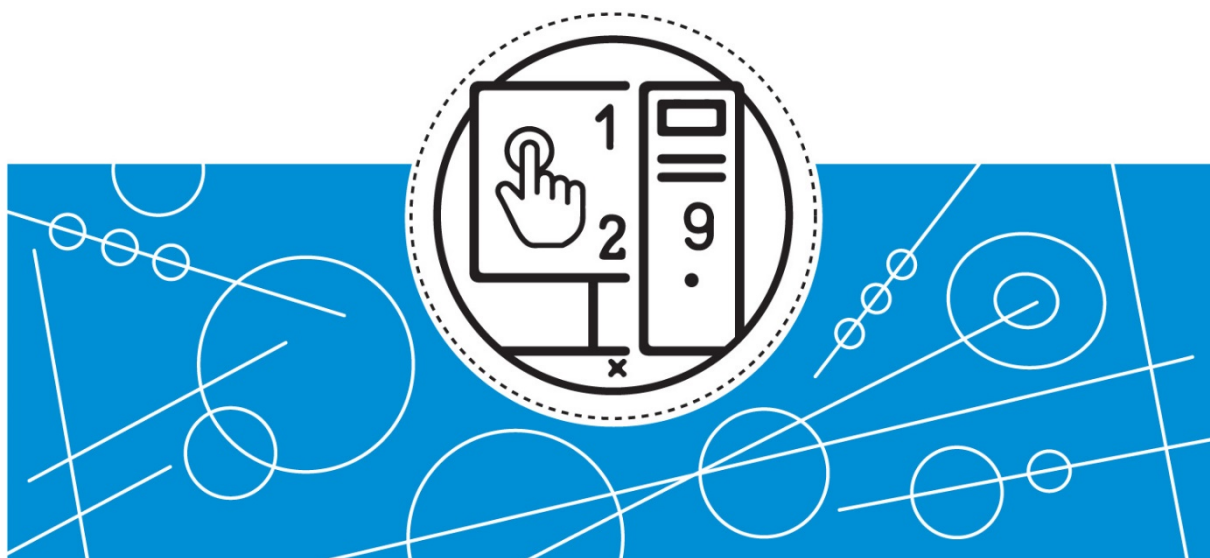


ІІТМО

ТЕНЗОРЫ. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ



Санкт-Петербург
2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**ТЕНЗОРЫ.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

Тензоры. Задачи и упражнения / О.В. Блейхер, Т.Т. Исаева, А.С. Рванова [и др]. – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 80 с.

Рецензенты:

Хахина Анна Михайловна, доктор технических наук, доцент, профессор Высшей школы программной инженерии (Институт компьютерных наук и кибербезопасности) ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»;

Панкратова Татьяна Фёдоровна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, подробные решения вычислительных задач, а также упражнения для самостоятельной работы по теме «Тензоры», изучаемой в курсе линейной алгебры.

Пособие предназначено для студентов, изучающих линейную алгебру, а также будет полезно преподавателям при организации практических занятий.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font.

ИТМО (Санкт-Петербург) – национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития – научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд – в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ 5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026

© Блейхер О.В., Исаева Т.Т., Рванова А.С., Савченко Т.В., 2026

Оглавление

Введение	4
1. Основные определения	6
2. Операции над тензорами.....	12
3. Свёртывание тензоров.....	24
4. Изменение координат тензора при замене базиса.....	33
5. Транспонирование тензоров.....	42
6. Симметрирование и альтернирование тензоров.....	48
7. Симметрическое и внешнее произведения тензоров	55
8. Метрический тензор. Опускание и поднятие индексов.....	57
9. Задания для самостоятельной работы	62
Ответы.....	69
Список литературы.....	78

Введение

Настоящее методическое пособие посвящено изучению тензоров и операций над ними в рамках курса линейной алгебры и ориентировано прежде всего на формирование устойчивых навыков выполнения вычислительных задач. Опыт преподавания данной темы студентам инженерных и естественнонаучных направлений подготовки показывает, что при общем понимании теоретических определений вычислительная сторона тензорного исчисления вызывает наибольшие затруднения. Эти трудности проявляются при работе с координатными представлениями тензоров, при выполнении свёрток, тензорных произведений, преобразований компонент при замене базиса, а также при операциях симметрирования, транспонирования, поднятия и опускания индексов.

Теория тензоров традиционно излагается в достаточно абстрактной форме, что методически оправдано и необходимо для понимания их инвариантной природы. Однако на практике студенты сталкиваются с необходимостью выполнять конкретные расчёты, корректно работать с индексами, многомерными матрицами. Именно на этом этапе часто возникают типовые ошибки: смешение верхних и нижних индексов, неверный порядок индексов при тензорном умножении, формальное применение формул без понимания их вычислительного смысла. В результате даже при знании определений и формулировок теорем решение задач оказывается затруднительным.

Данное пособие построено с учётом этих методических особенностей. Теоретический материал представлен в объёме, необходимом для осмысленного выполнения вычислений, и непосредственно сопровождается подробно разобранными примерами. Основное внимание уделено пошаговому выполнению вычислений в координатной форме, интерпретации индексов, работе с пространственными матрицами и установлению связи между тензорными операциями и привычными матричными преобразованиями. Такой подход позволяет студентам увидеть внутреннюю логику вычислений и избежать механического заучивания формул.

Структура пособия ориентирована на постепенное наращивание вычислительной сложности. От простейших тензоров малой валентности читатель переходит к многовалентным тензорам, осваивает операции тензорного умножения и свёртывания, изучает преобразование компонент при замене базиса и работу с метрическим тензором. Отдельный раздел посвящён типовым расчётам, которые обобщают и систематизируют изученный материал и могут быть использованы как при подготовке к текущему контролю, так и при самостоятельной работе.

Пособие адресовано студентам, изучающим линейную алгебру, аналитическую геометрию и элементы тензорного исчисления, а также может быть полезно преподавателям при организации практических занятий. Его цель – не только закрепление теоретических понятий, но и формирование уверенных вычислительных навыков, необходимых для дальнейшего изучения

математической физики, механики, дифференциальной геометрии и прикладных инженерных дисциплин.

Предложения и замечания, направленные на совершенствование учебного пособия, принимаются по адресу электронной почты: mathgate@itmo.ru.

1. Основные определения

Пусть L_n – n -мерное линейное пространство над полем K (\mathbb{R} или \mathbb{C}), L_n^* – сопряжённое к L_n пространство. Элементы пространства L_n называют векторами, а пространства L_n^* – ковекторами.

Тензором типа (p, q) ($p, q \geq 0$) на L_n называется полилинейная форма

$$A : \underbrace{L_n \times \dots \times L_n}_p \times \underbrace{L_n^* \times \dots \times L_n^*}_q \rightarrow K.$$

Таким образом, тензор A каждому p векторам x_1, x_2, \dots, x_p из пространства L_n и q ковекторам u^1, u^2, \dots, u^q из пространства L_n^* , сопряжённого с L_n , сопоставляет число

$$A(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q) \in K.$$

Число p называется **ковариантной валентностью**, q – **контравариантной валентностью**, $p + q$ – (**полной**) **валентностью (рангом)** тензора.

Тензор типа $(p, 0)$ называют **ковариантным**.

Тензор типа $(0, q)$ называют **контравариантным**.

Тензор типа (p, q) называют **p раз ковариантным и q раз контравариантным**.

Примеры тензоров:

- тензор типа $(0, 0)$ является **скаляром (инвариантом)**, отождествляется с элементами поля K ;
- тензор типа $(1, 0)$ является **линейной формой (ковектором)**;
- тензор типа $(0, 1)$ является **вектором**.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис в L_n , $\{e^j\}_{j=1}^n$ – базис в L_n^* , тогда

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Координатами (компонентами) тензора валентности (p, q) в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n, \{e^j\}_{j=1}^n$ пространств L_n и L_n^* называется набор из n^{p+q} скаляров, которые являются значениями тензора на всевозможных наборах базисных векторов

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, e^{j_2}, \dots, e^{j_q}),$$

где $i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_q = 1, 2, \dots, n, n = \dim L_n$.

Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств L_n и L_n^* .

Представление тензора пространственной матрицей.

Тензор можно представить в виде пространственной матрицы. Порядок матрицы совпадает с размерностью рассматриваемого линейного пространства. Элементами матрицы являются скаляры $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, то есть значения тензора (полилинейной формы) на базисных векторах. При этом индексы элементов матрицы читаются следующим образом: сначала верхние слева направо, потом нижние слева направо.

Примеры записи тензоров матрицами:

1. **Нульвалентные тензоры** (валентность $r = p + q = 0, p = 0, q = 0$) имеют одну координату, у которой отсутствуют индексы, и которая имеет одно и то же значение во всех системах координат. Такой тензор является скаляром, числом, инвариантом.

2. **Одновалентные тензоры** (валентность $r = p + q = 1$) могут быть двух типов:

- тензор типа $(1, 0)$ является линейной формой (вектор-строка) и в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(a_i) = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n);$$

- тензор типа $(0, 1)$ является вектором (вектор-столбец) и в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(b^j) = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

3. **Двухвалентные тензоры** (полная валентность $r = p + q = 2$) могут быть трех типов:

- тензор типа $(2, 0)$ является билинейной формой и в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

- тензор типа $(1, 1)$ является оператором и в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(b_j^i) = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix};$$

- тензор типа $(0, 2)$ в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(c^{ij}) = \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} & c^{13} \\ c^{21} & c^{22} & c^{23} \\ c^{31} & c^{32} & c^{33} \end{pmatrix}.$$

Во всех трёх случаях:

1-й индекс (i) соответствует номеру строки;

2-й индекс (j) соответствует номеру столбца.

Примером двухвалентного тензора является *символ Кронекера*:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n},$$

матрица которого имеет вид:

$$(\delta_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Трехвалентные тензоры** (полная валентность $r = p + q = 3$) могут быть четырех типов:

- тензор типа $(3, 0)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array} \right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(2, 1)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(b_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} b_{11}^1 & b_{21}^1 & b_{12}^1 & b_{22}^1 \\ b_{11}^2 & b_{21}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{array} \right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(b_{jk}^i) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} b_{11}^1 & b_{21}^1 & b_{31}^1 & b_{12}^1 & b_{22}^1 & b_{32}^1 & b_{13}^1 & b_{23}^1 & b_{33}^1 \\ b_{11}^2 & b_{21}^2 & b_{31}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 & b_{32}^2 & b_{13}^2 & b_{23}^2 & b_{33}^2 \\ b_{11}^3 & b_{21}^3 & b_{31}^3 & b_{12}^3 & b_{22}^3 & b_{32}^3 & b_{13}^3 & b_{23}^3 & b_{33}^3 \end{array} \right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(1, 2)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(c_k^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} c_1^{11} & c_1^{12} & c_2^{11} & c_2^{12} \\ c_1^{21} & c_1^{22} & c_2^{21} & c_2^{22} \end{array} \right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(c_k^{ij}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_1^{11} & c_1^{11} & c_1^{11} & c_2^{11} & c_2^{12} & c_2^{13} & c_3^{11} & c_3^{12} & c_3^{13} \\ c_1^{21} & c_1^{22} & c_1^{23} & c_2^{21} & c_2^{22} & c_2^{23} & c_3^{21} & c_3^{22} & c_3^{23} \\ c_1^{31} & c_1^{32} & c_1^{33} & c_2^{31} & c_2^{32} & c_2^{33} & c_3^{31} & c_3^{32} & c_3^{33} \end{array} \right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(0, 3)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(d^{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} d^{111} & d^{121} & d^{112} & d^{122} \\ d^{211} & d^{221} & d^{212} & d^{222} \end{array} \right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(d^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d^{111} & d^{121} & d^{131} & d^{112} & d^{122} & d^{132} & d^{113} & d^{123} & d^{133} \\ d^{211} & d^{221} & d^{231} & d^{212} & d^{222} & d^{232} & d^{213} & d^{223} & d^{233} \\ d^{311} & d^{321} & d^{331} & d^{312} & d^{322} & d^{332} & d^{313} & d^{323} & d^{333} \end{array} \right) \text{ для } n = 3.$$

Порядок чтения индексов:

- 1-й индекс (i) соответствует номеру строки;
- 2-й индекс (j) соответствует номеру столбца;
- 3-й индекс (k) соответствует номеру слоя.

Пример 1.1

Примером трехвалентного тензора в линейном пространстве L_3 является **символ Леви-Чевиты**, компоненты которого в правом ортонормированном базисе определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k \text{ — чётная перестановка;} \\ -1, & \text{если } i, j, k \text{ — нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{если есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

Запишем данный тензор в виде матрицы:

$$(\varepsilon_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Символ Леви-Чевиты обобщается на пространство любой размерности $n > 1$:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ — чётная перестановка;} \\ -1, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ — нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{если есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

5. Четырехвалентные тензоры (полная валентность $r = p + q = 4$) могут быть пяти типов:

- (a_{ijkl}) — тензор типа $(4, 0)$;
- (b_{jkl}^i) — тензор типа $(3, 1)$;

- (c_{kl}^{ij}) – тензор типа $(2, 2)$;
- (d_l^{ijk}) – тензор типа $(1, 3)$;
- (e^{ijkl}) – тензор типа $(0, 4)$.

К примеру, в L_n для $n = 2$:

$$(c_{kl}^{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j=1 & j=2 \\ \begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} c_{11}^{11} & c_{11}^{12} & c_{12}^{11} & c_{12}^{12} \\ c_{11}^{21} & c_{11}^{22} & c_{12}^{21} & c_{12}^{22} \end{array} \right) & k=1 \\ \begin{array}{cc} j=1 & j=2 \\ \begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} c_{21}^{11} & c_{21}^{12} & c_{22}^{11} & c_{22}^{12} \\ c_{21}^{21} & c_{21}^{22} & c_{22}^{21} & c_{22}^{22} \end{array} \right) & k=2 \\ l=1 & l=2 \end{array} \end{array}$$

Порядок чтения индексов:

- 1-й индекс (i) соответствует номеру строки;
- 2-й индекс (j) соответствует номеру столбца;
- 3-й индекс (k) соответствует номеру слоя (большой строке);
- 4-й индекс (l) соответствует номеру сечения (большому столбцу).

Пример 1.2

Пример четырехвалентного тензора:

$$c_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \neq j = l; \\ -1, & \text{если } i = l \neq j = k; \\ 0, & \text{все остальные.} \end{cases}$$

Запишем данный тензор в виде матрицы в линейном пространстве L_2 :

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Упражнения

- 1.1.** Укажите тип тензора (p, q) , его ковариантную, контравариантную и полную валентность:
- 1) $A(x, y)$ – билинейная форма;
 - 2) $B(x, y, z)$, где $x, y, z \in L_3$;
 - 3) $C(u, v)$, где $u, v \in L_3^*$;
 - 4) $D(x, u)$, где $x \in L_3, u \in L_3^*$;
 - 5) $B(u)$, где $u \in L_n^*$.

1.2. Представьте в виде матрицы тензор A , компоненты которого в данном базисе пространства L_n :

1) $a^{ij} = 2i - j, n = 2;$

2) $a^{ij} = 2i - j, n = 3;$

3) $a_k^{ij} = 2i - j + 3k, n = 2;$

4) $a_k^{ij} = 2i - j + 3k, n = 3;$

5) $a_{ij}^k = 2i - j + 3k, n = 3;$

6) $c_{kl}^{ij} = 2i - j + 3k + (-1)^l, n = 2;$

7) $c_{jl}^{ik} = 2i - j + 3k + (-1)^l, n = 2.$

1.3. Определите количество компонент данного тензора в правом ортонормированном базисе, найдите все его ненулевые компоненты:

1) символ Кронекера δ_j^i в \mathbb{R}_3 ;

2) символ Леви-Чевиты \mathcal{E}_{ijkl} в \mathbb{R}_4 .

2. Операции над тензорами

2.1. Сложение и вычитание тензоров

Сложение и вычитание тензоров определяется для тензоров одинакового типа.

Суммой тензоров A и B типа (p, q) называется тензор $A + B$ типа (p, q) такой, что:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in L_n \quad \forall u^1, u^2, \dots, u^q \in L_n^*$$

$$\begin{aligned} & (A + B)(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q) = \\ & = A(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q) + B(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q). \end{aligned}$$

Определим сложение тензоров, заданных координатами. Пусть A и B – два тензора типа (p, q) , $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ и $b_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ – координаты этих тензоров в базисе $\{e_i\}$, тогда тензор $C = A \pm B$ типа (p, q) в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$c_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \pm b_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}.$$

Пример 2.1

Найти сумму и разность тензоров A и B типа $(0, 1)$, заданных матрицами:

$$(a^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } (b^i) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\text{Тензор суммы: } C = A + B; (c^i) = (a^i) + (b^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тензор разности: } D = A - B; (d^i) = (a^i) - (b^i) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Умножение тензора на число

Произведением тензора A типа (p, q) на число $\alpha \in K$ называется тензор αA типа (p, q) такой, что:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in L_n, \quad \forall u^1, u^2, \dots, u^q \in L_n^*$$

$$(\alpha A)(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q) = \alpha A(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q).$$

Определим произведение тензора на число в координатах.

Пусть A – тензор типа (p, q) , имеющий в базисе $\{e_i\}$ координаты $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда тензор $B = \alpha A$ в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$b_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = \alpha a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Пример 2.2

Тензор A типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Найти тензор $3A$.

Решение.

Выполним умножение тензора A на число $\alpha = 3$.

Тензор $B = 3A$ имеет координаты $b_i^j = 3a_i^j$, где $i, j = 1, 2, 3$.

$$\text{Тогда } (b_i^j) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 36 \end{pmatrix}.$$

2.3. Тензорное умножение

Тензорное произведение определяется для тензоров произвольных типов.

Тензорным произведением тензоров A типа (p, q) и B типа (t, s) называется тензор $A \otimes B$ типа $(p + t, q + s)$ такой, что:

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2, \dots, x_{p+t} \in L_n, \forall u^1, u^2, \dots, u^{q+s} \in L_n^* \\ & A \otimes B(x_1, x_2, \dots, x_{p+t}, u^1, u^2, \dots, u^{q+s}) = \\ & = A(x_1, x_2, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^q) \cdot B(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+t}, u^{q+1}, u^{q+2}, \dots, u^{q+s}). \end{aligned}$$

Определим тензорное произведение в координатах. Пусть A – тензор типа (p, q) , имеющий в данном базисе $\{e_i\}$ координаты $a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, а B – тензор типа (t, s) , имеющий в этом же базисе $\{e_i\}$, координаты $b_{l_1 \dots l_t}^{m_1 \dots m_s}$. Тогда тензор $D = A \otimes B$ в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$d_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+t}}^{k_1 \dots k_q k_{q+1} \dots k_{q+s}} = a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \cdot b_{i_{p+1} \dots i_{p+t}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}}.$$

То есть для определения произведения $D = A \otimes B$ составляются всевозможные произведения координат тензора A на координаты тензора B . В каждом таком произведении индексы $l_1 \dots l_t$ и $m_1 \dots m_s$ у координат тензора B заменяются новыми индексами. Именно, полагают:

$$l_1 = i_{p+1} \dots l_t = i_{p+t} \text{ и } m_1 = k_{q+1} \dots m_s = k_{q+s}.$$

Операция умножения в общем случае не обладает свойством коммутативности:

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

Это объясняется тем, что порядок следования индексов у координат тензора определяет «номер» этой координаты.

Примеры умножения тензоров

Пример 2.3

Даны линейная форма:

$$A(x_1) = 2 \xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3,$$

и билинейная форма:

$$B(x_1, x_2) = \xi_1^1 \xi_2^1 + 2 \xi_1^2 \xi_2^3 - 2 \xi_1^2 \xi_2^1 - \xi_1^2 \xi_2^2 - 3 \xi_1^2 \xi_2^1 + 3 \xi_1^3 \xi_2^1 + 4 \xi_1^3 \xi_2^3,$$

где

$$x_1 = (\xi_1^1 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1^3)^T, \quad x_2 = (\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3)^T.$$

Найти трехлинейные формы:

$$C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) \text{ и } D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3).$$

Убедиться, что $A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) \neq B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$.

Решение.

Найдем трехлинейные формы:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, x_3) &= A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) = \\ &= (2 \xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3)(\xi_2^1 \xi_3^1 + 2 \xi_2^2 \xi_3^3 - 2 \xi_2^2 \xi_3^1 - \xi_2^2 \xi_3^2 - 3 \xi_2^2 \xi_3^1 + 3 \xi_2^3 \xi_3^1 + 4 \xi_2^3 \xi_3^3) = \\ &= 2 \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^1 + 4 \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^3 - 4 \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^1 - 2 \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^2 - 6 \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^1 + 6 \xi_1^1 \xi_2^3 \xi_3^1 + 8 \xi_1^1 \xi_2^3 \xi_3^3 - \\ &\quad - \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^1 - 2 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^3 + 2 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^1 + \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 + 3 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^1 - 3 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_3^1 - 4 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_3^3 + \\ &\quad + \xi_1^3 \xi_2^1 \xi_3^1 + 2 \xi_1^3 \xi_2^2 \xi_3^3 - 2 \xi_1^3 \xi_2^2 \xi_3^1 - \xi_1^3 \xi_2^2 \xi_3^2 - 3 \xi_1^3 \xi_2^2 \xi_3^1 + 3 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_3^1 + 4 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_3^3; \\ D(x_1, x_2, x_3) &= B(x_1, x_2) \cdot A(x_3) = \\ &= (\xi_1^1 \xi_2^1 + 2 \xi_1^2 \xi_2^3 - 2 \xi_1^2 \xi_2^1 - \xi_1^2 \xi_2^2 - 3 \xi_1^2 \xi_2^1 + 3 \xi_1^3 \xi_2^1 + 4 \xi_1^3 \xi_2^3)(2 \xi_3^1 - \xi_3^2 + \xi_3^3) = \\ &= 2 \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^1 + 4 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_3^1 - 4 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^1 - 2 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^1 - 6 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^1 + 6 \xi_1^3 \xi_2^1 \xi_3^1 + 8 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_3^1 - \\ &\quad - \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^2 - 2 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_3^2 + 2 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 + 3 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^2 - 3 \xi_1^3 \xi_2^1 \xi_3^2 - 4 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_3^2 + \\ &\quad + \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^3 + 2 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_3^3 - 2 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^3 - \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^3 - 3 \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^3 + 3 \xi_1^3 \xi_2^1 \xi_3^3 + 4 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_3^3. \end{aligned}$$

Сравнивая результаты, замечаем, что $C(x_1, x_2, x_3) \neq D(x_1, x_2, x_3)$, то есть произведение полилинейных форм некоммутативно:

$$A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) \neq B(x_1, x_2) \cdot A(x_3).$$

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи.

Линейная форма $A(x_1)$ является тензором типа $(1, 0)$ и имеет матрицу:

$$(a_i) = (2 \quad -1 \quad 1).$$

Билинейная форма $B(x_1, x_2)$ является тензором типа $(2, 0)$, её матрица:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Трёхлинейная форма $C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3)$ является тензором типа $(3, 0)$:

$$C = A \otimes B, \quad c_{ijk} = a_i \cdot b_{jk},$$

где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя.

Матрицы тензоров C, A, B :

$$(c_{ijk}) = (a_i \cdot b_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_{111} & c_{121} & c_{131} & c_{112} & c_{122} & c_{132} & c_{113} & c_{123} & c_{133} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} & c_{222} & c_{222} & c_{222} & c_{213} & c_{223} & c_{233} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} & c_{312} & c_{322} & c_{322} & c_{313} & c_{323} & c_{333} \end{array} \right);$$

$$(a_i) = (a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 1);$$

$$(b_{jk}) = \begin{pmatrix} b_{11} = 1 & b_{12} = 0 & b_{13} = 2 \\ b_{21} = -2 & b_{22} = -1 & b_{23} = -3 \\ b_{31} = 3 & b_{32} = 0 & b_{33} = 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты c_{ijk} :

1-я строка:

$$\begin{aligned} c_{111} &= a_1 b_{11} = 2 \cdot 1 = 2; & c_{112} &= a_1 b_{12} = 2 \cdot 0 = 0; & c_{113} &= a_1 b_{13} = 2 \cdot 2 = 4; \\ c_{121} &= a_1 b_{21} = 2 \cdot (-2) = -4; & c_{122} &= a_1 b_{22} = 2 \cdot (-1) = -2; & c_{123} &= a_1 b_{23} = 2 \cdot (-3) = -6; \\ c_{131} &= a_1 b_{31} = 2 \cdot 3 = 6; & c_{132} &= a_1 b_{32} = 2 \cdot 0 = 0; & c_{133} &= a_1 b_{33} = 2 \cdot 4 = 8. \end{aligned}$$

2-я строка:

$$\begin{aligned} c_{211} &= a_2 b_{11} = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{212} &= a_2 b_{12} = (-1) \cdot 0 = 0; & c_{213} &= a_2 b_{13} = (-1) \cdot 2 = -2; \\ c_{221} &= a_2 b_{21} = (-1) \cdot (-2) = 2; & c_{222} &= a_2 b_{22} = (-1) \cdot (-1) = 1; & c_{223} &= a_2 b_{23} = (-1) \cdot (-3) = 3; \\ c_{231} &= a_2 b_{31} = (-1) \cdot 3 = -3; & c_{232} &= a_2 b_{32} = (-1) \cdot 0 = -1; & c_{233} &= a_2 b_{33} = (-1) \cdot 4 = -4. \end{aligned}$$

3-я строка:

$$\begin{aligned} c_{311} &= a_3 b_{11} = 1 \cdot 1 = 1; & c_{312} &= a_3 b_{12} = 1 \cdot 0 = 0; & c_{313} &= a_3 b_{13} = 1 \cdot 2 = 2; \\ c_{321} &= a_3 b_{21} = 1 \cdot (-2) = -2; & c_{322} &= a_3 b_{22} = 1 \cdot (-1) = -1; & c_{323} &= a_3 b_{23} = 1 \cdot (-3) = -3; \\ c_{331} &= a_3 b_{31} = 1 \cdot 3 = 3; & c_{332} &= a_3 b_{32} = 1 \cdot 0 = 0; & c_{333} &= a_3 b_{33} = 1 \cdot 4 = 4. \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$(c_{ijk}) = (a_i \cdot b_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 4 & -6 & 8 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Сравнивая коэффициенты трехлинейной формы $C(x_1, x_2, x_3)$ и матрицы (c_{ijk}) , видим, что коэффициент при произведении $\xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k$ равен элементу матрицы c_{ijk} . К примеру, третье слагаемое в форме $C(x_1, x_2, x_3)$: $-4 \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^1$, коэффициент равен: -4 . По верхним индексам определяем соответствующий элемент матрицы (c_{ijk}) : 1-я строка, 2-й столбец, 1-й слой, то есть $c_{121} = -4$.

Аналогично найдем трехлинейную форму $D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$. Тогда $D = B \otimes A$, то есть $d_{ijk} = b_{ij} a_k$.

Вычислим коэффициенты d_{ijk} :

1-я строка

$$\begin{aligned} d_{111} &= b_{11} \cdot a_1 = 1 \cdot 2 = 2; & d_{121} &= b_{12} \cdot a_1 = 0 \cdot 2 = 0; & d_{131} &= b_{13} \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4; \\ d_{211} &= b_{21} \cdot a_1 = (-2) \cdot 2 = -4; & d_{221} &= b_{22} \cdot a_1 = (-1) \cdot 2 = -2; & d_{231} &= b_{23} \cdot a_1 = (-3) \cdot 2 = -6; \\ d_{311} &= b_{31} \cdot a_1 = 3 \cdot 2 = 6; & d_{321} &= b_{32} \cdot a_1 = 0 \cdot 2 = 0; & d_{331} &= b_{33} \cdot a_1 = 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

2-я строка

$$\begin{aligned} d_{112} &= b_{11} \cdot a_2 = 1 \cdot (-1) = -1; & d_{122} &= b_{12} \cdot a_2 = 0 \cdot (-1) = 0; & d_{132} &= b_{13} \cdot a_2 = 2 \cdot (-1) = -2; \\ d_{212} &= b_{21} \cdot a_2 = (-2) \cdot (-1) = 2; & d_{222} &= b_{22} \cdot a_2 = (-1) \cdot (-1) = 1; & d_{232} &= b_{23} \cdot a_2 = (-3) \cdot (-1) = 3; \\ d_{312} &= b_{31} \cdot a_2 = 3 \cdot (-1) = -3; & d_{322} &= b_{32} \cdot a_2 = 0 \cdot (-1) = 0; & d_{332} &= b_{33} \cdot a_2 = 4 \cdot (-1) = -4. \end{aligned}$$

3-я строка

$$\begin{aligned} d_{113} &= b_{11} \cdot a_3 = 1 \cdot 1 = 1; & d_{123} &= b_{12} \cdot a_3 = 0 \cdot 1 = 0; & d_{133} &= b_{13} \cdot a_3 = 2 \cdot 1 = 2; \\ d_{213} &= b_{21} \cdot a_3 = (-2) \cdot 1 = -2; & d_{223} &= b_{22} \cdot a_3 = (-1) \cdot 1 = -1; & d_{233} &= b_{23} \cdot a_3 = (-3) \cdot 1 = -3; \\ d_{313} &= b_{31} \cdot a_3 = 3 \cdot 1 = 3; & d_{323} &= b_{32} \cdot a_3 = 0 \cdot 1 = 0; & d_{333} &= b_{33} \cdot a_3 = 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Получаем:

$$(d_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -6 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 8 & -3 & 0 & -4 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Пример 2.4

Тензор A типа $(1, 0)$ определен координатами $a_i = (1 \quad -1 \quad 0)$, тензор B типа $(0, 1)$ определен координатами $b^j = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $C = A \otimes B$, тогда тензор C типа $(1, 1)$. Его координаты:

$$\begin{aligned} (c_i^j) = (a_i b^j) &= \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b^1 & a_1 b^2 & a_1 b^3 \\ a_2 b^1 & a_2 b^2 & a_2 b^3 \\ a_3 b^1 & a_3 b^2 & a_3 b^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $D = B \otimes A$, тогда тензор D типа $(1, 1)$. Его координаты:

$$(d_i^j) = (b^j a_i) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & d_3^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 \\ d_1^3 & d_2^3 & d_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 a_1 & b^1 a_2 & b^1 a_3 \\ b^2 a_1 & b^2 a_2 & b^2 a_3 \\ b^3 a_1 & b^3 a_2 & b^3 a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $C \neq D$, то есть $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Таким образом, произведение тензоров в общем случае не является коммутативным.

Пример 2.5

Тензоры A типа $(1, 0)$ и B типа $(2, 0)$ заданы матрицами:

$$a_i = (1 \quad -1 \quad 0), \quad b_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти и сравнить $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $D = A \otimes B$, тогда тензор D типа $(3, 0)$:

$$\begin{aligned} (d_{ijk}) = (a_i b_{jk}) &= \begin{pmatrix} d_{111} & d_{121} & d_{131} & d_{111} & d_{122} & d_{133} & d_{113} & d_{123} & d_{123} \\ d_{211} & d_{221} & d_{231} & d_{212} & d_{222} & d_{232} & d_{213} & d_{223} & d_{233} \\ d_{311} & d_{321} & d_{331} & d_{312} & d_{322} & d_{332} & d_{313} & d_{323} & d_{333} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_{jk} \\ a_2 b_{jk} \\ a_3 b_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 7 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 8 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 6 & 1 \cdot 9 \\ -1 \cdot 1 & -1 \cdot 4 & -1 \cdot 7 & -1 \cdot 2 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot 8 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot 6 & -1 \cdot 9 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 4 & 0 \cdot 7 & 0 \cdot 2 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 8 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 6 & 0 \cdot 9 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 3 & 6 \\ -3 & -6 \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Пусть $H = B \otimes A$, тогда тензор H типа $(3, 0)$:

$$\begin{aligned} (h_{ijk}) &= (b_{ij} \cdot a_k) = (b_{ij} \cdot a_1 | b_{ij} \cdot a_2 | b_{ij} \cdot a_3) = \\ &= \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \cdot 1 \middle| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \cdot (-1) \middle| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \cdot 0 \right) = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 & -7 & -8 & -9 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Данный пример подтверждает, что произведение тензоров в общем случае не является коммутативным.

Пример 2.6

Даны тензоры A типа $(1, 1)$ и тензор B типа $(1, 0)$:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & b_2^1 \\ a_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}; (b_k) = (1 \quad -1) = (b_1 \quad b_2).$$

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $A \otimes B = W$, тогда тензор W типа $(2, 1)$ с координатами:

$$a_j^i \cdot b_k = w_{jk}^i,$$

где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя, $i, j, k = 1, 2$:

$$(w_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} w_{11}^1 & w_{21}^1 & w_{12}^1 & w_{22}^1 \\ w_{11}^2 & w_{21}^2 & w_{12}^2 & w_{22}^2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} k=1 \\ k=2 \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned} w_{11}^1 &= a_1^1 b_1 = 1 \cdot 1 = 1; & w_{12}^1 &= a_1^1 b_2 = 1 \cdot (-1) = -1; \\ w_{21}^1 &= a_2^1 b_1 = 2 \cdot 1 = 2; & w_{22}^1 &= a_2^1 b_2 = 2 \cdot (-1) = -2; \\ w_{11}^2 &= a_1^2 b_1 = 3 \cdot 1 = 3; & w_{12}^2 &= a_1^2 b_2 = 3 \cdot (-1) = -3; \\ w_{21}^2 &= a_2^2 b_1 = 4 \cdot 1 = 4; & w_{22}^2 &= a_2^2 b_2 = 4 \cdot (-1) = -4; \end{aligned}$$

$$(w_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right).$$

Пусть $B \otimes A = V$, тогда тензор V типа $(2, 1)$ с координатами:

$$b_k \cdot a_j^i = v_{kj}^i,$$

где i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя, $i, j, k = 1, 2, 3$:

$$(v_{kj}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} v_{11}^1 & v_{21}^1 & v_{12}^1 & v_{22}^1 \\ v_{11}^2 & v_{21}^2 & v_{12}^2 & v_{22}^2 \end{array} \right).$$

$j=1 \qquad \qquad \qquad j=2$

$$\begin{aligned} v_{11}^1 &= b_1 a_1^1 = 1 \cdot 1 = 1; & v_{12}^1 &= b_1 a_2^1 = 1 \cdot 2 = 2; \\ v_{21}^1 &= b_2 a_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & v_{22}^1 &= b_2 a_2^1 = (-1) \cdot 2 = -2; \\ v_{11}^2 &= b_1 a_1^2 = 1 \cdot 3 = 3; & v_{12}^2 &= b_1 a_2^2 = 1 \cdot 4 = 4; \\ v_{21}^2 &= b_2 a_1^2 = (-1) \cdot 3 = -3; & v_{22}^2 &= b_2 a_2^2 = (-1) \cdot 4 = -4; \end{aligned}$$

$$(v_{kj}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right).$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Пример 2.7

Даны тензоры A типа $(2, 0)$ и B типа $(1, 1)$:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; (b_l^k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $A \otimes B = C$, тогда тензор C типа $(3, 1)$ с координатами:

$$a_{ij} \cdot b_l^k = c_{ijl}^k,$$

где k – номер строки, i – номер столбца, j – номер слоя (большой строки), l – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2$:

$$(c_{ijl}^k) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} i=1 & i=2 & i=1 & i=2 \\ k=1 & c_{111}^1 & c_{211}^1 & c_{112}^1 & c_{212}^1 \\ k=2 & c_{111}^2 & c_{211}^2 & c_{112}^2 & c_{212}^2 \end{array} \\ \begin{array}{cc|cc} i=1 & i=2 & i=1 & i=2 \\ k=1 & c_{121}^1 & c_{221}^1 & c_{122}^1 & c_{222}^1 \\ k=2 & c_{121}^2 & c_{221}^2 & c_{122}^2 & c_{222}^2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} j=1 \\ j=2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} l=1 & l=2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_{111}^1 &= a_{11} \cdot b_1^1 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{112}^1 &= a_{11} \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\ c_{211}^1 &= a_{21} \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{212}^1 &= a_{21} \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ c_{111}^2 &= a_{11} \cdot b_1^2 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{112}^2 &= a_{11} \cdot b_2^2 = 1 \cdot 2 = 2; \\ c_{211}^2 &= a_{21} \cdot b_1^2 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{212}^2 &= a_{21} \cdot b_2^2 = (-1) \cdot 2 = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{121}^1 &= a_{12} \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{122}^1 &= a_{12} \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ c_{221}^1 &= a_{22} \cdot b_1^1 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{222}^1 &= a_{22} \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\ c_{121}^2 &= a_{12} \cdot b_1^2 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{122}^2 &= a_{12} \cdot b_2^2 = (-1) \cdot 2 = -2; \\ c_{221}^2 &= a_{22} \cdot b_1^2 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{222}^2 &= a_{22} \cdot b_2^2 = 1 \cdot 2 = 2; \end{aligned}$$

$$(c_{ijl}^k) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right).$$

Пусть $B \otimes A = D$, тогда тензор D типа $(3, 1)$ с координатами:

$$b_l^k \cdot a_{ij} = d_{lij}^k,$$

где k – номер строки, l – номер столбца, i – номер слоя (большой строки), j – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2$:

$$(d_{ijl}^k) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} i=1 & d_{111}^1 & d_{211}^1 & d_{112}^1 & d_{212}^1 \\ i=2 & d_{111}^2 & d_{211}^2 & d_{112}^2 & d_{212}^2 \end{array} \\ \begin{array}{cc|cc} i=1 & d_{121}^1 & d_{221}^1 & d_{122}^1 & d_{222}^1 \\ i=2 & d_{121}^2 & d_{221}^2 & d_{122}^2 & d_{222}^2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} j=1 & j=2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d_{111}^1 &= a_{11} \cdot b_1^1 = 1 \cdot 1 = 1; & d_{112}^1 &= a_{12} \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ d_{211}^1 &= a_{11} \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; & d_{212}^1 &= a_{12} \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ d_{111}^2 &= a_{11} \cdot b_1^2 = 1 \cdot 1 = 1; & d_{112}^2 &= a_{12} \cdot b_1^2 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ d_{211}^2 &= a_{11} \cdot b_2^2 = 2 \cdot 1 = 2; & d_{212}^2 &= a_{12} \cdot b_2^2 = (-1) \cdot 2 = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{121}^1 &= a_{21} \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & d_{122}^1 &= a_{22} \cdot b_1^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\
d_{221}^1 &= a_{21} \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & d_{222}^1 &= a_{22} \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\
d_{121}^2 &= a_{21} \cdot b_1^2 = (-1) \cdot 1 = -1; & d_{122}^2 &= a_{22} \cdot b_1^2 = 1 \cdot 1 = 1; \\
d_{221}^2 &= a_{21} \cdot b_2^2 = (-1) \cdot 2 = -2; & d_{222}^2 &= a_{22} \cdot b_2^2 = 1 \cdot 2 = 2;
\end{aligned}$$

$$(d_{ijl}^k) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Сравнивая полученные матрицы, снова убеждаемся, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Пример 2.8

Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b_l^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти их произведение в разном порядке.

Решение.

Пусть $A \otimes B = C$. Тогда координаты тензора C :

$$c_{jl}^{ik} = a_j^i \cdot b_l^k.$$

При этом в матричной записи: i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя (большой строки), l – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2, 3$:

$$(c_{jl}^{ik}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_{11}^{11} & c_{11}^{12} & c_{11}^{13} & c_{12}^{11} & c_{12}^{12} & c_{12}^{13} & c_{13}^{11} & c_{13}^{12} & c_{13}^{13} \\ c_{11}^{21} & c_{11}^{22} & c_{11}^{23} & c_{12}^{21} & c_{12}^{22} & c_{12}^{23} & c_{13}^{21} & c_{13}^{22} & c_{13}^{23} \\ c_{11}^{31} & c_{11}^{32} & c_{11}^{33} & c_{12}^{31} & c_{12}^{32} & c_{12}^{33} & c_{13}^{31} & c_{13}^{32} & c_{13}^{33} \\ \hline c_{21}^{11} & c_{21}^{12} & c_{21}^{13} & c_{22}^{11} & c_{22}^{12} & c_{22}^{13} & c_{23}^{11} & c_{23}^{12} & c_{23}^{13} \\ c_{21}^{21} & c_{21}^{22} & c_{21}^{23} & c_{22}^{21} & c_{22}^{22} & c_{22}^{23} & c_{23}^{21} & c_{23}^{22} & c_{23}^{23} \\ c_{21}^{31} & c_{21}^{32} & c_{21}^{33} & c_{22}^{31} & c_{22}^{32} & c_{22}^{33} & c_{23}^{31} & c_{23}^{32} & c_{23}^{33} \\ \hline c_{31}^{11} & c_{31}^{12} & c_{31}^{13} & c_{32}^{11} & c_{32}^{12} & c_{32}^{13} & c_{33}^{11} & c_{33}^{12} & c_{33}^{13} \\ c_{31}^{21} & c_{31}^{22} & c_{31}^{23} & c_{32}^{21} & c_{32}^{22} & c_{32}^{23} & c_{33}^{21} & c_{33}^{22} & c_{33}^{23} \\ c_{31}^{31} & c_{31}^{32} & c_{31}^{33} & c_{32}^{31} & c_{32}^{32} & c_{32}^{33} & c_{33}^{31} & c_{33}^{32} & c_{33}^{33} \end{array} \right) \begin{matrix} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{matrix}$$

$l=1 \qquad \qquad \qquad l=2 \qquad \qquad \qquad l=3$

1-я строка

$$\begin{aligned} c_{11}^{11} &= a_1^1 \cdot b_1^1 = 1 \cdot 0 = 0; & c_{12}^{11} &= a_1^1 \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{13}^{11} &= a_1^1 \cdot b_3^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\ c_{11}^{12} &= a_1^1 \cdot b_1^2 = 1 \cdot (-2) = -2; & c_{12}^{12} &= a_1^1 \cdot b_2^2 = 1 \cdot (-1) = -1; & c_{13}^{12} &= a_1^1 \cdot b_3^2 = 1 \cdot (-3) = -3; \\ c_{11}^{13} &= a_1^1 \cdot b_1^3 = 1 \cdot 2 = 2; & c_{12}^{13} &= a_1^1 \cdot b_2^3 = 1 \cdot 0 = 0; & c_{13}^{13} &= a_1^1 \cdot b_3^3 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

2-я строка

$$\begin{aligned} c_{11}^{21} &= a_2^1 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{12}^{21} &= a_2^1 \cdot b_2^1 = 2 \cdot 1 = 2; & c_{13}^{21} &= a_2^1 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 1 = 2; \\ c_{11}^{22} &= a_2^1 \cdot b_1^2 = 2 \cdot (-2) = -4; & c_{12}^{22} &= a_2^1 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2; & c_{13}^{22} &= a_2^1 \cdot b_3^2 = 2 \cdot (-3) = -6; \\ c_{11}^{23} &= a_2^1 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 2 = 4; & c_{12}^{23} &= a_2^1 \cdot b_2^3 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{13}^{23} &= a_2^1 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2; \end{aligned}$$

3-я строка

$$\begin{aligned} c_{11}^{31} &= a_3^1 \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 0 = 0; & c_{12}^{31} &= a_3^1 \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{13}^{31} &= a_3^1 \cdot b_3^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ c_{11}^{32} &= a_3^1 \cdot b_1^2 = (-1) \cdot (-2) = 2; & c_{12}^{32} &= a_3^1 \cdot b_2^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; & c_{13}^{32} &= a_3^1 \cdot b_3^2 = (-1) \cdot (-3) = 3; \\ c_{11}^{33} &= a_3^1 \cdot b_1^3 = (-1) \cdot 2 = -2; & c_{12}^{33} &= a_3^1 \cdot b_2^3 = (-1) \cdot 0 = 0; & c_{13}^{33} &= a_3^1 \cdot b_3^3 = (-1) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

4-я строка

$$\begin{aligned} c_{21}^{11} &= a_2^2 \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 0 = 0; & c_{22}^{11} &= a_2^2 \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1; & c_{23}^{11} &= a_2^2 \cdot b_3^1 = (-1) \cdot 1 = -1; \\ c_{21}^{12} &= a_2^2 \cdot b_1^2 = (-1) \cdot (-2) = 2; & c_{22}^{12} &= a_2^2 \cdot b_2^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; & c_{23}^{12} &= a_2^2 \cdot b_3^2 = (-1) \cdot (-3) = 3; \\ c_{21}^{13} &= a_2^2 \cdot b_1^3 = (-1) \cdot 2 = -2; & c_{22}^{13} &= a_2^2 \cdot b_2^3 = (-1) \cdot 0 = 0; & c_{23}^{13} &= a_2^2 \cdot b_3^3 = (-1) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

5-я строка

$$\begin{aligned} c_{21}^{21} &= a_2^2 \cdot b_1^1 = 0 \cdot 0 = 0; & c_{22}^{21} &= a_2^2 \cdot b_2^1 = 0 \cdot 1 = 0; & c_{23}^{21} &= a_2^2 \cdot b_3^1 = 0 \cdot 1 = 0; \\ c_{21}^{22} &= a_2^2 \cdot b_1^2 = 0 \cdot (-2) = 0; & c_{22}^{22} &= a_2^2 \cdot b_2^2 = 0 \cdot (-1) = 0; & c_{23}^{22} &= a_2^2 \cdot b_3^2 = 0 \cdot (-3) = 0; \\ c_{21}^{23} &= a_2^2 \cdot b_1^3 = 0 \cdot 2 = 0; & c_{22}^{23} &= a_2^2 \cdot b_2^3 = 0 \cdot 0 = 0; & c_{23}^{23} &= a_2^2 \cdot b_3^3 = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

6-я строка

$$\begin{aligned} c_{21}^{31} &= a_3^2 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{22}^{31} &= a_3^2 \cdot b_2^1 = 2 \cdot 1 = 2; & c_{23}^{31} &= a_3^2 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 1 = 2; \\ c_{21}^{32} &= a_3^2 \cdot b_1^2 = 2 \cdot (-2) = -4; & c_{22}^{32} &= a_3^2 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2; & c_{23}^{32} &= a_3^2 \cdot b_3^2 = 2 \cdot (-3) = -6; \\ c_{21}^{33} &= a_3^2 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 2 = 4; & c_{22}^{33} &= a_3^2 \cdot b_2^3 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{23}^{33} &= a_3^2 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

7-я строка

$$\begin{aligned} c_{31}^{11} &= a_3^3 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{32}^{11} &= a_3^3 \cdot b_2^1 = 2 \cdot 1 = 2; & c_{33}^{11} &= a_3^3 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 1 = 2; \\ c_{31}^{12} &= a_3^3 \cdot b_1^2 = 2 \cdot (-2) = -4; & c_{32}^{12} &= a_3^3 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2; & c_{33}^{12} &= a_3^3 \cdot b_3^2 = 2 \cdot (-3) = -6; \\ c_{31}^{13} &= a_3^3 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 2 = 4; & c_{32}^{13} &= a_3^3 \cdot b_2^3 = 2 \cdot 0 = 0; & c_{33}^{13} &= a_3^3 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

8-я строка

$$\begin{aligned} c_{31}^{21} &= a_3^3 \cdot b_1^1 = 1 \cdot 0 = 0; & c_{32}^{21} &= a_3^3 \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1; & c_{33}^{21} &= a_3^3 \cdot b_3^1 = 1 \cdot 1 = 1; \\ c_{31}^{22} &= a_3^3 \cdot b_1^2 = 1 \cdot (-2) = -2; & c_{32}^{22} &= a_3^3 \cdot b_2^2 = 1 \cdot (-1) = -1; & c_{33}^{22} &= a_3^3 \cdot b_3^2 = 1 \cdot (-3) = -3; \\ c_{31}^{23} &= a_3^3 \cdot b_1^3 = 1 \cdot 2 = 2; & c_{32}^{23} &= a_3^3 \cdot b_2^3 = 1 \cdot 0 = 0; & c_{33}^{23} &= a_3^3 \cdot b_3^3 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

9-я строка

$$\begin{aligned} c_{31}^{31} &= a_3^3 \cdot b_1^1 = 3 \cdot 0 = 0; & c_{32}^{31} &= a_3^3 \cdot b_2^1 = 3 \cdot 1 = 3; & c_{33}^{31} &= a_3^3 \cdot b_3^1 = 3 \cdot 1 = 3; \\ c_{31}^{32} &= a_3^3 \cdot b_1^2 = 3 \cdot (-2) = -6; & c_{32}^{32} &= a_3^3 \cdot b_2^2 = 3 \cdot (-1) = -3; & c_{33}^{32} &= a_3^3 \cdot b_3^2 = 3 \cdot (-3) = -9; \\ c_{31}^{33} &= a_3^3 \cdot b_1^3 = 3 \cdot 2 = 6; & c_{32}^{33} &= a_3^3 \cdot b_2^3 = 3 \cdot 0 = 0; & c_{33}^{33} &= a_3^3 \cdot b_3^3 = 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

$$(c_{jl}^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & | & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & | & 2 & -2 & 0 & | & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 & | & -1 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 & | & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & | & 2 & -2 & 0 & | & 2 & -6 & 2 \\ \hline 0 & -4 & 4 & | & 2 & -2 & 0 & | & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & | & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & | & 3 & -3 & 0 & | & 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $B \otimes A = D$. Тогда координаты тензора D : $d_{lj}^{ki} = b_l^k \cdot a_j^i$, в матричной записи k – номер строки, i – номер столбца, l – номер слоя (большой строки), j – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Предлагаем читателю выполнить вычисления самостоятельно и сравнить $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Упражнения

2.1. Тензоры заданы матрицами:

тензор A типа $(1,0)$: $(a_i) = (2 \quad -1 \quad 4)$;

тензор B типа $(0,1)$: $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

тензор C типа $(0,1)$: $(c^i) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

тензор D типа $(1,1)$: $(d_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Выполнить действие, если возможно:

- | | | |
|--------------|--------------------|---------------------|
| 1) $A + B$; | 5) $2B$; | 9) $B \otimes C$; |
| 2) $A + C$; | 6) $-3C$; | 10) $C \otimes B$; |
| 3) $B + C$; | 7) $A \otimes B$; | 11) $C \otimes D$; |
| 4) $C + D$; | 8) $B \otimes A$; | 12) $D \otimes C$. |

2.2. Тензоры заданы матрицами:

тензор A типа $(2,0)$: $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

тензор B типа $(1,1)$: $(b_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

тензор C типа $(2,0)$: $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполнить действие, если возможно:

- | | | |
|--------------|--------------------|--------------------|
| 1) $A + B$; | 4) $2B$; | 7) $B \otimes A$; |
| 2) $A + C$; | 5) $-3C$; | 8) $A \otimes C$; |
| 3) $B + C$; | 6) $A \otimes B$; | 9) $C \otimes A$. |

2.3. Выполнить тензорное умножение тензоров A и B :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Свёртывание тензоров

В дальнейшем изложении будем использовать общепринятое *соглашение о немом суммировании*: если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по всем значениям этого индекса, но знак суммы при этом не пишется. К примеру, вместо

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i$$

пишут:

$$x = \alpha_i e^i.$$

Свёртывание тензора (свёртка) применяется к тензору A типа (p, q) , $p \neq 0$, $q \neq 0$, и производится по каким-либо отмеченным верхнему и нижнему индексам. При этом в результате свёртывания получается тензор типа $(p - 1, q - 1)$.

Свёрткой тензора A типа (p, q) , где $p \neq 0$, $q \neq 0$, по k -му нижнему и l -му верхнему индексам называется отображение, которое тензору A ставит в соответствие тензор C типа $(p - 1, q - 1)$:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^{l-1}, u^{l+1}, \dots, u^q) = \\ = A(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, e_r, x_{k+1}, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^{l-1}, e^r, u^{l+1}, \dots, u^q), \end{aligned}$$

где выполняется немое суммирование по индексу r ;

$$e_r, e^r, r = 1, 2, \dots, n - \text{векторы базисов пространств } L_n, L_n^*.$$

Также можно определить свёртку по нескольким парам индексов как композицию свёрток по этим парам индексов. При этом результатом свёртки по s парам индексов тензора A типа (p, q) , где $p \geq s$, $q \geq s$, является тензор типа $(p - s, q - s)$. Если $s = \min\{p, q\}$, то свёртку называют *полной*.

Рассмотрим свёртку в координатной форме. Например, у каждой координаты тензора A отмечен верхний индекс с номером l и нижний с номером k (выполним свёртку тензора A по k -му нижнему и l -му верхнему индексам):

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_l \dots j_q}$$

Произведём суммирование (свёртывание) координат тензора с одинаковыми выделенными индексами. Эта операция и даёт следующие координаты тензора, полученного свёртыванием по верхнему и нижнему индексам с номером l и k :

$$c_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_q} = a_{i_1 i_2 \dots r \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots r \dots j_q}.$$

Здесь использовано соглашение о суммировании, причем суммирование производится по какой-либо паре индексов и даёт в результате тензор с меньшим на два рангом.

Для тензора второго ранга свёртка даёт скаляр, называемый первым главным инвариантом или следом тензора:

$$a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n = I^1(A) = \text{tr}A.$$

Пример 3.1

Дан тензор:

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} k=1 \\ \\ k=2 \end{array} \begin{array}{l} l=1 \\ l=2 \end{array}.$$

Найти свёртки тензора: a_{il}^{ij} , a_{kj}^{ij} , a_{ij}^{ij} , a_{ki}^{ij} , a_{jl}^{ij} , a_{ji}^{ij} .

Решение.

Согласно введенным ранее договоренностям:

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}^{11} & a_{11}^{12} & a_{12}^{11} & a_{12}^{12} \\ a_{11}^{21} & a_{11}^{22} & a_{12}^{21} & a_{12}^{22} \\ \hline a_{21}^{11} & a_{21}^{12} & a_{22}^{11} & a_{22}^{12} \\ a_{21}^{21} & a_{21}^{22} & a_{22}^{21} & a_{22}^{22} \end{array} \right).$$

Найдём свёртки по парам индексов:

$$1) b_l^j = a_{il}^{ij} = a_{1l}^{1j} + a_{2l}^{2j};$$

$$b_1^1 = a_{11}^{11} + a_{21}^{21} = 1 + 5 = 6;$$

$$b_2^1 = a_{12}^{11} + a_{22}^{21} = 3 + 7 = 10;$$

$$b_1^2 = a_{11}^{12} + a_{21}^{22} = 2 + 6 = 8;$$

$$b_2^2 = a_{12}^{12} + a_{22}^{22} = 4 + 8 = 12;$$

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & \boxed{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ -4 & 3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ \textcircled{5} & \boxed{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \end{array} \right) \begin{array}{l} k=1 \\ \\ k=2 \end{array} \begin{array}{l} l=1 \\ l=2 \end{array}$$

$$(b_l^j) = \left(\begin{array}{cc} \textcircled{6} & \textcircled{10} \\ \boxed{8} & \textcircled{12} \end{array} \right);$$

$$f = b_j^j = b_1^1 + b_2^2 = \text{tr}B;$$

$$f = \text{tr} \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = 6 + 12 = 18.$$

$$2) c_k^i = a_{kj}^{ij} = a_{k1}^{i1} + a_{k2}^{i2};$$

$$\textcircled{c_1^1} = a_{11}^{11} + a_{12}^{12} = 1 + 4 = 5;$$

$$\textcircled{c_2^1} = a_{21}^{11} + a_{22}^{12} = -4 - 1 = -5;$$

$$\boxed{c_1^2} = a_{11}^{21} + a_{12}^{22} = -4 - 1 = -5;$$

$$\textcircled{c_2^2} = a_{21}^{21} + a_{22}^{22} = 5 + 8 = 13;$$

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & 2 & 3 & \textcircled{4} \\ \boxed{-4} & 3 & -2 & \boxed{-1} \\ \textcircled{-4} & -3 & -2 & \textcircled{-1} \\ \textcircled{5} & 6 & 7 & \textcircled{8} \end{array} \right) \begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{array}$$

$$(c_k^i) = \begin{pmatrix} \textcircled{5} & \textcircled{-5} \\ \boxed{-5} & \textcircled{13} \end{pmatrix};$$

$$m = c_i^i = c_1^1 + c_2^2 = \text{tr}C;$$

$$m = \text{tr} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = 5 + 13 = 18.$$

$$3) d_i^j = a_{ki}^{ij} = a_{k1}^{1j} + a_{k2}^{2j};$$

$$\textcircled{d_1^1} = a_{11}^{11} + a_{12}^{21} = 1 - 2 = -1;$$

$$\textcircled{d_2^1} = a_{21}^{11} + a_{22}^{21} = -4 + 7 = 3;$$

$$\boxed{d_1^2} = a_{11}^{12} + a_{12}^{22} = 2 - 1 = 1;$$

$$\textcircled{d_2^2} = a_{21}^{12} + a_{22}^{22} = -3 + 8 = 5;$$

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & \boxed{2} & 3 & 4 \\ -4 & 3 & \textcircled{-2} & \boxed{-1} \\ \textcircled{-4} & \textcircled{-3} & -2 & -1 \\ 5 & 6 & \textcircled{7} & \textcircled{8} \end{array} \right) \begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{array}$$

$$(d_i^j) = \begin{pmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{3} \\ \boxed{1} & \textcircled{5} \end{pmatrix};$$

$$s = d_i^i = d_1^1 + d_2^2 = \text{tr}D;$$

$$s = \text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -1 + 5 = 4.$$

$$4) g_l^i = a_{jl}^{ij} = a_{1l}^{i1} + a_{2l}^{i2};$$

$$\boxed{g_1^1} = a_{11}^{11} + a_{21}^{12} = 1 - 3 = -2;$$

$$\textcircled{g_2^1} = a_{12}^{11} + a_{22}^{12} = 3 - 1 = 2;$$

$$\textcircled{g_1^2} = a_{11}^{21} + a_{21}^{22} = -4 + 6 = 2;$$

$$\textcircled{g_2^2} = a_{12}^{21} + a_{22}^{22} = -2 + 8 = 6;$$

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & \textcircled{3} & 4 \\ \textcircled{-4} & 3 & \textcircled{-2} & -1 \\ -4 & \boxed{-3} & -2 & \textcircled{-1} \\ 5 & \textcircled{6} & 7 & \textcircled{8} \end{array} \right) \begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{array}$$

$$(g_l^j) = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{6} \end{pmatrix};$$

$$r = g_j^j = g_1^1 + g_2^2 = \text{tr}G;$$

$$r = \text{tr} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4.$$

Пример 3.2

Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a_k^i) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \quad (b_l^j) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

$$C = A \otimes B; \quad c_{kl}^{ij} = a_k^i \cdot b_l^j.$$

Выполнить все возможные свертки как по одной паре индексов, так и по двум (полные свертки). Проверить соответствие операций:

$$c_{ij}^{ij} = \text{tr}A \cdot \text{tr}B; \quad c_{ji}^{ij} = \text{tr}(A \cdot B).$$

Решение.

C – тензор типа $(2, 2)$, $c_{kl}^{ij} = a_k^i b_l^j$,

где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя, l – номер сечения.

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} c_{11}^{11} = a_1^1 \cdot b_1^1 & c_{11}^{12} = a_1^1 \cdot b_1^2 & c_{12}^{11} = a_1^1 \cdot b_2^1 & c_{12}^{12} = a_1^1 \cdot b_2^2 \\ c_{11}^{21} = a_1^2 \cdot b_1^1 & c_{11}^{22} = a_1^2 \cdot b_1^2 & c_{12}^{21} = a_1^2 \cdot b_2^1 & c_{12}^{22} = a_1^2 \cdot b_2^2 \\ \hline c_{21}^{11} = a_2^1 \cdot b_1^1 & c_{21}^{12} = a_2^1 \cdot b_1^2 & c_{22}^{11} = a_2^1 \cdot b_2^1 & c_{22}^{12} = a_2^1 \cdot b_2^2 \\ c_{21}^{21} = a_2^2 \cdot b_1^1 & c_{21}^{22} = a_2^2 \cdot b_1^2 & c_{22}^{21} = a_2^2 \cdot b_2^1 & c_{22}^{22} = a_2^2 \cdot b_2^2 \end{array} \right) \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \end{matrix}$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 \cdot (-4) & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 4 & 0 \cdot (-3) \\ -5 \cdot (-4) & -5 \cdot (-5) & -5 \cdot 4 & -5 \cdot (-3) \\ \hline 2 \cdot (-4) & 2 \cdot (-5) & 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-3) \\ -4 \cdot (-4) & -4 \cdot (-5) & -4 \cdot 4 & -4 \cdot (-3) \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array} \right).$$

Найдем свёртки по одной паре индексов:

$$1) d_l^j = c_{il}^{ij} = c_{1l}^{1j} + c_{2l}^{2j};$$

$$\textcircled{d}_1^1 = c_{i1}^{i1} = c_{11}^{11} + c_{21}^{21} = 0 + 16 = 16;$$

$$\textcircled{d}_2^1 = c_{i2}^{i1} = c_{12}^{11} + c_{22}^{21} = 0 - 16 = -16;$$

$$\boxed{d}_1^2 = c_{i1}^{i2} = c_{11}^{12} + c_{21}^{22} = 0 + 20 = 20;$$

$$\textcircled{d}_2^2 = c_{i2}^{i2} = c_{12}^{12} + c_{22}^{22} = 0 + 12 = 12;$$

$$(d_l^j) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{0} & \boxed{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ \textcircled{16} & \boxed{20} & \textcircled{-16} & \textcircled{12} \end{array} \right) \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{matrix}$$

$$2) f_k^i = c_{kj}^{ij} = c_{k1}^{i1} + c_{k2}^{i2};$$

$$\textcircled{f}_1^1 = c_{1j}^{1j} = c_{11}^{11} + c_{12}^{12} = 0 + 0 = 0;$$

$$\textcircled{f}_2^1 = c_{2j}^{1j} = c_{21}^{11} + c_{22}^{12} = -8 - 6 = -14;$$

$$\boxed{f}_1^2 = c_{1j}^{2j} = c_{11}^{21} + c_{12}^{22} = 20 + 15 = 35;$$

$$\textcircled{f}_2^2 = c_{2j}^{2j} = c_{21}^{21} + c_{22}^{22} = 16 + 12 = 28;$$

$$(f_k^i) = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 35 & 28 \end{pmatrix}.$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{0} & 0 & 0 & \textcircled{0} \\ \boxed{20} & 25 & -20 & \boxed{15} \\ \hline \textcircled{-8} & -10 & 8 & \textcircled{-6} \\ \textcircled{16} & 20 & -16 & \textcircled{12} \end{array} \right) \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{matrix}$$

$$3) s_k^j = c_{ki}^{ij} = c_{k1}^{1j} + c_{k2}^{2j};$$

$$\textcircled{s}_1^1 = c_{1i}^{i1} = c_{11}^{11} + c_{12}^{21} = 0 - 20 = -20;$$

$$\textcircled{s}_2^1 = c_{2i}^{i1} = c_{21}^{11} + c_{22}^{21} = -8 - 16 = -24;$$

$$\boxed{s}_1^2 = c_{1i}^{i2} = c_{11}^{12} + c_{12}^{22} = 0 + 15 = 15;$$

$$\textcircled{s}_2^2 = c_{2i}^{i2} = c_{21}^{12} + c_{22}^{22} = -10 + 12 = 2;$$

$$(s_k^j) = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -24 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 20 & 25 & \textcircled{-20} & \boxed{15} \\ \hline \textcircled{-8} & \textcircled{-10} & 8 & -6 \\ \textcircled{16} & 20 & \textcircled{-16} & \textcircled{12} \end{array} \right) \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{matrix}$$

$$4) t_l^i = c_{jl}^{ij} = c_{1l}^{i1} + c_{2l}^{i2};$$

$$\textcircled{t}_1^1 = c_{j1}^{1j} = c_{11}^{11} + c_{21}^{12} = 0 - 10 = -10;$$

$$\textcircled{t}_2^1 = c_{j2}^{1j} = c_{12}^{11} + c_{21}^{12} = 0 - 6 = -6;$$

$$\boxed{t}_1^2 = c_{j1}^{2j} = c_{11}^{21} + c_{21}^{22} = 20 + 20 = 40;$$

$$\textcircled{t}_2^2 = c_{j2}^{2j} = c_{12}^{21} + c_{22}^{22} = -20 + 12 = -8;$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{0} & 0 & \textcircled{0} & 0 \\ \boxed{20} & 25 & \textcircled{-20} & 15 \\ \hline -8 & \textcircled{-10} & 8 & \textcircled{-6} \\ \textcircled{16} & \boxed{20} & -16 & \textcircled{12} \end{array} \right) \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \\ l=1 \\ l=2 \end{matrix}$$

$$(t_i^i) = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 40 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найдем полные свёртки.

$$5) m = c_{ij}^{ij} = d_j^j = d_1^1 + d_2^2 = 16 + 12 = 28 \text{ или} \\ m = c_{ij}^{ij} = f_i^i = f_1^1 + f_2^2 = 0 + 28 = 28.$$

Далее найдем произведение следов матриц A и B :

$$trA \cdot trB = tr \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot tr \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = (0 - 4) \cdot (-4 - 3) = -4 \cdot (-7) = 28.$$

Таким образом, убеждаемся, что в данном случае: $m = c_{ij}^{ij} = trA \cdot trB$.

$$6) r = c_{ji}^{ij} = s_j^j = s_1^1 + s_2^2 = -20 + 2 = -18 \text{ или} \\ r = c_{ji}^{ij} = t_i^i = t_1^1 + t_2^2 = -10 - 8 = -18.$$

Далее найдем след матрицы $A \cdot B$:

$$tr(A \cdot B) = tr \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \right) = tr \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 40 & -8 \end{pmatrix} = -10 - 8 = -18.$$

Таким образом, убеждаемся, что в данном случае: $r = c_{ji}^{ij} = tr(A \cdot B)$.

Пример 3.3

Тензоры A и X заданы матрицами:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad (x^k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор $B = A \otimes X$, $b_j^{ik} = a_j^i \cdot x^k$ и его свёртки:

$$b_j^{ij} = c^i; \quad b_i^{ik} = d^k.$$

Проверить, что эти действия соответствуют матричным операциям:

$$(a_j^i) \cdot (x^k) = (c^i); \quad (trA) \cdot (x^k) = (d^k).$$

Решение.

Умножая тензоры A типа $(1,1)$ и X типа $(1,0)$, получим тензор B типа $(1,2)$:

$$(b_j^{ik}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} k=1 & k=2 & k=3 \\ b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} \\ b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} \\ b_1^{31} & b_1^{32} & b_1^{33} \end{matrix} & \begin{matrix} k=1 & k=2 & k=3 \\ b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} \\ b_2^{21} & b_2^{22} & b_2^{23} \\ b_2^{31} & b_2^{32} & b_2^{33} \end{matrix} & \begin{matrix} k=1 & k=2 & k=3 \\ b_3^{11} & b_3^{12} & b_3^{13} \\ b_3^{21} & b_3^{22} & b_3^{23} \\ b_3^{31} & b_3^{32} & b_3^{33} \end{matrix} \\ j=1 & j=2 & j=3 \end{pmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \end{matrix}$$

i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя.

1-я строка

$$\begin{aligned} b_1^{11} &= a_1^1 \cdot x^1 = 4 \cdot 3 = 12; & b_1^{12} &= a_1^1 \cdot x^2 = 4 \cdot 2 = 8; & b_1^{13} &= a_1^1 \cdot x^3 = 4 \cdot (-2) = -8; \\ b_2^{11} &= a_2^1 \cdot x^1 = (-1) \cdot 3 = -3; & b_2^{12} &= a_2^1 \cdot x^2 = (-1) \cdot 2 = -2; & b_2^{13} &= a_2^1 \cdot x^3 = (-1) \cdot (-2) = 2; \\ b_3^{11} &= a_3^1 \cdot x^1 = (-2) \cdot 3 = -6; & b_3^{12} &= a_3^1 \cdot x^2 = (-2) \cdot 2 = -4; & b_3^{13} &= a_3^1 \cdot x^3 = (-2) \cdot (-2) = 4. \end{aligned}$$

2-я строка

$$\begin{aligned} b_1^{21} &= a_1^2 \cdot x^1 = 0; & b_1^{22} &= a_1^2 \cdot x^2 = 0; & b_1^{23} &= a_1^2 \cdot x^3 = 0; \\ b_2^{21} &= a_2^2 \cdot x^1 = (-3) \cdot 3 = -9; & b_2^{22} &= a_2^2 \cdot x^2 = (-3) \cdot 2 = -6; & b_2^{23} &= a_2^2 \cdot x^3 = (-3) \cdot (-2) = 6; \\ b_3^{21} &= a_3^2 \cdot x^1 = (-2) \cdot 3 = -6; & b_3^{22} &= a_3^2 \cdot x^2 = (-2) \cdot 2 = -4; & b_3^{23} &= a_3^2 \cdot x^3 = (-2) \cdot (-2) = 4. \end{aligned}$$

3-я строка

$$\begin{aligned} b_1^{31} &= a_1^3 \cdot x^1 = 0 \cdot 3 = 0; & b_1^{32} &= a_1^3 \cdot x^2 = 0 \cdot 2 = 0; & b_1^{33} &= a_1^3 \cdot x^3 = 0 \cdot (-2) = 0; \\ b_2^{31} &= a_2^3 \cdot x^1 = (-1) \cdot 3 = -3; & b_2^{32} &= a_2^3 \cdot x^2 = (-1) \cdot 2 = -2; & b_2^{33} &= a_2^3 \cdot x^3 = (-1) \cdot (-2) = 2; \\ b_3^{31} &= a_3^3 \cdot x^1 = (-5) \cdot 3 = -15; & b_3^{32} &= a_3^3 \cdot x^2 = (-5) \cdot 2 = -10; & b_3^{33} &= a_3^3 \cdot x^3 = (-5) \cdot (-2) = 10. \end{aligned}$$

$$(b_j^{ik}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 8 & -8 & -3 & -2 & 2 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & 6 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -15 & -10 & 10 \end{array} \right).$$

Выполним свёртку:

$$c^i = b_j^{ij}; \quad (b_j^{ik}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{12} & 8 & -8 & -3 & \boxed{-2} & 2 & -6 & -4 & \boxed{4} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & -9 & \boxed{-6} & 6 & -6 & -4 & \boxed{4} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & -3 & \boxed{-2} & 2 & -15 & -10 & \boxed{10} \end{array} \right);$$

$$\boxed{c^1} = b_1^{11} + b_2^{12} + b_3^{13} = 12 - 2 + 4 = 14;$$

$$\boxed{c^2} = b_1^{21} + b_2^{22} + b_3^{23} = 0 - 6 + 4 = -2;$$

$$\boxed{c^3} = b_1^{31} + b_2^{32} + b_3^{33} = 0 - 2 + 10 = 8.$$

$$\text{В итоге: } (c^i) = (b_j^{ij}) = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что матрица тензора равна произведению матриц, задающих тензоры:

$$(a_j^i) \cdot (x^k) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = (c^i).$$

Найдем свёртку:

$$d^k = b_i^{ik}; \quad (b_j^{ik}) = \begin{pmatrix} \textcircled{12} & \boxed{8} & \textcircled{-8} & -3 & -2 & 2 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-9} & \boxed{-6} & \textcircled{6} & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & \textcircled{-15} & \boxed{-10} & \textcircled{10} \end{pmatrix};$$

$$\textcircled{d^1} = b_1^{11} + b_2^{21} + b_3^{31} = 12 - 9 - 15 = -12;$$

$$\boxed{d^2} = b_1^{12} + b_2^{22} + b_3^{32} = 8 - 6 - 10 = -8;$$

$$\textcircled{d^3} = b_1^{13} + b_2^{23} + b_3^{33} = -8 + 6 - 10 = 8.$$

$$\text{В итоге: } (d^k) = (b_i^{ik}) = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что полученная свёртка равна произведению следа тензора A и матрицы тензора X :

$$\text{tr}A \cdot x = (4 - 3 - 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = (d^k).$$

Упражнения

3.1. Найти все возможные свёртки тензора A типа $(1, 1)$, заданного матрицей:

$$1) (a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) (a_j^i) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.2. Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b^k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найти все возможные свёртки тензора $C = A \otimes B$.

3.3. Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \quad (b_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти все возможные свёртки тензора $C = A \otimes B$ как по одной паре индексов, так и по двум (полные свёртки).

3.4. Тензор A типа $(3, 3)$ задан в \mathbb{R}^2 . Его компоненты a_{lmn}^{ijk} не равны 0 тогда и только тогда, когда все верхние индексы совпадают с соответствующими нижними: $i = l, j = m, k = n$. При этом:

$$a_{111}^{111} = 2, a_{112}^{112} = -1, a_{121}^{121} = 0, a_{122}^{122} = 3,$$

$$a_{211}^{211} = 1, a_{212}^{212} = 4, a_{221}^{221} = -2, a_{222}^{222} = 5.$$

Остальные компоненты – нулевые.

- 1) Сколько различных полных свёрток можно образовать из тензора A ?
- 2) Вычислите полную свёртку a_{ijk}^{ijk} .
- 3) Вычислите полную свёртку a_{jik}^{ijk} .
- 4) Совпадают ли результаты пунктов 2 и 3? Почему?

4. Изменение координат тензора при замене базиса

Рассмотрим в L_n и L_n^* по два базиса – старый и новый:

$$L_n : \{e_i\}_{i=1}^n, \{e'_k\}_{k=1}^n,$$

$$L_n^* : \{e^j\}_{j=1}^n, \{e'^l\}_{l=1}^n.$$

Зададим матрицу перехода:

$T = (\tau_k^i)$ – из старого в новый, и $S = T^{-1} = (\sigma_j^l)$ – из нового в старый:

$$\begin{aligned} e'_k &= e_j \tau_k^j, \\ e'^l &= \sigma_j^l e^j. \end{aligned}$$

Координаты тензора в новом базисе:

$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Таким образом, тензор – это многокомпонентный объект, коэффициенты которого преобразуются по данному закону.

Пример 4.1

Преобразовать компоненты тензора C , заданного матрицей:

$$(c_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 - 3e_2; \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2. \end{cases}$$

Решение.

Координаты тензора C в базисе $\{e_1, e_2\}$:

$$(c_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right) (c_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} c_{11}^1 & c_{21}^1 & c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{21}^2 & c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{array} \right);$$

координаты тензора C в базисе $\{e'_1, e'_2\}$:

$$c'^{i'j'k'} = \left(\begin{array}{cc|cc} c'^1_{11} & c'^1_{21} & c'^1_{12} & c'^1_{22} \\ c'^2_{11} & c'^2_{21} & c'^2_{12} & c'^2_{22} \end{array} \right).$$

Приведённую ранее формулу:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q},$$

запишем для тензора C типа $(2, 1)$:

$$c_{k_1 k_2}^l = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \sigma_j^l c_{i_1 i_2}^j,$$

где $T = (\tau_k^i)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$,
 $S = T^{-1} = (\sigma_j^l)$.

Переименуем в полученной формуле индексы, чтобы привести в соответствие с исходными данными (делать это совсем не обязательно!):

$$c'_{j'k'}^{i'} = \tau_{j'}^j \tau_{k'}^k \sigma_i^{i'} c_{jk}^i,$$

где $T = (\tau_{k'}^k)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$,
 $S = T^{-1} = (\sigma_i^{i'})$:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В формуле $c'_{j'k'}^{i'} = \tau_{j'}^j \tau_{k'}^k \sigma_i^{i'} c_{jk}^i$ предполагается немое суммирование по индексам i, j и k .

Каждый элемент новой матрицы является суммой восьми слагаемых (размерность пространства: $n = 2$; индексов 3; $2^3 = 8$).

Распишем элементы новой матрицы:

$$\begin{aligned} c'_{j'k'}^{i'} &= \tau_{j'}^j \tau_{k'}^k \sigma_i^{i'} c_{jk}^i = \\ &\quad \text{по } i \\ &= \tau_{j'}^j \tau_{k'}^k \sigma_1^{i'} c_{jk}^1 + \tau_{j'}^j \tau_{k'}^k \sigma_2^{i'} c_{jk}^2 = \\ &\quad \text{по } j \\ &= \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^k \sigma_1^{i'} c_{1k}^1 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^k \sigma_1^{i'} c_{2k}^1 + \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^k \sigma_2^{i'} c_{1k}^2 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^k \sigma_2^{i'} c_{2k}^2 = \\ &\quad \text{по } k \\ &= \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^1 \sigma_1^{i'} c_{11}^1 + \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^2 \sigma_1^{i'} c_{12}^1 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^1 \sigma_1^{i'} c_{21}^1 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^2 \sigma_1^{i'} c_{22}^1 + \\ &\quad + \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^1 \sigma_2^{i'} c_{11}^2 + \tau_{j'}^1 \tau_{k'}^2 \sigma_2^{i'} c_{12}^2 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^1 \sigma_2^{i'} c_{21}^2 + \tau_{j'}^2 \tau_{k'}^2 \sigma_2^{i'} c_{22}^2. \end{aligned}$$

Приведём расчёт одного элемента:

$$\begin{aligned}
 c'_{21} &= \tau_2^j \tau_1^k \sigma_i^1 c_{jk}^i = \\
 &= \tau_2^1 \tau_1^1 \sigma_1^1 c_{11}^1 + \tau_2^1 \tau_1^1 \sigma_2^1 c_{11}^2 + \tau_2^1 \tau_1^2 \sigma_1^1 c_{12}^1 + \tau_2^1 \tau_1^2 \sigma_2^1 c_{12}^2 + \\
 &\quad + \tau_2^2 \tau_1^1 \sigma_1^1 c_{21}^1 + \tau_2^2 \tau_1^1 \sigma_2^1 c_{21}^2 + \tau_2^2 \tau_1^2 \sigma_1^1 c_{22}^1 + \tau_2^2 \tau_1^2 \sigma_2^1 c_{22}^2; \\
 c'_{21} &= (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 0 + \\
 &\quad + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 2 = \\
 &= 4 - 2 - 18 + 0 + 16 + 16 - 36 - 12 = -32.
 \end{aligned}$$

Пример 4.2

Преобразовать компоненты тензоров A и B , заданных матрицами:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, (b_j^i) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3; \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3; \\ e'_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Убедиться, что данные законы преобразования соответствуют матричным операциям:

$$A' = T^T A T, B' = T^{-1} B T,$$

где T – матрица перехода.

Решение.

Приведённую ранее формулу:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q},$$

запишем для тензора A типа $(2, 0)$:

$$a'_{k_1 k_2} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} a_{i_1 i_2}, \quad k_1, k_2, i_1, i_2 = 1, 2, 3,$$

где $T = (\tau_k^i)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом требуют вычисления 9 координат тензора. Вычислим две из них:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \tau_1^{i_1} \tau_1^{i_2} a_{i_1 i_2} = \\ &= \tau_1^1 \tau_1^1 a_{11} + \tau_1^1 \tau_1^2 a_{12} + \tau_1^1 \tau_1^3 a_{13} + \\ &+ \tau_1^2 \tau_1^1 a_{21} + \tau_1^2 \tau_1^2 a_{22} + \tau_1^2 \tau_1^3 a_{23} + \\ &+ \tau_1^3 \tau_1^1 a_{31} + \tau_1^3 \tau_1^2 a_{32} + \tau_1^3 \tau_1^3 a_{33}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{11} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-4) + \\ &+ 0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 2 + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = \\ &= 1 - 4 - 3 - 1 = -7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{23} &= \tau_2^{i_1} \tau_3^{i_2} a_{i_1 i_2} = \\ &= \tau_2^1 \tau_3^1 a_{11} + \tau_2^1 \tau_3^2 a_{12} + \tau_2^1 \tau_3^3 a_{13} + \\ &+ \tau_2^2 \tau_3^1 a_{21} + \tau_2^2 \tau_3^2 a_{22} + \tau_2^2 \tau_3^3 a_{23} + \\ &+ \tau_2^3 \tau_3^1 a_{31} + \tau_2^3 \tau_3^2 a_{32} + \tau_2^3 \tau_3^3 a_{33}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{23} &= -1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot (-4) + \\ &+ 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \\ &+ 1 \cdot 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) = \\ &= -2 + 8 + 4 + 8 - 6 - 1 - 2 = 9. \end{aligned}$$

Выполним матричные вычисления:

$$\begin{aligned} A' &= T^T A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -1 & -15 \\ 3 & 5 & 9 \\ -16 & 0 & -36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элементы этой матрицы $a'_{11} = -7$, $a'_{23} = 9$, что соответствует результатам, полученным по формулам преобразования координат тензора.

Для тензора B типа $(1, 1)$ формула преобразования координат имеет вид:

$$b_k^l = \tau_k^i \sigma_j^l b_i^j, \quad k, l, i, j = 1, 2, 3,$$

где $T = (\tau_k^i)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$,
 $S = T^{-1} = (\sigma_j^l)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом требуют вычисления 9 координат тензора. Вычислим две из них:

$$\begin{aligned} b_1^{\prime 1} &= \tau_1^i \sigma_j^1 b_i^j = \\ &= \tau_1^1 \sigma_1^1 b_1^1 + \tau_1^1 \sigma_2^1 b_1^2 + \tau_1^1 \sigma_3^1 b_1^3 + \\ &+ \tau_1^2 \sigma_1^1 b_2^1 + \tau_1^2 \sigma_2^1 b_2^2 + \tau_1^2 \sigma_3^1 b_2^3 + \\ &+ \tau_1^3 \sigma_1^1 b_3^1 + \tau_1^3 \sigma_2^1 b_3^2 + \tau_1^3 \sigma_3^1 b_3^3; \\ b_1^{\prime 1} &= 1 \cdot 2,5 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1,5) \cdot 4 + \\ &+ 0 \cdot 2,5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1,5) \cdot (-2) + \\ &+ 1 \cdot 2,5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1,5) \cdot 0 = \\ &= -5 + 2 - 6 + 5 + 6 = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3^{\prime 2} &= \tau_3^i \sigma_j^2 b_i^j = \\ &= \tau_3^1 \sigma_1^2 b_1^1 + \tau_3^1 \sigma_2^2 b_1^2 + \tau_3^1 \sigma_3^2 b_1^3 + \\ &+ \tau_3^2 \sigma_1^2 b_2^1 + \tau_3^2 \sigma_2^2 b_2^2 + \tau_3^2 \sigma_3^2 b_2^3 + \\ &+ \tau_3^3 \sigma_1^2 b_3^1 + \tau_3^3 \sigma_2^2 b_3^2 + \tau_3^3 \sigma_3^2 b_3^3; \\ b_3^{\prime 2} &= 2 \cdot (-0,5) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 4 + \\ &+ (-1) \cdot (-0,5) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0,5 \cdot (-2) + \\ &+ 2 \cdot (-0,5) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0 = \\ &= 2 + 4 + 0,5 + 1 - 2 = 5,5. \end{aligned}$$

Выполним матричные вычисления:

$$\begin{aligned} B' &= T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 31 & -1,5 \\ 2 & -7 & 5,5 \\ 0 & -16 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элементы этой матрицы $b_1^{\prime 1} = 2$, $b_3^{\prime 2} = 5,5$. Такие же результаты получены по формулам преобразования координат тензора.

Пример 4.3

Даны линейная форма:

$$A(x_1) = 2 \xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3,$$

и билинейная форма:

$$B(x_1, x_2) = \xi_1^1 \xi_2^1 + 2 \xi_1^2 \xi_2^3 - 2 \xi_1^2 \xi_2^1 - \xi_1^2 \xi_2^2 - 3 \xi_1^2 \xi_2^1 + 3 \xi_1^3 \xi_2^1 + 4 \xi_1^3 \xi_2^3,$$

где

$$x_1 = (\xi_1^1 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1^3)^T, x_2 = (\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3)^T.$$

Найти их матричное представление (a'_i) и (b'_{ij}) в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3; \\ e'_2 = e_2 + e_3; \\ e'_3 = e_1 + e_3. \end{cases}$$

Решение.

Линейная форма $A(x_1)$ является тензором типа $(1, 0)$ и имеет матрицу:

$$(a_i) = (2 \quad -1 \quad 1).$$

Билинейная форма $B(x_1, x_2)$ является тензором типа $(2, 0)$, её матрица:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем матричное представление данных форм (a'_i) и (b'_{ij}) в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Матрица перехода к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ и обратная ей матрица имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейной формы A в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ имеет вид:

$$(a'_i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица билинейной формы B в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ имеет вид:

$$(b'_{ij}) = B' = T^T \cdot B \cdot T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 10 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.4

Дан базис пространства \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} e'_1 = (1 & 1 & 1)^T; \\ e'_2 = (0 & 1 & 1)^T; \\ e'_3 = (1 & 0 & 1)^T. \end{cases}$$

Найти сопряженный ему базис (f'^1, f'^2, f'^3) и матричное представление P_i тензоров $f'^i \otimes e'_i$, $i = 1, 2, 3$.

Убедиться, что выполняются свойства:

$$P_1 + P_2 + P_3 = E, P_i^2 = P_i, P_i P_j = O, i \neq j.$$

Решение.

1) Найдем сопряженный базис. Составим матрицу перехода от стандартного базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e'_1, e'_2, e'_3) и найдем обратную к ней матрицу:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы T^{-1} являются векторами сопряженного базиса:

$$f'^1 = (1 \quad 1 \quad -1), f'^2 = (-1 \quad 0 \quad 1), f'^3 = (0 \quad -1 \quad 1).$$

2) Найдем матричное представление тензоров:

$$f'^1 \otimes e'_1 = P_1, f'^2 \otimes e'_2 = P_2, f'^3 \otimes e'_3 = P_3.$$

$$f'^1 \otimes e'_1 = (1, \quad 1, \quad -1) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_1;$$

$$f'^2 \otimes e'_2 = (-1, \quad 0, \quad 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$f'^3 \otimes e'_3 = (0, \quad -1, \quad 1) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3.$$

3) Проверим выполнение свойств, приведенных в задании:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_1;$$

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$P_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3;$$

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$P_1 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$P_2 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Упражнения

4.1. В базисе e_1, e_2 пространства \mathbb{R}^2 заданы тензоры:

1) вектор $(v^i) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) ковектор $(a_i) = (3 \quad -1)$;

3) билинейная форма $B: (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) тензор $C: (c^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) линейный оператор $A: (a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти компоненты этих тензоров в базисе e'_1, e'_2 , где:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2; \\ e'_2 = 2e_1 + 3e_2. \end{cases}$$

4.2. В базисе e_1, e_2, e_3 пространства \mathbb{R}^3 заданы тензоры:

1) вектор $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) ковектор $\alpha = (2 \ 0 \ -1)$;

3) билинейная форма $B: (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

4) тензор $C: (c^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

5) линейный оператор $A: (a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти компоненты этих тензоров в базисе e'_1, e'_2, e'_3 , где:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - 2e_2 + e_3; \\ e'_2 = e_2 + e_3; \\ e'_3 = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3. \end{cases}$$

4.3. Докажите, что след тензора типа $(1, 1)$ инвариантен относительно замены базиса.

4.4. В базисе e_1, e_2 пространства \mathbb{R}^2 все компоненты тензора A типа $(1, 2)$ равны 1. Найти компоненту a'^{12}_1 тензора A в базисе e'_1, e'_2 , где:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2; \\ e'_2 = 2e_1 + 5e_2. \end{cases}$$

4.5. В базисе e_1, e_2, e_3 пространства \mathbb{R}^3 компоненты тензора A типа $(2, 3)$ имеют вид: $a^{ijk}_{lm} = 2m$. Найти компоненту a'^{123}_{31} тензора A в базисе e'_1, e'_2, e'_3 , где:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 - 2e_3; \\ e'_2 = e_2 + 4e_3; \\ e'_3 = -e_3. \end{cases}$$

5. Транспонирование тензоров

Транспонирование тензоров определим через транспонирование m -мерной матрицы.

Пусть $(a_{i_1 i_2 \dots i_m})$ – m -мерная матрица.

Двумерным сечением, соответствующим i_k и i_l , называется двумерная матрица, полученная из $(a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_l \dots i_m})$ фиксированием всех индексов, кроме i_k и i_l .

Транспонированием m -мерной матрицы $(a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_l \dots i_m})$ по индексам i_k и i_l называется такая перестановка элементов этой матрицы, при которой все двумерные слои, отвечающие этим индексам, транспонируются обычным образом:

$$(a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_l \dots i_m})^{T_{i_k i_l}} = a_{i_1 i_2 \dots i_l \dots i_k \dots i_m}.$$

Транспонировать можно только по паре нижних или только по паре верхних индексов.

Для тензора A типа $(3, 0)$ с компонентами a_{ijk} с помощью транспонирования можно получить три других тензора B, C, D с компонентами:

$$\begin{array}{lll} b_{ijk} = a_{jik}; & c_{ijk} = a_{kji}; & d_{ijk} = a_{ikj}. \\ ij \rightarrow ji & ik \rightarrow ki & jk \rightarrow kj \end{array}$$

Пример 5.1

Тензор A имеет матричный вид:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array} \right).$$

Найти тензор B , полученный из тензора A транспонированием:

$$(b_{ijk}) = (a_{ijk})^{T_{jk}} = (a_{ikj}).$$

Решение.

Для $b_{ijk} = a_{ikj}$ нужно зафиксировать неизменяющийся индекс, здесь это i . Зафиксируем первую строку $i = 1$:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{2} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{4} & \textcircled{6} & \textcircled{5} \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array} \right).$$

Составим матрицу:

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{7} & \textcircled{4} \\ \boxed{3} & \boxed{8} & \boxed{6} \\ \textcircled{2} & \textcircled{9} & \textcircled{5} \end{pmatrix}.$$

Теперь эту матрицу транспонируем:

$$(a_{1kj}) = (a_{1jk})^T = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{2} \\ \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} \\ \textcircled{4} & \textcircled{6} & \textcircled{5} \end{pmatrix} = (b_{1jk}).$$

Для $i = 2$:

$$(a_{2jk}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a_{2kj}) = (a_{2jk})^T = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (b_{2jk}).$$

Для $i = 3$:

$$(a_{3jk}) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a_{3kj}) = (a_{3jk})^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} = (b_{3jk}).$$

Объединяя результаты, получаем матрицу:

$$(b_{ijk}) = (a_{ikj}) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 7 & 4 & | & \textcircled{3} & 8 & 6 & | & \textcircled{2} & 9 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & | & 7 & 1 & 4 & | & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & | & 2 & 6 & 9 & | & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2

Тензор A типа $(0, 3)$ имеет матричный вид:

$$(a^{ijk}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & | & 0 & 2 & -1 & | & 5 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & | & 2 & 4 & 0 & | & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & | & -3 & 3 & 7 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор B , полученный из тензора A транспонированием:

$$(b^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{ik}} = (a^{kji}).$$

Решение.

Зафиксируем j :

Для $j = 1$:

$$(\alpha^{i1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i1k}) = (a^{k1i}) = (a^{i1k})^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 2$:

$$(a^{i2k}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i2k}) = (a^{k2i}) = (a^{i2k})^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 3$:

$$(a^{i3k}) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i3k}) = (a^{k3i}) = (a^{i3k})^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединяя результаты, получаем матрицу:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 7 & 3 & -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Пример 5.3

Пусть тензоры A типа $(0, 1)$ и B типа $(0, 1)$. Сравнить матричный вид тензорных произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

$C = A \otimes B$ – тензор типа $(0, 2)$; $D = B \otimes A$ – тензор типа $(0, 2)$.

$$(c^{ij}) = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}; \quad (d^{ji}) = \begin{pmatrix} b^1 a^1 & b^1 a^2 & b^1 a^3 \\ b^2 a^1 & b^2 a^2 & b^2 a^3 \\ b^3 a^1 & b^3 a^2 & b^3 a^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая результаты, делаем вывод: $(d^{ji}) = (c^{ij})^T$.

Пример 5.4

Тензор A имеет матричный вид:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{array} \right).$$

Найти тензор B , полученный из тензора A транспонированием:

$$(b_{ijk}) = (a_{ijk})^{T_{jk}} = (a_{ikj}).$$

Решение.

Зафиксируем i .

Для $i = 1$:

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (a_{1kj}) = (a_{1jk})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для $i = 2$:

$$(a_{2jk}) = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (a_{2kj}) = (a_{2jk})^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $i = 3$:

$$(a_{3jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (a_{3kj}) = (a_{3jk})^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$B = (b_{ijk}) = (a_{ijk})^{T_{jk}} = (a_{ikj}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right).$$

Пример 5.5

Тензор A имеет матричный вид:

$$(\alpha^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 & 3 & 7 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Найти тензор B , полученный из тензора A транспонированием:

$$(b^{ijk}) = (\alpha^{ijk})^{T_{ik}} = (\alpha^{kji}).$$

Решение.

Зафиксируем j .

Для $j = 1$:

$$(a^{i1k}) = \begin{pmatrix} a^{111} & a^{112} & a^{113} \\ a^{211} & a^{212} & a^{213} \\ a^{311} & a^{312} & a^{313} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i1k}) = (a^{k1i}) = (a^{i1k})^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 2$:

$$(a^{i2k}) = \begin{pmatrix} a^{121} & a^{122} & a^{123} \\ a^{221} & a^{222} & a^{223} \\ a^{321} & a^{322} & a^{323} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i2k}) = (a^{k2i}) = (a^{i2k})^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 3$:

$$(a^{i3k}) = \begin{pmatrix} a^{131} & a^{132} & a^{133} \\ a^{231} & a^{232} & a^{233} \\ a^{331} & a^{332} & a^{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b^{i3k}) = (a^{k3i}) = (a^{i3k})^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = (b^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{ik}} = (a^{kji}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} -1 & 5 & 2 \\ -3 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Упражнения

5.1. Найти матрицы всех тензоров, получаемых транспонированием:

1) из тензора A , заданного матрицей:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ & & 7 \end{array} \right);$$

2) из тензора B , заданного матрицей

$$(b_k^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ & & 7 \end{array} \right);$$

3) из тензора C , заданного матрицей

$$(c_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ & & 7 \end{array} \right).$$

5.2. Тензор A имеет матричный вид:

$$(\alpha^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right).$$

Найти:

1) тензор B , полученный из тензора A транспонированием:

$$(b^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{ij}} = (a^{jik});$$

2) тензор C , полученный из тензора A транспонированием:

$$(c^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{jk}} = (a^{ikj});$$

3) тензор D , полученный из тензора A транспонированием:

$$(d^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{ik}} = (a^{kji}).$$

5.3. Найти матрицы всех тензоров, получаемых транспонированием:

1) из тензора A , заданного матрицей:

$$(a_{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 13 & 14 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array} \right);$$

2) из тензора B , заданного матрицей:

$$(b_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 13 & 14 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array} \right).$$

6. Симметрирование и альтернирование тензоров

Тензор A с координатами $a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ называется **симметричным по нижним индексам** i_m и i_n , если при перестановке этих индексов координаты тензора A не меняют своего значения, то есть:

$$a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = a_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Записанное условие называется **условием симметрии** тензора A по нижним индексам i_m и i_n .

Тензор A называется **кососимметричным по нижним индексам** i_m и i_n , если при перестановке этих индексов справедливо соотношение

$$a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = -a_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Это условие называется **условием кососимметрии** тензора A по нижним индексам i_m и i_n .

Аналогично вводится понятие симметрии и кососимметрии тензора по двум верхним индексам.

Условие симметрии и кососимметрии выполняется для тензора в любой системе координат.

Также можно рассмотреть понятия симметричного и кососимметричного тензора.

Пусть S_p – группа перестановок на p элементах, $\sigma \in S_p$.

Тензор A типа $(p, 0)$ с координатами $a_{i_1 \dots i_p}$ называется **симметричным**, если при любой перестановке индексов $i_1 \dots i_p$ координаты тензора A не меняют своего значения, то есть:

$$a_{i_1 \dots i_p} = a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}.$$

Тензор A типа $(p, 0)$ с координатами $a_{i_1 \dots i_p}$ называется **кососимметричным**, если для любой перестановки индексов $i_1 \dots i_p$ имеет место равенство:

$$a_{i_1 \dots i_p} = (-1)^\sigma a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)},$$

где $(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ – чётная;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ – нечётная.} \end{cases}$

Выполнение операции симметрирования

Пусть A – тензор типа (p, q) с координатами

$$a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Переставим у каждой координаты нижние индексы с номерами i_m и i_n .
Затем построим тензор с координатами:

$$\frac{1}{2} \left(a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} + a_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \right).$$

Это и есть операция симметрирования тензора A по нижним индексам с номерами i_m и i_n .

Координаты нового тензора обычно обозначаются символами:

$$a_{i_1 \dots (i_m | \dots | i_n) \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = a_{(m,n)}.$$

Здесь индексы между знаками $|$ и $|$ не учитываются в симметрировании.

Операция симметрирования по верхним индексам определяется аналогично и обозначается $a^{(m,n)}$.

В результате симметрирования тензора A типа (p, q) по p нижним индексам получается тензор U , компоненты которого вычисляются по формуле:

$$u_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = a_{(i_1 \dots i_p)}^{k_1 \dots k_q} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}^{k_1 \dots k_q}.$$

(суммирование по множеству перестановок $(i_1 \dots i_p)$).

К примеру, для тензора A типа $(3,0)$:

- симметрирование по двум индексам проводится по формулам:

$$a_{(ij)k} = \frac{1}{2} (a_{ijk} + a_{jik}); \quad a_{i(jk)} = \frac{1}{2} (a_{ijk} + a_{ikj}); \quad a_{(i|j|k)} = \frac{1}{2} (a_{ijk} + a_{kji});$$

- симметрирование по трём индексам:

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!} (a_{ijk} + a_{jik} + a_{jki} + a_{kji} + a_{kij} + a_{ikj}).$$

Выполнение операции альтернирования

Операция альтернирования тензора A по нижним индексам с номерами i_m и i_n производится следующим образом.

У каждой координаты тензора A переставляются в нижние индексы с номерами i_m и i_n , и затем строится тензор с координатами:

$$\frac{1}{2} \left(a_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} - a_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \right) = a_{[m,n]}.$$

Координаты тензора $A_{[m,n]}$ так обозначаются символами:

$$a_{i_1 \dots [i_m | \dots | i_n] \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$$

Операция альтернирования тензора по верхним индексам i_m и i_n определяется аналогично и построенный тензор обозначается $A^{[m,n]}$.

В результате альтернирования тензора A типа (p, q) по p нижним индексам получается тензор V , компоненты которого вычисляются по формуле:

$$v_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = a_{[i_1 \dots i_p]}^{k_1 \dots k_q} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}^{k_1 \dots k_q},$$

где $(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ — чётная;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечётная.} \end{cases}$

К примеру, для тензора A типа $(3, 0)$:

- альтернирование по двум индексам проводится по формулам:

$$a_{[ij]k} = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{jik}); \quad a_{i[jk]} = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{ikj}); \quad a_{[i|j|k]} = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{kji});$$

- альтернирование по трём индексам:

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} - a_{jik} + a_{jki} - a_{kji} + a_{kij} - a_{ikj}).$$

Выполняются очевидные равенства:

$$A = A_{(m,n)} + A_{[m,n]}; \quad A = A^{(m,n)} + A^{[m,n]}.$$

Операции симметрирования и альтернирования, в отличие от свёрток, проводятся только по верхним или только по нижним индексам.

Свойства операции симметрирования

1. При симметрировании не меняются те координаты исходного тензора, у которых индексы, стоящие в круглых скобках, одинаковы.
2. Результат двукратного симметрирования тензора по одному и тому же набору индексов совпадает с результатом его однократного симметрирования.
3. У тензора $A_{i_1 \dots (i_m \dots i_n) \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, полученного в результате симметрирования тензора A по индексам i_m, \dots, i_n , координаты не меняются при любой перестановке индексов i_m, \dots, i_n , заключённых в круглые скобки.

Свойства операции альтернирования

1. Коэффициенты исходного тензора, у которого все индексы, участвующие в альтернировании, совпадают после альтернирования, обращаются в ноль.

2. Повторное (а также многократное) альтернирование по одному и тому же набору индексов совпадает с однократным альтернированием.

3. В результате альтернирования по данному набору индексов получается тензор, у которого координаты не меняются при чётной перестановке индексов из этого набора и изменяют знак при нечётной перестановке этих индексов.

Пример 6.1

Тензор B типа $(3,1)$ задан матрицей:

$$(b_{ijk}^l) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 7 & 9 \end{array} \right),$$

где l – строка, i – столбец, j – слой, k – сечение.

Выполнить симметрирование тензора по двум первым нижним индексам.

Решение.

Компоненты искомого тензора найдём по формуле:

$$a_{ijk}^l = a_{jik}^l = b_{(ij)k}^l = \frac{1}{2}(b_{ijk}^l + b_{jik}^l).$$

$$(b_{ijk}^l) = \left(\begin{array}{cc|cc} b_{111}^1 & b_{211}^1 & b_{112}^1 & b_{212}^1 \\ b_{111}^2 & b_{211}^2 & b_{112}^2 & b_{212}^2 \\ \hline b_{121}^1 & b_{221}^1 & b_{122}^1 & b_{222}^1 \\ b_{121}^2 & b_{221}^2 & b_{122}^2 & b_{222}^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} j=1 \\ \\ j=2 \\ \\ k=1 \\ k=2 \end{array}$$

$$a_{111}^1 = b_{111}^1 = 8;$$

$$a_{211}^1 = b_{(21)1}^1 = \frac{1}{2}(b_{211}^1 + b_{121}^1) = \frac{1}{2}(2 + 3) = \frac{5}{2};$$

$$a_{111}^2 = b_{111}^2 = 1;$$

$$a_{211}^2 = b_{(21)1}^2 = \frac{1}{2}(b_{211}^2 + b_{121}^2) = \frac{1}{2}(6 - 4) = 1;$$

$$a_{121}^1 = a_{211}^1 = \frac{5}{2};$$

$$a_{221}^1 = b_{221}^1 = 5;$$

$$a_{121}^2 = a_{211}^2 = 1;$$

$$a_{221}^2 = b_{221}^2 = 6;$$

$$a_{112}^1 = b_{112}^1 = -2;$$

$$a_{212}^1 = b_{(21)2}^1 = \frac{1}{2}(b_{212}^1 + b_{122}^1) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2;$$

$$a_{112}^2 = b_{112}^2 = 4;$$

$$a_{212}^2 = b_{(21)2}^2 = \frac{1}{2}(b_{212}^2 + b_{122}^2) = \frac{1}{2}(-5 + 7) = 1;$$

$$a_{122}^1 = a_{212}^1 = 2;$$

$$a_{222}^1 = b_{222}^1 = 0;$$

$$a_{122}^2 = a_{212}^2 = 1;$$

$$a_{222}^2 = b_{222}^2 = 9.$$

$$(a_{ijk}^l) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ \hline \frac{5}{2} & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 9 \end{array} \right).$$

Пример 6.2

Выполнить симметрирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам.

Решение.

Симметрирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам выполняется по формуле:

$$a_{ijk}^l = b_{(ijk)}^l = \frac{1}{3!} (b_{ijk}^l + b_{jki}^l + b_{kij}^l + b_{jik}^l + b_{ikj}^l + b_{kji}^l).$$

Вычислим координаты искомого тензора:

$$a_{111}^1 = b_{111}^1 = 8;$$

$$a_{111}^2 = b_{111}^2 = 1;$$

$$a_{222}^1 = b_{222}^1 = 0;$$

$$a_{222}^2 = b_{222}^2 = 9;$$

$$\begin{aligned} a_{211}^1 = a_{121}^1 = a_{112}^1 = b_{(211)}^1 &= \frac{1}{6} (b_{211}^1 + b_{121}^1 + b_{112}^1 + b_{211}^1 + b_{121}^1 + b_{112}^1) = \\ &= \frac{1}{6} (2 + 3 - 2 + 2 + 3 - 2) = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{211}^2 = a_{121}^2 = a_{112}^2 = b_{(211)}^2 &= \frac{1}{6} (b_{211}^2 + b_{121}^2 + b_{112}^2 + b_{211}^2 + b_{121}^2 + b_{112}^2) = \\ &= \frac{1}{6} (6 - 4 + 4 + 6 - 4 + 4) = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{122}^1 = a_{212}^1 = a_{221}^1 = b_{(122)}^1 &= \frac{1}{6} (b_{212}^1 + b_{122}^1 + b_{221}^1 + b_{122}^1 + b_{212}^1 + b_{221}^1) = \\ &= \frac{1}{6} (3 + 1 + 5 + 1 + 3 + 5) = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{122}^2 = a_{212}^2 = a_{221}^2 = b_{(122)}^2 &= \frac{1}{6} (b_{212}^2 + b_{122}^2 + b_{221}^2 + b_{122}^2 + b_{212}^2 + b_{221}^2) = \\ &= \frac{1}{6} (-5 + 7 + 6 - 5 + 7 + 6) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

В итоге получаем матрицу:

$$(a_{ijk}^l) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ \hline 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & 9 \end{array} \right).$$

Пример 6.3

Выполнить альтернирование тензора из примера 6.1 по двум первым нижним индексам.

Решение.

Проведем альтернирование тензора из примера 6.1 по двум первым нижним индексам. К примеру:

$$b_{[12]2}^1 = \frac{1}{2}(b_{122}^1 - b_{212}^1) = \frac{1}{2}(1 - 3) = -1.$$

В результате получим следующую матрицу:

$$(b_{[ij]k}^l) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

Пример 6.4

Выполнить альтернирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам.

Решение.

Альтернирование того же самого тензора по трём нижним индексам выполняется по формуле:

$$b_{[ijk]}^l = \frac{1}{3!}(b_{ijk}^l + b_{jki}^l + b_{kij}^l - b_{jik}^l - b_{ikj}^l - b_{ljk}^i).$$

Получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Получился тождественно нулевой тензор, поскольку в данном случае все индексы пробегают только по двум различным значениям, и в наборе ijk не может оказаться трёх различных значений.

Упражнения

6.1. Тензор A задан матрицей:

$$1) (a^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) (a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) (a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: а) $a^{(ij)}$; б) $a^{[ij]}$.

6.2. Тензор A задан матрицей:

$$1) (a_{ijk}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) (a_{ijk}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 & 8 & 4 & 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 4 & 8 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора:

а) $a_{(ij)k}$; б) $a_{i(jk)}$; в) $a_{(i|j|k)}$; г) $a_{(ijk)}$; д) $a_{[ij]k}$; е) $a_{i[jk]}$; ж) $a_{[i|j|k]}$; з) $a_{[ijk]}$.

6.3. Тензор A задан матрицей:

$$(a_{kl}^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора:

а) $a_{kl}^{(ij)}$; б) $a_{(kl)}^{ij}$; в) $a_{(kl)}^{(ij)}$; г) $a_{kl}^{[ij]}$; д) $a_{[kl]}^{ij}$; е) $a_{[kl]}^{[ij]}$.

6.4. 1) Доказать, что любой тензор типа $(2, 0)$ или $(0, 2)$ можно разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.

2) Разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров тензор, заданный матрицей:

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Симметрическое и внешнее произведения тензоров

Пусть A и B – тензоры, либо ковариантные типа $(p, 0)$ и $(q, 0)$, либо контравариантные типа $(0, p)$ и $(0, q)$.

В обоих этих случаях, применяя тензорное умножение, полное симметрирование и полное альтернирование можно определить следующие две операции.

1. **Симметрическим произведением** тензора A на тензор B называется полное симметрирование их тензорного произведения:

$$A \odot B = \text{Sym}(A \otimes B).$$

2. **Внешним произведением** тензора A на тензор B называется полное альтернирование их тензорного произведения:

$$A \wedge B = \text{Alt}(A \otimes B).$$

Формулы симметрического и внешнего произведений

$$A \odot B = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (A \otimes B)_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p) \sigma(j_1) \dots \sigma(j_q)},$$

$$A \wedge B = \frac{1}{p! q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (A \otimes B)_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p) \sigma(j_1) \dots \sigma(j_q)},$$

где $(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } (i_1 \dots i_p) - \text{чётная;} \\ -1, & \text{если } (i_1 \dots i_p) - \text{нечётная.} \end{cases}$

Пример 7.1

Вычислить симметрическое произведение двух векторов:

$$\begin{aligned} a &= a^i e_i; \\ b &= b^k e_k. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} a \odot b &= \text{Sym}(a \otimes b) = \text{Sym}(a^i b^k e_i \otimes e_k) = \frac{1}{2} (a^i b^k + a^k b^i) e_i \otimes e_k = \\ &= \frac{1}{2} (a \otimes b + b \otimes a). \end{aligned}$$

Заметим, что при $a = b$ $a \odot a = a \otimes a$.

Пример 7.2

Вычислить внешнее произведение двух векторов:

$$\begin{aligned} a &= a^i e_i; \\ b &= b^k e_k. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \text{Alt}(a \otimes b) = \text{Alt}(a^i b^k \cdot e_i \otimes e_k) = \frac{1}{2}(a^i b^k - a^k b^i) \cdot e_i \otimes e_k = \\ &= \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \end{aligned}$$

Заметим, что при $a = b$ получается $a \wedge a = 0$ – тривиальный тензор.

Свойства симметрического и внешнего умножения

1. Симметрическое умножение билинейно.
2. Симметрическое умножение коммутативно.
3. Внешнее умножение билинейно.
4. Внешнее умножение антикоммутативно, то есть для произвольных тензоров A и B типа $(p, 0)$ и $(q, 0)$ (либо типа $(0, p)$ и $(0, q)$):

$$A \wedge B = (-1)^{qp}(B \wedge A).$$

Упражнения

7.1. Даны векторы $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $u \odot v$; 2) $u \wedge v$; 3) $u \odot u$; 4) $u \wedge u$.

7.2. Даны ковекторы $\alpha = (1, -1)$, $\beta = (2, 3)$.

Найти: 1) $\alpha \odot \beta$; 2) $\alpha \wedge \beta$.

7.3. Даны векторы $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вычислите: 1) $(u \odot v) \odot w$; 2) $(u \wedge v) \wedge w$.

8. Метрический тензор. Опускание и поднятие индексов

Пусть в линейном пространстве задано скалярное произведение

$$g : V \times V \rightarrow R \text{ с матрицей Грама } g = (g_{ij}), \text{ где } g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Скалярное произведение в линейном пространстве – это билинейная функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $g(x, y) = g(y, x)$ – симметричность;
- 2) $\forall x \in V: g(x, x) \geq 0$ и $g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

В силу билинейности всякое скалярное произведение – это ковариантный тензор типа $(2, 0)$.

В стандартном базисе он имеет вид:

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Метрическим тензором в линейном пространстве называется ковариантный двухвалентный тензор, удовлетворяющий условиям 1 и 2, то есть являющийся скалярным произведением.

Линейное пространство с заданным в нем метрическим тензором g (евклидово пространство) изоморфно сопряженному пространству V^* .

Двойственный базис в евклидовом пространстве (взаимный базис) выражается через основной базис с помощью матрицы, обратной матрице Грама заданного скалярного произведения.

Для скалярного произведения во взаимном базисе запишем:

$$g^{ij} = g(e^i, e^j),$$

то есть

$$g = g^{ij} \cdot e_i \otimes e_j.$$

Таким образом g^{ij} – тензор типа $(0, 2)$, дважды контравариантный, симметричный по индексам i, j . Этот тензор также называют метрическим тензором.

Координаты g_{ij} и g^{ij} можно рассматривать как ковариантные и контравариантные координаты одного и того же тензора G .

Метрический тензор G используется для операции поднятия и опускания индексов у координат данного тензора A .

Эта операция заключается в следующем:

Пусть A – тензор типа (p, q) с координатами $a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$.

Покажем, как производится операция поднятия индекса i_1 .

Свернем тензоры G и A по верхнему индексу j у G и нижнему i_1 у A , то есть построим тензор с координатами:

$$g^{im} a_{mi_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q},$$

и у координат полученного тензора индекс i обозначим через i_1 :

$$g^{i_1 m} a_{m i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} = a_{\cdot i_2 \dots i_p}^{i_1 k_1 \dots k_q}.$$

Здесь прежнее место индекса отмечается точкой.

Если первый нижний индекс поднимается на второе место среди верхних индексов, то в результате получим тензор с координатами:

$$a_{\cdot i_2 \dots i_p}^{k_1 i_1 k_2 \dots k_q}.$$

Операция опускания определяется аналогично:

$$g_{k_1 m} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{m k_2 \dots k_q} = a_{k_1 i_1 i_2 \dots i_p}^{\cdot k_2 \dots k_q}.$$

Пример 8.1

Задан метрический тензор

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

и тензор A типа $(1, 1)$

$$A = (a_j^i) = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора, полученного в результате:

а) опускания верхнего индекса; б) поднятия нижнего индекса.

Решение.

а) Опустим верхний индекс, получим тензор с координатами a_{ij}^{\cdot} , которые вычисляются по формуле:

$$a_{ij}^{\cdot} = g_{im} \cdot a_j^m.$$

Вычислим, например, a_{21}^{\cdot} :

$$a_{21}^{\cdot} = g_{2m} \cdot a_1^m = g_{12} \cdot a_1^1 + g_{22} \cdot a_1^2 = 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) = -1.$$

В итоге получим:

$$(a_{ij}^{\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что: $(a_{ij}^{\cdot}) = (g_{im} \cdot a_j^m) = G \cdot A.$

б) Рассмотрим процедуру поднятия индекса.

$$(g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (g^{ij}).$$

$$a^{ij} = g^{jm} \cdot a_m^i = a_m^i \cdot g^{jm} = a_m^i \cdot g^{mj}.$$

Вычислим a^{12} :

$$a^{12} = a_m^1 \cdot g^{2m} = a_1^1 \cdot g^{21} + a_2^1 \cdot g^{22} = 7 \cdot (-2) + (-8) \cdot 1 = -22.$$

Вычисляя остальные координаты, получим:

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 51 & -22 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что: $(a^{ij}) = (a_m^i \cdot g^{mj}) = A \cdot G^{-1}$.

Пример 8.2

Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор G :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- 1) матрицу тензора A с поднятым первым индексом;
- 2) матрицу тензора A с поднятым вторым индексом;
- 3) матрицу тензора A с двумя поднятыми индексами.

Решение.

$$G^{-1} = (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 1) Найдём матрицу тензора с поднятым первым индексом:

$$a_{ij} \mapsto a^i_j = g^{ik} a_{kj} = G^{-1} A;$$

$$(a^i_j) = G^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём матрицу с поднятым 2-м индексом:

$$a_{ij} \mapsto a_i^{\cdot j} = g^{kj} a_{ik} = a_{ik} g^{kj} = A \cdot G^{-1};$$

$$(a_i^{\cdot j}) = A \cdot G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{pmatrix}.$$

3) Найдём матрицу с двумя поднятыми индексами

$$a_{ij} \mapsto a^{ij} = g^{ik} g^{mj} a_{km} = g^{ik} a_{km} g^{mj} = G^{-1} A G^{-1};$$

$$(a^{ij}) = G^{-1} A G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 67 & 87 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

8.1. Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

- 1) $(a_i^{\cdot j})$ (поднять первый индекс);
- 2) $(a_i^{\cdot j})$ (поднять второй индекс);
- 3) (a^{ij}) (поднять оба индекса).

Сделайте проверку, опустив индексы обратно.

8.2. Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор G :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- 1) матрицу тензора A с поднятым первым индексом;
- 2) матрицу тензора A с поднятым вторым индексом;
- 3) матрицу тензора A с двумя поднятыми индексами.

Убедиться, что опускание индексов возвращает исходную матрицу.

8.3. Тензор A типа $(2, 1)$ задан матрицей:

$$(a_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Метрический тензор:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

- 1) (a_{ijk}) (опустить первый индекс);
- 2) $(a_{\cdot\cdot k}^{ij})$ (поднять второй индекс);
- 3) $(a_{j\cdot}^{i\cdot k})$ (поднять третий индекс);
- 4) (a^{ijk}) (поднять второй и третий индексы).

8.4. Тензор A типа $(2, 2)$ задан матрицей:

$$(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Метрический тензор:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор: 1) (a_{ijkl}) ; 2) (a^{ijkl}) .

9. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертывания из тензора типа $(2, 2)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$. Найти матрицу тензора (a_{ijkl}) .

Вариант 2

1. Тензоры каких типов имеют двумерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (1 \quad -1)$.
3. Дана матрица тензора $(a_{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array} \right)$. Выписать матрицы тензоров: $(b_{ijkl}) = (a_{kjli})$, $(c_{ijkl}) = (a_{lkji})$.

Вариант 3

1. Тензоры каких типов имеют трехмерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (1 \quad 1)$, тензор B типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Тензор A типа $(3, 0)$ задан матрицей:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array} \right)$$

Записать матрицы тензоров: $(b_{ijk}) = (a_{jki})$, $(c_{ijk}) = (a_{ikj})$.

Вариант 4

1. Тензоры каких типов имеют четырехмерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (1 \ 1)$, тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (1 \ -1)$.

3. Тензор A типа $(3,0)$ задан матрицей $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right)$.

Выписать матрицы всех тензоров, получаемых из него транспонированием.

Вариант 5

1. Сколько различных двумерных сечений имеет трехмерная матрица третьего порядка? Какой порядок имеет каждое сечение?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $(b_i) = (4 \ -2)$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A , задан матрицей

$$(a_{jki}^i) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Найти матрицу тензора (a^{ijk}) .

Вариант 6

1. Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица второго порядка?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (4 \ -2)$, тензор B типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.
3. Найти матрицу тензора, транспонированного из матрицы тензора

$$(a_k^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right).$$

Вариант 7

1. Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица третьего порядка?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0,1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу тензора, транспонированного из матрицы тензора $(a_{jki}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right)$.

Вариант 8

1. Можно ли транспонировать тензоры $(1, 1)$, $(2, 0)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы тензоров (a_{ij}) и $(a_{i.}^j)$.

Вариант 9

1. Один тензор типа $(0, 2)$ получается из другого транспонированием. Как связаны соответствующие билинейные функции?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0, 2)$ имеет матрицу $(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы метрических тензоров (a_{ij}) и $(a_{i.}^j)$.

Вариант 10

1. Известно, что $(a_{kl}^{ij}) = (g^{il})(g^{jm})(a_{lmk})$. Выразить (a_{lmk}) через $(a_{k.}^{ij})$.
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(b_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{jk}^i) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти тензоры $(a_{j.}^{i.k})$ и (a^{ijk}) .

Вариант 11

1. Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять один индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(3, 0)$ имеет матрицу $(a_{ijk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (2 \ 4)$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицы тензоров (a_{ijk}) и $(a_{..k}^{ij})$.

Вариант 12

1. Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять оба индекса?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (2 \ 4)$, а тензор B типа $(3, 0)$ имеет матрицу $(a_{ijk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти тензоры $(a_{.j.}^{i.k})$ и (a^{ijk}) .

Вариант 13

1. Какой тензор получится, если у метрического тензора опустить один индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(2, 1)$ имеет матрицу $(a_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (-1 \ 1)$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a_{..k}^{ijk})$.

Вариант 14

1. Какой тензор получится, если у метрического тензора опустить оба индекса?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (-1 \ 1)$, а тензор B типа $(2, 1)$ имеет матрицу $(b_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{j_k}^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a_{..k}^{ij})$.

Вариант 15

1. Какой тензор получится, если у символа Кронекера опустить индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей

$$(a_{jk}^i) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Найти тензоры $(a_{.j}^{i.k})$ и (a^{ijk}) .

Вариант 16

1. Какой тензор получится, если у символа Кронекера поднять индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей

$$(a_{jk}^i) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a^{ij}_{.k})$.

Вариант 17

1. Верно ли утверждение: если матрица тензора (a_{ij}) симметрична, то симметричны и матрицы тензоров: а) (a_i^j) ; б) (a^{ij}) ?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(b_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти тензоры (a_{ij}) и (a_i^j) .

Вариант 18

1. Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свёртывания из данного тензора типа $(2, 2)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(0, 2)$ имеет матрицу $(c^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(b_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы тензоров (a_{ij}) и (a_i^j) .

Вариант 19

1. Можно ли транспонировать тензоры типа $(1, 1)$, $(2, 0)$?
2. Дано $A = X \otimes Y$, $X_e = (1 \ 0 \ 0)$, $Y_e = (0 \ 1 \ 0)$, $e' = eS$,
 $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу тензора A в базисе $\{e\}$ и в базисе $\{e'\}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$. Найти матрицы тензоров (a^{ijkl}) .

Вариант 20

1. Известно, что $a_k^{ij} = g^{il} g^{jm} a_{lmk}$ выразить a_{lmk} через a_k^{ij} .
2. Дана матрица тензора $(a_k^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right)$. Найти матрицу транспонированного тензора.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right)$. Найти матрицу тензора (a_{ijkl}) .

Вариант 21

1. Тензор a_i^j определяет индексное преобразование в евклидовом пространстве. Найти ему сопряженное.
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B , если тензор A типа $(3, 0)$ имеет матрицу $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$, а тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (2 \ 4)$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а тензор A задан

матрицей $(a_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right)$. Найти тензор (a^{ijkl}) .

Ответы

- 1.1.** 1) тип тензора: $(2,0)$; ковариантная валентность -2 ; контравариантная валентность -0 ; полная валентность -2 ;
 2) тип тензора: $(3,0)$; ковариантная валентность -3 ; контравариантная валентность -0 ; полная валентность -3 ;
 3) тип тензора: $(0,2)$; ковариантная валентность -0 ; контравариантная валентность -2 ; полная валентность -2 ;
 4) тип тензора: $(1,1)$; ковариантная валентность -1 ; контравариантная валентность -1 ; полная валентность -2 ;
 5) тип тензора: $(0,1)$; ковариантная валентность -0 ; контравариантная валентность -1 ; полная валентность -1 .

1.2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 10 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 11 & 10 & 9 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 & 6 & 8 & 10 & 5 & 7 & 9 \\ 10 & 12 & 14 & 9 & 11 & 13 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

1.3. 1) 9 ; $\delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1$;

2) 256 ; $\varepsilon_{1234} = \varepsilon_{2314} = \varepsilon_{3124} = \varepsilon_{2431} = \varepsilon_{4132} = \varepsilon_{3241} = \varepsilon_{4213} = \varepsilon_{1342} = \varepsilon_{1423} = \varepsilon_{2143} =$
 $= \varepsilon_{3412} = \varepsilon_{4321} = 1$;

$\varepsilon_{2134} = \varepsilon_{3214} = \varepsilon_{4231} = \varepsilon_{1324} = \varepsilon_{1432} = \varepsilon_{1243} = \varepsilon_{2341} = \varepsilon_{2413} = \varepsilon_{3142} = \varepsilon_{3421} = \varepsilon_{4132} =$
 $= \varepsilon_{4312} = -1$.

2.1. 1) невозможно; 2) невозможно; 3) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; 4) невозможно; 5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$;

7) тензор типа $(1, 1)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$; 8) тензор типа $(1, 1)$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$;

9) тензор типа $(0, 2)$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$; 10) тензор типа $(0, 2)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$;

11) тензор типа $(1, 2)$; $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -4 & 2 & 2 & 8 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & -4 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & 4 & 4 & 16 & 12 & -8 \end{pmatrix}$;

12) тензор типа $(1, 2)$; $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -8 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & -4 & -4 & -3 & 2 & 16 & 12 & -8 \end{pmatrix}$.

2.2. 1) невозможно; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; 3) невозможно; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

6) тензор типа $(3, 1)$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 7) тензор типа $(3, 1)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

8) тензор типа $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right)$; 9) тензор типа $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right)$.

2.3. $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & -4 & 4 & 8 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 4 & 8 & 4 \end{array} \right)$.

3.1. 1) 5; 2) 7.

3.2. $(c_{ij}^i) = (8 \ 4 \ -17)$; $(c_{ij}^j) = (7 \ 9 \ -14)$;

3.3. $C = A \otimes B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -5 & -4 & -15 & -12 \\ \hline -8 & 0 & -4 & 0 \\ 20 & 16 & 10 & 8 \end{array} \right)$;

$(d_l^j) = (c_{il}^{ij}) = \begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$; $(f_k^i) = (c_{kj}^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}$;

$(s_k^j) = (c_{ki}^{ij}) = \begin{pmatrix} -13 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$; $(t_l^i) = (c_{jl}^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$; $m = c_{ij}^{ij} = 30$; $r = c_{ji}^{ij} = -5$.

3.4. 1) 6; 2) 12; 3) 4; 4) не совпадают.

4.1. 1) $\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$; 2) $(2 \ 3)$; 3) $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$.

4.2. 1) $\begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$; 2) $(1 \ -1 \ 0)$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -6 & 8 & 5 \\ -1 & 17 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -35 & -16 & 18 \\ -19 & -13 & 15 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $(a_j^i) = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 86 \\ -1 & 20 & 71 \\ -14 & 3 & -31 \end{pmatrix}$.

4.4. -9.

4.5. -44.

5.1. 1) $(a_{jik}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; $(a_{kji}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; $(a_{ikj}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5.2. 1) $(\alpha^{jik}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $(\alpha^{ikj}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$;

$$3) (a^{kji}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{array} \right).$$

$$5.3. 1) (a_{jikl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 10 & 12 \\ \hline 5 & 7 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & 14 & 16 \end{array} \right); (a_{kjil}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 13 & 14 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array} \right); (a_{ljki}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right);$$

$$(a_{ikjl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ \hline 2 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{array} \right); (a_{ilkj}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 9 & 2 & 10 \\ 3 & 11 & 4 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 6 & 14 \\ 7 & 8 & 8 & 16 \end{array} \right); (a_{ijlk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array} \right);$$

$$2) (b_{kjl}^{ji}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 10 & 12 \\ \hline 5 & 7 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & 14 & 16 \end{array} \right); (b_{lk}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array} \right).$$

$$6.1. 1) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$6.2. 1) a) a_{(ij)k} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & \frac{9}{2} & 2 & 3 \\ \hline \frac{9}{2} & 7 & 3 & 3 \end{array} \right); б) a_{i(jk)} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{array} \right); в) a_{(i|j)k} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ \frac{7}{2} & 6 & 3 \end{array} \right);$$

$$г) a_{(ijk)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} & 3 \end{array} \right); д) a_{[ij]k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \end{array} \right); е) a_{i[jk]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right);$$

$$ж) a_{[i|j]k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right); з) a_{[ijk]} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$2) a) a_{(ij)k} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 7 & 7 & 4 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right); б) a_{i(jk)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 8 & 4 & 6 \end{array} \right);$$

$$в) a_{(i|j)k} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 6 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right); г) a_{(ijk)} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & \frac{20}{3} & \frac{22}{3} & \frac{20}{3} & \frac{16}{3} & 6 \\ \frac{20}{3} & \frac{26}{3} & 6 & \frac{16}{3} & 6 & \frac{20}{3} \\ \hline \frac{22}{3} & 6 & \frac{14}{3} & 6 & \frac{20}{3} & \frac{16}{3} \end{array} \right);$$

$$д) a_{[ij]k} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right);$$

$$\text{е) } a_{i[jk]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } a_{[ij|k]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$\text{з) } a_{[ijk]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{6.3. а) } a_{kl}^{(ij)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \text{ б) } a_{(kl)}^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \text{ в) } a_{(kl)}^{(ij)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & \frac{11}{2} \\ 5 & 8 & \frac{11}{2} & 1 \\ 7 & \frac{11}{2} & 8 & 1 \\ \frac{11}{2} & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } a_{kl}^{[ij]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ д) } a_{[kl]}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ е) } a_{[kl]}^{[ij]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{6.4. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.1. 1) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ 3) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{ 4) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.2. 1) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.3. } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{8.1. 1) } \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 19 & -7 \end{pmatrix}; \text{ 3) } \begin{pmatrix} -56 & 22 \\ 23 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{8.2. 1) } \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{pmatrix}; \text{ 3) } \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 67 & 87 \end{pmatrix}.$$

$$\text{8.3. 1) } (\alpha_{ijk}) = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 39 & 17 \\ 5 & 8 & 17 & 7 \end{pmatrix}; \text{ 2) } (\alpha_{\cdot \cdot k}^{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -1 & 5 \\ -5 & 14 & 5 & -9 \end{pmatrix};$$

3) $(\alpha_{j \cdot k}^{i \cdot}) = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 23 & 11 \\ -11 & 2 & 29 & -3 \end{pmatrix}$, здесь i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя (в других ответах – согласно договоренности, принятой в параграфе 1 данного пособия);

$$4) (\alpha^{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 9 \\ -15 & 32 & 35 & -73 \end{array} \right).$$

$$8.4. 1) \left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 17 & 39 & 17 \\ 16 & 7 & 16 & 7 \\ \hline 117 & 51 & 39 & 17 \\ 48 & 21 & 16 & 7 \end{array} \right); 2) \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ \hline 7 & 7 & -11 & -11 \\ 0 & 7 & 0 & -11 \end{array} \right).$$

Ответы на задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. 6.

2. Тип тензора – (0, 2); $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$3. \left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array} \right).$$

Вариант 2

1. (2, 0), (1, 1), (0, 2)

2. Тип тензора – (1, 1); $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$3. (b_{ijkl}) = (a_{kjli}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 13 & 14 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array} \right), (c_{ijkl}) = (a_{lkji}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 9 & 3 & 11 \\ 5 & 13 & 7 & 15 \\ \hline 2 & 10 & 4 & 12 \\ 6 & 14 & 8 & 16 \end{array} \right).$$

Вариант 3

1. (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3).

2. Тип тензора – (1, 1); $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$3. (b_{ijk}) = (a_{jki}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 4 & 2 & 7 & 2 & 3 & 8 & 3 \\ 7 & 3 & 8 & 9 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ \hline 4 & 6 & 1 & 6 & 4 & 9 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right).$$

$$(c_{ijk}) = (a_{ikj}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array} \right).$$

Вариант 4

1. (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4).

2. Тип тензора – (2, 0); $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$3. \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{array} \right).$$

Вариант 5

1. 9 двумерных сечений третьего порядка.
2. Тип тензора $-(3, 0)$; $\left(\begin{array}{ccc|cc} 12 & 20 & -6 & -10 & \\ 20 & 36 & -10 & -18 & \end{array} \right)$.
3. $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array} \right)$.

Вариант 6

1. $4! = 24$
2. Тип тензора $-(3, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & 20 & 36 \\ -6 & -10 & -10 & -18 \end{array} \right)$.
3. $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right)$.

Вариант 7

1. $4! = 24$.
2. Тип тензора $-(2, 1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{array} \right)$.
3. $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array} \right)$.

Вариант 8

1. $(1, 1)$ – нет, $(2, 0)$ – да.
2. Тип тензора $-(1, 2)$; $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{array} \right)$.
3. $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.

Вариант 9

1. $f(x, y) = g(y, x)$.
2. Тип тензора $-(0, 3)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$.
3. $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$, $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{pmatrix}$.

Вариант 10

1. $(a_{lmk}) = (g_{li})(g_{mj})(a_{..k}^{ij})$.
2. Тип тензора $-(1, 2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$.
3. $(a_{.j}^{i.k}) = \begin{pmatrix} 19 & 30 & 8 & 13 \\ 17 & 41 & 11 & 17 \end{pmatrix}$, $(a^{ijk}) = \begin{pmatrix} 155 & 68 & 66 & 29 \\ 167 & 75 & 89 & 39 \end{pmatrix}$.

Вариант 11

1. δ_j^i .

2. Тип тензора $-(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -10 & 0 & -1 \\ 19 & 27 & 1 & 5 \end{array} \right), (a^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -23 & 10 & 20 & 9 \\ 39 & 17 & 11 & 5 \end{array} \right)$.

Вариант 12

1. (g^{ij}) .

2. Тип тензора $-(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{array} \right)$.

3. $(a_{.j}^{i:k}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right), (a^{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 41 & 17 & 17 & 7 \\ 41 & 17 & 17 & 7 \end{array} \right)$.

Вариант 13

1. (δ_j^i) .

2. Тип тензора $-(3, 1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 5 & 7 \\ \hline -2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$.

3. $(a_{.k}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right), (a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$.

Вариант 14

1. (g_{ij}) .

2. Тип тензора $-(3, 1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -5 & 5 \\ -7 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right), (a_{.k}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$.

Вариант 15

1. (g_{ij}) .

2. Тип тензора $-(2, 2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ \hline 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{array} \right)$.

3. $(a_{.j}^{i:k}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & 0 & 10 & -10 \\ -3 & 0 & 3 & -10 & 0 & 10 \\ 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & -9 & 9 \\ 9 & 0 & -9 \\ -9 & 9 & 0 \end{array} \right)$,

$$(a^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array} \right).$$

Вариант 16

1. (g^{ij}) .

2. Тип тензора – $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ \hline 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & 12 & 50 & -62 & -6 & -25 & 31 \\ 3 & 12 & -15 & -6 & 24 & 30 & 3 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & -6 & -2 & 10 & 12 & 1 & 5 & -6 \end{array} \right)$,

$$(a_{..k}^{ij}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & -7 & 7 & 4 & 14 & -4 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 8 & 10 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Вариант 17

1. а) нет, б) да.

2. Тип тензора – $(2, 2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.

Вариант 18

1. 6.

2. Тип тензора – $(1, 3)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$, $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{pmatrix}$.

Вариант 19

1. $(1, 1)$ – нет, $(2, 0)$ – да.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -210 & 105 & 42 \\ 100 & -50 & -20 \\ 40 & -20 & -8 \end{pmatrix}$.

3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array} \right)$.

Вариант 20

1. $(a_{lmk}) = (g_{li})(g_{mj})(a_k^{ij})$.

2. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right)$.

3. $(a_{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 7 & 12 & 19 \\ 15 & 24 & 27 & 42 \end{array} \right)$.

Вариант 21

1. $(g^{lj})(g_{ik})(a_j^i)$.

2. Тип тензора $-(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array} \right)$.

3. $(a^{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 2 & 2 \\ -15 & 18 & 2 & 2 \\ \hline -5 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Список литературы

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
2. Беклемишев Д. В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2014. – 192 с.
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебн. пособие / под ред. Д. В. Беклемишева. – М.: Физматлит, 2012. – 496 с.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2013. – 592 с.
5. Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. – М.: МЦНМО, 2014. – 152 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
7. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2023. – 368 с.

Блейхер Оксана Владимировна
Исаева Татьяна Тимофеевна
Рванова Алла Сергеевна
Савченко Татьяна Владимировна

Тензоры. Задачи и упражнения

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А