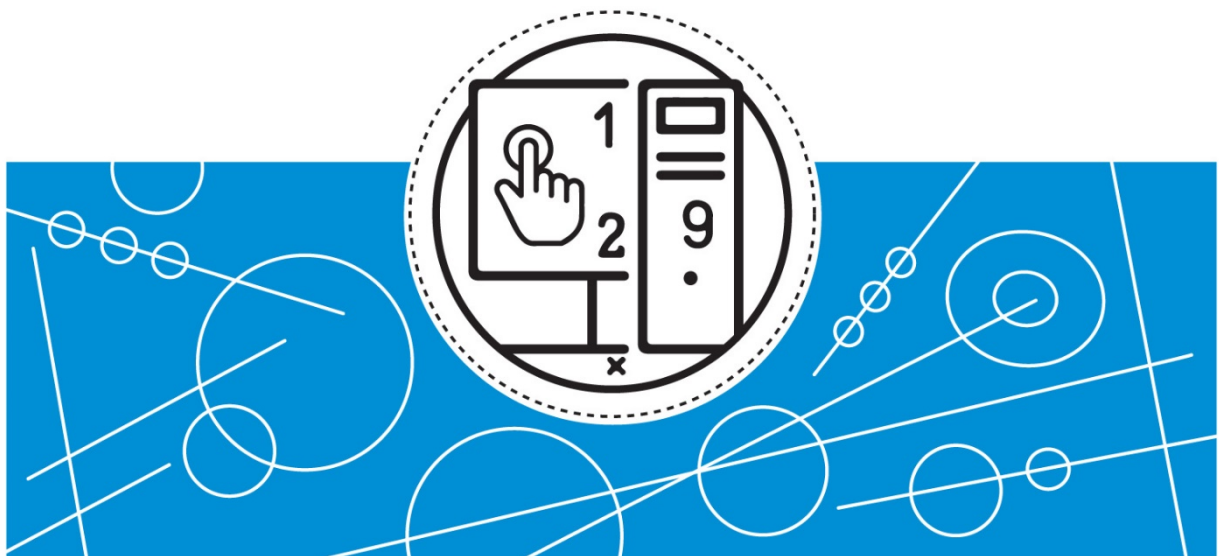


ІТМО

**С.Е. ХОЛОДОВА, Т.В. САВЧЕНКО,
С.И. ПЕРЕГУДИН**

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ**



**Санкт-Петербург
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.Е. Холодова, Т.В. Савченко, С.И. Перегудин
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО

по направлению подготовки 04.03.01, 09.03.03, 10.03.01, 11.03.02,
11.03.03, 12.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 24.03.02, 27.03.04

в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

Холодова С.Е., Савченко Т.В., Перегудин С.И., РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 40 с.

Рецензент:

Баскакова Полина Евгеньевна, кандидат химических наук, доцент, доцент, кафедра математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)»;

Учебно-методическое пособие содержит расчетно-графические задания по темам «Кратные интегралы» и «Теория поля», изучаемым в курсе математического анализа. Пособие предназначено для студентов, изучающих математический анализ, а также будет полезно преподавателям при организации практических занятий. По каждой теме предусмотрены варианты задач, учитывающие профессиональную специфику: от моделирования физических полей в робототехнике до обработки изображений в геймдеве и анализа данных в искусственном интеллекте. Задачи сочетают аналитические вычисления, численные методы и графическое представление результатов, способствуя развитию навыков визуализации и интерпретации многомерных интегралов. Методические рекомендации систематизируют подход к выполнению решения поставленной задачи. Особый акцент направлен на интерпретацию результатов представленного исследования – оценку реалистичности, сравнение с эталонными значениями и анализ влияния ключевых параметров в контексте рассматриваемой специальности. Материалы обеспечивают формирование компетенций в области прикладного многомерного анализа, востребованных в ИТ-дисциплинах. Выполнение представленных заданий способствует систематизации теоретических знаний и развитию навыков их практического использования в профессиональной деятельности.

The logo for ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' is slightly taller than the others, and there is a small dot above the 'M'.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026

© Холодова С.Е., Савченко Т.В., Перегудин С.И., 2026

Содержание

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.....	8
Рекомендации по решению задач	8
НАПРАВЛЕНИЕ «ИНФОХИМИЯ».....	8
ВАРИАНТ 1.....	8
ВАРИАНТ 2.....	8
ВАРИАНТ 3.....	9
ВАРИАНТ 4.....	9
ВАРИАНТ 5.....	10
ВАРИАНТ 6.....	10
ВАРИАНТ 7.....	11
ВАРИАНТ 8.....	11
ВАРИАНТ 9.....	12
ВАРИАНТ 10.....	13
НАПРАВЛЕНИЕ «ТЕХНОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГР».....	13
ВАРИАНТ 1.....	13
ВАРИАНТ 2.....	13
ВАРИАНТ 3.....	14
ВАРИАНТ 4.....	14
ВАРИАНТ 5.....	14
НАПРАВЛЕНИЕ «РОБОТОТЕХНИКА И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ»	14
ВАРИАНТ 1.....	14
ВАРИАНТ 2.....	15
ВАРИАНТ 3.....	15
ВАРИАНТ 4.....	15
ВАРИАНТ 5.....	16
НАПРАВЛЕНИЕ «ТЕХНОЛОГИИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ»	16
ВАРИАНТ 1.....	16
ВАРИАНТ 2.....	16
ВАРИАНТ 3.....	17
ВАРИАНТ 4.....	17
ВАРИАНТ 5.....	17
НАПРАВЛЕНИЕ «МОБИЛЬНЫЕ И СЕТЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»	18
ВАРИАНТ 1.....	18
ВАРИАНТ 2.....	18
ВАРИАНТ 3.....	18
ВАРИАНТ 4.....	19
ВАРИАНТ 5.....	19
ТЕОРИЯ ПОЛЯ.....	20
Рекомендации по решению задач	20
НАПРАВЛЕНИЕ «ИНФОХИМИЯ».....	20
ВАРИАНТ 1.....	20

ВАРИАНТ 2.....	21
ВАРИАНТ 3.....	22
ВАРИАНТ 4.....	23
ВАРИАНТ 5.....	24
ВАРИАНТ 6.....	26
ВАРИАНТ 7.....	27
ВАРИАНТ 8.....	28
ВАРИАНТ 9.....	29
ВАРИАНТ 10.....	31
НАПРАВЛЕНИЕ «РОБОТОТЕХНИКА И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ»	32
ВАРИАНТ 1.....	32
ВАРИАНТ 2.....	32
ВАРИАНТ 3.....	32
ВАРИАНТ 4.....	33
ВАРИАНТ 5.....	33
НАПРАВЛЕНИЕ «ТЕХНОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГР»	33
ВАРИАНТ 1.....	33
ВАРИАНТ 2.....	34
ВАРИАНТ 3.....	34
ВАРИАНТ 4.....	34
ВАРИАНТ 5.....	35
НАПРАВЛЕНИЕ «ТЕХНОЛОГИИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ»	35
ВАРИАНТ 1.....	35
ВАРИАНТ 2.....	35
ВАРИАНТ 3.....	36
ВАРИАНТ 4.....	36
ВАРИАНТ 5.....	36
НАПРАВЛЕНИЕ «МОБИЛЬНЫЕ И СЕТЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»	37
ВАРИАНТ 1.....	37
ВАРИАНТ 2.....	37
ВАРИАНТ 3.....	37
ВАРИАНТ 4.....	38
ВАРИАНТ 5.....	38
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	39

Введение

Методические материалы разработаны для организации расчетно-графических работ по дисциплине «Математический анализ» раздела «Интегральное исчисление функций нескольких переменных». Основное внимание уделено темам интегрального исчисления функций нескольких переменных: кратным интегралам и теории поля.

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части программы подготовки бакалавров по направлениям подготовки 01.03.02, 03.03.02, 05.03.06, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 38.03.01, 38.03.02, 38.03.05, 44.03.04, 45.03.04 в первом, втором и третьем семестрах, освоение которой представляет необходимый фундамент для последующего успешного изучения специальных дисциплин профессиональной направленности. Изучение курса математического анализа определяется прикладной направленностью, а именно, ориентацией на использование математических методов анализа при решении научно-исследовательских прикладных задач и предусматривает развитие логического, аналитического и алгоритмического мышления, формирование исследовательского мировоззрения, овладение основными методами исследования и решения математических задач, выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач, что способствует получить современному специалисту-исследователю представление об основных разделах математического анализа, о математике как особом способе познания мира, общности её понятий, о математическом моделировании. Осваивая курс математического анализа, студенты изучают теоретический материал, овладевают техникой теоретического анализа и математических вычислений, отрабатывают методы математического анализа, демонстрируют знание и понимание изученного материала, умение рационально применять математические понятия и утверждения при решении задач.

Поскольку важной целью изучения курса математического анализа является формирование у обучающихся фундаментальных знаний математического анализа, способствующих успешному решению прикладных научных задач, и приобретение обучающимися навыков построения математических моделей при решении прикладных задач в профессиональной деятельности, возникает необходимость в реализации основных задач дисциплины:

– получение основополагающих теоретических представлений о содержании и методах математического анализа, его месте в современной системе естествознания и практической значимости для современного общества, о практической значимости теоретических разработок в различных разделах математических дисциплин, их необходимости для развития современного общества и обеспечения научного и технического прогресса, о ведущей роли

математического анализа, как фундаментального раздела математики и как научного языка при решении вопросов и проблем, возникающих в различных областях науки и техники;

– формирование важных навыков решения задач математического анализа с доведением до практически приемлемого результата, и развитие на этой базе логического, аналитического и алгоритмического мышления;

– овладение фундаментальными навыками математического исследования и умениями выбирать необходимые вычислительные методы и средства при решении прикладных исследовательских задач, связанных с профессиональной деятельностью;

– формирование мотивации к самостоятельному приобретению и использованию в научной и практической деятельности новых естественнонаучных знаний.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных – мощный аппарат методов математического моделирования, необходимый при решении различных задач современной науки и техники, связанных с построением моделей с целью анализа различных явлений и систем и установления возможных их оптимизационных состояний, представляет ценный инструмент для успешного осуществления дальнейшей учебной деятельности студентов и повышения качества и эффективности их подготовки как высококвалифицированных специалистов-исследователей, в связи с чем целесообразность умелого владения им имеет высокое значение для общего образования специалистов и является важным аспектом формирования высокого уровня профессионального мышления и развития комплекса передовых научных исследований в области информационных технологий, подготавливая студентов к осуществлению ими успешной карьеры.

Содержание адаптировано для студентов направлений подготовки: «Химия», «Прикладная информатика», «Информационная безопасность», «Конструирование и технология электронных средств», «Информационные технологии и системы связи», «Приборостроение», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Мехатроника и робототехника», «Системы управления движением и навигация» по образовательным программам: «Инфохимия», «Технологии разработки компьютерных игр», «Робототехника и искусственный интеллект», «Технологии защиты информации», «Мобильные и сетевые технологии». По каждой теме предусмотрены варианты задач, учитывающие профессиональную специфику: от моделирования физических полей в робототехнике до обработки изображений в геймдеве и анализа данных в ИИ. Задачи сочетают аналитические вычисления, численные методы и графическое представление результатов, способствуя развитию навыков визуализации и интерпретации многомерных интегралов.

Методические рекомендации систематизируют подход к выполнению решения поставленной задачи. Особый акцент направлен на интерпретацию результатов представленного исследования – оценку реалистичности, сравнение с эталонными значениями и анализ влияния ключевых параметров в контексте

рассматриваемой специальности. Материалы обеспечивают формирование компетенций в области прикладного многомерного анализа, востребованных в ИТ-дисциплинах. Выполнение представленных заданий способствует систематизации теоретических знаний и развитию навыков их практического использования в профессиональной деятельности.

Авторы подтверждают, что при подготовке рукописи инструменты искусственного интеллекта использовались исключительно для литературного редактирования, проверки грамматики и коррекции стиля. Весь содержательный контент, логика изложения и научные выводы созданы авторами самостоятельно.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рекомендации по решению задач

1. *Постановка и исходные данные. Описание математической модели.* Представить математическую формулировку задачи; описать геометрическую конфигурацию области, указать все исходные параметры.
2. *Выбор системы координат.* Для каждой задачи необходимо выбрать оптимальную систему координат в соответствии с геометрией области интегрирования.
3. *Вычисление якобиана.* При переходе к криволинейным координатам необходимо учитывать якобиан преобразования, который демонстрирует модификацию элемента объёма или площади.
4. *Определение порядка интегрирования.* При вычислении повторных интегралов необходимо выбирать наиболее удобный порядок интегрирования, который способствует упрощению подынтегральной функции. Иногда изменение порядка интегрирования позволяет существенно упростить вычисления или даже представить решение задачи аналитически.
5. *Физическая интерпретация.* В каждой работе необходимо представить физическую интерпретацию полученного результата в контексте специальности выбранного варианта. Требуется пояснить физический смысл вычисленной величины, оценить её реалистичность, сравнить с типичными значениями для подобных систем и объяснить влияние основных параметров задачи на конечный результат.

Направление «Инфохимия»

ВАРИАНТ 1

Кратные интегралы для расчета массы распределенного вещества.

Тема: Применение тройных интегралов для расчёта массы вещества в сложной трапециевидной области, моделирующей реакционную камеру с неравномерной плотностью.

Задача: Вычислить массу вещества, плотность которого $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ внутри реакционной камеры, ограниченной поверхностью усечённого конуса с вершиной в точке $(0, 0, 2)$, имеющего проекцию на плоскость xOy в виде круга с центром в начале координат радиуса два, и поверхностью параболоида, образованного вращением вокруг оси Oz параболы с вершиной в начале координат, находящейся в плоскости xOz , сечением которого плоскостью $z = 1$ является окружность с центром в начале координат радиуса один. Функциональная зависимость параболической части рельефа реакционной камеры представляет из себя положительно определенную квадратичную форму во всей области камеры, кроме, быть может, множества точек жордановой меры нуль.

ВАРИАНТ 2

Вычисление концентрации вещества с учётом эффектов диффузии в многокомпонентных системах.

Тема: Вычисление суммарной концентрации продукта химической реакции в изменяющейся по времени и радиусу цилиндрической части реактора.

Задача: В блоке радиуса два и высоты три концентрация распределяется по формуле: $C(r, z, t) = r^2 z e^{-z+t}$. Найти суммарную концентрацию в теле цилиндра радиуса e , высотой один. На промежутке времени изменение концентрации описывается величиной λ : $\lambda = e$.

ВАРИАНТ 3

Кратные интегралы для расчёта площадей и объёмов аппаратов.

Тема: Применение двойных и тройных интегралов для вычисления геометрических характеристик сложных форм химического оборудования, ограниченных поверхностями вращения и образованных соединением простейших геометрических форм.

Задача: Требуется вычислить объём реакционного аппарата сложной формы, полученного вращением плоской области вокруг вертикальной оси симметрии.

Рассматривается задача определения объёма тела вращения, моделирующего форму реакционного аппарата. Аппарат образован вращением плоской области вокруг фиксированной вертикальной оси, совпадающей с координатной прямой. Указанная область расположена в меридиональной плоскости, то есть в плоскости, содержащей ось вращения, и ограничена следующими линиями:

– параболой с вершиной в точке $(0,1)$, проходящей через точки $(2,3)$, $(-2,3)$;

– прямой линией, пересекающей эту параболу в двух точках и проходящей через точку на оси симметрии, отсекающей на положительной вертикальной полуоси отрезок длины один, а на отрицательной горизонтальной полуоси отрезок длины два;

– осью вращения.

Все границы области рассматриваются в пределах вертикального интервала от одного до двух метров.

Требуется вычислить объём трёхмерного тела, полученного вращением указанной области вокруг вертикальной оси. Для вычисления следует применить метод суммирования объёмов тонких цилиндрических оболочек по всей плоской области сечения.

ВАРИАНТ 4

Применение интегралов для расчёта момента инерции.

Тема: Применение кратных интегралов для определения моментов инерции роторных элементов и турбинных мешалок химических реакторов при неравномерном распределении плотности вещества в трёхмерном объёме оборудования.

Задача: Требуется вычислить полярный момент инерции I_0 относительно начала координат для трёхмерного объекта — турбинной мешалки, имеющей

форму верхней половины вытянутого сфероида с экваториальным радиусом $a = 0,3$ м и полярным радиусом $b = 0,5$ м.

Плотность вещества мешалки переменная: составляет 7800 кг/м^3 (сталь) у основания сфероида и линейно увеличивается по высоте с коэффициентом $0,5 \text{ м}^{-1}$.

ВАРИАНТ 5

Применение интегралов в квантовой химии — перекрытие орбиталей.

Тема: Применение тройных интегралов для расчёта степени перекрытия атомных орбиталей при образовании молекулярных орбиталей, включая гауссовы функции, моделирующие атомные орбитали водородоподобных систем.

Задача: Требуется вычислить степень перекрытия S для двух нормированных $1s$ -орбиталей водородоподобных атомов He^+ на расстоянии R между ядрами.

Степень перекрытия определяется как тройной интеграл по области трёхмерного пространства от произведения волновой функции $1s$ -орбитали иона водорода, центрированной на первом ядре A , и волновой функции $1s$ -орбитали иона водорода, центрированной на втором ядре B , по элементу объёма.

Волновая функция $1s$ -орбитали иона водорода описывает вероятность нахождения электрона вблизи ядра, которая максимальна непосредственно у ядра и экспоненциально убывает с расстоянием от ядра. Характерный радиус, на котором функция заметно уменьшается, определяется боровским радиусом ($0,53 \times 10^{-10}$ м), скорректированным на заряд ядра $Z = 0,1$. Для достижения оптимальной степени перекрытия уменьшите R и учтите кулоновское отталкивание ядер при сравнении потенциальных энергий систем.

Параметры задачи: два ядра иона водорода расположены на расстоянии $1,5 \times 10^{-10}$ м друг от друга. Требуется определить степень перекрытия орбиталей — меру того, насколько электронные облака двух атомов перекрываются в пространстве между ядрами.

Для упрощения вычислений рекомендуется использовать сферическую систему координат, начало которой смещено на половину расстояния между ядрами.

ВАРИАНТ 6

Интегралы при моделировании электрохимических процессов.

Тема: Применение двойных интегралов для расчёта полного заряда, накопленного на электроде в процессе электрохимического синтеза, с учётом неоднородности распределения плотности тока по поверхности электрода.

Задача: Рассматривается прямоугольный рабочий электрод размером 10×5 см, используемый в электрохимическом интеграторе с системой серебро-хлорид серебра. Процесс электролиза длится 1000 с (примерно $16,5$ минут).

Плотность электрического тока на поверхности электрода распределена неравномерно. Вдоль длинной стороны электрода плотность тока постепенно

нарастает от края, где подключён провод, к противоположному краю по экспоненциальному закону (сначала медленно, затем быстрее). Вдоль короткой стороны плотность тока изменяется по синусоидальному закону с одним полным периодом колебаний.

Параметры процесса: максимальная плотность тока составляет 500 А/м^2 ; характерная длина нарастания тока вдоль электрода составляет 20 см (параметр равен 5 м^{-1}).

Требуется определить полный электрический заряд, прошедший через электрод за всё время процесса.

ВАРИАНТ 7

Кратные интегралы в расчетах термодинамических потенциалов.

Тема: Применение тройных интегралов для определения термодинамических потенциалов (внутренней энергии, энтропии, свободной энергии Гиббса) в условиях переменного температурного распределения и распределения давления в реакционной камере с использованием связей между производными потенциалов.

Задача: Рассматривается сферическая реакционная камера радиусом 30 см , заполненная газовой смесью. В результате протекающих процессов в камере установилось неравномерное распределение температуры и давления.

Температура газа увеличивается от центра камеры к её стенкам: в центре температура составляет 298 К (примерно $25 \text{ }^\circ\text{C}$, комнатная температура), а у стенки на 20% выше. Увеличение температуры происходит линейно с расстоянием от центра.

Давление, напротив, уменьшается от центра к стенкам: в центре давление равно 1 атм (100000 Па), а у стенки на 10% ниже. Уменьшение давления также происходит линейно.

Объёмная плотность свободной энергии Гиббса в каждой точке камеры пропорциональна значениям температуры и давлению. Базовое значение плотности энергии (при начальных условиях в центре) составляет 50000 Дж/м^3 .

Требуется вычислить полную свободную энергию Гиббса газовой смеси во всём объёме сферической камеры.

ВАРИАНТ 8

Массоперенос в неоднородных химических средах.

Тема: Применение кратных интегралов для расчёта полного потока массы вещества через сложные поверхности раздела фаз в гетерогенных системах с адсорбционно-активными слоями и переменными коэффициентами массопередачи.

Задача: Рассматривается квадратная пористая каталитическая поверхность со стороной 20 см , через которую происходит массоперенос компонента А из одной фазы в другую (например, из жидкости в твёрдый катализатор).

Способность поверхности переносить вещество (коэффициент массопередачи) неоднородна: в центре квадрата она минимальна и составляет

2×10^{-5} м/с, а по мере удаления к углам квадрата увеличивается квадратично (пропорционально квадрату расстояния от центра). Характерное расстояние, на котором коэффициент заметно изменяется, составляет 15 см.

Движущая сила массопереноса — это разность концентраций компонента А между двумя фазами. Эта разность также распределена неоднородно: максимальное значение 100 моль/м^3 достигается в центральной области квадрата (в точке со смещением 10 см по обеим осям от угла), при удалении от которой экспоненциально убывает по гауссовому закону с характерным радиусом размытия 6 см.

Требуется определить полный молярный поток компонента А через всю квадратную поверхность. Для этого необходимо просуммировать (проинтегрировать) по всей площади квадрата произведение коэффициента массопереноса на движущую силу (разность концентраций) в каждой точке поверхности.

ВАРИАНТ 9

Инфохимический анализ интегральных характеристик базы данных химических соединений.

Тема: Применение интегралов для агрегирования массивов экспериментальных данных о физико-химических свойствах соединений в многомерном пространстве параметров, включая стохастические распределения молекулярных дескрипторов и расчёт средних значений по многомерной области.

Задача: Рассматривается база данных органических химических соединений, содержащая информацию об их физико-химических свойствах.

Каждое соединение характеризуется тремя ключевыми параметрами: молекулярной массой (от 50 до 200 *Da*), логарифмом коэффициента распределения октанол-вода (от -1 до $+4$) и топологической сложностью, измеряемой количеством химических связей в молекуле (от 0 до 10).

Соединения в базе данных распределены в трёхмерном пространстве параметров неравномерно: большинство соединений сосредоточено вблизи «типичных» значений (молекулярная масса около 120 *Da*, логарифм коэффициента около 1,5, число связей около 5), а по мере удаления от центральных значений плотность соединений экспоненциально убывает по трёхмерному гауссовому закону. Характерная ширина распределения составляет 40 *Da* по массе; 1,2 по логарифму коэффициента; и две связи по топологии.

Для каждого соединения вычисляется топологический индекс молекулярной сложности (ТМІС), который линейно зависит от всех трёх параметров: масса с весом 0,1; логарифм коэффициента с весом 15; и число связей с весом восемь.

Требуется определить средневзвешенное значение индекса ТМІС для всей совокупности соединений в базе данных

ВАРИАНТ 10

Вычисление параметров концентрационных полей с учётом диффузионных процессов в многокомпонентных системах.

Тема: Расширенное применение кратных интегралов для расчёта интегральных характеристик концентрационных полей в трёхмерных многокомпонентных системах с учётом конвективного переноса и неправильной геометрии реакционной области, соответствующей реальным промышленным реакторам.

Задача: Рассматривается вертикальный цилиндрический реактор радиуса 60 см. Представляют интерес характеристики участка боковой стенки реактора между высотами 0,5 м и 1,5 м от дна (то есть полоса шириной 1 м на средней части реактора).

Внутри реактора распределён второй компонент химической смеси, концентрация которого максимальна на оси реактора и на средней высоте (на уровне 1 м от дна), где достигает 50 моль/м^3 . По мере удаления от оси к стенкам концентрация убывает квадратично (у самой стенки стремится к нулю). По высоте концентрация имеет треугольный профиль с максимумом на средней высоте и линейным убыванием к границам рассматриваемого участка.

Из-за градиента концентрации происходит диффузионный перенос вещества: молекулы второго компонента перемещаются из области высокой концентрации (центр реактора) в область низкой концентрации (к стенкам). Скорость этого переноса определяется коэффициентом диффузии, равным $1,5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Требуется определить полный молярный поток второго компонента через боковую цилиндрическую поверхность рассматриваемого участка реактора (то есть, сколько моль вещества в секунду диффундирует через стенку на этом участке).

Направление «Технологии разработки компьютерных игр»

ВАРИАНТ 1

Освещение сцены и глобальная яркость.

Тема: Применение двойных интегралов для оценки суммарной освещённости игровой сцены от протяжённого источника света с неравномерной интенсивностью, с учётом распределения яркости по поверхности экрана или плоскости рендеринга.

Задача: Рассматривается прямоугольная область, моделирующая экран или участок виртуальной сцены, на который падает свет от протяжённого источника. В каждой точке области локальная яркость задаётся как функция расстояния от центра и угла падения. Необходимо вычислить суммарную яркость всей области с помощью кратного интеграла, результат использовать для настройки экспозиции рендера.

ВАРИАНТ 2

Расчёт пути персонажа по неровному ландшафту.

Тема: Применение кратных интегралов для вычисления «стоимости» маршрута игрового персонажа по поверхности с переменными высотами, где сложность движения зависит от рельефа.

Задача: Игровая карта – прямоугольная область с заданной высотной картой. В каждой точке стоимость движения зависит от уклона и высоты. С помощью кратного интеграла по полосе вдоль заданного маршрута рассчитать суммарную стоимость прохождения между двумя точками.

ВАРИАНТ 3

Плотность объектов на игровой арене.

Тема: Кратные интегралы используются для определения общего числа объектов (NPC, частицы, элементы толпы) с переменной плотностью появления по карте.

Задача: Игровая зона – прямоугольник, где плотность появления объектов максимальна в центре, падает к краям. Необходимо вычислить ожидаемое общее число объектов с помощью интеграла по площади арены и оценить влияние параметров на баланс уровня.

ВАРИАНТ 4

Оценка средней освещённости 3D–модели.

Тема: Кратные интегралы применяются для расчёта средней освещённости поверхностей сложных моделей при окружённом освещении (environment mapping).

Задача: Рассматривается 3D–модель (аппроксимированная сферой или эллипсоидом), на которую падает свет из множества направлений (полусфера). С помощью интегрирования по угловой области определить среднюю освещённость поверхности для настройки шейдера.

ВАРИАНТ 5

Моделирование эффекта частиц.

Тема: Применение тройных интегралов для расчёта суммарного числа или массы частиц в эффектах (дым, огонь, туман), где плотность динамически зависит от координат и высоты.

Задача: В игровой сцене объемный эффект (облако дыма, тумана) представлен как трехмерная область – параллелепипед или цилиндр. Плотность частиц максимальна в центре, убывает к внешним границам и с высотой.

Требуется найти общее число или массу частиц с помощью тройного интеграла и интерпретировать результат для оптимизации параметров эффектов.

Направление «Робототехника и искусственный интеллект»

ВАРИАНТ 1

Расчёт центра масс робота с распределённой плотностью.

Тема: Применение кратных интегралов для определения центра масс сложного механизма робота, когда плотность материала неравномерна в различных частях конструкции.

Задача: Требуется найти координаты центра масс манипулятора робота, представленного как твёрдое тело в форме цилиндра высотой 1,2 м и радиусом 0,15 м. Плотность материала меняется по высоте: в нижней части она выше (сталь – 7800 кг/м³), в верхней части ниже (алюминий – 2700 кг/м³).

ВАРИАНТ 2

Определение момента инерции звена манипулятора.

Тема: Применение интегралов для расчёта моментов инерции звеньев робота относительно различных осей, критичных для управления и стабилизации движений.

Задача: Звено манипулятора имеет форму полого цилиндра с внешним радиусом 0,1 м, внутренним радиусом 0,08 м и длиной 0,5 м, выполнено из стали.

Необходимо вычислить момент инерции относительно оси вращения (центральной оси цилиндра) с помощью тройного интеграла.

Полученное значение использовать для подбора моторов и расчёта динамических характеристик манипулятора.

ВАРИАНТ 3

Анализ поля вероятности для локализации робота.

Тема: Применение двойных интегралов для анализа распределения вероятности положения робота на основе данных сенсоров при неопределённости их показаний.

Задача: При движении мобильного робота в замкнутом помещении размером 10 м × 8 м происходит накопление ошибок в определении положения. Распределение вероятности нахождения робота описывается двумерной гауссовой функцией, заданной вокруг предполагаемого положения.

Требуется вычислить вероятность того, что робот находится в определённом подрегионе помещения (например, в квадрате 2 м × 2 м в углу комнаты), и оценить необходимость коррекции координат на основе показаний маяков.

ВАРИАНТ 4

Расчёт объёма области захвата манипулятора.

Тема: Применение тройных интегралов для определения рабочего объёма, который может охватить манипулятор робота при всех возможных положениях звеньев.

Задача: Манипулятор робота состоит из трёх звеньев длиной 0,4 м, 0,3 м и 0,2 м соответственно. Рабочая зона представляет собой объём в пространстве, достижимый концом манипулятора при всех допустимых углах вращения суставов.

Требуется оценить общий рабочий объём манипулятора с помощью интеграла по сферическим координатам и определить средний радиус досягаемости от основания робота.

ВАРИАНТ 5

Оптимизация распределения нагрузки в системе искусственного интеллекта.

Тема: Применение кратных интегралов для анализа нагрузки на вычислительные ресурсы при обработке многомерных данных от различных сенсоров робота.

Задача: Система ИИ робота обрабатывает данные от камеры, лидара и тактильных датчиков одновременно. Нагрузка на процессор распределена неравномерно: обработка видео требует 60%, обработка лидара – 30%, обработка тактильных данных – 10%. Каждый тип обработки характеризуется своей функцией потребления вычислительных ресурсов, зависящей от сложности сцены и количества объектов в окружении.

Требуется с помощью интегралов оценить среднюю нагрузку на систему и определить пиковые моменты, когда требуется ограничение функциональности или переключение на резервные каналы.

Направление «Технологии защиты информации»

ВАРИАНТ 1

Анализ энтропии криптографического потока.

Тема: Применение двойных интегралов для вычисления информационной энтропии криптографического потока с неравномерным распределением байтов и анализа его стойкости.

Задача: При тестировании криптографического генератора случайных чисел информационная энтропия выходного потока зависит от двух параметров: частоты обновления ключа f (в Гц) и размера блока обрабатываемых данных b (в байтах). Энтропия в каждой точке параметрического пространства описывается функцией, которая растёт с увеличением обоих параметров.

Требуется с помощью двойного интеграла вычислить среднюю энтропию генератора по всей области допустимых значений параметров, сравнить её с теоретическим максимумом (8 бит/байт) и оценить качество работы генератора.

ВАРИАНТ 2

Оценка вероятности успешной атаки методом перебора.

Тема: Применение кратных интегралов для расчёта вероятности успешной атаки перебором на систему защиты с учётом времени и вычислительных ресурсов злоумышленника.

Задача: Система защиты использует пароль длиной N символов из алфавита M возможных символов. Интенсивность атаки перебором зависит от доступных вычислительных ресурсов и времени.

Успешность атаки представляет функциональную зависимость от времени попытки и мощности вычислительных ресурсов. С помощью двойного интеграла по времени и ресурсам рассчитать накопленную вероятность успешной атаки за период в 1 месяц при различных сценариях (облачные вычисления, GPU – фермы, квантовые компьютеры). Результат использовать для рекомендаций по выбору длины пароля.

ВАРИАНТ 3

Расчёт средней задержки в криптографическом модуле.

Тема: Применение интегралов для определения среднего времени обработки криптографических операций при переменной нагрузке на систему.

Задача: Криптографический модуль обрабатывает запросы на шифрование и расшифровку данных. Интенсивность поступления запросов в систему зависит от времени суток t , а время обработки одного запроса зависит от размера передаваемых данных s (в килобайтах).

На основе известного распределения размеров запросов и суточного профиля интенсивности обращений требуется с помощью двойного интеграла по времени и размеру данных рассчитать среднюю задержку обработки одного запроса за сутки, а также оценить задержку в часы пик. Результат использовать для прогнозирования пропускной способности криптографического модуля и обоснования необходимости масштабирования вычислительных ресурсов.

ВАРИАНТ 4

Анализ распределения уязвимостей в коде.

Тема: Применение двойных интегралов для оценки плотности распределения уязвимостей безопасности в исходном коде в зависимости от сложности модулей и истории обновлений.

Задача: В системе защиты программный код состоит из множества модулей, каждый из которых имеет определённый уровень сложности (количество строк кода, циклическая сложность).

Исторические данные показывают, что плотность обнаруживаемых уязвимостей зависит от сложности модуля и количества разработчиков, работавших над ним. Требуется с помощью двойного интеграла по пространству параметров (сложность, время разработки) оценить общее ожидаемое число уязвимостей в системе и определить критические модули, требующие более тщательного аудита.

ВАРИАНТ 5

Оценка стоимости информационных атак и защиты.

Тема: Применение кратных интегралов для анализа экономической целесообразности различных стратегий защиты информации на основе вероятности успешной атаки, убытков от взлома и затрат на защиту.

Задача: Организация защищает информационную систему стоимостью 10 млн. рублей. Вероятность успешной атаки зависит от уровня защиты

(характеризуется затратами на средства защиты) и квалификации потенциального злоумышленника. Убытки от успешной атаки зависят от времени, в течение которого система взломана.

Требуется построить функцию ожидаемых убытков как произведение вероятности атаки на величину убытков и с помощью интегралов вычислить оптимальный уровень затрат на защиту, минимизирующий общие ожидаемые потери (убытки, затраты на защиту).

Направление «Мобильные и сетевые технологии»

ВАРИАНТ 1

Распределение сетевого потока данных.

Тема: Применение двойных интегралов для оценки общего объёма данных, проходящего через участок сети с переменной нагрузкой по географическому распределению пользователей и во времени.

Задача: В рассматриваемой сетевой инфраструктуре зона покрытия задана прямоугольной областью размером 5 км × 3 км, по которой нагрузка на сеть неравномерна — в центре города максимальна, по краям минимальна.

Интенсивность трафика описывается функцией, зависящей от расстояния до центра. Требуется вычислить суммарный объём переданных данных через всю область за один час, используя двойной интеграл по площади покрытия.

ВАРИАНТ 2

Оценка качества покрытия *Wi-Fi* сети.

Тема: Применение интегралов для расчёта среднего уровня сигнала и качества связи в зоне обслуживания точки доступа *Wi-Fi*.

Задача: Требуется оценить среднее качество приёма сигнала в зоне с радиусом 100 метров вокруг точки доступа. Уровень сигнала плавно убывает от максимального в центре к минимальному на границе зоны по закону, зависящему от расстояния.

Используя двойной интеграл по круговой области в полярных координатах, рассчитать суммарное качество приёма сигнала и среднюю напряженность поля для всех пользователей в зоне. Результат использовать для рекомендаций по оптимальному размещению точек доступа.

ВАРИАНТ 3

Анализ распределения задержек в сетевой топологии.

Тема: Применение кратных интегралов для оценки среднего времени задержки передачи пакетов в трёхмерной топологии, учитывая географическое положение узлов и загруженность каналов.

Задача: В модели сетевой инфраструктуры рассматривается трёхмерная область (прямоугольный параллелепипед), представляющая городскую сетевую топологию. Задержка сигнала зависит от координат положения узла, от степени загрузки каналов связи и расстояния до сервера.

Требуется с помощью тройного интеграла по объёму оценить среднюю задержку, а также определить критические зоны, где задержка превышает допустимое значение.

ВАРИАНТ 4

Расчёт энергопотребления мобильного устройства.

Тема: Применение двойных интегралов для вычисления общего энергопотребления мобильного устройства за сутки с учётом зависимости мощности от времени суток и типа активности пользователя.

Задача: Энергопотребление смартфона описывается функцией мощности, зависящей от времени суток и типа активности. Тип активности кодируется непрерывным параметром, распределённым на отрезке от нуля до единицы. Устройство находится в режиме покоя при нулевом значении параметра; при значении параметра, равном 0,5 устройство передаёт данные; при значении параметра, равном единице, устройство выполняет видеозвонок. В течение суток известна функция распределения активности пользователя, показывающая, с какой «долей времени» в окрестности момента времени устройство работает при данном уровне активности.

Требуется вычислить суммарную энергию, затраченную устройством за 24 часа, а также среднюю мощность за сутки, используя ограничение по времени и параметру активности. На основе полученных значений оценить время автономной работы батареи заданной ёмкости и выделить интервалы времени, в которые средняя мощность (и, следовательно, скорость разряда) максимальны.

ВАРИАНТ 5

Оптимизация размещения точек доступа в здании.

Тема: Применение кратных интегралов для анализа перекрытия областей покрытия и оптимизации расположения *Wi-Fi* точек доступа в многоэтажном здании.

Задача: В крупном офисном здании площадью 200 м × 150 м размещены три точки доступа *Wi-Fi*. Зоны покрытия каждой точки представляют собой круговые области радиусом 50 м.

Требуется оценить суммарную площадь устойчивого сигнала (не менее – 70 дБм), найти зоны слабого или нулевого покрытия, а также рассчитать эффективность покрытия как отношение хорошо покрытой площади к общей площади здания.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Рекомендации по решению задач

1. *Постановка и исходные данные. Описание математической модели.* Сформулировать физическую задачу; указать тип поля, геометрию области, граничные условия и все исходные параметры.
2. *Выбор системы координат.* Выбрать систему координат, согласованную с симметрией поля и формой области, чтобы упростить функциональные зависимости и границы интегрирования.
3. *Вычисление операторов поля.* В выбранной системе координат представить действия рассматриваемых операторов, связывая их с заданным полем, изучаемым в задаче.
4. *Визуализация поля и области.* Построить схему или рисунок области интегрирования и векторного поле, что поможет корректно задать пределы интегрирования и увидеть симметрии.
5. *Вычисление интегралов.* Вычислить интегралы, при необходимости используя теоремы Гаусса–Остроградского или Стокса. Следует контролировать размерности и порядок величины результата.
6. *Интерпретация для специальности.* Связать полученные величины с параметрами, важными для данной специальности (например, поток, энергия, мощность, усилия), и пояснить их практический смысл.

Направление «Инфохимия»

ВАРИАНТ 1

Тема: Диффузия в реакторе с градиентом концентрации (параметрический анализ).

Концентрация вещества в плоском реакторе распределена по закону:

$$c(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy,$$

где α, β, γ — коэффициенты, зависящие от свойств реактора и вещества.

Задача:

Найти векторное поле градиента концентрации в общем виде. Вычислить поток вещества через прямоугольный участок с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ для конкретных значений.

Провести параметрический анализ — исследовать зависимость потока от параметров:

- как меняется поток при $\gamma = 0$ (отсутствие перекрестного взаимодействия);
- как меняется поток при $\alpha = \beta$ (симметричное распределение);
- при каких значениях γ поток становится максимальным;
- найти критические значения параметров.

Вычислить дивергенцию векторного поля и объяснить её независимость от координат. Определить, какое это имеет значение для выбора типа реактора. Построить пять – шесть линий максимального потока для базового случая и дополнительной конфигурации. Найти стационарные точки концентрации.

Выяснить возможность их существования в исследуемой области и пояснить физический смысл.

Представить физическую интерпретацию исследования:

- как коэффициент γ (перекрестное взаимодействие) влияет на профиль смешивания;
- при каких параметрах достигается однородное распределение;
- что означает отрицательное значение γ для процесса синтеза.

ВАРИАНТ 2

Тема: Передача информационного сигнала (анализ затухания и диапазонов).

Информационный сигнал в химической среде описывается векторным полем:

$$\vec{A}(x, y) = e^{-\lambda(x^2+y^2)}(x\vec{i} + y\vec{j}),$$

где λ — коэффициент затухания сигнала (материальная константа среды).

Задача:

Найти дивергенцию поля в общем виде (зависящую от λ).

Провести анализ дивергенции поля:

- при каких радиусах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ дивергенция поля положительна (генерация сигнала);
- при каких радиусах отрицательна (поглощение);
- вычислить критический радиус.

Провести параметрический анализ для различных значений параметра λ :

- слабое затухание (дальняя передача);
- стандартный режим;
- сильное затухание (локальная передача).

Для каждого случая вычислить критический радиус, зону генерации, зону поглощения.

Вычислить дивергенцию поля в точках $M_1(0,0)$, $M_2(0.5,0)$, $M_3(1,0)$ для каждого значения λ и построить графики $\text{div}\vec{A}(\rho)$.

Вычислить ротор поля, убедиться в его потенциальности, описать физический смысл.

Вычислить циркуляцию поля по окружности $x^2 + y^2 = r^2$ аналитически для общего случая. Для трех режимов поведения параметра λ построить графики $C(r)$ и представить интерпретацию. Вычислить эффективный радиус передачи $R_{\text{эфф}}$, на котором амплитуда сигнала падает до 1% от максимума. Исследовать его зависимость от параметра λ .

Провести оптимизацию системы передачи:

- при каком значении параметра λ дальность передачи максимальна при сохранении стабильности (ограниченная дивергенция);
- как выбрать λ для локализованной передачи (например, в микрочипе).

Представить практические рекомендации: предложить, как варьируя материальные свойства среды (изменяя λ), добиться желаемого профиля сигнала для конкретного инфохимического устройства.

ВАРИАНТ 3

Тема: Топология реакционной среды (анализ устойчивости и бифуркация).

Движение реагентов на поверхности катализатора описывается полем:

$$\vec{R}(x, y) = (y + x^2 - \mu)\vec{i} + (x - y)\vec{j},$$

где μ — параметр, контролирующий свойства катализатора (температура, давление или концентрация поверхностных центров).

Задача:

Найти все особые точки поля в зависимости от μ . Решить систему:

$$y + x^2 - \mu = 0, x - y = 0.$$

Выяснить условия существования особых точек:

- при каких значениях параметра μ существуют реальные особые точки;
- найти критическое значение μ_c .

Провести классификацию особых точек для различных значений параметра μ :

- $\mu = 0$ — случай базовый (один узел/фокус в начале координат);
- $\mu = 0.5$ — промежуточный (две особые точки).
- $\mu = 1$ — граничный (анализ структуры фазового портрета).

Провести классификацию особых точек (узел, седло, фокус, центр).

Провести бифуркационный анализ:

- найти значения параметра μ , при которых происходят бифуркации (изменение типа особой точки);
- построить бифуркационную диаграмму: показать изменение количества и типа особых точек в зависимости от параметра μ .

Построить фазовые портреты для трех режимов:

- $\mu = 0.5$ — две седловые точки, нарисовать сепаратрисы;
- $\mu = 1$ — переходный режим;
- $\mu = 1.5$ — режим с фокусом или узлом.

Исследовать глобальную топологию:

- для каждого значения параметра μ нарисовать несколько интегральных кривых, показывающих маршруты реагентов;
- выделить области притяжения (бассейны) каждой особой точки.

Исследовать устойчивость процесса и пояснить химический смысл:

- какие области соответствуют каталитически активным зонам (аттракторы);
- какие области приводят к разложению реагентов (репеллеры);
- при каком значении параметра μ система наиболее стабильна;
- при каком значении параметра μ система наиболее чувствительна.

Провести анализ чувствительности системы к параметру μ :

- если μ флуктуирует (например, из-за температурных колебаний) – как это влияет на фазовый портрет;
- существуют ли критические значения параметра μ , при которых система становится неустойчивой.

Представить практические рекомендации по применению полученных результатов исследования:

- предложить оптимальный диапазон параметра μ для стабильного синтеза целевого продукта;
- как спроектировать катализатор, чтобы избежать нежелательных аттракторов.

ВАРИАНТ 4

Тема: Циркуляция и кодирование реакции (многоуровневое кодирование).

В кольцевом микрореакторе информация кодируется через циркуляцию векторного поля. Поле задано как

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}),$$

где k — параметр интенсивности (силы вихря), связанный с интенсивностью гидродинамического потока.

Задача:

Вычислить ротор поля $\text{rot}\vec{A}$ в области $x^2 + y^2 > 0$. Определить тип сингулярности при $(x, y) = (0, 0)$.

Вычислить циркуляцию поля по окружности радиуса R непосредственным интегрированием. Вычислить циркуляцию поля для различных значений k : $k = 1, 2, 4, -1$ (обратное вращение), убедиться в независимости от радиуса R — понять важность этого факта для кодирования.

Вычислить циркуляцию поля по прямоугольному контуру в плоскости $z = 0$ с вершинами $(0.5, 0.5)$, $(3, 0.5)$, $(3, 3)$, $(0.5, 3)$:

- применить метод непосредственного интегрирования по контуру;
- использовать теорему Стокса для разных значений параметра k .

Используя многоуровневую схему цифрового кодирования:

- уровень «0»,
- уровень «1»,
- уровень «2»,

- определить возможность контролирования значений параметра k для достижения нужного уровня;

- выяснить, сколько уровней можно кодировать при $|C| \leq 10\pi$.

Провести анализ помехоустойчивости кодирования:

- как флуктуации значений параметра k (на $\pm 10\%$, $\pm 20\%$) влияют на надежность кодирования;

- при каком уровне помехи теряется различимость соседних уровней;
- предложить алгоритм коррекции ошибок.

Провести анализ альтернативных параметризаций: исследовать поле с параметром $k = k(t)$ — функция времени (модулированная интенсивность):

- как отслеживать циркуляцию с учётом динамики параметра k ;
- какова максимальная частота модуляции для сохранения информационной целостности.

Провести анализ динамики вихря поля: рассмотреть возмущенное поле

$$\vec{A}_{\text{возм}} = \vec{A} + \epsilon \nabla \times (\psi(x, y) \vec{k}):$$

- при каких значениях параметра ϵ и формах ψ циркуляция остается стабильной;

- как обеспечить робастность кодирования против возмущений.

Провести спектральный анализ циркуляционного кодирования:

- если закодировать последовательность битов как последовательность значений k_1, k_2, k_3, \dots , как быстро должен переключаться параметр k для передачи данных с частотой 1 кГц, 1 МГц;
- рассчитать пропускную способность канала (информационные биты в секунду).

Провести сравнение с другими методами кодирования: выяснить преимущества и недостатки циркуляционного кодирования в сравнении с амплитудным кодированием (изменение $|\vec{A}|$), фазовым кодированием (смещение фазы поля), временным кодированием (импульсная модуляция).

ВАРИАНТ 5

Тема: Восстановление поля по интегральным данным (обратная задача с шумом).

В инфохимическом чипе проведены экспериментальные измерения потоков через несколько микроканалов, но данные содержат случайные ошибки измерений. Предполагаемое поле имеет вид:

$$\vec{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Измеренные потоки через четыре грани куба $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ (с допусками):

- левая грань ($x = 0$): $\Phi_{\text{лев}} = -2.0 \pm 0.3$;
- правая грань ($x = 1$): $\Phi_{\text{пр}} = 5.0 \pm 0.4$;
- нижняя грань ($y = 0$): $\Phi_{\text{низ}} = -1.0 \pm 0.2$;
- верхняя грань ($y = 1$): $\Phi_{\text{верх}} = 4.0 \pm 0.3$.

Задача:

Вычислить среднюю дивергенцию поля внутри куба, используя теорему Гаусса–Остроградского.

Учесть ошибки измерений:

- вычислить математическое ожидание $\langle \text{div} \vec{A} \rangle$ и дисперсию $\sigma(\text{div} \vec{A})$;
- как пропагируются ошибки измерения в определение дивергенции;
- найти доверительный интервал для дивергенции (95% уровень доверия).

Провести редукцию размерности и усреднение:

- рассмотреть несколько гипотез о форме поля: линейное, квадратичное, экспоненциальное;

- для каждой гипотезы найти параметры, минимизирующие ошибку (метод наименьших квадратов);

- вычислить невязку для каждого случая.

Предложить аналитическую форму поля (например, билинейную):

$$\vec{A}(x, y) = (a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy)\vec{i} + (b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy)\vec{j}.$$

Решить систему из четырех уравнений (потоки через грани) для определения коэффициентов. Выяснить наличие переопределённости (недоопределённости) системы.

Проверить согласованность предложенного поля с экспериментальными данными:

- согласовать восстановленное поле с результатами вычислений потоков поля через каждую грань;

- вычислить относительные ошибки: $\delta\Phi_i = \frac{|\Phi_i^{\text{расч}} - \Phi_i^{\text{измер}}|}{\Phi_i^{\text{измер}}}$;

- при каких ошибках измерения восстановление становится невозможным.

Исследовать применение регуляризации при избыточном шуме:

- если прямое решение неустойчиво, применить регуляризацию Тихонова;

- выбрать оптимальный параметр регуляризации;

- оценить, как улучшается устойчивость решения.

Провести параметрический анализ:

- как чувствительно восстановленное поле к изменению одного из потоков на 10%;

- какой поток наиболее критичен для точного восстановления;

- предложить оптимальную стратегию измерений (какие потоки важнее измерять более точно).

Изучить альтернативные методы восстановления:

- использовать не только потоки через грани, но и дополнительные интегральные характеристики;

- как использование этих данных повышает точность восстановления.

Провести проверку фундаментальных свойств восстановленного поля:

- является ли поле потенциальным;

- является ли поле соленоидальным;

- разложить поле на потенциальную и вихревую компоненты.

Нарисовать поле восстановленное и описать его физический смысл:

- где находятся источники и стоки;

- как распределяется вещество по объему.

Предложить рекомендации по оптимизации конструкции чипа на основе анализа поля.

ВАРИАНТ 6

Тема: Поток через криволинейную поверхность (анализ расхода и оптимизация).

Химический реактор имеет форму полусферы радиуса R с основанием в плоскости $z = 0$.

Поле скоростей вещества в реакторе:

$$\vec{v}(x, y, z) = \alpha x\vec{i} + \beta y\vec{j} + \gamma z\vec{k},$$

где α, β, γ — коэффициенты пропорциональности (различные для разных направлений в системе координат).

Задача:

Вычислить дивергенцию поля. Выяснить условия существования режимов:

- расширение, источник вещества;
- сжатие, сток вещества;
- несжимаемое течение.

Провести параметрический анализ. Исследовать поток для нескольких конфигураций параметров:

- случай А: радиальное расширение;
- случай Б: сжатие в вертикальном направлении;
- случай В: анизотропное поле.

Для каждого случая вычислить полный поток и представить интерпретацию результатов.

Вычислить поток поля через криволинейную поверхность (полусферу):

- параметризовать поверхность;
- вычислить нормаль и элемент поверхности;
- представить вычисления потока.

Вычислить поток поля через основание (диск $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$).

Согласовать вычисления с утверждением теоремы Гаусса–Остроградского:

- вычислить объемный интеграл;
- вычислить поверхностный интеграл по рассматриваемой замкнутой поверхности;
- проверить равенство для всех случаев.

Провести анализ зависимости потока от радиуса полусферы (для фиксированных параметров):

- представить потоки как функции R : $\Phi(R)$;
- вычислить скорость изменения потока: $\frac{d\Phi}{dR}$;
- при каком значении радиуса полусферы R достигается минимум (максимум).

Провести критический анализ:

- когда поток «переворачивается» (меняет знак);
- при каких значениях параметров α, β, γ возможен переход от притока к оттоку;

- найти условие $\Phi_{\text{полный}} = 0$;
- какой физический смысл представляет эта критическая конфигурация.

Провести анализ возможности оптимизации процесса для промышленного синтеза с целью максимизировать приток вещества на реактор, но минимизировать его вытечку (баланс):

- найти оптимальные значения коэффициентов α, β, γ (например, при ограничении $\alpha + \beta + \gamma = 1$);
- как выбрать геометрию реактора (радиус полусферы R) для этого.

Исследовать робастность к возмущениям значений параметров:

- если параметры флуктуируют: $\alpha = 1 + \epsilon_\alpha$, $\beta = 1 + \epsilon_\beta$, $\gamma = 1 + \epsilon_\gamma$ (где $|\epsilon_i| \leq 0.1$) – как это влияет на общий поток;
- вычислить $\Delta\Phi$ и его дисперсию;
- какие параметры наиболее критичны.

Применить результаты исследований к другим геометрическим конфигурациям химических реакторов:

- как изменятся результаты для шара (вместо полусферы);
- как изменятся результаты для конуса;
- как изменятся результаты для цилиндра;
- предложить оптимальную геометрию реактора для конкретного целевого приложения в инфохимии.

ВАРИАНТ 7

Тема: Анализ векторного поля (потенциальность, соленоидальность и декомпозиция).

Дано векторное поле:

$$\vec{B}(x, y, z) = (2x + \lambda z)\vec{i} + (3y - \mu x)\vec{j} + (\nu x + 2z)\vec{k},$$

где λ, μ, ν — параметры взаимодействия между компонентами поля.

Задача:

Вычислить ротор поля в общем виде. Проверить условие потенциальности поля. Исследовать, при каких значениях параметров поле потенциально. Для потенциального поля восстановить потенциал. Вычислить дивергенцию поля. Проверить условие соленоидальности поля.

Провести параметрический анализ (критические конфигурации):

- Случай 1: базовый случай, поле потенциально.
- Случай 2: максимальное взаимодействие.
- Случай 3: чистый вихрь в xy -плоскости.

Записать разложение Гельмгольца:

- для базового поля (без параметров) найти обе части разложения;
- вычислить долю энергии в каждой части.

Провести энергетический анализ:

- вычислить норму поля;
- при каких параметрах энергия поля максимальна в единичном кубе;

- как параметры влияют на локальную интенсивность.

Вычислить циркуляцию и работу поля (для конкретных контуров):

- по контуру $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ – для разных значений параметров;
- по контуру $\vec{r}(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$.

Представить физическую интерпретацию результатов для инфохимии, найти значения параметров, при которых:

- поле консервативно, энергия сохраняется (идеальный процесс);
- присутствуют циркулирующие процессы (вихри, завихрения);
- везде существует источник (генерация продукта).

Исследовать возможность оптимизации значений параметров для целевого приложения, найти значения параметров:

- если требуется минимизировать циркуляцию (консервативный процесс);
- если требуется максимизировать локальное вихревое действие (перемешивание);
- предложить компромисс-конфигурацию для оптимального синтеза.

Исследовать устойчивость изучаемых режимов к возмущениям параметров:

- если параметры флуктуируют: $\lambda \rightarrow \lambda + \epsilon_\lambda$, и т.д;
- как это влияет на ротор поля и структуру поля;
- при каких значениях амплитуд возмущений поле остается практически потенциальным.

ВАРИАНТ 8

Тема: Работа поля вдоль сложной траектории (анализ расходов энергии и оптимизация пути).

Сила, действующая на информационную частицу в инфохимическом пространстве:

$$\vec{F}(x, y, z) = (kyz)\vec{i} + (kxz)\vec{j} + (kxy + f(z))\vec{k},$$

где k — коэффициент взаимодействия, $f(z)$ — внешняя сила (функция высоты).

Траектории для анализа:

- траектория 1 (винтовая): $\vec{r}_1(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- траектория 2 (спираль с расширением): $\vec{r}_2(t) = (R(1 + 0.1t) \cos t, R(1 + 0.1t) \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- траектория 3 (прямолинейная): $\vec{r}_3(t) = (t, 0, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Задача:

Проверить потенциальность поля. Выбрать форму внешней силы $f(z)$ для достижения эффекта потенциальности. Рассмотреть базовый случай:

$k = 1, f(z) = 0, R = 2$. Вычислить работу поля вдоль траектории 1 непосредственным интегрированием.

Провести сравнение результатов для всех траекторий:

- вычислить работу вдоль траекторий 1, 2, 3 для одинаковых условий;

- какая траектория требует минимальных энергетических затрат;
- какая траектория требует максимальных энергетических затрат.

Провести параметрический анализ зависимости результатов исследования от значений параметра k :

- как меняется работа при $k = 0.5, 1, 2, 4$;
- существует ли линейная зависимость $W(k)$;
- при каком значении параметра k работа минимальна (максимальна).

Провести анализ влияния на процесс внешней силы (учёт функции $f(z)$):

- рассмотреть возможность существования эффекта компенсации вихревых возмущений;
- при каком внешнем воздействии на систему поле становится потенциальным;
- восстановить потенциал $U(x, y, z)$ и вычислить работу через разность потенциалов.

Исследовать возможность оптимизации пути (использовать вариационное исчисление или численные методы):

- найти траекторию, которая минимизирует работу для достижения точки (x_f, y_f, z_f) из точки (x_i, y_i, z_i) ;
- сравнить оптимальный путь с предложенными траекториями.

Изучить энергетический баланс:

- вычислить кинетическую энергию вдоль траектории (при условии $\vec{v} = d\vec{r}/dt$);
- вычислить полную энергию $E = K + U$ (если поле консервативно);
- проверить факт сохранения энергии для траектории с учётом внешнего воздействия на систему $f(z) = -kxy$.

Вычислить циркуляцию по замкнутой винтовой траектории.

Провести исследование чувствительности к возмущениям:

- если траектория слегка отклоняется от оптимальной на $\delta\vec{r}$, как меняется работа;
- оценить «штраф» за отклонение от оптимального пути.

Представить рекомендации по практическому использованию результатов исследования:

- предложить оптимальный маршрут доставки вещества через реактор (минимум энергетических затрат);
- как спроектировать внешние поля (учесть влияние функции $f(z)$) для снижения энергетических затрат;
- существует ли возможность добиться безэнергетической передачи (консервативное поле).

ВАРИАНТ 9

Тема: Дивергенция и источники (стоки) (анализ распределения и критические зоны).

В инфохимическом устройстве задано поле информационного потока:

$$\vec{I}(x, y, z) = (e^{\lambda x} - 1)\vec{i} + (e^{\lambda y} - 1)\vec{j} + (e^{\lambda z} - 1)\vec{k},$$

где λ — параметр интенсивности генерации информации.

Рассматривается область V : куб $[-L, L]^3$ (переменного размера).

Задача:

Вычислить дивергенцию поля в общем виде.

Провести параметрический анализ зависимости результатов вычислений от интенсивности λ :

- случай А: слабая генерация;
- случай Б: стандартная интенсивность;
- случай В: сильная генерация.

Для каждого случая вычислить объемный интеграл от дивергенции поля в рассматриваемой области и охарактеризовать возникающее распределение. Вычислить поток поля через полную поверхность куба, используя утверждение теоремы Гаусса–Остроградского.

Исследовать влияние на процесс величины размера куба (L как переменный параметр):

- как меняются значения величин Q и Φ при $L = 0.5, 1, 1.5, 2$;
- при каком значении длины ребра куба L достигается максимум генерации информации;
- существует ли оптимальный размер устройства.

Исследовать распределение источников (стоков) внутри куба:

- в каких точках пространства дивергенция максимальна;
- построить «карту» дивергенции (например, сечения $z = 0$, уровни);
- где сосредоточена основная генерация информации.

Выявить критические зоны (особые точки дивергенции):

- найти точки, в которых $\vec{\nabla}[\text{div}\vec{I}] = 0$, и т.д.
- выяснить физический смысл этих точек.

Исследовать чувствительность процесса к параметрам:

- если λ флуктуирует ($\lambda \rightarrow \lambda + \epsilon$), как меняется общая генерация;
- вычислить $\frac{\partial Q}{\partial \lambda}, \frac{\partial Q}{\partial L}$; выяснить, какой параметр наиболее критичен.

Изучить динамику информационного потока во времени, если $\lambda = \lambda(t)$ — функция времени (включение (выключение) источников):

- как моделировать переходный процесс;
- выяснить, какова характеристическая длина диффузии информации.

Провести оптимизацию конструкции устройства с целью максимизирования генерации информации (большое значение величины Q) при ограничении на размер области ($L \leq L_{\max}$):

- найти оптимальные значения параметров λ и L ;
- выяснить, как достичь равномерного распределения источников.

Представить сравнительную характеристику с другими конфигурациями полей:

– линейное поле: $\vec{I}_{\text{лин}} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$;

– степенное поле: $\vec{I}_{\text{степ}} = \lambda(x^n \vec{i} + y^n \vec{j} + z^n \vec{k})$.

Какое распределение наиболее эффективно для инфохимии?

ВАРИАНТ 10

Тема: Комплексная задача – моделирование реакции синтеза (многопараметрическая оптимизация).

В микрореакторе синтезируется сложное соединение. Процесс описывается тремя взаимодействующими полями с параметрами:

- поле потока реагента А: $\vec{v}_A = (\alpha x, \beta y, \gamma z)$;
- поле тепла: $T(x, y, z) = T_0 + ax^2 + by^2 - cz^2$;
- поле каталитической активности: $\vec{C} = \nabla T \times \vec{v}_A$;
- концентрация реагента: $n(x, y, z) = n_0 \exp(-\lambda(x^2 + y^2 + z^2))$;
- геометрическая конфигурация области: цилиндр радиуса R , высоты H , ось вдоль оси Oz .

Задача:

Вычислить градиент температуры в общем виде. Вычислить вихрь потока.

Вычислить кросс-произведение $\vec{C} = \vec{\nabla} T \times \vec{v}_A$. Провести параметрический анализ (выбор оптимальных параметров):

– случай А: изотропный реактор;

– случай Б: оптимизированный (максимизировать z -компоненту активности);

– случай В: минимизировать побочные эффекты (вихри).

Выбрать параметры так, чтобы $\text{div} \vec{C}$ была минимальной.

Вычислить дивергенцию поля активности, найти условие, при котором это поле соленоидальное.

Исследовать влияние концентрации реагента на локальную скорость синтеза.

Найти точку в реакторе, где максимизируется синтез.

Вычислить поток активности через боковую поверхность цилиндра:

- провести параметризацию поверхности;
- вычислить поток.

Провести оптимизацию для максимального синтеза, использовать целевую функцию:

$$J = \iiint_V |\vec{C}| \cdot n dV.$$

Исследовать возможные ограничения на значения определяющих параметров и найти их оптимальные характеристики.

Провести исследование чувствительности реакции к флуктуациям параметров:

• выяснить, как меняется производство, если каждый параметр флуктуирует на $\pm 10\%$;

- определить, какие параметры наиболее критичны.

Изучить временную динамику (расширение): если система находится не в стационарном состоянии, выяснить, как меняется концентрация со временем.

Изучить влияние масштабирования реактора (например, все размеры увеличить в два раза) на результаты производства. Выяснить возможность существования оптимальных масштабов.

Представить практические рекомендации по использованию результатов исследования при проектировании реактора:

- какова оптимальная конструкция на основе полного анализа;
- какие материалы целесообразно использовать;
- какие условия потока;
- какие размеры радиуса и высоты реактора следует выбрать.

Направление «Робототехника и искусственный интеллект»

ВАРИАНТ 1

Градиент поля потенциальной энергии робота.

Тема: Применение градиента скалярного поля потенциальной энергии для определения направления минимальной энергии и оптимизации траекторий движения робота в пространстве конфигураций.

Задача: Робот-манипулятор движется в трёхмерном пространстве, где каждой позиции соответствует определённая потенциальная энергия, зависящая от высоты центра масс и упругих деформаций в суставах.

Требуется вычислить градиент поля потенциальной энергии в различных конфигурациях и определить направления спуска градиента пути, ведущие к минимизации энергии. На основе анализа градиента спланировать оптимальные траектории движения манипулятора для экономии электроэнергии.

ВАРИАНТ 2

Поток поля сил в рабочей зоне робота.

Тема: Применение поверхностного интеграла от векторного поля для расчёта полной силы, действующей на робота, или его манипулятор в рабочей зоне.

Задача: Вокруг робота создаётся векторное поле внешних сил (гравитация, электромагнитные поля, силы взаимодействия с окружающей средой).

Требуется рассчитать полный поток этого поля через поверхность робота или манипулятора, используя утверждение теоремы Остроградского–Гаусса.

Полученная результирующая сила используется для проверки устойчивости робота и расчёта необходимых моментов в суставах для компенсации внешних воздействий.

ВАРИАНТ 3

Циркуляция векторного поля угловых скоростей.

Тема: Применение криволинейных интегралов и утверждения теоремы Стокса для анализа вращательных движений в системе суставов робота.

Задача: При движении манипулятора работа в каждой точке рабочего пространства определено векторное поле угловых скоростей суставов.

Требуется вычислить циркуляцию этого поля по замкнутому контуру в пространстве конфигураций. Ненулевая циркуляция указывает на возможность создания замкнутого цикла движения, возвращающего манипулятор в исходную позицию с избытком или дефицитом углового момента. Результат использовать для проверки кинематической консистентности и обнаружения сингулярных конфигураций.

ВАРИАНТ 4

Дивергенция поля расстояний до препятствий.

Тема: Применение оператора дивергенции к полю расстояний для анализа локальной плотности препятствий вокруг робота в среде.

Задача: Робот движется в неструктурированной среде с препятствиями. Вокруг робота определено скалярное поле расстояний до ближайших препятствий, а соответствующее векторное поле – это градиент этих расстояний (направления отталкивания от препятствий).

Требуется вычислить дивергенцию этого векторного поля в различных позициях робота. Положительная дивергенция указывает на расширение свободного пространства (опасная зона впереди), отрицательная — на сужение (препятствия со всех сторон). На основе анализа дивергенции планировать безопасные траектории движения.

ВАРИАНТ 5

Ротор поля скоростей сенсорных данных.

Тема: Применение оператора ротора для обнаружения локальных вращений в потоках информации от множественных датчиков робота и синхронизации сенсорных данных.

Задача: Робот оснащен множеством датчиков (камеры, лидар, акселерометры), каждый из которых генерирует пространственный поток информации. Комбинированное векторное поле описывает движение информационного потока в многомерном пространстве сенсорных данных.

Требуется вычислить ротор этого поля для обнаружения локальных циклических зависимостей или несинхронизированных потоков. Ненулевой ротор указывает на наличие циклических корреляций в сенсорных данных, которые можно использовать для калибровки или обнаружения неисправностей датчиков.

Направление «Технологии разработки компьютерных игр»

ВАРИАНТ 1

Градиент скалярного поля высот ландшафта.

Тема: Применение градиента скалярного поля для анализа крутизны склонов на игровой карте и определения оптимальных маршрутов движения персонажей с учётом топографии местности.

Задача: Игровая карта размером $1 \text{ км} \times 1 \text{ км}$ задана в виде скалярного поля высот.

Требуется вычислить градиент этого поля в различных точках карты и определить направления наискорейшего подъёма и спуска. На основе величины градиента классифицировать местность: ровная (градиент $< 0,1$), пологая ($0,1 - 0,3$), крутая ($0,3 - 0,7$), непроходимая ($> 0,7$). Результат использовать для алгоритма поиска оптимального пути персонажа и балансировки сложности уровня.

ВАРИАНТ 2

Поток векторного поля освещения через экран.

Тема: Применение поверхностного интеграла от векторного поля для расчёта общего потока света через виртуальный экран сцены и оптимизации системы освещения.

Задача: В игровой сцене источник света создаёт векторное поле направлений и интенсивностей лучей. Требуется рассчитать полный поток света через прямоугольный экран размером 1920×1080 пикселей, используя поверхностный интеграл. Поток интерпретируется как общее количество света, попадающего на экран в единицу времени. Результат использовать для автоматической регулировки экспозиции и тонального диапазона изображения в реальном времени.

ВАРИАНТ 3

Циркуляция векторного поля движения жидкости в игре.

Тема: Применение криволинейных интегралов и теоремы Стокса для анализа циркуляции векторного поля скоростей жидкости вокруг препятствий на игровой сцене.

Задача: На игровой сцене жидкость обтекает остров, создавая в некотором приближении двумерное векторное поле скоростей потока.

Требуется вычислить циркуляцию этого поля по замкнутому контуру, охватывающему остров. Ненулевая циркуляция указывает на наличие вихря вокруг объекта. Результат использовать для реалистичного моделирования частиц воды и создания эффекта завихрений в физическом движке игры.

ВАРИАНТ 4

Дивергенция поля частиц (дыма, огня).

Тема: Применение оператора дивергенции к векторному полю для определения источников и стоков частиц в эффектах, что необходимо для реалистичного моделирования дыма и огня.

Задача: Эффект дыма на игровой сцене создаётся векторным полем скоростей частиц.

Требуется вычислить дивергенцию этого поля в различных точках объёма, в котором наблюдается данный эффект. Положительная дивергенция указывает на расширение облака (источник новых частиц), отрицательная – на сжатие (сток

частиц). На основе анализа дивергенции поля частиц оптимизировать количество генерируемых частиц и их жизненный цикл для достижения баланса между визуальным качеством и производительностью.

ВАРИАНТ 5

Ротор векторного поля вращающегося объекта.

Тема: Применение оператора ротора для анализа локального вращения в векторном поле скоростей точек вращающихся объектов сцены.

Задача: На сцене есть волчок или вращающийся шар, создающие в окружающем пространстве векторное поле скоростей, описывающее движение воздушных частиц в каждой точке пространства вокруг объекта.

Требуется вычислить ротор этого поля и определить ось и угловую скорость вращения объекта. Ненулевой ротор поля указывает на наличие локального вращения в поле скоростей окружающей среды. Результат использовать для проверки корректности физического моделирования и синхронизации визуальной анимации с физическими расчётами движка.

Направление «Технологии защиты информации»

ВАРИАНТ 1

Градиент поля уязвимостей в информационной системе.

Тема: Применение градиента скалярного поля для определения направлений максимального возрастания числа уязвимостей в системе и оптимизации расположения средств защиты.

Задача: В информационной системе проведено сканирование уязвимостей всех компонентов. Результаты представлены в виде скалярного поля плотности уязвимостей в многомерном пространстве типов атак (сетевые атаки, социальная инженерия, вредоносное ПО, физический доступ).

Требуется вычислить градиент этого поля и определить направления, в которых число уязвимостей растёт наиболее быстро. На основе анализа градиента приоритезировать средства защиты и определить критические компоненты, требующие срочного обновления безопасности.

ВАРИАНТ 2

Поток атак через пограничную защиту.

Тема: Применение поверхностного интеграла от векторного поля для расчёта общего потока попыток атак, проходящих через границу защищённой сети.

Задача: На границе корпоративной сети установлена система защиты (firewall, IDS). Поток попыток атак описывается векторным полем, характеризующимся интенсивностью и направлением попыток в различных точках границы.

Требуется рассчитать полный поток атак через пограничную поверхность сети, используя поверхностный интеграл. Полученное значение показывает общую нагрузку на систему защиты и помогает оценить её эффективность.

Высокий поток требует усиления защиты или внедрения дополнительных фильтров.

ВАРИАНТ 3

Циркуляция поля информационных потоков в сети.

Тема: Применение криволинейных интегралов и теоремы Стокса для анализа циркуляции авторизованных информационных потоков в локальной сети и обнаружения несанкционированных циклических передач.

Задача: В корпоративной сети каждый авторизованный информационный поток должен иметь чёткое направление: от источника к получателю.

Требуется определить векторное поле информационных потоков между узлами сети и вычислить его циркуляцию по замкнутому контуру из нескольких узлов. Нулевая циркуляция подтверждает отсутствие циклических потоков. Ненулевая циркуляция указывает на несанкционированное копирование или перенаправление данных в кольцах внутри сети — признак возможной утечки информации или вредоносной активности.

ВАРИАНТ 4

Дивергенция поля авторизационных событий.

Тема: Применение оператора дивергенции к полю авторизационных событий для определения источников и стоков попыток доступа в различных точках системы.

Задача: В системе мониторинга безопасности отслеживаются все события авторизации (логины, попытки доступа) на разных узлах и сервисах. Эти события образуют векторное поле в пространстве (компонент \times тип события \times время).

Требуется вычислить дивергенцию этого поля в различных точках системы. Положительная дивергенция указывает на скопление событий авторизации — возможный признак атаки перебором или распределённой атаки.

Отрицательная дивергенция может указывать на подозрительное отсутствие событий логирования. На основе анализа дивергенции выявлять аномалии и срабатывать оповещения.

ВАРИАНТ 5

Ротор поля взаимодействия между компонентами системы.

Тема: Применение оператора ротора для обнаружения циклических зависимостей и потенциальных петель обратной связи в системе управления доступом и внутренних взаимодействиях компонентов.

Задача: В сложной системе управления доступом различные компоненты взаимодействуют друг с другом — выдают разрешения, проверяют права, логируют события. Эти взаимодействия образуют векторное поле в многомерном пространстве компонентов и операций.

Требуется вычислить ротор этого поля для обнаружения циклических зависимостей, которые могут привести к петлям в разрешениях доступа или

порочным кругам в логировании. Ненулевой ротор требует пересмотра архитектуры системы для исключения циклических вызовов и повышения безопасности.

Направление «Мобильные и сетевые технологии»

ВАРИАНТ 1

Градиент поля напряженности сигнала в сети.

Тема: Применение градиента скалярного поля для определения направления наибольшего улучшения сигнала и оптимизации маршрутов передачи данных в мобильной сети.

Задача: В городе размером 40 км × 40 км расположены базовые станции, создающие скалярное поле напряженности сигнала.

Требуется вычислить градиент этого поля в различных точках и определить направления, в которых сигнал улучшается (ухудшается) наиболее быстро, вычислить изменение напряженности поля вдоль заданного маршрута. На основе анализа градиента определить «долины слабого сигнала» — области, куда необходимо добавить дополнительные базовые станции, и оптимальные маршруты для передачи данных вдоль направлений сильного сигнала.

ВАРИАНТ 2

Поток данных через поверхность раздела сетей.

Тема: Применение поверхностного интеграла от векторного поля для расчёта общего объёма трафика, проходящего через интерфейс между двумя сетями разных операторов.

Задача: Между двумя операторами мобильной сети существует граница раздела (географическая поверхность в трёхмерной сетевой топологии). Трафик, проходящий через эту границу, описывается векторным полем плотности потока данных.

Требуется рассчитать полный поток (объём трафика в единицу времени) через границу раздела, используя поверхностный интеграл. Результат использовать для согласования пропускной способности сети и оценки мигрирующих пользователей.

ВАРИАНТ 3

Циркуляция векторного поля в кольцевой топологии сети.

Тема: Применение криволинейных интегралов и теоремы Стокса для анализа циркуляции потока данных вокруг узлов сети в кольцевой или мешевой топологии.

Задача: В кольцевой сетевой топологии узлы подключены по кругу, создавая циклические маршруты передачи данных.

Требуется вычислить циркуляцию векторного поля потоков данных по замкнутому контуру сети. Ненулевая циркуляция указывает на перегруженность некоторых участков в направлении обхода кольца. На основе анализа

циркуляции оптимизировать распределение трафика для предотвращения перегрузок.

ВАРИАНТ 4

Дивергенция поля нагрузки на сетевые узлы.

Тема: Применение оператора дивергенции к векторному полю для определения источников и стоков трафика в различных узлах сети.

Задача: В сетевой инфраструктуре каждый узел может генерировать трафик (источник) или принимать его (сток). Векторное поле потоков данных описывает движение информации между узлами.

Требуется вычислить дивергенцию этого поля в каждом узле. Положительная дивергенция указывает на перегруженность узла (больше входящего трафика, чем исходящего), отрицательная — на недоиспользование ресурсов. На основе анализа дивергенции балансировать нагрузку и оптимизировать распределение сервисов по узлам.

ВАРИАНТ 5

Ротор векторного поля – обнаружение циклических помех.

Тема: Применение оператора ротора для обнаружения локальных циклических потоков данных (циклических помех, петель обратной связи) в сетевой топологии.

Задача: В сложной сетевой топологии возможно возникновение циклических потоков данных – пакеты, циркулирующие в кольцах без попадания в конечный пункт назначения.

Требуется вычислить ротор векторного поля потоков данных в различных точках сети. Ненулевой ротор указывает на локальное циклическое движение (вихрь в потоке). На основе анализа ротора поля выявить и устранить циклические помехи, обеспечив гарантированную доставку пакетов.

Список рекомендуемой литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
2. Краснов М. Л. Векторный анализ: задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: УРСС, 2002. — 144 с.
3. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 728 с.
5. Шеннон К. Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — С. 243–332.
6. Marsden J. E., Tromba A. Vector Calculus. 6th ed. — New York: W. H. Freeman and Company, 2012. — 526 p.
7. Millington I. Game Physics Engine Development. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2010. — 872 p.
8. Patel A. Pathfinding and AI for Games. — San Francisco: Morgan Kaufmann, 2013. — 352 p.
9. Parastayev A., Kovtunov K. V., Hensen E. J. M., et al. Breaking structure sensitivity in CO₂ hydrogenation by tuning metal–oxide interfaces // Nature Catalysis. — 2022. — Vol. 5. — P. 1051–1060. DOI: 10.1038/s41929-022-00874-4.
10. Seh Z. W., Jaramillo T. F., et al. Combining theory and experiment in electrocatalysis: Insights into materials design // Science. — 2017. — Vol. 355, No. 6321. — Article ID: eaad4998. DOI: 10.1126/science.aad4998.
11. Xu S., Coppens M.-O., et al. Surface barriers to mass transfer in nanoporous materials for catalysis and separations // Chemical Society Reviews. — 2023. — Vol. 52. — P. 3991–4024. DOI: 10.1039/D2CS00627H.

Холодова Светлана Евгеньевна
Савченко Татьяна Владимировна
Перегудин Сергей Иванович

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А