.Н., Лукина М.В. Конспект лекций для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 72 с.

22. Макаров Е.М. Линейные и афинные пространства в компьютерной геометрии. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 36 с.

23. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Аналитическая геометрия евклидового пространства. Учебное пособие. I–II семестры. – Казань: Казанский университет, 2014. – 204 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ РАСЧЕТА ТОЧЕК ПРЕСЕЧЕНИЯ ФИГУР

Пример № 2.1 Найти точки пересечения прямой и круга

1. Используемые объекты:

Опорная прямая: прямая проходит через точки (x1,y1) и (x2,y2).

Фигура 1: круг радиусом R с координатами центра x_c, y_c.

Фигура 2: опорная прямая повернута на угол β и праллельно смещена и проходит через базовую точку $XY0 := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$.

2. Рассчитать координаты точек через которые проходит фигура 2 с использованием точек (x1,y1) и (x2,y2) опорной прямой.
3. Получить аналитические выражения для построения фигур.
4. Рассчитать точки пересечения фигур. Форма представления уравнений - аналитическая, использовать блок Given-Find при нахождении точек пересечения и численный метод - Левенберга- Маркварда.
5. Построить графики и опроные точки фигур, точки пересечения фигур, базовую точку и нанести опорную прямую (шриховой линией) с точками через которые она проходит.

Исходные данные

Фигура 1

$R1 := 5$ радиус круга

$x_c := 2$ $y_c := 4$ смещение центра фигуры 1 относительно начала кординат

Опорная прямая

Координаты двух точек через которые проходит опорная прямая

$x11 := -1$ $y11 := -4$ координаты первой точки (опорная прямая)

$x21 := 2$ $y21 := 2$ координаты второй точки (опорная прямая)

Фигура 2

$\beta1 := -25°$ угол поворота (в градусах) фигуры 2 отностельно порной прямой

$XY_b := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ координаты точки (базовая точка) через которую проходит фигура 2 после поворота

1. Получить аналитические выражения для построения графиков рассатриваемых объеков и опорных точек

Опорная прямая:

Аналитическое уравнение $\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Рис. А 1. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 1 (Пример № 2.1)

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \;\Bigg|\begin{array}{l}\text{solve}, y\\ \text{collect}, x\end{array} \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f0(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения гарфика опорной прямой

$$f0(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Координаты точек через которые проходит опорная прямая

$$t1(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad t2(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

1.1 Фигура 1 - круг радиуса R с центром $x1_c, y1_c$

Вид уравнения круга $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - R^2 = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$(x - x1_c)^2 + (y - y1_c)^2 - R^2 \text{ solve}, y \rightarrow \begin{pmatrix} y1_c + \sqrt{R + x - x1_c} \cdot \sqrt{R - x + x1_c} \\ y1_c - \sqrt{R + x - x1_c} \cdot \sqrt{R - x + x1_c} \end{pmatrix}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f1(x, R, x_c, y_c)$, $f2(x, R, x_c, y_c)$

$$f1(x, R, x1_c, y1_c) := y1_c + \sqrt{R + x - x1_c} \cdot \sqrt{R - x + x1_c}$$

$$f2(x, R, x1_c, y1_c) := y1_c - \sqrt{R + x - x1_c} \cdot \sqrt{R - x + x1_c}$$

функции для построения графика фигуры 1

$$XY10 := \begin{pmatrix} x1_c \\ y1_c \end{pmatrix}$$ Координаты центра круга

1.2. Фигура 2 - опоная прямая повернута на угол β и параллельно смещена и проходит через базовую точку $XY0 := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$$X1(x, y, \alpha, \Delta x, \Delta y) := (x - \Delta x) \cdot \cos(\alpha) + (y - \Delta y) \cdot \sin(\alpha)$$

$$Y1(x, y, \alpha, \Delta x, \Delta y) := -(x - \Delta x) \cdot \sin(\alpha) + (y - \Delta y) \cdot \cos(\alpha)$$

Рис. А 2. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 2 (Пример № 2.1)

Фигура 2 аналитическое описание

$$\frac{X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-x1}{x2-x1}-\frac{Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-y1}{y2-y1}=0$$

Решить уравнение относительно переменной y.

$$\frac{X1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-x1}{x2-x1}-\frac{Y1(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y)-(x1,y1)\text{ и }(x2,y2)y1}{y2-y1} \quad \begin{array}{|l} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x, \cos(\alpha), \sin(\alpha) \\ \text{collect}, \Delta x, \Delta y \end{array}$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и приведено ниже.
В MathCAD перенос выражения на следующую строку производится только по знаку "+". Необходимо нажать клавиши "Ctrl"+"Enter"

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}\right]\cdot\Delta x+\Delta y+\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}\ \cdots$$
$$+\frac{x\cdot[\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)+\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)]}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

Обозначить

$$fK(x1,y1,x2,y2,\alpha):=\frac{\cos(\alpha)\cdot(y1-y2)+\sin(\alpha)\cdot(x1-x2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

$$fK1(x1,y1,x2,y2,\alpha):=\frac{x1\cdot y2-x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1-x2)-\sin(\alpha)\cdot(y1-y2)}$$

функция для построения фигуры 2

$$f3(x,x1,y1,x2,y2,\alpha,\Delta x,\Delta y):=fK(x1,y1,x2,y2,\alpha)\cdot(x-\Delta x)+\Delta y+fK1(x1,y1,x2,y2,\alpha)$$

Необходимо определить величины $\Delta x, \Delta y$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена после поворота и проходит через точку x_b, y_b

$XY_b=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ базовая точка через которую проходит фигура 2 (задается)

$M\beta:=\begin{pmatrix}\cos(\beta1) & \sin(\beta1)\\ -\sin(\beta1) & \cos(\beta1)\end{pmatrix}$ матрица поворота фгуры 2

$XY1:=\begin{pmatrix}x11\\y11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ координаты точки фигуры 2 в локальной системе координат (отметим, что точки в координаты точек в локалной системе координат совпадают с координатами точек опорной прямой)

$\Delta XY:=XY_b-M\beta^{-1}\cdot XY1=\begin{pmatrix}3.597\\8.203\end{pmatrix}$ величины $\Delta x, \Delta y$

Рис. А 3. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 3 (Пример № 2.1)

<u>Координаты точек</u> через которые пройдет фигура 2
Первая точка ($t1\alpha\Delta$) совмещена с базовой точкой (x0,y0).
Осталось определить координаты второй точки ($t2\alpha\Delta$).

$t1\alpha\Delta := XY_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ координаты первой точки фигуры 2

$XY2 := \begin{pmatrix} x21 \\ y21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ координаты второй точки фигуры 2 в локальной системе координат

$t2\alpha\Delta := M\beta^{-1} \cdot XY2 + \Delta XY \qquad t2\alpha\Delta = \begin{pmatrix} 6.255 \\ 9.17 \end{pmatrix}$ координаты второй точки фигуры 2

<u>2. Рассчитать точку пересечения фигуры 1 и фигуры 2 с использованием аналитического описания фигур</u>

<u>2.1. Использовать блок Given-Find</u>

$x_c = 2 \qquad y_c = 4 \qquad R1 = 5$ фигура 1

$\beta 1 = -25 \cdot {}^\circ \qquad \Delta x1 := \Delta XY_0 = 3.597 \qquad \Delta y1 := \Delta XY_1 = 8.203$ фигура 2

начальные приближения

$xn := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad yn := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Given

$$(xn - x_c)^2 + (yn - y_c)^2 - R1^2 = 0$$

$$\frac{\begin{bmatrix} (xn - \Delta x1) \cdot \cos(\beta 1) \; ... \\ + (yn - \Delta y1) \cdot \sin(\beta 1) \end{bmatrix} - x11}{x21 - x11} - \frac{\begin{bmatrix} -(xn - \Delta x1) \cdot \sin(\beta 1) \; ... \\ + (yn - \Delta y1) \cdot \cos(\beta 1) \end{bmatrix} - y11}{y21 - y11} = 0$$

$XY1int := Find(xn, yn) \qquad XY1int^T = \left[\begin{pmatrix} -2.632 \\ 4.885 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.118 \\ 8.083 \end{pmatrix} \right]$

Вывод: координаты точек пересечения фигур $XY1int^T = \left[\begin{pmatrix} -2.632 \\ 4.885 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.118 \\ 8.083 \end{pmatrix} \right]$ - блочный вектор из дух элементов. Первый элемент x -координаты двух точек, второй элемент y- координаты двух точек.

Точки пересечения фигур:

$xy1_{int} := \begin{bmatrix} (XY1int_0)_0 \\ (XY1int_1)_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2.632 \\ 2.118 \end{pmatrix} \qquad xy2_{int} := \begin{bmatrix} (XY1int_0)_1 \\ (XY1int_1)_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4.885 \\ 8.083 \end{pmatrix}$

Рис. А 4. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 4 (Пример № 2.1)

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -7$ $x_{max} := 15$ $\Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $i := 0..N1$

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

$yy0 := f0(xx, x11, y11, x21, y21)$ ордината опорной прямой

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, R1, x_c, y_c)}$ $yy2 := \overrightarrow{f2(xx, R1, x_c, y_c)}$ ординаты фигуры 1

$yy3 := f3(xx, x11, y11, x21, y21, \beta 1, \Delta XY_0, \Delta XY_1)$ ординаты фигуры 2

3.2. Координы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент х-координаты двух точек, второй элемент - у - координаты двух точек.
на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Опорная прямая

$XY12 := bl\_v(t1(x11, y11), t2(x21, y21))$ $XY12^T = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

Фигура 1 (круг) $x_c = 2$ $y_c = 4$

Фигура 2 (прямая)

$XY12\Delta\beta := bl\_v(t1\alpha\Delta, t2\alpha\Delta)$ $XY12\Delta\beta^T = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 6.255 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9.17 \end{pmatrix} \right]$

Рис. А 5. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 5 (Пример № 2.1)

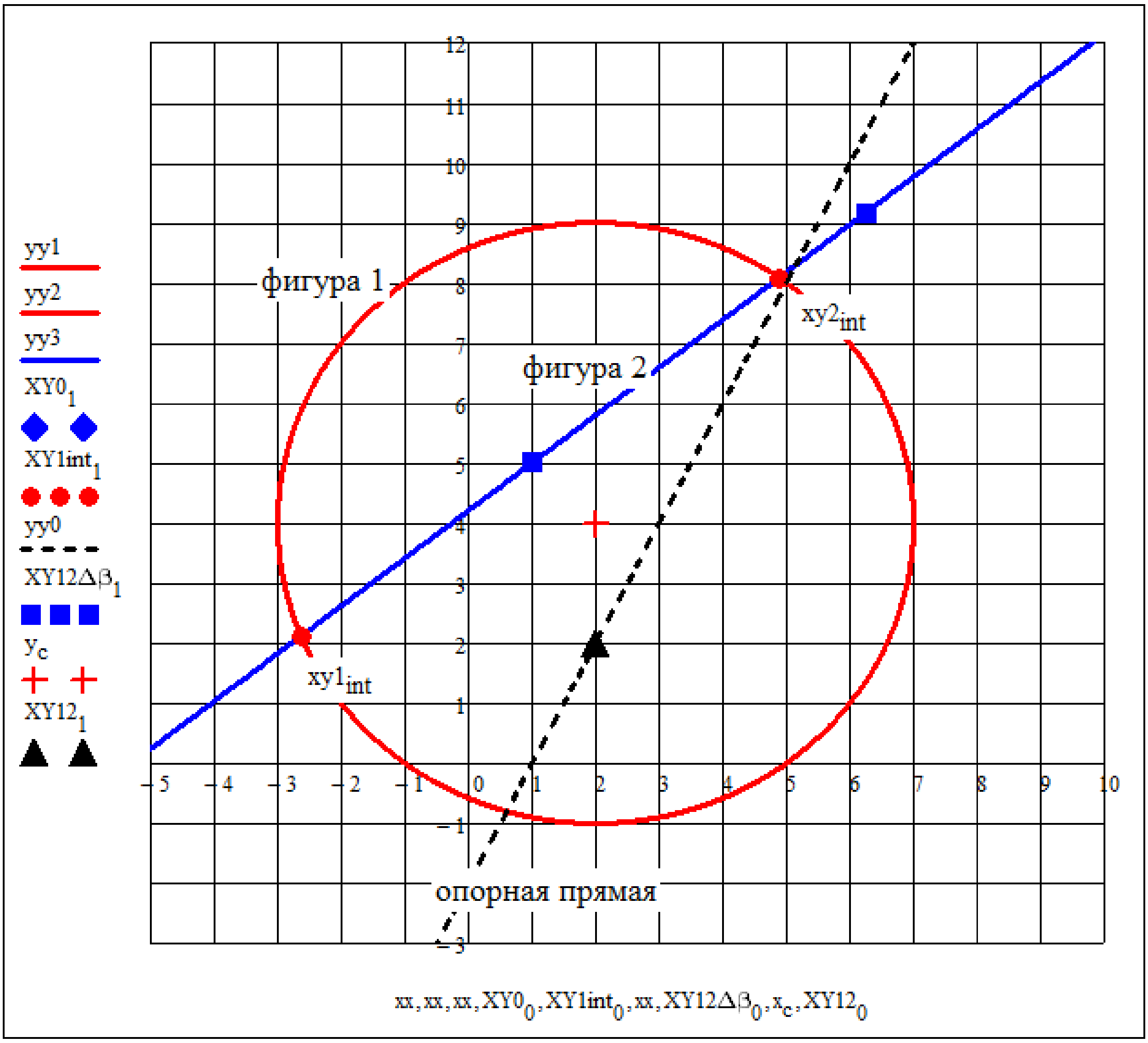


Рис. А 6. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 6 (Пример № 2.1)

Пример № 2.2. Найти точку пересечения прямой и круга
1. Используемые объекты:
Опорная прямая: прямая проходит через точки (x1,y1) и (x2,y2)
Фигура 1: круг радиусом R с координатами центра x_c, y_c;
Фигура 2: прямая повернута на угол β относительно опорной прямой;
2. Пересчитать координаты (x1,y1) и (x2,y2) опорной прямой в соответствующие координаты фигуры 2.
3. Получить аналитические выражения для построения графиков фигур.
4. Рассчитать точки пересечения фигур. Форма представления уравнений - матричная. Использовать блок Given-Find при нахождении точек пересечения и численный метод - Левенберга- Маркварда
5. Построить графики и опроные точки фигур, точки пересечения фигур, нанести опорную прямую (шриховой линией) с точками через которые она проходит.

Исходные данные

Фигура 1

$R1 := 5$ радиус круга $x_c := 1.5$ $y_c := 4$ центра круга

Опорная прямая

Координаты двух точек через которые проходит опорная прямая

$x11 := 3$ $y11 := 1$ координаты первой точки (опорная прямая)

$x21 := -1$ $y21 := -2$ координаты второй точки (опорная прямая)

Фигура 2

$\beta 1 := 30°$ угол поворота (в градусах) фигуры 2 относительно опорной прямой

1. Получить аналитические выражения для построения графиков фигур и опорных точек

Опорная прямая:

Аналитическое описание $\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y и структурировать его

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \left|\begin{array}{l} \text{solve}, y \\ \text{collect}, x \end{array}\right. \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f0(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения графика опорной прямой

$$f0(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Рис. А 7. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 1 (Пример № 2.2)

Координаты точек через которые проходит опорная прямая

$t1(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $t2(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$

1.1 Фигура 1 - круг радиуса R смещен относительно начала координат по осям X и Y на $x1_c, y1_c$

Вид уравнения круга $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - R^2 = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$(x - x1_c)^2 + (y - y1_c)^2 - R^2 \text{ solve}, y \rightarrow \begin{pmatrix} y1_c + \sqrt{R + x - x1_c}\cdot\sqrt{R - x + x1_c} \\ y1_c - \sqrt{R + x - x1_c}\cdot\sqrt{R - x + x1_c} \end{pmatrix}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f1(x, R, x_c, y_c)$, $f2(x, R, x_c, y_c)$

$f1(x, R, x1_c, y1_c) := y1_c + \sqrt{R + x - x1_c}\cdot\sqrt{R - x + x1_c}$

$f2(x, R, x1_c, y1_c) := y1_c - \sqrt{R + x - x1_c}\cdot\sqrt{R - x + x1_c}$

функция для построения графика фигуры 2

Координаты центра круга

$XY10 := \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.2. Фигура 2 - прямая повернута на угол β относительно опорной прямой.

Аффинные преобразования при повороте имеют вид

$X1(x, y, \alpha) := x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha)$ $\qquad$ $Y1(x, y, \alpha) := -x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha)$

Фигура 2 аналитическое описание $\dfrac{X1(x, y, \alpha) - x1}{x2 - x1} - \dfrac{Y1(x, y, \alpha) - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y.

$$\frac{X1(x, y, \alpha) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y1(x, y, \alpha) - y1}{y2 - y1} \left| \begin{array}{l} \text{solve}, y \\ \text{collect}, x, \sin(\alpha), \cos(\alpha) \end{array} \right. \rightarrow \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)} \right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже.

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)} \right]\cdot x - \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)}$$

Рис. А 8. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 2 (Пример № 2.2)

Скопировать полученное выражение в функцию $f3(x, x1, y1, x2, y2, \alpha)$

$$f3(x, x1, y1, x2, y2, \alpha) := \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)}\right]\cdot x - \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{\sin(\alpha)\cdot(y1 - y2) - \cos(\alpha)\cdot(x1 - x2)}$$

Координаты двух точек через которые пройдет фигура 2 (пересчет (x1,y1) и (x2,y2) координат опорной прямой)

$$M\beta := \begin{pmatrix} \cos(\beta 1) & \sin(\beta 1) \\ -\sin(\beta 1) & \cos(\beta 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \qquad XY11 := \begin{pmatrix} x11 \\ y11 \end{pmatrix}$$ координат первой точки опорной прямой

$$xy\beta 1 := M\beta^{-1}\cdot XY11 \qquad xy\beta 1 = \begin{pmatrix} 2.098 \\ 2.366 \end{pmatrix}$$ координата первой точки фигуры 2

$$XY22 := \begin{pmatrix} x21 \\ y21 \end{pmatrix}$$ координат второй точки опорной прямой

$$xy\beta 2 := M\beta^{-1}\cdot XY22 \qquad xy\beta 2 = \begin{pmatrix} 0.134 \\ -2.232 \end{pmatrix}$$ координата второй точки фигуры 2

2. Рассчитать точку пересечения фигуры 1 и фигуры с использованием аналитического описания фигур

Матричная форма, описания фигуры 1 - $(xy - \Delta XY)^T\cdot AB3\cdot(xy - \Delta XY) - 1 = 0$, где

$$AB3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix} \qquad xy := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Delta XY := \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Матричная форма, описания фигуры 2 - $\left(AB^T\cdot M\beta\right)\cdot xy + c = 0$, где $AB := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

a,b,c - коэффициенты уравнения фигуры 2 в локальной системе координат в форме $a\cdot x + b\cdot y + c = 0$, т.е. в виде уравнения опорной прямой.

Приведем уравнение фигуры 2 к указанному выше виду

$$\frac{X1(x, y, \alpha) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y1(x, y, \alpha) - y1}{y2 - y1} \ \text{collect}, x, y \ \rightarrow \left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right)\cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right)\cdot y + \frac{\ }{x1}$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже.

$$\left(-\frac{\cos(\alpha)}{x1 - x2} - \frac{\sin(\alpha)}{y1 - y2}\right)\cdot x + \left(\frac{\cos(\alpha)}{y1 - y2} - \frac{\sin(\alpha)}{x1 - x2}\right)\cdot y + \frac{x1}{x1 - x2} - \frac{y1}{y1 - y2}$$

Рис. А 9. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 3 (Пример № 2.2)

тогда в матичном виде выражение примет вид

уравнени прямой в локальной системе координат (совпадает с уравнением базовой прямой) примет вид

$$\frac{x-x1}{x2-x1}-\frac{y-y1}{y2-y1}\ \text{collect}, x, y \ \rightarrow \left(-\frac{1}{x1-x2}\right)\cdot x+\frac{y}{y1-y2}+\frac{x1}{x1-x2}-\frac{y1}{y1-y2}$$

$$a := -\frac{1}{x1-x2} \qquad b := \frac{1}{y1-y2} \qquad M\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{T} \cdot M\alpha\right]\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow -x\cdot\left(\frac{\cos(\alpha)}{x1-x2}+\frac{\sin(\alpha)}{y1-y2}\right)-y\cdot\left(\frac{\sin(\alpha)}{x1-x2}-\frac{\cos(\alpha)}{y1-y2}\right)$$

т.е. матричная форма записи фигуры 2 првильна

Исходные данные для расчета

фигура 1

$x_c = 1.5 \quad y_c = 4 \quad R1 = 5$

$$AB3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{R1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix} \qquad \Delta XY := \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

фигура 2

$$\beta 1 = 0.524$$

$$AB := \begin{pmatrix} \frac{-1}{x11-x21} \\ \frac{1}{y11-y21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.333 \end{pmatrix} \qquad c := \frac{x11}{x11-x21}-\frac{y11}{y11-y21} = 0.417 \qquad M\beta = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

Блок Given-Find

Расчет координат первой точки

$$xy_{in} := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{Given} \qquad (xy_{in}-\Delta XY)^{T}\cdot AB3\cdot(xy_{in}-\Delta XY)-1 = 0 \qquad (AB^{T}\cdot M\beta)\cdot xy_{in}+c = 0$$

$$XY1int := \text{Find}(xy_{in}) \qquad XY1int = \begin{pmatrix} 4.504 \\ 7.997 \end{pmatrix}$$ координата первой точки

Расчет координат второй точки

$$xy_{in} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Given} \qquad (xy_{in}-\Delta XY)^{T}\cdot AB3\cdot(xy_{in}-\Delta XY)-1 = 0 \qquad (AB^{T}\cdot M\beta)\cdot xy_{in}+c = 0$$

$$XY2int := \text{Find}(xy_{in}) \qquad XY2int = \begin{pmatrix} 0.689 \\ -0.934 \end{pmatrix}$$ координата второй точки

Вывод: координаты точки пересечения фигур $XY1int = \begin{pmatrix} 4.504 \\ 7.997 \end{pmatrix}$ и $XY2int = \begin{pmatrix} 0.689 \\ -0.934 \end{pmatrix}$.

Рис. А 10. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 4 (Пример № 2.2)

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, опорной прямой, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -5$ $x_{max} := 10$ $\Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $i := 0..N1$

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

$yy0 := \overrightarrow{f0(xx, x11, y11, x21, y21)}$ ордината опорной прямой

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, R1, x_c, y_c)}$ $yy2 := \overrightarrow{f2(xx, R1, x_c, y_c)}$ ординаты фигуры 1

$yyy1 := stack(yy1, yy2)$ $xxx := stack(xx, xx)$

$yy3 := f3(xx, x11, y11, x21, y21, \beta1)$ ординаты фигуры 2

3.2. Координы точек через которые проходят фигуры и опорная прямая

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент x-координаты двух точек, второй элемент - y - координаты двух точек.
на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Опорная прямая

$XY12 := bl\_v(t1(x11, y11), t2(x21, y21))$ $XY12^T = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

Фигура 1 (круг) $x_c = 1.5$ $y_c = 4$

Фигура 2 (прямая)

$XY12\beta := bl\_v(xy\beta1, xy\beta2)$ $XY12\beta^T = \left[\begin{pmatrix} 2.098 \\ 0.134 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.366 \\ -2.232 \end{pmatrix} \right]$

Рис. А 11. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 5 (Пример № 2.2)

Точки пересечения фигур

$XYint := bl\_v(XY1int, XY2int)$ $\qquad XYint^T = \left[\begin{pmatrix} 4.504 \\ 0.689 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.997 \\ -0.934 \end{pmatrix}\right]$

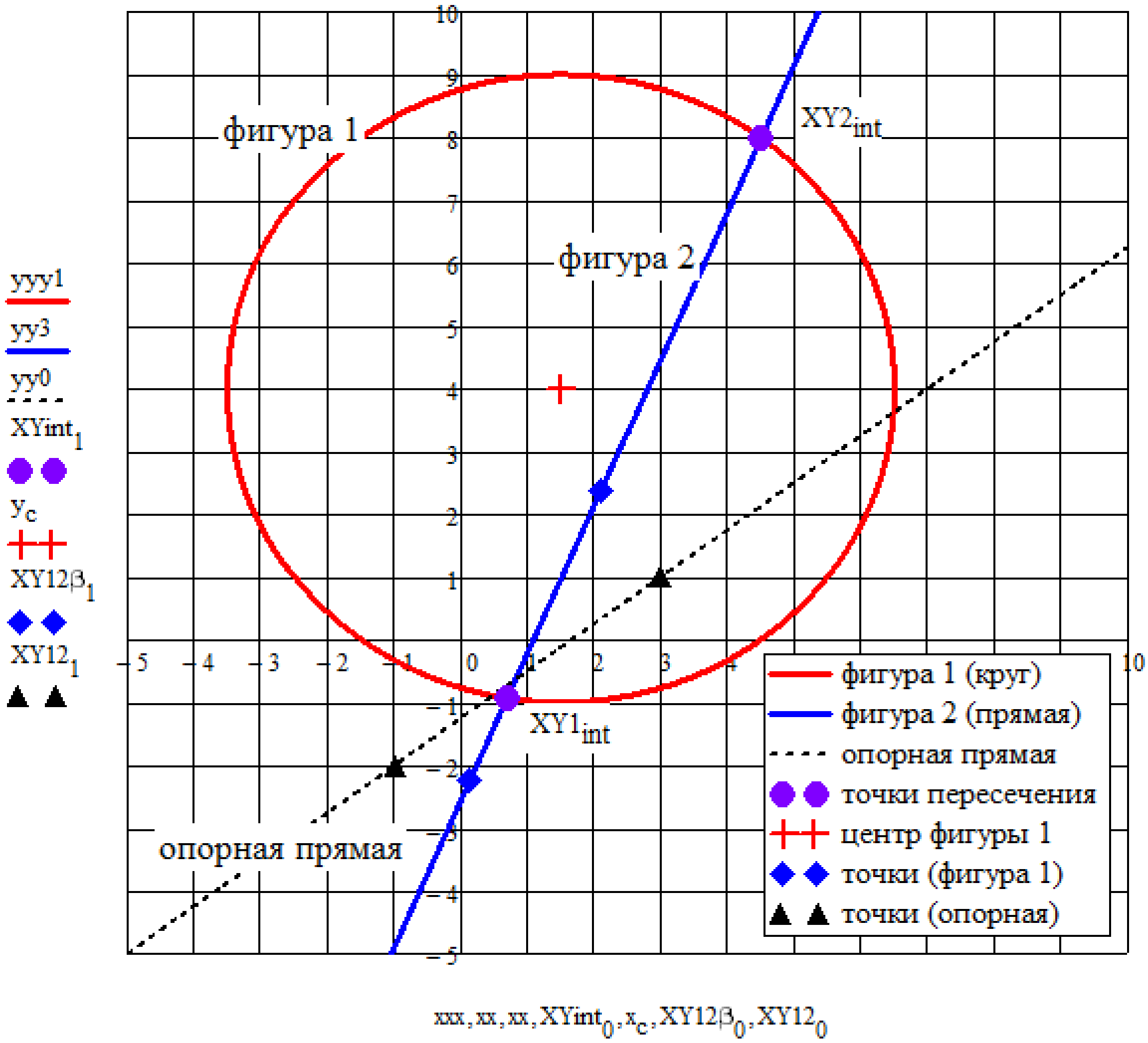


Рис. А 12. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и круга. Часть 6 (Пример № 2.2)

Пример № 2.3. Найти точку пересечения прямой и эллипса
1. Используемые фигуры.
Опорная прямая: прямая проходит через точки (x1,y1) и (x2,y2)
Фигура 1: эллипс (A, B - полуоси) с координатами центра x_c, y_c повернут вокруг цента на угол β;
Фигура 2: прямая повернута относительно опоной прямой на угол β, праллельно смещена и проходит через опорную точку $XY_b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$;
2. Получить аналитические выражения (в общем виде) для построения графиков фигур и опорной прямой.
3. Пересчитать координаты точек (x1,y1) и (x2,y2) опорной прямой в координаты точек фигуры 2.
4. Рассчитать точки пересечения фигур. Форма представления уравнений - аналитическая. Использовать блок Given-Find при нахождении точек пересечения и численный метод - Сопряженных градиентов.
5. Построить графики фигур, точки через которые они проходят, точки пересечения фигур, базовую точку и нанести опорную прямую (шриховой линией) с точками через которые она проходит.

Исходные данные

Фигура 1 Эллипс

$A1 := 5$ $B1 := 3$ размер полуосей эллипса

$x1_c := -2$ $y1_c := 4$ координаты центра эллипса

$\beta 1 := 45°$ угол поворта эллипса вокруг центра относительно оси X (положительный угол против часовой стрелки)

Опорная прямая

Координаты двух точек через которые проходит опорная прямая

$x11 := -4$ $y11 := 3$ координаты первой точки (опорная прямая)

$x21 := -1$ $y21 := 2$ координаты второй точки (опорная прямая)

Фигура 2 опорная прямая повернута на угол γ и смещена параллельно в точку $\left(XY_b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $XY_b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ координаты точки базовая точка) через которую проходит фигура 2

$\gamma 1 := 45°$ угол поворота фигуры 2 относительно оси X

Рис. А 13. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 1 (Пример № 2.3)

1. Получить аналитические выражения для построения графиков фигур и опорных точек

Опорная прямая:

Аналитическое уравнение $\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{x - x1}{x2 - x1} - \frac{y - y1}{y2 - y1} \ \Big|\ \begin{matrix} \text{solve}, y \\ \text{collect}, x \end{matrix} \rightarrow \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f0(x, x1, y1, x2, y2)$

Функция для построения гарфика опорной прямой

$$f0(x, x1, y1, x2, y2) := \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \cdot x + \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{x1 - x2}$$

Координаты точек через которые проходит опорная прямая

$$t1(x1, y1) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad t2(x2, y2) := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

1.1 Фигура 1 - эллирс (A, B - размер полуосей) с центром $x1_c, y1_c$**, повернутый на угол β относительно оси X**

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$$X1(x, y, \alpha, x_c, y_c) := (x - x_c) \cdot \cos(\alpha) + (y - y_c) \cdot \sin(\alpha)$$

$$Y1(x, y, \alpha, x_c, y_c) := -(x - x_c) \cdot \sin(\alpha) + (y - y_c) \cdot \cos(\alpha)$$

Вид уравнения эллипса $\frac{\left(X1(x, y, \alpha, x_c, y_c)\right)^2}{A^2} + \frac{\left(Y1(x, y, \alpha, x_c, y_c)\right)^2}{B^2} - 1 = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{\left(X1(x, y, \alpha, x_c, y_c)\right)^2}{A^2} + \frac{\left(Y1(x, y, \alpha, x_c, y_c)\right)^2}{B^2} - 1 \ \Bigg|\ \begin{matrix} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x, x_c, y_c, \sin(2\alpha) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \overline{A^2 + B^2 + A^2 \cdot c} \\ \\ \overline{A^2 + B^2 + A^2 \cdot c} \end{bmatrix}$$

Рис. А 14. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 2 (Пример № 2.3)

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже.

$$\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \left(-\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c \dots \\ + \dfrac{2\cdot A^2 - 2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c + \dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2 - 4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x\cdot x_c - 4\cdot x_c^2}}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\end{matrix}\right] \\ \left[\begin{matrix}\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \left(-\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c \dots \\ + \dfrac{2\cdot A^2 - 2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c - \dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2 - 4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x\cdot x_c - 4\cdot x_c^2}}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]$$

Упростить первый элемент вектора

$$\left[\begin{matrix}\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \left(-\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c \dots \\ + \dfrac{2\cdot A^2 - 2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c + \dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2 - 4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x\cdot x_c - 4\cdot x_c^2}}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\end{matrix}\right]$$

Упростить первый и второй элемент

$$\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)$$

$$A^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\ \text{simplify}\ \rightarrow 2\cdot A^2\cdot\cos(\alpha)^2 \qquad B^2 - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\ \text{simplify}\ \rightarrow 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2$$

тогда первые два элемента примут вид

$$\frac{\left(A^2 - B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x + x_c\right) \quad \text{и} \quad -\frac{\left(A^2 - B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x + x_c\right)$$

Упростить третий элемент

$$\frac{2\cdot A^2 - 2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2 + B^2 + A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha) - B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c\ \text{simplify}\ \rightarrow y_c$$

Рис. А 15. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 3 (Пример № 2.3)

Упростить четвертый элемент

$$\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c{}^2}}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}$$

Подкоренное выражение

$$4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c{}^2 \text{ factor } \rightarrow -4\cdot\left(A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+\right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже.

$$-4\cdot\left(A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+x^2-2\cdot x\cdot x_c+x_c{}^2\right)$$

$$A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2 \text{ simplify } \rightarrow A^2\cdot\left(\sin(\alpha)^2-1\right) \qquad \sin(\alpha)^2-1 \text{ simplify } \rightarrow -\cos(\alpha)^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot x_c+x_c{}^2 \text{ factor } \rightarrow \left(x-x_c\right)^2$$

в итоге подкоренное выражение примет вид

$$-4\cdot\left[-A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+\left(x-x_c\right)^2\right]$$

или

$$4\cdot\left[\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)-\left(x-x_c\right)^2\right]$$

тогда первый элемент вектора примет вид

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x-x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)-\left(x-x_c\right)^2}}{\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}$$

обозначим

$$fp(A,B,\alpha) := \left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)$$

и тогда

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x+x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Скопировать полученное выражение в функции $f1(x,A,B,\alpha,x_c,y_c)$, $f2(x,A,B,\alpha,x_c,y_c)$ (изменив знак перед последним членом)

функции для построения графика фигуры 1

$$f1(x,A,B,\alpha,x_c,y_c) := \frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x-x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Рис. А 16. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 4 (Пример № 2.3)

$$f2\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right) := \frac{\left(A^2 - B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x - x_c\right) + 1\cdot y_c - \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha) - \left(x - x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Координаты центра эллипса

$$XY_{el} := \begin{pmatrix} x1_c \\ y1_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.2. Фигура 2 - прямая повернута на угол γ относительно опорной прямой, параллельно смещена и проходит через точку $XY_b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$$X2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) := (x - \Delta x)\cdot\cos(\alpha) + (y - \Delta y)\cdot\sin(\alpha)$$

$$Y2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) := -(x - \Delta x)\cdot\sin(\alpha) + (y - \Delta y)\cdot\cos(\alpha)$$

Фигура 2 аналитическое описание

$$\frac{X2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - y1}{y2 - y1} = 0$$

Решить уравнение относительно переменной y.

$$\frac{X2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - x1}{x2 - x1} - \frac{Y2(x,y,\alpha,\Delta x,\Delta y) - y1}{y2 - y1} \left| \begin{array}{l} solve, y \\ simplify \\ collect, x, \cos(\alpha), \sin(\alpha) \\ collect, \Delta x, \Delta y \end{array} \right. \rightarrow \left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x}{\cos(\alpha)\cdot(x}\right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и приведено ниже.

В MathCAD перенос выражения на следующую строку производится только по знаку "+". Необходимо нажать клавиши "Ctrl"+"Enter"

$$\left[-\frac{\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1 - x2) - \sin(\alpha)\cdot(y1 - y2)}\right]\cdot\Delta x + \Delta y + \frac{x1\cdot y2 - x2\cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1 - x2) - \sin(\alpha)\cdot(y1 - y2)} \cdots$$
$$+ \frac{x\cdot[\sin(\alpha)\cdot(x1 - x2) + \cos(\alpha)\cdot(y1 - y2)]}{\cos(\alpha)\cdot(x1 - x2) - \sin(\alpha)\cdot(y1 - y2)}$$

Обозначить

$$fK(x1,y1,x2,y2,\alpha) := \frac{\cos(\alpha)\cdot(y1 - y2) + \sin(\alpha)\cdot(x1 - x2)}{\cos(\alpha)\cdot(x1 - x2) - \sin(\alpha)\cdot(y1 - y2)}$$

Рис. А 17. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 5 (Пример № 2.3)

$$fK1(x1, y1, x2, y2, \alpha) := \frac{x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1}{\cos(\alpha)\cdot(x1 - x2) - \sin(\alpha)\cdot(y1 - y2)}$$

функция для построения фигуры 2

$$f3(x, x1, y1, x2, y2, \alpha, \Delta x, \Delta y) := fK(x1, y1, x2, y2, \alpha)\cdot(x - \Delta x) + \Delta y + fK1(x1, y1, x2, y2, \alpha)$$

Небходимо определить величины $\Delta x, \Delta y$ исходя из положения, что прямая параллельно смещена после поворота и проходит через точку x_b, y_b

$XY_b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ базовая точка через которую проходит фигура 2 (задается)

$M\beta := \begin{pmatrix} \cos(\beta 1) & \sin(\beta 1) \\ -\sin(\beta 1) & \cos(\beta 1) \end{pmatrix}$ матрица поворота фгуры 2

$XY1 := \begin{pmatrix} x11 \\ y11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ координаты точки фигуры 2 в локальной системе координат

тогда искомая величина параллельного смещения по осям координат равна

$\Delta XY := XY_b - M\beta^{-1}\cdot XY1 = \begin{pmatrix} 1.95 \\ 6.707 \end{pmatrix}$ величины $\Delta x, \Delta y$

Координаты точек через которые пройдет фигура 2
Первая точка ($t1\alpha\Delta$) совмещена с базовой точкой (x0,y0).
Осталось определить координаты второй точки ($t2\alpha\Delta$).

$t1\alpha\Delta := XY_b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ координаты первой точки фигуры 2

$XY2 := \begin{pmatrix} x21 \\ y21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ координаты второй точки фигуры 2 в локальной системе координат

$t2\alpha\Delta := M\beta^{-1}\cdot XY2 + \Delta XY \quad t2\alpha\Delta = \begin{pmatrix} -0.172 \\ 7.414 \end{pmatrix}$ координаты второй точки фигуры 2

2. Рассчитать точку пересечения фигуры 1 и фигуры с использованием аналитического описания фигур

2.1. Использовать блок Given-Find

$x1_c = -2 \quad y1_c = 4 \quad A1 = 5 \quad B1 = 3 \quad \beta 1 = 45\cdot°$ фигура 1 (эллипс)

фигура 2 (прямая)

смещение фигуры 2 в опорную точку $XY_b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\gamma 1 = 45\cdot° \quad \Delta XY = \begin{pmatrix} 1.95 \\ 6.707 \end{pmatrix}$

Рис. А 18. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 6 (Пример № 2.3)

начальные приближения

$$xn := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad yn := \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Given

$$\frac{\left[\left(xn - x1_c\right)\cdot\cos(\beta 1) + \left(yn - y1_c\right)\cdot\sin(\beta 1)\right]^2}{A1^2} + \frac{\left[-\left(xn - x1_c\right)\cdot\sin(\beta 1) + \left(yn - y1_c\right)\cdot\cos(\beta 1)\right]^2}{B1^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\begin{bmatrix}\left(xn - \Delta XY_0\right)\cdot\cos(\gamma 1)\ \ldots \\ + \left(yn - \Delta XY_1\right)\cdot\sin(\gamma 1) - x11\end{bmatrix}}{x21 - x11} - \frac{\begin{bmatrix}-\left(xn - \Delta XY_0\right)\cdot\sin(\gamma 1)\ \ldots \\ + \left(yn - \Delta XY_1\right)\cdot\cos(\gamma 1) - y11\end{bmatrix}}{y21 - y11} = 0$$

$$XYint := Find(xn, yn) \qquad XYint^T = \left[\begin{pmatrix} -5.09 \\ 0.901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.955 \\ 7.95 \end{pmatrix}\right]$$

Для **использования** нелинейного **метода сопряженных градиентов** при решени системы нелинейных уранений необходимо:
- щелкнуть правой кнопкой мышки на функции $Find(xn, yn)$;
- из контексного списка выбрать строку Нелинейные;
- из списка выбрать строку Метод сопряженных градиентов

Вывод: координаты точки пересечения фигур $XYint^T = \left[\begin{pmatrix} -5.09 \\ 0.901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.955 \\ 7.95 \end{pmatrix}\right]$.

Точки пересечения фигур:

$$xy1_{int} := \begin{bmatrix} \left(XYint_0\right)_0 \\ \left(XYint_1\right)_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -5.09 \\ 4.955 \end{pmatrix} \qquad xy2_{int} := \begin{bmatrix} \left(XYint_0\right)_1 \\ \left(XYint_1\right)_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.901 \\ 7.95 \end{pmatrix}$$

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -15 \quad x_{max} := 5 \quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $\quad i := 0 .. N1$

Рис. А 19. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 7 (Пример № 2.3)

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

$yy0 := f0(xx, x11, y11, x21, y21)$ ордината опорной прямой

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, A1, B1, \beta 1, x1_c, y1_c)}$ $yy2 := \overrightarrow{f2(xx, A1, B1, \beta 1, x1_c, y1_c)}$ ординаты фигуры 1

$$\Delta XY = \begin{pmatrix} 1.95 \\ 6.707 \end{pmatrix}$$

$yy3 := f3(xx, x11, y11, x21, y21, \gamma 1, \Delta XY_0, \Delta XY_1)$ ординаты фигуры 2

3.2. Коордипы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент х-координаты двух точек, второй элемент - у - координаты двух точек. на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Опорная прямая

$XY12 := bl\_v(t1(x11, y11), t2(x21, y21))$ $XY12^T = \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

Фигура 1 (эллипс) $XY_{el} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Фигура 2 (прямая)

$XY12\Delta := bl\_v(t1\alpha\Delta, t2\alpha\Delta)$ $XY12\Delta^T = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -0.172 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7.414 \end{pmatrix} \right]$

Рис. А 20. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 8 (Пример № 2.3)

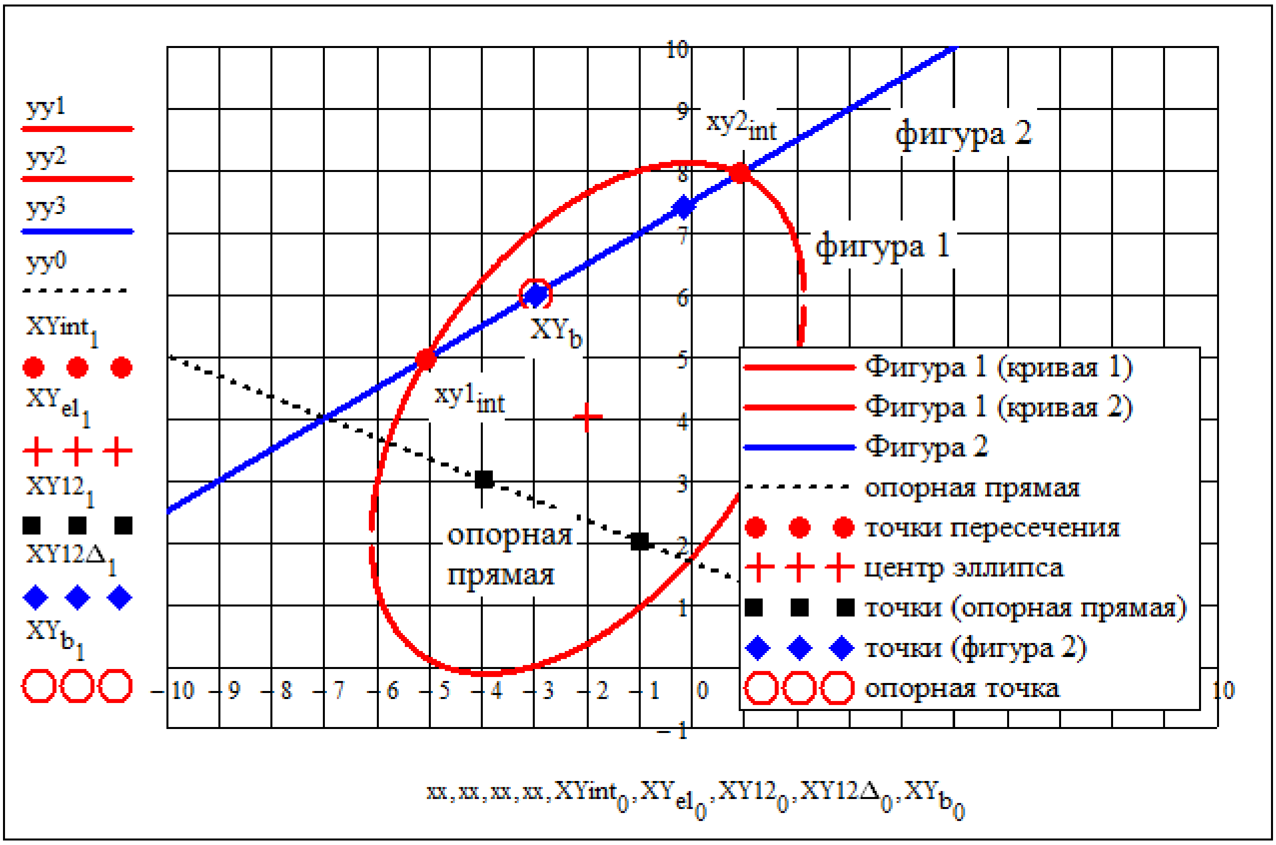


Рис. А 21. Листинг программы расчета точек пересечения прямой и эллипса. Часть 9 (Пример № 2.3)

Пример № 2.4. Найти точку пересечения эллипса и гиперболы
1. Используемые фигуры.
Фигура 1: гипербола (A1, B1 - параметры, ветви расположены вдоль оси X) повернута на угол β относительно центрта. Центр гиперболы $x1_c$, $y1_c$ совпадает с началом координат.
Фигура 2: эллипс (A2, B2- полуоси) с координатами центра $x2_c$, $y2_c$ повернут вокруг цента на угол γ;
2. Получить аналитические выражения (в общем виде) для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точки пересечения фигур. Форма представления уравнений - аналитическая. Использовать блок Given-Find при нахождении точек пересечения и численный метод - Квази- Ньютон.
4. Построить графики фигур и опорные точки, точки пересечения фигур.

Исходные данные

$A1 := 3 \quad B1 := 5 \quad \beta1 := 35°$ параметры фигуры 1 (гипербола)

Фигура 2 (эллипс)

$A2 := 5 \quad B2 := 3$ размер полуосей эллипса

$x2_C := -2 \quad y2_C := 4$ координаты центра эллипса

$\gamma1 := -45°$ угол поворта эллипса вокруг центра относительно оси X (положительный угол против часовой стрелки)

1. Получить аналитические выражения для построения графиков фигур и опорных точек

1.1 Фигура 1 - гипербола

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$$X2(x,y,\alpha) := x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha)$$

$$Y2(x,y,\alpha) := -x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha)$$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{X2(x,y,\alpha)^2}{A^2} - \frac{Y2(x,y,\alpha)^2}{B^2} - 1 \ \begin{vmatrix} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x \end{vmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \left(-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2 + \sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot x - \dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A}}{2\cdot A} \\ \left(-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2 + \sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot x + \dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A}}{2\cdot A} \end{bmatrix}$$

Рис. А 22. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 1 (Пример № 2.4)

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и приведено ниже.

$$\begin{bmatrix} \left(-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2+\sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot x-\dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2} \\ \left(-\dfrac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2+\sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot x+\dfrac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

Упростить первый элемент вектора

$$\left(-\frac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2+\sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot x-\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

Упростить первй элемент первого элемента вектора

$$\left(-\frac{\sin(2\cdot\alpha)\cdot A^2+\sin(2\cdot\alpha)\cdot B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right) \text{collect}, \sin(2\alpha), 2A^2 \rightarrow \left[-\frac{A^2+B^2}{2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+2\cdot A^2\cdot\left(\sin(\alpha)^2-1\right)}\right]\cdot\sin(2\cdot\alpha)$$

$$\sin(\alpha)^2-1 \text{ simplify } \rightarrow -\cos(\alpha)^2$$

первый элемент примет вид

$$\left(-\frac{A^2+B^2}{2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2\cdot\cos(\alpha)^2}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)$$

Подкоренное выражение второго элемента

$$4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2 \text{ collect}, 4\cdot A^2 \rightarrow \left(\sin(\alpha)^2-1\right)\cdot\left(4\cdot A^2\right)+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2$$

или

$$-4\cdot A^2\cdot\cos(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2$$

в результате первый элемент вектора примет вид

$$\left[-\frac{A^2+B^2}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}\right]\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x-\frac{2\cdot A\cdot B\cdot\sqrt{B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2+x^2}}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}$$

Выражения для построения графиков примут вид ($f1(x,A,B,\alpha)$, $f2(x,A,B,\alpha)$)

$$f1(x,A,B,\alpha) := \left[-\frac{A^2+B^2}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}\right]\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x-\frac{2\cdot A\cdot B\cdot\sqrt{B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2+x^2}}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}$$

Рис. А 23. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 2 (Пример № 2.4)

$$f2(x,A,B,\alpha) := \left[-\frac{A^2+B^2}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}\right]\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \frac{2\cdot A\cdot B\cdot\sqrt{B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + x^2}}{2\cdot\left(B^2\cdot\sin(\alpha)^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}$$

Координаты центра гиперболы

$$XY_g := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

1.1 Фигура 2 - эллипс (A, B - размер полуосей) с центром $x2_c, y2_c$, **повернутый на угол γ относительно оси X**

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат эллипса имеют вид

$$X1(x,y,\alpha,x_c,y_c) := (x-x_c)\cdot\cos(\alpha) + (y-y_c)\cdot\sin(\alpha)$$

$$Y1(x,y,\alpha,x_c,y_c) := -(x-x_c)\cdot\sin(\alpha) + (y-y_c)\cdot\cos(\alpha)$$

Вид уравнения эллипса $\frac{(X1(x,y,\alpha,x_c,y_c))^2}{A^2} + \frac{(Y1(x,y,\alpha,x_c,y_c))^2}{B^2} - 1 = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{(X1(x,y,\alpha,x_c,y_c))^2}{A^2} + \frac{(Y1(x,y,\alpha,x_c,y_c))^2}{B^2} - 1 \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{solve}, y\\ \text{simplify}\\ \text{collect}, x, x_c, y_c, \sin(2\alpha)\end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(} \\ \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(}\end{array}\right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и приведено ниже.

$$\left[\begin{array}{l}\left[\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \left(-\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c \;\ldots \right.\\ \left. + \frac{2\cdot A^2-2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c + \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c^2}}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right] \\ \left[\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \left(-\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c \;\ldots \right.\\ \left. + \frac{2\cdot A^2-2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c - \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c^2}}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right]\end{array}\right]$$

Рис. А 24. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 3 (Пример № 2.4)

Упростить первый элемент вектора

$$\left[\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x+\left(-\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x_c\ \ldots\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot A^2-2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c^2}}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\right]$$

Упростить первый и второй элемент

$$\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot\sin(2\cdot\alpha)$$

$A^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)$ simplify $\rightarrow 2\cdot A^2\cdot\cos(\alpha)^2$ $\qquad$ $B^2-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)$ simplify $\rightarrow 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2$

тогда первые два элемента примут вид

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x+x_c\right) \quad \text{и} \quad -\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x+x_c\right)$$

Упростить третий элемент

$$\frac{2\cdot A^2-2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}\cdot y_c \text{ simplify } \rightarrow y_c$$

Упростить четвертый элемент

$$\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c^2}}{A^2+B^2+A^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)-B^2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}$$

Подкоренное выражение

$$4\cdot A^2-4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2\ \ldots$$
$$+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot x^2+8\cdot x\cdot x_c-4\cdot x_c^2 \quad \text{factor} \rightarrow -4\cdot\left(A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+x^2-2\cdot x\cdot x_c+x_c^2\right)$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и прведено ниже.

$$-4\cdot\left(A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+x^2-2\cdot x\cdot x_c+x_c^2\right)$$

$A^2\cdot\sin(\alpha)^2-A^2$ simplify $\rightarrow A^2\cdot\left(\sin(\alpha)^2-1\right)$ $\qquad$ $\sin(\alpha)^2-1$ simplify $\rightarrow -\cos(\alpha)^2$

$x^2-2\cdot x\cdot x_c+x_c^2$ factor $\rightarrow \left(x-x_c\right)^2$

в итоге подкоренное выражение примет вид

$$-4\cdot\left[-A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2+\left(x-x_c\right)^2\right]$$

Рис. А 25. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 4 (Пример № 2.4)

или

$$4\cdot\left[\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)-\left(x-x_c\right)^2\right]$$

тогда первый элемент вектора примет вид

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot\left(x-x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)-\left(x-x_c\right)^2}}{\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}$$

обозначим

$$fp(A,B,\alpha):=\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)$$

и тогда

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x+x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f3\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right)$ и $f4\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right)$.

Функции для построения графика фигуры 2

$$f3\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right):=\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x-x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Функция $f4\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right)$ после небольшого преобразания примет вид

$$f4\left(x,A,B,\alpha,x_c,y_c\right):=\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x-x_c\right)+1\cdot y_c-\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Координаты центра эллипса

$$XY_{el}:=\begin{pmatrix}x2_c\\y2_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

2. Рассчитать точки пересечения фигуры 1 и фигуры 2 с использованием аналитического описания фигур и метода Квази- Ньютон

Использовать блок Given-Find

Исходные параметры фигур

$A1 = 3$ $B1 = 5$ $\beta1 = 35\cdot°$ $XY_g=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ фигура 1 (гипербола)

Рис. А 26. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 5 (Пример № 2.4)

$A2 = 5$ $\quad B2 = 3$ $\quad \gamma 1 = -45\cdot°$ $\quad XY_{el} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ фигуру 2 (прямая)

$xn := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad yn := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ начальные приближения

Given

$$\frac{(xn\cdot\cos(\beta 1) + yn\cdot\sin(\beta 1))^2}{A1^2} - \frac{(-xn\cdot\sin(\beta 1) + yn\cdot\cos(\beta 1))^2}{B1^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\left[\left(xn - x2_c\right)\cdot\cos(\gamma 1) + \left(yn - y2_c\right)\cdot\sin(\gamma 1)\right]^2}{A2^2} + \frac{\left[-\left(xn - x2_c\right)\cdot\sin(\gamma 1) + \left(yn - y2_c\right)\cdot\cos(\gamma 1)\right]^2}{B2^2} - 1 = 0$$

$XYint := Find(xn, yn)$ $\quad XYint^T = \left[\begin{pmatrix} 2.118 \\ 0.934 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.247 \\ 5.176 \end{pmatrix}\right]$

Для использования нелинейного метода Квази- Ньютон при решении системы нелинейных уранений необходимо:
- щелкнуть правой кнопкой мышки на функции $Find(xn, yn)$;
- из контексного списка выбрать строку Нелинейные;
- из списка выбрать строку Метод Квази- Ньютон

Вывод: координаты точек пересечения фигур $XYint^T = \left[\begin{pmatrix} 2.118 \\ 0.934 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.247 \\ 5.176 \end{pmatrix}\right]$

Первый элемент блочного векторы x - координаты двух точек, второй элемент - y- координаты двух точек.

Точки пересечения фигур:

$xy1_{int} := \begin{bmatrix} \left(XYint_0\right)_0 \\ \left(XYint_1\right)_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2.118 \\ 2.247 \end{pmatrix}$ $\quad xy2_{int} := \begin{bmatrix} \left(XYint_0\right)_1 \\ \left(XYint_1\right)_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.934 \\ 5.176 \end{pmatrix}$

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -10$ $\quad x_{max} := 10$ $\quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $\quad i := 0..N1$

$xx_i := x_{min} + i\cdot\Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

Рис. А 27. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 6 (Пример № 2.4)

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, A1, B1, \beta 1)}$ $\quad yy2 := \overrightarrow{f2(xx, A1, B1, \beta 1)}$ ординаты фигуры 1

$yy3 := \overrightarrow{f3(xx, A2, B2, \gamma 1, x2_c, y2_c)}$ $\quad yy4 := \overrightarrow{f4(xx, A2, B2, \gamma 1, x2_c, y2_c)}$ ординаты фигуры 2

3.2. Координы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент x-координаты двух точек, второй элемент - y - координаты двух точек.
на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Фигура 1 (гипербола) $\quad XY_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Фигура 2 (эллипс) $\quad XY_{el} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

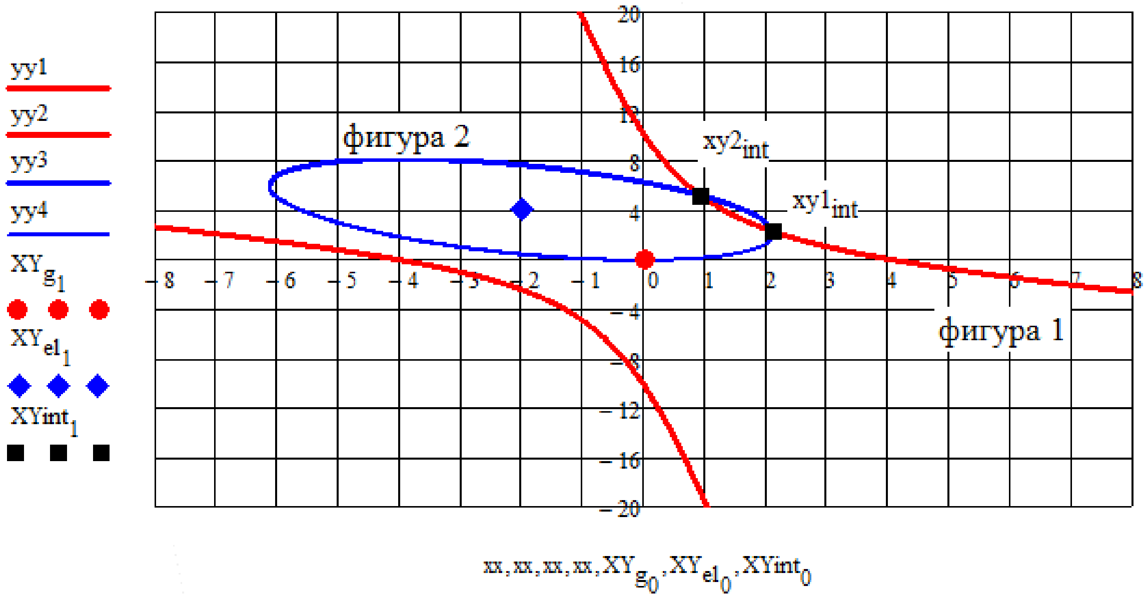


Рис. А 28. Листинг программы расчета точек пересечения эллипса и гиперболы. Часть 7 (Пример № 2.4)

Пример № 2.5. Найти точку пересечения гиперболы и параболы
1. Используемые фигуры.
Фигура 1: парабола (как в ВМ) (ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси 0Х), вершина смещена в точку x_c, y_c, парабола повернута вокруг вершины на угол β;.
Фигура 2: гипербола (А2, В2- параметры, ветви гиперболы направлены вдоль оси Х) повернута вокруг начала координат на угол γ;
2. Получить аналитические выражения (в общем виде) для построения графиков фигур.
3. Рассчитать точки пересечения фигур. Форма представления уравнений - аналитическая. Использовать блок Given-Find при нахождении точек пересечения и численный метод - Квази- Ньютон.
4. Построить графики фигур и опорные точки, точки пересечения фигур.

Исходные данные

Фигура 1 (парабола)

$A1 := -1.5$ ширина параболы

$x1_p := 5$ $\quad y1_p := 3$ вершина фигуры 1

$\beta 1 := 45\cdot°$ угол поворота параболы вокруг вершины

Фигура 2 (гипербола)

$A2 := 3$ $\quad B2 := 4$ параметры гиперболы

$x1_g := 0$ $\quad y1_g := 0$ центр гиперболы

$\gamma 1 := 45°$ угол поворта гиперболы вокруг центра (положительный угол против часовой стрелки)

1. Получить аналитические выражения для построения графиков фигур и опорных точек

1.1 Фигура 1 - парабла (ширина А)с центром $x1_c, y1_c$

Аффинные преобразования при повороте и параллельном переносе координат имеют вид

$X(x,y,\alpha,x_c,y_c) := (x - x_c)\cdot\cos(\alpha) + (y - y_c)\cdot\sin(\alpha)$

$Y(x,y,\alpha,x_c,y_c) := -(x - x_c)\cdot\sin(\alpha) + (y - y_c)\cdot\cos(\alpha)$

Вид уравнения параболы $(y - y_c)^2 - A\cdot(x - x_c) = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$(Y(x,y,\alpha,x_c,y_c))^2 - A\cdot(X(x,y,\alpha,x_c,y_c)) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x, x_c, y_c \end{array} \right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c + \\ \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c - \end{array} \right.$$

Рис. А 29. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 1 (Пример № 2.5)

Скопировать аналитическое выражение

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c + \frac{\sqrt{A^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + 4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha) - 4\cdot A\cdot x_c\cdot\cos(\alpha)} + A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2} \\ \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c - \frac{\sqrt{A^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + 4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha) - 4\cdot A\cdot x_c\cdot\cos(\alpha)} - A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

Скорировать числить первый элемента вектора

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c + \frac{\sqrt{A^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + 4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha) - 4\cdot A\cdot x_c\cdot\cos(\alpha)} + A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2}$$

упростить подкоренное выражение

$$A^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + 4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha) - 4\cdot A\cdot x_c\cdot\cos(\alpha)$$

$$A^2 - A^2\cdot\cos(\alpha)^2 \text{ simplify } \rightarrow A^2\cdot\sin(\alpha)^2$$

$$4\cdot A\cdot x\cdot\cos(\alpha) - 4\cdot A\cdot x_c\cdot\cos(\alpha) \text{ simplify } \rightarrow 4\cdot A\cdot\cos(\alpha)\cdot\left(x - x_c\right)$$

итог

$$A\cdot\sqrt{\sin(\alpha)^2 + \frac{4\cdot\cos(\alpha)}{A}\cdot\left(x - x_c\right)}$$

в результате первый крмпонент

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot x_c + y_c + \frac{A\cdot\sqrt{\sin(\alpha)^2 + \frac{4\cdot\cos(\alpha)}{A}\cdot\left(x - x_c\right)} + A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2}$$

Скопировать полученное выражение в функцию $f1(x, A, \alpha, x_c, y_c)$, $f2(x, A, \alpha, x_c, y_c)$ (в $f2(x, A, \alpha, x_c, y_c)$ поменять знак перед вторым элементом)

$$f1(x, A, \alpha, x_c, y_c) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\left(x - x_c\right) + y_c - \frac{A\cdot\sqrt{\sin(\alpha)^2 + \frac{4\cdot\cos(\alpha)}{A}\cdot\left(x - x_c\right)} - A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2}$$

$$f2(x, A, \alpha, x_c, y_c) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\left(x - x_c\right) + y_c + \frac{A\cdot\sqrt{\sin(\alpha)^2 + \frac{4\cdot\cos(\alpha)}{A}\cdot\left(x - x_c\right)} + A\cdot\sin(\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)^2}$$

Рис. А 30. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 2 (Пример № 2.5)

Координаты вершины параболы

$$XY_p := \begin{pmatrix} x1_p \\ y1_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.1 Фигура 2 - гипербла (A, B - параметры) повернута на угол γ вокруг центра

Аффинные преобразования при повороте координат имеют вид

$$X1(x,y,\alpha) := x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha)$$

$$Y1(x,y,\alpha) := -x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha)$$

Вид уравнения эллипса $\frac{(X1(x,y,\alpha))^2}{A^2} - \frac{(Y1(x,y,\alpha))^2}{B^2} - 1 = 0$

Решить уравнение относительно переменной y

$$\frac{(X1(x,y,\alpha))^2}{A^2} - \frac{(Y1(x,y,\alpha))^2}{B^2} - 1 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{solve}, y \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x, \sin(2\alpha) \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right) \\ \left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right) \end{array}\right.$$

Аналитическое выражение очень длинное, поэтому скопировано и приведено ниже.

$$\left[\begin{array}{l} \left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x - \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot A^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2} \\ \left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x + \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot A^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2} \end{array}\right]$$

Упростить первый элемент вектора

$$\left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x - \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 4\cdot A^2 + 4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2 + 4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

Упростить первую часть первого элемента вектора

$$\left(-\frac{A^2 + B^2}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2 - 2\cdot A^2 + 2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot x$$

Рис. А 31. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 3 (Пример № 2.5)

упростить знаменатель

$$-\left(2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)\ \text{simplify}\ \rightarrow 2\cdot A^2\cdot\cos(\alpha)^2+2\cdot B^2\cdot\cos(\alpha)^2-2\cdot B^2$$

$$2\cdot B^2\cdot\cos(\alpha)^2-2\cdot B^2\ \text{simplify}\ \rightarrow 2\cdot B^2\cdot\left(\cos(\alpha)^2-1\right)\qquad \cos(\alpha)^2-1\ \text{simplify}\ \rightarrow -\sin(\alpha)^2$$

тогда первый элемента примут вид

$$\frac{\left(A^2+B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot x$$

Упростить вторую часть первого элемента

$$\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2}}{2\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-2\cdot A^2+2\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

Подкоренное выражение

$$4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2+4\cdot B^2\cdot\sin(\alpha)^2+4\cdot x^2$$

Упростить

$$4\cdot A^2\cdot\sin(\alpha)^2-4\cdot A^2\ \text{simplify}\ \rightarrow 4\cdot A^2\cdot\left(\sin(\alpha)^2-1\right)\qquad \sin(\alpha)^2-1\ \text{simplify}\ \rightarrow -\cos(\alpha)^2$$

тогда

$$\frac{2\cdot A\cdot B\cdot\sqrt{-A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2+x^2}}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}$$

тогда первый элемент вектора примет вид

$$\frac{\left(A^2+B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)}\cdot x-\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{-A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2+x^2}}{A^2\cdot\cos(\alpha)^2-B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

обозначим

$$fp(A,B,\alpha):=\left(A^2\cdot\cos(\alpha)^2+B^2\cdot\sin(\alpha)^2\right)$$

и тогда

$$\frac{\left(A^2-B^2\right)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot fp(A,B,\alpha)}\cdot\left(x+x_c\right)+y_c+\frac{A\cdot B\cdot\sqrt{fp(A,B,\alpha)-\left(x-x_c\right)^2}}{fp(A,B,\alpha)}$$

Рис. А 32. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 4 (Пример № 2.5)

Скопировать полученное выражение в функцию $f3(x, A, B, \alpha)$, $f4(x, A, B, \alpha)$ (в $f4(x, A, B, \alpha)$ поменять знак перед вторым элеменом)

функции для построения графика фигуры 2 (гиперболы)

$$f3(x, A, B, \alpha) := \frac{(A^2 + B^2)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot(A^2\cdot\cos(\alpha)^2 - B^2\cdot\sin(\alpha)^2)}\cdot x - \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{-A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + B^2\cdot\sin(\alpha)^2 + x^2}}{A^2\cdot\cos(\alpha)^2 - B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

$$f4(x, A, B, \alpha) := \frac{(A^2 + B^2)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot(A^2\cdot\cos(\alpha)^2 - B^2\cdot\sin(\alpha)^2)}\cdot x + \frac{A\cdot B\cdot\sqrt{-A^2\cdot\cos(\alpha)^2 + B^2\cdot\sin(\alpha)^2 + x^2}}{A^2\cdot\cos(\alpha)^2 - B^2\cdot\sin(\alpha)^2}$$

Координаты центра гиперболы

$$XY_g := \begin{pmatrix} x1_g \\ y1_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Рассчитать точки пересечения фигуры 1 и фигуры 2 с использованием аналитического описания фигур и метода Квази- Ньютон

Использовать блок Given-Find

Исходные параметры фигур

$A1 = -1.5$ $\quad \beta1 = 45\cdot°$ $\quad XY_p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ фигура 1 (парабола)

$A2 = 3$ $\quad B2 = 4$ $\quad \gamma1 = 45\cdot°$ $\quad XY_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ фигуру 2 (гипербола)

начальные приближения

$$xn := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad yn := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Given

$$\left[-(xn - x1_p)\cdot\sin(\beta1) + (yn - y1_p)\cdot\cos(\beta1)\right]^2 - A1\cdot\left[(xn - x1_p)\cdot\cos(\beta1) + (yn - y1_p)\cdot\sin(\beta1)\right] = 0$$

$$\frac{(xn\cdot\cos(\gamma1) + yn\cdot\sin(\gamma1))^2}{A2^2} - \frac{(-xn\cdot\sin(\gamma1) + yn\cdot\cos(\gamma1))^2}{B2^2} - 1 = 0$$

Рис. А 33. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 5 (Пример № 2.5)

$XYint := Find(xn, yn)$ $\qquad XYint^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 4.863 \\ 0.261 \\ -4.056 \\ 1.739 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.496 \\ -7.408 \\ -0.828 \\ 2.546 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

Для использования нелинейного метода Квази- Ньютон при решении системы нелинейных уранений необходимо:
- щелкнуть правой кнопкой мышки на функции $Find(xn, yn)$;
- из контексного списка выбрать строку Нелинейные;
- из списка выбрать строку Метод Квази- Ньютон

Вывод: координаты точек пересечения фигур $XYint^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 4.863 \\ 0.261 \\ -4.056 \\ 1.739 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.496 \\ -7.408 \\ -0.828 \\ 2.546 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

Первый элемент блочного векторы x - координаты двух точек, второй элемент - y- координаты двух точек.

Точки пересечения фигур:

$xy1_{int} := \begin{bmatrix} (XYint_0)_0 \\ (XYint_1)_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4.863 \\ 0.496 \end{pmatrix}$ $\qquad xy2_{int} := \begin{bmatrix} (XYint_0)_1 \\ (XYint_1)_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.261 \\ -7.408 \end{pmatrix}$

$xy3_{int} := \begin{bmatrix} (XYint_0)_2 \\ (XYint_1)_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4.056 \\ -0.828 \end{pmatrix}$ $\qquad xy4_{int} := \begin{bmatrix} (XYint_0)_3 \\ (XYint_1)_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1.739 \\ 2.546 \end{pmatrix}$

3. Расчет значений функций, описывающих графики фигур 1 и 2, координат точек через которые они проходят

3.1. Расчет векторов для построения **графиков фигур**

$x_{min} := -10 \qquad x_{max} := 10 \quad \Delta x := 0.01$ минимум, максимум и шаг расчета

$N1 := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ количество точек расчета $\quad i := 0 .. N1$

$xx_i := x_{min} + i \cdot \Delta x$ вектор абсцисс графиков для всех фигур

Рис. А 34. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 6 (Пример № 2.5)

$yy1 := \overrightarrow{f1(xx, A1, \beta1, x1_p, y1_p)}$ $yy2 := \overrightarrow{f2(xx, A1, \beta1, x1_p, y1_p)}$ ординаты фигуры 1

$yy3 := \overrightarrow{f3(xx, A2, B2, \gamma1)}$ $yy4 := \overrightarrow{f4(xx, A2, B2, \gamma1)}$ ординаты фигуры 2

3.2. Координы точек через которые проходят фигуры

Функция для создания блочного вектора из двух элементов: первый элемент x-координаты двух точек, второй элемент - y - координаты двух точек. на входе: координаты двух точек в виде двух отдельных векторов

$$bl\_v(f1, f2) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow \begin{pmatrix} f1_0 \\ f2_0 \end{pmatrix} \\ vy \leftarrow \begin{pmatrix} f1_1 \\ f2_1 \end{pmatrix} \\ vxy \leftarrow \begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Фигура 1 (парабола) $XY_p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Фигура 2 гипербола $XY_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

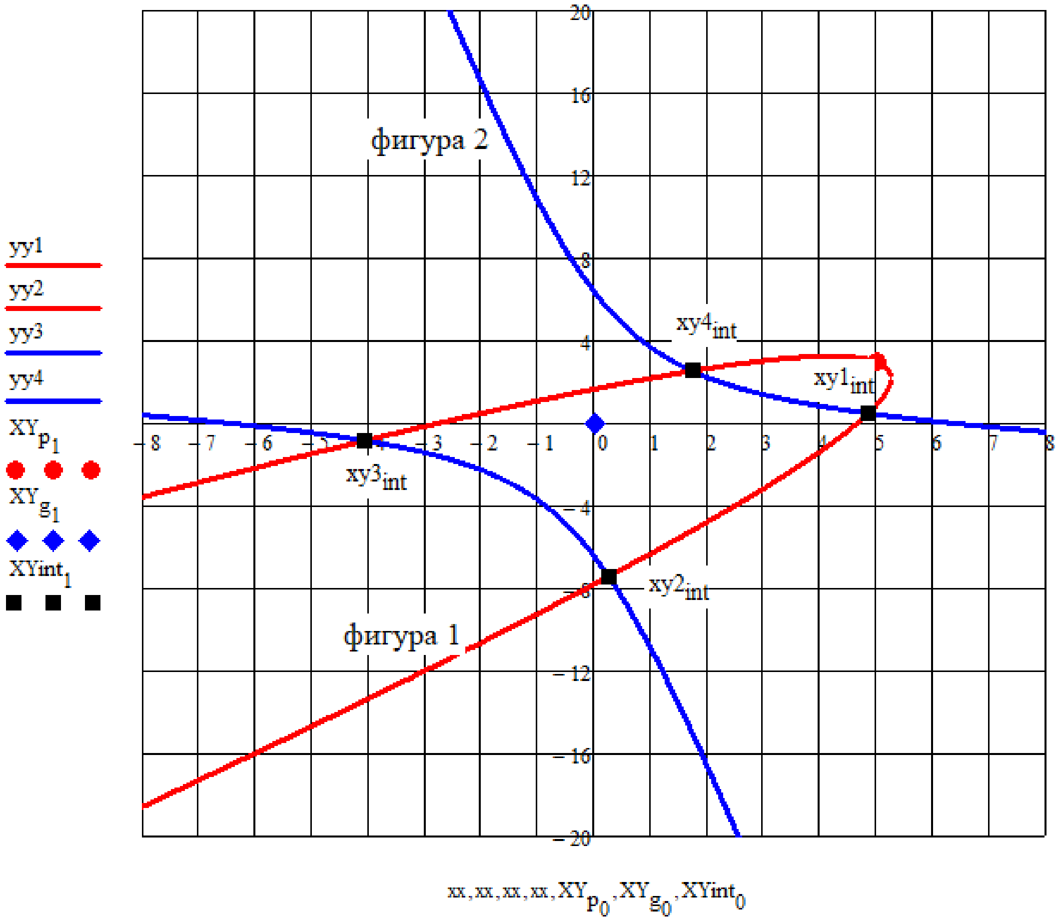


Рис. А 35. Листинг программы расчета точек пересечения параболы и гиперболы. Часть 7 (Пример № 2.5)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СПИСОК ПРИМЕРОВ

Рыков Сергей Алексеевич
Кудрявцева Ирина Владимировна
Рыков Сергей Владимирович
Пеленко Валерий Викторович

Решение систем уравнений в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. II. Нелинейные уравнения. Пересечение фигур

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А