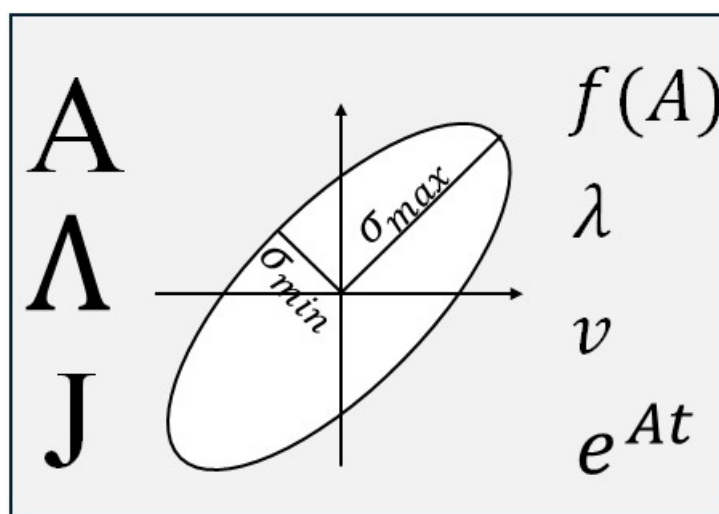




Н.А. Дударенко, М.М. Синетова

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА.
ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ. ЧАСТЬ I**



Санкт-Петербург
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Н.А. Дударенко, М.М. Синетова

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА.
ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ. ЧАСТЬ I**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 15.03.06, 27.03.03, 27.03.04
в качестве Учебно-методического пособия
для реализации основных профессиональных образовательных программ
высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2025

Дударенко Н.А., Синетова М.М., Математические основы системного анализа. Практикум для выполнения практических работ. Часть I – СПб: Университет ИТМО, 2025. – 47 с.

Рецензент(ы):

Ведяков Алексей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") факультета систем управления и робототехники, Университет ИТМО.

В пособии приводятся рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «Математические основы системного анализа». Работы направлены на освоение математического аппарата, необходимого для построения и анализа модельных представлений динамических систем.

Каждая практическая работа содержит основные теоретические сведения по теме работы, пример выполнения работы и варианты заданий. По результатам выполнения каждой работы предоставляется отчет, который оценивается в соответствии с принятой системой оценивания. Отчет должен быть оформлен в соответствии с требованиями университета, содержать результаты выполнения всех этапов работы и сдан до начала промежуточной аттестации. В этом случае задание оценивается максимальным количеством баллов. Основаниями для снижения количества баллов являются: ошибки в работе, небрежное оформление отчета, а также сдача отчета после указанного срока.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 15.03.06 – «Мехатроника и робототехника», 27.03.03 – «Системный анализ и управление», 27.03.04 – «Управление в технических системах», и может быть рекомендовано аспирантам и молодым специалистам, научная деятельность которых связана с исследованием и разработкой систем автоматического управления.



ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2025
© Дударенко Н.А., Синетова М.М., 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Практическая работа №1.	
Матричные инварианты и неинварианты подобных матриц	5
Практическая работа №2.	
Построение матриц приведения подобия.....	14
Практическая работа №3.	
Жорданова форма матрицы.....	21
Практическая работа №4.	
Матричные функции от матрицы и их свойства.....	29
Практическая работа №5.	
Вычисление матричной экспоненты	34
Приложение 1. Преобразования Лапласа типовых функций	43
Приложение 2. Пример оформления титульного листа.....	44
Список литературы	45

ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом пособии излагаются теоретические положения, подкрепленные примерами и вопросами для самоконтроля, а также варианты заданий для выполнения практических работ по основным разделам дисциплины «Математические основы системного анализа» для направлений подготовки бакалавров «Системный анализ и управление», «Управление в технических системах», «Мехатроника и робототехника».

Целью практических работ является освоение математического аппарата, необходимого для построения и анализа модельных представлений динамических систем. В процессе выполнения работ предусмотрено получение обучающимися навыков вычисления матричных инвариантов и неинвариантов подобных матриц, построения матриц приведения подобия, построения канонических форм матрицы, в том числе жордановой формы матрицы, изучение свойств матричных функций от матрицы, а также методов вычисления матричной экспоненты на основе обратного преобразования Лапласа и методом диагонализации. Приобретенные навыки позволят сформировать математическую базу, необходимую для дальнейшего освоения курсов по системному анализу, теории автоматического управления и моделированию технических систем, ориентированных на изучение современной теории управления на уровне модельных представлений объектов и систем управления, источников внешних (экзогенных) воздействий и целей управления в математической постановке.

Предполагается, что к работам приступают студенты, предварительно изучившие теоретический материал, относящийся к работе. Выполнение каждой практической работы сопровождается подготовкой отчета. Отчет должен содержать:

1. Титульный лист, выполненный по образцу (Приложение 2);
2. Цель работы;
3. Исходные данные в соответствии с вариантом, выданным преподавателем;
4. Теоретическую часть: используемые формулы и обозначения;
5. Практическую часть: порядок выполнения расчетов, построение графиков (при наличии);
6. Выводы по работе.

Отчет оценивается согласно установленной системы оценивания, должен быть оформлен в соответствии с требованиями университета, содержать результаты выполнения всех этапов работы и сдан до начала промежуточной аттестации. В этом случае задание оценивается максимальным количеством баллов. Основаниями для снижения количества баллов являются: ошибки в работе, небрежное оформление отчета, а также сдача отчета после указанного срока.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

МАТРИЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И НЕИНВАРИАНТЫ

ПОДОБНЫХ МАТРИЦ

Цель работы. Получение навыков вычисления матричных инвариантов и неинвариантов подобных матриц.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и ознакомиться с теоретическими сведениями по теме работы. Практическая работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения.

Матричными инвариантами называются характеристики матриц размерности $n \times n$, которые на классе подобных матриц остаются неизменными.

Будем рассматривать в качестве подобных квадратные матрицы A и B . Приведем матричные инварианты этих матриц и способы их вычисления.

1.1. *Характеристический полином.* Характеристические полиномы подобных матриц A и B степени n относительно λ вычисляются в силу соотношений $D_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ и $D_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$, где I - единичная матрица размерности $n \times n$, соответственно. Характеристические полиномы подобных матриц A и B совпадают так, что выполняется соотношение:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = \det(\lambda I - B).$$

1.2. *Алгебраический спектр собственных значений.* Алгебраические спектры собственных значений (собственных чисел) λ_{Ai} и λ_{Bi} подобных матриц A и B совпадают и удовлетворяют выражению вида

$$\{\lambda_{Ai}: \lambda_{Ai}^n + a_{n-1}\lambda_{Ai}^{n-1} + \dots + a_1\lambda_{Ai} + a_0 = 0; i = \overline{1, n}\} = \\ = \{\lambda_{Bi}: \lambda_{Bi}^n + a_{n-1}\lambda_{Bi}^{n-1} + \dots + a_1\lambda_{Bi} + a_0 = 0; i = \overline{1, n}\}.$$

1.3. *Детерминант (определитель) матрицы.* Детерминанты $\det(A)$ и $\det(B)$ подобных матриц A и B равны и определяются в силу соотношений:

$$\det(A) = \det(B) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n.$$

1.4. *След матрицы.* Следы $\text{tr}(A)$ и $\text{tr}(B)$ подобных матриц A и B равны и могут быть вычислены как сумма собственных значений матрицы:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_{Ai} = \lambda_{A1} + \lambda_{A2} + \dots + \lambda_{A(n-1)} + \lambda_{An} = \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_{Bi} = \lambda_{B1} + \lambda_{B2} + \dots + \lambda_{B(n-1)} + \lambda_{Bn}$$

или как сумма диагональных элементов матрицы:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) &= \sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \dots + A_{nn} = \\ &= \sum_{i=1}^n B_{ii} = B_{11} + B_{22} + B_{33} + \dots + B_{nn}. \end{aligned}$$

1.5. *Ранг матрицы.* Ранги $\text{rang}(A)$ и $\text{rang}(B)$ подобных матриц A и B определяются максимальным числом линейно независимых столбцов (строк) этих матриц.

Матричными инвариантами называются характеристики матриц размерности $n \times n$, которые для каждой реализации подобной матрицы оказываются своими.

2.1. *Геометрический спектр собственных векторов.* Геометрические спектры собственных векторов v_{Ai} и v_{Bi} подобных матриц A и B различны и задаются в форме:

v_{Ai} такой, что удовлетворяет соотношению вида $Av_{Ai} = \lambda_{Ai}v_{Ai}; i = \overline{1, n}$;

v_{Bi} такой, что удовлетворяет соотношению вида $Bv_{Bi} = \lambda_{Bi}v_{Bi}; i = \overline{1, n}$.

2.2. *Алгебраический спектр сингулярных чисел.* Алгебраические спектры сингулярных чисел σ_{Ai} и σ_{Bi} подобных матриц A и B связаны с процедурой сингулярного разложения матрицы.

Сингулярное разложение вещественнозначной матрицы A размерности $n \times n$ задается в виде

$$A = U\Sigma V^T,$$

где U и V – ортогональные матрицы размерности $n \times n$, образующие соответственно левый и правый сингулярные базисы и обладающие свойствами: $UU^T = U^TU = I$, $VV^T = V^TV = I$; Σ – матрица сингулярных чисел σ_{Ai} , такая что

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_{Ai}; i = \overline{1, n}\}.$$

Вычисление сингулярных чисел σ_{Ai} осуществляется в соответствии с выражениями:

$$\sigma_{Ai} = \{\sigma_{A1}, \sigma_{A2}, \dots, \sigma_{An}; i = \overline{1, n}\} : \sigma_{A1} = \sigma_{A\max}; \sigma_{An} = \sigma_{A\min},$$

где $\sigma_{Ai} = \mu_{Ai}^{1/2}$; $\mu_{Ai} : \det(\mu_{Ai}I - A^TA) = 0$, так что $\sigma_{A1} \geq \sigma_{A2} \geq \dots \geq \sigma_{An} \geq 0$.

Аналогичным образом могут быть найдены сингулярные числа подобной матрицы B :

$$\sigma_{Bi} = \{\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \dots, \sigma_{Bn}; i = \overline{1, n}\} : \sigma_{B1} = \sigma_{B\max}; \sigma_{Bn} = \sigma_{B\min},$$

где $\sigma_{Bi} = \mu_{Bi}^{1/2}$; $\mu_{Bi} : \det(\mu_{Bi}I - B^TB) = 0$.

Примечание. Для случаев, когда размерность матрицы такая, что $m \neq n$, сингулярное разложение матрицы строится на спектре ортогональных матриц U

размерности $m \times m$ и V размерности $n \times n$, а матрица сингулярных чисел Σ формируется следующим образом:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag} \{ \sigma_i; i = \overline{1, m} \} & \vdots & 0_{m, n-m} \end{bmatrix} \text{ при } m < n,$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag} \{ \sigma_i; i = \overline{1, n} \} \\ \hline 0_{m-n, n} \end{bmatrix} \text{ при } m > n.$$

Геометрически сингулярные числа определяют длины полуосей эллипсоидов, полученных при отображении единичной сферы $\|x\|_E = 1$ в эллипсоид в силу соотношений $y_A = Ax$ и $y_B = Bx$.

2.3. Матричные нормы. Матричные нормы $\|A\|_{(*)}$ и $\|B\|_{(*)}$ подобных матриц A и B в зависимости от индекса $(*)$ нормы задаются в следующих формах.

Евклидова (Фробениусова) норма вычисляется на основе соотношений:

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \right\}^{1/2}; \quad \|B\|_E = \|B\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |B_{ij}|^2 \right\}^{1/2}.$$

Операторные (индуцированные) нормы могут быть найдены в силу выражений:

$$\|A\|_p = \max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}; \quad \|B\|_p = \max_x \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p},$$

где индекс p нормы может принимать значения $1, 2, \infty$. В соответствии со значением индекса принято рассматривать следующие виды норм:

- *столбцовые нормы* подобных матриц $\|A\|_1$ и $\|B\|_1$ при $p = 1$, вычисляемые на основе выражений вида:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \quad \|B\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}|;$$

- *строчные нормы* подобных матриц $\|A\|_\infty$ и $\|B\|_\infty$ при $p = \infty$, вычисляемые на основе выражений вида:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad \|B\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|;$$

- *спектральные нормы* подобных матриц $\|A\|_2$ и $\|B\|_2$ при $p = 2$, вычисляемые в силу соотношений:

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{A \max}; \quad \sigma_{A \max} = |\mu_{A \max}^{1/2}|; \quad \det(\mu_A I - A^T A) = 0;$$

$$\|B\|_2 = \max_x \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{B \max}; \quad \sigma_{B \max} = |\mu_{B \max}^{1/2}|; \quad \det(\mu_B I - B^T B) = 0,$$

где $\sigma_{A \max}$ и $\sigma_{B \max}$ – максимальные сингулярные числа матриц A и B соответственно.

2.4. Число обусловленности. Числа обусловленности $\text{cond}(A) = C(A)$ и $\text{cond}(B) = C(B)$ подобных матриц A и B соответственно задаются в формах:

$$C(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p, \quad C(B) = \|B\|_p \|B^{-1}\|_p,$$

где индекс p определяет тип используемой матричной нормы.

Примечание. Если для вычисления числа обусловленности используется спектральная норма матриц ($p = 2$), то выполняются соотношения

$$\|A\|_{p=2} = \sigma_{A \max}, \quad \|A^{-1}\|_{p=2} = \sigma_{A \min}^{-1} \quad \text{и} \quad \|B\|_{p=2} = \sigma_{B \max}, \quad \|B^{-1}\|_{p=2} = \sigma_{B \min}^{-1}$$

Число обусловленности, построенное на спектральных нормах, принимает вид

$$C(A) = \|A\|_{p=2} \|A^{-1}\|_{p=2} = \frac{\sigma_{A \max}}{\sigma_{A \min}} \quad \text{и} \quad C(B) = \|B\|_{p=2} \|B^{-1}\|_{p=2} = \frac{\sigma_{B \max}}{\sigma_{B \min}}.$$

Геометрически число обусловленности характеризует степень сжатия эллипсоидов, полученных при отображении единичной сферы $\|x\|_E = 1$ в эллипсоид в силу соотношений $y_A = Ax$ и $y_B = Bx$.

Пример. Проиллюстрируем вычисление матричных инвариантов и матричных неинвариантов на примере подобных матриц $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

размерностей 2×2 , то есть $n = 2$.

Вычислим матричные инварианты.

Характеристические полиномы подобных матриц A и B :

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda_A + 1 & -4 \\ -2 & \lambda_A + 3 \end{bmatrix} = (\lambda_A + 1)(\lambda_A + 3) - 8 = \lambda_A^2 + 4\lambda_A - 5;$$

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda_B & -1 \\ -5 & \lambda_B + 4 \end{bmatrix} = \lambda_B(\lambda_B + 4) - 5 = \lambda_B^2 + 4\lambda_B - 5;$$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B) = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Алгебраические спектры собственных значений подобных матриц A и B :

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda_1 = \lambda_{A1} = \lambda_{B1} = 1; \quad \lambda_2 = \lambda_{A2} = \lambda_{B2} = -5.$$

Детерминанты (определители) подобных матриц A и B :

$$\det(A) = \lambda_{A1} \lambda_{A2} = (1) \cdot (-5) = -5,$$

$$\det(B) = \lambda_{B1} \lambda_{B2} = (1) \cdot (-5) = -5$$

$$\det(A) = \det(B).$$

Следы подобных матриц A и B :

$$\text{tr}(A) = \lambda_{A1} + \lambda_{A2} = (1) + (-5) = -4,$$

$$\text{tr}(B) = \lambda_{B1} + \lambda_{B2} = (1) + (-5) = -4$$

или

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11} + A_{22} = (-1) + (-3) = -4,$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n B_{ii} = B_{11} + B_{22} = (0) + (-4) = -4,$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = -4.$$

Ранги подобных матриц A и B .

Число линейно независимых столбцов матриц A и B равно двум. Следовательно, $\text{rang}(A) = 2$ и $\text{rang}(B) = 2$.

Вычислим матричные инварианты.

Геометрические спектры собственных векторов v_{Ai} и v_{Bi} подобных матриц A и B .

Найдем собственные векторы v_{A1} и v_{A2} матрицы A на основе соотношения вида

$$A \cdot v_{Ai} = \lambda_{Ai} \cdot v_{Ai}, i = \overline{1, 2}. \quad \text{Вычислим собственный вектор } v_{A1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

соответствующий собственному значению $\lambda_{A1} = 1$ матрицы A :

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

тогда становится справедливой запись вида

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 4\alpha_2 = \alpha_1 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = \alpha_2 \end{cases},$$

$$\text{откуда } \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \text{ следовательно, } v_{A1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом вычислим собственный вектор v_{A2} , соответствующий собственному значению $\lambda_{A2} = -5$ матрицы A . В итоге получим $v_{A2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Используя такой же порядок действий, вычислим собственные векторы v_{B1} и v_{B2} матрицы B на основе соотношения вида $B \cdot v_{Bi} = \lambda_{Bi} \cdot v_{Bi}, i = \overline{1, 2}$. Найдем собственный вектор $v_{B1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_{B1} = 1$ матрицы B :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

тогда становится справедливой запись вида

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1 \\ 5\beta_1 - 4\beta_2 = \beta_2 \end{cases},$$

откуда $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$, следовательно, $v_{B1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Аналогичным образом, вычислим собственный вектор v_{B2} , соответствующий собственному значению $\lambda_{A2} = -5$ матрицы B . В итоге получим $v_{B2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Таким образом, получили различные геометрические спектры собственных векторов для подобных матриц A и B , то есть $v_{A1} \neq v_{B1}, v_{A2} \neq v_{B2}$.

Алгебраические спектры сингулярных чисел подобных матриц A и B .

Алгебраический спектр сингулярных чисел σ_{Ai} матрицы A найдем с помощью соотношения $\sigma_{Ai} = \mu_{Ai}^{1/2}; \mu_{Ai} : \det(\mu_A I - A^T A) = 0$. Для этого вычислим сначала собственные числа матрицы $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\det(\mu_A I - A^T A) = \det\left(\mu_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} \mu_A - 5 & 10 \\ 10 & \mu_A - 25 \end{bmatrix} = \mu_A^2 - 30\mu_A + 25 = 0,$$

откуда $\mu_{A1} \cong 29.14; \mu_{A2} \cong 0.86$. Следовательно, сингулярные числа матрицы A равны $\sigma_{A1} = \sqrt{29.14} \cong 5.4; \sigma_{A2} = \sqrt{0.86} \cong 0.93$.

Аналогичным образом найдем сингулярные числа матрицы B . Для этого вычислим собственные числа матрицы $B^T B$:

$$B^T B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\det(\mu_B I - B^T B) = \det\left(\mu_B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} \mu_B - 25 & 20 \\ 20 & \mu_B - 17 \end{bmatrix} = \mu_B^2 - 42\mu_B + 25 = 0;$$

откуда $\mu_{B1} \cong 41.4; \mu_{B2} \cong 0.6$. Следовательно, сингулярные числа матрицы B равны $\sigma_{B1} = \sqrt{41.4} \cong 6.43; \sigma_{B2} = \sqrt{0.6} \cong 0.77$.

Очевидно, $\sigma_{A1} \neq \sigma_{B1}; \sigma_{A2} \neq \sigma_{B2}$.

На рисунке приведена геометрическая интерпретация сингулярных чисел при отображении единичной сферы $\|x\|_E = 1$ в эллипсоид в силу соотношений $y_A =$

Ax и $y_B = Bx$, где $x = [\cos \alpha; \sin \alpha]$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. В качестве матрицы левого сингулярного базиса выбрана ортогональная матрица поворота вида $U = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$, где β – угол наклона главной оси эллипсоида, $0 \leq \beta \leq \pi$.

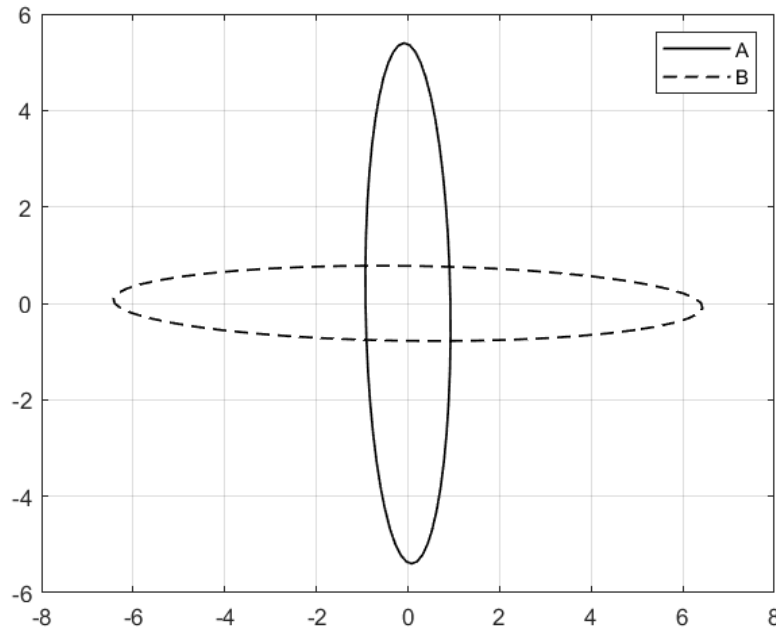


Рисунок – Отображение единичной сферы в эллипсоид

Геометрически сингулярные числа определяют длины полуосей эллипсоидов. Определим сингулярные числа подобных матриц A и B по эллипсоидам, представленным на рисунке. В результате получим:

$$\sigma_{A1} \cong 5.4; \quad \sigma_{A2} \cong 0.93;$$

$$\sigma_{B1} \cong 6.43; \quad \sigma_{B2} \cong 0.77.$$

Результаты, полученные путем вычисления сингулярных чисел аналитически, совпали с результатами, полученными с помощью геометрического подхода.

Матричные нормы подобных матриц A и B .

Вычислим Евклидовы (Фробениусовы) матричные нормы подобных матриц A и B :

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \{ 1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 \}^{1/2} = \sqrt{30};$$

$$\|B\|_E = \|B\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |B_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \{ 0^2 + 5^2 + 1^2 + 4^2 \}^{1/2} = \sqrt{42}.$$

Вычислим операторные (индуцированные) нормы подобных матриц A и B . Столбцовые нормы:

$$\|A\|_{p=1} = \max \{ (|-1| + |2|), (|4| + |-3|) \} = 7,$$

$$\|B\|_{p=1} = \max \{ (|0| + |5|), (|1| + |-4|) \} = 5.$$

Строчные нормы:

$$\|A\|_{p=\infty} = \max \{ (|-1| + |4|), (|2| + |-3|) \} = 5;$$

$$\|B\|_{p=\infty} = \max \{ (|0| + |1|), (|5| + |-4|) \} = 9.$$

Спектральные нормы:

$$\|A\|_2 = \sigma_{A \max} = 5.4; \quad \|B\|_2 = \sigma_{B \max} = 6.43.$$

Очевидно, $\|A\|_E \neq \|B\|_E$; $\|A\|_1 \neq \|B\|_1$; $\|A\|_\infty \neq \|B\|_\infty$; $\|A\|_2 \neq \|B\|_2$.

Числа обусловленности подобных матриц A и B .

Числа обусловленности подобных матриц A и B вычислим на спектральных матричных нормах как отношение максимального сингулярного числа матрицы к минимальному сингулярному числу этой матрицы:

$$C(A) = C_2(A) = \frac{\sigma_{A \max}}{\sigma_{A \min}} = \frac{5.4}{0.93} = 5.81;$$

$$C(B) = C_2(B) = \frac{\sigma_{B \max}}{\sigma_{B \min}} = \frac{6.43}{0.77} = 8.35.$$

Очевидно, $C(A) \neq C(B)$.

Таким образом, матричные инварианты, вычисленные для подобных матриц A и B , совпали, а матричные неинварианты оказались различными.

Порядок выполнения работы:

Для заданных в Таблице 1 в соответствии с вариантом подобных матриц A и B :

1. Вычислить матричные инварианты.
2. Вычислить матричные неинварианты.
3. Построить геометрическую интерпретацию сингулярных чисел при отображении единичной сферы $\|x\|_E = 1$ в эллипсоид в силу соотношений $y_A = Ax$ и $y_B = Bx$, где $x = [\cos \alpha; \sin \alpha]$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.
4. Сравнить сингулярные числа подобных матриц, вычисленные аналитически, с результатами, полученными геометрическим путем.

Содержание отчета:

1. Вычисление матричных инвариантов.
2. Вычисление матричных неинвариантов.
3. График отображения единичной сферы в эллипсоид для соотношений $y_A = Ax$ и $y_B = Bx$. Сравнительный анализ сингулярных чисел подобных матриц,

вычисленных на основе аналитических выражений, с результатами, полученными геометрическим путем.

4. Выводы по работе.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Какие характеристики подобных матриц можно отнести к матричным инвариантам, а какие - к матричным неинвариантам?
2. Какой матричной норме соответствует максимальное сингулярное число?
3. Определите степень сжатия эллипсоида, полученного при отображении единичной сферы $\|x\|_E = 1$ в эллипсоид в силу соотношения $y = Ax$ при

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислите определитель и след матрицы четвертого порядка, если известно, что ее собственные числа равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$.
5. Используя знания о матричных инвариантах и неинвариантах, определите являются ли подобными матрицы $A = \begin{bmatrix} 12 & 3.5 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -4.5 \\ 2.5 & -6.5 \end{bmatrix}$.

Таблица 1. Варианты задания подобных матриц

Вариант	Матрица А	Матрица В	Вариант	Матрица А	Матрица В
1	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБИЯ

Цель работы. Получение навыков построения матриц приведения подобия.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и ознакомиться с теоретическими сведениями по теме работы. Практическая работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Матрицы A и B размерности $n \times n$, задающие один и тот же линейный оператор A относительно различных пар базисов, называются *подобными*. Для этих матриц существует невырожденная $(n \times n)$ -матрица M , связывающая матрицы A и B матричным соотношением подобия вида

$$MB = AM,$$

которое имеет два матричных аналога $B = M^{-1}AM$ и $A = MBM^{-1}$.

Канонические представления подобных матриц конструируются на алгебраическом спектре собственных значений $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ исходной матрицы A и на спектре коэффициентов $a_i, i = \overline{1, n}$ ее характеристического полинома $D(\lambda)$ вида

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Решением характеристического уравнения $D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ являются n собственных чисел $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ матрицы A .

Рассмотрим канонические формы матрицы для случая некрatных собственных значений матрицы A .

1. *Диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр ее собственных значений состоит из вещественных некрatных собственных чисел, таких что $\operatorname{Im}(\lambda_i) = 0$.

В этом случае диагональная матрица (будем обозначать ее Λ) с элементами λ_i на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы принимает вид

$$B = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}.$$

2. *Блочно-диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений состоит из комплексно-сопряженных некрatных собственных значений вида $\lambda_{1,2} = \alpha_i \pm j\beta_i$. В этом случае блочно-диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$ с вещественнозначными матричными блоками

$\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы принимает вид

$$B = \tilde{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, \frac{n}{2}} \right\}.$$

3. Комбинированная блочно-диагональная каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений содержит собственные значения, часть которых числом n_R является простыми (некратными) вещественными, а другая часть числом n_c – комплексно-сопряженными, при этом выполняется соотношение $n = n_R + n_c$.

Комбинированная блочно-диагональная матрица имеет на главной диагонали диагональную матрицу размерности $(n_R \times n_R)$ и блочно-диагональную матрицу размерности $(n_c \times n_c)$ так, что она примет вид

$$B = \tilde{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \Lambda_{(n_R \times n_R)}; \tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)} \right\}.$$

Примечание. Матричные блоки на диагонали комбинированной блочно-диагональной матрицы можно менять местами.

4. Рассмотрим теперь канонические представления матрицы B , подобные исходной матрице A , которые конструируются на алгебраическом спектре коэффициентов $a_i, i = \overline{1, n}$ характеристического полинома $D(\lambda)$ матрицы A вида

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Этих представлений два, они совпадают с точностью до транспонирования. Обе канонические формы (строчная и столбцовая) именуются нормальной, сопровождающей (свой характеристический полином) или фробениусовой канонической формой.

Строчная нормальная, сопровождающая или фробениусова форма имеет представление:

$$B = A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Столбцовая нормальная, сопровождающая или фробениусова форма записывается в виде

$$B = A_F^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим способы приведения произвольной квадратной матрицы A простой структуры к рассмотренным каноническим формам.

Матрица M приводит произвольную $n \times n$ – квадратную матрицу A со спектром вещественных некратных собственных значений к *диагональному* виду в силу соотношения

$$\Lambda = M^{-1}AM,$$

где столбцы матрицы преобразования подобия M представляют собой собственные векторы $v_i, i = \overline{1, n}$ матрицы A .

Если матрица A задана в *строчной сопровождающей* форме B , то ее собственные векторы строятся по схеме *Вандермонда* и имеют представление

$$v_i = [1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \dots \quad \lambda_i^{n-1}]^T; i = \overline{1, n},$$

а матрица приведения подобия размерности $n \times n$, приводящая строчную сопровождающую форму матрицы к диагональному виду Λ , имеет вид

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

и именуется матрицей *Вандермонда*. В этом случае соотношение подобия принимает вид

$$\Lambda = M_B^{-1}A_F M_B.$$

Примечание. При приведении матрицы A , заданной в *столбцовой сопровождающей* форме, к диагональному виду Λ используется транспонированная версия соотношения приведения подобия.

Если спектр собственных значений матрицы A содержит пару некратных комплексно-сопряженных собственных значений, то исходная матрица A приводима к блочно-диагональной канонической форме с помощью матрицы приведения подобия $\tilde{M}$, имеющей своими столбцами вещественные $Re(v_1)$ и мнимые $Im(v_1)$ компоненты собственных векторов, согласованные с комплекснозначными собственными значениями $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, так что

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} | & | \\ Re(v_1) & Im(v_1) \\ | & | \end{bmatrix}.$$

В случае, когда исходная матрица A имеет комбинированный алгебраический спектр собственных значений (пару комплексно-сопряженных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, а остальные – вещественные $\lambda_3 \dots \lambda_n$), матрица приведения подобия $\tilde{M}$ принимает вид

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ Re(v_1) & Im(v_1) & v_3 & \dots v_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица Вандермонда и матрица собственных векторов позволяют приводить исходную матрицу, заданную в произвольной форме, к сопровождающей форме на основе соотношения

$$B = M_B M^{-1} A M M_B^{-1}.$$

Примеры. Проиллюстрируем на примерах порядок приведения матрицы простой структуры к канонической диагональной, к строчной сопровождающей (фробениусовой), к столбцовой сопровождающей (фробениусовой) формам.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, собственные значения которой равны $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$, а соответствующие им собственные векторы задаются в виде $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Приведем матрицу A к диагональной форме $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ с помощью матричного соотношения $\Lambda = M^{-1} A M$, где

$$M = [M_1 = v_1 \quad M_2 = v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\Lambda = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Приведем строчную сопровождающую (фробениусову) форму A_F матрицы A к диагональной форме Λ на основе соотношения $\Lambda = M_B^{-1} A_F M_B$. Строчную сопровождающую (фробениусову) форму A_F построим на коэффициентах характеристического полинома матрицы A

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 4\lambda - 5,$$

откуда получим $A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. Сконструируем матрицу Вандермонда

в виде $M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, тогда

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Приведем столбцовую сопровождающую (фробениусову) форму A_F^T матрицы A к диагональной форме Λ на основе соотношения

$$\Lambda = (M_B^{-1} A_F M_B)^T = M_B^T A_F^T M_B^{-T}.$$

Тогда, с учетом матрицы $A_F^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, получим

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Приведем исходную матрицу A к строчной сопровождающей (фробениусовой) форме A_F . Для этого воспользуемся матричным соотношением $A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1}$, тогда получим

$$A_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A с комплексно-сопряженными корнями, заданную в строчной сопровождающей форме (фробениусовой) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$, собственные значения которой равны $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$, а соответствующие им собственные векторы задаются в виде $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - 2i \end{bmatrix}$. Тогда диагональная матрица может быть получена на основе соотношения подобия вида $\Lambda = M_B^{-1} A M_B$ следующим образом:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + 2i & -1 - 2i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + 2i & -1 - 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2i & 0 \\ 0 & -1 - 2i \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A , алгебраический спектр которой является комбинированным, то есть имеется пара комплексно-сопряженных корней и один корень — вещественный. Пусть $A = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 33 & -23 & 9 \\ 22 & 33 & -23 \\ 19 & 14 & 50 \end{bmatrix}$, а ее собственные значения такие, что $\lambda_{1,2} = 1 \pm i, \lambda_3 = 2$. Тогда блочно-диагональная каноническая

форма матрицы будет иметь представление $\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. В соответствии с

соотношением подобия $\tilde{\Lambda} = \tilde{M}^{-1}A\tilde{M}$, где $\tilde{M} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Re(v_1) & Im(v_1) & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ найдем

собственные векторы матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -7-i \\ 2-9i \\ 5 \end{bmatrix} \text{ при } \lambda_1 = 1-i;$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ при } \lambda_3 = 2.$$

Следовательно, $\tilde{M} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Тогда

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 33 & -23 & 9 \\ 22 & 33 & -23 \\ 19 & 14 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

Для заданной в Таблице 2 в соответствии с вариантом матрицы A :

1. Построить:

- а) диагональную каноническую форму Λ ;
- б) строчную сопровождающую форму A_F ;
- в) столбцовую сопровождающую форму A_F^T .

2. Осуществить переход от исходной матрицы A к диагональной канонической форме с помощью матричного соотношения подобия $\Lambda = M^{-1}AM$.

3. Выполнить переход от строчной сопровождающей формы матрицы A_F к диагональной канонической форме на основе матричного соотношения подобия $\Lambda = M_B^{-1}A_F M_B$.

4. Осуществить переход от столбцовой сопровождающей формы матрицы A_F^T к диагональной канонической форме с помощью соотношения подобия $\Lambda = M_B A_F^T M_B^{-1}$.

5. Выполнить переход от исходной матрицы A к строчной сопровождающей форме A_F на основе матричного соотношения $A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1}$.

Содержание отчета:

1. Порядок построения:

- а) диагональной канонической формы Λ ;
- б) строчной сопровождающей формы A_F ;
- в) столбцовой сопровождающей формы A_F^T .

2. Порядок приведения исходной матрицы A к диагональной канонической форме Λ .

3. Порядок приведения строчной сопровождающей формы матрицы A_F к диагональной канонической форме Λ .
4. Порядок приведения столбцовой сопровождающей формы матрицы A_F^T к диагональной канонической форме Λ .
5. Выполнить переход от исходной матрицы A к строчной сопровождающей форме A_F .
6. Выводы по работе.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Приведите формы канонических представлений подобных матриц и правила их построения.
2. По какому принципу осуществляется формирование матрицы Вандермонда?
3. Постройте комбинированную блочно-диагональную каноническую форму матрицы A , у которой алгебраический спектр собственных значений такой, что $\lambda_{1,2} = 3 \pm 7j, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -6$.
4. Постройте матрицу приведения подобия, позволяющую привести исходную матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 35 & -47 & 13 \end{bmatrix}$ к диагональному виду.
5. Постройте столбцовую сопровождающую форму матрицы A , если известно, что ее собственные числа равны $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$.

Таблица 2. Варианты задания матрицы A

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ

Цель работы. Получение навыков построения жордановой канонической формы матрицы.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и ознакомиться с теоретическими сведениями по теме работы. Практическая работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Характеристический полином $D(\lambda)$ любой квадратной матрицы A может быть представлен в виде

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

где $r_i, i = \overline{1, k}$ - алгебраическая кратность собственных значений.

Максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i , называется его *геометрической кратностью* и обозначается s_i . Геометрическая кратность любого собственного значения не превышает его алгебраическую кратность.

Если $r_i = s_i, i = \overline{1, k}$, то количество линейно независимых собственных векторов матрицы A равно размерности пространства, и из них можно составить базис в пространстве R^n . В этом базисе подобная матрица B имеет диагональный вид:

$$B = \left[\begin{array}{cccccccccc} \overline{\lambda_1} & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0} & 0 & \underline{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda_2} & 0 & \overline{0} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 & \underline{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{\lambda_k} & 0 & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{0} & 0 & \underline{\lambda_k} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} r_1 \text{ строк} \\ r_2 \text{ строк} \\ r_k \text{ строк} \end{array}$$

где каждое собственное значение λ_i встречается на главной диагонали r_i раз, остальные элементы матрицы равны нулю.

Жорданова каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений состоит из *кратных* собственных чисел. Данная форма представляет собой блочно-диагональную матрицу,

составленную из жордановых клеток (блоков) J_{kk} размерности $(k \times k)$, имеющих на главной диагонали собственное значение λ_i кратности k , единицы над главной диагональю и нули на остальных позициях блока.

Для случая вещественного собственного значения λ_i кратности k жорданова клетка будет иметь вид

$$J_k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \dim(J_k(\lambda_i)) = k \times k.$$

Для случая кратных комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm j\beta_1$ кратности k жорданова клетка принимает вид

$$J_k(\lambda_{1,2}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1^2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_1^2 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \dim(J_k(\lambda_{1,2})) = 2k \times 2k.$$

Жордановым блоком, соответствующим собственному значению λ_i называется блочно-диагональная матрица, имеющая представление

$$J_{kk}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_i) \end{bmatrix},$$

где на главной диагонали расположены s жордановых клеток $J_{k_1}(\lambda_i), J_{k_2}(\lambda_i), \dots, J_{k_s}(\lambda_i)$ порядков $k_1, k_2, \dots, k_s$, где s - геометрическая кратность собственного числа λ_i такая, что $k_1 + k_2 + \dots + k_s = s$, остальные элементы равны нулю. Порядок расположения жордановых клеток $J_{k_i}(\lambda_i)$ в жордановом блоке $J_{kk}(\lambda_i)$ определен неоднозначно.

Число $m(\lambda_i)$ клеток Жордана в жордановом блоке $J_{kk}(\lambda_i)$ совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов этой матрицы, соответствующих собственному числу λ_i так, что

$$m(\lambda_i) = (n - \text{rang}(\lambda_i I - A)),$$

где n – порядок матрицы A . Тогда жорданова каноническая форма J матрицы A для случая q вещественных кратных собственных значений принимает вид

$$B = J = \begin{bmatrix} J_{kk_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{kk_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{kk_3}(\lambda_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{kk_q}(\lambda_q) \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом может быть построена жорданова каноническая форма матрицы B для случая кратных комплексно–сопряженных собственных значений. Размерность каждой жордановой клетки зависит от значения кратности соответствующего собственного числа.

Порядок клеток Жордана h в жордановом блоке матрицы A определяется в соответствии с соотношением вида

$$m_h(\lambda_i) = \text{rang}(\lambda_i I - A)^{h-1} - 2\text{rang}(\lambda_i I - A)^h + \text{rang}(\lambda_i I - A)^{h+1},$$

где $m_h(\lambda_i)$ – число клеток Жордана порядка h с собственным числом λ_i .

Таким образом, алгоритм приведения матрицы с кратными собственными значениями к жордановой форме осуществляется в три этапа. На первом этапе необходимо вычислить все различные собственные значения λ_i матрицы. На втором этапе для каждого из различных λ_i установить размеры и число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_i и сформировать жордановы блоки. На третьем этапе – на основе жордановых блоков сконструировать жорданову каноническую форму матрицы A .

Построение матрицы, приводящей произвольную матрицу A размерности $n \times n$ с кратным спектром собственных значений к жордановой форме, осуществляется на основе соотношения вида

$$J = T^{-1}AT,$$

где T – матрица приведения подобия.

Рассмотрим формирование матрицы T приведения подобия произвольной матрицы A с вещественным спектром собственных значений кратности n к жордановой форме, для чего представим ее в столбцовой форме

$$T = \text{col} \{T_i; i = \overline{1, n}\},$$

тогда столбцы T_i будут определяться из условий

$$\lambda T_i = AT_i; i = \overline{1, n}.$$

Примеры. В качестве примера рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ третьего

порядка, для которой построим нормальную жорданову форму и определим матрицу преобразования подобия T .

Найдем собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Определим количество жордановых клеток в соответствии с выражением $m(\lambda_i) = (n - \text{rang}(\lambda_i I - A))$, получим

$$m(\lambda_{1,2,3} = -1) = 3 - \text{rang} \left(-1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = 3 - \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 3 - 1 = 2.$$

Следовательно, исходная матрица в нормальной жордановой форме имеет 2 жордановы клетки. Очевидно, порядок первой жордановой клетки равен 1, порядок второй жордановой клетки равен 2. Тогда нормальная жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицу приведения подобия T исходной матрицы A к жордановой форме J в силу соотношения $J = T^{-1}AT$, откуда $TJ = AT$. Представим матрицу T в столбцовой форме, тогда соотношение подобия примет вид

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} J = A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix},$$

где T_1, T_2, T_3 - вектор-столбцы размерности 3×1 . Последовательное решение системы уравнений относительно элементов каждого вектор-столбца $T_i, i = \overline{1,3}$,

позволяет получить $T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, на основе которых сформируем

матрицу приведения подобия T в форме

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при подстановке матрицы T становится справедливым соотношение подобия

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим пример матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ четвертого порядка

($n = 4$), для которой размерность жордановых клеток является не столь очевидной и требует дополнительных вычислений.

Найдем собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Определим количество жордановых клеток:

$$\begin{aligned} m(\lambda_{1,2,3,4} = 1) &= 4 - \text{rang} \left(1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 4 - \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \right) = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Соответственно жорданова форма исходной матрицы состоит из двух жордановых клеток. Вариантов размерности этих клеток два:

- 1) две клетки одинаковой размерности 2×2 ;
- 2) одна клетка размерности 3×3 , вторая клетка – размерности 1×1 .

Для определения размерности жордановых клеток воспользуемся выражением вида

$$m_h(\lambda_i) = \text{rang}(\lambda_i I - A)^{h-1} - 2\text{rang}(\lambda_i I - A)^h + \text{rang}(\lambda_i I - A)^{h+1}.$$

Рассчитаем количество жордановых клеток второго порядка (то есть $h = 2$):

$$\begin{aligned} m_2(1) &= \text{rang}(1 \cdot I - A)^{2-1} - 2\text{rang}(1 \cdot I - A)^2 + \text{rang}(1 \cdot I - A)^{2+1} = \\ &= \text{rang}(I - A) - 2\text{rang}(I - A)^2 + \text{rang}(I - A)^3. \end{aligned}$$

Так как

$$(I - A)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad (I - A)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то $\text{rang}(I - A) = 2$, $\text{rang}(I - A)^2 = 1$, $\text{rang}(I - A)^3 = 0$. Следовательно, $m_2(1) = 2 - 2 \cdot 1 + 0 = 0$. Это означает, что клетки второго порядка не существует. Соответственно, имеет место второй случай. Таким образом, жорданова форма матрицы A имеет представление:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Для заданной в Таблице 3 в соответствии с вариантом матрицы A третьего порядка:
 - а) построить нормальную форму Жордана;
 - б) вычислить матрицу приведения подобия T исходной матрицы A к жордановой форме J ;
 - в) выполнить проверку выполнения соотношения приведения подобия в форме $J = T^{-1}AT$ или $TJ = AT$.
2. Для заданной в соответствии с вариантом матрицы C четвертого порядка построить нормальную форму Жордана.

Содержание отчета:

1. Для матрицы A третьего порядка:
 - а) порядок построения нормальной формы Жордана;
 - б) порядок вычисления матрицы приведения подобия T ;
 - в) проверка выполнения соотношения приведения подобия исходной матрицы A к жордановой форме J .
2. Порядок построения нормальной формы Жордана для матрицы C четвертого порядка.
3. Выводы по работе.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Запишите в развернутом виде матрицу в форме Жордана $J = (J_2(-2), J_3(3), J_2(-1))$, состоящую из жордановых клеток $J_n(\lambda_i)$, где n - порядок клетки Жордана, соответствующей собственному числу λ_i .
2. Каким образом определяется число жордановых клеток в жордановом блоке?
3. Каким образом определяется размерность жордановых клеток в жордановом блоке, соответствующем собственному числу λ ?

4. Как соотносятся между собой алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений?
5. Постройте жорданову форму J матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$.

Таблица 3. Варианты задания матриц A и C

Вариант	Матрица A	Матрица C
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -17 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

Цель работы. Исследование свойств матричных функций от матрицы.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и ознакомиться с теоретическими сведениями по теме работы. Практическая работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Пусть $f(\alpha)$ – скалярный степенной ряд (многочлен) относительно скалярной переменной α , заданный в форме

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_p\alpha^p.$$

Тогда матричный ряд вида

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p$$

называется многочленом от матрицы A или *матричной функцией* $f(A)$ от матрицы A соответствующей скалярному степенному ряду (многочлену) $f(\alpha)$.

Матричная функция от матрицы реализует отображение $f(A): R^{n \times n} \Rightarrow R^{n \times n}$.

В области теории матричных функций от матрицы полезными оказываются положения теоремы Гамильтона–Кэли.

Теорема Гамильтона–Кэли. Квадратная $(n \times n)$ -матрица A с характеристическим полиномом

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

обнуляет свой характеристический полином так, что выполняется матричное соотношение

$$D(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0I = 0,$$

где 0 – $(n \times n)$ нулевая матрица.

Многочлен $p(\alpha)$ относительно скалярной переменной α называется *аннулирующим многочленом* квадратной матрицы A , если выполняется условие

$$p(A) = 0.$$

Очевидно, аннулирующим многочленом матрицы A в силу теоремы Гамильтона–Кэли является ее характеристический полином.

Примечание. Существует множество аннулирующих многочленов матрицы A степени большей, чем n . Но могут существовать аннулирующие многочлены степени $m < n$.

Приведем основные свойства матричной функции от матрицы.

Свойство 1. Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет геометрический спектр собственных векторов v_i матрицы A : $Av_i = \lambda_i v_i$, так что выполняется соотношение

$$f(A)v_i = f(\lambda_i)v_i,$$

где $f(\lambda_i) = \lambda_{fi}$ – собственные значения матрицы $f(A)$, удовлетворяющие ее характеристическому уравнению $\det(\lambda I - f(A)) = 0$ и вычисляемые как функция $f(\lambda)$ на спектре собственных значений λ_{fi} матрицы $f(A)$.

Свойство 2. Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет матричное отношение подобия в том смысле, что если матрицы A и B подобны, то есть $B = M^{-1}AM$, то

$$f(B) = M^{-1}f(A)M.$$

Свойство 3. Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет блочно-диагональную форму матрицы A в том смысле, что, если $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, то

$$f(A) = \text{diag}\{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)\}.$$

Свойство 4. Степень матрицы A , обозначаемая как A^l , коммутативна с матричной функцией от матрицы $f(A)$:

$$A^l f(A) = f(A) A^l.$$

Причем степень может быть положительным, отрицательным, целым или дробным числом.

Пример. Рассмотрим матричную функцию от матрицы $f(A) = A^2$, где $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$, $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, которую вычислим двумя способами:

а) путем непосредственного умножения:

$$f(A) = A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

б) с помощью свойства сохранения подобия:

$$A = M\Lambda M^{-1}, A^2 = M\Lambda^2 M^{-1},$$

где $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $\Lambda^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$, тогда

$$A^2 = M\Lambda^2 M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матричную функцию от матрицы $f(A) = A^2$, где $f(A) = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$. Вычислим собственные значения матричной функции от матрицы $f(A)$ двумя способами:

а) путем непосредственного вычисления собственных чисел из характеристического полинома:

$$\det(\lambda_{fi}I - f(A)) = \det \begin{bmatrix} \lambda_{fi} - 9 & 16 \\ 8 & \lambda_{fi} - 17 \end{bmatrix} = \lambda_{fi}^2 - 26\lambda_{fi} + 25 = 0$$

$$\lambda_{f1} = 1; \lambda_{f2} = 25.$$

б) в силу связи элементов λ_i алгебраического спектра матрицы A и элементов λ_{fi} матричной функции от матрицы $f(A)$:

$$\lambda_{fi} = f(\lambda_i) = \lambda_i^2: \quad \lambda_{f1} = (1)^2 = 1; \lambda_{f2} = (-5)^2 = 25.$$

Проверим, что собственные векторы сохраняются:

$$f(A)v_1 = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = f(\lambda_1)v_1$$

$$f(A)v_2 = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -25 \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = f(\lambda_2)v_2$$

Покажем, что степень матрицы A^l коммутативна с матричной функцией от матрицы $f(A)$. Рассмотрим матричную функцию вида

$$f(A) = I + A,$$

где $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, степень матрицы $l = 2$, тогда

$$f(A) = A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что $A^l f(A) = f(A) A^l$:

$$\begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 68 \\ 34 & -66 \end{bmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

Для заданной в таблице 4 в соответствии с вариантом матрицы A :

1. Вычислить матричную функцию $f(A)$ от матрицы A , соответствующей скалярному степенному ряду $f(\alpha)$, с помощью соотношения сохранения подобия и путем непосредственного вычисления;
2. Вычислить алгебраический спектр собственных значений матричной функции от матрицы $f(A)$ с помощью свойств матричных функций от матрицы и путем непосредственного вычисления;
3. Вычислить геометрический спектр собственных векторов матричной функции от матрицы $f(A)$ с помощью свойств матричных функций от матрицы и путем непосредственного вычисления.

Содержание отчета:

1. Вычисление матричной функции от матрицы $f(A)$ с помощью соотношения сохранения подобия и путем непосредственного вычисления;

2. Вычисление алгебраического спектра собственных значений матричной функции от матрицы $f(A)$ с помощью свойств матричных функций от матрицы и путем непосредственного вычисления;
3. Вычисление геометрического спектра собственных векторов матричной функции от матрицы $f(A)$ с помощью свойств матричных функций от матрицы и путем непосредственного вычисления.
4. Выводы по работе.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Сформулируйте свойство алгебраического спектра собственных значений матричной функции от матрицы.
2. Сформулируйте свойство геометрического спектра собственных векторов матричной функции от матрицы.
3. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли и приведите примеры практического использования этой теоремы.
4. Приведите пример аннулирующего многочлена матрицы $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
5. Постройте диагональную каноническую форму Λ матрицы A^4 при $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Таблица 4. Варианты задания матрицы A и степенного скалярного ряда $f(\alpha)$

Вариант	Матрица A	$f(\alpha)$
1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$	$1 + \alpha$
2	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$	$-3 + \alpha$
3	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$5 + \alpha$
4	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$	α^2
5	$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$4 - \alpha$
6	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	$-\alpha^2$

7	$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$	$2 + \alpha$
8	$\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$	$-6 + \alpha$
9	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$	α^3
10	$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$-\alpha^3$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Цель работы. Получение навыков вычисления матричной экспоненты различными способами.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и ознакомиться с теоретическими сведениями по теме работы. Практическая работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Матричная экспонента e^{At} , соответствующая скалярной экспоненте $e^{\alpha t}$, записанной в форме бесконечного скалярного ряда

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\alpha t)^p}{p!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!},$$

принимает вид

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^p}{p!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Рассмотрим правила вычисления матричной экспоненты методом диагонализации, с помощью преобразования Лапласа и на основе приведения к нормальной форме Жордана.

Метод диагонализации матрицы A , именуемый иначе методом собственных значений, применим к матрицам простой структуры (с алгебраическим спектром некратных собственных значений), для которых справедливо матричное соотношение приведения подобия $M\Lambda = AM$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Тогда в силу свойств матричной функции от матрицы матричная экспонента принимает вид

$$e^{At} = Me^{At}M^{-1} = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}M^{-1},$$

где M – матрица собственных векторов матрицы A . Алгоритм вычисления матричной экспоненты сводится к выполнению следующих шагов:

1. Сформировать характеристический полином $D(\lambda)$ матрицы A в виде $D(\lambda) = (\lambda I - A)$.
2. Вычислить собственные значения λ_i матрицы A так, что $D(\lambda) = 0$.
3. Вычислить собственные векторы v_i матрицы A на основе соотношения $Av_i = \lambda_i v_i$.
4. Построить матрицу диагонализации M на спектре собственных векторов v_i матрицы A .
5. Вычислить матричную экспоненту в силу соотношения $e^{At} = Me^{At}M^{-1}$.

Метод преобразования Лапласа заключается в вычислении обратного преобразования Лапласа $L^{-1}\{*\}$ от резольвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

Метод основан на использовании алгоритма Д. Фаддеева разложения резольвенты без ее обращения на основе представления

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \dots + H_{n-1}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \dots + H_{n-1}}{D(s)},$$

где $(n \times n)$ – матрицы H_i , $i = \overline{0, n-1}$ и коэффициенты a_i , $i = \overline{0, n-1}$ характеристического полинома $D(s) = \det(sI - A)$ вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Д. Фаддеева:

$$\begin{aligned} H_0 &= I, & a_{n-1} &= -\text{tr}(AH_0), \\ H_1 &= AH_0 + a_{n-1}I, & a_{n-2} &= -\text{tr}(AH_1) / 2, \\ &\dots & \dots & \\ H_k &= AH_{k-1} + a_1I & a_0 &= -\text{tr}(AH_k) / (k+1) \end{aligned},$$

где $k = \overline{0, n-1}$.

С использованием матриц H_k ($k = \overline{0, n-1}$) резольвенту $(sI - A)^{-1}$ можно записать в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}}{D(s)}H_0 + \frac{s^{n-2}}{D(s)}H_1 + \dots + \frac{s}{D(s)}H_{n-2} + \frac{1}{D(s)}H_{n-1}.$$

Тогда матричная экспонента получает представление

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\frac{s^{n-1}}{D(s)}\right\}H_0 + L^{-1}\left\{\frac{s^{n-2}}{D(s)}\right\}H_1 + \dots + L^{-1}\left\{\frac{1}{D(s)}\right\}H_{n-1}.$$

Если записать характеристический полином $D(s)$ в форме

$$D(s) = (s - \lambda_1)^{r_1} (s - \lambda_2)^{r_2} \dots (s - \lambda_n)^{r_n},$$

где r_i , $i = \overline{1, n}$ – показатель кратности соответствующего собственного значения, то становится возможным разложение дробных составляющих на типовые функции

$$\frac{s^k}{D(s)} = \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{\beta_{k1}}{s - \lambda_i} + \frac{\beta_{k2}}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{\beta_{kr_i}}{(s - \lambda_i)^{r_i}} \right\}; k = \overline{0, n-1},$$

для которых вычисление обратного преобразования Лапласа может быть выполнено с использованием таблицы преобразований Лапласа для типовых функций (Приложение 1). Таким образом, вычисление матричной экспоненты с использованием обратного преобразования Лапласа может быть сведено к двум основным этапам:

1. Формирование резольвенты в виде

$$(sI - A)^{-1} = \left[\frac{s^{n-1}}{\det(sI - A)}H_0 + \frac{s^{n-2}}{\det(sI - A)}H_1 + \dots + \frac{1}{\det(sI - A)}H_{n-1} \right];$$

2. Вычисление матричной экспоненты с помощью обратного преобразования Лапласа в форме

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\frac{s^{n-1}}{D(s)}\right\}H_0 + L^{-1}\left\{\frac{s^{n-2}}{D(s)}\right\}H_1 + \dots + L^{-1}\left\{\frac{1}{D(s)}\right\}H_{n-1}.$$

Метод, основанный на приведении матрицы A к нормальной форме Жордана. Метод применим к матрицам A , алгебраический спектр собственных значений которых содержит q кратных собственных значений λ_i кратности r_i . В этом случае оказывается справедливым матричное соотношение приведения подобия $TJ = AT$, где T - матрица приведения подобия.

Рассмотрим жорданову форму матрицы A размерности $n \times n$ с алгебраическим спектром собственных значений кратности $r_i = n$

$$J = \text{diag} \left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^q r_i = n \right\}.$$

Тогда, в силу свойств матричных функций от матрицы, для матричной экспоненты e^{At} можно записать:

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1},$$

где матричная экспонента e^{Jt} имеет представление

$$e^{Jt} = \text{diag} \left\{ e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1} e^{\lambda_i t}}{(m_i - 1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \dots & \frac{t^{n-2} e^{\lambda_i t}}{(m_i - 2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^q r_i = n \right\}.$$

Таким образом, вычисление матричной экспоненты методом, основанным на приведении матрицы A к нормальной форме Жордана, включает в себя следующие этапы:

1. Построение нормальной жордановой формы J матрицы A .
2. Вычисление матрицы приведения подобия T исходной матрицы A к нормальной форме Жордана J .
3. Построение матричной экспоненты e^{Jt} для жордановой формы J матрицы A .

4. Вычисление матричной экспоненты на основе соотношения $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$.

Примеры. Приведем примеры вычисления матричной экспоненты с помощью рассмотренных методов.

Найдем матричную экспоненту e^{At} для случая матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, алгебраический спектр которой состоит из вещественных некратных собственных значений.

Следуя приведенному алгоритму, сформируем характеристический полином $D(\lambda)$ матрицы A в виде $D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$ и вычислим собственные значения матрицы A , так что $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$. Далее вычислим собственные векторы v_i матрицы A в виде $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и на спектре собственных векторов построим матрицу диагонализации M в форме $M = [M_1 = v_1 \quad M_2 = v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. На основе соотношения $e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1}$, вычислим матричную экспоненту

$$\begin{aligned} e^{At} &= M e^{\Lambda t} M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t & e^{-5t} \\ e^t & -e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2e^t + e^{-5t}) & \frac{2}{3}(e^t - e^{-5t}) \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-5t}) & \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-5t}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем теперь матричную экспоненту e^{At} при $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Для этого сформируем резольвенту в виде

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{s}{\det(sI - A)} H_0 + \frac{1}{\det(sI - A)} H_1 = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} (sH_0 + H_1)$$

и воспользуемся рекуррентной процедурой алгоритма Д. Фаддеева для нахождения коэффициентов a_1, a_0 и матричных коэффициентов H_1, H_0 :

$$H_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$a_1 = -\text{tr}(AH_0) = -\text{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\text{tr}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 4;$$

$$H_1 = AH_0 + a_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$a_0 = -\text{tr}(AH_1) / 2 = -\text{tr} \left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) / 2 = -\text{tr} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} / 2 = -10 / 2 = -5.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{s^2 + 4s - 5} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{(s-1)(s+5)} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{s}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислим матричную экспоненту с помощью обратного преобразования Лапласа в форме

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L^{-1} \left(\frac{s}{(s-1)(s+5)} \right) + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} L^{-1} \left(\frac{1}{(s-1)(s+5)} \right).$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться таблицей преобразования Лапласа для типовых функций, представим дроби $\frac{s}{(s-1)(s+5)}$ и $\frac{1}{(s-1)(s+5)}$ в виде элементарных составляющих, тогда

$$\frac{s}{(s-1)(s+5)} = \frac{\alpha_1}{(s-1)} + \frac{\beta_1}{(s+5)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(s-1)(s+5)} = \frac{\alpha_2}{(s-1)} + \frac{\beta_2}{(s+5)}.$$

Приведем правую часть тождества $\frac{s}{(s-1)(s+5)} = \frac{\alpha_1}{(s-1)} + \frac{\beta_1}{(s+5)}$ к общему знаменателю и далее, приравнявая коэффициенты при равных степенях s , получим:

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s-1)(s+5)} &= \frac{\alpha_1}{(s-1)} + \frac{\beta_1}{(s+5)} = \frac{\alpha_1(s+5) + \beta_1(s-1)}{(s-1)(s+5)} = \frac{s(\alpha_1 + \beta_1) + 5\alpha_1 - \beta_1}{(s-1)(s+5)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} s^1 : \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ s^0 : 5\alpha_1 - \beta_1 = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

откуда $\alpha_1 = \frac{1}{6}$, $\beta_1 = \frac{5}{6}$. Следовательно,

$$\frac{s}{(s-1)(s+5)} = \frac{1/6}{(s-1)} + \frac{5/6}{(s+5)}.$$

Аналогично, для второго тождества вида $\frac{1}{(s-1)(s+5)} = \frac{\alpha_2}{(s-1)} + \frac{\beta_2}{(s+5)}$

получаем:

$$\frac{1}{(s-1)(s+5)} = \frac{\alpha_2}{(s-1)} + \frac{\beta_2}{(s+5)} = \frac{\alpha_2(s+5) + \beta_2(s-1)}{(s-1)(s+5)} = \frac{s(\alpha_2 + \beta_2) + 5\alpha_2 - \beta_2}{(s-1)(s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^1: \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ s^0: 5\alpha_2 - \beta_2 = 1 \end{cases},$$

откуда $\alpha_2 = \frac{1}{6}, \beta_2 = -\frac{1}{6}$. Следовательно,

$$\frac{1}{(s-1)(s+5)} = \frac{1/6}{(s-1)} + \frac{-1/6}{(s+5)}.$$

Тогда выражение для вычисления матричной экспоненты приобретает вид:

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1/6}{(s-1)} + \frac{5/6}{(s+5)}\right) + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1/6}{(s-1)} - \frac{1/6}{(s+5)}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1}{(s+5)}\right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} L^{-1}\left(\frac{1}{(s+5)}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} e^{-5t} - \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{-5t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-5t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2e^t + e^{-5t}) & \frac{2}{3}(e^t - e^{-5t}) \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-5t}) & \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, результаты вычисления матричной экспоненты методом диагонализации и с помощью преобразования Лапласа (обратного) совпали.

Найдем матричную экспоненту e^{At} для случая матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

алгебраический спектр которой состоит из вещественных кратных собственных значений. Собственные значения этой матрицы имеют представление $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Поскольку собственные значения кратные, то для вычисления матричной экспоненты необходимо построить жорданову форму матрицы в виде

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Матрица приведения исходной матрицы } A \text{ к жордановой форме}$$

имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (более подробный порядок вычислений матрицы

Жордана и матрицы приведения подобия T приведен в практической работе №3).

Тогда искомая матричная экспонента e^{At} принимает вид

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{Jt} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{-1t} & te^{-1t} & \frac{1}{2}t^2e^{-1t} \\ 0 & e^{-1t} & te^{-1t} \\ 0 & 0 & e^{-1t} \end{bmatrix} T^{-1} = \\ &= T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-1t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} te^{-1t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{-1t} \right) T^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{-t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{-t} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} & te^{-t} \\ te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 1-t & t \\ t + \frac{1}{2}t^2 & -t & 1+t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Порядок выполнения работы:

Для заданных в Таблице 5 в соответствии с вариантом матриц A и C :

1. Построить матричную экспоненту e^{At} для матрицы A с вещественным спектром некратных собственных значений:
 - а) методом диагонализации;
 - б) с помощью обратного преобразования Лапласа.
2. Построить матричную экспоненту e^{Ct} для матрицы C с вещественным спектром кратных собственных значений.

Содержание отчета:

1. Порядок построения матричной экспоненты e^{At} для матрицы A с вещественным спектром некратных собственных значений:
 - а) методом диагонализации;
 - б) с помощью обратного преобразования Лапласа.
2. Порядок построения матричной экспоненты e^{Ct} для матрицы C с вещественным спектром кратных собственных значений.
3. Выводы по работе.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Назовите преимущества вычисления матричной резольвенты с помощью алгоритма Д. Фаддеева.
2. На основе какого свойства матричных функций от матрицы базируется процедура вычисления матричной экспоненты?
3. Перечислите основные этапы вычисления матричной экспоненты методом диагонализации.
4. Перечислите основные этапы вычисления матричной экспоненты с помощью обратного преобразования Лапласа.
5. Запишите вид матричной экспоненты e^{Jt} при $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Таблица 5. Варианты задания матриц A и C

Вариант	Матрица A	Матрица C
1	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3	$\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Приложение 1. Преобразования Лапласа типовых функций

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $L\{f(t)\} = F(s)$
1	$f(t) = \delta(t)$ – дельта функция	$L\{\delta(t)\} = F(s) = 1$
2	$f(t) = 1$ – единичное воздействие	$L\{1\} = F(s) = 1/s$
3	$f(t) = t^n$ – степенное воздействие	$L\{t^n\} = F(s) = n!/s^{(n+1)}$
4	$f(t) = e^{\lambda t}$ – экспоненциальное воздействие	$L\{e^{\lambda t}\} = F(s) = (s - \lambda)^{-1}$
5	$f(t) = e^{\lambda t} t^n$ экспоненциально степенное воздействие	$L\{e^{\lambda t} t^n\} = F(s) = n!/(s - \lambda)^{n+1}$
6	$f(t) = \sin \omega t$ – синусоидальное гармоническое воздействие	$L\{\sin \omega t\} = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$f(t) = \cos \omega t$ – косинусоидальное гармоническое воздействие	$L\{\cos \omega t\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$f(t) = e^{\lambda t} \sin \omega t$ – затухающее синусоидальное воздействие ($\lambda < 0$)	$L\{e^{\lambda t} \sin \omega t\} = F(s) = \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$
9	$f(t) = e^{\lambda t} \cos \omega t$ – затухающее косинусоидальное воздействие ($\lambda < 0$)	$L\{e^{\lambda t} \cos \omega t\} = F(s) = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$
10	$f(t) = g(t) \sin \omega t$ – синусоидально-модулированное воздействие	$L\{g(t) \sin \omega t\} = F(s) = \frac{1}{2j} \left\{ G(s - j\omega) - G(s + j\omega) \right\}$
11	$f(t) = g(t) \cos \omega t$ – косинусоидально-модулированное воздействие	$L\{g(t) \cos \omega t\} = F(s) = \frac{1}{2} \left\{ G(s - j\omega) + G(s + j\omega) \right\}$
12	$f(t) = \sin \omega t $ – демодулированное воздействие	$L\{ \sin \omega t \} = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{\frac{-\pi s}{\omega}}}{1 - e^{\frac{-\pi s}{\omega}}}$

Приложение 2. Пример оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет Систем управления и робототехники

Направление: «название направления»

Практическая работа №____

наименование работы

по курсу

наименование курса

Выполнили:

Ф.И.О. студента

Группа:

№ группы

Преподаватель:

Ф.И.О. преподавателя

Работа выполнена с оценкой:

Санкт-Петербург
0000 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
4. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, дополненное. – СПб.: НИУ ИТМО, 2014.
5. Калужнин А.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
6. Прокофьев Л.Н. Жорданова нормальная форма матриц: методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 1996.

Дударенко Наталия Александровна
Синетова Мадина Мансуровна

Математические основы системного анализа.

Практикум для выполнения практических работ. Часть I

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А