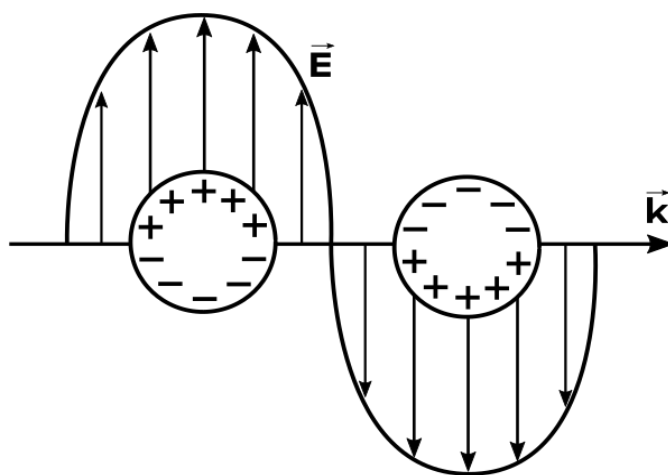


**Т.А. Вартанян, И.Ю. Никитин, Д.П. Щербинин,
А.А. Сапунова, А.В. Афанасьева**

ЛЕКЦИИ ПО НАНОПЛАЗМОНИКЕ. ЧАСТЬ 1



**Санкт Петербург
2025**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Т.А. Вартанян, И.Ю. Никитин, Д.П. Щербинин,
А.А. Сапунова, А.В. Афанасьева**

ЛЕКЦИИ ПО НАНОПЛАЗМОНИКЕ. ЧАСТЬ 1

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве Учебно-методическое пособие для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
магистратуры

ИТМО

**Санкт-Петербург
2025**

Вартанян Т.А., Никитин И.Ю., Щербинин Д.П., Афанасьева А.В., Сапунова А.А.,
Лекции по наноплазмонике. Часть 1 – СПб: Университет ИТМО, 2025. – 92 с.

Рецензент(ы):

Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") института "Высшая инженерно-техническая школа", Университета ИТМО,

Настоящее пособие предназначено для магистрантов второго курса, изучающих дисциплину «Наноплазмоника». В него включены материалы первых девяти лекций, в которых вводятся необходимые для освоения дисциплины сведения из электродинамики сплошных сред и излагаются основные сведения о резонансах плазмонного типа в системах пониженной размерности. Изложение материала основано на систематическом использовании модели Друде, которая позволяет с необходимой полнотой описать коллективные электронные возбуждения в простых металлах, которые представляют наибольший интерес в приложениях наноплазмоники. В то же время даются и общие формулировки, применимые к любым ситуациям, в которых возможно макроскопическое описание материалов с помощью диэлектрической проницаемости. Условия возбуждения плазмонных резонансов, сформулированные в терминах диэлектрической проницаемости, позволяют без труда использовать приобретенные знания при анализе процессов не только в металлических наночастицах, но и в таких, на первый взгляд сильно отличающихся материалах, как полярные диэлектрики и резонансные атомарные пары.

ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альянс победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2025

© Вартанян Т.А., Никитин И.Ю., Щербинин Д.П., Афанасьева А.В.,
Сапунова А.А., 2025

Оглавление

Введение.....	5
Литература	6
Лекция №1. Свободные электроны в металлах.....	8
Модель Друде	8
Плотность тока	9
Закон сохранения заряда в дифференциальной форме	10
Плоскопараллельная проводящая пластинка. Теорема Гаусса	13
Плазменная частота.....	14
Вопросы для самопроверки.....	16
Лекция №2. Проводимость металлов статическая и на переменном токе.....	18
Статическая проводимость	18
Переменный электрический ток в металлах	20
Уравнения Максвелла с источниками. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Закон полного тока.	23
Вопросы для самопроверки.....	26
Лекция №3. Диэлектрическая проницаемость.	28
Вопросы для самопроверки.....	33
Лекция №4. Волновое уравнение. Дисперсионное соотношение	36
Вопросы для самопроверки.....	41
Лекция №5. Поверхностный плазмонный резонанс.....	43
Расчет поля точечного заряда у поверхности раздела двух диэлектриков... ..	46
Вопросы для самопроверки.....	52
Лекция №6. Дипольный момент. Поле и потенциал диполя.....	53
Понятие дипольного момента.....	53
Дипольный момент и его свойства.....	53
Диполь вблизи металлической поверхности.....	61
Вопросы для самопроверки.....	63
Лекция №7. Локализованный плазмонный резонанс	64
Вопросы для самопроверки.....	70
Лекция №8. Отражение света на границе двух сред. Полное внутреннее отражение. Глубина проникновения. Угол Брюстера.....	72
Вопросы для самопроверки.....	85
Лекция №9. Поверхностный плазмон-поляритон.....	86
Вопросы для самопроверки.....	86

Введение

Наноплазмоника – новый, быстро развивающийся раздел классической электродинамики сплошных сред, отличающийся простотой средств исследования и широкими перспективами применения в фотовольтаике, биомедицине и сенсорике. Все среды, изучение которых относится к наноплазмонике, обладают одной характерной особенностью – вещественная часть их диэлектрической проницаемости в определенном диапазоне длин волн отрицательна. Эта особенность ведет к совершенно неожиданным выводам из самых простых, известных из школьного курса физики формул, которые полностью подтверждаются на практике и уже нашли промышленное применение. Понижение размерности таких сред, в частности, формирование из них тонких – наноразмерных – пленок, проволок и наночастиц позволяет манипулировать электромагнитными полями гораздо свободнее, чем при использовании сред с положительной диэлектрической проницаемостью. Так, несмотря на то что в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью электромагнитные волны не распространяются, а быстро затухают без осцилляций, напряженность электрического поля внутри металлической наночастицы и вблизи ее поверхности может оказаться во много раз больше, чем в падающей на нее электромагнитной волне. Поскольку область усиления поля определяется размерами наночастицы, одновременно решается и проблема субволновой, то есть в пространственной области многократно меньшей длины волны излучения, локализации электромагнитного излучения.

Усиление и локализация поля вблизи наноструктур, обладающих резонансами плазмонного типа, позволяют использовать такие структуры в разнообразных приложениях. Самым известным из таких приложений является, несомненно, гигантское комбинационное рассеяние (ГКР в русской литературе, surface-enhanced Raman spectroscopy – SERS – в англоязычной), открытое 50 лет назад [1]. Благодаря усилению полей, как падающего излучения, так и рассеянного, исходно слабый сигнал комбинационного рассеяния оказался возможным регистрировать от предельно малых количеств комбинационно-активного вещества. Интересные возможности открывает использование плазмонных наноструктур в фотовольтаике. Локальное усиление поля позволяет добиться лучшего использования падающего излучения в тонких слоях относительно слабо поглощающего фоточувствительного вещества.

Наибольшие успехи достигнуты в использовании поверхностного плазмонного резонанса (ППР в русской литературе, surface plasmon resonance – SPR – в англоязычной) для рефрактометрии, безметочной регистрации крупных (биологических) молекул (Label-free biosensing) и исследовании кинетики химических реакций, интересных для фарминдустрии. С 2019 по 2023 год рынок систем ППР рос со среднегодовым темпом 5,9%. Близкие значения темпа роста прогнозируются и на ближайшие 10 лет [2]. Системы

на основе ППР используются при разработке биологических препаратов, для характеристики белков, скрининга антител и контроля качества в процессах производства биофармацевтических препаратов. Системы на основе ППР применяются в мониторинге окружающей среды, определении безопасности пищевых продуктов, клинической диагностике, борьбе с фальсификацией спиртосодержащего моторного топлива. В 2024 году ППР устройства будут проданы на 1 млрд. долларов. Одновременно с расширением области применения ППР активизируется поиск новых вариантов его использования в комбинации с планарными волноводами [3,4], оптическим волокном [5,6], фотонными кристаллами и другими перспективными структурами.

Настоящее пособие предназначено для магистрантов второго курса, изучающих дисциплину «Наноплазмоника». В него включены материалы первых девяти лекций, в которых вводятся необходимые для освоения дисциплины сведения из электродинамики сплошных сред и излагаются основные сведения о резонансах плазмонного типа в системах пониженной размерности. Изложение материала основано на систематическом использовании модели Друде, которая позволяет с необходимой полнотой описать коллективные электронные возбуждения в простых металлах, которые представляют наибольший интерес в приложениях наноплазмоники. В то же время даются и общие формулировки, применимые к любым ситуациям, в которых возможно макроскопическое описание материалов с помощью диэлектрической проницаемости. Условия возбуждения плазмонных резонансов, сформулированные в терминах диэлектрической проницаемости, позволяют без труда использовать приобретенные знания при анализе процессов не только в металлических наночастицах, но и в таких, на первый взгляд сильно отличающихся материалах, как полярные диэлектрики и резонансные атомарные пары.

Литература

1. Eric C. Le Ru, Baptiste Augu  . Enhancement Factors: A Central Concept during 50 Years of Surface-Enhanced Raman Spectroscopy, ACS Nano 2024, 18, 9773–9783.
<https://doi.org/10.1021/acsnano.4c01474>
2. Future Market Insights,
<https://www.futuremarketinsights.com/reports/surface-plasmon-resonance-spr-systems-market>
3. Kaifu Chen, Xingbing Li, Tianye Huang, Yuye Wang, Shuwen Zeng, Fano Resonance-Plasmonic Biosensors Based on Strong Coupling of Hybrid Plasmonic-Photonic Modes, Plasmonics (2024)
4. Xinran Wei, Yuzhang Liang, Yiding Zheng, Kaili Kuang, Qiao Wang, Yi Han, Cheng Yang, Yurui Fang, Wei Peng, Plasmonic hybridized modes empowered by strong plasmon interaction in the nanograting-dielectric-

- metal stacked structure, Journal of Physics D: Applied Physics 57, 215105 (2024)
5. М.Г. Гущин, Д.О. Гагаринова, С.А. Плясцов, Т.А. Вартанян, Создание и определение чувствительности волоконно-оптического рефрактометра на основе поверхностного плазмонного резонанса, Оптика и спектроскопия, 2021, том 129, вып. 9, С. 1212 – 1216. (M.G. Gushchina, D.O. Gagarinova, S.A. Plyastsov, T.A. Vartanyan, Design of a Fiber-Optic Refractometer Based on Surface Plasmon Resonance and Its Sensitivity, Optics and Spectroscopy, 2021. © Pleiades Publishing, Ltd., 2021).
 6. Hyun-Tae Kim, Miao Yu, On-Fiber Multiparameter Sensor Based on Guided-Wave Surface Plasmon Resonances, Journal of Lightwave Technology 40, 2157 (2022)

Лекция №1. Свободные электроны в металлах

Описание лекции:

В этой лекции будут рассмотрены макроскопические параметры, определяющие характер коллективного движения электронов, такие как плотность тока, напряженность поля и плазменная частота.

Задачи:

- Ознакомиться с моделью Друде
- Получить дифференциальную форму закона сохранения заряда
- Рассмотреть напряженность поля в пластинке
- Ознакомиться с таким параметром, как плазменная частота

Рассматриваемые разделы:

1. Модель Друде
2. Плотность тока
3. Закон сохранения заряда в дифференциальной форме
4. Плоскопараллельная проводящая пластинка. Теорема Гаусса
5. Плазменная частота

Модель Друде

Одноэлектронная модель, в рамках которой удается описать очень многие свойства вещества, не подходит для описания возбуждений плазмонного типа, которые являются коллективными возбуждениями электронов проводимости в металлах. Основные свойства коллективных возбуждений электронов проводимости оказывается возможным описать в рамках относительно простой макроскопической теории, которую принято называть моделью Друде.

В модели Друде рассматриваются только свободные электроны, движущиеся под действием электрического поля и создающие своим движением электрический ток. Необходимо отметить, что модель Друде является классической теорией, описывающей движение электронов в металлах. При этом теория является достаточно простой и хорошо описывает свойства металлов. Теория Друде развивает представления молекулярно-кинетической теории и применяет ее для описания свойств металлов. В теории Друде принимается, что в металле положительные ионы формируют остов кристаллической решетки, в то время как электроны ведут себя как идеальный газ, а их движение полностью описывается законами Ньютона.

Плотность тока

Для описания движения электронов в металле удобно вести понятие плотности тока $\vec{j}$. Под плотностью тока будем понимать вектор, который характеризует как направление движения зарядов, так и количество заряда, проходящего за единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярную к направлению движения зарядов. Зная концентрацию электронов n , их скорость движения $\vec{v}$ и переносимый ими заряд e , можно записать следующее уравнение:

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (1.1)$$

Плотность тока также удобно выразить и через импульс электрона $\vec{p}$ и массу электрона m :

$$\vec{j} = en\vec{v} = \frac{en\vec{p}}{m}. \quad (1.2)$$

В разных точках пространства и в разные моменты времени плотность тока может быть различной, то есть плотность тока – это векторная функция четырех переменных: трех пространственных координат и времени. Как видно, электрический заряд, масса и плотность числа электронов служат основными параметрами, характеризующими металл с точки зрения его электрических свойств. Поскольку заряд электрона и его массу мы считаем константами в рамках рассматриваемых моделей, то основным параметром, отличающим один металл от другого, является концентрация электронов.

Основные параметры, которые будут рассматриваться в лекциях, приведены ниже в таблице 1:

Таблица 1. Параметры и их обозначения

Параметр	Обозначение
Круговая частота	ω
Заряд электрона	e
Масса электрона	m
Скорость электрона	$\vec{v}$
Импульс электрона	$\vec{p}$
Время релаксации импульса	τ
Скорость релаксации импульса	ν
Плотность (концентрация) электронов	n
Плотность заряда (объемная)	ρ
Поверхностная плотность заряда	σ
Плотность тока	$\vec{j}$
Проводимость	$\sigma(\omega)$
Статическая проводимость	σ_0
Напряженность электрического поля	$\vec{E}$

Закон сохранения заряда в дифференциальной форме

Одним из наиболее твердо установленных физических законов является закон сохранения электрического заряда, согласно которому заряды не возникают и не исчезают, а только перемещаются. Если в одном месте их становится больше, то в каком-то другом месте их обязательно становится меньше. Более точно, изменение заряда внутри любого объёма определяется только тем, как заряды в него втекают и как они из него вытекают. Отсюда следует, что изменение заряда в любом объеме можно связать с током в окружающем этот объем пространстве. Рассмотрев физически бесконечно малый объем, закон сохранения заряда можно выразить в удобной для дальнейших применений дифференциальной форме.

Введем прямоугольную систему координат. В трехмерном пространстве, в котором мы живем, существуют две системы координат, отличающиеся взаимной ориентацией положительных направлений их осей. На рис. 1 изображена правая система координат, отличающаяся тем, что при вращении правого винта в направлении от положительного направления оси x к положительному направлению оси y сам винт будет перемещаться в

положительном направлении оси z . Лево́й системой координат, которая отличается от изображенной на рис. 1.1 только тем, что положительное направление оси z у нее заменено на противоположное, мы использовать не будем.

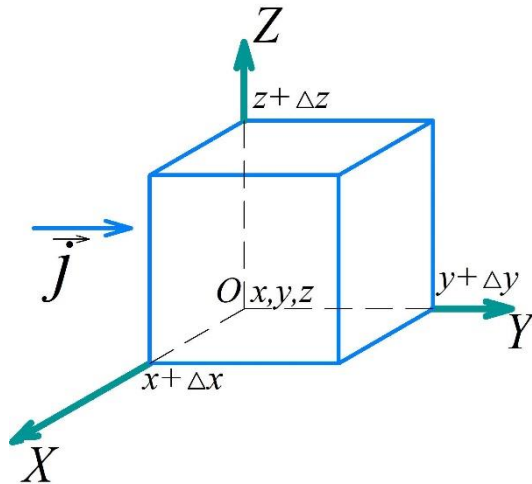


Рисунок 1.1 – Правая прямоугольная (декартова) система координат (X , Y , Z) и выделенный вблизи начала координат физически бесконечно малый объем

После введения системы координат положение любой точки в пространстве задается ее координатами, то есть тремя числами x , y и z , которые удобно считать компонентами единого объекта – радиус-вектора $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, в котором $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ обозначают векторы единичной длины, направленные вдоль соответствующих осей координат.

Для расчета заряда, сосредоточенного внутри маленького параллелепипеда с ребрами длиной Δx , Δy и Δz , удобно ввести новую величину – плотность заряда:

$$\rho = \frac{q}{V}, \quad (1.3)$$

где q – заряд, а V – занимаемый им объём.

Поскольку объем параллелепипеда, изображенного на рис. 1, определяется выражением $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, то заряд в нём $\Delta q = \Delta V \rho$. Заряд внутри параллелепипеда будет меняться в зависимости от соотношения между входящими в него и исходящими из него потоками электронов через все шесть его граней. Чтобы учесть величину входящего и исходящего потоков, необходимо иметь в виду, что вектор плотности тока зависит от радиус-вектора $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, то есть на гранях выделенного нами параллелепипеда плотности тока различны.

Согласно определению вектора плотности тока, через грань XOZ за единицу времени втекает заряд $j_y(y)\Delta x\Delta z$, где $\Delta x\Delta z$ - площадь грани. За это же время через противоположную грань вытекает несколько отличный заряд, поскольку j_y неодинаков на разных гранях кубика, а именно, на противоположной грани плотность тока в первом приближении составляет:

$$j_y(y + \Delta y) = j_y(y) + \frac{\partial j_y}{\partial y}\Delta y. \quad (1.4)$$

В таком случае изменение заряда внутри выделенного параллелепипеда из-за того, что плотности тока на противоположных гранях различны, равно разности плотностей тока на противоположных гранях $-\frac{\partial j_y}{\partial y}\Delta y$, умноженной на площадь этих граней $\Delta x\Delta z$, то есть:

$$\Delta\rho = -\frac{\partial j_y}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z. \quad (1.5)$$

Вклад двух других пар граней можно подсчитать тем же способом. Таким образом, изменение заряда внутри выделенного объема составляет:

$$-\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

С другой стороны, изменение заряда внутри выделенного параллелепипеда в единицу времени можно выразить через производную от плотности заряда ρ по времени как:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

$\Delta x\Delta y\Delta z$ – объем параллелепипеда. В силу закона сохранения заряда единственной причиной изменения заряда внутри выделенного объема может быть только перемещение в него зарядов извне. Поэтому, приравнявая друг другу изменения заряда в выделенном объеме, вычисленные двумя разными способами, и сокращая на объем параллелепипеда, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Используя обозначение для суммы частных производных компонент вектора плотности тока через векторную операцию дивергенции:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \operatorname{div}(\vec{j}), \quad (1.7)$$

выражение закона сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0. \quad (1.8)$$

Плоскопараллельная проводящая пластинка. Теорема Гаусса

Закон Кулона гласит: сила $\vec{F}$, с которой один покоящийся заряд q_1 действует на другой покоящийся заряд q_2 , находящийся на расстоянии r от первого заряда, равна:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.9)$$

где единичный вектор $\frac{\vec{r}}{r}$ определяет направление силы.

Для того, чтобы охарактеризовать поле первого заряда независимо от того, есть второй заряд или нет, вводится напряженность электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.10)$$

Напряженность электрического поля заряда q так зависит от $\vec{r}$, что:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

и равна нулю везде, кроме той точки, в которой находится заряд. Как мы видели при расчете потока плотности тока через поверхность выделенного параллелепипеда, его отношение к объему в пределе при уменьшении объема сводится к дивергенции. Аналогичным образом можно рассмотреть поток любого другого вектора, в частности вектора напряженности электрического поля. Особенно просто вычислить поток вектора напряженности электрического поля через сферу, окружающую заряд, расположенный в ее центре. В этом случае вектор напряженности электрического поля везде перпендикулярен поверхности сферы и одинаков по величине, так что его поток Φ через поверхность сферы равен произведению его модуля $\frac{q}{r^2}$ на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$:

$$\Phi = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q. \quad (1.11)$$

Согласно закону Гаусса, формула (1.11) устанавливает общую связь между потоком вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность и заключенным внутри этой поверхности зарядом. Прделав вычисления, аналогичные проведенным выше для случая потока вектора плотности тока, и приняв во внимание очевидную связь $q = \rho V$, можно получить дифференциальную форму закона Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (1.12)$$

С помощью интегральной формы закона Гаусса можно легко рассчитать поля, создаваемые некоторыми симметричными распределениями заряда. В частности, для заряда, равномерно распределенного на плоскости с плотностью σ , уже из соображений симметрии следует, что напряженность электрического поля везде перпендикулярна плоскости и одинакова по модулю, но направлена в противоположные стороны с обеих сторон от плоскости. Тогда применение закона Гаусса к замкнутой поверхности, охватывающей небольшой участок заряженной плоскости с обеих сторон, позволяет найти модуль вектора напряженности электрического поля, который оказывается равным:

$$E = 2\pi\sigma, \quad (1.13)$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Плазменная частота

Рассмотрим простейший случай коллективного движения электронов проводимости – колебания в тонкой проводящей пластинке. Определенная выше связь напряженности электрического поля с плотностью поверхностного заряда позволит определить характерную частоту коллективного движения электронов, которая получила название плазменной частоты.

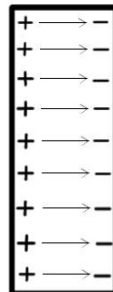


Рисунок 1.2 – Поверхностные заряды, образующиеся при коллективном смещении всех электронов в пластинке в одну и ту же сторону на одно и то же расстояние

Итак, рассмотрим согласованное смещение всех электронов в металлической пластинке перпендикулярно её поверхности на расстояние x (рис. 2). В результате такого смещения на обеих поверхностях пластинки образуются заряды. В силу малости смещения будем рассматривать эти заряды как поверхностные. Знаки этих зарядов на противоположных сторонах пластинки противоположны, а величину заряда на каждой из сторон естественно охарактеризовать поверхностной плотностью. Поскольку $\sigma = \rho x$, то $\sigma = enx$.

Складывая поля, созданные зарядами на обеих сторонах пластинки (1.13), можно найти напряженность электрического поля внутри пластинки:

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi enx. \quad (1.14)$$

Это поле однородно в объеме пластинки и действует одинаковым образом на все электроны. Поскольку электроны в модели Друде считаются свободными, их ускорение, которое можно рассчитать по второму закону Ньютона с учетом единственной силы, которая на них действует со стороны электрического поля, появившегося в результате коллективного смещения электронов:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.15)$$

Выразив силу, действующую на заряд со стороны поля, как произведение напряженности поля на величину заряда, получим:

$$F = -eE = -4\pi e^2 nx. \quad (1.16)$$

Таким образом, проведенный расчет сил, действующих одинаковым образом на все электроны в пластинке, позволяет получить дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять величина коллективного смещения всех электронов:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi e^2 n}{m} x = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) описывает классический гармонический осциллятор. Из вида уравнения понятно, что величина смещения электронов будет зависеть от времени. Как известно из механики, это уравнение описывает колебательную систему, совершающую гармонические колебания на частоте, заданной коэффициентами выведенного уравнения движения. Найдем частоту таких колебаний, которые могут происходить в пластинке, предоставленной самой себе, без каких-либо внешних воздействий. Такие

частоты принято называть собственными частотами системы. В данном случае коллективных колебаний заряженных частиц собственную частоту коллективных колебаний называют плазменной частотой.

Для того, чтобы вычислить плазменную частоту необходимо найти решение уравнения (1.17). Будем искать решение этого обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка в виде комплексной экспоненты:

$$x = x_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.18)$$

Дважды продифференцируем по t :

$$\frac{dx}{dt} = x_0 e^{-i\omega t} (-i\omega); \quad (1.19)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x_0 (-i\omega) e^{i\omega t} (-i\omega) = -x_0 \omega^2 e^{i\omega t}, \quad (1.20)$$

подставим (1.18) и (1.20) в (1.21)

$$-x_0 \omega^2 e^{i\omega t} + \frac{4\pi e^2 n}{m} x_0 e^{i\omega t} = 0. \quad (1.21)$$

Сократив на $x_0 e^{i\omega t}$ – величину, которая не может обращаться в ноль, получим квадрат собственной частоты, на которой и происходят колебания

$$\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \quad (1.22)$$

Именно эту частоту называют плазменной.

Вопросы для самопроверки

1. Что описывает классическая теория Друде?
2. На каких допущениях основана теория Друде?
3. Дайте определение плотности тока.
4. Какими параметрами можно охарактеризовать металл с точки зрения его электрических свойств?
5. Чем может быть вызвано изменение заряда в некотором выделенном объеме металла?
6. Запишите закон сохранения заряда в дифференциальной форме.
7. При каких условиях дивергенция напряженности электрического поля отлична от нуля?
8. Сформулируйте закон Гаусса.
9. Что характеризует плазменная частота?

10. Что характеризуют собственные частоты?

Лекция №2. Проводимость металлов статическая и на переменном токе

Описание лекции:

В данной лекции будут рассмотрены уравнения, учитывающие релаксационные процессы, проводимость металла в переменном электрическом поле и уравнения Максвелла.

Задачи:

- Получить выражение проводимости металла на постоянном токе
- Рассмотреть переменное электрическое поле
- Получить выражение проводимости металла в переменном гармоническом поле
- Рассмотреть предельные случаи больших и малых частот
- Изучить уравнения Максвелла с источниками

Рассматриваемые разделы:

1. Статическая проводимость металла
2. Переменный электрический ток
3. Предельные случаи для высокочастотной проводимости
4. Уравнения Максвелла с источниками
5. Закон полного тока
6. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

Статическая проводимость

Ток – это коллективное движение электронов, которое может быть вызвано разными причинами. В данный момент для нас представляет интерес ток, вызванный действием постоянного по величине и направлению электрического поля.

Сила, которую оказывает внешнее электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ на заряд e , равна:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot e. \quad (2.1)$$

Согласно 2-му закону Ньютона:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (2.2)$$

Электрон приобретет ускорение:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{E} \cdot e}{m}. \quad (2.3)$$

Ускорение можно выразить через производные по времени от скорости или от импульса согласно следующим формулам:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.4)$$

Ускоренное движение электрона под действием электрического поля ограничено по времени из-за многих причин, к которым относятся несовершенства кристаллической решетки, ее тепловые колебания, присутствие примесных атомов, столкновения с другими электронами. После столкновения электрон теряет приобретенную в результате ускорения скорость направленного движения и рассеивается в направлении, которое не связано с направлением его движения до столкновения. В модели Друде используется простейшее описание этих процессов путем введения среднего времени между столкновениями τ .

Под действием силы, вызванной электрическим полем, электрон движется с ускорением и за время τ приобретает скорость:

$$\vec{v} = \tau \vec{a}. \quad (2.5)$$

Будем считать, что скорость электрона после рассеяния никак не связана с его скоростью до рассеяния, а среднее время между актами рассеяния как раз равно τ . Тогда плотность тока $\vec{j}$ вызванного действием электрического поля с напряженностью $\vec{E}$, равна:

$$\vec{j} = en\vec{v} = en\tau \vec{a} = en\tau \frac{\vec{E}e}{m} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}. \quad (2.6)$$

Эта дифференциальная форма закона Ома связывает локально плотность тока и напряженность электрического поля в той же точке пространства. Коэффициент пропорциональности, который связывает модуль вектора плотности тока с модулем вектора напряженности электрического тока, называется проводимостью на постоянном токе σ_0 :

$$\vec{j} = \sigma_0 \cdot \vec{E}. \quad (2.7)$$

Таким образом, введение среднего времени между столкновениями позволяет определить важнейшую характеристику металла – его статическую проводимость, другими словами, проводимость на постоянном токе:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (2.8)$$

Процессы столкновения и рассеяния электронов могут быть описаны более общим образом как релаксация импульса направленного движения электронов. Используя уже введенный параметр τ запишем уравнение:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{p} = 0, \quad (2.9)$$

решение которого:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.10)$$

Данное решение описывает постепенное уменьшение импульса направленного движения электронов с характерным временем релаксации импульса τ .

Переменный электрический ток в металлах

Вычисление проводимости в постоянном электрическом поле недостаточно для рассмотрения оптических процессов, поскольку в световой волне электромагнитное поле изменяется настолько быстро, что проводимость материалов становится зависимой от скорости этих изменений. Проще всего начать рассмотрение оптических свойств металлов с расчета проводимости на переменном токе, то есть зависимости плотности тока, возникающего под действием гармонически изменяющегося электрического поля, от величины и частоты изменения электрического поля.

При описании оптических свойств металлов удобно использовать комплексное представление гармонических функций в следующем виде:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.11)$$

При использовании комплексного представления (2.11) подразумевается, что физической величине соответствует только вещественная часть комплексной функции, а именно $\vec{E}_0 \cos \omega t$. Удобство такого представления связано с простотой дифференцирования экспоненциальной функции, а сама возможность его использования связана с тем, что над полями производятся только линейные операции, которые могут производиться независимо над вещественной и мнимой частями выражений. Для вычисления энергетических соотношений, в которые входят квадраты и произведения полей, будут сформулированы дополнительные правила обращения с комплексными величинами.

Отметим, что знак перед мнимой единицей в уравнении (2.11) может быть любым – это вопрос соглашения, так как вещественная часть выражения при этом не изменяется. В разных исследовательских и инженерных сообществах приняты различные соглашения в отношении этого

знака. В публикациях, относящихся к радиодиапазону, в большинстве случаев используется знак «плюс». Во всем дальнейшем изложении мы будем придерживаться знака «минус», использованного в уравнении (2.11), так как в большинстве работ по оптике используется именно этот выбор знака.

Изменение импульса электрона под действием переменного электрического поля описывается вторым законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.12)$$

Релаксацию импульса, обусловленную столкновениями электронов друг с другом, дефектами кристаллической структуры, примесями и прочими факторами, учтем путем введения соответствующих членов непосредственно в уравнение движения, используя представление релаксационных членов по аналогии с ранее выведенными соотношениями (2.9) и (2.10). Приняв, что среднее время между столкновениями равно τ , включим соответствующий дополнительный член в уравнение движения. Таким образом для какой-либо одной проекции импульса можно получить следующее:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\tau}p = eE_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) позволяет учесть оба фактора, влияющих на движение электрона: переменную внешнюю силу $eE_0 e^{-i\omega t}$ и релаксацию импульса вследствие столкновений $\frac{1}{\tau}p$. Прежде всего, найдем установившееся решение уравнения движения, подставив в уравнение пробное решение в виде:

$$p = p_{уст} e^{-i\omega t}. \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) в (2.13) и выполнив дифференцирование, получим:

$$p_{уст} e^{-i\omega t} (-i\omega) + \frac{1}{\tau} p_{уст} e^{-i\omega t} = eE_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.15)$$

Теперь все члены уравнения зависят от времени одинаково, и для его выполнения достаточно, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$p_{уст} = \frac{eE_0}{\frac{1}{\tau} - i\omega}. \quad (2.16)$$

Зависимость плотности тока от напряженности электрического поля получается в виде:

$$j_0 = \frac{enp_{уст}}{m} = \frac{ene}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} E_0; \quad (2.17)$$

Теперь можно определить проводимость металла на переменном токе $\sigma(\omega)$ как отношение комплексной амплитуды плотности тока к комплексной амплитуде напряженности электрического поля:

$$j_0 = \sigma(\omega) E_0, \\ \sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)}. \quad (2.18)$$

Используя определенную ранее проводимость на постоянном токе σ_0 , запишем проводимость на переменном токе (высокочастотную проводимость) в следующем виде:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (2.19)$$

Поскольку проводимость – величина комплексная, необходимо рассмотреть ее вещественную и мнимую части по отдельности:

$$\sigma(\omega) = \text{Re} [\sigma(\omega)] + i \text{Im} [\sigma(\omega)], \quad (2.20)$$

$$\text{Re} [\sigma(\omega)] = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (2.21)$$

$$\text{Im} [\sigma(\omega)] = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \sigma_0. \quad (2.22)$$

Графики зависимостей вещественной и мнимой частей проводимости приведены на рис. 2.1.

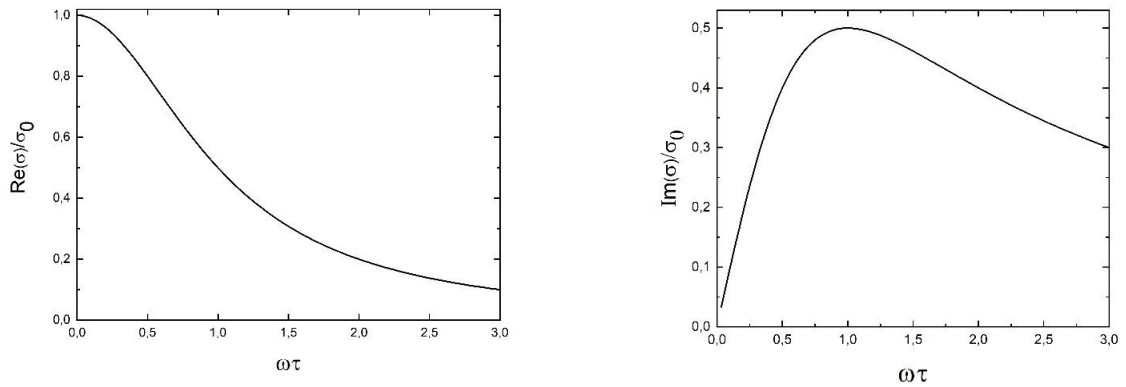


Рисунок 2.1 – Зависимость действительной и мнимой частей проводимости от частоты

Рассмотрим зависимость высокочастотной проводимости от частоты в предельных случаях малых и больших частот.

Если $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, то мнимая часть проводимости мала, а вещественная часть сводится к статической проводимости:

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (2.23)$$

Если $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, то и вещественная, и мнимая части диэлектрической проницаемости с увеличением частоты стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma(\omega) &\approx \frac{\sigma_0}{\omega^2 \tau^2} = \frac{ne^2}{m\tau\omega^2} \ll \text{Im } \sigma(\omega), \\ \text{Im } \sigma(\omega) &\approx \frac{\sigma_0}{\omega\tau} = \frac{ne^2}{m\omega}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Мнимая часть высокочастотной проводимости при больших частотах больше вещественной и не зависит от скорости релаксации импульса.

Уравнения Максвелла с источниками. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Закон полного тока.

Электромагнитное поле в вакууме в каждой пространственной точке $\vec{r}$ в любой момент времени t определяется заданием двух векторов: напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$. Через эти же векторы выражается сила, действующая в электромагнитном поле на заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$ (сила Лоренца):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (2.25)$$

Источниками электромагнитного поля являются заряды и токи, для характеристики которых в сплошных средах служат объемная плотность заряда ρ и вектор плотности тока $\vec{j}$.

Теорема Гаусса устанавливает общую связь между потоком вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность и заключенным внутри этой поверхности зарядом:

$$\Phi = 4\pi q. \quad (2.26)$$

В частном случае, когда единственный точечный заряд окружен сферической поверхностью, центр которой совмещен с местом нахождения заряда, получаем для напряженности электрического поля:

$$E = \frac{q}{r^2}. \quad (2.27)$$

Площадь поверхности $S = 4\pi r^2$.

Учитывая, что напряженность электрического поля на всей поверхности концентрической сферы одинакова и перпендикулярна к ней получим:

$$\Phi = ES = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q. \quad (2.28)$$

Для перехода к дифференциальной форме закона Гаусса рассмотрим в качестве замкнутой поверхности совокупность граней куба, расположенного в начале координат. Вычисления в значительной мере аналогичны расчету, выполненному ранее при выводе дифференциальной формы закона сохранения заряда. Используем ту же систему координат, но вместо потока вектора плотности тока, рассмотрим поток вектора напряженности электрического поля. Будем обозначать длины ребер куба в соответствии с их расположением вдоль осей координат. Сначала определим поток вектора напряженности электрического поля через его нижнюю грань, площадь которой равна $\Delta y \Delta x$, а нормальная компонента напряженности электрического поля равна E_z . Поскольку нормаль к этой грани направлена в отрицательную сторону оси z , поток составит $-E_z \Delta x \Delta y$. Затем, вычислим поток вектора напряженности электрического поля через противоположащую верхнюю грань. Площадь этой грани такая же, но величина нормальной компоненты напряженности электрического поля отличается и равна:

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta z,$$

нормаль к этой грани направлена в положительную сторону оси z . В результате сумма потоков через две противоположащие грани оказалась равной:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta V.$$

Суммируя потоки через все три пары противоположащих граней, получим:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V = \Phi. \quad (2.29)$$

С другой стороны, по теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен заключенному в ней заряду, умноженному на 4π . Это позволяет, используя определения дивергенции вектора как предела отношения потока вектора через поверхность, охватывающую некоторый объем, к величине этого объема при стремлении объема к нулю и плотности заряда, выразить связь электрического поля с его источником в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (2.30)$$

Поскольку в природе не существует (точнее будет сказать, что до сих пор не найдены) магнитных зарядов, аналогичное рассмотрение приводит к уравнению, утверждающему равенство нулю дивергенции вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.31)$$

Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея записывается с помощью операции ротора, примененной к вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$. Исходное (интегральное) уравнение связывает циркуляцию вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ с изменением во времени потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через замкнутый контур, для которого рассчитана циркуляция вектора $\vec{E}$. Переход от интегрального уравнения к дифференциальному производится в этом случае аналогично переходу, описанному для закона Гаусса, путем последовательного рассмотрения циркуляций вдоль трех бесконечно малых замкнутых контуров, расположенных в соответствующих координатных

плоскостях. В результате получается дифференциальная форма закона индукции Фарадея:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (2.32)$$

Знак минус является частным случаем правила Ленца, состоящего в том, что электродвижущая сила направлена таким образом, что возникающей под ее действием ток создает магнитное поле, препятствующее изменению потока.

Закон полного тока, переписанный в дифференциальной форме, включает помимо плотности тока дополнительный член, обусловленный изменением напряженности электрического поля во времени:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Именно этот член, введенный Максвеллом, обеспечивает согласованность полной системы уравнений Максвелла с законом сохранения заряда. Обнаруженное Максвеллом несоответствие между известными на тот момент законами, описывающими электрические и магнитные поля, и твердо установленным законом сохранения заряда дало ему основание для включения дополнительного члена в систему уравнений, которая в последствии получила его имя. Из получившейся системы уравнений следовало существование нового явления –изменяющегося в пространстве и во времени электромагнитного поля, распространяющегося в областях, свободных от зарядов и токов.

Вопросы для самопроверки

1. Как описывается рассеяние электронов при движении в металле в рамках теории Друде? Что можно сказать о направлении и скорости электрона до и после акта рассеяния?
2. От каких параметров зависит статическая проводимость металлов?
3. Запишите выражение для проводимости металлов на переменном токе.
4. Что можно сказать о действительной и мнимой части проводимости металла, когда частота поля много меньше скорости релаксации направленного движения электронов?
5. Что можно сказать о действительной и мнимой части проводимости металла, когда частота поля много больше скорости релаксации направленного движения электронов?
6. Какими векторами можно охарактеризовать электромагнитное поле?

7. Что известно о дивергенции векторов напряженности электрического поля и индукции магнитного поля?
8. Какие законы электромагнетизма описывают роторные уравнения в системе уравнения Максвелла?
9. О чем свидетельствует знак минус перед производной вектора индукции магнитного поля в дифференциальной форме закона индукции Фарадея?
10. Какая величина в законе Ампера называется «ток смещения» и зачем она нужна?

Лекция №3. Диэлектрическая проницаемость.

Описание лекции:

В этой лекции описывается электромагнитное поле в диэлектрической среде, вводится понятие диэлектрической проницаемости среды как комплексной величины, у которой есть как действительная, так и мнимая часть.

Задачи:

- Получить выражение для диэлектрической проницаемости в модели Друде
- Рассмотреть зависимость диэлектрической проницаемости металлов от частоты

Рассматриваемые разделы:

1. Связь диэлектрической проницаемости с проводимостью
2. Характерное поведение электромагнитных волн высокой и низкой частоты

В предыдущем разделе было получено выражение, описывающее зависимость проводимости металлов от частоты внешнего электрического поля в рамках модели Друде. Воспользуемся этим результатом для расчета диэлектрической проницаемости металлов.

В модели Друде вещество представляется состоящим из положительно заряженных ионов, образующих кристаллический остов, и отрицательно заряженных свободных электронов, ведущих себя как идеальный газ. При этом, как мы знаем, заряды создают вокруг себя электрическое поле, а движущиеся заряды возбуждают магнитное поле. Таким образом, чтобы определить вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектор магнитной индукции $\vec{B}$ внутри металла, необходимо рассмотреть решения уравнений Максвелла с учетом источников поля – зарядов и токов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.4)$$

Необходимо отметить, что под действием внешнего воздействия (например, периодического поля оптической волны) происходит перераспределение зарядов. Как мы показывали выше, в рамках модели Друде можно считать, что электроны подчиняются законам Ньютона и тогда их преимущественное направление движения определяется внешним электрическим полем. Таким образом, можно заключить, что движение электронов является согласованным, а значит существует однозначная связь между суммарным полем, создаваемым носителями заряда внутри металла и внешним падающим полем. Что не менее важно, поле внутри металла определяется величиной и направлением внешнего поля не только в данный момент времени, но и во все предыдущие моменты. В таком случае оказывается удобным ввести новую векторную величину – вектор электрического смещения (электрической индукции) $\vec{D}$, который будет описывать поле внутри металла как суперпозицию падающего поля и полей, созданных носителями заряда. Учитывая все вышесказанное, можно постулировать, что внешнее поле $\vec{E}$ и внутреннее $\vec{D}$ будут связаны через некоторый макроскопический параметр. Назовем этот параметр диэлектрической проницаемостью ε :

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}. \quad (3.5)$$

Таким образом, с одной стороны диэлектрическая проницаемость определяет связь внешнего поля и поля внутри среды, а с другой описывает коллективное перераспределение зарядов внутри среды. Необходимо отметить, что в силу инерционности процесса перераспределения зарядов, величина диэлектрической проницаемости будет зависеть от частоты внешнего воздействия. Действительно, если поле будет меняться достаточно быстро, то заряды не будут успевать эффективно перераспределяться. С другой стороны, если поле будет меняться достаточно медленно по сравнению со временем, необходимым для установления равновесного состояния – мы фактически будем иметь случай дающий близкий результат к электростатике. Так же необходимо отметить, что выражение (3.5) постулирует линейную связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, что справедливо только в случае относительно слабых полей. При воздействии мощного лазерного излучения зависимость будет иметь более сложный вид, что, однако, является предметом изучения других разделов оптики, и выходит за рамки рассматриваемого курса. Наконец так же необходимо отметить, что в общем случае диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной. Это означает, что для каждой пары пространственных компонент векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ будет свое собственное значение диэлектрической проницаемости. Однако

это замечание существенно только при рассмотрении анизотропных сред. Связанные с анизотропией среды явления в данном курсе не рассматриваются, что позволяет считать тензор диэлектрической проницаемости не только диагональным, но и считать все его диагональные элементы равными. В дальнейшем тензорная природа диэлектрической проницаемости не обсуждается, и считается скалярной величиной.

Введение диэлектрической проницаемости и вектора электрического смещения позволяет привести систему уравнений Максвелла, описывающих поле в среде, содержащей колоссальное количество движущихся разноименных зарядов, к такому виду, в котором источники полей отсутствуют, но их суммарное действие учтено путем введения вектора $\vec{D}$:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Сравнивая уравнения (3.4) и (3.9), можно связать диэлектрическую проницаемость среды с вычисленной ранее в модели Друде проводимостью металла. Предположим, что на металл действует внешнее поле $\vec{E}$, изменяющееся по гармоническому закону:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.10)$$

где $\vec{E}_0$ – амплитуда падающей волны. Необходимо отметить, что несмотря на то, что рассматривается частный случай монохроматического поля, решение, которое будет получено, может быть использовано при произвольной зависимости поля от времени, если разложить эту зависимость в интеграл Фурье, использовать полученные результаты для каждой компоненты Фурье в отдельности, а затем сложить. Обратное преобразование Фурье даст правильный результат при любой зависимости поля от времени, если только отклик системы линеен по полю.

С учетом (2.18), (3.5) и правил дифференцирования запишем выражения для векторов смещения $\vec{D}$ и плотности тока $\vec{j}$ а также производных по времени для векторов напряженности и электрического смещения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.13)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.14)$$

Подставим (3.13) и (3.14) в (3.4)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} (-i\omega) \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \\ \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} (-i\omega + 4\pi\sigma) \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \\ \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} (-i\omega) \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{-i\omega}\right) \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставим (3.12) в (3.9):

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} (-i\omega) \varepsilon \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.16)$$

Из сравнения (3.15) и (3.16):

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi\sigma}{-i\omega}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon = 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (3.18)$$

С учетом ранее полученного выражения для проводимости металлов в модели Друде и (2.18), получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{4\pi n e^2 \tau}{\omega m (1 - i\omega\tau)}, \quad (3.19)$$

вводя плазменную частоту согласно (1.22):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{\omega_{pl}^2 \tau}{\omega (1 - i\omega\tau)}. \quad (3.20)$$

Введем понятие скорости релаксации направленного движения заряда γ :

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (3.21)$$

Поделим числитель и знаменатель дроби в (3.20) на $i\tau$ с учетом (3.21):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega\left(\frac{\gamma}{i} - \omega\tau\right)},$$

упростим полученное выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(-i\gamma - \omega)}, \\ \varepsilon(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Выражение (3.22) описывает диэлектрическую проницаемость металлов в рамках модели Друде. Необходимо отметить, что это выражение получено для очень сильно идеальной модели. Для приближения к свойствам реальных металлов необходимо, по крайней мере, учесть вклад в диэлектрическую проницаемость связанных электронов. В таком случае аналитические выражения для частотной зависимости диэлектрической проницаемости усложняются, или просто отсутствуют. При этом выражение (3.22) качественно правильно описывает поведение металлов в видимой и ближней инфракрасной областях спектра, что и обусловило его широкое применение. Вопрос о возможных обобщениях модели Друде, которые позволяют более полно описывать свойства реальных металлов рассмотрен в практической части курса.

При анализе частотной зависимости диэлектрической проницаемости металла удобно разделить действительную и мнимую части комплексного выражения (3.22). Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на $(\omega - i\gamma)$, после чего получается:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma \omega_{pl}^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon' = \text{Re}[\varepsilon(\omega)] = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon'' = \text{Im}[\varepsilon(\omega)] = \frac{\gamma \omega_{pl}^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (3.25)$$

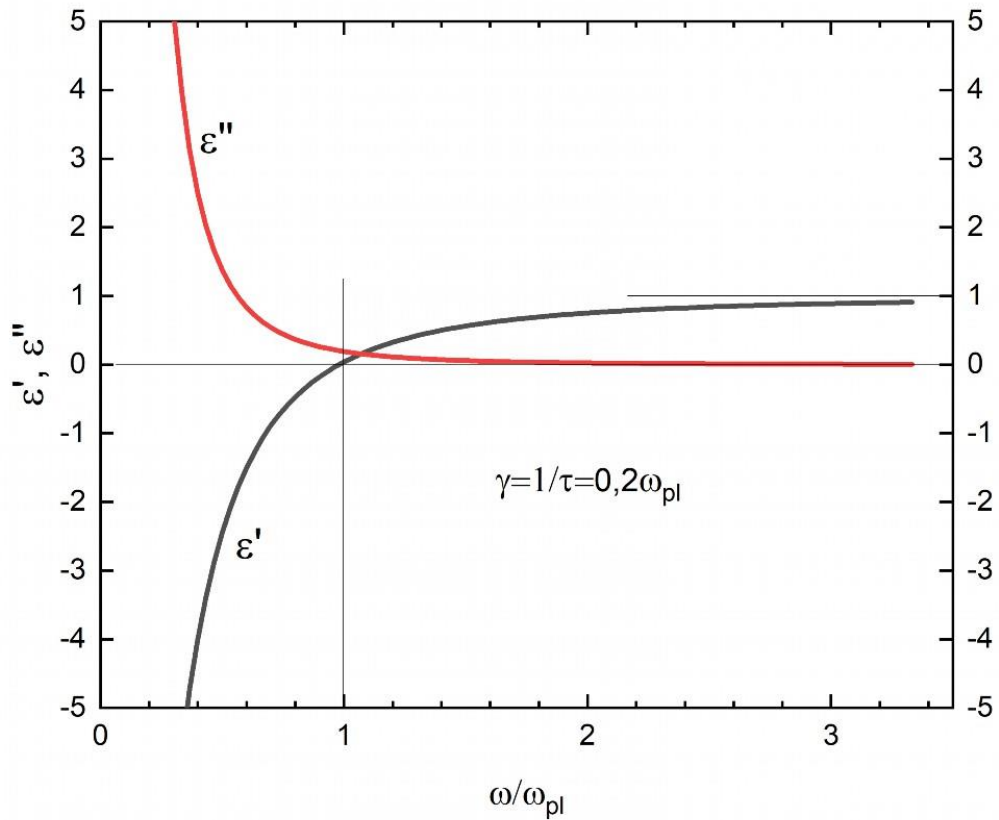


Рисунок 3.1– Зависимости вещественной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от частоты в модели Друде при условии, что скорость релаксации составляет пятую часть плазменной частоты

Рассмотрим предельные случаи, в которых формула для диэлектрической проницаемости упрощается. Если:

$$\omega \gg \frac{1}{\tau},$$

то мнимая часть диэлектрической проницаемости мала, а зависимость от частоты вещественной части сводится к:

$$1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}.$$

Если, кроме того, частота больше плазменной, то диэлектрическая проницаемость положительна и меньше единицы (рис. 3.1). Здесь следует отметить, что такое значение диэлектрической проницаемости характерно

для всех веществ на больших частотах. Действительно, для больших частот энергия кванта излучения становится больше энергии связи электронов и при достаточно больших частотах внешнего поля все электроны ведут себя так же, как свободные. Такое поведение диэлектрической проницаемости в далеком ультрафиолете и рентгеновском диапазонах действительно наблюдается и является основой отражательной рентгеновской оптики. Тот факт, что диэлектрическая проницаемость металла оказалась меньше единицы, означает, металл в этом случае представляет собой прозрачную среду, оптическая плотность которой меньше, чем оптическая плотность вакуума. Это, в свою очередь, означает, что на границе между вакуумом и металлом возможно полное отражение, которое в этом случае, естественно, называется не внутренним, а внешним, что, разумеется, не меняет его сути. Коэффициент отражения при этом действительно очень близок к единице, так как мнимая часть диэлектрической проницаемости мала, а следовательно, и поглощение мало.

Важно отметить, что при $\epsilon < 1$ фазовая скорость электромагнитных волн превышает скорость света в пустоте, но это обстоятельство, как известно, не противоречит теории относительности, поскольку перенос энергии происходит не с фазовой, а с групповой скоростью волн, которая в этом случае, остается меньше скорости света в пустоте.

Если частота меньше плазменной, но по-прежнему больше обратного времени релаксации, то диэлектрическая проницаемость, оставаясь вещественной, становится отрицательной. Отрицательные значения диэлектрической проницаемости означают, что волновой вектор волны становится чисто мнимым и распространяющиеся волны в среде на таких частотах оказываются неосуществимыми. Вместо распространения волн в этом случае происходит затухание или, наоборот, рост амплитуды волны по мере продвижения вглубь среды. Важно подчеркнуть, что растущее решение может существовать как наряду с убывающим решением, так и само по себе. Единственный случай, когда растущее решение не может осуществиться, относится к безграничной среде. В этом случае ограниченность запаса энергии не позволяет растущему решению заполнить все пространство. Если же среда с отрицательной вещественной частью диэлектрической проницаемости образует ограниченный слой, то в нем могут существовать как убывающие, так и нарастающие поля.

Следует также отметить особый случай, когда диэлектрическая проницаемость среды равна нулю. Эта ситуация соответствует совпадению частоты поля с плазменной частотой. Возбуждение на плазменной частоте называется объемным плазмоном. Обращение в нуль диэлектрической проницаемости соответствует ситуации, когда электрическое поле в среде

существует в отсутствие каких-либо внешних зарядов. Таким образом, собственные колебания зарядов в среде происходят на плазменной частоте, причем напряженность электрического поля параллельна направлению распространения волны, то есть плазменные волны – продольные.

Вопросы для самопроверки

1. Чем объясняется существование коллективных движений электронов в металле?
2. Чем характеризуется и от чего зависит электрическое поле внутри металла?
3. Что определяет диэлектрическая проницаемость?
4. Запишите выражение для диэлектрической проницаемости в рамках теории Друде.
5. Что можно сказать о действительной и мнимой части диэлектрической проницаемости Друде, когда частота поля много больше скорости релаксации направленного движения электронов?
6. При каких условиях диэлектрическая проницаемость в модели Друде положительна? Опишите оптические свойства металл в соответствующей области частот.
7. Какие значения принимает действительная и мнимая часть диэлектрической проницаемости Друде-металла при частотах падающего излучения меньших плазменной частоты? Какими оптическими свойствами обладает Друде-металл в таком случае?
8. Чем замечательна частота, на которой действительная часть диэлектрической проницаемости обращается в ноль?
9. Чему равна частота объемного плазмона в материале, оптические свойства которого хорошо описываются моделью Друде?

Лекция №4. Волновое уравнение. Дисперсионное соотношение

Описание лекции:

В этой лекции будет описана связь между плотностью заряда и вектором поляризации в диэлектриках, а также будет рассмотрено дисперсионное соотношение для световых волн.

Задачи:

- Получить дисперсионное соотношение
- Ознакомиться с выражением для волновых векторов

Рассматриваемые разделы:

1. Волновое уравнение
2. Дисперсионное уравнение

Для описания электрического состояния диэлектрика удобно ввести вектор поляризации $\vec{P}$, имеющий смысл электрического дипольного момента единицы объёма диэлектрика. Связь вектора поляризации с плотностью заряда и плотностью тока дается соотношениями:

$$\rho = -\operatorname{div}(\vec{P}),$$

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

согласованными с одним из наиболее фундаментальных законов природы – законом сохранения электрического заряда. Этот закон утверждает, что единственной причиной изменения заряда в некоторой области пространства может быть неравенство токов, втекающих в эту область и вытекающих из нее. В дифференциальной форме этот закон связывает производную от плотности заряда по времени с дивергенцией плотности тока в той же точке

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Очевидно, что в силу возможности поменять местами производные по времени и по пространственным координатам выражения для плотности заряда и плотности тока через вектор поляризации автоматически обеспечивают выполнение закона сохранения заряда.

В рамках курса мы будем регулярно описывать процессы распространения электромагнитных волн различной природы. В зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля волны относительно направления распространения волны различают продольные

волны, когда вектор напряженности электрического поля волны параллелен направлению ее распространения, и поперечные, когда вектор напряженности электрического поля волны перпендикулярен направлению ее распространения. В этом разделе будет показано, что существование именно таких типов волн следует из уравнений Максвелла и выяснено при каких условиях они могут распространяться.

Вектор напряженности электрического поля в электромагнитной волн изменяется как в пространстве, так и во времени, то есть является векторной функцией четырех переменных – трех пространственных координат и времени. Простейшая зависимость такого рода, периодическая по всем переменным может быть представлена экспоненциальной функцией, описывающей гармонические колебания:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (4.1)$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор – параметр, характеризующий распространение волны в пространстве, а ω – частота – изменение во времени.

Для удобства дальнейшего вывода покажем, что для волны вида (4.1) операция взятия ротора может быть заменена на векторное умножение поля волны на волновой вектор слева.

Так как в операторе ротора необходимо брать частные производные по координатам, перепишем (4.1) расписав скалярное произведение в показателе:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}. \quad (4.2)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем выражения для частных производных по каждой из пространственных координат:

$$\frac{\partial \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial x} = -ik_x \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial y} = -ik_y \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial z} = -ik_z \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}. \quad (4.5)$$

Перейдем к оператору ротора. Известно, что в результате действия оператора ротора мы получаем некоторый вектор. Распишем его компоненты, начиная с компоненты вдоль оси x :

$$\begin{aligned}
 (rot \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\
 &= ik_y E_{0z} e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} - ik_z E_{0y} e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \\
 &= i e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} [E_{0z} k_y - E_{0y} k_z] \\
 &= i e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} (\vec{k} \times \vec{E}_0)_x = i (\vec{k} \times \vec{E})_x.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

В последней строчке мы перешли к x -компоненте векторного произведения волнового вектора и напряженности электрического поля, так как результат, полученный в скобках в предпоследней строчке полностью ему, соответствует. Можно показать, что остальные две пространственные компоненты, получаемые при применении операции взятия ротора, также сводятся к соответствующим компонентам векторного произведения волнового вектора и вектора напряженности электрического поля. Обобщая полученное, можно записать следующее:

$$rot \vec{E} = i(\vec{k} \times \vec{E}). \tag{4.7}$$

Кроме того, абсолютно аналогичным образом показывается, что:

$$rot \vec{B} = i(\vec{k} \times \vec{B}). \tag{4.8}$$

Выражения (4.7) – (4.8) замечательны тем, что позволяют свести исходную систему векторных уравнений в частных производных к векторным равенствам, которые, по сути, уже являются системой линейных алгебраических уравнений для компонент напряженности электрического поля плоской монохроматической электромагнитной волны (4.1). Будем использовать эти выражения для выяснения связи между частотой и волновым вектором, следующей из уравнений Максвелла.

Нам осталось подставить выражения (4.7) и (4.8) в роторные уравнения (3.8), (3.9), вычислить частные производные по времени и использовать связь между векторами электрического смещения и напряженности электрического поля.

Итак, снова запишем роторные уравнения, которые будут справедливы для волны вида (4.1). Подставляя (4.7) в (3.8), получим:

$$i(\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}. \quad (4.9)$$

Так как вектора напряженности и магнитной индукции в левой и правой части уравнения (4.9) одинаковым образом зависят от пространственных координат и времени, из (4.9) следует аналогичное соотношение между амплитудами. Сократив результат на мнимую единицу, получим:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0. \quad (4.10)$$

Аналогичным образом, подставляя (4.8) в (3.9) с учетом (3.5) имеем

$$i(\vec{k} \times \vec{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E}, \quad (4.11)$$

переходя к амплитудам:

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega\varepsilon}{c} \vec{E}_0. \quad (4.12)$$

Для нахождения решения полученной системы векторных уравнений удобно рассмотреть результат векторного умножения обеих частей уравнения (4.10) на волновой вектор $\vec{k}$ слева. Тогда получим:

$$\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}_0] = \frac{\omega}{c} [\vec{k} \times \vec{B}_0]. \quad (4.13)$$

Левую часть (4.13), являющуюся двойным векторным произведением, можно упростить, представив в виде разложения по векторам $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$. Возможность такого разложения очевидна из свойств векторного произведения векторов (векторное произведение перпендикулярно к плоскости, в которой лежат сомножители), а конкретный вид дается мнемоническим правилом «BAC-CAB». Подставив в правую часть выражение (4.12), получим:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0(\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\omega\varepsilon}{c} \vec{E}_0. \quad (4.14)$$

Собрав коэффициенты при векторах $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$, получим векторное уравнение:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \vec{E}_0. \quad (4.15)$$

Анализ уравнения (4.15) показывает, что оно может быть удовлетворено двумя и только двумя следующими способами: либо векторы $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$ параллельны друг другу, либо коэффициенты при каждом из них равны нулю. Рассмотрим каждый из этих вариантов отдельно.

Если вектора $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$ коллинеарные (направлены вдоль одной прямой), то один из них может получен в результате умножения другого на числовой множитель. Обозначив этот множитель β , запишем:

$$\vec{E}_0 = \beta \vec{k}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15), получим условие существования решения системы уравнений Максвелла в виде продольной (согласно (4.16) вектора $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$ коллинеарны) плоской монохроматической волны:

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{k} \cdot \beta \vec{k}) &= \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \beta \vec{k}, \\ \vec{k} \beta k^2 &= \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \beta \vec{k}, \\ k^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Так как мы рассматриваем случай гармонических волн (статические поля $\omega = 0$ не рассматриваются), последнее равенство в (4.17) может быть выполнено только при условии, что $\varepsilon = 0$. Как следует из формулы (3.24) и рис. 3.1, это необычное условие может быть удовлетворено для вещественной части диэлектрической проницаемости вещества, описываемого моделью Друде. Найдем частоту, соответствующую этому условию:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + \gamma^2} &= 0, \\ 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\omega = \omega_{pl}.$$

То есть полученное решение соответствует собственной моде колебаний электронов проводимости – объемному плазмону. Кроме того, наше допущение о коллинеарности векторов $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$ показывает, что такая волна будет являться продольной.

Второе решение может быть найдено для случая, когда вектора $\vec{k}$ и $\vec{E}_0$ не коллинеарны, но такое решение возможно в единственном случае, когда обе скобки в (4.12) обращаются в ноль, то есть:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad (4.19)$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0. \quad (4.20)$$

Равенство скалярного произведения нулю означает перпендикулярность векторов, а это значит, что полученное решение описывают поперечную волну. Выражение (4.20) известно как дисперсионное соотношение для световых волн. Таким образом мы получили решение, соответствующее распространению света в сплошных средах.

Необходимо отметить, что оба решения не противоречат уравнению Максвелла $\text{div} \vec{D} = 0$. Действительно первое решение справедливо при нулевой диэлектрической проницаемости, а значит, с учетом (3.5) нулевому вектору электрического смещения.

Для верификации второго решения, будет необходимо показать, что применение оператора дивергенции к вектору $\vec{E}$ плоской волны (4.1) эквивалентно скалярному умножению вектора $\vec{E}$ на вектор $\vec{k}$. Поскольку в поперечной волне эти вектора перпендикулярны, их скалярное произведение обращается в ноль, а значит и дивергенция вектора $\vec{E}$ обращается в ноль. Отсюда следует и выполнение уравнения $\text{div} \vec{D} = 0$., поскольку $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, причем ε не зависит от координат.

Вопросы для самопроверки

1. Какой смысл имеет вектор поляризации среды? Как связан вектор поляризации среды с плотностью заряда и плотностью тока?
2. Дайте определение продольным и поперечным волнам.

3. Какой операции эквивалентно взятие ротора напряженности плоской монохроматической волны?
4. Запишите уравнение плоской монохроматической волны. Какими векторами характеризуется плоская монохроматическая волна?
5. При каком условии возможно существование продольных электромагнитных волн?
6. Запишите дисперсионное соотношение для поперечных электромагнитных волн.

Лекция №5. Поверхностный плазмонный резонанс.

Описание лекции:

В этой лекции будет выяснено условие существования поверхностного плазмона.

Задачи:

- Рассмотреть граничные условия, вытекающие из уравнений Максвелла
- Определить поле точечного заряда в неоднородной среде
- Найти частоту поверхностного плазмона в модели Друде

Рассматриваемые разделы:

1. Граничные условия
2. Метод изображений
3. Поверхностный плазмон.

В предыдущих лекциях мы рассматривали поведение электромагнитных полей в неограниченных однородных средах. Следующая по сложности проблема связана с важной практической задачей описания электромагнитных полей в неоднородных средах. Простейшей такой задачей является вычисление полей в двух различных полубесконечных однородных средах, разделенных плоской границей, что имеет место, например, при преломлении света на границе двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Важную роль в технике играют также электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границы двух сред. Для описания распространения электромагнитных волн в неоднородных средах необходимо получить граничные условия, описывающие соотношения между полями по обе стороны от границы.

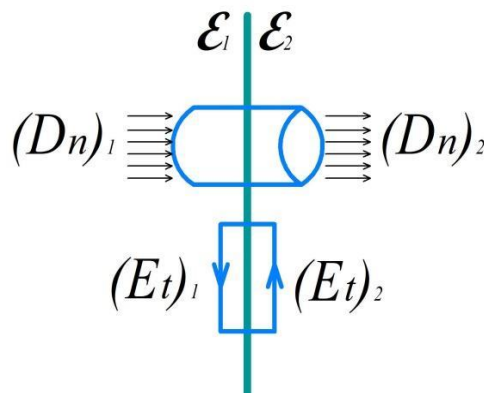


Рисунок 5.1 – Электрические поля на границе двух сред

Граничные условия следуют из уравнений Максвелла. Пусть диэлектрические проницаемости граничащих сред будут ε_1 и ε_2 . Для вывода граничного условия для вектора электрического смещения сделаем дополнительное построение. Построим небольшой цилиндр, ось которого перпендикулярна границе раздела сред, а основания A_1 и A_2 параллельны границе раздела рассматриваемых сред (рисунок 5.1). Уравнение Максвелла для вектора индукции электрического поля, которое в дифференциальной форме записывается как:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho,$$

в интегральной форме будет выглядеть следующий образом:

$$\int \vec{D} d\vec{s} = 4\pi q, \quad (5.1)$$

поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен заряду, помещенную в объем, ограниченный этой поверхностью. В случае отсутствия свободных зарядов правую часть этого выражения можно приравнять 0:

$$\int \vec{D} d\vec{s} = 0. \quad (5.2)$$

Если устремить высоту цилиндра к 0, т. е. свести площадки A_1 и A_2 до их почти полного слияния, то поток через боковые стенки цилиндра станет нулевым. В таком случае условие (4.1) можно будет свести к рассмотрению потока через площадки основания. Напомним, что поток некоторого вектора через единичную площадку может быть найден как скалярное произведение рассматриваемого вектора на нормаль к единичной площадке (вектор $\vec{n}$). Тогда выражение 5.2 примет вид:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot A_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot A_2 = 0. \quad (5.3)$$

Так как площадки A_1 и A_2 совпадают, а нормали к ним направлены в противоположные стороны; то условие (4.3) можно переписать как:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0, \quad (5.4)$$

при переходе из одной среды в другую нормальная составляющая вектора электрического смещения не претерпевает разрыва (не изменяется):

$$(D_n)_1 = (D_n)_2, \quad (5.5)$$

при переходе к вектору напряженности электрического поля с учетом диэлектрических проницаемостей:

$$\varepsilon_1(E_n)_1 = \varepsilon_2(E_n)_2. \quad (5.6)$$

Второе граничное условие получается из закона электромагнитной индукции, записанного в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

При переходе к интегральной форме получим:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}. \quad (5.7)$$

Рассмотрим прямоугольную площадку, длинные стороны l_1 и l_2 которой параллельны границе раздела сред. Выберем обход площадки, как показано на рисунке 5.1. При сведении сторон прямоугольника до их почти полного слияния, площадь внутри прямоугольника стремится к нулю. Таким образом должна обратиться в ноль и правая часть выражения (5.7). Нулю можно будет также положить и часть циркуляции вдоль коротких сторон прямоугольника. Напомним, что под циркуляцией вектора вдоль кривой понимается контурный интеграл от скалярного произведения рассматриваемого вектора и единичного вектора, касательного к кривой (вектор $\vec{t}$). С учетом всего вышесказанного (5.7) примет вид:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t}_1 \cdot l_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{t}_2 \cdot l_2 = 0. \quad (5.8)$$

Так как стороны выбранного прямоугольника равны, а направления обхода контура по ним противоположно, (5.8) можно упростить следующим образом:

$$\vec{t} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \quad (5.9)$$

тангенциальные (касательные) компоненты вектора напряженности электрического поля не претерпевают разрыва при переходе из одной среды в другую

$$(E_t)_1 = (E_t)_2. \quad (5.10)$$

Расчет поля точечного заряда у поверхности раздела двух диэлектриков

Получив граничные условия (5.5) и (5.10), мы можем перейти к рассмотрению явлений на границе двух сред. Для простоты будем рассматривать поля, созданные точечными зарядами. С одной стороны мы сможем в достаточно простом формализме получить важные для рассматриваемого курса соотношения, с другой стороны при таком подходе не происходит потери общности рассмотрения. В этом разделе будем использовать метод изображений.

Начнем с границы между металлом и диэлектриком, причем для простоты в качестве диэлектрика будем рассматривать воздух, отличием показателя преломления которого от единицы пренебрежем. Будем считать, что граница между рассматриваемыми средами проходит по плоскости, задаваемой уравнением $x = 0$. Будем считать, что рассматриваемый металл является идеальным проводником с бесконечной по модулю диэлектрической проницаемостью.

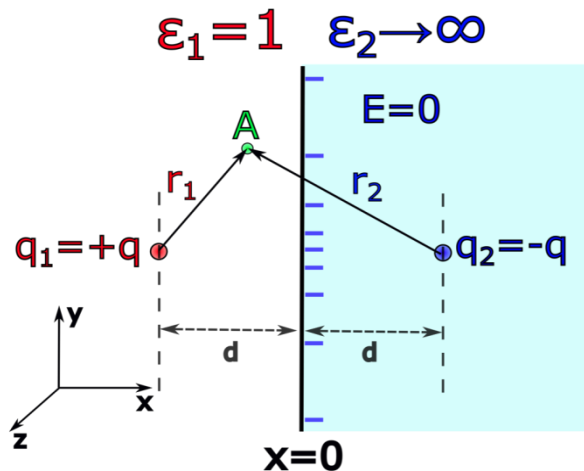


Рисунок 5.2 –Поле точечного заряда у границы раздела воздуха и металла

Поднесем к границе раздела сред положительный заряд $q_1 = +q$. В результате такого действия произойдет перераспределение заряда на поверхности металла. Из курса электростатики мы знаем, что внешнее поле будет полностью скомпенсировано внутри идеального металла. То есть можно утверждать, что внутри металла напряженность поля останется равной нулю $\vec{E}_{q1} = 0$ и после того, как к нему приблизился заряд. Очевидно, что нулевое значение поля внутри металла достигается за счет суперпозиции (сложения) полей точечного заряда q_1 и поля зарядов, распределенных по

поверхности металла. Однако описание распределенного заряда по поверхности может быть достаточно трудоемким. Обсудим способ упрощенного описания, не требующий детальных расчетов. Очевидно, что если мы в то же место, где находится заряд q_1 поместим такой же по модулю, но отрицательный заряд, то их поля друг друга компенсируют и тогда электрического поля не будет нигде, в том числе и в металле. Отсюда следует вывод, что поле зарядов, распределенных по поверхности металла, в самом металле совпадает с полем, точечного заряда заряд $-q$, помещенного на место заряда q_1 .

Поле, созданного зарядами, распределенными по поверхности металла, одинаково с обеих сторон от этой поверхности. Поэтому та часть поля в воздухе, которая создана зарядами, распределенными по поверхности металла, совпадает с полем точечного заряда, который мог бы находиться с другой стороны от поверхности, а именно, в металле. В этом случае заменим заряд, распределенный по поверхности металла, на заряд $q_2 = -q$, находящийся внутри металла на том же расстоянии от поверхности, что и реально существующий заряд q_1 . Тогда для описания поля в какой-либо точке в воздухе достаточно рассмотреть не суперпозицию полей точечного и распределенного зарядов, а суперпозицию полей двух точечных зарядов q_1 и q_2 . На этом пути получим следующее выражение для поля в некоторой точке в воздушной среде (с учетом равенства модулей заряда):

$$\vec{E} = q \left(\frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right). \quad (5.11)$$

Для описания поля наряду с напряженностью электрического поля удобно пользоваться потенциалом φ . Напомним, что потенциалом называют скалярную величину, показывающую, какой потенциальной энергией будет обладать единичный электрический заряд, помещенный в данную точку пространства. Потенциал точечного заряда в пустоте:

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрический потенциал в какой-либо точке пространства равен сумме потенциалов, создаваемых в этой точке всеми источниками поля. В рассматриваемом случае потенциал равен сумме потенциалов, созданных зарядом $q_1 = +q$ и зарядом, распределенным по поверхности металла. В металле сумма этих потенциалов равна нулю, а в воздухе поле зарядов, распределенных по поверхности металла, можно заменить полем заряда-изображения $q_2 = -q$:

$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} = q \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}. \quad (5.12)$$

Таким образом, с использованием метода изображений мы смогли описать поле точечного заряда у границы раздела воздуха и идеального проводника.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи, в которой пробный заряд q_1 подносится к границе двух однородных сред, характеризующихся конечными значениями диэлектрических проницаемостей ε_1 и ε_2 . Пусть расстояние между внесенным зарядом и границей двух рассматриваемых сред (задаваемой уравнением $x = 0$) будет равно d . Конечная величина диэлектрической проницаемости не позволяет нам считать поле ни в одной из сред нулевым. Однако общие подходы метода изображений все еще могут быть применены для решения задачи.

Внесенный точечный заряд все так же вызывает накопление распределенного заряда на границе двух сред. Физически, полная величина поля в первой среде, куда внесен заряд, будет определяться суперпозицией полей распределенного заряда и пробного заряда. Как мы и поступали в предыдущей задаче, для расчетов заменим распределенный заряд на некоторый виртуальный, пока еще не известный нам заряд q_2 во второй среде. Расположим этот заряд на таком же расстоянии d от границы раздела сред. И тогда поле в первой среде будет характеризоваться суперпозицией полей зарядов $\vec{E}_{q1}$ и $\vec{E}_{q2}$.

Для описания поля во второй среде достаточно изменить величину внесенного заряда, что будет эквивалентно добавлению к первому заряду некоторого дополнительного, который будет описывать влияние распределенного по поверхности заряда. Обозначим изменённый заряд как q'_1 .

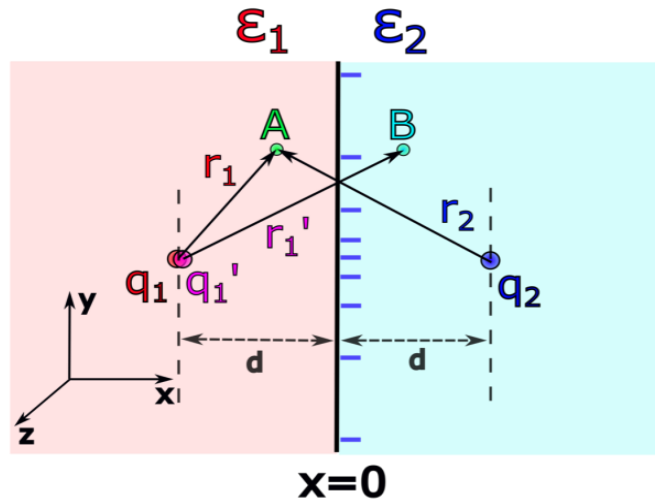


Рисунок 5.3 – Поле точечного заряда у границы двух однородных сред

Рассмотри две точки A и B, находящиеся вблизи границы раздела двух сред (рисунок 5.3). Введем радиус-векторы, необходимые для описания полей. К точке A необходимо построить радиус векторы от зарядов, которые необходимо включить в рассмотрение для описания поля в первой среде: $\vec{r}_1$ – от внесенного заряда q_1 и $\vec{r}_2$ – от виртуального заряда q_2 . К точке B необходимо построить только радиус-вектор $\vec{r}_1'$ от измененного заряда q_1' . Запишем выражения для модулей радиус-векторов:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}, \\ |\vec{r}_1'| &= \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}, \\ |\vec{r}_2| &= \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

При сближении точек A и B, что подразумевается при использовании граничных условий, все три расстояния окажутся равными друг другу.

Для описания полей с учетом границы двух сред необходимо рассмотреть граничные условия. Равенство тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля на границе сред означает, что при переходе границы не наблюдается изменения электрического потенциала. В таком случае можно записать, что:

$$\varphi_A = \varphi_B. \quad (5.14)$$

так как поле в первой среде складывается из поля внесенного заряда в первой среде q_1 и виртуального заряда q_2 , то можно записать:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{q_2}{\varepsilon_1 r_2}. \quad (5.15)$$

Поле же во второй среде описывается с использованием измененного значения внесенного точечного заряда q' :

$$\varphi_B = \frac{q_1'}{\varepsilon_2 r_1'}. \quad (5.16)$$

Тогда, с учетом равенства потенциалов и модулей радиус-векторов, получаем первое условие, связывающее рассматриваемые заряды:

$$\frac{q_1}{\varepsilon_1} + \frac{q_2}{\varepsilon_1} = \frac{q_1'}{\varepsilon_2}. \quad (5.17)$$

Для получения еще одного условия будем использовать равенство нормальных компонент вектора электрического смещения. Из курса электродинамики известно, что напряженность электрического поля и потенциал связаны как:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \quad (5.18)$$

Так как мы рассматриваем нормальную компоненту поля, которая будет перпендикулярна плоскости границы двух сред $x = 0$, то из всего выражения (5.18) будем брать только первое слагаемое. С учетом (5.6) имеем:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_A}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_B}{\partial x}\Big|_{x=0}. \quad (5.19)$$

Рассчитаем производные, входящие в (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_A}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{q_1}{\varepsilon_1} \frac{2(x-d)}{r_1^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{\varepsilon_1} \frac{2(x+d)}{r_2^3}, \\ \frac{\partial\varphi_B}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{q_1'}{\varepsilon_2} \frac{2(x-d)}{r_1'^3}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

подставив (5.20) в (5.19), получим:

$$-\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{q_1}{\varepsilon_1} \frac{2(x-d)}{r_1^3} \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{q_2}{\varepsilon_1} \frac{2(x+d)}{r_2^3} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{q'}{\varepsilon_2} \frac{2(x-d)}{r_1'^3} \Big|_{x=0}.$$

С учетом равенства модулей радиус-векторов, равенства нулю координаты x на границе между средами $x = 0$ после очевидных сокращений получим второе условие, которому должны удовлетворять введенные для описания поля заряды q_2 и q' :

$$q' = q_1 - q_2. \quad (5.21)$$

Таким образом, используя (5.17) и (5.21), можно составить систему уравнений, которой должны удовлетворять введенные нами заряды q_2 и q' , чтобы правильно описывать поле в обеих граничащих средах:

$$\varepsilon_1 q' = \varepsilon_2 (q_1 + q_2). \quad (5.22)$$

Решая эту систему, можно получить следующее соотношение:

$$q_2 = q_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (5.23)$$

Полученное решение обладает интересным свойством. В случае, когда $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ обращается в ноль, заряд q_2 может существовать и без внесения точечного заряда q_1 . Напомним, что заряд q_2 заменял распределенный по поверхности заряд. Теперь можем переформулировать это решение следующим образом. В случае, когда сумма диэлектрических проницаемостей двух сред равна 0, на их поверхности могут существовать распределенные заряды и в отсутствии внешнего возмущения. Нулевая сумма диэлектрических проницаемостей означает, что у сред должны быть противоположные знаки диэлектрической проницаемостей, что возможно, например при рассмотрении границы металл-диэлектрик. Таким образом можно заключить, что мы нашли условие возникновения особого электромагнитного возбуждения - поверхностного плазмонного резонанса.

Рассмотрим конкретный случай границы раздела между вакуумом и металлом, диэлектрические свойства которого хорошо описываются моделью Друде. В этом случае $\varepsilon_1 = 1$, а для ε_2 примем простейший вариант, не учитывающий затухания $\varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$. Сумма диэлектрических проницаемостей контактирующих сред равна нулю, если:

$$1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} + 1 = 0.$$

Решая полученное уравнение можно найти частоту, на которой будет возбуждаться плазмонный резонанс:

$$\omega = \frac{\omega_{pl}}{\sqrt{2}}. \quad (5.24)$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте граничные условия, описывающие соотношения между полями на плоской границе раздела двух сред
2. Из каких соображений может быть получено граничное условие для вектора индукции электрического поля (вектора электрического смещения)?
3. Из каких соображения может быть получено граничное условие для вектора напряженности электрического поля?
4. В чем состоит суть метода изображений, применяемого для решения электростатических задач?
5. Что известно про поле внутри идеального проводника и среды с конечной диэлектрической проницаемостью?
6. Что такое электрический потенциал? Каким граничным условиям удовлетворяет потенциал?
7. Как связана напряженность поля и потенциал электрического поля?
8. В каком случае на границе двух сред может существовать распределенный заряд в отсутствии внешнего возмущения?
9. Что такое поверхностный плазмонный резонанс, и на какой частоте он возбуждается, если оптические свойства материала хорошо описываются моделью Друде?

Лекция №6. Дипольный момент. Поле и потенциал диполя.

Описание лекции:

В данной лекции вводится понятие дипольного момента и рассматриваются поля, создаваемые электрическим диполем в однородном пространстве и вблизи поверхности идеального проводника

Задачи:

- Определение дипольного момента системы зарядов.
- Вывод выражения для дипольного момента двух равных по модулю, и противоположных по знаку зарядов.
- Вывод выражения для потенциала электрического диполя в приближении, когда расстояние до точки наблюдения много больше расстояния между зарядами.
- Построение изображений зарядов диполя в металле – идеальном проводнике.
- Определение суммарного дипольного момента системы для случаев, когда диполь направлен параллельно и перпендикулярно границе раздела сред.

Рассматриваемые разделы:

1. Дипольный момент
2. Диполь вблизи металлической поверхности

Понятие дипольного момента

В предыдущих лекциях мы получили условия, при котором могут наблюдаться собственные резонансные моды в объемных металлах и на границе раздела двух сред. В настоящей лекции будет рассмотрено действие внешнего поля на металлический шарик малого размера. Металлическая наночастица – это основной модельный объект, исследуемый в наноплазмонике. Частицу, обладающую плазмонным резонансом, называют плазмонной наночастицей.

Для рассмотрения этой новой задачи необходимо ввести понятие дипольного момента, вывести основные соотношения и свойства поля диполя. После этого мы сможем приступить к изучению поля внутри и снаружи плазмонной наночастицы.

Дипольный момент и его свойства

Несомненно, слушатель курса уже неоднократно за время своего обучения сталкивался с понятием электрического диполя. На интуитивном

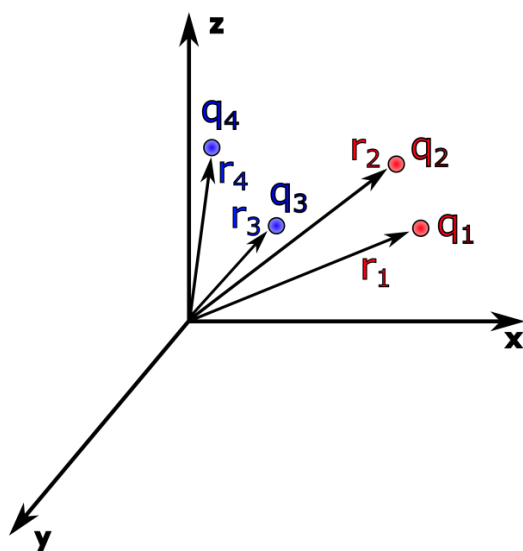
уровне мы воспринимаем диполь как систему из двухточечных зарядов одинаковых по модулю, но противоположных по знаку и находящихся на расстоянии, малом по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Такая идеализированная система помогает сформировать представление о диполе, и служит основой для важных в приложениях обобщений, которые будут описаны ниже.

Рассмотрим систему состоящей из множества зарядов q_i . Введем понятие дипольного момента $\vec{d}$, как векторной суммы радиус-векторов от точки наблюдения до каждого из зарядов, помноженных на величину заряда с учетом его знака:

$$\vec{d} = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i. \quad (6.1)$$

На рисунке 6.1а представлен пример системы, состоящей из 4 зарядов, для каждого из которых определены радиус векторы и величины зарядов. С использованием выражения (6.1) можно будет определить величину дипольного момента. Интуитивно можно себе представить, что существующие 4 заряда можно заменить на два новых заряда, которые будут давать близкое распределение электрического поля (рисунок 6.1б). При этом поле четырех зарядов все же может отличаться от поля двух новых зарядов. В общем случае системы множества зарядов могут характеризоваться как дипольными, так и квадрупольными моментами и, вообще говоря, моментами высших порядков. Однако мы в данном курсе ограничимся рассмотрением только дипольных моментов.

а



б

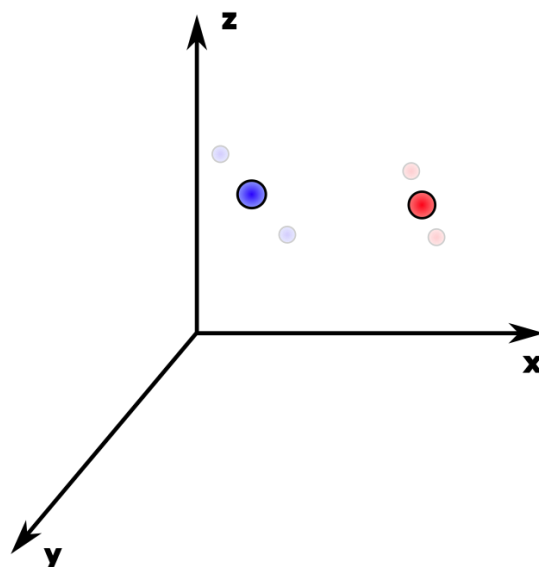


Рисунок 6.1. Представление о дипольных моментах. а - определение дипольных моментов в системе из нескольких зарядов. б - эквивалентное представление распределенного заряда с использованием двух точечных зарядов

Дипольный момент приобретает особое значение для систем зарядов, которые в целом электрически нейтральны, то есть алгебраическая сумма Q всех зарядов q_i равна нулю:

$$Q = \sum_i q_i = 0, \quad (6.2)$$

именно дипольный момент системы зарядов определяет и электрическое поле системы на больших расстояниях от нее и ее собственное поведение в электрическом поле, близком к однородному. Хотя далеко не все системы электрически нейтральны, во многих важных случаях условие 6.2 выполняется. Действительно, мы рассматриваем изначально нейтральные тела, т. е. такие, в которых алгебраическая сумма зарядов равна нулю (количество положительных зарядов равна количеству отрицательных). При приложении внешнего поля наблюдается только перераспределение зарядов внутри рассматриваемых объектов, а не появление новых. Постоянство алгебраической суммы зарядов в замкнутой системе называется законом сохранения зарядов. Необходимо отметить, что внешнее оптическое воздействие может вызвать изменение суммарного количества зарядов вследствие фотоэффекта, который наблюдается при облучении металлов в УФ области спектра. Заряжение металлических наноструктур может иметь

важные следствия, они требуют отдельного рассмотрения. В нашем же курсе мы будем считать, что уравнение (6.2) выполняется.

Из соотношения (6.2) можно вывести замечательное следствие. Если сумма всех зарядов в системе равна нулю, то величина дипольного момента не зависит от точки отсчета. Докажем это. Пусть есть некая система с несколькими зарядами (рисунок 6.2). В системе отсчета $xOyOz$ положение заряда q характеризуется своим радиус вектором $\vec{r}$. Построим новую систему координат $x'O'y'O'z'$, такую, что ее начало координат смещено на величину $\vec{R}$.

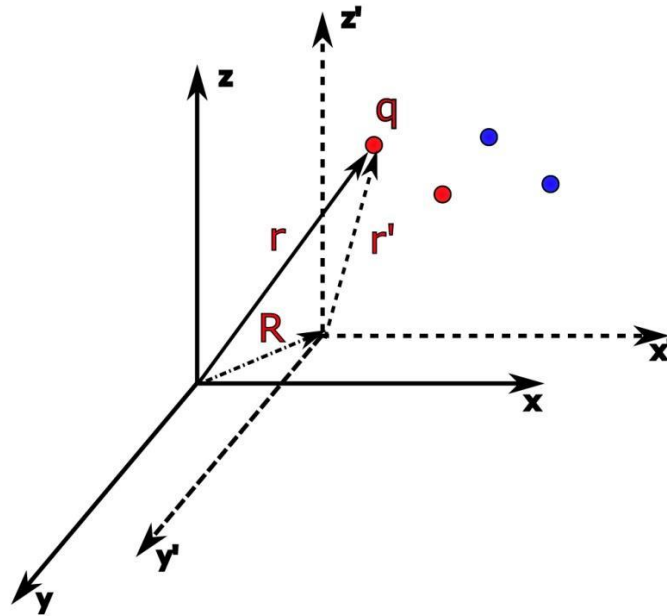


Рисунок 6.2 Определение радиус-векторов для заряда при смещении системы отсчета

В новой системе координат положение заряда q характеризуется радиус вектором $\vec{r}'$. Причем из рисунка 6.2 видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'. \quad (6.3)$$

Тогда с учетом (6.1) и (6.3) и распределительного закона умножения вектора на число получим:

$$\vec{d} = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i q_i \cdot (\vec{R} + \vec{r}_i') = \sum_i q_i \vec{R} + \sum_i q_i \vec{r}_i'. \quad (6.4)$$

Вынося не зависящий от индекса суммирования вектор $\vec{R}$ за знак суммы, и учитывая (6.2) получим:

$$\sum_i q_i \vec{R} = \vec{R} \sum_i q_i = 0.$$

Вторая же сумма является дипольным моментом в измененной системе координат. Таким образом получаем:

$$\sum_i q_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i q_i \vec{r}_i' = \vec{d}, \quad (6.5)$$

а далее покажем, что в случае двух равных по модулю, но противоположных зарядов $q_1 = +q$, и $q_2 = -q$ дипольный момент можно определить как:

$$\vec{d} = q \cdot \vec{l}, \quad (6.6)$$

где $\vec{l}$ – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному (рисунок 6.3)

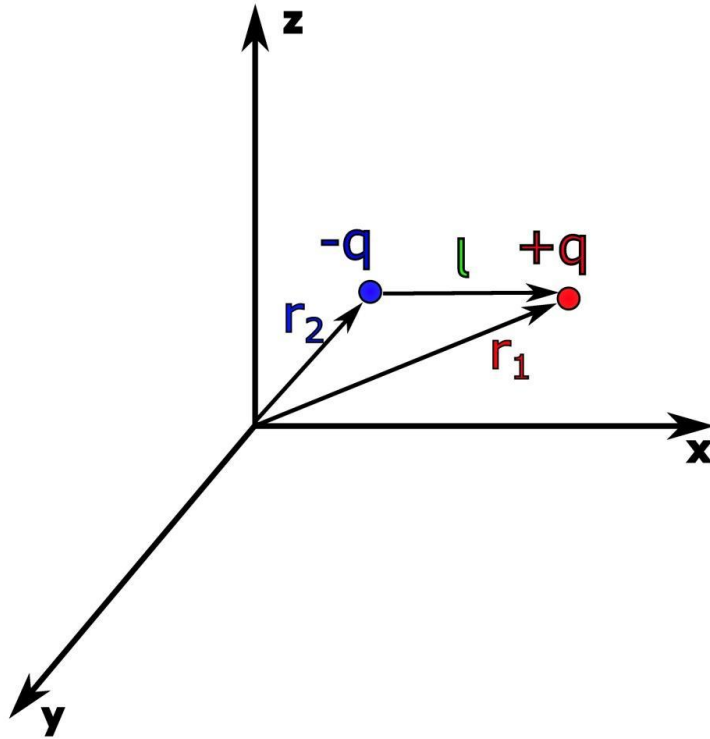


Рисунок 6.3. Электрический диполь, состоящий из двух зарядов

Пусть положение заряда q_1 характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_1$, а заряд q_2 характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_2$. Для доказательства (6.6) воспользуемся определением (6.1) и векторной суммой $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{l}$. Запишем:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i = q_1 \cdot \vec{r}_1 + q_2 \cdot \vec{r}_2 = q \cdot \vec{r}_1 - q \cdot \vec{r}_2 = q \cdot (\vec{r}_2 + \vec{l}) - q \cdot \vec{r}_2 = \\ &= q \cdot \vec{r}_2 + q \cdot \vec{l} - q \cdot \vec{r}_2 = q \cdot \vec{l}.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Наконец, покажем, как можно рассчитать электрическое поле электрического диполя. Как мы уже говорили, в некотором приближении реальное сложное распределение заряда можно с некоторой точностью описать с использованием двух зарядов. Рассмотрим поле диполя, состоящего из двух одинаковых по модулю, но противоположных по знаку зарядов $q_1 = +q$, и $q_2 = -q$, соединенных вектором $\vec{l}$. Для этого посчитаем потенциал в некоторой точке наблюдения А, отстоящей от середины $\vec{l}$, на величину $\vec{r}_A$ (рисунок 6.4).

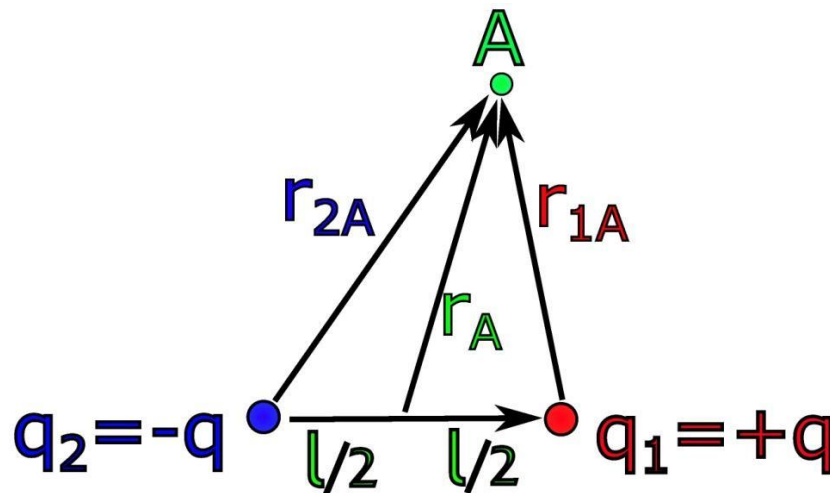


Рисунок 6.4. Определение потенциала поля диполя в точке А

Для определения поля будем пользоваться принципом суперпозиции. Потенциал в точке А будет определяться как сумма потенциалов в точке А созданными точечными зарядами q_1 и q_2 . Пусть $\vec{r}_{1A}$ - вектор от первого заряда до точки наблюдения, а $\vec{r}_{2A}$ - соответственно, от второго заряда (рисунок 6.4). Тогда:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{|\vec{r}_{1A}|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_{2A}|} = \frac{q}{|\vec{r}_{1A}|} - \frac{q}{|\vec{r}_{2A}|}. \quad (6.8)$$

Из рисунка видно, что вектора $\vec{r}_{1A}$ и $\vec{r}_{2A}$ могут быть записаны как:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{1A} &= \vec{r}_A - \frac{\vec{l}}{2}, \\ \vec{r}_{2A} &= \vec{r}_A + \frac{\vec{l}}{2}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Распишем и упростим выражения для $|\vec{r}_{1A}|$. Имеем:

$$|\vec{r}_{1A}| = \sqrt{\left(\vec{r}_A - \frac{\vec{l}}{2}\right)^2} = \sqrt{r_A^2 - \vec{r}_A \cdot \vec{l} + \frac{l^2}{4}} = r_A \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{r_A^2} + \frac{l^2}{4 \cdot r_A^2}}.\tag{6.10}$$

Полученное выражение достаточно громоздкое, но мы его можем упростить, для случая, когда $|\vec{l}| \ll |\vec{r}_A|$. Тогда в (6.10) можно пренебречь третьим слагаемым.

Воспользуемся известным соотношением для приближенного вычисления корней, которое записывается как

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \epsilon} &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}, \\ \epsilon &\ll 1.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Но при условии, что $|\vec{l}| \ll |\vec{r}_A|$, тогда и:

$$\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{r_A^2} \ll 1.$$

И, тогда (6.10) с учетом (6.11) имеет вид:

$$|\vec{r}_{1A}| = r_A \cdot \left(1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right).\tag{6.12}$$

Аналогично показывается, что:

$$|\vec{r}_{2A}| = r_A \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right).\tag{6.13}$$

Подставим (6.12) и (6.13) в (6.8):

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{q}{r_A \cdot \left(1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right)} - \frac{q}{r_A \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right)} = \\
&= q \cdot \left(\frac{1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2} - 1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}}{r_A \cdot \left(1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right)} \right) = \\
&= q \cdot \frac{\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{r_A^2}}{r_A \cdot \left(1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right)}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Рассмотрим две скобки в знаменателе, по правилам сокращенного умножения имеем и с учетом ранее показанного $\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{r_A^2} \ll 1$:

$$\left(1 - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right) = 1 - \left(\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{2 \cdot r_A^2}\right)^2 \approx 1. \tag{6.15}$$

С учетом (6.15) выражение (6.14) можно существенно упростить до:

$$\varphi = q \cdot \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{l}}{r_A^3}, \tag{6.16}$$

с учетом определения дипольного момента (6.6):

$$\varphi = \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{d}}{r_A^3}. \tag{6.17}$$

Таким образом мы вывели уравнение, которое описывает потенциал диполя при условии, что точка наблюдения находится на расстоянии, существенно большем чем расстояние между зарядами. Кроме того, необходимо отметить, что мы получили соотношение для случая диполя, находящегося в вакууме. Необходимо отметить, что потенциал поля диполя спадает как квадрат расстояния до точки наблюдения (третья степень расстояния в знаменателе и первая степень – в числителе) и зависит от угла между радиус-вектором, проведенным из места нахождения диполя в точку наблюдения, и вектором дипольного момента. При вычислении полей в средах с диэлектрической проницаемостью отличной от единицы в

знаменатель выражения (6.17) должна быть введена диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится диполь. Мы получили основные соотношения, необходимые нам для дальнейшего рассмотрения задач в рамках курса.

Диполь вблизи металлической поверхности

В предыдущей лекции мы рассматривали заряд, помещенный вблизи поверхности идеального металла. Теперь перейдем к рассмотрению диполя, помещенного вблизи поверхности идеального металла. Также будем считать, что вторая среда - воздух. Для дальнейших рассуждений будем использовать принцип суперпозиции. Поле, созданное двумя зарядами в какой-либо точке наблюдения будет являться суммой полей от каждого из зарядов. Но тогда и виртуальные заряды в металле, которые описывают реальное поле распределенного заряда (см. предыдущую лекцию), так же можно будет построить как изображения для каждого из зарядов в первой среде по отдельности. Рассмотрим два случая, когда диполь направлен вдоль границы двух сред и перпендикулярен ей. Напомним, что в случае границы идеального металла и воздуха изображения строятся из следующих соображений – виртуальный заряд находится на том же расстоянии от границы, что и реальный, модуль виртуального заряда равен модулю реального, знак виртуального заряда противоположен знаку реального. Построение для случая диполя, находящегося у границы раздела двух сред, представлен на рисунке 6.5а

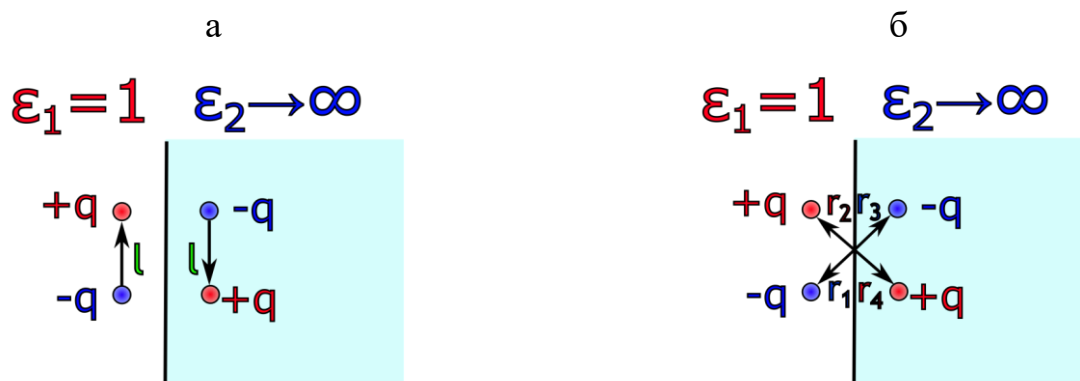


Рисунок 6.5 а. Применение метода изображений для случая диполя, направленного вдоль границы раздела двух сред. б. - определение полного дипольного момента системы

Из рисунка видно, что диполь, построенный методом изображения направлен в противоположную сторону. Нетрудно показать, что суммарный дипольный момент такой системы будет равен 0. Действительно, как мы знаем величина дипольного момента в случае нулевой суммы всех зарядов не

зависит от того, от какой точки ведется отсчет, тогда в качестве начала отсчета положим точку на пересечении диагоналей прямоугольника, вершины которого образованы зарядами. Тогда дипольный момент системы $\vec{d}_t$ определяемый в соответствии с (6.1) запишем как:

$$\vec{d}_t = -q \cdot \vec{r}_1 + q \cdot \vec{r}_2 - q \cdot \vec{r}_3 + q \cdot \vec{r}_4 = q \cdot [(\vec{r}_2 + \vec{r}_4) - (\vec{r}_1 + \vec{r}_3)] = 0. \quad (6.18)$$

Удобно выбранная точка отсчета позволяет утверждать, что $\vec{r}_2 = -\vec{r}_4$, а $\vec{r}_1 = -\vec{r}_3$ (достаточно вспомнить, что диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, а значит вектора, построенные от точки пересечения диагоналей к вершинам прямоугольника, равны по модулю и попарно противоположны). В итоге мы получаем, что дипольный момент такой системы равен нулю. Необходимо и важно отметить, что мы рассматриваем электростатические задачи, а значит исключаем из рассмотрения излучение диполей.

В случае, когда диполь ориентирован по нормали к границе раздела сред, диполь, полученный во второй среде методом изображения, будет направлен в ту же сторону, что и реальный диполь (рисунок 6.6). В этом случае суммарный дипольный момент системы $\vec{d}_t$

$$\vec{d}_t = 2\vec{d}.$$

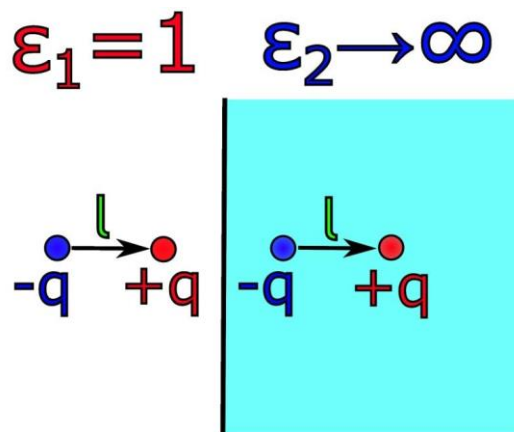


Рисунок 6.6 применение метода изображения для случая диполя, направленного поперек границы раздела двух сред

Вопросы для самопроверки

1. Что называют дипольным моментом системы зарядов?
2. В каком случае дипольный момент системы зарядов не зависит от системы координат?
3. Запишите выражение для дипольного момента для системы из двух равных по модулю, но противоположных по знаку зарядов.
4. Как зависит потенциал поля диполя от расстояния от центра диполя до точки наблюдения и его ориентации? При каких условиях можно получить упрощенное приближенное выражение для потенциала диполя только через его дипольный момент и радиус-вектор точки наблюдения?
5. Диполь расположен вблизи границы идеального проводника. Опишите пространственную структуру поля на расстояниях от поверхности проводника, больших по сравнению с расстоянием от проводника до диполя, в двух случаях: при ориентации диполя параллельно поверхности проводника и при ориентации диполя перпендикулярно поверхности проводника.

Лекция №7. Локализованный плазмонный резонанс

Описание лекции:

В этой лекции будет выяснено условие существования локализованного плазмона

Задачи:

- Предложить модель для описания полей, индуцированных металлическим шаром, помещенным в однородное электрическое поле
- Рассчитать поля внутри и вне металлического шара, помещенного в однородное электрическое поле.
- Найти частоту локализованного плазмона в модели Друде

Рассматриваемые разделы:

1. Применение граничных условий для решения задачи о поле металлического шара, помещенного в однородное электрическое поле.
2. Условие возникновения локализованного плазмонного резонанса
3. Локализованный плазмон.

Теперь, когда мы получили все необходимые навыки для расчета поля диполя, можно перейти к расчету полей внутри и вне металлического шара, помещенного в однородное электрическое поле. Пусть внешняя среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , а материал шара характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Пусть напряженность внешнего поля направлена вдоль оси OX . Начало отсчета поместим в центр металлического шара (рисунок 7.1).

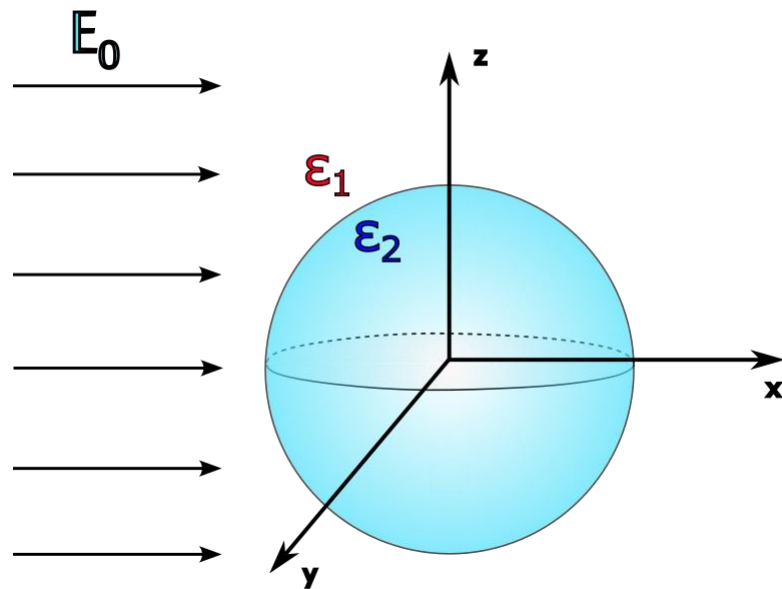


Рисунок 7.1 Металлический шар в однородном электрическом поле

В случае однородного внешнего поля можно ожидать смещение электронов проводимости в объеме шара вдоль линий напряженности падающего поля (но в направлении, противоположном направлению вектора напряженности внешнего электрического поля, так как заряд электрона отрицательный). Такое перераспределение зарядов приведет к тому, что на одной части поверхности шара окажется некомпенсированный положительный заряд, а на противоположной стороне – некомпенсированный отрицательный заряд. Для описания поля такого поверхностного распределения заряда можно предложить следующую модель: допустим, что поле внутри шара будет однородным, а поле снаружи шара совпадает с полем некоторого диполя, помещенного в центр шара. Таким образом поле снаружи шара, описываемое параметрами $\vec{E}_{out}$ и φ_{out} , будет представлять собой суперпозицию однородного падающего поля с параметрами $\vec{E}_0$ и φ_0 и неоднородного поля диполя, с параметрами $\vec{E}_d$ и φ_d :

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d, \quad (7.1)$$

$$\varphi_{out} = \varphi_0 + \varphi_d.$$

Поле внутри шара будет задаваться однородным полем с параметрами $\vec{E}_{in}$ и φ_{in} . Для решения задачи о металлическом шаре в однородном поле останется выяснить, можно ли подобрать величины однородного поля внутри шара и эффективного дипольного момента так, чтобы выполнялись

граничные условия на всей поверхности шара. Если это удастся сделать, то электростатическая задача будет решена.

Прежде всего покажем, что потенциал однородного поля может быть выражен через его напряженность следующими образом:

$$\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{r}. \quad (7.2)$$

Действительно, распишем вектора покомпонентно:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad (7.3)$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

x , y и z - координаты точки наблюдения в выбранной системе отсчета, и запишем скалярное произведение:

$$\varphi = -(E_x \cdot x + E_y \cdot y + E_z \cdot z). \quad (7.4)$$

Из курса электродинамики мы знаем, что $\vec{E} = -grad\varphi$. Проверим (7.4) на это условие:

$$-grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) полностью соответствует (7.3), что говорит о том, что соотношение (7.2) верно.

Теперь перейдем непосредственно к задаче о шаре во внешнем однородном поле, представленной на рисунке 7.1. Нам необходимо найти условия, при которых выполняются граничные условия равенства тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и равенства нормальных компонент вектора электрического смещения. Для начала выберем некоторую точку A на поверхности сферы и "сошьем" поля внутри и снаружи шарика в этой точке согласно граничным условиям. Будет ли достаточно рассмотреть только одну точку? При первом взгляде становится ясно, что рассматриваемая задача обладает цилиндрической симметрией, и если мы построим конус с образующей OA (где O - точка начала координат, помещенная в центр шара), то "сшивка" полей в одной из точек на окружности основания такого конуса автоматически приведет к выполнению граничных условий и в других точках окружности. Фактически это будет связано с тем, что угол θ между осью симметрии (осью OX) и радиус-вектором, проведенном к точкам на окружности основания такого конуса, будет одинаковый (рисунок 7.2). При более подробном рассмотрении

граничных условий оказывается, их выполнение не зависит от угла θ , а это значит, что граничные условия могут быть выполнены на всей поверхности шара одновременно. Напомним, что в рассматриваемой задаче поле внутри шара считается однородным, а снаружи – суперпозицией падающего поля и поля диполя, помещенного в центр шара.

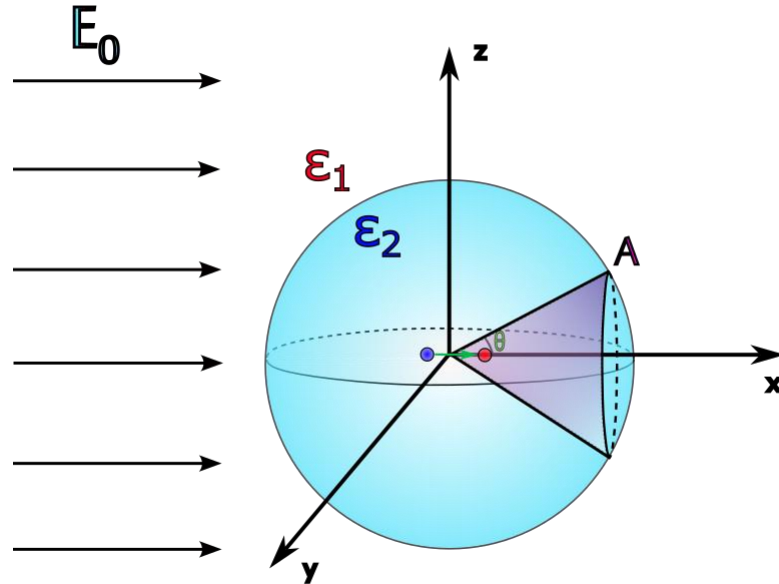


Рисунок 7.2. Подробное рассмотрение задачи о металлическом шаре радиуса a , помещенном в однородное электрическое поле

Но вернемся к решаемой задаче. Мы выбирали некоторую точку A , угол между радиус-вектором $\vec{r}$ к которой и осью OX , вдоль которой направлено поле, равен θ . Граничное условие, состоящее в равенстве тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля по обе стороны сферической поверхности, сводится к равенству потенциалов по обе стороны границы двух сред в каждой точке поверхности. С учетом (6.17), (7.1) и (7.2) запишем величину потенциала снаружи шара (для удобства сразу произведем операцию скалярного умножения векторов):

$$\varphi_{out} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} = -E_0 \cdot r \cdot \cos \theta + \frac{r \cdot d \cdot \cos \theta}{r^3}. \quad (7.6)$$

Потенциал в поля внутри шара с учетом (7.1) и (7.2) будет записан как:

$$\varphi_{in} = -\vec{E}_{in} \cdot \vec{r} = -E_{in} \cdot r \cdot \cos \theta. \quad (7.7)$$

Условие равенства потенциалов на обеих сторонах сферической поверхности в точке А сводится к равенству:

$$-E_0 \cdot a \cdot \cos \theta + \frac{a \cdot d \cdot \cos \theta}{a^3} = -E_{in} \cdot a \cdot \cos \theta, \quad (7.8)$$

a – радиус шара. После упрощения (7.8) получаем первое граничное условие. Обращаем внимание на то, что в нем отсутствует зависимость от угла, что говорит о его универсальности для всех точек на поверхности рассматриваемого шара:

$$E_0 - \frac{d}{a^3} = E_{in}. \quad (7.9)$$

Вторым граничным условием является равенство нормальных компонент векторов электрического смещения, или в терминах напряженностей полей:

$$\varepsilon_1 \vec{E}_{n1} = \varepsilon_2 \vec{E}_{n2}.$$

Компонента вектора напряженности электрического поля, нормальная к поверхности шара, равна частной производной от потенциала по радиусу, взятой с обратным знаком:

$$\vec{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (7.10)$$

Тогда условие равенства нормальных компонент электрического смещения на поверхности шара, то есть при $r = a$, может быть записано как:

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \right|_{r=a}. \quad (7.11)$$

Вычислим производные, входящие в (7.11), используя равенства (7.6) и (7.7):

$$\frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} = -E_0 \cos \theta - 2 \cdot \frac{d \cdot \cos \theta}{r^3}, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} = -E_{in} \cdot \cos \theta. \quad (7.13)$$

Тогда с учетом (6.29), (6.30) и (6.31) имеем:

$$\varepsilon_1 \cdot \left(-E_0 \cos \theta - 2 \cdot \frac{d \cdot \cos \theta}{r^3} \right) \Big|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot (-E_{in} \cdot \cos \theta) \Big|_{r=a}, \quad (7.14)$$

после упрощений получаем второе граничное условие, которое также оказывается независимым от угла:

$$\varepsilon_1 \cdot \left(E_0 + 2 \cdot \frac{d}{a^3} \right) = \varepsilon_2 \cdot E_{in}. \quad (7.15)$$

Таким образом имеем систему линейных уравнений с двумя неизвестными – полем внутри шара и величиной дипольного момента. Еще раз запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} E_0 - \frac{d}{a^3} &= E_{in}, \\ \varepsilon_1 \cdot \left(E_0 + 2 \cdot \frac{d}{a^3} \right) &= \varepsilon_2 \cdot E_{in}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Решение системы уравнений изложено ниже:

$$\begin{aligned} E_{in} &= \frac{3 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_1} E_0, \\ d &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_1} a^3 E_0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Таким образом мы нашли величину поля внутри металлического шара и величину дипольного момента, который описывает поле снаружи шара. Анализ формул показывает, что при условии $\varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_1 = 0$ поле внутри шара и его дипольный момент могут быть ненулевыми и в отсутствие внешнего поля. Фактически это означает, что мы нашли условия существования локализованного плазмонного резонанса в металлическом шаре.

Определим частоту ω_{pl} , на которой будут наблюдаться такие колебания в шаре, диэлектрическая проницаемость которого описывает моделью Друде. Для простоты рассмотрим случай шара в вакууме и пренебрежем затуханием. Так как $\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 = 0$, а $\varepsilon_1 = 1$, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= -2, \\ 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} &= -2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} = 3,$$

$$\omega = \frac{\omega_{pl}}{\sqrt{3}}.$$

В завершении лекции необходимо сделать важное замечание. Мы в течение курса уже несколько раз утверждали, что мы нашли условия, при которых перераспределение зарядов в металлических структурах может наблюдаться и в отсутствии внешнего воздействия. В такие моменты мы делали вывод, что мы нашли собственные моды, соответствующие разным типам колебаний электронов проводимости. Это несомненно действительно так. Однако не стоит забывать, что мы рассматриваем диссипативные системы, то есть системы, в которых присутствуют потери энергии. В таком случае мы и говорим: "МОГУТ наблюдаться колебания на некоторых собственных частотах". Подчеркнем, "МОГУТ" не значит "БУДУТ". Роль найденных нами собственных частот двоякая. Во-первых, собственные колебания могут возникнуть при произвольном воздействии на систему, в том числе, любом краткосрочном воздействии типа удара. Если длительность удара мала, спектр Фурье такого воздействия содержит много различных частот, в том числе и собственную частоту рассматриваемой нами системы. После удара система останется в возбужденном состоянии и некоторое время будет колебаться на собственной частоте с постепенно уменьшающейся амплитудой. Во-вторых, собственные частоты проявляются в явлении резонанса при длительном периодическом воздействии. Если частота периодического воздействия совпадает с одной из собственных частот системы, колебания будут нарастать и могут достичь большой амплитуды, в то время как действие на иных частот будет приводить к менее значительному возбуждению системы. Частоты плазменных колебаний в металлах, на их поверхности и в металлических наночастицах очень велики. Поэтому для их резонансного возбуждения лучше всего подходят электромагнитные волны. Проявляются плазмонные возбуждения и при импульсном воздействии на металлы ускоренных электронов.

Вопросы для самопроверки

1. Как перераспределяются заряды по поверхности проводящего шара при помещении во внешнее однородное поле?

2. Как можно описать поле внутри и снаружи проводящего шара, если все свободные заряды одновременно испытывают один и тот же сдвиг, малый по сравнению с диаметром шара?
3. Какие граничные условия выполняются на поверхности диэлектрического шара, помещенного в однородное внешнее поле электрическое поле?
4. Запишите выражения для напряженности поля внутри шара и его дипольного момента при условии, что шар помещен во внешнее однородное электрическое поле.
5. В каком случае поле внутри шара и его дипольный момент могут быть ненулевыми и в отсутствии внешнего поля?
6. Какой физический смысл имеют собственные частоты системы?
7. Какова частота локализованного плазмона в шаре, если оптические свойства материала, из которого он сделан, хорошо описывается моделью Друде?

Лекция №8. Отражение света на границе двух сред. Полное внутреннее отражение. Глубина проникновения. Угол Брюстера.

Описание лекции:

В данной лекции рассматривается отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела двух сред.

Задачи:

- Рассмотрим законы отражения и преломления света
- Получим условие критического угла полного внутреннего отражения
- Выведем выражение для глубины проникновения эванесцентной волны
- Получим выражение для угла Брюстера

Рассматриваемые разделы:

1. Граничные условия для волновых векторов падающей, отраженной и преломленной волн на границе двух сред.
2. Условие возникновения полного внутреннего отражения.
3. Формулы Френеля.
4. Угол Брюстера

До настоящей лекции мы успели обнаружить и описать возбуждения плазмонного типа в однородных средах в рамках электродинамического подхода и в неоднородных средах в рамках электростатического подхода. Настоящая лекция служит подготовкой к описанию плазмонных возбуждений в неоднородных средах в рамках электродинамического подхода. С этой целью будет рассмотрено отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух однородных сред с различными диэлектрическими проницаемостями. При этом будут сделаны следующие допущения.

1. Граница между средами является плоской
2. Обе среды считаются однородными и изотропными
3. Обе среды полубесконечны, то есть других границ, кроме границы между этими двумя средами, нет.

Итак, в каждой из сред имеется плоская электромагнитная волна:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (8.1)$$

Справедливо дисперсионное соотношение:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}. \quad (8.2)$$

Сделаем также важную оговорку. В этой лекции распространяющееся излучения будет отображаться с использованием волнового вектора, и векторов напряженности и магнитной индукции. Читающему данный конспект лекций студенту может показаться что мы строим некий оптический луч. Эта, во многом полезная картина, имеет свои границы применимости, так как не все явления, имеющие волновую природу, могут быть полностью описаны в рамках геометрической оптики. Надо иметь в виду, что рассматриваемые здесь плоские волны имеют бесконечный фронт, то есть «пучки» света должны при этом считаться бесконечно широкими. Но на рисунке, чтобы его не загромождать, будет изображен только один «луч», обозначающий направление распространения волны.

Перейдем к рассмотрению поведения плоской волны на границе раздела двух сред (Рисунок 8.1). Пусть среды характеризуются диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , а волновой вектор падающего излучения направлен под углом θ к нормали к поверхности раздела двух сред. В оптике именно этот угол принято называть углом падения, то есть углы отсчитываются не от самой поверхности, а от нормали к ней. Систему отсчета выберем так, что падающий луч и нормаль, восстановленная к поверхности раздела, лежат в плоскости XOY , граница между двумя средами лежит в плоскости XOZ . Для удобства дальнейших расчетов за положительное направление оси OY выберем направление сверху вниз (Рисунок 7.1).

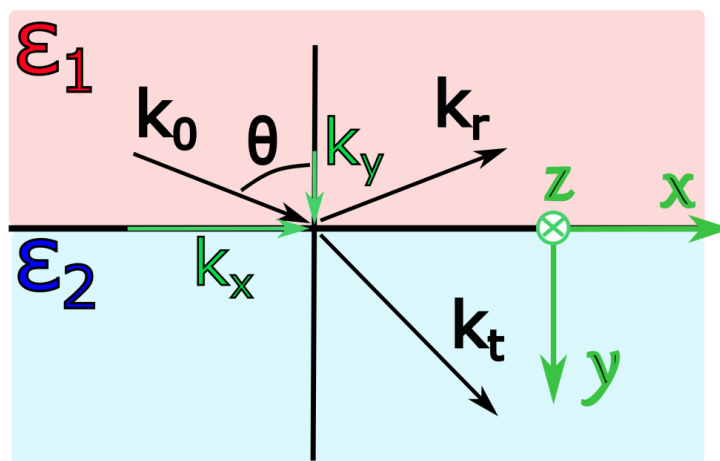


Рисунок 8.1. Волновые вектора падающего, отраженного и прошедшего излучения на границе двух сред

Как мы знаем, часть излучения может отразиться, а часть может пройти во вторую среду (опять сделаем тут важную ремарку в нашем стиле - может не значит должно или будет, однако ясность в этом вопросе будет достигнута к концу лекции). Откуда мы можем вообще сделать заключение,

что свет может пойти в обе среды, ну во-первых об этом нам может сказать наш повседневный опыт. Во-вторых, мы можем сослаться на принцип Гюйгенса-Френеля, и сказать, что каждая точка на границе раздела сред станет источником вторичных волн, которые будут распространяться в обе среды, а реально наблюдаемое излучение будет представлять собой суперпозицию этих элементарных вторичных волн. И наконец имея некое представление о строения вещества мы можем сказать, что электромагнитная волна будет "раскачивать" носители заряда, входящие в состав вещества. В свою очередь такие осциллирующие на частоте падающего поля заряды, как известно из курса электродинамики, становятся источниками вторичных волн:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}. \quad (8.2)$$

Рассмотрим связи, которые существуют между волновыми векторами и частотами падающего, отраженного и прошедшего во вторую среду излучения. Допустим, что граничные условия выполнены в какой-то момент времени и в какой-то точке на поверхности границы раздела двух сред. Для того, чтобы такие же соотношения были выполнены и во все остальные моменты времени, необходимо, чтобы частоты падающего ω_0 , отраженного ω_r и прошедшего ω_t излучения совпадали:

$$\omega_0 = \omega_r = \omega_t = \omega. \quad (8.3)$$

В этом случае граничное условие, выполненное в один момент времени, будет выполняться «всегда». Для того, чтобы граничное условие, выполненное в одной точке поверхности раздела сред, выполнялись на всей границе раздела, коротко говоря, "везде", необходимо потребовать, чтобы проекции волновых векторов всех рассматриваемых волн на границу раздела сред были равны. Обозначим волновые вектора падающего, отраженного и прошедшего излучения как где k_0 , k_r , k_t соответственно. В рассматриваемой геометрии волновой вектор падающего излучения не имеет проекции на ось OZ , а значит его проекция на границу раздела имеет только компоненту вдоль оси OX . Таким образом, граничное условие для волновых векторов может быть записано как:

$$k_{0x} = k_{rx} = k_{tx} = k_x. \quad (8.4)$$

Кроме того, выполнение этого граничного условия означает еще и тот факт, что у волновых векторов отраженного и прошедшего излучения

отсутствует компонента вдоль оси OZ , что говорит, что лучи падающий, отраженный и преломленный лежат в одной плоскости XOY .

Так как диэлектрическая проницаемость среды, в которой распространяется падающее излучение равно ε_1 , а угол падения θ , то используя дисперсионное соотношение и тригонометрические соотношения, а также обозначения, принятые в (8.3) и (8.4), можно получить следующие выражения для модуля и компонент волнового вектора падающего излучения:

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (8.5)$$

$$k_x = k_{0x} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \theta, \quad (8.6)$$

$$k_{0y} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \theta. \quad (8.7)$$

Для отраженной волны мы можем записать величину модуля волнового вектора (с учетом того, что отраженная волна также распространяется в среде с ε_1):

$$k_r = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1}. \quad (8.8)$$

У отраженной волны проекция на границу, согласно утверждению (8.4), будет задаваться выражением (8.6), тогда по теореме Пифагора мы сможем найти компоненту волнового вектора вдоль оси OY :

$$k_{ry} = -\sqrt{k_r^2 - k_x^2} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta} = -\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta}.$$

Здесь подразумевается положительное значение корня, а отрицательный знак соответствует направлению распространения отраженной волны. Используя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$k_{ry} = -\sqrt{k_r^2 - k_x^2} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta} = -\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \theta.$$

Это же выражение с положительным знаком определяет проекцию ось OY волнового вектора падающего излучения. Итак, проекция волнового вектора отраженной волны на ось OY :

$$k_{ry} = -\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \theta. \quad (8.9)$$

Сравнение (8.5) и (8.6) показывает, что отраженная волна распространяется под тем же углом к нормали к поверхности раздела сред, что и падающая. Таким образом, закон отражения получен как следствие граничных условий для волн, описывающих излучение. Этот закон, состоящий в равенстве углов падения и отражения, не отличается от закона отражения, который может быть получен в рамках геометрической оптики с использованием принципа Ферма.

Теперь запишем модуль волнового вектора излучения k_t , прошедшего во вторую среду с диэлектрической проницаемостью ε_2 :

$$k_t = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2}. \quad (8.10)$$

С одной стороны, если угол преломления (угол между волновым вектором прошедшего во вторую среду излучения и нормалью к границе сред) обозначить как θ' , то проекция k_t на границу раздела сред будет записано как:

$$k_{tx} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin \theta'. \quad (8.11)$$

С другой стороны с учетом требования равенства проекций волновых векторов на границу раздела сред (7.4) и полученных выражений (7.6) и (7.8) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin \theta' &= \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \theta, \\ \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin \theta' &= \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Выражение (7.9) известно нам со школьной скамьи как закон преломления света. Тут мы тоже можем сделать ремарку, что это утверждение также может быть выведена из принципа Ферма.

Запишем также проекцию волнового вектора прошедшего во вторую среду излучения на ось OY . Для этого воспользуемся величиной модуля

волнового вектора во второй среде (8.7), проекцией вектора на границу раздела сред в форме (8.6) и теоремой Пифагора:

$$k_{ty} = \sqrt{k_t^2 - k_x^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta}. \quad (8.13)$$

Проанализируем выражение (8.13). При падении излучения из среды с большим значением диэлектрической проницаемости выражение под корнем в (8.13) может принимать отрицательные значения. Отрицательные значения под корнем будут получаться для углов, больших некоторого критического угла $\theta_{кр}$. Определим его:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta_{кр} &= 0, \\ \sin^2 \theta_{кр} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \\ \sin \theta_{кр} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где n_1 и n_2 - показатели преломления в первой и второй среде.

Давайте рассмотрим, что же случится, если угол падения окажется больше критического. Тогда проекцию волнового вектора во второй среде на ось ОУ можно будет записать как:

$$k_{ty} = \frac{\omega}{c} \cdot i \cdot \sqrt{|\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta|} = \frac{\omega}{c} \cdot i \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2}, \quad (8.15)$$

проекция окажется чисто мнимой.

Наконец, воспользуемся выражениями (8.1), (8.4), (8.6) и (8.15) а также правилом скалярного умножения векторов и запишем уравнение, которое описывает распространение волны во второй среде при условии, что угол падения больше критического угла полного внутреннего отражения $\vec{E}_{t, \theta > \theta_{кр}}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{t, \theta > \theta_{кр}} &= \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_x \cdot x - k_{ty} \cdot y)} = \\ &= \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c} \cdot i \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2} \cdot y\right)}. \end{aligned}$$

После выделения экспонент с чисто мнимым и вещественным показателями, получим:

$$\vec{E}_{t, \theta > \theta_{кр}} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \theta \cdot x\right)} e^{-\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2} \cdot y}. \quad (8.16)$$

Экспонента с чисто мнимым показателем описывает распространение волны вдоль границы раздела сред. Ее модуль равен единице. Экспонента с вещественным показателем описывает затухание волны в направлении оси OY . Подчеркнем, что мы впервые получили решение уравнений Максвелла в виде неоднородной волны, которая распространяется вдоль границы раздела сред, но экспоненциально затухает вдоль нормали к границе раздела сред. Экспоненциально затухающие волны называются эванесцентными волнами.

Для описания эванесцентных волн можно ввести понятие глубины проникновения, то есть расстояния, на котором эванесцентная волна затухает в e раз. Получим выражение для δ_e . Так как точка отсчета в выбранной системе координат находится на границе раздела сред, тогда при рассмотрении (8.15) можно записать следующее:

$$\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2} \cdot \delta_e = 1,$$

$$\delta_e = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2}},$$

переходя от частот к длинам волн:

$$\frac{c}{\omega} = \frac{c}{2\pi\nu} = \frac{\lambda}{2\pi},$$

$$\delta_e = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta - \varepsilon_2}}. \quad (8.17)$$

Попробуем теперь ответить на вопрос о соотношении амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн. Понятно, что для "сшивания" амплитуд на границе раздела сред мы вновь будем использовать граничные условия. Ранее мы договорились, что волновой вектор падающей волны будет лежать в плоскости XOY . Мы знаем, что вектор напряженности электрического поля перпендикулярен волновому вектору. Для дальнейшего рассмотрения задачи удобно выделить два типа поляризации - s - и p -поляризацию. s -поляризованной волной называют такую линейно-поляризованную волну, у которой вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения (плоскости, образованной волновым вектором падающего излучения и нормалью к границе раздела сред) (рисунок

8.2а). В таком случае вектор магнитной индукции будет лежать в плоскости падения. Из рисунка 8.2а понятно, что в таком случае вектор напряженности электрического поля имеет единственную компоненту вдоль оси oz , а вектор магнитного поля имеет только компоненты вдоль осей ox и oy . p -поляризованной волной называют такую плоско поляризованную волну, у которой вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения. Тогда вектор напряженности электрического поля имеет компоненты вдоль осей ox и oy , а вектор магнитной индукции будет перпендикулярен плоскости падения (рисунок 8.2 б), то есть у него будет единственная компонента вдоль оси oz . Определенные указанным образом поляризации можно использовать как базис, по которому можно разложить любую линейную поляризацию. Важно, что, как будет видно из дальнейшего, уравнения Максвелла не связывают эти две поляризации между собой, что позволяет рассматривать по отдельности.

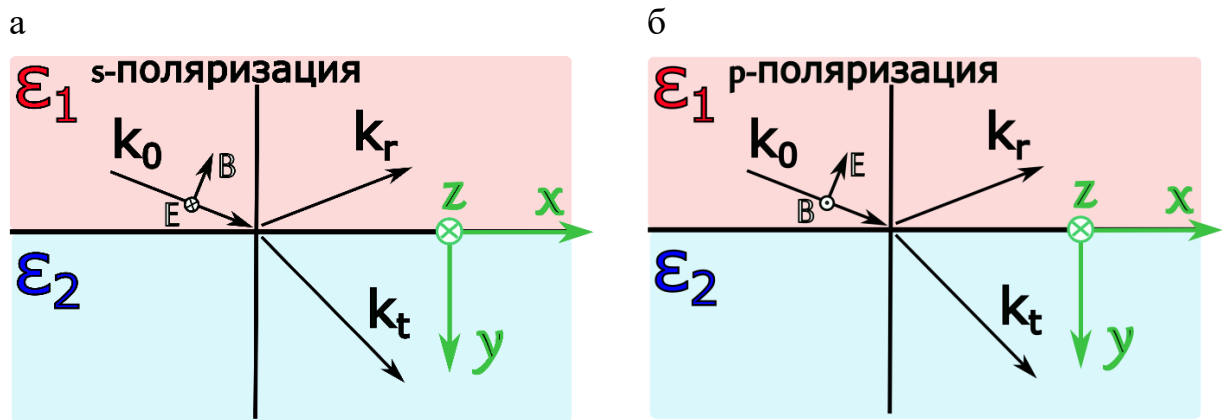


Рисунок 8.2 Типы поляризации в рассматриваемом случае (а) - s -поляризованная волна, (б) - p -поляризованная волна

Для решения задачи будем пользоваться следующим набором граничных условий, где первые два ранее уже обсуждались в текущем курсе, третье - является граничным условием для тангенциальной составляющей вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ (в данном курсе лекций мы опускаем доказательство этого условия, лишь скажем, что оно выводится по аналогии с условием для напряженностей электрического поля), и последнее граничное условие - предмет обсуждения в первой части лекции. Индексы 1 и 2 здесь соответствуют "номеру" среды (среда 1 - среда, где распространяется падающее и отраженное излучение, среда 2 - где распространяется прошедшее излучение):

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad (8.18a)$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}, \quad (8.18б)$$

$$B_{t1} = B_{t2}, \quad (8.18в)$$

$$k_{ox} = k_{rx} = k_{tx}. \quad (8.18г)$$

Также напомним, что роторные уравнения из системы уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн (8.1) могут быть записаны в следующем виде (мы кратко обсуждали этот переход в лекции 4, формулы 4.6 и 4.7):

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{B},$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \cdot \vec{E}.$$

Начнем рассмотрение с рассмотрения s-поляризованного света. Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ для s-поляризации, как уже говорилось ранее, имеет компоненту только вдоль оси oz , то есть он имеет только тангенциальную компоненту по отношению к границе раздела. Тогда условие (8.18а) с учетом наличия двух волн в первой среде можно записать в следующем виде:

$$E_{0s} + E_{rs} = E_{ts}. \quad (8.20)$$

Здесь и далее индекс s напоминает о типе поляризации плоской волны. Для получения еще одного условия воспользуемся соотношением (8.18а). В рассматриваемом случае имеем:

$$\vec{k}_s = (k_{xs}, k_{ys}, 0),$$

$$\vec{E}_s = (0, 0, E_{zs}).$$

Векторное произведение равно:

$$\vec{k}_s \times \vec{E}_s = \vec{i} \cdot k_{ys} \cdot E_{zs} - \vec{j} \cdot k_{xs} \cdot E_{zs}. \quad (8.21)$$

Сопоставляя (8.18а) и (8.19) видно, что

$$B_{xs} = \frac{c}{\omega} \cdot k_{ys} \cdot E_{zs}, \quad (8.22)$$

$$B_{ys} = -\frac{c}{\omega} \cdot k_{xs} \cdot E_{zs}. \quad (8.23)$$

Так как граничное условие (8.18в) налагается на тангенциальные компоненты магнитного поля, далее будем рассматривать только проекцию вектора магнитного поля вдоль оси ox . Тогда с использованием (7.22) можно написать еще одно уравнение, связывающие амплитуды рассматриваемых волн:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\omega} \cdot k_{0ys} \cdot E_{0zs} + \frac{c}{\omega} \cdot k_{rys} \cdot E_{rzs} &= \frac{c}{\omega} \cdot k_{tys} \cdot E_{tzs}, \\ k_{0ys} \cdot E_{0zs} + k_{rys} \cdot E_{rzs} &= k_{tys} \cdot E_{tzs}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Введем обозначения k_{1y} как проекция волновых векторов в первой среде на ось OY , а k_{2y} - проекции волновых векторов во второй среде на ось OY , с учетом направления вектором имеем:

$$\begin{aligned} k_{0y} &= k_{1y} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \theta, \\ k_{ry} &= -k_{1y} = -\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \theta, \\ k_{ty} &= k_{2y} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Тогда с учетом (8.20), (8.24) и замены (8.25) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} E_{0s} + E_{rs} &= E_{ts}, \\ E_{0s} - E_{rs} &= \frac{k_{2y}}{k_{1y}} E_{ts}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Сложим уравнения, и получим следующую зависимость:

$$\begin{aligned} 2E_{0s} &= \left(1 + \frac{k_{2y}}{k_{1y}}\right) E_{ts}, \\ E_{ts} &= \frac{2}{1 + \frac{k_{2y}}{k_{1y}}} E_{0s}, \end{aligned}$$

упрощая, имеем связи между амплитудой падающей и прошедшей волны:

$$E_{ts} = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} E_{0s}. \quad (8.27)$$

Подставляя (8.27) в первое уравнение из (8.26), получим связь между амплитудами падающей и отраженной волны:

$$E_{rs} = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} E_{0s}. \quad (8.28)$$

Удобно ввести амплитудные коэффициенты отражения и пропускания при падении света на границу двух сред (для s поляризованных волн):

$$t_s = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}}, \quad (8.29)$$

$$r_s = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}}, \quad (8.30)$$

Необходимо отметить, что коэффициенты (8.29) и (8.30) дают связь между амплитудами рассматриваемых волн. При этом при работе с оптическим излучением измеряемой характеристикой является интенсивность, которая также может быть интерпретирована как энергетическая характеристика электромагнитной волны. В таком случае коэффициенты отражения R_s и пропускания T_s будут даваться как квадраты модулей амплитудных коэффициентов:

$$T_s = \frac{k_{2y}}{k_{1y}} \cdot |t_s|^2 = \frac{k_{2y}}{k_{1y}} \cdot \left| \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} \right|^2, \quad (8.31)$$

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} \right|^2. \quad (8.32)$$

Фактически мы вывели формулы Френеля для s -поляризованного излучения. Разница между формализмом записи (8.29) и (8.30) и общепринятой записью формул через показатели преломления и углы связана лишь с дальнейшим удобством для рассматриваемого курса.

Перейдем к рассмотрению p -поляризованного света. Для вывода коэффициентов отражения и пропускания при рассмотрении p -поляризованного света удобно пользоваться вектором индукции магнитного поля. Действительно, в таком случае можно записать, что:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_p &= (k_{xp}, k_{yp}, 0), \\
\vec{B}_p &= (0, 0, B_{zp}), \\
\vec{k}_p \times \vec{E}_p &= \vec{i} \cdot k_{yp} \cdot B_{zp} - \vec{j} \cdot k_{xp} \cdot B_{zp}.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Из сопоставления (8.31) и (8.17б) запишем, что тангенциальная составляющая E_{xp} :

$$E_{xp} = -\frac{c}{\omega \cdot \varepsilon} \cdot k_{yp} \cdot B_{zp}. \tag{8.34}$$

Тогда с учетом граничных условий (8.17), выражения (8.34) и замен (8.25) для p -поляризованной волны имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
B_{0p} + B_{rp} &= B_{tp}, \\
\frac{k_{1y}}{\varepsilon_1} \cdot B_{0p} - \frac{k_{1y}}{\varepsilon_1} \cdot B_{rp} &= \frac{k_{2y}}{\varepsilon_2} \cdot B_{tp}.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Решая полученную систему уравнений, имеем:

$$B_{tp} = \frac{2 \cdot \varepsilon_2 \cdot k_{1y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \cdot B_{0p}, \tag{8.36}$$

$$B_{rp} = \frac{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} - \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \cdot B_{0p}, \tag{8.37}$$

также введем амплитудные коэффициенты преломления и отражения:

$$t_p = \frac{2 \cdot \varepsilon_2 \cdot k_{1y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}, \tag{8.38}$$

$$r_p = \frac{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} - \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}. \tag{8.39}$$

При анализе числителя (8.39) видно, что можно подобрать параметры, при которых коэффициент отражения обратится в ноль, другими словами, можно найти такой угол падения на границу двух сред, когда p -поляризованная волна не будет отражаться. Такой угол называется углом Брюстера. Тогда отсутствие отражения для одной из поляризаций приведет к тому, что неполяризованный свет, отраженный под угол Брюстера окажется линейно поляризованным.

Найдем угол Брюстера, то есть угол, при котором коэффициент отражения $r_p = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \cdot k_{1p} - \varepsilon_1 \cdot k_{2p} &= 0, \\ \varepsilon_2 \cdot k_{1p} &= \varepsilon_1 \cdot k_{2p}.\end{aligned}$$

Проекции волнового вектора удобно расписать через модуль волнового вектора в виде (8.5) и проекции волнового вектора на ось ox , с учетом того, что проекция волнового вектора на границу раздела двух сред одинакова для всех волн. Тогда:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} &= \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}, \\ \varepsilon_2^2 \cdot \left(\varepsilon_1 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right) &= \varepsilon_1^2 \cdot \left(\varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right), \\ \varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} &= \varepsilon_2^2 \cdot k_x^2 - \varepsilon_1^2 \cdot k_x^2, \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cdot k_x^2, \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cdot k_x^2.\end{aligned}$$

С учетом (8.6) имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta, \\ \sin^2 \theta &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \\ \operatorname{tg}^2 \theta &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.\end{aligned}\tag{8.40}$$

Как и в предыдущей части лекции укажем на тот факт, что коэффициенты t_p и r_p являются амплитудными коэффициентами. Для

описания коэффициентов пропускания и отражения по интенсивности волны можно записать следующие выражения:

$$T_p = \frac{k_{2y}}{k_{1y}} \cdot |t_p|^2 = \frac{k_{2y}}{k_{1y}} \cdot \left| \frac{2 \cdot \varepsilon_2 \cdot k_{1y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \right|^2, \quad (8.41)$$

$$R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} - \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \right|^2. \quad (8.42)$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой угол называют углом падения излучения на границу раздела сред?
2. Как соотносятся частоты падающего, преломленного и отраженного излучений? Обоснуйте свой ответ.
3. Как связаны волновые вектора падающего, отраженного и преломленного излучений? Обоснуйте свой ответ.
4. Сформулируйте законы отражения и преломления света. Укажите физические законы, на основании которых они получены.
5. Что такое критический угол полного внутреннего отражения, от каких параметров он зависит?
6. Что можно сказать о волновом векторе преломленного излучения, если угол падения оказывается больше критического угла полного внутреннего отражения?
7. Какие волны называются эванесцентными?
8. Дайте определение понятию “глубина проникновения”. От каких параметров и как она зависит?
9. Дайте определения s - и p -поляризованным волнам при распространении излучения в плоско-слоистой среде.
10. Запишите выражения для коэффициентов отражения и пропускания для s - и p -поляризованного излучения на границе раздела двух сред.
11. Что такое угол Брюстера, от каких параметров он зависит?

Лекция №9. Поверхностный плазмон-поляритон

Описание лекции:

В этой лекции рассматривается поверхностный плазмон-поляритон - особый тип электромагнитного возбуждения, распространяющегося вдоль границы раздела металла и диэлектрика.

Задачи:

- Найти условия, при которых на границе раздела двух сред (диэлектрик-металл) могут существовать электромагнитные возбуждения, распространяющиеся вдоль границы и затухающие в глубь обеих сред.
- Получить дисперсионное соотношение для поверхностных плазмон-поляритонов.
- Выяснить условия существования поверхностных плазмон-поляритонов.

Рассматриваемые разделы:

1. Анализ коэффициентов отражения и прохождения для s - и p -поляризованных электромагнитных волн.
2. Поиск условий для существования поверхностного плазмон-поляритона.
3. Пространственная структура электрического поля поверхностного плазмон-поляритона
4. Дисперсионные соотношения для поверхностного плазмон-поляритона на границе металла, описываемого моделью Друде

Давайте вернемся к результатам, полученным на прошлой лекции. Мы начали с того, что рассмотрели световую волну, падающую на границу раздела двух сред, и показали, что, в общем случае, вместе с падающей волной возникают две дополнительные волны: отраженная волна, которая распространяется в той же среде, что и падающая, но в противоположную сторону, и волна, прошедшая во вторую среду. Так же напомним, что при определенных условиях, а именно, при полном внутреннем отражении, прошедшая волна оказывается неоднородной. Мы показали, что такая волна распространяется вдоль границы раздела двух сред без затухания, но затухает вглубь среды с меньшим показателем преломления. Наибольший интерес для плазмоники представляет тот факт, что при падении p -поляризованного света под определенным углом, известным как угол Брюстера, амплитуда отраженной волны обращается в ноль, то есть вместо трех волн на границе

сосуществуют только две: падающая и прошедшая. В обычных прозрачных средах с положительными диэлектрическими проницаемостями критический угол полного внутреннего отражения всегда больше угла Брюстера, так что эти два явления никогда не наблюдаются одновременно. Совершенно иная ситуация складывается в том случае, если одна из сред обладает отрицательной диэлектрической проницаемостью. Именно этот случай интересен для наноплазмоники.

Сейчас уместно обсудить общие подходы, которые мы применяем к рассмотрению оптических явлений, относящихся к наноплазмонике. Собственные моды в различных рассматриваемых конфигурациях мы находили путем отыскания условий, при которых данное возбуждение может существовать без какого-либо внешнего воздействия. В случае диэлектрического шара были найдены условия, при которых его дипольный момент может осциллировать на определенной частоте в отсутствие внешнего поля. В случае границы металл – воздух, также были найдены условия, при которых на поверхности возникают осцилляции поверхностной плотности заряда при отсутствии внешних зарядов. В последнем случае мы говорили, что мы нашли условие, при котором может наблюдаться особый тип возбуждения - поверхностный плазмон. К этому вопросу мы и вернемся в этой лекции, но рассмотрим его не в рамках электростатики, а используя последовательный электродинамический подход. Как было только что описано, будем искать такие решения уравнений Максвелла, которые описывают поля, не требующие для своего возбуждения внешних источников. Наиболее близкий аналог того, что необходимо найти, это рассмотренное в предыдущей лекции падение света p -поляризованной волны под углом Брюстера, при котором вместо трех волн на границе сосуществуют только две волны.

Выпишем еще раз уравнения, связывающие амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, ограничившись только проекциями вектора напряженности электрического поля:

$$E_{ts} = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} E_{0s}, \quad (9.1)$$

$$E_{rs} = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} E_{0s}, \quad (9.2)$$

$$E_{tp} = \frac{2 \cdot \varepsilon_2 \cdot k_{1y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \cdot E_{0p}, \quad (9.3)$$

$$E_{rp} = \frac{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} - \varepsilon_1 \cdot k_{2y}}{\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y}} \cdot E_{0p}. \quad (9.4)$$

Нам необходимо найти решения, соответствующие ситуации, когда отраженная и прошедшая волна могут существовать и без падающей. С математической точки зрения это означает, что коэффициенты отражения и прохождения стремятся к бесконечности и, следовательно, знаменатели выписанных выше дробей обращаются в ноль. Рассмотрение знаменателей в уравнениях (9.1) и (9.2), отвечающих s -поляризованному излучению, приводит к выводу, что они в ноль обратиться не могут. Иная ситуация складывается в случае p -поляризованных волн, коэффициенты прохождения и отражения которых даны уравнениями (9.3) и (9.4). Действительно, если диэлектрические проницаемости контактирующих сред имеют разные знаки, то обращение знаменателей в ноль становится возможным. Отметим, что подобным же образом в случае положительных диэлектрических проницаемостей сред угол Брюстера отсутствует для s -поляризованного излучения, но для p -поляризованного излучения существует угол при котором в ноль обращается числитель уравнения (9.4), что и приводит к возможности сосуществования на поверхности только двух волн, что и выделяет обе рассмотренные ситуации из общего положения, при котором на поверхности обязательно присутствуют три волны.

Выясним характер волн, отвечающих обращению знаменателя выражений (9.3) и (9.4) в ноль:

$$\varepsilon_2 \cdot k_{1y} + \varepsilon_1 \cdot k_{2y} = 0. \quad (9.5)$$

Напомним, что модуль волнового вектора может быть описан как:

$$k_i = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_i}, \quad (9.6)$$

в силу граничных условий:

$$k_{x1} = k_{x2} = k_x, \quad (9.7)$$

по теореме Пифагора:

$$k_{yi}^2 = k_i^2 - k_x^2. \quad (9.8)$$

С учетом всего вышесказанного (9.5) принимает вид:

$$\varepsilon_2 \cdot \sqrt{k_1^2 - k_x^2} + \varepsilon_1 \cdot \sqrt{k_2^2 - k_x^2} = 0 \quad (9.9)$$

Подставим величину волнового вектора k_1^2 и k_2^2 в (9.9) и решим получившееся уравнение относительно единственного свободного параметра в этих соотношениях - k_x^2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - k_x^2} + \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_2 - k_x^2} &= 0, \\ \varepsilon_2 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - k_x^2} &= -\varepsilon_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_2 - k_x^2}, \\ \varepsilon_2^2 \cdot \left(\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - k_x^2 \right) &= \varepsilon_1^2 \cdot \left(\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_2 - k_x^2 \right), \\ \varepsilon_1^2 \cdot k_x^2 - \varepsilon_2^2 \cdot k_x^2 &= \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\omega^2}{c^2}, \\ k_x^2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) &= \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ k_x^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Полученный результат можно интерпретировать как квадрат модуля проекции волнового вектора некоторого электромагнитного возмущения, распространяющегося вдоль границы двух сред. В соответствии с поставленными условиями такой проекцией волнового вектора на плоскость раздела сред обладают две волны, одна из которых существует в одной среде, а другая – в другой. Поскольку в отсутствие падающей волны приток энергии к границе отсутствует, не должно быть и оттока энергии от границы, что возможно в том случае, если обе волны являются эванесцентными, то есть затухающими по мере удаления от границы раздела двух сред. Выясним характер этого затухания.

С учетом (9.8) и (9.10) имеем:

$$k_{y1}^2 = k_1^2 - k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$k_{y1}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (9.11)$$

Аналогично:

$$k_{y2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (9.12)$$

Напомним еще раз, что мы ищем некоторое решение, соответствующее собственным модам, которые могут существовать и без внешнего воздействия. При этом нас интересуют такое решение, которое соответствует электромагнитному возмущению распространяющемуся вдоль границы двух сред и затухает при распространении по нормали к границе. В формализме волновых векторов это означает, что k_x должен быть действительным, а k_{y1} и k_{y2} чисто мнимыми. То есть переходя к квадратам волновых векторов запишем:

$$\begin{aligned} k_x^2 &> 0, \\ k_{y1}^2 &< 0, \\ k_{y2}^2 &< 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Подставим в (9.13) выражения (9.10) - (9.12):

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &> 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &< 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &< 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Упростим неравенства, поделив их на входящие в них заведомо положительные величины. Второе и третье неравенства при этом дадут одно условие:

$$\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} > 0, \quad (9.15)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0.$$

Как известно дробь будет положительной, когда и числитель и знаменатель одного знака. Так как знаменатель дроби в соответствии со вторым неравенством отрицательный, (9.15) может быть упрощено до:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 &< 0, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &< 0.\end{aligned}\tag{9.16}$$

Фактически (9.16) говорит нам о том, что искомое, распространяющееся вдоль границы двух сред и затухающее при удалении от границы электромагнитное возмущение может существовать на границе двух сред с разными по знаку диэлектрическими проницаемостями. Фактически такое может быть реализовано на границе металла, характеризующегося отрицательной диэлектрической проницаемостью и диэлектрика с положительной диэлектрической проницаемостью. Договоримся первую среду с ε_1 считать диэлектриком, т. е. $\varepsilon_1 > 0$, а вторую металлом с $\varepsilon_2 < 0$. Тогда, что бы (9.16) выполнялось нам надо потребовать выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &> 0, \\ \varepsilon_2 &< 0, \\ |\varepsilon_2| &> \varepsilon_1.\end{aligned}\tag{9.17}$$

Теперь подведем еще один промежуточный итог. Теперь мы понимаем, что мы нашли решение в виде некоторой волны распространяющейся вдоль границе металл-диэлектрик, и затухающего в обе среды. При чем такое решение существует только когда диэлектрическая проницаемость металла по модулю больше, чем у диэлектрика.

Выражение (9.10) выражает связь между частотой изменения поля во времени и периодом его изменения в пространстве, то есть является дисперсионным соотношением для обнаруженного нами особого типа электромагнитного возбуждения – поверхностного плазмон-поляритона. Обозначим волновой вектор такого возмущения как k_{spp} и в соответствии с (9.10) запишем:

$$k_{spp} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (9.18)$$

Это дисперсионное соотношение существенно отличается от дисперсионного соотношения для объемных волн в однородных средах (9.6).

Проиллюстрируем полученное дисперсионное соотношение на конкретном примере, в котором в качестве диэлектрика будет выступать воздух, а диэлектрическая проницаемость металла описывается моделью Друде, причем поглощение в металле мало и им можно пренебречь. Тогда диэлектрические проницаемости можно записать как:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1, \\ \varepsilon_2 &= 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

и получить зависимость проекции волнового вектора поверхностного плазмон-поляритона от частоты:

$$\begin{aligned} k_{spp}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}}{2 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}} \\ c^2 \cdot k_{spp}^2 &= \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{pl}^2}{\omega^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{2}}. \end{aligned}$$

Непосредственно из полученного дисперсионного соотношения ясно, что область существования поверхностного плазмон-поляритона ограничена по частоте условием:

$$\omega < \frac{\omega_{pl}}{\sqrt{2}},$$

так как при больших частотах квадрат проекции волнового вектора становится отрицательным, что означает невозможность распространения таких возбуждений вдоль границы. Ясно также, что по мере приближения к указанной частоте проекция волнового вектора растет и становится намного больше обратной длины электромагнитной волны соответствующей частоты в пустоте, то есть пространственный период осцилляций поверхностной плотности заряда на границе раздела сред оказывается в этом случае намного

меньше длины световой волны в пустоте. Частота таких возмущений плотности заряда может быть рассчитана в рамках электростатического подхода, так как эффекты запаздывания, связанные с конечностью скорости света, на таких малых расстояниях не проявляются. И действительно, частота предельно коротковолнового плазмон-поляритона совпадает с рассчитанной ранее частотой поверхностного плазмона в рамках электростатического подхода.

Вопросы для самопроверки

1. Каким условиям должны удовлетворять диэлектрические проницаемости сред, чтобы вдоль их границы мог распространяться поверхностный плазмон-поляритон?
2. Как направлен электрический вектор поверхностного плазмон-поляритона?
3. Запишите дисперсионное соотношение для поверхностного плазмон-поляритона.
4. Какой величиной ограничен рост частоты поверхностного плазмон-поляритона при уменьшении длины волны при условии, что оптические свойства среды, вдоль которой распространяется поверхностный плазмон поляритон, хорошо описываются моделью Друде?

Вартанян Тигран Арменакович
Никитин Игорь Юрьевич
Щербинин Дмитрий Павлович
Сапунова Анастасия Алексеевна
Афанасьева Александра Вячеславовна

Лекции по наноплазмонике. Часть 1

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел

Университета ИТМО

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А