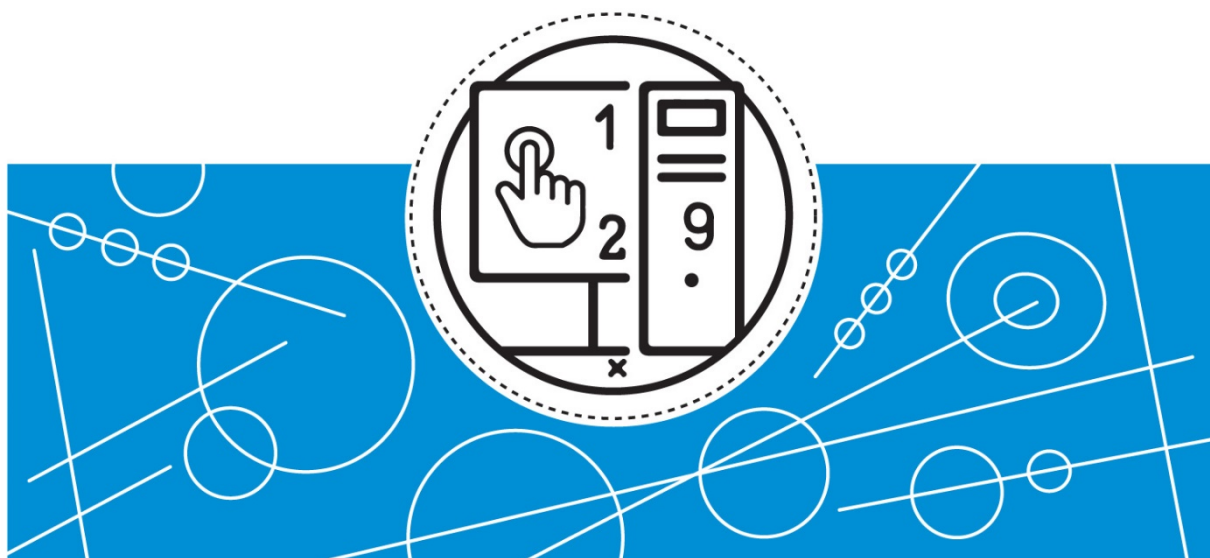


ІІТМО

С.Е. ХОЛОДОВА, Т.В. САВЧЕНКО

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО



**Санкт-Петербург
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.Е. Холодова, Т.В. Савченко

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.
ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 04.03.01, 09.03.03, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03,
12.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 24.03.02, 27.03.04

в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

Холодова С.Е., Савченко Т.В.. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО. Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 34 с.

Рецензент:

Перегудин С.И., доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем факультета прикладной математики – процессов управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Учебно-методическое пособие содержит расчетно-графические задания по теме «Евклидово пространство» в курсе линейной алгебры.

Пособие предназначено для студентов, изучающих линейную алгебру, а также будет полезно преподавателям при организации практических занятий.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' is stylized with a vertical line through its center.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026
© Холодова С.Е., Савченко Т.В., 2026

Содержание

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ	5
ЗАДАЧА №1	7
ЗАДАЧА №2	9
ЗАДАЧА №3	11
ЗАДАЧА №4	12
ЗАДАЧА №5	14
ЗАДАЧА №6	16
ЗАДАЧА №7	17
ЗАДАЧА №8	18
ЗАДАЧА №9	19
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	33

Введение

Методические материалы разработаны для организации расчетно-графических работ по дисциплине «Линейная алгебра». Основное внимание уделено теме евклидово пространства.

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части программы подготовки бакалавров по направлениям подготовки 01.03.02, 03.03.02, 05.03.06, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 38.03.01, 38.03.02, 38.03.05, 44.03.04, 45.03.04 в первом, втором и третьем семестрах.

Содержание адаптировано для студентов направления «Нейротехнологии и программирование».

Методические рекомендации систематизируют подход к выполнению решения поставленной задачи. Особый акцент направлен на физическую интерпретацию результатов представленного исследования – оценку реалистичности, сравнение с эталонными значениями и анализ влияния ключевых параметров в контексте рассматриваемой специальности. Материалы обеспечивают формирование компетенций в области прикладного анализа, востребованных в ИТ-дисциплинах. Выполнение представленных заданий способствует систематизации теоретических знаний и развитию навыков их практического использования в профессиональной деятельности.

Шкала оценивания и критерии оценки

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

- **к выполнению заданий**– в работе должны быть:
 - представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
 - указаны используемые теоретические положения и методы;
 - получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
- **к оформлению отчета** – отчет должен быть представлен в печатном, рукописном или (предпочтительно) электронном виде в форматах doc, docx, pdf и содержать:
 - титульный лист (название работы, ФИО исполнителей, номера групп, ФИО проверяющего);
 - условия всех заданий;
 - решение (исследование), его теоретическое обоснование, численные результаты;
 - графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в графическом или математическом редакторе);
 - выводы;
- **к докладу** – для доклада отводится от семи до десяти минут. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:
 - постановку задачи;
 - изложение основных этапов исследования или решения;
 - ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;
 - результаты исследования или решения и их оценку;
 - выводы.

Наименование критерия	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
I. КАЧЕСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ		
Последовательность, полнота и оптимальность решения, обоснованное и корректное применение методов решения.	0	5
II. КАЧЕСТВО ОТЧЕТА		
Полнота и качество оформления отчета	0	2
III. КАЧЕСТВО ДОКЛАДА		
Содержательность и качество устного изложения материала и ответа на дополнительные вопросы	0	3
ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА ЗА РГР	0	10

Максимальный балл – 10 , выставляется, если обучающийся правильно выполнил все задания, представляет верные и обоснованные ответы на вопросы по теме работы, качество оформления отчета – высокое.

Минимальный балл – 0, выставляется, если задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, неудовлетворительное качество оформления отчета.

Основанием для снижения количества баллов являются:

- 1) наличие ошибок в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях;
- 2) возникновение затруднений и неточностей при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- 3) выбор неоптимального метода решения, неумение обосновать применение методов, бездоказательность выводов;
- 4) низкое качество оформления отчета.

Осмелитесь мыслить самостоятельно!
Не забываем очевидную истину, что евклидово пространство нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!

Задача №1

Какую же удивительную красоту подметил Йёрген Педерсен Грам!

- 1) Дана матрица Грама скалярного произведения G в базисе $\{e_1, e_2\}$. Найти:
- длины базисных векторов $\{e_1, e_2\}$;
 - угол между базисными векторами $\{e_1, e_2\}$;
 - длины заданных векторов x и y ;
 - угол между векторами x и y .
- 2) Ортогонализировать базис $\{e_1, e_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

№ Варианта	G	x, y	№ Варианта	G	x, y
1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$
3	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$	4	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$	6	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$	8	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$
9	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$	10	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$(1, 2), (-1, 1)$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$
13	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$	14	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$
15	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$	16	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$
17	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$	18	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$
19	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$	20	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$(-3, 1), (1, -2)$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$	22	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$
23	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$	24	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$
25	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$	26	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$
27	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$	28	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$

29	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$	30	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$(3, -1), (1, 2)$
----	--	-------------------	----	--	-------------------

Задача №2

Дана матрица G в базисе $S = \{e_1, e_2, e_3\}$.

- 1) Показать, что матрица G является матрицей Грама.
- 2) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
- 3) Найти длины векторов $x = (1, 2, 3)$ и $y = (2, -1, 2)$ и угол между ними.
- 4) Найти матрицу Грама в базисе $S_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$.

№ Варианта	G	f_1, f_2, f_3	№ Варианта	G	f_1, f_2, f_3
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$	11	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$
2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2+e_3$ $f_2=2e_2+e_3$ $f_3=4e_3$	12	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2+e_3$ $f_2=2e_2+3e_3$ $f_3=4e_3$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=2e_2+3e_3$ $f_3=e_2+e_3$	13	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2$ $f_2=e_1+e_3$ $f_3=e_2+e_3$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2$ $f_2=e_1+e_3$ $f_3=e_2+e_3$	14	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=-e_1+2e_2+e_3$ $f_3=-e_2+e_3$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$	15	$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2+e_3$ $f_2=2e_2+3e_3$ $f_3=4e_3$	16	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=-e_1+2e_2+e_3$ $f_3=-e_2+e_3$
7	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$	17	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+2e_2+3e_3$ $f_3=-e_2+e_3$	18	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2$ $f_2=e_1+e_3$ $f_3=e_2+e_3$
9	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$	19	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+2e_2+e_3$ $f_3=e_2+e_3$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2+e_3$ $f_2=2+3e_3$ $f_3=4e_3$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2$ $f_2=e_1+e_3$ $f_3=e_2+e_3$	26	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1-e_2$ $f_3=e_2+e_3$

22	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2+e_3$ $f_2=2e_2+3e_3$ $f_3=4e_3$	27	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+2e_2+e_3$ $f_3=e_2+e_3$
23	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+2e_2+e_3$ $f_3=e_2+e_3$	28	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1+e_2$ $f_2=e_1+e_3$ $f_3=e_2+e_3$
24	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+2e_2+e_3$ $f_3=-e_2+e_3$	29	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$f_1=-e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$
25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=e_1+e_2$ $f_3=e_2+e_3$	30	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	$f_1=e_1$ $f_2=-e_1+2e_2+e_3$ $f_3=-e_2+e_3$

Задача №3

Почему-то, изображая пространство, в котором мы существуем, нам приятнее созерцать его в виде трёх взаимно перпендикулярных осей.

Проверить, что система векторов ортогональна в пространстве E^4 , дополнить её до ортогонального базиса (дополнение не единственно).

№ Варианта	Система векторов	№ Варианта	Система векторов
1	$a_1 = (2, -2, 1, 1),$ $a_2 = (2, 3, 1, 1)$	16	$a_1 = (3, 1, 1, -1),$ $a_2 = (1, -1, 2, 0)$
2	$a_1 = (2, 1, 1, 3),$ $a_2 = (-4, -2, 1, 3)$	17	$a_1 = (2, -3, 1, 1),$ $a_2 = (1, 1, 1, 2)$
3	$a_1 = (3, -5, 1, 0),$ $a_2 = (3, 2, 1, 2)$	18	$a_1 = (3, 2, -1, 1),$ $a_2 = (1, -1, 2, -2)$
4	$a_1 = (-2, 2, 1, 1),$ $a_2 = (0, 1, -2, 0)$	19	$a_1 = (2, 1, 2, -1),$ $a_2 = (1, -1, 0, 1)$
5	$a_1 = (3, 1, 1, 1),$ $a_2 = (1, -3, 0, 0)$	20	$a_1 = (3, -1, 1, 2),$ $a_2 = (1, 2, -3, 1)$
6	$a_1 = (-1, -1, 1, 1),$ $a_2 = (1, 1, 1, 1)$	21	$a_1 = (2, 2, 1, -1),$ $a_2 = (1, -1, 1, 0)$
7	$a_1 = (1, -1, -1, -1),$ $a_2 = (3, 1, 1, 1)$	22	$a_1 = (3, 1, -1, 2),$ $a_2 = (1, -2, 1, 0)$
8	$a_1 = (1, 1, 1, 1),$ $a_2 = (1, -2, 1, 0)$	23	$a_1 = (2, -1, 2, 1),$ $a_2 = (1, 1, -1, -1)$
9	$a_1 = (-1, 1, 0, 0),$ $a_2 = (1, 1, 3, 1)$	24	$a_1 = (3, 2, 1, -2),$ $a_2 = (1, -1, 1, 1)$
10	$a_1 = (1, -1, 0, 1),$ $a_2 = (1, 2, 3, 1)$	25	$a_1 = (2, 1, -2, 1),$ $a_2 = (1, -1, 0, -1)$
11	$a_1 = (2, -1, 1, 2),$ $a_2 = (1, 2, 1, -1)$	26	$a_1 = (3, -2, 1, 2),$ $a_2 = (1, 1, 1, -1)$
12	$a_1 = (3, 1, -2, 1),$ $a_2 = (1, -1, 1, 4)$	27	$a_1 = (2, 3, 1, -1),$ $a_2 = (1, -1, -2, 1)$
13	$a_1 = (2, 3, -1, 1),$ $a_2 = (1, -1, -1, 2)$	28	$a_1 = (3, 1, 2, -2),$ $a_2 = (1, -1, 1, 0)$
14	$a_1 = (3, -2, 1, 1),$ $a_2 = (1, 1, 1, -2)$	29	$a_1 = (2, -1, 1, 3),$ $a_2 = (1, 2, -1, -1)$
15	$a_1 = (2, 1, -1, 3),$ $a_2 = (1, -2, 3, 1)$	30	$a_1 = (3, 2, -1, 2),$ $a_2 = (1, -1, 1, -1)$

Задача №4

Учитывая вполне осознанное существующее у нас убеждение в том, что вся вселенная создана лишь как необходимое дополнение к нам, представляет немалый интерес процесс построения этого дополнения, особенно ортогонального.

Линейное подпространство H евклидова пространства E задано системой уравнений.

- 1) Найти размерность подпространства H и его базис.
- 2) Найти систему уравнений, задающую ортогональное дополнение H^\perp .
- 3) Построить ортонормированный базис подпространства H^\perp .
- 4) Дополнить полученный базис подпространства H^\perp до ортонормированного базиса пространства E .

$$1. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Задача №5

- 1) Найти проекцию вектора x на подпространство решений следующих систем уравнений и его ортогональную составляющую.
- 2) Найти угол между вектором x и подпространством решений данной системы уравнений, и расстояние от вектора x до этого подпространства.

$$1. \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (0, 2, 3, 2).$$

$$2. \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (2, 2, 4, -1).$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = (4, 2, -3, -1).$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-5, -1, 3, 0).$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-3, -2, -1, 0).$$

$$6. \begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-1, 1, 3, 1).$$

$$7. \begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (0, 0, 6, 0).$$

$$8. \begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-2, -4, 2, -2).$$

$$9. \begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-1, 3, 3, 4).$$

$$10. \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-2, -3, 0, -1).$$

$$11. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-5, -1, 1, -1).$$

$$12. \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-2, 1, -2, 3).$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = (2, 3, 1, -1).$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-4, 1, 1, 1).$$

$$15. \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-1, 1, 1, -2).$$

$$16. \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (0, 4, 1, 2).$$

$$17. \begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-3, 0, -1, -1).$$

$$x = (-1, 2, 2, 1).$$

$$19. \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (3, 2, 1, -1).$$

$$20. \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
$$x = (2, 2, -1, 0).$$

$$21. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, -4, 0, -2).$$

$$22. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, 1, 5, -1).$$

$$23. \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, -3, -1, 2).$$

$$24. \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, 1, 3, 4).$$

$$25. \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, -3, 1, -2).$$

$$26. \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (1, 1, 3, 3).$$

$$27. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-4, -1, 1, 3).$$

$$28. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (0, -3, 0, 3).$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-1, 1, 5, 3).$$

$$30. \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x = (-3, -2, -1, -1).$$

Итак, самый благородный путь к знаниям законов евклидовых пространств – путь размышлений – пройден. Пройден и самый лёгкий путь – подражания. Осталось преодолеть наиболее горький путь – путь опыта. Вперёд!

Задача №6

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, заданы многочлены Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

- 1) Доказать, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1,1]$.
- 2) Вычислить норму указанных многочленов Лежандра.
- 3) Построить ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов $\varphi_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$ (предварительно убедившись в их линейной независимости).
- 4) Доказать полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, с помощью равенства Парсеваля.
- 5) Разложить многочлен $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

2. $f(x) = x^3 + 3x - 1$

3. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 2$

4. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 3$

5. $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

6. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

8. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

9. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

10. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

11. $f(x) = x^3 - 2x + 1$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$

13. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

14. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

15. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

16. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 2$

17. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

19. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$

20. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

21. $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$

22. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

23. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

24. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

25. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

26. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

27. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$

28. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$

29. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

30. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Задача №7

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, заданы многочлены Чебышева, определяемые по формуле:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0,1,2,3.$$

- 1) Убедиться, что функции $T_n(x)$ действительно являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n = 2,3, \dots$$

- 2) Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, на отрезке $[-1,1]$.
- 3) Вычислить норму указанных многочленов Чебышева.
- 4) Построить ортонормированную систему многочленов Чебышева.
- 5) Разложить многочлен $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

2. $f(x) = x^3 + 3x - 1$

3. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 2$

4. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 3$

5. $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

6. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

8. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

9. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

10. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

11. $f(x) = x^3 - 2x + 1$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$

13. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

14. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

15. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

16. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 2$

17. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

19. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$

20. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

21. $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$

22. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

23. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

24. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

25. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

26. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

27. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$

28. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$

29. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

30. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Задача №8

- 1) Доказать, что тригонометрическая система функций $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

- 2) Нормировать эту систему.
3) Найти наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ тригонометрическим многочленом Фурье степени, не выше n , то есть,

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

где a_k, b_k – вещественные коэффициенты.

- 4) Построить графики функции $f(x)$ и полученного приближения (рассмотреть многочлены Фурье нескольких порядков). Проанализировать поведение построенного многочлена при росте его порядка.

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = x$

3. $f(x) = 2x$

4. $f(x) = -3x$

5. $f(x) = x + 1$

6. $f(x) = 4x$

7. $f(x) = -x + 1$

8. $f(x) = \operatorname{sign} x$

9. $f(x) = 0,5x$

10. $f(x) = -\operatorname{sign} x$

11. $f(x) = 2x + 3$

12. $f(x) = -2x + 1$

13. $f(x) = 3x - 2$

14. $f(x) = 0,5x + 2$

15. $f(x) = |x|$

16. $f(x) = \operatorname{sign} x + 1$

17. $f(x) = -|x|$

18. $f(x) = \operatorname{sign} x - 1$

19. $f(x) = 2\operatorname{sign} x$

20. $f(x) = \operatorname{sign}(x + 1)$

21. $f(x) = x^2 - x$

22. $f(x) = 2x - 5$

23. $f(x) = -x + 3$

24. $f(x) = -x + 3$

25. $f(x) = |x| - 1$

26. $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1)$

27. $f(x) = 4 - x$

28. $f(x) = 2\operatorname{sign} x$

29. $f(x) = \operatorname{sign}(x - 2)$

30. $f(x) = -2\operatorname{sign} x$

Задача №9

Вариант 1. Разработка нейроинтерфейса (Очистка электрода электроэнцефалографа от артефактов)

Требуется представить программное обеспечение для неинвазивного нейроинтерфейса. Датчик электрода электроэнцефалографа способен считать циклическую активность мозга при реакции на визуальный раздражитель. Следует обратить внимание на резкий скачок данных в середине массива экспериментальных данных, вызванный мышечными артефактами, благодаря совместному эффекту которых и настроек оборудования, сигнал зашумлен.

За время одного полного биоритма система зафиксировала 21 измерение амплитуды сигнала. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных электрода электроэнцефалографа:

[1.00; 1.803; 3.085; 4.778; 6.434; 7.347; 7.027; 5.652; 3.897; 2.381; 1.347; 7.422; 0.419; 0.256; 0.176; 0.142; 0.136; 0.155; 0.209; 0.324; 0.554].

Цель исследования как программиста-нейротехнолога: сгладить полученный сигнал и выделить его главные гармоники. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать полученные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени. Для оценки надежности алгоритма фильтрации требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки построенной математической модели по сравнению с экспериментальной дискретной моделью реального процесса.

Вариант 2. Анализ циркадных ритмов (Моделирование нейромедиаторов)

В лаборатории нейробиологии исследуется суточная выработка мелатонина в течение полного цикла, условно принятого за период 2π . Автоматическая система представляет пробы через равные промежутки времени, сделав 21 замер в точках $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Экспериментальные данные имеют небольшой разброс из-за аппаратной погрешности газового анализатора.

Массив концентрации (экспериментальные данные):

[7.38; 6.76; 5.22; 3.47; 2.07; 1.16; 0.64; 0.36; 0.23; 0.16; 0.13; 0.13; 0.16; 0.23; 0.37; 0.64; 1.16; 2.08; 3.48; 5.22; 6.76].

Цель исследования: разработать математическую модель изучаемого биологического цикла, описав его гладкой кривой. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать экспериментальные значения модельными значениями тригонометрического многочлена пятой степени. Требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки построенной математической модели, чтобы ученые нейробиологи были уверены в точности отражения построенной модели реальной картины эксперимента.

Вариант 3. Управление бионическим протезом (Сглаживание кинематики)

Для настройки плавности хода бионического протеза ноги нейросеть анализирует циклический паттерн ходьбы здорового человека. Фаза одного шага

привязана к радиальной шкале от 0 до 2π . Сенсоры захвата движения (Motion Capture) зафиксировали 21 значение угла отклонения сустава в моменты времени $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив углов отклонения (в радианах):

[−1.24; −1.17; −1.08; −0.96; −0.84; −0.79; −0.80; −0.90; −1.10; −1.21; −1.02; −1.28; −1.32; −1.34; −1.36; −1.37; −1.37; −1.36; −1.35; −1.33; −1.30].

Цель исследования: экспериментальные данные описать значениями непрерывной функции, чтобы позволить микроконтроллеру протеза генерировать плавный двигательный импульс без рывков. Для достижения поставленной цели следует представить рассматриваемую кинематическую величину в виде тригонометрического многочлена пятой степени. Для калибровки безопасности движения протеза требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки полученной аппроксимации.

Вариант 4. Разработка системы айтрекинга (Фильтрация саккадических движений глаз)

Требуется представить программный модуль предобработки данных для инфракрасного айтрекера. Оптический датчик считывает циклические паттерны микродвижений глаз (саккад) при реакции пользователя на динамичные virtualreality (VR) объекты. Следует обратить внимание на локальное искажение амплитуды в выборке, вызванное микроморганием и временной потерей зрачка камерой. За время одного полного биоритма (цикла) система зафиксировала массив измерений отклонения взгляда. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных оптического датчика:

[−3.0; −3.58; −4.12; −5.56; −4.86; −4.99; −4.94; −4.73; −4.36; −3.86; −3.30; −2.7; −2.13; −1.64; −1.26; −1.05; −1.00; −1.13; −1.43; −1.87; −2.43].

Цель исследования как программиста-нейротехнолога: сгладить окулографический сигнал и выделить плавную кинематическую характеристику движения. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать полученные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени. Для оценки надежности алгоритма трекинга требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки построенной математической модели по сравнению с экспериментальными показаниями датчика.

Вариант 5. Разработка программного обеспечения для микроэлектродных матриц (Детектирование спайков потенциала действия)

Требуется разработать алгоритм фильтрации для многоканальной микроэлектродной матрицы, имплантируемой в моторную кору. Электрод считывает электрическую активность изолированной группы нейронов. Следует обратить внимание на экстремальный выброс значений, характеризующий генерацию потенциала действия (спайка) на фоне низкоамплитудного базового шума тканей. За время одной фазы активности система зафиксировала массив

измерений мембранного потенциала. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных микроэлектрода:

[1.0; 1.05; 90.6; 520.4; 1714.7; 2915.0; 2439.2; 1020.6; 230.7; 32.17; 3.29; 0.3; 0.03; 0.004; 0.001; 0.0003; 0.0006; 0.002; 0.01; 0.09; 0.9].

Цель исследования как программиста-нейротехнолога: реконструировать форму спайка, отделив полезный сигнал от клеточного шума. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать полученные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени. Для оценки надежности детектора требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки построенной математической модели по сравнению с дискретной экспериментальной выборкой.

Вариант 6. Магнитоэнцефалография (Локализация судорожной активности)

Требуется разработать математическую модель для системы магнитоэнцефалографии (МЭГ). Сверхпроводящий квантовый интерферометр (SQUID) фиксирует изменения сверхслабого магнитного поля мозга. Сигнал содержит сильные перепады на краях измерительного цикла, отражающие влияние внешних электромагнитных наводок от медицинского оборудования в лаборатории. За время одного интервала сканирования система зафиксировала массив измерений индукции магнитного поля. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных МЭГ-сканера:

[2980.1; 2089.3; 742.4; 146.6; 18.6; 1.8; 0.16; 0.02; 0.003; 0.001; 0.001; 0.001; 0.002; 0.003; 0.018; 0.9; 1.22; 18.6; 146.6; 742.5; 2089.7].

Цель исследования как биоинформатика-разработчика: сгладить распределение магнитного поля для точного обратного картирования источника сигнала. Для достижения поставленной цели требуется аппроксимировать данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, оценить точность фильтрации аппаратных шумов, используя результаты расчетов абсолютной и относительной ошибки модели по сравнению с массивом экспериментальных магнитоэнцефалографических данных.

Вариант 7. Управление экзоскелетом (Построение огибающей электромиограммы)

Требуется представить алгоритм цифровой обработки сигналов для контроллера реабилитационного экзоскелета. Электромиографический датчик считывает поверхностное напряжение мышцы-антагониста предплечья. Данные отражают плавное затухание мышечного тонуса, однако сигнал периодически искажается из-за изменения контактного сопротивления между кожей и электродами. За время одного паттерна движения система зафиксировала массив измерений

амплитуды напряжения. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных электромиографического датчика:

[1.0; 1.34; 1.75; 2.18; 2.53; 2.71; 2.65; 2.37; 1.97; 1.54; 1.16; 0.86; 0.64; 0.5; 0.42; 0.37; 0.36; 0.39; 0.45; 0.56; 0.74].

Цель исследования как инженера-программиста: извлечь плавную огибающую миограммы для передачи команды на сервоприводы экзоскелета. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать электрофизиологические данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки полученной математической модели по сравнению с зашумленным экспериментальным вектором.

Вариант 8. Системы биологической обратной связи (Оценка вариабельности ритма)

Требуется написать ядро обработки данных для носимого нейрофидбэк-устройства. Датчик фотоплетизмограммы (ФПГ) регистрирует пульсовую волну пользователя во время выполнения стресс-теста. Сигнал сильно модулируется дыхательной аритмией и микродвижениями, что требует фильтрации для выделения истинной сосудистой реакции. За время одного кардиоцикла система зафиксировала массив измерений светопоглощения. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных оптического ФПГ-датчика:

[2.71; 2.6; 2.28; 1.86; 1.44; 1.07; 0.8; 0.46; 0.42; 0.4; 0.37; 0.37; 0.4; 0.48; 0.6; 0.8; 1.07; 1.44; 1.86; 2.28; 2.6].

Цель исследования как разработчика биомедицинских алгоритмов: сгладить искажения пульсовой волны для корректного расчета $R - R$ интервалов. Для достижения поставленной цели требуется аппроксимировать данные сенсора в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки математической модели в сравнении с реальным дискретным сигналом.

Вариант 9. Тестирование мозгового имплантата (Компенсация аппаратных сбоев электродов)

Требуется настроить программный декодер для экспериментального внутрикоркового имплантата. Электроды в режиме реального времени считывают потенциалы локального поля (LFP). В середине пакета данных наблюдается аномальный сбой полярности, вызванный рассинхронизацией работы аналого-цифрового преобразователя микрочипа и пробоем изоляции. За время одного окна анализа система зафиксировала массив микровольтовых измерений. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных кортикального имплантата:

[-1.32; -1.28; -1.26; -1.24; 1.25; -1.25; -1.25; -1.26; -1.27; -1.29; -1.29; -1.33; -1.34; -1.37; -1.37; -1.37; -1.37; -1.36; -1.36; -1.35; -1.34]

Цель исследования как программиста-нейротехнолога: нивелировать аппаратный скачок и восстановить реальную электрофизиологическую картину. Для достижения поставленной цели необходимо аппроксимировать полученные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени. Для программной валидации необходимо рассчитать абсолютную и относительную ошибки аппроксимации относительно экспериментального ряда.

Вариант 10. Глубокая стимуляция мозга (Подавление паркинсонического тремора)

Требуется разработать алгоритм подстройки фазы для нейростимулятора. Устройство считывает патологические осцилляции базальных ганглиев пациента для подачи подавляющего терапевтического импульса. Сигнал находится в зоне отрицательных потенциалов и содержит нелинейные искажения, вызванные физиологическими особенностями проводимости тканей. За время одной патологической осцилляции девайс зафиксировал массив измерений амплитуды. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных электрода нейростимулятора:

[-4.0; -4.2; -4.5; -4.7; -4.9; -5.0; -4.9; -4.8; -4.6; -4.4; -4.1; -3.8; -3.5; -3.0; -3.0; -3.0; -3.1; -3.2; -3.4; -3.7].

Цель исследования как специалиста по нейромодуляции: извлечь базовую гармонику тремора для расчета, подавляющего контримпульса. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать снятые данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, выявить абсолютную и относительную ошибки построенной модели по сравнению с результатами экспериментальной выборки.

Вариант 11. Неинвазивный нейроинтерфейс-спеллер (Детектирование вызванного потенциала P300)

Требуется улучшить алгоритм «мысленного ввода» текста для нейроклавиатуры. Электроэнцефалографический датчик теменной зоны собирает данные о реакции мозга на целевой стимул (вспышку нужной буквы на экране персонального компьютера). Искомый сигнал представляет собой выраженный позитивный пик с задержкой, который сильно замаскирован фоновым альфа-ритмом мозга. За время одного эпохального окна система зафиксировала массив измерений микровольтажа. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив усредненных ЭЭГ-данных:

[1.0; 2.4; 5.4; 10.4; 16.3; 19.9; 18.6; 13.4; 7.7; 3.6; 1.6; 0.64; 0.27; 0.13; 0.07; 0.05; 0.05; 0.06; 0.09; 0.18; 0.4].

Цель исследования как разработчика BCI (Brain-Computer Interface): сгладить активность и достоверно локализовать пик P300. Для достижения поставленной

целитрбуется аппроксимировать реакцию мозга в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки аппроксимирующей функции относительно зарегистрированной дискретной активности.

Вариант 12. Функциональная спектроскопия (Мониторинг кортикальной гемодинамики)

Требуется написать парсер данных для системы функциональной ближней инфракрасной спектроскопии (fNIRS). Оптические сенсоры регистрируют относительное изменение концентрации оксигемоглобина в префронтальной коре при решении когнитивной задачи. Медленная гемодинамическая кривая сильно зашумлена быстрыми артефактами пульса и дыхания. За время одной сосудистой реакции система зафиксировала массив измерений оптической плотности. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы

$$\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}, i = 1, 2, \dots, 2N + 1.$$

Массив данных fNIRS датчика:

[20.0; 17.5; 11.9; 6.4; 2.9; 1.2; 0.5; 0.2; 0.1; 0.06; 0.05; 0.05; 0.06; 0.1; 0.5; 1.0; 1.2; 2.9; 6.4; 11.9; 17.5].

Цель исследования как инженера нейровизуализации: отфильтровать системные физиологические шумы и восстановить *BOLD* -сигнал (blood oxygenation level dependent — сигнал, отражающий гемодинамический ответ на нейронную активность). Для достижения поставленной цели требуется аппроксимировать полученные оптические данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, оценить робастность фильтра, рассчитав абсолютную и относительную ошибки модели относительно оригинала.

Вариант 13. Анализ микроструктуры сна (Выделение сонных веретен)

Требуется разработать детектор паттернов для программного комплекса автоматической полисомнографии. Система анализирует электроэнцефалограмму спящего человека во время второй стадии медленного сна. Сигнал характеризуется кратковременной вспышкой активности (сонным веретеном), искаженной смещением изолинии из-за дрейфа усилителя. За время одного микроэпизода активности алгоритм извлек массив измерений биопотенциала. Замеры производились в равноотстоящих временных точках

$$\text{фазы } \theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}, \\ i = 1, 2, \dots, 2N + 1.$$

Массив данных электроэнцефалограммы во время сна:

[-1.1; -0.8; -0.3; 0.3; 0.7; 0.8; 0.7; 0.5; 0.04; -0.6; -0.9; -1.1; -1.27; -1.32; -1.35; -1.37; -1.37; -1.36; -1.34; -1.3; -1.2]

Цель исследования как программиста-аналитика сомнологических нейроданных: сгладить фрагмент и компенсировать дрейф базовой линии. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать массив данных электроэнцефалограммы в виде значений тригонометрического многочлена

пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки математической модели по сравнению с данными, представленными во фрагменте записи.

Вариант 14. Оптогенетика (Моделирование кинетики ионных каналов)

Требуется внедрить математическую обработку в программное обеспечение для инвивооптогенетических исследований. Регистрирующий электрод замеряет трансмембранный ионный ток при активации внедренного белка-каналородопсина с помощью короткого лазерного импульса. Переходный мембранный процесс зашумлен фотоэлектрическими артефактами оптоволоконка. За время открытия и закрытия канала система зафиксировала массив измерений силы тока. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы

$$\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}, i = 1, 2, \dots, 2N + 1.$$

Массив данных patch-clamp электрода:

[-2.0; -2.8; -3.7; -4.3; -4.7; -4.9; -4.9; -4.5; -4.1; -3.3; -2.4; -1.5; -0.6; -0.04; -0.6; 0.92; 0.99; 0.79; 0.34; -0.3; -1.1].

Цель исследования как биоинформатика: отфильтровать артефакт фотостимуляции и параметризовать чистую кривую ионного тока. Для достижения поставленной цели необходимо аппроксимировать полученные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, оценить точность восстановления сигнала, вычислив абсолютную и относительную ошибки модели по сравнению с результатами реальных аппаратных замеров.

Вариант 15. Декодирование речевого намерения (Фильтрация электрокортикографической матрицы)

Требуется написать программное обеспечение для имплантируемого речевого нейропротеза. Субдуральная матрица электрокортикографии (ЭКоГ), расположенная в моторно-речевой зоне коры, считывает активность при мысленном артикулировании слова парализованным пациентом. Высокочастотные модуляции, кодирующие слог, накладываются на низкочастотные пульсации спинномозговой жидкости. За время фонетического цикла контроллер зафиксировал массив микроскопических амплитуд. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$,

$$i = 1, 2, \dots, 2N + 1.$$

Массив данных матрицы ЭКоГ:

[1.1; 3.2; 9.5; 22.8; 41.4; 53.9; 49.4; 31.9; 15.2; 5.7; 1.8; 0.55; 0.17; 0.06; 0.03; 0.02; 0.01; 0.02; 0.04; 0.1; 0.3].

Цель исследования как инженера нейроинтерфейса: программно очистить пакет нейроданных перед подачей на вход классификатора слов. Для достижения поставленной цели необходимо аппроксимировать зарегистрированную активность в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки созданной спектральной модели по отношению к оригинальному вектору данных электрокортикографии.

Вариант 16. Анализ пострального баланса (Сглаживание данных стабиллоплатформы)

Требуется разработать модуль оценки равновесия для системы нейрореабилитации моторных нарушений. Внешняя стабиллоплатформа непрерывно фиксирует смещение центра давления пациента при удержании позы. Данные содержат колебания, вызванные естественным физиологическим тремором и микрокорректировками вестибулярного аппарата, что требует сглаживания перед клиническим анализом. За время одного диагностического цикла система зафиксировала массив показателей отклонения центра тяжести. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных стабиллоплатформы:

[-0.78; -1.22; -1.34; -1.39; -1.42; -1.43; -1.42; -1.41; -1.37; -1.3; -1.1; -0.1; 1.1; 1.2; 1.33; 1.36; 1.37; 1.35; 1.3; 1.17; 0.65]

Цель исследования как инженера-биомеханика: выделить плавную низкочастотную кривую смещения баланса пациента. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать полученные экспериментальные данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени. Для математической проверки надежности алгоритма требуется рассчитать абсолютную и относительную ошибки полученной модели по сравнению с экспериментальными показаниями платформ.

Вариант 17. Зрительные вызванные потенциалы (Фильтрация электроретинограммы)

Требуется написать алгоритм обработки светового ответа для офтальмологического нейроинтерфейса. Электрод регистрирует электрическую активность сетчатки (ЭРГ) в ответ на циклические световые вспышки. Сигнал содержит нелинейные затухающие элементы и аппаратный шум на низких амплитудах. За время одной сессии стимуляции система зафиксировала массив измерений биопотенциала. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных ЭРГ-сенсора:

[54.5; 45.7; 27.2; 12.1; 4.3; 1.3; 0.4; 0.13; 0.05; 0.03; 0.02; 0.02; 0.03; 0.05; 0.13; 0.41; 1.3; 4.3; 12.1; 21.2; 45.7]

Цель исследования как специалиста по нейроданным: смоделировать идеализированную форму вызванного потенциала. Для достижения поставленной цели требуется представить функциональную аппроксимацию искомой величины в виде тригонометрического многочлена пятой степени, для оценки уровня шума в канале рассчитать абсолютную и относительную ошибки построенной аппроксимации.

Вариант 18. Распознавание моторного воображения (Выделение мю-ритма мозга)

Требуется улучшить декодер намерений движения для интерфейса «мозг-компьютер» (Brain-ComputerInterface, BCI). Моторная кора генерирует специфическую десинхронизацию электроэнцефалографических (ЭЭГ) ритмов, когда человек только представляет физическое действие. Полученный паттерн искажен фоновыми размышлениями парализованного пациента и нуждается в очистке. За время окна моторного воображения алгоритм извлек массив амплитуд ритма. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив ЭЭГ-данных:

[−0.78; 0.18; 0.89; 1.13; 1.21; 1.24; 1.23; 1.18; 1.04; 0.63; −0.38; −1.01; −1.22; −1.3; −1.35; −1.36; −1.37; −1.36; −1.33; −1.27; −1.1].

Цель исследования как разработчика BCI: интерполировать очищенный профиль активации коры для отправки команды на кресло-коляску. Для достижения поставленной цели следует представить рассматриваемую величину в виде тригонометрического многочлена пятой степени, указать абсолютную и относительную ошибки полученной спектральной аппроксимации.

Вариант 19. Биомеханика спорта (Анализ усилия на тензоплатформе)

Требуется интегрировать математическую обработку в программное обеспечение для анализа спортивной нейромеханики. Тензометрический датчик регистрирует силу отталкивания спринтера, однако в середине цикла возникает резонансный дребезг металлической платформы, искажающий реальную картину прилагаемого мышечного усилия. За время одного шага датчик зафиксировал вектор изменения нагрузки. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных тензодатчика:

[−1.0; −2.1; 3.2; −4.1; −4.7; −4.9; −4.8; −4.4; −3.7; −2.7; −1.6; −0.4; 0.7; 1.7; 2.4; 2.9; 3.0; 2.7; 2.1; 1.2; 0.2].

Цель исследования как инженера-программиста: сгенерировать гладкую кинетическую кривую без механических резонансов. Для достижения поставленной цели необходимо аппроксимировать вектор данных в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки смоделированной кинетики по сравнению с исходными данными платформы.

Вариант 20. Нейрохимический мониторинг (Сглаживание данных микродиализа)

Требуется написать парсер протокола для биохимического нейросенсора. Микродиализный имплантат отслеживает концентрацию дофамина в синаптической щели при выполнении задачи на вознаграждение. Данные электрохимического детектора меняются неравномерно из-за микрофлуктуаций температуры мозга. За время одной поведенческой реакции система зафиксировала массив значений концентрации медиатора. Замеры

производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$,
 $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных электрохимического зонда:

[1.0; 4.36; 16.7; 49.8; 105.0; 146.3; 130.9; 75.9; 30.0; 8.75; 2.1; 0.47; 0.11; 0.03; 0.01; 0.007; 0.006; 0.009; 0.02; 0.05; 0.2].

Цель исследования как биоинформатика: математически описать кривую выброса нейромедиатора для фармакокинетической модели. Для достижения поставленной цели требуется представить аппроксимацию исследуемой величины в виде тригонометрического многочлена пятой степени, указать абсолютную и относительную ошибки синтезированной модели относительно химических измерений.

Вариант 21. Топографическое картирование электроэнцефалографических (ЭЭГ) данных (Локализация эпилептиформной активности)

Требуется разработать алгоритм пространственной фильтрации для клинического энцефалографа. Микроконтроллер собирает градиент электрического потенциала с поверхности головы во время приступа. Резкие пики указывают на источник спайков, однако сигнал зашумлен из-за плохого контакта отдельных электродов с кожей. За время сканирования контроллер выделил пространственный массив распределения амплитуд. Замеры производились в равноотстоящих точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив ЭЭГ-топографии:

[148.4; 118.8; 62.6; 22.5; 6.21; 1.45; 0.33; 0.08; 0.02; 0.01; 0.007; 0.007; 0.01; 0.02; 0.08; 0.32; 1.45; 6.2; 22.6; 62.2; 119.0].

Цель исследования как медицинского алгоритмиста: сгладить карту напряжений для точной локализации очага. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать пространственные потенциалы в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки полученной аппроксимации для оценки допустимой погрешности локализации.

Вариант 22. Адаптивная нейростимуляция (Синхронизация с дыхательным паттерном)

Требуется представить модуль синхронизации для «умного» имплантата блуждающего нерва. Устройство получает сигнал от импедансного пневмографа грудной клетки для подачи стимула строго на выдохе. Кривая дыхания содержит резкие артефакты, связанные с речью и движением грудных мышц пациента. За время одного паттерна вдоха-выдоха зафиксирован массив физиологического сопротивления. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных пневмографа:

[0.0; 0.97; 1.23; 1.32; 1.36; 1.37; 1.36; 1.34; 1.28; 1.13; 0.64; -0.64; -1.13; -1.28; -1.34; -1.37; -1.36; -1.32; -1.23; -0.9; -0.2].

Цель исследования как нейроинженера: смоделировать чистый синусоидальный базис респираторного цикла. Для достижения поставленной цели следует использовать функциональную аппроксимацию сигнала в виде тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки алгоритма трекинга дыхания.

Вариант 23. Управление роботом-манипулятором (Пространственная фильтрация гироскопа)

Для системы дистанционного управления нейророботом необходима обработка данных носимого инерциального датчика. Трёхосевой гироскоп отслеживает угол поворота предплечья оператора. Экспериментальные показания содержат «дрифт» (дрейф нуля) и высокочастотный сбой при резком торможении руки, некомфортный для механики робота. За время одного кинематического действия снят массив угловых скоростей. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных гироскопа: [-0.0001; -1.47; -2.8; -3.9; -4.65; -4.98; -4.87; -4.33; -3.4; -2.16; -0.74; 0.74; 2.17; 3.14; 4.33; 4.87; 4.98; 4.65; 3.9; 2.8; 1.4].

Цель исследования: сгладить управляющий сигнал для плавной отработки траекторий сервомоторами манипулятора. Для достижения поставленной цели необходимо аппроксимировать кинематические данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, указать абсолютную и относительную ошибки сгенерированной траектории относительно реального жеста оператора.

Вариант 24. Функциональная МРТ (Экстракция BOLD-ответа)

Требуется написать анализатор для нейровизуализационного программного обеспечения. Система функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ) сканирует изменения уровня кислорода в крови (BOLD-сигнал) в зрительной коре. Гемодинамический ответ нарастает медленно, но данные с датчиков томографа содержат радиочастотный шум и артефакты от работы градиентных катушек. За время одной реакции коры извлечен вектор воксельных интенсивностей. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных функционального томографа:

[1.0; 5.8; 29.3; 108.9; 266.4; 396.7; 347.1; 180.5; 59.2; 13.5; 2.4; 0.4; 0.07; 0.01; 0.005; 0.003; 0.002; 0.004; 0.009; 0.03; 0.1]

Цель исследования как разработчика систем нейровизуализации: изолировать истинную кривую изменения кровотока. Для достижения поставленной цели требуется представить функциональную аппроксимацию BOLD-сигнала в виде тригонометрического многочлена пятой степени, выявить абсолютную и относительную ошибки построенной модели относительно экспериментальных пиксельных интенсивностей.

Вариант 25. Анализ когнитивной нагрузки (Обработка пупиллометрии)

Требуется оптимизировать алгоритм для virtual reality (VR) шлема со встроенным айтрекинг. Инфракрасная камера фиксирует изменение диаметра зрачка, что напрямую коррелирует с умственным напряжением (когнитивной нагрузкой). Динамика зрачка сильно «изрезана» микросаккадами и бликами от линз устройства. За время решения тестовой задачи система зафиксировала массив изменения площади зрачка. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных пупиллометра:

[403.4; 309.0; 142.2; 42.1; 8.9; 1.56; 0.26; 0.05; 0.01; 0.0044; 0.0026; 0.0026; 0.0044; 0.01; 0.05; 0.263; 1.56; 8.95; 42.1; 142.2; 309.9]

Цель исследования как программиста-аналитика: вычленить очищенную нейрофизиологическую реакцию автономной нервной системы. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать собранные значения площади в виде тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки сглаживающего фильтра по отношению к данным камеры.

Вариант 26. Кохлеарная имплантация (Анализ слуховых стволовых потенциалов)

Требуется написать модуль тестирования для настройки речевого процессора кохлеарного имплантата. Регистрирующая аппаратура снимает коротколатентные слуховые вызванные потенциалы с кожи головы (КСВП). Амплитуда полезного сигнала микроскопична и тонет в шумах электросети и электромиографической (ЭМГ) активности шеи. За время одного усредненного звукового щелчка зафиксирован массив микровольтовых потенциалов. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$,

$i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных биоусилителя:

[0.78; 1.22; 1.34; 1.39; 1.42; 1.43; 1.42; 1.41; 1.37; 1.3; 1.1; 0.1; -1.1; -1.2; -1.33; -1.36; -1.37; -1.35; -1.3; 1.17; -0.65].

Цель исследования как нейротехнолога: реконструировать форму ответа ствола мозга для определения слухового порога пациента. Для достижения поставленной цели следует представить аппроксимацию сигнала в виде тригонометрического многочлена пятой степени, указать абсолютную и относительную ошибки интерполяции вызванного ответа.

Вариант 27. Тактильная обратная связь (Сглаживание пьезоэлектрического отклика)

Требуется разработать алгоритм преобразования силы нажатия для протеза кисти с тактильной отдачей. Пьезоэлектрический датчик на искусственном пальце считывает силу контакта с объектом. Эпюра напряжений искажена эффектом «скольжения» и вибрацией микромоторов, встроенных в фаланги. За время контактного паттерна сенсор передал массив значений давления. Замеры

производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$,
 $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных пьезодатчика: [1.0; -0.77; -2.3; -3.6; -4.6; -4.9; -4.8; -4.1; -3.1; -1.6; 0.1; 1.9; 3.6; 5.1; 6.2; 6.84; 6.98; 6.58; 5.69; 4.4; 2.7]

Цель исследования: сгладить скачки давления, чтобы корректно стимулировать нервные окончания культи пациента без болевых «прострелов». Для достижения поставленной цели следует представить данные тактильного усилия в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки сгенерированной отдачи по отношению к аппаратному замеру.

Вариант 28. Нейрофидбэк-терапия (Оценка кожно-гальванической реакции)

Требуется интегрировать систему очистки сигнала в приложение для психологического биоуправления. Датчики на пальцах считывают кожно-гальваническую реакцию (КГР) пользователя, реагируя на уровень потоотделения во время стресса. К фазической составляющей кривой примешивается контактный шум от движения рук. За время аффективной реакции аналого-цифровой преобразователь (АЦП) собрал массив показателей микросименсов. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных кожной проводимости:

[1.0; 7.8; 51.5; 238.1; 675.9; 1075.4; 920.1; 429.3; 110.8; 20.8; 2.83; 0.35; 0.04; 0.01; 0.002; 0.001; 0.001; 0.004; 0.02; 0.12].

Цель исследования как разработчика биомедицинских систем: выделить низкочастотный тренд возбуждения симпатической нервной системы. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать зарегистрированную реакцию в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, указать абсолютную и относительную ошибки полученной математической модели.

Вариант 29. Нейромодуляция блуждающего нерва (Калибровка формы импульса)

Необходимо настроить драйвер имплантируемого стимулятора блуждающего нерва для вагусной нервной стимуляции (VNS)-терапии при лечении эпилепсии. Устройство генерирует терапевтический электрический ток сложной формы, однако из-за деградации проводника и поляризации тканей форма доставляемого импульса на границе «электрод-железа» искажается на спаде. За время подачи одного терапевтического импульса встроенный аналого-цифровой преобразователь (АЦП) замерил массив токов. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив телеметрии от имплантата:

[1.10; 1.32; 1.40; 1.43; 1.45; 1.46; 1.44; 1.42; 1.37; 1.25; 0.76; -0.8; -1.22; -1.33; -1.36; -1.37; -1.35; -1.29; -1.1; -0.1].

Цель исследования как специалиста по микроэлектронике: математически реконструировать искаженную кривую для расчета коэффициентов компенсации. Для достижения поставленной цели следует представить функциональную аппроксимацию заряда в виде тригонометрического многочлена пятой степени, найти абсолютную и относительную ошибки построенной модели формы тока.

Вариант 30. Субвокальное распознавание речи (Фильтрация поверхностной электромиографии)

Требуется написать программное обеспечение для нейроинтерфейса беззвучного общения (субвокализации). Массив поверхностных датчиков на шее и лице фиксирует электромиографию артикуляторных мышц при мысленном проговаривании слов. Сигнал содержит многополярные всплески напряжения, на которые накладывается сетевая наводка 50 Гц. За время одной фонетической мыслеформы (слога) считан массив амплитудных значений. Замеры производились в равноотстоящих временных точках фазы $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$,

$i = 1, 2, \dots, 2N + 1$.

Массив данных поверхностной электромиографии:

[2.0; -0.06; -1.9; -3.4; -4.9; -4.8; 4.0; -2.7; -1.1; 0.95; 3.0; 5.0; 6.7; 8.1; 8.8; 8.9; 8.5; 7.47; 5.94; 4.06].

Цель исследования как специалиста по обработке сигналов: выделить энергетическую огибающую мышцы для последующего машинного обучения и классификации фонем. Для достижения поставленной цели следует аппроксимировать электрофизиологические данные в виде значений тригонометрического многочлена пятой степени, рассчитать абсолютную и относительную ошибки полученного сглаживающего электромиографического фильтра.

Список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. — 13 – е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 496 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука. 2024. – Изд. 6. 400 с. Серия: ФУНДАМЕНТ БУДУЩЕГО: Юбилейная серия в честь 270-летия МГУ имени М.В. Ломоносова.
4. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2026. – 320 с. (Учебное пособие для вузов).
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с. (Курс высшей математики и математической физики).
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. 13-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина. Учеб.: Для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 464 с.

Холодова Светлана Евгеньевна
Савченко Татьяна Владимировна

**Расчетно-графические задания.
Евклидово пространство**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ№

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А