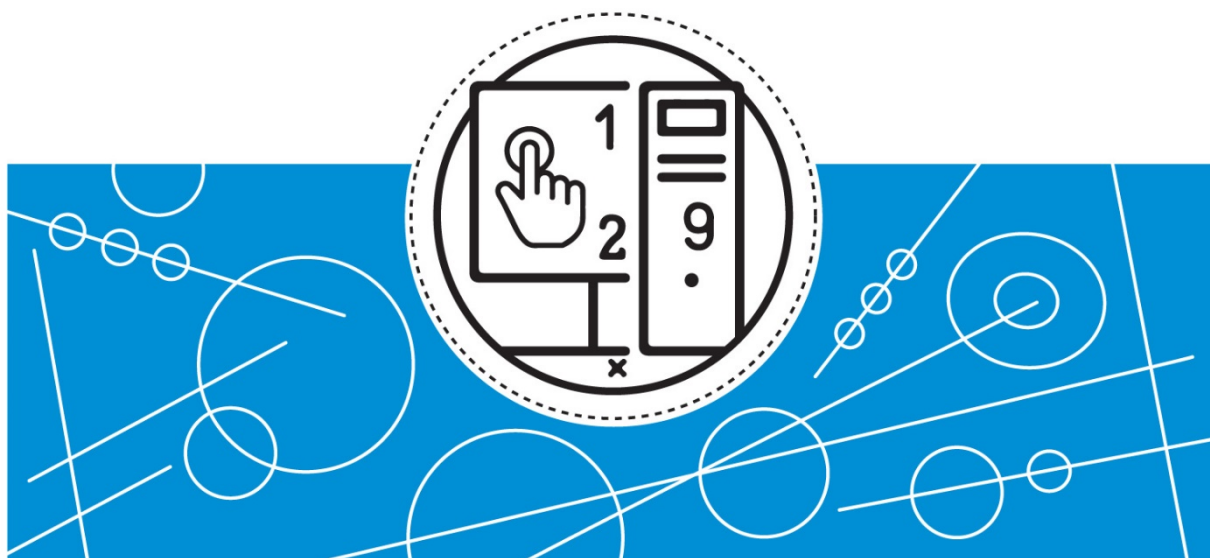


ІІТМО

В. А. КОЧЕВАДОВ

**РЕФЛЕКСИВНЫЙ КОНТРОЛЬ ОСВОЕНИЯ
УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПО ТЕОРИИ ИГР
МОДУЛЬ I. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ**



**Санкт-Петербург
2026**

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В. А. Кочевадов

**РЕФЛЕКСИВНЫЙ КОНТРОЛЬ ОСВОЕНИЯ
УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПО ТЕОРИИ ИГР**

МОДУЛЬ I. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки: 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 27.03.05, 27.04.03
в качестве Учебно-методического пособия
для реализации основных образовательных программ высшего образования
бакалавриата и магистратуры**

ИТМО

**Санкт-Петербург
2026**

Кочеватов В. А. Рефлексивный контроль освоения учебного материала по теории игр. Модуль I. Антагонистические игры. – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 72 с.

Рецензент:

Бойцев Антон Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент (квалификационная категория «ординарный доцент») института математики, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие служит основой для рефлексии и самостоятельного контроля обучающимися уровня освоения учебного материала по антагонистическим играм, которые составляют базовый модуль дисциплин теоретико-игрового цикла. Пособие оснащено материалами позволяющими производить рефлексивный контроль как после лекционных, так и после практических занятий, а также оценивать степень освоения учебного материала по отдельным темам модуля.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся на направлениях подготовки: 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 27.03.05, 27.04.03. Также пособие может быть использовано преподавателями для организации практических занятий в рамках реализации дисциплин теоретико-игрового цикла.



ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026

© Кочеватов В. А., 2026

Содержание

Введение	4
Методические рекомендации по организации рефлексивного контроля освоения материала	6
Тема 1. Матричные игры: формализация конфликтов и решение игр в чистых стратегиях	9
1.1 Тест на базовое освоение теоретического материала	9
1.2 Тематические вопросы для проработки	11
1.3 Контроль освоения теоретического материала	12
1.4 Итоговый контроль знаний и умений	16
Тема 2. Смешанное расширение и методология решения матричных игр	19
2.1 Тест на базовое освоение теоретического материала	19
2.2 Список тематических вопросов для проработки	22
2.3 Контроль освоения теоретического материала	23
2.4 Итоговый контроль знаний и умений	25
Тема 3. Выпуклые игры на компактных множествах	29
3.1 Тест на базовое освоение теоретического материала	29
3.2 Список тематических вопросов для проработки	32
3.3 Контроль освоения теоретического материала	33
3.4 Итоговый контроль знаний и умений	37
Тема 4. Игры с природой	40
4.1 Тест на базовое освоение теоретического материала	40
4.2 Список тематических вопросов для проработки	42
4.3 Контроль освоения теоретического материала	43
4.4 Итоговый контроль знаний и умений	47
Ответы к тестам и рекомендации	51
Список рекомендуемой литературы	72

Введение

Теория игр представляет собой динамично развивающееся направление прикладной математики, посвященное исследованию процессов конфликта. Традиционно под конфликтом понимается столкновение лиц принимающих решения (игроков) с несовпадающими интересами. Однако современное состояние теории требует расширения этой классической интерпретации.

Во-первых, область применения теоретико-игрового анализа сегодня настолько обширна, что в роли игроков зачастую рассматриваются объекты различной природы: от технических (смартфоны, беспилотные автомобили) до биологических (микроорганизмы). Если в технических системах за объектами могут стоять естественные или искусственные субъекты (пользователи или ИИ), то в случае биологических систем мы едва ли можем оценивать функционирование каких-либо объектов на деятельном уровне, то есть как некоторого субъекта, который способен разумно принимать решения и тем более мыслить стратегически. Таким образом, эволюция теоретико-игрового анализа вышла за пределы классического трактования через деятельность субъектов (ЛПР), обеспечив процессы принятия решений методологическим аппаратом, свободным от некоторых антропоцентрических допущений.

Во-вторых, в роли игроков могут выступать как сложные системы, так и их отдельные подсистемы. Помимо технических и информационных систем, где все чаще используется понятие «агент» вместо термина «игрок», это понятие также активно используется в моделировании экономических систем, где игроками могут являться потребители, фирмы или целые государства. В связи с этим в междисциплинарных исследованиях термин «игрок» в основном заменяется термином «агент», что особенно релевантно для приложений теории игр в сфере интеллектуальных систем. Таким образом, термин «агент» все чаще рассматривается как альтернатива термину «игрок», отделяющая прикладную часть теории от фундаментальной.

Описанное расширение классической интерпретации теории игр закрепляет ее роль ядра современной кибернетики и обуславливает стремительный рост востребованности дисциплин теоретико-игрового цикла в образовательных программах, направленных на подготовку конкурентоспособных и высококвалифицированных специалистов. Университет ИТМО, будучи научно-образовательной корпорацией, стремится к повышению качества обучения с учетом актуальных тенденций рынка труда, а также приоритетных задач, отражающих цели и ценности развития университета. Таким образом, в условиях современных вызовов со стороны индустрии акцент на формировании кибернетического базиса в системе подготовки современного специа-

листа становится одной из приоритетных задач университета. Изучение теории игр позволяет обеспечить профессиональное становление обучающихся необходимыми компетенциями, что, в свою очередь, подтверждается ежегодным ростом интереса различных факультетов к включению дисциплин по теории игр в образовательные программы подготовки обучающихся.

Важно отметить, что теория игр как дисциплина является прикладной по назначению и вариативной по содержанию. Если функциональная роль данной области в общих чертах ясна из вышеизложенного, то вариативность её наполнения, адаптируемого под специфику конкретных направлений подготовки, требует более подробного рассмотрения. На сегодняшний день теория игр развивается в нескольких направлениях, каждое из которых характеризуется своей прикладной спецификой. Это позволяет рассматривать теорию игр не просто как отдельную дисциплину, а как целый цикл возможных учебных дисциплин. Не углубляясь в детальную классификацию, выделим основные разделы, которые, как правило, представлены в виде модулей в рамках дисциплин теоретико-игрового цикла:

- антагонистические игры;
- бескоалиционные игры n -лиц;
- динамические игры;
- иерархические игры;
- сетевые игры;
- кооперативные игры;
- переговоры и арбитражные схемы.

Модуль «Антагонистические игры» здесь можно выделить как базовый. Именно этот модуль является обязательным компонентом любой дисциплины из теоретико-игрового цикла, знакомящим обучающихся с ключевыми концепциями теории и ее базовым методологическим аппаратом. Основу данного модуля составляют игры двух лиц, участники которых могут как выступать рациональными антагонистами (преследовать противоположные цели), так и не быть таковыми: случай, когда один из игроков является природой и не подчиняется принципу всеобщей рациональности. Начиная изучение теоретико-игрового анализа со знакомства с антагонистическими играми, студенты получают возможность освоить фундаментальные основы терминологической и методологической базы, что значительно облегчает знакомство с последующими модулями (разделами) теории, где взаимодействие игроков носит уже нетривиальный характер.

Неклассический подход к организации образовательного процесса позволяет университету ИТМО предоставлять студентам выбор уровня освоения фундаментальных математических дисциплин, являющихся пререквизитами к дисциплинам по теории игр. С одной стороны, это дает возможность определять специфику и наполнение рабочих программ дисциплин для различных направлений подготовки; с другой стороны, требует от составителей курсов создания условий инклюзивности.

Именно для достижения этой цели разработано данное пособие, обеспечивающее каждому обучающемуся возможность самостоятельно контролировать и оценивать уровень освоения материала по антагонистическим играм. Работать с пособием можно полностью автономно, используя его как тренажер, средство контроля (теоретического и практического), а также как справочник, указывающий на разделы, требующие дополнительной проработки. В совокупности пособие позволяет проводить рефлекссию в комфортном темпе с учетом имеющегося опыта освоения пререквизитов. Это обеспечивает комплексность и инклюзивность индивидуального процесса изучения базовых модулей дисциплин теоретико-игрового цикла.

Подытожить введение хотелось бы благодарностью студентам Университета ИТМО и моим помощникам: Ивану Башкову, Максиму Кунгурцеву и Всеволоду Мишкину. Отзывчивость, инициативность и вовлеченность этих обучающихся как в учебный процесс, так и в процесс создания данного пособия стали для автора поддержкой и настоящим источником вдохновения!

Методические рекомендации по организации рефлексивного контроля освоения материала

Основная часть пособия представлена четырьмя темами, которые входят в образовательный модуль «Антагонистические игры» дисциплин теоретико-игрового цикла. Каждая тема представлена четырьмя пунктами, каждый из которых отвечает хронологической рекомендации по рефлексивному контролю уровня освоения учебного материала по соответствующей теме.

Использование данного пособия обучающимися функционально задумывалось как организация и поддержка рефлексивного контроля изучения учебного материала. И для того чтобы сделать использование пособия наиболее эффективным, рекомендуется следующий вариант его использования.

После ознакомления с лекционным материалом и выполнения соответствующего конспекта обучающимся рекомендуется начать работу с разделом пособия **«Тест на базовое освоение теоретического материала»**.

Этот тест представляется наиболее простым из всех средств контроля данного пособия и предоставляет обучающемуся возможность проверить, насколько лекционный материал им освоен. Для рефлексивного контроля, как и для всех других тестов, в разделе **«Ответы к тестам и рекомендации»** обучающийся может получить заключение о его текущем уровне освоения учебного материала и ознакомиться с лаконичным описанием неверных вариантов ответа. Такой формат предоставления ключей к тесту позволяет обучающемуся не просто увидеть, на какие вопросы он предоставил неверный ответ, но и понять, почему выбранный им ошибочный вариант ответа является неверным. Также в описании неверных ответов можно встретить рекомендацию относительно определений и утверждений, на которые обучающемуся следует обратить внимание повторно. Выполнив встреченные в таблице ключей рекомендации, обучающийся может переходить к следующему разделу темы.

Раздел **«Тематические вопросы для проработки»** предоставляет обучающемуся возможность для рефлексии в свободной форме. Относительно вопросов, на которые обучающийся затрудняется дать ответ, рекомендуется выбрать один из следующих вариантов:

1. Вынести вопрос(ы) на обсуждение с коллегами и совместно обсудить вопросы друг друга;
2. Вынести вопрос(ы) на обсуждение с преподавателем во время аудиторного занятия или консультации;
3. Предпринять попытку разобраться с вопросом, обратившись к рекомендованной преподавателем литературе или к источникам, на которые имеются ссылки в таблицах ключей к тестам (см. раздел **«Ответы к тестам и рекомендации»**).

Следует отметить, что ни один из описанных вариантов действий обучающегося, как и степень успешности преодоления возможного затруднения в данном разделе, не мешает обучающемуся перейти к следующему разделу.

Раздел **«Контроль освоения теоретического материала»** преимущественно направлен на возможность обучающегося оценить свою готовность переходить к реализации теоретических знаний на практике. Особенностью теста, представленного в этом разделе, является то, что вопросы часто формулируются нестандартно и для ответа требуют от обучающегося дополнительного анализа, не позволяя ему ограничиваться формальными рамками, которые характерны для строгих математических определений и

утверждений. Также тест осложняется тем, что правильных ответов на вопрос может быть несколько из представленных вариантов. Поэтому рекомендуется при возможности, пройдя тест в первый раз, не спешить обращаться к соответствующей таблице с ключами. Вместо этого обучающемуся рекомендуется через некоторое количество времени (предпочтительно на следующий день) пройти данный тест повторно, сверить свои ответы с ответами из предшествующей попытки прохождения и, лишь придя к конечному заключению, обращаться к таблице с ключами к тесту. Это позволит оценить освоение теоретического материала с учетом необходимой его систематизации в памяти обучающегося, что требует времени и отдыха. Данный раздел рекомендуется пройти после знакомства с лекционным материалов и до посещения практических занятий.

Раздел **«Итоговый контроль знаний и умений»** направлен на итоговый рефлексивный контроль освоения темы обучающимся. В этом разделе также представлен сложный тест, допускающий несколько правильных ответов на вопрос и содержащий практические задания, которые требуют от обучающегося вычислительных действий. Рекомендация по прохождению этого теста совпадает с рекомендацией из предыдущего раздела. Но следует отметить, что вопросы и задания данного раздела не просто обобщают теоретический и практический материал темы, но и проверяют критическое и стратегическое мышление обучающегося на базовых терминологических и концептуальных единицах соответствующей темы.

Следование предложенной методике организации рефлексивного контроля освоения учебного материала, позволяет¹ обучающимся:

- своевременно выявлять и ликвидировать возникающие в процессе обучения трудности при знакомстве и освоении учебного материала;
- персонально выделять единицы учебного материала, которые требуют от обучающегося дополнительного внимания;
- эффективно самоорганизовываться в контексте теоретической подготовки к аудиторным занятиям с преподавателями практики;
- самостоятельно контролировать и управлять своим уровнем освоения учебного материала в комфортном темпе по темам модуля, посвященного антагонистическим играм.

¹Методика успешно прошла апробацию в рамках дисциплин по теории игр в Университете ИТМО в 2025–2026 учебном году. Анализ обратной связи подтвердил эффективность подхода и позволил определить возможности обучающихся, которым способствует предлагаемая методика.

Тема 1. Матричные игры: формализация конфликтов и решение игр в чистых стратегиях

1.1 Тест на базовое освоение теоретического материала

Рекомендация к прохождению: после лекционного занятия по теме для рефлексивного контроля уровня освоения теоретического материала.

Задание: для каждого вопроса в тесте выберите верный вариант ответа.

Вопросы теста # 1.1:

1. Что входит в предмет исследования теория игр?
 - a) Экономические кризисы.
 - b) Модели принятия решений в условиях конфликта.
 - c) Психология азартных игр.
 - d) Статистический анализ данных.
2. Какое из приведенных описаний термина «конфликт» в теории игр корректно?
 - a) Ссора между двумя людьми.
 - b) Физическое столкновение лиц.
 - c) Столкновение интересов нескольких субъектов.
 - d) Отсутствие информации о действиях конкурента.
3. Что является математической моделью конфликта?
 - a) Алгоритм.
 - b) Игра.
 - c) Функция выигрышей.
 - d) Матрица.
4. Какое из перечисленных терминов является архаизмом?
 - a) Кооперативные игры.
 - b) Коалиционные игры.
 - c) Матричные игры.
 - d) Игры с нулевой суммой.
5. Что такое бескоалиционная игра в нормальной форме?
 - a) Модель, описываемая множеством игроков, с указанием множеств их стратегий и функций выигрыша.
 - b) Представление дерева решений с указанием вероятного перехода между вершинами.
 - c) Набор правил сценарной реализации игрового взаимодействия.
 - d) Совокупность рекомендаций к равновесному поведению игроков в условиях конфликта.
6. Какое минимальное количество игроков $|\mathcal{N}|$ может быть в игре, заданной в нормальной форме и, какое условие накладывается на множества стратегий для каждого игрока?
 - a) $|\mathcal{N}| > 1, |\mathcal{S}_i| > 1$.
 - b) $|\mathcal{N}| \geq 2, |\mathcal{S}_i| \geq 2$.
 - c) $|\mathcal{N}| > 2, |\mathcal{S}_i| > 2$.
 - d) $|\mathcal{N}| = 2, |\mathcal{S}_i| = 1$.
7. Какая ситуация называется приемлемой для игрока i ?
 - a) та, в которой он получает максимальный выигрыш в игре.
 - b) ситуация, в которой изменение игроком своей стратегии в одностороннем порядке не увеличивает его выигрыш.

- с) ситуация, в которой все остальные игроки выбрали те же стратегии, что и он.
- д) та, в которой его выигрыш больше среднего возможного.

8. Как называется ситуация, приемлемая для всех игроков одновременно?

- а) Седловая точка.
- б) Оптимальное решение.
- с) Ситуация равновесия.
- д) Парето-эффективная.

9. Две игры $\Gamma = \langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ и

$$\Gamma' = \langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\mathcal{H}'_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle$$

называются стратегически эквивалентными, если $\forall i \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ функции выигрышей связаны соотношением:

- а) $\mathcal{H}_i(s) = c_i \mathcal{H}'_i(s) + k, c_i > 0, k \in \mathbb{R}$.
- б) $\mathcal{H}_i(s) = k \mathcal{H}'_i(s) + c_i, k > 0, c_i \in \mathbb{R}$.
- с) $\mathcal{H}_i(s) = -\mathcal{H}'_i(s)$.
- д) $\mathcal{H}_i(s) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}'_i(s) + c_i, c_i \in \mathbb{R}$.

10. Каким свойством обладают стратегически эквивалентные игры?

- а) У них всегда нулевая сумма.
- б) Общие ситуации равновесия.
- с) В них всегда есть доминирующая стратегия.
- д) Общая цена игры.

11. Какая игра называется игрой с постоянной суммой?

- а) Игра, в которой выигрыш каждого игрока в любой ситуации постоянен.
- б) Игра, в которой сумма функций выигрыша всех игроков равна константе в любой ситуации.

- с) Игра, в которой сумма всех элементов платежной матрицы равна нулю.
- д) Игра, в которой игроки не могут менять свои стратегии.

12. Всякая игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна:

- а) Игре с нулевой суммой.
- б) Симметричной игре.
- с) Матричной игре.
- д) Игре «Цу-Е-Фа».

13. Антагонистическая игра – это ...

- а) Игра, где все игроки в конечном счете проигрывают.
- б) Игра двух лиц с противоположными интересами.
- с) Модель, в которой запрещено общение между игроками.
- д) Игра с бесконечным количеством стратегий у игроков.

14. Какое условие выполняется для функций выигрыша в антагонистической игре?

- а) $\mathcal{H}_1(s) = \mathcal{H}_2(s), \forall s \in \mathcal{S}$.
- б) $\mathcal{H}_1(s) + \mathcal{H}_2(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$.
- с) $\mathcal{H}_1(s) \cdot \mathcal{H}_2(s) = 1, \forall s \in \mathcal{S}$.
- д) $\mathcal{H}_1(s) > \mathcal{H}_2(s), \forall s \in \mathcal{S}$.

15. Как называется антагонистическая игра с конечными множествами стратегий?

- а) Биматричная игра.
- б) Матричная игра.
- с) Динамическая игра.
- д) Кооперативная игра.

16. Стратегия i строго доминирует стратегию k для игрока 1 в матричной игре $\mathbb{C}_{m \times n} = (c_{ij})$ если

- а) $c_{ij} \geq c_{kj}, j = \overline{1, n}$.
- б) $c_{ij} > c_{kj}, j = \overline{1, n}$.
- с) Средний выигрыш по строке i выше, чем по строке k .

- d) В строке i есть хотя бы один элемент больше, чем в строке k .
17. К чему может привести удаление слабо доминируемых стратегий при поиске равновесия?
- К усложнению вычислений.
 - К потере ситуаций равновесия.
 - К обязательному нахождению седловой точки.
 - К изменению цены игры.
18. Кто получил Нобелевскую премию в 1994 году за анализ равновесия в некооперативных играх?
- Виталий Кочеватов.
 - Джон фон Нейман.
 - Джон Форбс Нэш-младший.
 - Михаил Исаков.
19. Что такое седловая точка в матричной игре?
- Позиция элемента, который является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.
 - Элемент, который является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.
 - Наибольший элемент матрицы.
 - Средний ожидаемый выигрыш.
20. Какое условие необходимо и достаточно для существования седловой точки в матричной игре?
- Наличие общей доминирующей стратегии для каждого игрока.
 - Равенство нижней и верхней цены игры ($\underline{v} = \bar{v}$).
 - Квадратичность матрицы.
 - Все элементы матрицы должны быть неотрицательными.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе "Ответы к тестам и рекомендации", смотри **Таблица ключей к тесту # 1.1**.

1.2 Тематические вопросы для проработки

- Что подразумевается под термином «теория игр»?
- Что делает теорию игр уникальным направлением в прикладной математике?
- Оцените корректность этих словосочетаний с позиции терминологии теории игр: «игра как модель», «модель игры», «игровая модель» .
- Конкретизируйте компоненты игры в нормальной форме и попробуйте представить классификацию игр по этим компонентам.
- Что называют стратегией игрока и почему в определении этого термина так важно словосочетание «допустимые действия»?
- Антагонизм как вид взаимодействия. Как формализуется антагонизм в теории игр?
- Приведите несколько примеров антагонистического столкновения интересов субъектов принятия решения из вашего будущей профессиональной сферы деятельности.

8. Могут ли в качестве игроков выступать не субъекты деятельности? Если да, то приведите в качестве примера пару ситуаций, которые могут быть формализованы в виде игры.
9. Какими бывают антагонистические игры в зависимости от множеств стратегий игроков?
10. Приемлемые ситуации в игре для игрока и ситуации равновесия. В чем отличие между ними и что понимается под словами *равновесная стратегия игрока*?
11. Различие и соотношение терминов «оптимальность» и «равновесность» в описании поведения игроков и в современной терминологии теории игры.
12. Роль информированности игроков в процессе выбора стратегий поведения. Как стратегия игрока связана с его информированностью в игре?
13. Сценарии реализации игры (игрового взаимодействия): роль и значение в методологии анализа, классификация.
14. Что называют решением игры?
15. Говоря о методологии теории игр, позволяющей делать рекомендации относительно равновесного поведения игроков, уточните, каким гарантиями могут сопровождаться такие рекомендации.
16. Какие игры называются стратегически эквивалентными и какими свойствами обладает стратегическая эквивалентность как отношение игр?
17. Что называют подыгрой игры? Приведите пример на матричной игре.
18. Доминирование и равновесные стратегии игроков. Как соотносятся равновесные и доминирующие стратегии игрока?
19. Как соотносятся понятия «седловая точка», «равновесие в доминирующих стратегиях» и «равновесие по Нэшу»?
20. Принципы и допущения, положенные в основу «классического» теоретико-игрового анализа. Каково современное положение теории относительно классических допущений?

1.3 Контроль освоения теоретического материала

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 1.2:

1. Что лучше всего описывает предмет изучения некооперативной теории игр?

- a) Модели принятия решений в условиях конфликта.
- b) Экономическое поведение агентов на рынке.
- c) Психологию взаимодействия между людьми.
- d) Модели управления организационными системами.
- e) Анализ равновесия в теории кооперативных игр.

2. Что является уникальностью игр относительно других математических моделей?

- a) Несовпадение интересов субъектов принятия решений.
- b) Влияние действий игроков на результат каждого игрока.
- c) Отсутствие оптимального поведения в классическом смысле.
- d) Наличие коалиций в структуре.
- e) Невозможность достижения равновесия по Нэшу.

3. Что называется игрой в нормальной форме?

- a) Модель, заданная стратегическими множествами игроков и их функциями выигрыша.
- b) Модель, в которой игроки принимают решения одновременно и независимо друг от друга.
- c) Игра с нулевой суммой выигрышей игроков.
- d) Модель с бесконечным множеством стратегий хотя бы у одного игрока.
- e) Столкновение двух лиц с противоположными интересами.

4. Какими свойствами обладает отношение стратегической эквивалентности игр?

- a) Рефлексивность.
- b) Симметричность.
- c) Транзитивность.
- d) Аддитивность.
- e) Мультипликативность.

5. Всякая ли игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна игре с нулевой суммой?

- a) Да, всегда.
- b) Да, при определенных условиях.
- c) Нет, это неверное утверждение.
- d) Только если сумма выигрышей игроков в ситуации пропорциональна их количеству.
- e) Только если $k = 1$ и сумма констант $c_j = -c$, где $j = \overline{1, n}$.

6. Антагонистическая игра — это:

- a) Игра двух лиц с противоположными интересами.
- b) Игра с ненулевой суммой.
- c) Игра, в которой $\mathcal{H}_1(s) = -\mathcal{H}_2(s)$, $\forall s \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.
- d) Всегда матричная игра.
- e) Может быть как матричной, так и бесконечной игрой.

7. Когда матричная игра называется симметричной?

- a) Когда множества стратегий игроков равны ($\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$).
- b) Когда выигрыши зависят от пары стратегий, а не от имен игроков.
- c) Когда $\mathcal{H}_1(s_1, s_2) = \mathcal{H}_2(s_2, s_1)$ при любых стратегиях игроков.
- d) Когда матрица выигрышей косо-симметрична.
- e) Когда она имеет седловую точку.

8. Когда стратегия $i \in \mathcal{S}_1$ игрока 1 строго доминирует стратегию $k \in \mathcal{S}_1$ в матричной игре с матрицей выигрышей $\mathbb{C}_{m \times n} = (c_{ij})$?

- a) Когда $c_{ij} > c_{kj}$, где $j = \overline{1, n}$.
- b) Когда $c_{ij} \geq c_{kj}$, где $j = \overline{1, n}$.
- c) Когда $c_{ij} > c_{kj}$ хотя бы при одном $j \in S_2$.
- d) Когда $c_{ij} = c_{kj}$, где $j = \overline{1, n}$.
- e) Когда $c_{ij} < c_{kj}$, где $j = \overline{1, n}$.

9. Какое утверждение о доминировании верно?

- a) Игрок всегда предпочтет доминируемую стратегию.
- b) Игрок скорее всего реализует доминирующую стратегию (если она есть).
- c) Выбор слабо доминирующих стратегий никогда не приводит к потере равновесия.
- d) Выбор строго доминирующих стратегий может привести к потере равновесия.
- e) Порядок удаления слабо доминируемых стратегий неважен.

10. Что может привести к потере равновесия в игре?

- a) Удаление строго доминируемых стратегий.
- b) Удаление слабо доминируемых стратегий.
- c) Изменение порядка удаления слабо доминируемых стратегий.
- d) Нахождение седловой точки.
- e) Принцип минимакса.

11. Что входит в достоинства равновесия по Нэшу?

- a) Устойчивость против индивидуального отклонения игроков.
- b) Устойчивость против группового отклонения игроков.
- c) То, что ни одному игроку невыгодно отклоняться от ситуации, если другие придерживаются своих стратегий, входящих в ситуацию равновесия.

- d) То, что каждый игрок выбрал наилучший ответ на наилучшие ответы конкурентов.
- e) Всегда единственность решения в условиях, когда игроки выбирают свои действия одновременно и независимо друг от друга.

12. В чем ключевое отличие равновесия по Нэшу от определения приемлемой для всех игроков ситуации в игре?

- a) Равновесие по Нэшу строится как наилучший ответ игрока на наилучшие ответы конкурентов.
- b) Равновесие Нэша есть только в играх с нулевой суммой.
- c) Равновесие Нэша требует последовательного выбора действий.
- d) Равновесие Нэша — это всегда ситуация в доминирующих стратегиях.
- e) Равновесие Нэша не гарантирует никакой устойчивости в игре.

13. Какое неравенство справедливо для функции выигрыша $\mathcal{H}_1(s_1, s_2)$ в седловой точке (s_1^*, s_2^*) ?

- a) $\mathcal{H}_1(s_1, s_2^*) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2^*), \forall s_1 \in S_1$.
- b) $\mathcal{H}_1(s_1^*, s_2) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2^*), \forall s_2 \in S_2$.
- c) $\mathcal{H}_1(s_1, s_2^*) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2^*) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2), \forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.
- d) $\mathcal{H}_1(x^*, y^*) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} \mathcal{H}_1(s_1, s_2)$.
- e) $\mathcal{H}_1(x^*, y^*) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} \mathcal{H}_1(s_1, s_2)$.

14. Чем отличается понятие седловой точки в теории игр от аналогичного понятия в геометрии?

- a) В теории игр на седловой точке должен достигаться максимум по первой координате и минимум по второй.
- b) В геометрии аналитичность экстремумов не обязательна.
- c) В теории игр седловая точка часто оказывается на границе области задания функции.

- d) В геометрии седлообразность не зависит от направлений возрастания/убывания функции.
- e) В теории игр аналитичность экстремумов не обязательна, в отличие от геометрии (где нужны производные).

15. Как соотносятся нижняя и верхняя цены игры в любой матричной игре с матрицей выигрышей вида $C_{m \times n} = (c_{ij})$?

- a) $\underline{v} \leq \bar{v}$.
- b) $\underline{v} \geq \bar{v}$.
- c) $\underline{v} = \bar{v}$, в любой ситуации (i, j) .
- d) $\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} \{c_{ij}\} = \underline{v}$.
- e) $\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\} = \bar{v}$.

16. Когда в матричной игре существует седловая точка?

- a) Всегда, если игра конечна.
- b) Только когда $\underline{v} = \bar{v}$.
- c) Когда соответствующий точке выигрыш одновременно наибольший в своем столбце и наименьший в своей строке.
- d) Если игроки договорятся об использовании пары стратегий, то ни у одного из них не будет причин нарушить соглашение.
- e) Если существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

17. Что такое супремум функции $\mathcal{H}(s)$ на множестве $\mathcal{S}$?

- a) Наибольшая из всех верхних границ функции $\mathcal{H}(s)$.
- b) Наименьшая из всех верхних границ функции $\mathcal{H}(s)$.
- c) Инфимум функции $\mathcal{H}(s)$ на $\mathcal{S}$.
- d) Максимум функции, если он достигается.
- e) Выигрыш в седловой точке.

18. Что утверждают неравенства минимаксов для функции $f(x, y)$?

- a) $\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y)$.
- b) $\sup_x \inf_y f(x, y) \geq \inf_y \sup_x f(x, y)$.
- c) $\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$.
- d) Если внешние экстремумы достигаются, то

$$\max_x \inf_y f(x, y) \leq \min_y \sup_x f(x, y).$$

- e) Равенство минимаксов всегда выполняется, что обеспечивает существование седловой точки в матричной игре.

19. Что можно сказать о значениях функции во всех её седловых точках (если их несколько)?

- a) Они всегда равны друг другу.
- b) Они могут отличаться.
- c) Они равны общему значению минимаксов.
- d) Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — седловые точки, то (x_1, y_2) и (x_2, y_1) также будут седловыми.
- e) Значение зависит от порядка нахождения точек.

20. Что из перечисленного верно относительно слабо доминируемых стратегий и равновесия по Нэшу?

- a) Слабо доминируемые стратегии не могут входить в равновесия.
- b) Исключение строго доминируемых стратегий не может привести к потере равновесия.
- c) Строго доминируемая стратегия, очевидно, не может быть частью равновесия по Нэшу.
- d) Слабо доминируемые стратегии могут входить в равновесия.
- e) Равновесие по Нэшу устойчиво против группового отклонения.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 1.2**.

1.4 Итоговый контроль знаний и умений

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 1.3:

1. Что такое теория игр?

- a) Направление в прикладной математике, исследующее модели принятия решений в условиях конфликта.
- b) Раздел экономики, изучающий взаимодействие фирм на рынке.
- c) Исследование операций с комбинированием стратегий.
- d) Наука о стратегическом взаимодействии между рациональными агентами.
- e) Формализация конфликтов.

2. Что называют конфликтом в теории игр?

- a) Столкновение интересов субъектов принятия решений.
- b) Ситуация, в которой игроки имеют несовпадающие интересы.
- c) Процесс, в котором результат каждого игрока зависит от действий других.
- d) Вариант b, когда он приводит к необходимости определения равновесного поведения.
- e) Модель игры с нулевой суммой.

3. Какие элементы в совокупности определяют игру в нормальной форме?

- a) Множество игроков $\mathcal{N}$.
- b) Множество стратегий $\{\mathcal{S}_i\}_{i=1}^n$, для каждого игрока $i \in \mathcal{N}$.
- c) Функции выигрыша $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n$, для каждого игрока $i \in \mathcal{N}$.
- d) Модель вида

$$\Gamma = \langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i=1}^n, \{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n \rangle,$$

где $|\mathcal{N}| = m, m > n$.

- e) Правила задающие последовательность ходов игроков.

4. Что характеризует ситуацию равновесия в игре?

- a) Ситуация, приемлема хотя бы для одного игрока.
- b) Ситуация, в которой ни один игрок не может индивид. отклонением улучшить свой выигрыш.
- c) Ситуация, которая приемлемая для всех игроков.
- d) Ситуация, в которой функция выигрыша максимальна для всех игроков одновременно.
- e) Ситуация, при которой достигается равенство минимаксов.

5. Антагонистическая игра — это:

- a) Игра с ненулевой суммой.
- b) Игра с постоянной суммой.

- с) Игра двух лиц с противоположными интересами.
- д) Игра, в которой $\mathcal{H}_1(s) = -\mathcal{H}_2(s)$ для всех ситуаций s .
- е) Матричная игра с кососимметричной матрицей выигрышей, если она симметрична.
- 6. Что означает слабое доминирование стратегии $i \in \mathcal{S}_1$ над стратегией $k \in \mathcal{S}_1$ для игрока 1 в матричной игре с матрицей выигрышей $\mathbb{C}_{m \times n} = (c_{ij})$?**
- а) $c_{ij} \geq c_{kj}$ для всех $j = 1, \dots, n$.
- б) $\exists j \in \{1, \dots, n\} : c_{ij} > c_{kj}$.
- с) $c_{ij} \geq c_{kj}$ для всех j , и хотя бы одно неравенство строгое.
- д) $c_{ij} > c_{kj}$ при $j = 1, \dots, n$.
- е) $c_{ij} < c_{kj}$ при $j = 1, \dots, n$.
- 7. Какие последствия имеет исключение строго доминируемых стратегий из игры?**
- а) Всегда приводит к матрице выигрышей меньшей размерности.
- б) Может привести к потере равновесия в игре.
- с) Никогда не приводит к потере ситуации равновесия по Нэшу.
- д) Может привести к нахождению равновесных стратегий.
- е) Гарантирует существование седловой точки.
- 8. Что характерно для ситуации равновесия по Нэшу?**
- а) Устойчивость против группового отклонения.
- б) Единственность равновесия.
- с) Устойчивость против индивидуального отклонения.
- д) Это наилучший ответ игрока на наилучшие ответы конкурентов.
- е) Оно всегда является равновесием в доминирующих стратегиях.
- 9. Что такое седловая точка функции выигрыша $\mathcal{H}_1(s_1, s_2)$ в антагонистической игре $\Gamma = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{H}_1 \rangle$?**
- а) Точка (s_1^*, s_2^*) , в которой
- $$\mathcal{H}_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \sup_{s_2 \in \mathcal{S}_2} \mathcal{H}_1(s_1, s_2).$$
- б) Точка (s_1^*, s_2^*) , в которой достигается максимум по первой координате и минимум по второй.
- с) Ситуация равновесия по Нэшу.
- д) Точка (s_1^*, s_2^*) , в которой
- $$\mathcal{H}_1(s_1, s_2^*) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2^*) \leq \mathcal{H}_1(s_1^*, s_2)$$
- для всех $s_1 \in \mathcal{S}_1, s_2 \in \mathcal{S}_2$.
- е) Значение функции выигрыша, равное цене игры.
- 10. Какое условие гарантирует существование седловой точки в матричной игре?**
- а) Все стратегии игроков являются строго доминирующими.
- б) Игра является симметричной.
- с) Игра имеет нулевую сумму.
- д) Общие для игроков цены игры ($\underline{v} = \bar{v}$).
- е) Наличие усеченной матрицы выигрышей.
- 11. Что такое цена матричной игры?**
- а) Выигрыш первого игрока в любой ситуации равновесия.
- б) Величина $v = \max_i \min_j c_{ij}$.
- с) Общее значение минимаксов, если они равны.
- д) Выигрыш первого игрока в седловой точке.
- е) Всегда положительное число.

12. В игре с матрицей выигрышей первого игрока:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} = \mathbb{D}$$

Какие стратегии первого игрока являются доминируемыми?

- a) x_3 строго доминируется x_2 .
- b) x_1 строго доминируется x_4 .
- c) x_4 слабо доминируется x_2 .
- d) x_2 доминируется x_4 .
- e) Никакие.

13. (на основе данных предыдущего вопроса). Какие стратегии игрока 2 являются доминируемыми?

- a) y_2 строго доминируется y_1 .
- b) y_4 строго доминируется y_1 .
- c) y_3 слабо доминируется y_1 .
- d) y_1 доминируется y_3 .
- e) Никакие.

14. Какие ситуации равновесия в слабо доминирующих стратегиях могут быть найдены в игре с матрицей $\mathbb{D}$ (из вопроса 12), если, переходя к нестрогому доминированию, сначала исключить x_4 (т. к. $x_2 \succeq x_4$)?

- a) (x_4, y_1) .
- b) (x_4, y_3) .
- c) (x_2, y_1) .
- d) (x_2, y_3) .
- e) Обе ситуации (x_2, y_1) и (x_4, y_1) .

15. Какие ситуации равновесия в слабо доминирующих стратегиях могут быть найдены, если начать исключение слабо доминируемых стратегий с y_3 (так как $y_1 \succeq y_3$) в матрице из вопроса 12?

- a) (x_2, y_3) .
- b) (x_4, y_3) .
- c) (x_2, y_1) .
- d) (x_4, y_1) .
- e) Только (x_2, y_1) .

16. В игре с матрицей выигрышей:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} = \mathbb{D}$$

Какая стратегия игрока 1 является доминирующей (над всеми остальными)?

- a) x_1 .
- b) x_2 .
- c) x_3 .
- d) x_4 .
- e) Никакая.

17. Какова цена игры в равновесии, найденном путем последовательного исключения слабо/строго доминируемых стратегий в матрице из вопроса 16?

- a) 0.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 3.
- e) 4.

18. В игре с матрицей выигрышей первого игрока:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Какие ситуации являются равновесием в слабо доминирующих стратегиях?

- a) (x_1, y_1) .

- b) (x_2, y_1) .
- c) (x_2, y_2) .
- d) (x_2, y_3) .
- e) (x_4, y_4) .

19. В игре с матрицей выигрышей из предыдущего вопроса, чему равны выигрыши первого игрока в ситуациях равновесия?

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.

- e) 5.

20. Для функции $\mathcal{H}(x, y) = x + y$, заданной в области

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

какая точка является седловой?

- a) $(0, 0)$.
- b) $(1, 1)$.
- c) $(0, 1)$.
- d) $(1, 0)$.
- e) $(0.5, 0.5)$.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 1.3.**

Тема 2. Смешанное расширение и методология решения матричных игр

2.1 Тест на базовое освоение теоретического материала

Рекомендация к прохождению: после лекционного занятия по теме для рефлексивного контроля уровня освоения теоретического материала.

Задание: для каждого вопроса в тесте выберите верный вариант ответа.

Вопросы теста # 2.1:

1. Что такое смешанная стратегия игрока в матричной игре?

- a) Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока.
- b) Фиксированный выбор одной чистой стратегии.
- c) Матрица выигрышей игрока.
- d) Математическое ожидание выигрыша.

- a) Список выигрышей игроков.
- b) Вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.
- c) Множество седловых точек.
- d) Линейную комбинацию выигрышей противника.

3. Каким свойством обладает множество смешанных стратегий каждого игрока в конечномерном пространстве?

- a) Является неограниченным.

2. Что содержательно представляет собой смешанная стратегия?

- b) Является дискретным множеством точек.
- c) Является компактом.
- d) Является пустым множеством.
- 4. Что называется спектром смешанной стратегии s_1 ?**
- a) Сумма ее компонент.
- b) Множество индексов чистых стратегий, которые выбираются с положительной вероятностью.
- c) Максимальный выигрыш при данной стратегии.
- d) Количество чистых стратегий у противника.
- 5. Чему равно математическое ожидание выигрыша $H(s_1, s_2)$ в смешанном расширении игры?**
- a) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \xi_i \eta_j$.
- b) $\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} c_{ij}$.
- c) $\sum_{i=1}^m \xi_i c_i + \sum_{j=1}^n \eta_j c_j$.
- d) $c_{ij} \cdot \Theta$.
- 6. В каком случае число v_C является значением игры в ситуации равновесия (s_1^*, s_2^*) ?**
- a) Если $v_C = \max_{1 \leq i \leq m} c_{ij}$.
- b) $H(s_1, s_2^*) \leq H(s_1^*, s_2^*) \leq H(s_1^*, s_2)$ для всех допустимых s_1, s_2 .
- c) Если $v_C = 0$ всегда.
- d) Если спектр стратегии пуст.
- 7. Как изменится значение игры $v_{C'}$, если матрица $C' = \alpha C + \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ состоит из элементов β ?**
- a) $v_{C'} = v_C + \alpha + \beta$.
- b) $v_{C'} = \alpha v_C + \beta$.
- c) $v_{C'} = v_C$.
- d) $v_{C'} = \beta/\alpha$.
- 8. О чем основная теорема матричных игр (фон Нейман, 1928)?**
- a) Не всякая игра имеет решение.
- b) Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.
- c) Равновесие существует только при наличии седловой точки.
- d) Матричные игры не имеют графического решения.
- 9. Каков первый шаг алгоритма решения смешанной матричной игры по предложенной методике?**
- a) Нахождение спектра стратегий.
- b) Построение строго положительной матрицы путем добавления константы β .
- c) Вычисление определителя матрицы.
- d) Удаление доминирующих строк.
- 10. С помощью какого метода предлагается находить векторы x, y и число Θ в алгоритме решения?**
- a) Методом Гаусса.
- b) Решением задач линейного программирования (ЗЛП).
- c) Методом итераций.
- d) Принципом минимакса.
- 11. Какое условие необходимо и достаточно для равновесности смешанной ситуации (s_1^*, s_2^*) в игре?**
- a) $H(i, s_2^*) \leq H(s_1^*, s_2^*) \leq H(s_1^*, j)$ для всех чистых стратегий i, j .
- b) $H(i, s_2^*) = 0$, для всех i .
- c) Общий спектр этих стратегий.
- d) Симметричность матрицы выигрышей.
- 12. Чему равно значение игры v_C ?**
- a) $\max_{s_1 \in S_1} \min_{j \in N} H(s_1, j) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{i \in M} H(i, s_2)$
- b) Среднему арифметическому всех элементов матрицы.
- c) Сумме вероятностей в спектре.

- d) $\min_{(i,j) \in S_1 \times S_2} c_{ij}$
13. Что верно о вероятности чистой стратегии ξ_i^* , если $H(i, s_2^*) < v_C$?
- Она становится максимальной.
 - Она равна 0.
 - Она равна 1.
 - Она не изменяется.
14. Какая стратегия называется существенной (активной)?
- Та, что дает максимальный выигрыш в любой ситуации.
 - Та, что входит в спектр хотя бы одной равновесной стратегии.
 - Первая строка матрицы.
 - Доминирующая над другими.
15. Когда стратегия s'_1 доминирует стратегию s''_1 для первого игрока?
- Если выигрыши при s'_1 всегда меньше того, что доставляет s''_1 .
 - Если $s'_1 c^j \geq s''_1 c^j$ для всех чистых стратегий j второго игрока
 - При их эквивалентности.
 - Если s'_1 — это чистая стратегия, а s''_1 — смешанная.
16. Можно ли утверждать, что игроки не должны использовать строго доминируемые стратегии?
- Нет, они могут быть полезны.
 - Да, так как никакая равновесная стратегия не является строго доминируемой.
 - Только когда есть седловая точка.
 - Только для второго игрока.
17. Что можно сделать с доминируемой строкой матрицы в игре?
- Заменить её на нулевую.
 - Вычеркнуть из матрицы, при этом значение игры сохранится.
 - Сделать её основной стратегией.
 - Поменять местами со столбцом.
18. Как называется выпуклая оболочка чистых стратегий (ортов пространства)?
- Гипербола.
 - Фундаментальный симплекс.
 - Конус решений.
 - Матричный многогранник.
19. Какое свойство характерно для выпуклого конуса?
- Конус всегда конечен.
 - Конус замкнут относительно операции сложения.
 - Конус не содержит нулевой точки.
 - Конус состоит только из целых чисел.
20. В каком случае точка выпуклого множества называется крайней?
- Если она лежит в его центре.
 - Если она не является внутренней точкой ни для какого отрезка, принадлежащего множеству.
 - Если она имеет отрицательные координаты.
 - Если она и есть значение игры.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 2.1.**

2.2 Список тематических вопросов для проработки

1. Дайте определение смешанной стратегии игрока в матричной игре.
2. В каком случае игроки могут открыто придерживаться своих равно-весных чистых стратегий?
3. Что такое спектр смешанной стратегии $s_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m)$?
4. Дайте определение смешанного расширения матричной игры Γ_C и сформулируйте определение ситуации равновесия по Нэшу в смешанном расширении.
5. Как вычисляется математическое ожидание выигрыша $\mathcal{H}(s_1, s_2)$ в ситуации, представленной смешанными стратегиями игроков?
6. Что гласит основная теорема матричных игр (теорема Фон Неймана)?
7. Какие изменения происходят со множеством равновесий $\mathcal{P}(\Gamma_C)$ и значением игры v_C при линейном преобразовании матрицы выигрышей $C' = \alpha C + B$?
8. Опишите общий алгоритм решения матричной игры в классе смешанных стратегий через сведение игры к задаче линейного программирования.
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, чтобы ситуация (s_1^*, s_2^*) была равновесием по Нэшу.
10. Какое равенство, связывающее максимин и минимакс по чистым стратегиям противника, является критерием равновесия?
11. Сформулируйте теорему о дополняющей нежесткости для стратегий игроков.
12. Что можно сказать о вероятности ξ_i^* в равновесной стратегии игрока 1, если выигрыш $\mathcal{H}(i, s_2^*)$ строго меньше значения игры v_C ?
13. Какая чистая стратегия называется существенной (или активной)?
14. Какому значению равен выигрыш игрока при использовании любой его существенной стратегии против равновесной стратегии оппонента?
15. Дайте определение доминирования смешанной стратегии s'_1 над s''_1 . В чем заключается разница между строгим и нестрогим доминированием стратегий?
16. Сформулируйте утверждение о связи доминирования и равновесных смешанных стратегиях.
17. Почему игрокам не следует использовать строго доминируемые стратегии?
18. Каким свойством обладает значение игры $v_{C'}$ при вычеркивании из матрицы доминируемой строки?

19. Что такое выпуклая линейная комбинация точек и как это понятие используется для исключения стратегий?
20. Как связаны чистые стратегии игрока и крайние точки фундаментального симплекса смешанных стратегий?

2.3 Контроль освоения теоретического материала

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 2.2:

1. Смешанная стратегия игрока в матричной игре – это

- a) Фиксированная (детерминированная) чистая стратегия.
- b) Множество чистых стратегий игрока, упорядоченное по предпочтению.
- c) Функция выигрыша в смешанном расширении игры.
- d) Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока.

2. Пусть матричная игра Γ_C имеет размерность $(m \times n)$, а смешанная стратегия игрока 1 записана как $s_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Какие условия должны выполняться?

- a) $\sum_{j=1}^m \xi_j = 1$.
- b) $\xi_j > 0, j \in M = \{1, \dots, m\}$.
- c) $\sum_{j=1}^m \xi_j = 0$.
- d) $\xi_j \geq 1, j \in M = \{1, \dots, m\}$.

3. Математическое ожидание выигрыша $\mathcal{H}(s_1, s_2)$ в ситуации из смешанных стратегий игроков $s_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $s_2 = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ имеет вид:

- a) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \xi_i \eta_j$.
- b) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} (\xi_i + \eta_j)$.
- c) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \max_i \min_j c_{ij}$.
- d) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \min_j \max_i c_{ij}$.

4. В каких формах записи (эквивалентно) можно представить функцию выигрыша $\mathcal{H}(s_1, s_2)$ игрока при реализации смешанной ситуации (s_1, s_2) ?

- a) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = (s_1 C) s_2^T$.
- b) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \det(C) \cdot \|s_1\| \|s_2\|$.
- c) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = s_1 (C s_2^T)$.
- d) $\mathcal{H}(s_1, s_2) = \langle s_1, s_2 \rangle$.

5. Укажите верное определение спектра смешанной стратегии $s_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathcal{S}_1$.

- a) $M_s = \{i \mid i \in M, \xi_i = 0\}$.
- b) $M_s = \{i \mid i \in M, \xi_i \geq 1\}$.
- c) $M_s = \{i \mid i \in M, \xi_i > 0\}$.
- d) $M_s = \{i \mid i \in M, \xi_i < 0\}$.

6. Что можно утверждать про множества смешанных стратегий $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ (при конечных наборах чистых стратегий игроков)?

- a) Каждое из них обязательно является бесконечномерным пространством.
- b) Каждое из них всегда открыто и не ограничено.
- c) Каждое из них является компактом в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.
- d) Они не обладают свойствами выпуклости.

7. Основная теорема матричных игр (теорема Фон Неймана) гласит:

- a) Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.
- b) Всякая матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях.
- c) Всякая матричная игра имеет ровно одно равновесие по Нэшу.
- d) Любая матричная игра решается графическим методом.

8. Стратегии s'_1 и s''_1 называются эквивалентными, если:

- a) Они совпадают покомпонентно.
- b) Они дают одинаковый выигрыш против любой стратегии $s_2 \in S_2$.
- c) Каждая из них строго доминирует другую.
- d) Их спектры совпадают.

9. В алгоритме решения матричной игры Γ_C (в классе смешанных стратегий) первый шаг состоит в том, чтобы:

- a) Построить строго положительную матрицу $C = C' + B$, где B состоит из одинаковых $\beta > 0$.
- b) Транспонировать матрицу C' и заменить максимумы на минимумы.
- c) Найти седловую точку в C' (если ее нет, алгоритм неприменим).
- d) Заменить C' на матрицу из одних единиц.

10. Число v_C называется:

- a) Спектром игры.
- b) Значением (ценой) игры.
- c) Максимином матрицы.
- d) Средней вероятностью выигрыша.

11. Если найдены $x \in \mathbb{R}_+^{1 \times m}$, $y \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ – решения пары двойственных ЗЛП и $\Theta \in \mathbb{R}_+$, то равновесные стратегии игроков в соответствующей матричной игре вычисляются как:

- a) $s_1^* = \frac{x}{\Theta}$, $s_2^* = \frac{y}{\Theta}$.
- b) $s_1^* = \Theta x$, $s_2^* = \Theta y$.
- c) $s_1^* = x - \Theta$, $s_2^* = y - \Theta$.
- d) $s_1^* = \frac{x}{y}$, $s_2^* = \frac{y}{x}$.

12. Согласно алгоритму из лекции, значение игры Γ_C выражается через Θ и β как:

- a) $\Theta + \beta$.
- b) $\frac{\Theta}{\beta}$.
- c) $\beta - \frac{1}{\Theta}$.
- d) $\frac{1}{\Theta} - \beta$.

13. Для проверки равновесности ситуации (s_1^*, s_2^*) достаточно проверять не все s_1, s_2 , а только:

- a) Чистые стратегии $i \in M$ и $j \in N$ в неравенствах

$$\mathcal{H}(i, s_2^*) \leq \mathcal{H}(s_1^*, s_2^*) \leq \mathcal{H}(s_1^*, j).$$

- b) Только стратегии из спектров $M_{s_1^*}$ и $N_{s_2^*}$.
- c) Только одну произвольную стратегию каждого игрока.
- d) Только седловые точки матрицы C .

14. Равновесность ситуации обеспечивается равенством:

$$a) \min_{1 \leq i \leq m} \mathcal{H}(i, s_2^*) = \max_{1 \leq j \leq n} \mathcal{H}(s_1^*, j).$$

$$b) \max_{s_1 \in S_1} \max_{j \in N} \mathcal{H}(s_1, j) = \min_{s_2 \in S_2} \min_{i \in M} \mathcal{H}(i, s_2).$$

c) $\mathcal{H}(s_1^*, s_2^*) = 0$ в любой игре.

$$d) \max_{1 \leq i \leq m} \mathcal{H}(i, s_2^*) = \min_{1 \leq j \leq n} \mathcal{H}(s_1^*, j).$$

15. Какие утверждения о компонентах равновесных стратегий верны?

a) Если $\mathcal{H}(i, s_2^*) < v_C$, то $\xi_i^* = 0$.

b) Если $v_C < \mathcal{H}(s_1^*, j)$, то $\eta_j^* = 0$.

c) Если $\xi_i^* > 0$, то обязательно $\mathcal{H}(i, s_2^*) = v_C$.

d) Если $\eta_j^* > 0$, то обязательно $\mathcal{H}(s_1^*, j) = 0$.

16. Существенная (активная) чистая стратегия - это...

a) Чистая стратегия, которая входит в некоторую равновесную смешанную стратегию с положительной вероятностью.

b) Любая чистая стратегия из M или N , независимо от решения.

c) Стратегия, доминирующая все остальные стратегии игрока.

d) Стратегия, для которой $\mathcal{H}(i, s_2) = v_C$ при всех $s_2 \in S_2$.

17. Расширенной смешанной стратегией называется:

a) Стратегия, полученная удалением одной компоненты.

b) Стратегия, в которой все вероятности положительны.

c) Вектор, полученный вставкой нуля на фиксированное место и увеличением размерности на 1.

d) Доминирующая стратегия, полученная через линейные преобразования.

18. "Если для чистой стратегии $i \in M$ и смешанной стратегии $s_2 \in S_2$ справедливо $c_i s_2 = v_C$, то стратегия $i \dots$ смешанную стратегию s_2 ".

a) Доминирует.

b) Уравновешивает.

c) Исключает.

d) Рандомизирует.

19. Доминирование в смешанных стратегиях для игрока 1: стратегия s_1' доминирует s_1'' , если:

$$a) \min_j \{s_1' c_j\} \leq \min_j \{s_1'' c_j\}.$$

$$b) \exists j \in N : s_1' c_j \geq s_1'' c_j.$$

$$c) \forall i \in M : c_i s_1' \leq c_i s_1''.$$

$$d) \forall j \in N : s_1' c_j \geq s_1'' c_j.$$

20. Если в матричной игре Γ_C стратегия s_i' доминирует некоторую равновесную стратегию s_i^* , то:

a) Игра теряет одно из равновесий по Нэшу.

b) цена игры (v_C) обязательно становится равной нулю.

c) Стратегия s_i' также равновесна.

d) Доминирование возможно только если s_i' строго доминируема.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 2.2.**

2.4 Итоговый контроль знаний и умений

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 2.3:

1. Пусть $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ какие из следующих заключений справедливы?

- a) $\underline{v} = 3$.
- b) $\bar{v} = 5$.
- c) $\underline{v} = 2$.
- d) $\bar{v} = 7$.
- e) Седловая точка в чистых стратегиях отсутствует.

2. Вычислите ожидаемый выигрыш $\mathcal{H}(s_1, s_2)$, если $s_1 = (0.5, 0.5)$, $s_2 = (0.5, 0.5)$, а матрица выигрышей есть

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) $\mathcal{H} = 2.25$.
- b) $\mathcal{H} = 9/4$.
- c) $\mathcal{H} = 2.5$.
- d) Выигрыш равен $s_1 \mathbb{C} s_2^T$.
- e) Значение равно среднему арифметическому всех элементов.

3. В матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

какие сокращения допустимы на первом шаге?

- a) Удаление строки 1, т. к. $c_3 \succeq c_1$.
- b) Удаление строки 4, так как она минимальна.
- c) Удаление столбца 1, так как он доминирует комбинацию столбцов $0.5c^2 + 0.5c^3$.
- d) Матрицу можно свести к размерности 2×2 .
- e) Удаление столбца 4, так как в нем есть 6.

4. Согласно основной теореме матричных игр (фон Нейман, 1928):

- a) Решение в смешанных стратегиях существует всегда.
- b) Существует ситуация равновесия (s_1^*, s_2^*) .
- c) Значение игры v_C всегда постоянно и равно 0.
- d) Множества смешанных стратегий являются компактами.
- e) Любая игра имеет седловую точку в чистых стратегиях.

5. Если $v_C = 2$ в Γ_C , найдите цену игры $\Gamma_{C'}$ с матрицей $C' = 3C + 5$:

- a) $v_{C'} = 11$.
- b) $v_{C'} = 6 + 5$.
- c) Ситуации равновесия в обеих играх совпадают.
- d) $v_{C'} = 31$.
- e) Параметры $\alpha = 3$ и $\beta = 5$.

6. В матричной игре с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

исследуется ситуация (s_1^*, s_2^*) , где $s_1^* = s_2^* = (1/2, 1/4, 1/4)$. Какие из следующих заключений верны?

- a) Цена игры $v_C = 0$.
- b) $\mathcal{H}(1, s_2^*) = 0$.
- c) $\mathcal{H}(s_1^*, 2) = 0$.
- d) Это ситуация равновесия по Нэшу.
- e) Все три чистые стратегии являются существенными.

7. Решите игру с матрицей выигрышей

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равновесная стратегия игрока 1 имеет вид $s_1^* = (\xi, 1 - \xi)$, где:

- a) $\xi = 0.4$.
- b) $s_1^* = (2/5, 3/5)$.
- c) Цена игры $v_C = 2.2$.
- d) $v_C = 11/5$.
- e) $\xi = 0.5$.

8. В ЗЛП для игрока 1 при матрице выигрышей $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ограничения имеют вид:

- a) $4x_1 + 2x_2 \geq 1$.
- b) $0x_1 + 3x_2 \geq 1$.
- c) $(x_1 + x_2) \rightarrow \min$.
- d) $4y_1 + 0y_2 \leq 1$.
- e) Все $x_i \geq 0$.

9. Если $v_C = 1.6$ и $s_2^* = (0.8, 0, 0, 0.2)$, проверьте существенность стратегий игрока 1 для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} :$$

- a) Стратегия 1 существенна, так как $H(1, s_2^*) = 1.6$.
- b) Стратегия 2 существенна, так как $H(2, s_2^*) = 1.6$.
- c) Для игрока 1 имеем: $M_s = \{1, 2\}$.
- d) Только стратегия 1 является активной.
- e) Цена игры не совпадает со средним выигрышем по строкам.

10. Если при решении ЗЛП получено $\Theta = 5/12$ для игры с размерностью 2×2 без смещения ($\beta = 0$), то:

- a) Цена игры $v_C = 2.4$.
- b) Цена игры $v_C = 12/5$.
- c) Сумма компонент вектора x равна $5/12$.
- d) Значение игры равно 0.416 .
- e) Равновесная стратегия находится как x/Θ .

11. Если i -я строка матрицы строго доминируема:

- a) Она никогда не входит в спектр равновесной стратегии.
- b) Ее можно вычеркнуть без изменения цены игры.
- c) Игрок 1 обязан ее использовать для максимизации.
- d) Соответствующая ей координата ξ_i^* в равновесии равна 0.
- e) Это упрощает задачу линейного программирования.

12. Графический подход (графоаналитический метод) к решению матричной игры с размерностью $2 \times n$:

- a) Основан на геометрической интерпретации принципа минимакса.
- b) Ищет точку с максиминным значением для нижней огибающей.
- c) Применим для игр, где у одного из игроков 2 чистые стратегии.
- d) Позволяет визуально определить спектр активных стратегий.
- e) Всегда дает только целые значения цены игры.

13. Какие утверждения о множестве решений системы $x\mathbb{A} \leq 0$ верны?

- a) Это выпуклый конус.
- b) Множество замкнуто относительно операции сложения.
- c) Если x — решение, то $10x$ — тоже решение.
- d) Это всегда конечное множество точек.
- e) Содержит начало координат (нулевой вектор).

14. Чистая стратегия называется существенной (активной), если:

- a) Она выбирается в равновесии с вероятностью $\xi_i > 0$.
- b) Она уравнивает любую равновесную стратегию противника.

- с) Выигрыш на ней $\mathcal{H}(i, s_2^*)$ равен цене игры v_C .
- д) Она доминирует все остальные стратегии в матрице.
- е) Она принадлежит спектру равновесной стратегии.

15. Для игрока 1, имеющего три чистых стратегии множество S_1 это:

- а) 2-мерный симплекс в $\mathbb{R}^3$.
- б) Треугольник с вершинами в ортах $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
- с) Выпуклая оболочка трех точек.
- д) Единичный куб.
- е) Фундаментальный симплекс.

16. В игре с матрицей $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

- а) Цена игры $v_C = 2.4$.
- б) $s_1^* = (0.6, 0.4)$.
- с) $s_1^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.
- д) В игре есть седловая точка.
- е) Задачу можно решить графически.

17. В выпуклом многограннике смешанных стратегий чистые стратегии являются:

- а) Крайними точками.
- б) Ортами пространства $\mathbb{R}^m$.
- с) Граничными точками.
- д) Внутренними точками.
- е) Базисными векторами.

18. Для проверки ситуации (s_1, s_2) на равновесность достаточно:

- а) Убедиться, что

$$\max_i \mathcal{H}(i, s_2) = \min_j \mathcal{H}(s_1, j),$$

для всех допустимых чистых стратегий игроков (i, j) .

- б) Проверить выполнение необходимых и достаточных условий равновесности для всех чистых стратегий игроков.

- с) Проверить выполнение необходимых и достаточных условий равновесности только тех стратегии, которые входят в спектр.

- д) Показать, что

$$\mathcal{H}(i, s_2) \leq v \leq \mathcal{H}(s_1, j).$$

- е) Найти определитель матрицы.

19. Расширенная смешанная стратегия $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{R}^{m+1}$:

- а) Получается вставкой 0 на i -е место вектора из $\mathbb{R}^m$.
- б) Сохраняет значение цены игры в исходной игре Γ_C .
- с) Необходима при восстановлении решения из сокращен. матрицы.
- д) Является равновесной, если исходная была равновесной в $\Gamma_{C'}$.
- е) Всегда единичная.

20. Если спектр стратегии s_1 игрока 1 таков, что $M_s(s_1) = \{1, 3\}$, то это означает, что:

- а) Игрок использует только 1-ю и 3-ю чистые стратегии.
- б) Вероятности $\xi_1 > 0$ и $\xi_3 > 0$.
- с) Вероятность $\xi_2 = 0$.
- д) Стратегия 2 является лишней для данного равновесия.
- е) Сумма $\xi_1 + \xi_3 = 1$.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 2.3.**

Тема 3. Выпуклые игры на компактных множествах

3.1 Тест на базовое освоение теоретического материала

Рекомендация к прохождению: после лекционного занятия по теме для рефлексивного контроля уровня освоения теоретического материала.

Задание: для каждого вопроса в тесте выберите верный вариант ответа.

Вопросы теста # 3.1:

1. **Какое определение бесконечной антагонистической игры считается классическим?**
 - a) Игра с бесконечным числом игроков.
 - b) Антагонистическая игра, в которой хотя бы один игрок имеет бесконечное множество стратегий.
 - c) Игра, результат которой всегда равен бесконечности.
 - d) Матричная игра с дробными значениями выигрыша.
2. **В каком случае антагонистический конфликт называется вполне определенной игрой?**
 - a) Если нет ситуации равновесия.
 - b) Если максимум равен минимуму и внешние экстремумы достигаются.
 - c) Если стратегии игроков являются целыми числами.
 - d) Если функция выигрыша является линейной.
3. **Почему в игре на единичном квадрате с функцией выигрыша $H(x, y) = 1/x - 1/y$ внешние экстремумы могут не существовать?**
 - a) Из-за наличия точки $(0,0)$.
 - b) Из-за разрыва функции в нуле и неограниченности значений.
 - c) Потому что игроки выбирают только дискретные числа.
 - d) Из-за отсутствия смешанных стратегий.
4. **Что гарантирует ситуация ε -равновесия игроку при отклонении от стратегии?**
 - a) Его выигрыш увеличится ровно в два раза.
 - b) Его выигрыш может увеличиться, но не более чем на ε .
 - c) Его выигрыш обязательно уменьшится.
 - d) Его выигрыш не изменится ни при каких условиях.
5. **От чего зависит результат атаки на объект в теоретико-игровой модели распределения ресурсов?**
 - a) От общей суммы ресурсов.
 - b) От разности ресурсов атаки и защиты, если силы атаки больше.
 - c) Только от ценности объекта k_i .
 - d) Только от желания игрока 2.
6. **Что в теории БАИ понимается под смешанной стратегией?**
 - a) Случайный выбор между двумя чистыми стратегиями.
 - b) Вероятностная мера, определенная на множестве стратегий.
 - c) Вектор из нулей и единиц.
 - d) Среднее арифметическое всех выигрышей.

- 7. Какой интеграл используется для расчета выигрыша в смешанном расширении БАИ?**
- Интеграл Римана.
 - Интеграл Лебега-Стилтьеса.
 - Поверхностный интеграл второго рода.
 - Интеграл по замкнутому контуру
- 8. Какое направление в теории игр занимается созданием условий для навязывания поведения?**
- Матричный анализ.
 - Теория катастроф.
 - Дизайн механизмов.
 - Линейное программирование.
- 9. Как определяется метрика Хелли для стратегий первого игрока?**
- Как разность между максимальным и минимальным выигрышем.
 - Как супремум модуля разности функций выигрыша по всем стратегиям оппонента.
 - Как корень квадратный из суммы квадратов отклонений.
 - Как среднее значение функции выигрыша.
- 10. Что означает равенство метрики Хелли нулю для двух стратегий?**
- Стратегии приводят к идентичным результатам при любом ходе оппонента.
 - Стратегии являются оптимальными по Парето.
 - Игроки договорились о ничьей.
 - Игра закончилась поражением обоих игроков.
- 11. Свойство условной компактности метрического пространства стратегий подразумевает наличие:**
- Бесконечного множества седловых точек.
 - Конечной ε -сети для любого положительного числа ε .
 - Только одной чистой стратегии.
 - Нулевой функции выигрыша.
- 12. Игра считается условно компактной, если её пространства стратегий вполне ограничены в метрике:**
- Евклида.
 - Хелли.
 - Чебышева.
 - Хаусдорфа.
- 13. Согласно свойствам компактных игр, в них всегда существуют ε -равновесные смешанные стратегии с:**
- Бесконечным носителем.
 - Конечным спектром.
 - Отрицательной вероятностью.
 - Нулевым выигрышем.
- 14. Какая бесконечная антагонистическая игра называется непрерывной?**
- В которой игроки ходят по очереди.
 - В которой функция выигрыша непрерывна на декартовом произведении множеств стратегий.
 - Которая длится бесконечно.
 - В которой нет возможности проиграть.
- 15. Существование смешанного равновесия по Нэшу гарантировано в БАИ, если:**
- Игра проводится на компактных множествах и функция выигрыша непрерывна.
 - Игроки используют только чистые стратегии.
 - Функция выигрыша равна константе.
 - Множества стратегий являются дискретными.

16. Для игр на единичном квадрате множества стратегий игроков представляют собой:
- Множество целых чисел.
 - Отрезок $[0, 1]$.
 - Всю числовую прямую.
 - Единичная окружность.
17. Какова основная цель «обратных» задач в проектировании систем безопасности?
- Увеличение бюджета на охрану.
 - Рациональное формирование ценности охраняемых объектов.
 - Поиск паролей пользователей.
 - Сокращение штата сотрудников.
18. Математическая теория игр в современном научном контексте считается ядром:
- Лингвистики.
 - Кибернетики.
 - Социологии.
 - Психоанализа.
19. Что можно сказать о функции выигрышей непрерывной на компактном множестве ситуаций?
- Она равномерно непрерывна.
 - Она неограниченная.
 - Она принимает только отрицательные значения.
 - Она теряет смысл в теории игр.
20. Необходимым и достаточным условием существования значения игры v в БАИ является:
- Наличие стратегий, предел выигрыша на которых при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен v .
 - Равенства всех элементов платежной матрицы.
 - Отсутствие стратегий у игроков.
 - Постоянство функции выигрыша.
21. Чем отличается ε -равновесная стратегия от точного равновесия?
- Она всегда хуже для игрока.
 - Она допускает незначительное (не более ε) улучшение выигрыша при отклонении.
 - Она требует бесконечных вычислений.
 - Между ними нет математической разницы.
22. Какие из перечисленных ученых внесли фундаментальный вклад в теорию антагонистических игр?
- Н. Н. Воробьев.
 - В. В. Мазалов.
 - Л. А. Петросян.
 - Все перечисленные.
23. Процесс рандомизации в бесконечной антагонистической игре приводит к:
- Переходу к игре в смешанных стратегиях.
 - Окончанию игры.
 - Полной неопределенности правил.
 - Автоматической победе первого игрока.
24. Естественная метрика на пространстве игровых ситуаций строится на основе:
- Максимума из метрик Хелли для каждого из игроков.
 - Геометрического расстояния между игроками.
 - Количества доступных стратегий.
 - Времени принятия решения.
25. Вполне ограниченное множество в контексте пространств стратегий также называют:
- Пустым множеством.
 - Условно компактным множеством.

- с) Открытым множеством.
- д) Бесконечно малым множеством.

26. При расчете выигрыша в смешанном расширении БАИ интегрирование ведется по:

- а) Времени хода.
- б) Произведению пространств стратегий $X \times Y$.
- с) Одной фиксированной точке.
- д) Комплексной плоскости.

27. Какова главная цель дизайна механизмов в антагонистическом конфликте?

- а) Ограничение выбора игрока рамками его равновесной стратегии.
- б) Увеличение сложности вычислений для оппонента.
- с) Создание игр без правил.
- д) Минимизация суммарного выигрыша организатора.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 3.1.**

3.2 Список тематических вопросов для проработки

1. Как формулируется определение непрерывной антагонистической игры?
2. В чем заключается специфика игр на единичном квадрате как частного случая бесконечных антагонистических игр?
3. Какую роль играет компактность множеств стратегий в доказательстве существования смешанного равновесия?
4. Какое определение дается бесконечной антагонистической игре?
5. Какие антагонистические конфликты классифицируются как «вполне определенные» игры?
6. В каких случаях в бесконечных играх могут не существовать внешние экстремумы функции выигрыша?
7. Что представляет собой ситуация ε -равновесия в бесконечных антагонистических играх?
8. В чем заключается различие в последствиях отклонения игрока от равновесной и от ε -равновесной стратегии?
9. Какова математическая связь между ε -седловыми точками и значениями верхнего и нижнего выигрышей (минимаксами)?
10. Сформулируйте критерий существования ε -равновесных стратегий в бесконечной антагонистической игре.

11. Как связаны свойства непрерывности функции выигрыша и непрерывности функции математического ожидания выигрыша по одному из аргументов?
12. Каким образом «внутренняя метрика» на пространстве стратегий позволяет отождествлять стратегии с одинаковыми последствиями?
13. Каким образом определяются смешанные стратегии в играх с бесконечным множеством чистых стратегий?
14. Как представляется функция математического ожидания выигрыша в классе смешанных стратегий через интеграл Лебега-Стилтьеса?
15. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы смешанная стратегия первого или второго игрока была равновесной в БАИ?
16. В чем заключается суть дизайна механизмов как «обратной теории игр» и каковы его основные цели?
17. Каков смысл использования метрики Хелли для определения расстояния между стратегиями игроков?
18. Какие условия должны выполняться, чтобы антагонистическая игра считалась условно компактной (вполне ограниченной)?
19. Сформулируйте теорему о существовании ε -оптимальных смешанных стратегий с конечным спектром.
20. При каких условиях в непрерывной антагонистической игре гарантируется существование смешанного равновесия по Нэшу?

3.3 Контроль освоения теоретического материала

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 3.2:

1. Что характерно для доминирующей чистой стратегии игрока?

а) Обеспечивает выигрыш не меньше, чем любая другая стратегия при любом ответе оппонента б) Она всегда является строго доминируемой.	в) Равновесная стратегия не может быть строго доминируемой. г) Единственна в матричной игре. д) Ее использование гарантирует максимальный возможный выигрыш в
---	---

игре.

2. Игра называется бесконечной антагонистической, если:

- a) Сумма выигрышей игроков всегда равна нулю.
- b) Множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно.
- c) Функция выигрыша не ограничена сверху.
- d) Игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях.
- e) Интересы игроков прямо противоположны.

3. При каких условиях антагонистическая игра считается «вполне определенной»?

- a) Если в ней существует седловая точка в чистых стратегиях.
- b) Если нижнее значение игры равно верхнему значению.
- c) Если внешние экстремумы функции выигрыша достижимы.
- d) Если функция выигрыша является непрерывной.
- e) Если игра имеет конечное число стратегий.

4. В ситуации ε -равновесия в БАИ:

- a) Отклонение игрока от своей стратегии может увеличить его выигрыш не более чем на $\varepsilon > 0$.
- b) Значение игры всегда равно 0.
- c) Любая стратегия является равновесной.
- d) Выполняются неравенства вида

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y^\varepsilon) - \varepsilon &\leq \mathcal{H}(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq \\ &\leq \mathcal{H}(x^\varepsilon, y) + \varepsilon \end{aligned}$$

- e) Ошибки игроков полностью исключены.

5. Смешанная стратегия в бесконечной игре определяется как:

- a) Вероятностная мера на множестве чистых стратегий.
- b) Линейная комбинация двух чистых стратегий.
- c) Функция распределения на множестве стратегий.
- d) Среднее арифметическое всех возможных выигрышей.
- e) Случайный выбор стратегии с заданным весом.

6. Функция выигрыша в смешанных стратегиях вычисляется через:

- a) Интеграл Римана.
- b) Интеграл Лебега-Стилтьеса.
- c) Математическое ожидание выигрыша на декартовом произведении мер.
- d) Простое суммирование дискретных значений.
- e) Двойной интеграл по пространствам стратегий X и Y .

7. Какие утверждения верны для ε -седловой точки?

- a) Она существует в любой бесконечной игре.
- b) Она связана с понятием минимакса и максимина.
- c) При $\varepsilon \rightarrow 0$ она стремится к обычной седловой точке.
- d) Гарантирует игроку выигрыш, близкий к значению игры.
- e) Это всегда точка в пространстве чистых стратегий.

8. Метрика Хелли на множестве стратегий игрока 1:

- a) Определяется как

$$\rho_1(x_1, x_2) = \sup_y |\mathcal{H}(x_1, y) - \mathcal{H}(x_2, y)|.$$

- b) Является симметричной функцией.
- c) Удовлетворяет неравенству треугольника.

- d) Позволяет отождествлять стратегии с идентичными последствиями.
- e) Зависит от выбора стратегий только второго игрока.

9. Игра называется условно компактной, если:

- a) Пространства стратегий обоих игроков в метрике Хелли условно компактны.
- b) В ней конечное число стратегий.
- c) Существует конечная ε -сеть для любого $\varepsilon > 0$.
- d) Она является вполне определенной.
- e) Множества стратегий являются ограниченными числами.

10. В непрерывной антагонистической игре на компактных множествах $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$:

- a) Всегда существует смешанное равновесие по Нэшу.
- b) Седловая точка в чистых стратегиях обязательна.
- c) Функция выигрыша ограничена.
- d) Значение игры всегда положительно.
- e) Оптимальные стратегии могут иметь конечный спектр.

11. К задачам игрового дизайна (обратной теории игр) относятся:

- a) Разработка механизмов взаимодействия.
- b) Подмена понятий и навязывание желаний.
- c) Анализ уже существующих равновесий.
- d) Управление поведением через ограничение выбора.
- e) Определение условий реализации игры.

12. В моделях распределения ресурсов защиты объектов:

- a) Стратегия защиты (Blue Team) — распределение ресурса B .
- b) Выигрыш атакующего пропорционален разности сил атаки и защиты.
- c) Ценность объектов k_i всегда одинакова.
- d) Результат атаки равен нулю, если защита сильнее атаки.
- e) Объекты характеризуются только их количеством.

13. Согласно теореме о связи ε -равновесия с минимаксами:

- a) Нижнее значение игры не может превышать верхнее.
- b) $\inf_y \mathcal{H}(x^\varepsilon, y) + 2\varepsilon \geq \sup_x \inf_y \mathcal{H}(x, y)$.
- c) $\sup_x \mathcal{H}(x, y^\varepsilon) - 2\varepsilon \leq \inf_y \sup_x \mathcal{H}(x, y)$.
- d) Погрешность всегда равна ε .
- e) Эти неравенства позволяют оценить близость к значению игры.

14. Естественная топология в антагонистической игре:

- a) Порождается метрикой на пространстве ситуаций.
- b) Основана на метриках Хелли для каждого игрока.
- c) Требуется, чтобы пространство было дискретным.
- d) Позволяет говорить о непрерывности стратегий.
- e) Зависит от функции выигрыша.

15. Для компактности бесконечной антагонистической игры достаточно:

- a) Чтобы функция выигрыша была равна константе.
- b) Чтобы пространство стратегий хотя бы одного игрока было вполне ограничено в метрике Хелли.
- c) Наличие конечного числа стратегий у одного из игроков.
- d) Чтобы игра была матричной.

е) Чтобы ε -сеть была бесконечной.

16. Что верно для игр на единичном квадрате?

а) Множества стратегий

$$X = Y = [0, 1].$$

б) Пространство ситуаций — квадрат

$$[0, 1] \times [0, 1].$$

в) Это пример бесконечной антагонистической игры.

г) Равновесие в них никогда не существует.

д) Функция выигрыша всегда линейна.

17. Понятие рандомизации в теории игр означает:

а) Переход от чистых стратегий к смешанным.

б) Использование случайных чисел для выигрыша.

в) Построение новой игры с функциями распределения вместо точек.

г) Увеличение неопределенности для противника.

д) Отказ от математического анализа игры.

18. В «обратных» задачах проектирования систем безопасности анализируется:

а) Рациональное формирование ценности объектов.

б) Оптимальное количество защищаемых объектов.

в) Информационная манипуляция через поведение.

г) Только физическая прочность ограждений.

д) Исключительно бюджет на покупку оборудования.

19. Согласно основной теореме об условно компактных играх:

а) ε -оптимальные стратегии с конечным спектром существуют при любом $\varepsilon > 0$.

б) Оптимальная стратегия всегда имеет бесконечный спектр.

в) Игра должна быть вполне ограниченной.

г) Смешанные стратегии не требуются.

д) Решение можно найти только для $\varepsilon = 0$.

20. Критерий существования значения игры v в бесконечной антагонистической игре требует:

а) Чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{H}(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = v.$$

б) Равенства инфимума супремумов и супремума инфимумов.

в) Чтобы значение игры было бесконечным.

г) Чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись соответствующие стратегии.

д) Чтобы игроки действовали несогласованно.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 3.2.**

3.4 Итоговый контроль знаний и умений

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 3.3:

1. Найдите цену игры с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) 2.0.
- b) 2.5.
- c) 2.6.
- d) 10/4.
- e) 13/5.

2. В игре на единичном квадрате с функцией выигрыша

$$\mathcal{H}(x, y) = x + y, \text{ где } x, y \in (0, 1),$$

выберите верные утверждения:

- a) Цена игры $v = 1$.
- b) В игре существует седловая точка в чистых стратегиях.
- c) Ситуация $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ является ε -равновесной.
- d) Нижнее значение игры равно 1.
- e) Внешние экстремумы функции выигрыша достигаются.

3. Для игры с матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

равновесная смешанная стратегия игрока 1 равна:

- a) (0.5; 0.5).
- b) (0.6; 0.4).
- c) (5/8; 3/8).

d) (0.625; 0.375).

e) (1/4; 3/4).

4. Чему равно математическое ожидание выигрыша $\mathcal{H}(F, G)$, если

$$\mathcal{H}(x, y) = xy,$$

а стратегии игроков заданы интегральными функциями распределения $F(x) = x^2$ и $G(y) = y^2$ на $[0, 1]$?

- a) 1/4.
- b) 4/9.
- c) 0.4(4).
- d) 1/9.
- e) 0.25.

5. При каких значениях параметра k в матричной игре $\Gamma_{\mathbb{C}}$ с матрицей выигрышей

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} k & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

точка $(2; 1)$ является седловой?

- a) $k \leq 2$.
- b) $k \geq 2$.
- c) $k = 3$.
- d) При любом вещественном k .
- e) Ни при каких k .

6. Определите нижнюю цену игры (максимин) для непрерывной функции выигрыша

$$\mathcal{H}(x, y) = \sin(x + y)$$

на квадрате $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$:

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 0.5.

e) $\pi/2$.

7. В задаче распределения ресурсов ($A = 10, B = 10$) на 2 объекта с ценностями $k_1 = 5, k_2 = 3$, каков выигрыш атакующей стороны (выбирает y) при стратегиях

$$x = (5, 5), y = (10, 0)?$$

a) 0.

b) 10.

c) 15.

d) 25.

e) 8.

8. Рассчитайте расстояние в метрике Хелли $\rho_1(x_1, x_2)$ для игры, в которой функция выигрышей

$$\mathcal{H}(x, y) = x \cdot y$$

задана на единичном квадрате, если $x_1 = 0.2$ и $x_2 = 0.5$:

a) 0.1

b) 0.3

c) 0.5

d) 0.7

e) 1.0

9. Если цена игры $v = 4.2$, какой гарантированный выигрыш обеспечивает себе игрок при использовании ε -оптимальной стратегии с $\varepsilon = 0.15$?

a) ≥ 4.05 .

b) ≤ 4.35 .

c) ≥ 4.2 .

d) > 4.0 .

e) ровно 4.1.

10. Какова цена игры, если ее матрица выигрышей имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

a) 1.0.

b) 2.0.

c) 1.5.

d) $3/2$.

e) 0.

11. Критерий существования значения игры в бесконечной антагонистической игре требует:

a) Ограниченности функции выигрышей на пространстве допустимых ситуаций в игре.

b) Равенства максимина и минимакса.

c) Существования конечного предела функции $\mathcal{H}(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

d) Дискретности множеств стратегий игроков.

e) Компактности множества стратегий каждого игрока.

12. Смешанная стратегия в бесконечной антагонистической игре может быть представлена как:

a) Точечная масса в пространстве чистых стратегий.

b) Вероятностная мера на сигмалгебре.

c) Функция распределения.

d) Конечный вектор координат.

e) Любая непрерывная функция.

13. При рандомизации бесконечной игры новая функция выигрыша определяется через:

a) Интеграл Лебега-Стилтьеса.

b) Математическое ожидание.

c) Среднее геометрическое.

d) Двойной интеграл по мерам.

e) Производную функции.

14. Какие цели преследует дизайн механизмов (обратная теория игр)?

- a) Формирование условий реализации игры.
- b) Подмена понятий и навязывание желаний.
- c) Управление через спектр равновесных стратегий.
- d) Поиск седловых точек в заданных матрицах.
- e) Оптимизация чистых стратегий.
- c) Ограниченность функции выигрыша.
- d) Равенство верхнего и нижнего значений игры.
- e) Отсутствие ε -равновесных ситуаций.

15. Условно компактная игра:

- a) Всегда является конечной матричной игрой.
- b) Имеет конечную ε -сеть в метрике Хелли.
- c) Обладает ε -оптимальными стратегиями с конечным спектром.
- d) Не имеет решения в смешанных стратегиях.
- e) Требуется компактности хотя бы одного пространства стратегий.

16. Что верно для метрики Хелли?

- a) Она симметрична.
- b) $\rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.
- c) Она удовлетворяет неравенству треугольника.
- d) Она зависит только от функции выигрыша.
- e) Она позволяет ввести топологию на множестве стратегий.

17. Непрерывная антагонистическая игра на компактах гарантирует:

- a) Существование смешанного равновесия по Нэшу.
- b) Достижимость максимума выигрыша в чистых стратегиях.

18. В задачах кибербезопасности "Red Team"— это:

- a) Сторона защиты.
- b) Атакующая сторона.
- c) Игрок 1.
- d) Администратор системы.
- e) Игрок 2.

19. Отклонение от ε -равновесной стратегии может привести к:

- a) Увеличению выигрыша этого игрока, но не более чем на ε .
- b) Мгновенному проигрышу.
- c) Уменьшению выигрыша оппонента на ε .
- d) Только к уменьшению выигрыша отклонившегося игрока.
- e) Нарушению условий устойчивости ситуации.

20. Игра на единичном квадрате называется непрерывной, если:

- a) Множества стратегий игроков – отрезки.
- b) Функция выигрыша непрерывна на $X \times Y$.
- c) Значение игры является целым числом.
- d) Каждый игрок имеет бесконечное число стратегий.
- e) В игре нет разрывов в выплатах.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 3.3.**

Тема 4. Игры с природой

4.1 Тест на базовое освоение теоретического материала

Рекомендация к прохождению: после лекционного занятия по теме для рефлексивного контроля уровня освоения теоретического материала.

Задание: для каждого вопроса в тесте выберите верный вариант ответа.

Вопросы теста # 4.1:

1. Как в теории игр называют игрока, чьи действия носят непредсказуемый для нас характер?
 - a) Агрессор.
 - b) Природа.
 - c) Тень.
 - d) Рациональный субъект.
2. Что понимается под «риском» в задаче принятия решений против природы?
 - a) Вероятность получения нулевого выигрыша.
 - b) Ожидаемая величина проигрыша в худшем случае.
 - c) Разница между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и реальным выигрышем.
 - d) Сумма всех отрицательных элементов матрицы выигрышей.
3. Какое допущение лежит в основе критерия Лапласа?
 - a) Противник всегда действует максимально разумно.
 - b) Все состояния равновозможны.
 - c) Игрок должен минимизировать максимальное сожаление.
 - d) Известно распределение вероятностей состояний природы.
4. Сущность какого критерия описывается фразой «Лучше синица в руках, чем журавль в небе»?
 - a) Критерий Байеса.
 - b) Критерий Сэвиджа.
 - c) Критерий Гурвица.
 - d) Критерий Вальда.
5. За что отвечает параметр $\lambda \in [0, 1]$ в критерии Гурвица?
 - a) Достоверность информации.
 - b) Вероятность наиболее благоприятного исхода.
 - c) Уровень пессимизма-оптимизма.
 - d) Количество состояний природы.
6. Какому условию должен удовлетворять вектор вероятностей состояний природы $q = (q_1, \dots, q_n)$?
 - a) $\sum_{j=1}^n q_j = 0$.
 - b) $\sum_{j=1}^n q_j = 1$.
 - c) $q_j > 1$ для $j = \overline{1, n}$.
 - d) $\max_j q_j = 1$.
7. Вычислите риск r_{ij} , если при состоянии природы максимальный выигрыш равен 15, а выигрыш при выборе стратегии i равен 9.
 - a) 6.
 - b) -6.
 - c) 1.66.
 - d) 24.

8. Критерий Сэвиджа также часто называют критерием:
- Максимального везения.
 - Минимаксного риска.
 - Недостаточности оснований.
 - Среднего выигрыша.
9. Как называются вероятности, назначаемые экспертами на основе их субъективного видения?
- Объективные.
 - Генеральные.
 - Субъективные.
 - Иррациональные.
10. Найти оценку по Лапласу для стратегии со строкой выигрышей (10, 20, 5, 5).
- 5.
 - 20.
 - 40.
 - 10.
11. Какую стратегию выберет игрок по критерию Вальда для строки (4, 8, 2, 6)?
- 8.
 - 2.
 - 4.
 - 5.
12. Какую основную цель преследует критерий Гермейера?
- Максимизация минимального взвешенного выигрыша.
 - Минимизация дисперсии рисков.
 - Использование Парето-оптимальности для всех игроков.
 - Поиск равновесия в антагонистической игре.
13. Для стратегии с выигрышами (0, 100) и $\lambda = 0.8$ (коэф. пессимизма), найти оценку по Гурвицу.
- 80.
 - 50.
 - 20.
 - 0.
14. Стратегия максимизации среднего выигрыша совпадает со стратегией:
- Максимизации максимального выигрыша.
 - Минимизации среднего риска.
 - Минимизации максимального риска.
 - Максимизации минимального выигрыша.
15. В чем заключается «проблема трансферабельности»?
- В невозможности перевода денег между игроками.
 - В сложности переноса данных в электронный вид.
 - В том, что полезность выигрыша субъективна для каждого героя.
 - В ошибках при расчете матрицы рисков.
16. Рассчитать средний выигрыш по Байесу для стратегии i , если выигрыши (10, 40), а вероятности состояний природы $q = (0.7, 0.3)$.
- 25.
 - 19.
 - 31.
 - 10.
17. Критерий Ходжеса-Лемана объединяет в себе подходы:
- Сэвиджа и Гурвица.
 - Лапласа и Вальда.
 - Байеса и Вальда.
 - Гермейера и Парето.

18. Чему равна сумма вероятностей $q_1 + q_2 + q_3$, если они образуют убывающую арифметическую прогрессию $3 : 2 : 1$?
- а) 6.
 - б) 0.5.
 - в) 1.
 - г) 3.
19. При использовании критерия Гермейера элементы матрицы преобразуются в:
- а) Разности с максимумом.
 - б) Слагаемые математического ожидания $q_j a_{ij}$.
 - в) Квадраты отклонений.
 - г) Логарифмы полезности.
20. Если критерий Гермейера дает несколько равнозначных альтернатив, итоговый выбор рекомендуется делать по:
- а) Критерию Вальда.
 - б) Жребью.
 - в) Оптимальности по Парето.
 - г) Критерию Лапласа.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 4.1.**

4.2 Список тематических вопросов для проработки

1. Сформулируйте основное отличие «принципа разумности» игроков от условий игры с неопределенностью.
2. Дайте определение риску r_{ij} в игре против природы. В чем его принципиальное отличие от прямого выигрыша c_{ij} ?
3. Докажите, что на основании критериев Байеса минимизация среднего риска эквивалентна максимизации среднего выигрыша.
4. В каких практических ситуациях оправдано использование критерия Лапласа («критерий недостаточности оснований»)?
5. Почему критерий Вальда называют «критерием пессимизма» и как выглядит его математическая модель?
6. Объясните логику критерия минимаксного риска Сэвиджа: почему игрок ориентируется на «цену» упущенной возможности?
7. Каким образом субъективность экспертных оценок влияет на критерий ранжирования гипотез?
8. Как математически задаются вероятности состояний природы q_j через арифметическую прогрессию в случае отсутствия точных данных?
9. Опишите смысл коэффициента λ в критерии Гурвица. Как меняется стратегия при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$?

10. В чем заключается синтетическая природа критерия Ходжеса-Лемана (между какими двумя критериями он балансирует)?
11. Что означает параметр достоверности информации u в формуле Ходжеса-Лемана и как он выбирается?
12. Опишите алгоритм преобразования платежной матрицы в матрицу Гермейера. Зачем все элементы делаются отрицательными?
13. Каким образом критерий Гермейера учитывает отдельные слагаемые математического ожидания?
14. Как используется принцип оптимальности по Парето при наличии нескольких равнозначных альтернатив в методе Гермейера?
15. Сформулируйте суть комбинированного критерия Гермейера-Гурвица (K_{GG}). Какие типы «доверия» он учитывает?
16. Каким образом задачи на минимум критерия эффективности приводятся к задачам на максимум для унификации расчетов?
17. Какие условия должны накладываться на множества решений и состояний природы для применения формул в непрерывном случае?
18. Почему равные по значению выигрыши в разных столбцах матрицы могут не быть эквивалентными при анализе рисков?
19. Как использование средних вероятностей от группы экспертов помогает снизить риск ошибки в субъективном назначении весов q_j ?

4.3 Контроль освоения теоретического материала

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 4.2:

1. Что понимается под термином «природа» в теории игр?
 - a) Окружающая среда в биологическом смысле.
 - b) Игрок, чьи действия носят непредсказуемый характер.
 - c) Иррациональный противник, действующий случайно.
 - d) Противник, обладающий неочевидной дальновидностью.
 - e) Модель детерминированного поведения системы.
2. Какое утверждение верно для критерия Байеса?

- a) Требуется знания вероятностей состояний природы.
- b) Ориентирован только на минимизацию рисков.
- c) Рассчитан на максимизацию среднего выигрыша.
- d) Рассчитан на минимизацию среднего риска.
- e) Применяется только при полной неопределенности.

3. Что такое риск r_{ij} в игре против природы согласно определению?

- a) Вероятность проигрыша при выборе стратегии i .
- b) Разность между максимально возможным выигрышем при состоянии природы и реальным выигрышем.
- c) Среднеквадратичное отклонение выигрыша.
- d) Величина $\max_i c_{ij} - c_{ij}$.
- e) Ожидаемая сумма проигрышей.

4. Какие из перечисленных критериев применимы к играм с неопределенностью?

- a) Критерий Лапласа.
- b) Критерий Вальда.
- c) Критерий Сэвиджа.
- d) Критерий Гурвица.
- e) Критерий Гермейера.

5. В чем заключается суть критерия Вальда?

- a) Выбор «лучшего из лучших» вариантов.
- b) Выбор «лучшего из худших» вариантов развития событий.
- c) Реализация максиминной стратегии.
- d) Использование коэффициента оптимизма.

- e) Минимизация максимального риска.

6. Критерий Лапласа предполагает, что:

- a) Все состояния природы равновероятны.
- b) Противник всегда выбирает худший для нас вариант.
- c) Вероятности состояний неизвестны и принимаются одинаковыми.
- d) Нужно выбирать стратегию с наибольшим средним значением.
- e) Необходимо минимизировать максимальное сожаление.

7. Критерий Сэвиджа ориентирует игрока на:

- a) Максимизацию минимального выигрыша.
- b) Минимизацию максимально возможного риска потерь.
- c) Использование матрицы рисков вместо матрицы выигрышей.
- d) Учет недостаточной информации через анализ рисков.
- e) Использование исключительно субъективных вероятностей.

8. В критерии Гурвица параметр λ — это:

- a) Вероятность наступления благоприятного события.
- b) Коэффициент пессимизма-оптимизма.
- c) Показатель, значение которого лежит в интервале $[0, 1]$.
- d) Величина, определяемая субъективно лицом, принимающим решение.
- e) Коэффициент достоверности имеющейся информации.

9. Какие утверждения верны для критерия Ходжеса-Лемана?

- a) Использует параметр достоверности информации u .

- b) При высокой достоверности приближается к критерию Байеса.
- c) При низкой достоверности доминирует критерий Вальда.
- d) Основан на максимизации минимального риска Сэвиджа.
- e) Комбинирует мат. ожидание выигрыша и минимальный выигрыш.

10. Согласно теореме о среднем выигрыше и риске:

- a) Стратегия максимизирующая средний выигрыш совпадает с минимизирующей средний риск.
- b) Эти стратегии никогда не могут совпадать.
- c) Минимизация среднего риска эквивалентна максимизации выигрыша.
- d) Оптимальная стратегия не зависит от вероятностей природы.
- e) Сумма максимальных выигрышей по состояниям — это константа C .

11. Критерий Гермейера характеризуется тем, что:

- a) Применяется в условиях с недостаточно достоверными данными.
- b) Предполагает работу с отрицательными элементами матрицы.
- c) Элементы матрицы — слагаемые математического ожидания $q_j a_{ij}$.
- d) Выбирает альтернативу по максимальному из минимальных ожиданий.
- e) Полностью игнорирует вероятности состояний природы.

12. Если критерий Гермейера дает несколько равнозначных вариантов:

- a) Выбирается любой вариант случайным образом.
- b) Рекомендуются ориентироваться на оптимальность по Парето.
- c) Выбирается вариант с большей алгебраической суммой элементов.

- d) Используется критерий Вальда как дополнительный фильтр.
- e) Исключаются доминируемые альтернативы.

13. Что характерно для критерия ранжирования гипотез?

- a) Гипотезы располагаются в порядке убывания правдоподобности.
- b) Вероятности могут назначаться как члены арифметической прогрессии.
- c) Учитывается субъективное мнение экспертов.
- d) Субъективность снижается усреднением мнений группы экспертов.
- e) Он всегда дает результат, идентичный критерию Лапласа.

14. Комбинированный критерий Гермейера-Гурвица (K_{GG}):

- a) Позволяет выбирать между доверием и недоверием вероятностям.
- b) Использует взвешенную сумму минимального и максимального $q_j a_{ij}$.
- c) Неприменим для непрерывных состояний природы.
- d) Опирается на коэффициент оптимизма $\lambda \in [0, 1]$.
- e) Требуется преобразование задач на минимум в задачи на максимум.

15. При каких условиях формулы верны для бесконечного числа решений?

- a) Если множества решений и состояний ограничены и замкнуты.
- b) Если множества являются компактными.
- c) Если суммы в формулах заменены интегралами.
- d) Если дискретные распределения заменены плотностями.
- e) Только в случае линейной зависимости выигрыша от стратегии.

16. Какие утверждения о «принципе разумности» верны?

- a) Изначально он был основным допущением теории игр.
- b) Отказ от него приводит к играм с неопределенностью.
- c) С иррациональным противником невозможно договориться.
- d) Иррациональность всегда эквивалентна «глупости».
- e) Важно отличать дурость (случайность) от мудрости (дальновидности).

17. Вероятности, назначаемые экспертами, называются:

- a) Объективными.
- b) Субъективными.
- c) Априорными вероятностями.
- d) Экспертными весами.
- e) Коэффициентами правдоподобия.

18. Критерий Вальда в литературе часто называют:

- a) Критерием оптимизма.
- b) Критерием пессимизма.
- c) Критерием достаточного основания.
- d) Максиминным критерием.
- e) Критерием минимаксного риска.

19. Критерий Лапласа также известен как:

- a) Критерий крайнего пессимизма.
- b) Критерий недостаточности оснований.
- c) Критерий индифферентности (безразличия).
- d) Критерий средних арифметических выигрышей.
- e) Критерий Байеса при равных вероятностях гипотез.

20. Для построения матрицы рисков R необходимо:

- a) Инвертировать знаки всех элементов исходной матрицы.
- b) Найти максимальный элемент в каждом столбце.
- c) Вычесть каждый элемент столбца из максимума в этом столбце.
- d) Найти среднее значение по строке.
- e) Вычислить разность между потенциальным и реальным выигрышем.

21. Что подразумевает критерий минимаксного риска?

- a) Поиск стратегии, минимизирующей максимальное сожаление.
- b) Выбор самого надежного варианта при отсутствии информации.
- c) Использование матрицы с элементами $r_{ij} = \max_k a_{kj} - a_{ij}$.
- d) Игнорирование рисков в пользу чистого выигрыша.
- e) Ориентацию на худший сценарий по каждому риску.

22. Критерий Гурвица при значении $\lambda = 0$ превращается в:

- a) Критерий Вальда.
- b) Критерий Лапласа.
- c) Критерий крайнего оптимизма.
- d) Критерий Сэвиджа.
- e) Критерий Байеса.

23. Проблема полезности против выигрышей означает, что:

- a) Денежный выигрыш не всегда отражает реальную ценность.
- b) Выигрыши всегда должны пересчитываться в валюту.
- c) У каждого «героя» свои критерии оценки результата.
- d) Математическое ожидание не учитывает психологию игрока.
- e) Полезность — это объективная характеристика матрицы.

24. В критерии Гермейера вычитание числа $c > \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij}$:

- a) Делает все элементы матрицы отрицательными.
- b) Позволяет корректно сравнивать минимальные ожидания.
- c) Является обязательным этапом алгоритма.
- d) Служит для упрощения вычислений вручную.
- e) Не влияет на выбор стратегии.

25. Какие параметры могут учитываться в современных методах принятия решений?

- a) Психологический настрой лица, принимающего решение.
- b) Доверие к имеющимся статистическим данным.
- c) Информированность экспертов.
- d) Только чистые числовые значения матрицы выигрышей.
- e) Риск по Слейтеру или Парето.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 4.2**.

4.4 Итоговый контроль знаний и умений

Рекомендация к прохождению: рекомендовано после завершения всех аудиторных занятий по теме с целью итогового контроля освоения темы.

Задание: для каждого вопроса в тесте выбрать все верные варианты ответа.

Вопросы теста # 4.3:

1. Какое определение «природы» корректно в теории игр?

- a) Противник, стремящийся минимизировать наш выигрыш.
- b) Игрок, действия которого непредсказуемы и случайны.
- c) Среда, обладающая свойством неопределенности.
- d) Рациональный субъект, следующий принципу максимина.
- e) Противник, с которым лучше было бы договориться.

2. Смысл теоремы о связи среднего выигрыша и риска?

- a) Минимизация риска всегда ведет к снижению выигрыша.

- b) Стратегия, максимизирующая средний выигрыш, минимизирует средний риск.

- c) Они не связаны между собой математически.
- d) Средний риск всегда равен константе минус средний выигрыш.
- e) Максимизация риска эквивалентна максимизации выигрыша.

3. Критерий Вальда (максимин) называют критерием:

- a) Крайнего оптимизма.
- b) Крайнего пессимизма.
- c) Недостаточности оснований.
- d) Минимаксного риска.
- e) Азартного игрока.

4. Критерий Сэвиджа ориентирован на минимизацию:

- a) Возможных потерь (рисков) из-за неполноты информации.
- b) Максимального выигрыша.
- c) Вероятности проигрыша.
- d) Максимального сожаления при реализации выбранной стратегии.
- e) Математического ожидания убытков.

5. Параметр λ в критерии Гурвица — это:

- a) Вероятность наиболее благоприятного состояния.
- b) Коэффициент пессимизма-оптимизма.
- c) Субъективная мера склонности к риску.
- d) Вес, присваиваемый самому плохому исходу в строке.
- e) Доверие к экспертной оценке.

6. Критерий Лапласа базируется на допущении, что:

- a) Природа против игрока.
- b) Состояния природы равновероятны.
- c) Вероятности состояний неизвестны, поэтому они равны $1/n$.
- d) Выбирается стратегия с максимальной суммой выигрышей.
- e) Игрок является оптимистом.

7. В критерии Ходжеса-Лемана параметр u отражает:

- a) Степень пессимизма игрока.
- b) Степень доверия к распределению вероятностей.
- c) Вероятность ошибки первого рода.
- d) Баланс между критериями Байеса и Вальда.
- e) Уровень значимости статистической гипотезы.

8. Особенность критерия Гермейера заключается в использовании:

- a) Только положительных матриц.
- b) Взвешенных слагаемых математического ожидания $q_j a_{ij}$.
- c) Преобразованной матрицы с отрицательными элементами.
- d) Оптимальности по Парето при равенстве оценок.
- e) Суммы квадратов рисков.

9. Риск r_{ij} в теории принятия решений определяется как:

- a) Вероятность того, что выигрыш будет меньше ожидаемого.
- b) Разность $\max_i \{a_{ij}\} - a_{ij}$ для каждого $j = \overline{1, n}$.
- c) Ожидаемый проигрыш в случае неверного хода.
- d) Разница между лучшим возможным исходом и фактическим.
- e) Модуль разности выигрыша и его среднего значения.

10. Проблема трансферабельности в теории полезности связана с:

- a) Переносом выигрыша между игроками.
- b) Субъективным восприятием ценности одних и тех же сумм.
- c) Трудностями перевода валют.
- d) Различием «внутренних тараканов» (предпочтений) героев.
- e) Передачей информации о состояниях природы.

11. Дана матрица A . Какую стратегию выберет игрок по критерию Вальда?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) $i = 1$.
- b) $i = 2$.
- c) $i = 3$.

d) $i = 4$.

e) $i = 1$ или $i = 3$.

12. Для матрицы A (из вопроса 11) найдите лучшую стратегию по критерию Лапласа.

a) $i = 1$ (ср. знач. 5,2).

b) $i = 2$ (ср. знач. 4,8).

c) $i = 3$ (ср. знач. 4,0).

d) $i = 4$ (ср. знач. 4,6).

e) Все стратегии равнозначны.

13. Вычислите элемент $r_{2,3}$ матрицы рисков для матрицы выигрышей:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) 5.

b) 6.

c) 0.

d) 1.

e) 9.

14. Найдите стратегию по критерию Сэвиджа для матрицы:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $i = 1$ (мах риск 4).

b) $i = 2$ (мах риск 4).

c) $i = 3$ (мах риск 5).

d) $i = 4$ (мах риск 6).

e) $i = 1$ или $i = 2$.

15. При $\lambda = 0,4$ найдите оценку Гурвица G_1 в матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

a) 4,6.

b) 5,0.

c) 6,4.

d) 7,0.

e) 5,5.

16. По критерию Байеса при

$$q = (0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1)$$

найдите средний выигрыш при реализации стратегии $i = 3$, если матрица выигрышей имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) 4,1.

b) 5,2.

c) 4,9.

d) 3,8.

e) 5,0.

17. Определите вероятности гипотез по критерию ранжирования для 5 состояний в порядке убывания $\Pi_5, \Pi_4, \Pi_3, \Pi_2, \Pi_1$.

a) Все по 0,2.

b) 5/15, 4/15, 3/15, 2/15, 1/15.

c) 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5.

d) 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5.

e) 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.

18. Рассчитайте критерий Ходжеса-Лемана для $i = 2$, если $u = 0,5$, средний выигрыш $W_2 = 6$, а строка выигрышей (4, 8, 2, 10, 6).

a) 4,0.

b) 5,0.

c) 3,0.

d) 4,5.

e) 6,0.

19. Для матрицы A укажите Парето-доминируемую стратегию (которая заведомо хуже другой).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) $i = 1$ доминирует $i = 3$.
- b) $i = 2$ доминируется $i = 1$.
- c) $i = 3$ доминирует все остальные.
- d) $i = 4$ доминирует $i = 1$.
- e) Здесь нет доминируемых стратегий.

20. По Гермейеру: дана отрицательная матрица и $q_j = 0,2$. Найдите $\min_j \{q_j a_{1j}\}$.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 & -20 & -10 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -8 & -10 & -6 & -4 & -12 \\ -2 & -20 & -10 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

- a) -4.
- b) -2.
- c) -3.
- d) -1.
- e) -5.

21. Найдите средний риск по Байесу для $i = 1$ при $q = (0,5, 0, 0, 0, 0,5)$, если первая строка матрицы рисков: $(4, 10, 2, 8, 6)$.

- a) 5,0.
- b) 4,0.

- c) 6,0.
- d) 10,0.
- e) 0.

22. В критерии Гурвица $\lambda = 0,7$. Какая стратегия лучше для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) $i = 1$ ($G_1 = 3$).
- b) $i = 2$ ($G_2 = 4$).
- c) $i = 3$ ($G_3 = 3,8$).
- d) $i = 4$ ($G_4 = 1,5$).
- e) Стратегия 2 лучше всех.

23. Какое значение Лапласа (L) будет у стратегии со строкой $(1, 2, 3, 4, 10)$?

- a) 3,0.
- b) 4,0.
- c) 5,0.
- d) 20,0.
- e) 4,4.

24. Если стратегия $i = 1$ по Сэвиджу имеет риски $(2, 2, 2, 2, 2)$, а $i = 2$ риски $(0, 0, 0, 0, 5)$, то:

- a) $i = 1$ предпочтительнее ($S=2$).
- b) $i = 2$ предпочтительнее ($S=5$).
- c) Они равнозначны.
- d) $i = 1$ хуже по Лапласу.
- e) Нужно знать выигрыши.

Таблица ключей и пояснений к ответам расположена в разделе «Ответы к тестам и рекомендации», смотри **Таблица ключей к тесту # 4.3**.

Ответы к тестам и рекомендации

С помощью таблиц ответов вы можете самостоятельно оценить свои уровни освоения материала. В вопросах с множественным выбором балл начисляется пропорционально: например, если в вопросе три верных варианта, а вы выбрали два, то засчитайте себе $2/3$ балла. Итоговый результат зависит от процента набранных баллов:

- если ваш результат входит в диапазон от 90% до 100%, то он оценивается как отличный. Вы однозначно относитесь очень ответственно к своему обучению и стараетесь получить максимальную пользу. Так держать!
- если ваш результат входит в диапазон от 70% до 89%, то он оценивается как хороший. Здесь есть над чем подумать и главное – можно понять, что именно следует проработать. Поэтому наберитесь немного терпения и доведите свои результаты обучения до совершенства!
- если ваш результат входит в диапазон от 50% до 69%, то он оценивается как удовлетворительный. Вам однозначно следует воспользоваться рекомендациями в таблицах ключей к тестам. Это поможет вам устранить пробелы в знаниях.
- если ваш результат входит в диапазон от 0% до 49%, то он оценивается как неудовлетворительный. Скорее всего вы не уделили должного внимания учебному материалу знание которого проверяет тест. Рекомендуется сменить тактику: сначала изучается учебный материал, а потом результат его освоения проверяется и оценивается на тестах данного пособия.

Таблица ключей к тесту # 1.1.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b	Экономика, психология и статистика — области применения, но не сам предмет теории игр. Переосмыслите определение предмета теории игр как математических моделей принятия решений. Рекомендуется обратиться к [2, 4, 5, 12, 13, 14].
2	c	В теории игр конфликт — это не ссора и тем более не физическое воздействие, а математическое описание несовпадения интересов. Посмотрите [9, 15, 17].
3	b	Матрица или функция — это компоненты, а сама модель называется «Игра». Математическая терминология: «Игра» как модель конфликта.

4	b	Кооперативные, матричные и игры с нулевой суммой — это актуальные современные классификаторы. А вот коалиционные игры это как раз архаизм, теперь вместо этого употребляется лишь термин «Кооперативные игры».
5	a	Дерево решений относится к позиционным играм, а не к нормальной форме. Смотри определение бескоалиционной игры в нормальной форме.
6	b	Для игры достаточно двух игроков и минимум двух стратегий у каждого для наличия выбора. Смотри условия на множества стратегий и количество игроков.
7	b	Приемлемость — это устойчивость (отсутствие выгоды от смены стратегии), а не максимальный куш. Смотри концепцию индивидуальной рациональности и устойчивости стратегии. Рекомендуется обратиться к [4, 5, 19].
8	c	Седловая точка — лишь частный случай равновесия для матричных игр. Смотри определение «Ситуации равновесия» как общей приемлемости для всех.
9	b	Масштабирование должно касаться только функции выигрыша (k и c_i), а не суммирования функций или их инверсии. Следует переосмыслить определение стратегической эквивалентности и допустимые линейные преобразования.
10	b	Эквивалентность сохраняет структуру стимулов (равновесия), но не цену или сумму игры. Смотри свойства стратегически эквивалентных игр и их инварианты.
11	b	Постоянство выигрыша одного игрока не делает всю игру игрой с постоянной суммой. Повторить определение игры с постоянной суммой.
12	a	«Цу-е-фа» или симметрия — частные случаи. Матричная игра — лишь форма записи. Смотри теорему о связи игр с постоянной суммой и игр с нулевой суммой. Рекомендуется обратиться к [8, 9, 18].
13	b	Антагонизм — это не «все проиграли» и не отсутствие общения, а именно строгая противоположность интересов двух сторон. Следует переосмыслить определение антагонистической игры и её отличие от бескоалиционных игр общего вида. Рекомендуется обратиться к [5, 11, 14].
14	b	Равенство выигрышей ($\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$) — это крайняя степень кооперации, а не антагонизма. Смотрим математическую формализацию антагонизма через нулевую сумму.
15	b	Биматричные игры шире (не всегда антагонистичны). Динамические и кооперативные — другие классы игр. Смотри определение матричной игры как конечной антагонистической игры, например в [9, 11].
16	b	При строгом доминировании каждый элемент строки должен быть строго больше соответствующего элемента другой. Повторить критерии строгого и слабого доминирования в матрицах, которые хорошо описаны в [11, 15].

17	b	Удаление <i>слабо</i> доминируемых стратегий может «стереть» некоторые равновесия по Нэшу. Почитать о влиянии редукции матрицы на множество ситуаций равновесия.
18	c	Фон Нейман заложил основы, но премию в 1994 году получили Нэш, Зельтен и Харсаньи. История теории игр: вклад Джона Нэша в теорию некооперативного равновесия. Поближе ознакомиться с работой можно в [19].
19	a	Седловая точка — это значение (элемент), удовлетворяющее принципу минимакса. Поиск седловой точки: минимум по строкам, максимум по столбцам.
20	b	Форма матрицы (квадратная или нет) не влияет на существование седловой точки. Важно вспомнить необходимое и достаточное условие: равенство нижней и верхней цены игры ($v = \bar{v}$). На это делается отдельный акцент в работах [7, 12, 14, 17].

Таблица ключей к тесту # 1.2.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	a	Варианты b , c , d описывают частные области применения, а не предмет теории в целом. Вариант e относится к другому разделу теории игр. Рекомендуется повторить определение предмета некооперативной теории игр как анализа стратегического взаимодействия. Для этого хорошо подойдут [12, 15, 19].
2	a, b	Вариант c неверен, так как теория как раз ищет устойчивый исход в виде равновесий. Вариант d характерен для кооперативных игр. Вариант e ложен, так как равновесие по Нэшу достижимо во многих классах игр. Рекомендуется изучить специфику игровых моделей (влияние действий на результат друг друга). Рекомендуется обратиться к [2, 3, 8].
3	a	Варианты b и d описывают лишь частные случаи (одновременность или бесконечность стратегий). Вариант c — только игры с нулевой суммой. Вариант e — узкое определение антагонистической игры. Рекомендуется повторить формальное определение игры в нормальной форме, например из [4, 7, 12, 14, 17].
4	a-c	Варианты d и e (аддитивность и мультипликативность) являются операциями, с помощью которых строится эквивалентность, но сами свойствами отношения (как эквивалентности) не являются. Рекомендуется повторить свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, транзитивность.
5	a, e	Варианты b , c , d не учитывают математическую доказуемость факта. Любая игра с постоянной суммой приводится к нулевой сумме линейным преобразованием. Рекомендуется изучить теорему о стратегической эквивалентности игр с постоянной и нулевой суммой. Рекомендуется обратиться к [4, 5].

6	a-c	Вариант d неверен, так как антагонистическая игра может быть задана не только матрицей, но и непрерывной функцией. Вариант b прямо противоречит определению. Рекомендуется повторить классификацию игр по сумме выигрыша и способу задания, что можно найти, например в [5, 9, 11, 14].
7	a-d	Вариант e неверен: наличие седловой точки не делает игру симметричной. Рекомендуется обратить внимание на формальное определение симметричной игры: равенство множеств стратегий и выполнение условия $H_1(s_1, s_2) = H_2(s_2, s_1)$. Подробно это обсуждается в [9].
8	a	Варианты b и c описывают слабое доминирование или частичное превосходство. Варианты d и e описывают равенство или проигрыш. Рекомендуется четко разграничить понятия строгого и слабого доминирования в матрицах.
9	b	Вариант a ложен (игрок избегает доминируемых стратегий). Варианты c , d и e касаются сложных эффектов удаления стратегий. Рекомендуется изучить связь доминирования с рациональным поведением и принцип итерационного удаления стратегий. Для этого можно обратиться к [9, 14].
10	b-c	Вариант a ошибочен: удаление строго доминируемых стратегий сохраняет равновесия по Нэшу. Варианты d и e — это методы поиска, а не причины потери. Рекомендуется повторить свойства процесса удаления слабо доминируемых стратегий и его влияние на множество равновесий.
11	a, c, d	Вариант b ложен: это свойство равновесия по коалициям (Strong Nash), а не классического Нэша. Вариант e неверен: равновесие не всегда единственно. Рекомендуется изучить определение равновесия по Нэшу как профиля наилучших ответов. Подробно это обсуждается в [5, 9, 13].
12	a	Варианты b , c , d и e содержат ложные утверждения о свойствах Нэша (он не только для нулевых сумм, не гарантирует доминирование и т.д.). Рекомендуется переосмыслить равновесие по Нэшу как концепцию «индивидуальной устойчивости» в противовес общественной приемлемости.
13	a-e	Здесь важно не путать направления неравенств. Седловая точка — это одновременно максимум для первого игрока по своим стратегиям и минимум для него же по стратегиям противника. Рекомендуется повторить определение седловой точки через цепочку неравенств для функции выигрыша.
14	a, c-e	Вариант b неверен. Ключевое отличие (вариант e), в том, что в играх мы работаем с дискретными или недифференцируемыми объектами, где производные не нужны. Рекомендуется сопоставить геометрическое определение седла с теоретико-игровым (минимаксным). Подробно это обсуждается в [4, 5].

15	a	Вариант b ложен (всегда $v \leq \bar{v}$). Вариант c верен только при наличии седловой точки. Варианты d и e — это определения цен по отдельности. Рекомендуется изучить основное неравенство теории игр для нижней и верхней цены.
16	b, c, e	Вариант a ложен (не во всех матричных играх есть седловая точка в чистых стратегиях). Вариант d описывает устойчивость, но не критерий существования. Рекомендуется повторить критерии существования седловой точки (равенство цен, минимакс). Подробно это обсуждается в [5, 9, 11, 14, 15].
17	b, d	Вариант a — ошибка в определении (супремум — наименьшая грань). Варианты c и e — другие математические объекты. Рекомендуется повторить основы математического анализа — точные верхняя и нижняя грани.
18	a, d	Варианты b , c , e содержат ложные знаки неравенств или утверждения о повсеместном равенстве. Рекомендуется запомнить правило: «максимин никогда не больше минимакса». Подробно это обсуждается в [11, 14, 19].
19	a, c, d	Вариант b ложен (все седловые точки дают одинаковый выигрыш — цену игры). Вариант e неверен, так как значение объективно. Рекомендуется изучить свойство эквивалентности и взаимозаменяемости седловых точек.
20	b-d	Вариант a ложен (могут входить). Вариант e неверен (устойчиво только против индивидуальных). Рекомендуется повторить тонкие различия между строгим и слабым доминированием в контексте формирования равновесий.

Таблица ключей к тесту # 1.3.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	a	Варианты b , c , e описывают лишь отдельные аспекты или приложения. Вариант d является наиболее современной версией определения, но подвержено критике в контексте статуса отдельной науки. Рекомендуется повторить вводную лекцию о предмете теории игр как науки о стратегическом поведении рациональных агентов.
2	a, d	Вариант c — это определение стратегической взаимозависимости, а не самого конфликта. Вариант b сам по себе не подразумевает необходимого взаимодействия или влияния. Вариант e сужает понятие до одного класса игр. Рекомендуется переосмыслить понятие «конфликт» как несовпадение интересов в ситуации выбора. В этом могут помочь [2, 9, 18].
3	a-c	Варианты d и e либо содержат ошибки в формулах ($m > n$ не является обязательным), либо относятся к играм в развернутой форме. Рекомендуется повторить формальное задание игры в нормальной форме, смотри [11, 13, 14, 15].

4	b, c, e	Вариант a и c не учитывают интересы всех сторон. Вариант d (общий максимум) — это Парето-оптимальность, а не равновесие. Вариант e специфичен для антагонистических игр. Рекомендуется изучить концепцию устойчивости по Нэшу (отсутствие стимулов к индивидуальному отклонению).
5	c-e	Варианты a и b не являются исчерпывающими определениями. Вариант e — частный случай. Рекомендуется повторить классификацию игр по сумме выигрыша: в антагонистических играх выигрыш одного в точности равен проигрышу другого ($\mathcal{H}_1 = -\mathcal{H}_2$). Подробно это обсуждается в [11, 13, 14].
6	c	Вариант a — это строгое доминирование. Варианты b , d , e — неверные математические условия. Рекомендуется обратить внимание на разницу между строгим ($>$) и слабым ($\geq$ с хотя бы одним строгим неравенством) доминированием. Подробно это обсуждается в [9, 17, 18].
7	a, c, d	Варианты a , b , d , e содержат ложные утверждения о «потерях» или «гарантиях». Ключевой факт: удаление строго доминируемых стратегий никогда не удаляет равновесия по Нэшу. Рекомендуется изучить теорему о сохранении равновесий при итерационном исключении.
8	c, d	Вариант a — свойство сильных равновесий. Вариант b — неверно (может быть много равновесий). Вариант e — слишком сильное условие. Рекомендуется повторить определение Нэша через профиль наилучших ответов (best response).
9	b, d	Варианты a , e — это следствия или неточные формулировки. Вариант d часто содержит опечатки в индексах. Рекомендуется выучить классическое двойное неравенство для седловой точки: первый игрок не может увеличить выигрыш, второй — не может уменьшить. Подробно это обсуждается в [4, 7, 9].
10	d	Варианты a , b , c , e не гарантируют седловую точку. Единственное условие существования в чистых стратегиях — равенство нижней и верхней цены игры. Рекомендуется повторить минимаксную теорему и определение цены игры.
11	a, c-d	Вариант b — это только нижняя цена. Вариант e ложен (цена может быть отрицательной). Рекомендуется четко различать понятия нижней цены (максимин), верхней цены (минимакс) и общей цены игры.
12	a, b	Для ответа нужно сравнить строки матрицы D . Варианты c , d не подтверждаются расчетами. Рекомендуется потренироваться в построчном сравнении выплат для выявления доминируемых стратегий.
13	a, b	Здесь анализируются столбцы (для второго игрока, который минимизирует проигрыш). Нужно быть внимательным: доминируемая стратегия для второго — та, где значения больше. Рекомендуется повторить правила исключения стратегий для игрока-минимизатора. Подробно это обсуждается в [5, 9, 14].

14	c	Процесс исключения слабо доминируемых стратегий зависит от порядка. Вариант b выпадает при другом порядке. Рекомендуется изучить особенность: итерационное удаление слабо доминируемых стратегий может привести к потере некоторых равновесий. Подробно это обсуждается в [5, 9, 14].
15	c, d	Аналогично вопросу 14, изменение начального шага меняет финальную матрицу. Рекомендуется зарисовать дерево исключений для наглядности влияния порядка на результат.
16	d	Доминирующая стратегия должна быть лучше всех остальных во всех ситуациях. В данной матрице D такой нет. Рекомендуется повторить определение доминирующей стратегии и отличать её от просто «недоминируемой».
17	c	Цена игры — это выигрыш в оставшейся после сокращения клетке. Ошибки здесь обычно арифметические. Рекомендуется аккуратно проводить редукцию матрицы до размера 1×1 .
18	b, d	Равновесие в слабо доминирующих стратегиях ищется через последовательное сокращение. Рекомендуется еще раз пройти алгоритм ИУСДС (итерационное удаление слабо доминируемых стратегий).
19	d	Выигрыш берется из исходной матрицы для найденного профиля. Рекомендуется еще раз соотнести найденные индексы с элементами матрицы C .
20	d	Для функции $x+y$ на квадрате максимин и минимакс не совпадают (нет седловой точки в чистых стратегиях внутри или на границах по данному определению). Рекомендуется повторить нахождение седловых точек для непрерывных функций через производные или анализ монотонности.

Таблица ключей к тесту # 2.1.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	a	Вариант b описывает чистую стратегию, а не смешанную. Вариант c — это условие игры, а d — результат взаимодействия. Рекомендуется повторить определение: смешанная стратегия — это случайная величина, где значениями являются чистые стратегии, а распределение задается вектором вероятностей.
2	b	Варианты a и d путают стратегию с выигрышами. Вариант c относится к решению в чистых стратегиях. Рекомендуется осмыслить смешанную стратегию как готовность игрока применять свои чистые стратегии с определенными частотами (вероятностями). Смотри [11, 13, 14, 19].
3	c	Вероятности ограничены единицей (поэтому не a), и их значения могут быть любыми от 0 до 1 (поэтому не b). Это множество не может быть пустым (d). Рекомендуется повторить топологические свойства пространств стратегий. Подробно это обсуждается в [5].

4	b	Сумма компонент (a) всегда равна 1 по определению вероятности. Варианты c и d не связаны с составом стратегии. Рекомендуется запомнить: спектр — это «носитель» стратегии, т. е. перечень тех чистых ходов, которые игрок реально планирует использовать (их вероятность > 0).
5	b-d	Вариант b — это формула для седловой точки в чистых стратегиях. Вариант c — неполная сумма. Рекомендуется повторить формулу математического ожидания для двумерной дискретной величины: это двойная сумма произведений элементов матрицы на соответствующие вероятности стратегий обоих игроков.
6	b	Вариант a описывает просто лучший элемент. Значение игры не обязано быть нулем (c). Вариант d не имеет явного отношения к цене игры. Рекомендуется выучить определение равновесия по Нэшу через двустороннее неравенство: отклонение любого игрока в одностороннем порядке не должно увеличивать его выигрыш (или уменьшать проигрыш второго).
7	b	При линейном преобразовании матрицы выигрышей ($C' = \alpha C + \beta$) само решение (стратегии) не меняется, а цена игры меняется по той же линейной зависимости. Рекомендуется изучить теорему о стратегической эквивалентности игр. Подробно это обсуждается в [5, 14].
8	b	Основная теорема (фон Неймана) как раз гарантирует существование решения для любой конечной игры, даже если нет седловой точки (c). Рекомендуется осознать фундаментальную разницу между игрой в чистых и смешанных стратегиях. Оригинальная работа [19].
9	b	Хотя удаление доминируемых строк (d) полезно, в предложенной методике (через ЗЛП) первым делом обеспечивают строгость положительных значений матрицы (β), чтобы цена игры была больше нуля. Рекомендуется повторить алгоритм сведения игры к паре двойственных задач ЛП. Смотри [1, 3, 16].
10	b	Методы Гаусса или итераций здесь вторичны или неприменимы напрямую для оптимизации. Ключевой инструмент здесь — аппарат линейного программирования. Рекомендуется изучить связь между ценой игры v и целевой функцией ЗЛП $\Theta = 1/v$. Подробно это обсуждается в [14].
11	a	Вариант b — частный случай. Равновесие — это профиль, который устойчив относительно чистых стратегий (если игроку невыгодно менять смешанную на любую чистую, то невыгодно менять и на любую другую смешанную). Варианты c-d никакого отношения к обсуждаемым условиям не имеют. Рекомендуется повторить «упрощенный» критерий равновесности, например в [4].
12	a	Цена игры — это строгое математическое равенство максимина и минимакса в смешанном расширении. Варианты b, c, d — это либо средние величины, либо крайние значения матрицы. Рекомендуется повторить минимаксную теорему.

13	b	Это теорема о дополняющей нежесткости: если какая-то чистая стратегия дает средний выигрыш меньше цены игры, то «рациональный» игрок не будет использовать её вообще. Рекомендуется переосмыслить связь между доходностью стратегии и её весом в ситуации равновесия. Смотри [6, 16].
14	b	Существенность (активность) — это не про максимальный выигрыш (а), а про участие в формировании равновесия. Рекомендуется запомнить: если стратегия активна, она входит в спектр и используется с ненулевой вероятностью.
15	b	Доминирование для первого игрока — это когда одна стратегия дает результат СТРОГО ЛУЧШЕ (больше выигрыш) другой при любом ответе оппонента. Рекомендуется повторить векторное сравнение стратегий.
16	b	Строго доминируемая стратегия всегда хуже какой-то другой, поэтому она никогда не войдет в оптимальный (равновесный) набор. Рекомендуется закрепить принцип рациональности, который подробно описан в [2, 9, 14, 17].
17	b	Замена на нули (а) изменит игру. Относительно других неверных вариантов — ключевое правило: доминируемые стратегии можно удалять (вычеркивать), так как они не влияют на поиск равновесия и значение игры. Рекомендуется повторить метод редукции (упрощения) платежной матрицы, смотри [9].
18	b	Геометрически множество всех смешанных стратегий представляет собой выпуклую оболочку вершин (чистых стратегий), что называется фундаментальным симплексом. Рекомендуется изучить геометрию теории игр (симплекс в $\mathbb{R}^n$). Подробно это обсуждается в [4, 5, 11].
19	b	Свойства выпуклого конуса: он замкнут относительно сложения и умножения на положительное число. Подробно это обсуждается в [4, 5, 11].
20	b	Крайняя точка — это вершина множества, её нельзя представить как «среднее» (выпуклую комбинацию) других точек. Чистые стратегии являются крайними точками симплекса смешанных стратегий. Рекомендуется повторить определение экстремальных (крайних) точек выпуклых множеств. Подробно это обсуждается в [4, 5, 10, 11].

Таблица ключей к тесту # 2.2

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	d	Смешанная стратегия — это не одна точка (а) и не просто список (b), а распределение вероятностей. Вариант c — это число (результат), а не сама стратегия. Рекомендуется повторить определение смешанной стратегии как вероятностного распределения на множестве чистых стратегий. Смотри [11, 14].

2	a	Вероятности могут быть равны нулю (поэтому b и d неверны), а их сумма не может быть нулем (c). Рекомендуется повторить аксиомы вероятности применительно к компонентам вектора смешанной стратегии ($\xi_i \geq 0, \sum \xi_i = 1$).
3	a	Варианты b , c , d — это неверные формулы или критерии для других задач (минимакс). Ожидаемый выигрыш — это взвешенная сумма элементов матрицы. Рекомендуется изучить вывод формулы математического ожидания выигрыша в смешанном расширении.
4	a, c	Вариант b (определитель) и d (скалярное произведение без учета матрицы) математически неверны для вычисления выигрыша. Рекомендуется повторить матричную форму записи ожидаемого выигрыша: $s_1 C s_2^T$.
5	c	Спектр — это те стратегии, которые используются с вероятностью большей нуля. Варианты с 0 или меньше 0 математически бессмысленны для спектра. Рекомендуется запомнить определение спектра как множества индексов активных (используемых) стратегий.
6	c	Множества стратегий — это симплексы (замкнутые, ограниченные, выпуклые компакты). Они не бесконечномерны (a) и не открыты (b). Рекомендуется изучить геометрическую интерпретацию пространства смешанных стратегий (фундаментальный симплекс). Смотри [1, 10, 11].
7	a	Теорема не гарантирует наличие седловой точки в чистых стратегиях (b) или единственность Нэша (c). Рекомендуется повторить формулировку основной теоремы матричных игр. Подробно это обсуждается в [4, 11, 13, 14, 17].
8	b	Стратегии эквивалентны, если ведут к одинаковому результату против любого хода врага, даже если сами векторы (a) или спектры (d) разные. Рекомендуется повторить понятие стратегической эквивалентности через функцию выигрыша.
9	a	Алгоритм решения через ЗЛП требует строго положительной матрицы для корректности нормировки. Поиск седловой точки (c) — полезный, но не обязательный шаг именно для этого алгоритма. Рекомендуется изучить процедуру сведения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования. Достаточно много примеров можно найти в [1, 3, 6, 8, 10].
10	b	v_C — это числовая характеристика (цена), а не множество (a) или вероятность (d). Максимин (c) совпадает с ценой только при наличии седловой точки. Рекомендуется закрепить терминологию: «цена игры» как гарантированный средний выигрыш.
11	a	Равновесные стратегии получаются нормировкой решений ЗЛП на значение целевой функции. Варианты с разностью (c) или делением друг на друга (d) ложны. Рекомендуется повторить переход от переменных ЗЛП (x_i) к вероятностям (ξ_i). Смотри [14].

12	b, d	Значение игры в исходной матрице получается обратным сдвигом после решения ЗЛП. Вариант d — правильная формула. Рекомендуется повторить связь между значением целевой функции ЗЛП и ценой игры с учетом константы β .
13	a	Свойство Нэша достаточно проверять только на чистых стратегиях из-за линейности ожидания. Проверять только спектр (b) недостаточно для подтверждения глобального равновесия. Рекомендуется изучить теорему о проверке условий равновесия.
14	d	Равновесие — это точка, где максимин равен минимаксу. Варианты a и b — некорректные записи условий устойчивости. Рекомендуется повторить минимаксное равенство для смешанных стратегий. Смотри [4, 13, 14].
15	a, c	Здесь описаны условия дополняющей нежесткости. Если выигрыш от чистой стратегии меньше цены, её вероятность должна быть 0. Рекомендуется изучить теорему о дополняющей нежесткости (Complementary Slackness) в теории игр.
16	a	Активная стратегия — это та, что входит в спектр равновесной. Она не обязана быть доминирующей (c). Рекомендуется четко разграничить понятия «активной» стратегии и «доминирующей» стратегии.
17	c	Расширение стратегии — это технический прием вставки нуля при возврате к исходной размерности матрицы. Рекомендуется повторить технику редукции и обратного расширения матриц при удалении доминируемых строк/столбцов.
18	b	Если выигрыш равен цене игры, стратегия «уравновешивает» ожидания. Доминирование (a) требует строгого неравенства во многих случаях. Рекомендуется изучить свойство уравновешивания выигрышей на спектре равновесной стратегии. Подробно это обсуждается в [14].
19	d	Доминирование для игрока 1 (максимизатора) означает, что стратегия дает результат не меньше (а где-то больше) по всем столбцам. Рекомендуется повторить определение доминирования в смешанных стратегиях.
20	c	Если мы нашли стратегию лучше равновесной, она сама становится равновесной (или частью множества равновесий). Игра не ломается (a). Рекомендуется повторить свойства равновесных стратегий: доминирующая над равновесной сама является равновесной. Подробно это обсуждается в [4, 13, 14, 17].

Таблица ключей к тесту # 2.3.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	a, b, e	Варианты c — неверное значение нижней цены, d — неверное значение верхней цены. В данной матрице $\underline{v} = 3, \bar{v} = 5$. Рекомендуется повторить нахождение максимина и минимакса для проверки наличия седловой точки. Смотри [11].

2	a, b, d	Вариант c — арифметическая ошибка. Вариант e неверен, так как среднее арифметическое совпадает с ожидаемым выигрышем только при вероятностях $1/n$ для всех стратегий. Рекомендуется закрепить навык вычисления матожидания по формуле $s_1 C s_2^T$.
3	a, c, d	Вариант b ложен: минимальность строки — не повод для удаления. Вариант e ложен: наличие большого числа (6) не является критерием удаления. Рекомендуется повторить правила доминирования: удаляются стратегии, которые всегда хуже других (для игрока 1) или всегда хуже комбинации других.
4	a, b, d	Вариант c ложен: значение игры может быть любым. Вариант e ложен: в чистых стратегиях решение есть не всегда. Рекомендуется переосмыслить фундаментальную суть теоремы фон Неймана — она гарантирует решение именно в смешанном расширении. Подробно это обсуждается в [19].
5	a, b, c, e	Вариант d — грубая арифметическая ошибка. При $v_C = 2$ новая цена $v_{C'} = 3 \cdot 2 + 5 = 11$. Рекомендуется повторить свойства линейности цены игры при аффинных преобразованиях платежной матрицы.
6	a, b, c, d, e	Вариант a неверен (расчет дает $v = 0.5$). Вариант d неверен, так как проверка условий равновесия на чистых стратегиях не подтверждает устойчивость. Рекомендуется изучить «теорему о проверке», подставляя чистые стратегии против предложенной смешанной.
7	a, b, c, d	Варианты a и e — неверные значения вероятности ξ . Вариант c — неверная запись десятичной дроби для цены. Рекомендуется повторить формулы для решения игр размерности 2×2 (аналитический метод через приравнивание ожидаемых выигрышей). Подробно это обсуждается в [11].
8	a, b, c, e	Вариант d — ограничение, составленное для игрока 2. Рекомендуется четко выучить стандартную форму ЗЛП, эквивалентную матричной игре.
9	a, b, c	Вариант d ложен, так как обе стратегии дают выигрыш, равный цене игры. Вариант e — ложное общее утверждение. Рекомендуется повторить определение активной стратегии через равенство среднего выигрыша на ней цене игры.
10	a, b	Вариант c путает вектор x с вероятностями. Варианты d и e — неверная формула восстановления. Рекомендуется запомнить: $v = 1/\Theta$ и $\xi = x \cdot v$.
11	a, b, d, e	Вариант c прямо противоречит логике рациональности. Игрок никогда не использует то, что строго хуже. Рекомендуется повторить связь между строгим доминированием и нулевой вероятностью в оптимальной стратегии.
12	a, b, c, d	Цена игры чаще всего является дробным числом. Рекомендуется изучить графический метод для игр $2 \times n$, обратив внимание на поиск точки пересечения прямых, образующих нижнюю огибающую.

13	a, b, c, e	Множество решений системы линейных неравенств (конус) бесконечно, если оно содержит хотя бы один луч. Рекомендуется повторить свойства выпуклых конусов и их геометрическое представление. Подробно это обсуждается в [4, 5].
14	a, b, c, e	Существенная стратегия не обязана доминировать над другими в чистом виде; она лишь необходима для достижения равновесия. Рекомендуется различать «доминирующую» (всегда лучшую) и «активную» (входящую в спектр) стратегии.
15	a, b, c, e	Множество стратегий для 3-х вариантов — это треугольник (плоская фигура в 3D), а не объемный куб. Рекомендуется повторить понятие n -мерного симплекса как геометрического места смешанных стратегий.
16	a, b, c, e	В данной матрице $\underline{v} \neq \bar{v}$ ($2 < 3$), значит, седловой точки нет. Рекомендуется всегда начинать решение матричной игры с проверки на наличие седловой точки в чистых стратегиях.
17	a, b, c, e	Внутренние точки — это «смеси», а не чистые варианты. Рекомендуется запомнить: чистые стратегии — это «крайние» положения (вершины), которые невозможно получить смешиванием других.
18	a, b, d	Вариант c — опасное заблуждение (проверять нужно по всем чистым стратегиям, включая те, что вне спектра). Вариант e — бессмысленен. Рекомендуется выучить критерий равновесия: $\max_i H(i, s_2) = \min_j H(s_1, j) = v$.
19	a, b, c, d	Вариант a путает индекс (вставка 0 идет на место удаленной стратегии). Вариант e — абсурд. Рекомендуется повторить технику восстановления полного вектора стратегий после проведения редукции матрицы.
20	a, b, c, d, e	В теории игр нет понятия «лишняя» стратегия, есть «неактивная» в конкретном равновесии. Рекомендуется повторить, что такое спектр стратегии. Смотри [5, 14].

Таблица ключей к тесту # 3.1.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b	БАИ определяется не количеством игроков (a) или величиной результата (c), а мощностью множества стратегий. Вариант d относится к дискретным играм. Рекомендуется повторить классическое определение БАИ. Смотри [4, 5].
2	b	Вариант a описывает отсутствие решения. Целочисленность (c) или линейность (d) не являются общими условиями. Рекомендуется изучить понятие «вполне определенной игры» через достижимость максимина и минимакса на компактных множествах. Подробно это обсуждается в [4, 14].

3	b	Проблема не в точке $(0,0)$ как таковой (a), а в поведении функции в ее окрестности. Вариант c неверен для непрерывных множеств. Рекомендуется повторить условия теоремы Вейерштрасса о достижимости экстремумов функции на компакте и причины её нарушения при разрывах.
4	b	ε -равновесие — это концепция «почти оптимальности». Варианты a , c , d содержат ложные утверждения о динамике выигрыша. Рекомендуется закрепить определение ε -равновесия. Подробно это обсуждается в [14].
5	b	В моделях распределения ресурсов результат часто определяется перевесом сил. Варианты a и c — лишь компоненты модели. Рекомендуется повторить игровые модели «нападения-защиты».
6	b	Смешанная стратегия в БАИ — это не просто выбор между двумя вариантами (a) и не вектор (c). Рекомендуется изучить переход от дискретных вероятностей к вероятностным мерам на непрерывных множествах стратегий.
7	b	Интеграл Римана (a) недостаточно общ для мер. Вариант c и d — из других разделов математики. Рекомендуется повторить определение математического ожидания в смешанном расширении БАИ через интеграл Лебега-Стилтьеса.
8	c	Матричный анализ (a) и ЛП (d) — это скорее о методах решения, а не о проектировании. Рекомендуется изучить теорию «дизайна механизмов».
9	b	Метрика Хелли оценивает близость стратегий по их «эффективности» против врага. Варианты a , c , d предлагают неверные формулы расстояния. Рекомендуется выучить определение метрики Хелли через супремум разности функций выигрыша. Подробно это обсуждается в [4, 5].
10	a	Равенство метрики нулю означает не «мир» (c) или «проигрыш» (d), а функциональную неразличимость стратегий. Условие недостаточно для выполнения (b). Рекомендуется осознать, что в теории игр стратегии с нулевым расстоянием по Хелли считаются эквивалентными. Подробно это обсуждается в [4, 5].
11	b	Компактность в функциональных пространствах связана с аппроксимацией. Вариант b — классический признак Хаусдорфа. Рекомендуется повторить связь между вполне ограниченностью, ε -сетями и условной компактностью пространств стратегий.
12	b	Хотя евклидова метрика (a) привычна, в теории игр «близость» определяется через выигрыш. Рекомендуется запомнить, что условная компактность игры определяется именно в метрике Хелли. Подробно это обсуждается в [4, 5].
13	b	Одной из ключевых теорем является возможность аппроксимации бесконечной игры конечной. Вариант b — фундаментальный результат. Рекомендуется изучить свойства компактных игр и существование решений с конечным носителем (спектром).

14	b	Непрерывность в теории игр — это свойство функции выигрыша, а не процесса (a) или времени (c). Рекомендуется повторить топологическое определение непрерывной игры на произведении компактов.
15	a	Дискретность (d) или отсутствие смешивания (b) не гарантируют Нэша в БАИ. Вариант (c) делает игру бессмысленной. Рекомендуется выучить теорему Гликсберга: для существования равновесия достаточно компактности множеств стратегий и непрерывности функции выигрыша.
16	b	Единичная окружность (d) или прямая (c) не являются стандартными множествами для этой модели. Рекомендуется запомнить, что «игра на единичном квадрате» подразумевает выбор чисел игроками из интервала $[0, 1]$.
17	b	В безопасности важно не просто тратить деньги (a), а делать атаку невыгодной. Рекомендуется повторить концепцию «обратных задач», где подбираются такие ценности объектов, чтобы равновесное поведение злоумышленника было приемлемым.
18	b	Современная теория игр — это математический фундамент кибернетики (управления). Рекомендуется переосмыслить место теории игр в иерархии наук как ядра теории управления и кибернетики.
19	a	Непрерывная функция на компакте всегда ограничена (не b). Вариант a — прямое следствие теоремы Кантора. Рекомендуется повторить свойства непрерывных функций на компактных множествах. Смотри [4, 5, 14].
20	a	Для существования значения игры недостаточно просто иметь выигрыш (b) или функции (d). Рекомендуется изучить необходимое и достаточное условие существования значения v через предел выигрышей при стремлении ε к нулю.
21	b	ε -равновесная стратегия — это практически выгодная стратегия, отклонение от которой дает игроку профит не более ε . Она не «хуже» принципиально, а является математическим допущением. Повторить: определение и практический смысл ε -оптимальности. Подробно это обсуждается в [14].
22	d	Все указанные ученые (Воробьев, Мазалов, Петросян) — представители ведущих советских и российских школ теории игр, внесшие мировой вклад. Историю развития теории игр и основные научные школы надо знать!
23	a	Рандомизация — это переход от выбора конкретной точки (чистой стратегии) к распределению вероятностей. Повторить процедуру смешанного расширения игры. Подробно это обсуждается в [11, 14].
24	a	Естественная метрика в пространстве ситуаций строится как максимум из индивидуальных метрик Хелли игроков, чтобы учесть интересы обеих сторон. Вспомнить метризацию декартова произведения пространств стратегий.

25	b	В функциональном анализе и теории игр вполне ограниченное множество в полном метрическом пространстве совпадает с условно компактным. Повторите связь понятий компактности, секвенциальной компактности и полной ограниченности. Подробно это обсуждается в [11, 14].
26	b	Интегрирование функции выигрыша $\mathcal{H}(x, y)$ ведется по мере, заданной на декартовом произведении множеств стратегий обоих игроков. Повторить кратные интегралы Лебега-Стилтьеса в теории игр.
27	a	Дизайн механизмов в конфликте стремится создать такие «правила игры», чтобы игроку было выгодно придерживаться нужного организатору (равновесного) поведения. Следует переосмыслить концепцию стимулирования и реализации социальных целей через игровые правила.

Таблица ключей к тесту # 3.2

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	a, c	Строго доминируемая стратегия всегда хуже другой, а не наоборот. Доминирующая стратегия не обязана быть единственной и не всегда гарантирует глобальный максимум (лишь лучший ответ). Повторить понятия доминирования и доминируемости. Подробно это обсуждается в [9, 14, 15].
2	b	Сумма выигрышей в БАИ не обязательно равна нулю (это лишь частный случай). БАИ определяется мощностью множества стратегий. Повторить классификацию антагонистических игр.
3	a, b	Непрерывность или конечность стратегий не являются условиями, которые отвечают определению вполне определенной игры. Следовало выбрать свойство равенства максимина минимаксу. Повторить определение вполне определенной игры.
4	a, d	В ε -равновесии значение игры может быть любым. Равновесной является не любая стратегия, а только удовлетворяющая ε -условию. Переосмыслить геометрический смысл ε -коридора.
5	a, c	Рандомизация — это не просто комбинация двух стратегий или среднее значение, а полноценная вероятностная мера. Повторить понятие смешанного расширения бесконечной игры.
6	b, c, e	Дискретное суммирование и интеграл Римана не подходят для общего случая бесконечных стратегий (нужен аппарат Лебега-Стилтьеса). Повторить функциональный анализ в теории игр.
7	b, d	ε -седловая точка не всегда существует в чистых стратегиях и не обязательно стремится к «обычной» при $\varepsilon \rightarrow 0$, если последней нет. Повторить связь ε -седловых точек с минимаксами. Смотри [14].
8	a-d	Метрика Хелли для игрока 1 напрямую зависит от его собственных функций выигрыша при различных ответах оппонента. Изучить свойства и аксиоматику метрики Хелли. Смотри [4, 5].

9	a, c	Условная компактность связана с метрическими свойствами (конечные ε -сети), а не с конечностью множества стратегий как такового. Повторить определение условно компактной игры.
10	a, c, e	Наличие седловой точки в чистых стратегиях не гарантировано даже на компактах (нужны смешанные). Значение игры может быть любым числом.
11	a, d, e	Анализ существующих равновесий — это «прямая» теория игр. Подмена понятий не является целью научного дизайна.
12	a, d	В классических моделях результат часто бинарен (успех/провал), а ценность объектов — ключевой параметр, который может варьироваться.
13	a-c, e	Погрешность в этих неравенствах определяется через 2ε , а не просто ε . Переосмыслить оценку близости стратегий к значению игры через супремумы.
14	a, b, e	Естественная топология в играх непрерывна по определению и не требует дискретности пространства.
15	b	Для компактности БАИ критически важна именно полная ограниченность в метрике Хелли, а не константность выигрыша. Повторить критерий компактности БАИ. Подробно это обсуждается в [5, 14, 17].
16	a, b, c	На единичном квадрате равновесие часто существует (в смешанных стратегиях), а функция может быть любой формы.
17	a, c, d	Использование случайных чисел — это лишь технический аспект реализации, а не суть рандомизации как математического объекта. Повторить определение смешанных стратегий. Подробно это обсуждается в [11, 13, 14].
18	a, b, c	Обратные задачи фокусируются на управлении поведением через ценности и информацию, а не только на физических параметрах.
19	a, c	Основная теорема утверждает существование именно конечного спектра для ε -оптимальности. Повторить теорему об условно компактных играх.
20	a, b, d	Значение игры должно быть конечным числом. Несогласованность действий — это условие конфликта, а не критерий существования значения.

Таблица ключей к тесту # 3.3.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b, d	Цена игры $v = 2.5$. Варианты (c) и (e) арифметически неверны.
2	a, c, d	На открытом квадрате экстремумы не достигаются, но супремум выигрыша (максимин) стремится к 1. Ситуация $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ позволяет игроку 1 получить выигрыш, близкий к $v = 1$.
3	c, d	Равновесная стратегия первого игрока $(0,625; 0,375)$.
4	b, c	Плотности распределения $f(x) = 2x$ и $g(y) = 2y$. Ожидаемый выигрыш $0.4(4)$.

5	a	Элемент $a_{21} = 2$ является седловой точкой, если он минимален в строке ($2 \leq 3$) и максимален в столбце ($2 \geq k$). Отсюда $k \leq 2$.
6	b	Функция $\sin(x + y)$ на данном квадрате принимает значения от 0 до 1. Нижняя цена игры $\sup_x \inf_y \sin(x + y) = 0$, так как при любом x игрок 2 может выбрать y так, чтобы сумма была кратна π .
7	c	Объект T_1 : $x_1 = 5, y_1 = 10$ (атака слабее защиты, выигрыш 0). Объект T_2 : $x_2 = 5, y_2 = 0$ (защита отсутствует). Выигрыш: $(5 - 0) \cdot k_2 = 5 \cdot 3 = 15$.
8	b	Расстояние Хелли: $\rho_1(x_1, x_2) = \sup_{y \in [0,1]} 0.2y - 0.5y = \sup_{y \in [0,1]} -0.3y = 0.3$.
9	a, d	По определению ε -оптимальной стратегии игрок гарантирует себе выигрыш не менее $v - \varepsilon = 4.2 - 0.15 = 4.05$.
10	c, d	В симметричной игре с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ цена игры $v = (1 + 2)/2 = 1.5$.
11	b, c	Равенство максимина и минимакса (b) является основным условием существования значения игры.
12	b, c	Смешанная стратегия — это вероятностная мера (b), которая на числовой прямой задается функцией распределения (c).
13	a, b, d	Функция выигрыша в смешанных стратегиях — это математическое ожидание (b), вычисляемое как кратный интеграл Лебега-Стилтьеса (a, d).
14	a, b, c	Игровой дизайн направлен на создание правил игры (a) и манипуляцию поведением (b, c) для достижения целей организатора.
15	b, c, e	Условная компактность гарантирует существование конечной ε -сети (b) и возможность аппроксимации стратегий конечным спектром (c).
16	a, c, d, e	Метрика Хелли удовлетворяет всем аксиомам метрики, кроме тождества (b), так как расстояние 0 означает лишь совпадение выигрышей, а не самих стратегий.
17	a, c, d	Для непрерывных игр на компактах всегда существует смешанное равновесие (a) и выполняется принцип минимакса (d).
18	b, c	В кибербезопасности Red Team моделирует действия атакующего (b), который в теории игр представляется первым игроком (c).
19	a, e	Отклонение от ε -равновесия может принести игроку выгоду, но она ограничена величиной ε (a).
20	b, e	Непрерывность функции выигрыша на всем пространстве ситуаций $X \times Y$ является определяющим свойством.

Таблица ключей к тесту # 4.1.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b	Природой называют игрока, чьи действия носят непредсказуемый характер, включая случайность («дурость») или неочевидную дальновидность.

2	c	Риск r_{ij} — это разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и реальным выигрышем.
3	b	Критерий Лапласа базируется на принципе «недостаточности оснований», полагая все состояния равновероятными.
4	d	Критерий Вальда ориентирует на гарантированный минимум (максимин), что соответствует осторожной стратегии.
5	c	Параметр λ позволяет субъективно взвешивать худший и лучший исходы, отражая склонность игрока к пессимизму или оптимизму.
6	b	Сумма вероятностей полной группы событий (всех состояний природы) всегда должна быть равна единице.
7	a	Риск равен разности: $15 - 9 = 6$.
8	b	Критерий Сэвиджа направлен на минимизацию максимального риска (сожаления) игрока.
9	c	Вероятности, назначенные экспертами на основе опыта и интуиции, называются субъективными.
10	d	Среднее арифметическое: $(10 + 20 + 5 + 5)/4 = 10$.
11	b	По Вальду выбирается худший исход из строки. В строке (4, 8, 2, 6) это значение 2.
12	a	Критерий Гермейера ориентирован на максимизацию минимального взвешенного слагаемого математического ожидания $q_j a_{ij}$.
13	c	При коэффициенте пессимизма $\lambda = 0.8$ имеем $0.8 \cdot (\min = 0) + (1 - 0.8) \cdot (\max = 100) = 0 + 20 = 20$.
14	b	Согласно теореме 20, максимизация среднего выигрыша математически эквивалентна минимизации среднего риска.
15	c	Полезность субъективна: один и тот же выигрыш может иметь разную ценность для разных игроков («свои тараканы»).
16	b	Байес: $(10 \cdot 0.7) + (40 \cdot 0.3) = 7 + 12 = 19$.
17	c	Ходжес-Леман комбинирует критерии Байеса (математическое ожидание) и Вальда (гарантированный минимум).
18	c	Любой вектор вероятностей для полной группы состояний природы в сумме дает 1.
19	b	Гермейер преобразует элементы платежной матрицы в произведения $q_j a_{ij}$ (слагаемые математического ожидания).
20	c	Если основные критерии дают равные значения, Ю.Б. Гермейер предлагал использовать принцип оптимальности по Парето.

Таблица ключей к тесту # 4.2.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b, c	«Природой» в теории игр называют любого игрока, чьи действия непредсказуемы или носят случайный характер.
2	a, c, d	Критерий Байеса требует знания вероятностей q_j и позволяет одновременно максимизировать средний выигрыш и минимизировать средний риск.
3	b, d	Риск r_{ij} — это разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и реальным результатом.

4	a-e	Все указанные критерии подходят.
5	b, c	Критерий Вальда — это «максимин»: выбор лучшего из худших исходов, что характерно для пессимистичного подхода.
6	a, c, d	Лаплас исходил из принципа «недостаточности оснований», полагая все состояния природы равновероятными.
7	b, c, d	Сэвидж предложил минимизировать максимальный риск (сожаление) на основе матрицы рисков.
8	b, c, d	Коэффициент λ в критерии Гурвица определяется субъективно и отражает баланс между пессимизмом и оптимизмом.
9	a, b, c, e	Критерий Ходжеса-Лемана комбинирует методы Байеса и Вальда через параметр достоверности информации u .
10	a, c, e	Вспоминаем следствие критериев Вальда – математическую эквивалентность стратегий максимизации среднего выигрыша и минимизации среднего риска.
11	a, b, c, d	Критерий Гермейера использует взвешенные слагаемые $q_j a_{ij}$ и эффективен при работе с недостаточно достоверными данными.
12	b, c, e	При равных оценках рекомендовано выбирать Парето-оптимальные стратегии или с большей суммой элементов.
13	a, b, c, d	При ранжировании гипотез вероятности могут назначаться как члены убывающей арифметической прогрессии.
14	a-b, d-e	K_{GG} объединяет подходы Гермейера и Гурвица для учета доверия к данным.
15	a, b, c, d	Для непрерывных случаев суммы заменяются интегралами, а дискретные распределения — плотностями при условии компактности множеств.
16	a, b, c, e	Отказ от «принципа разумности» ведет к анализу иррациональных действий, где важно отличать «дурость» от «мудрости».
17	b	Вероятности, устанавливаемые экспертами на основе субъективных соображений, называют субъективными.
18	b	Критерий Вальда получил название «критерий пессимизма» из-за ориентации на гарантированный минимум.
19	b	Критерий Лапласа — это критерий «недостаточности оснований», упрощающий задачу до среднего арифметического.
20	c	Элементы матрицы рисков вычисляются как разность между максимумом в столбце и текущим значением элемента.
21	a	Минимизация сожаления при завышенных ожиданиях.
22	b, c	При значении параметра, соответствующем крайнему пессимизму, критерий Гурвица вырождается в критерий Вальда.
23	a	Полезность выступает как субъективная мера удовлетворенности в то время как выигрыш – это трансферабельная величина.
24	a, b, c, e	Преобразование матрицы в отрицательную необходимо для корректного выбора альтернативы по максимуму из минимальных ожиданий.
25	a, b, c, e	Методы учитывают не только числа, но и психологический настрой, доверие к данным и Парето-риски.

Таблица ключей к тесту # 4.3.

вопрос	ответ	— пояснения и указания к ответам —
1	b, c	«Природой» называют игрока с непредсказуемым поведением, чьи действия случайны или иррациональны.
2	b, d	Стратегия максимизации среднего выигрыша математически совпадает с минимизацией среднего риска.
3	b, c	Критерий Вальда — это «максимин» (лучший из худших), что отражает позицию крайнего пессимизма.
4	a, b, c, d	Критерий Сэвиджа минимизирует максимальное «сожаление» (риск), используя специально построенную матрицу рисков.
5	b, d	Коэффициент λ позволяет субъективно смещать баланс между самым плохим и самым хорошим исходом стратегии.
6	a, b, c	Лаплас полагал все состояния равновероятными ($1/n$), что позволяет выбирать стратегию по простому среднему арифметическому.
7	b, d	Параметр u — степень доверия к вероятностям. При $u = 1$ критерий совпадает с Байесом, при $u = 0$ — с Вальдом.
8	b, c, d	Гермейер предложил использовать взвешенные слагаемые $q_j a_{ij}$ и проверять альтернативы на оптимальность по Парето.
9	b, d	Риск — это разница между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и тем, что игрок получит фактически.
10	a, b, d	Проблема трансферабельности указывает на то, что полезность выигрыша субъективна («у каждого героя свои тараканы»).
11	c	Минимумы по строкам: $i_1 = 3, i_2 = 1, i_3 = 4, i_4 = 0$. Максимальный из них - 4.
12	a	Средние значения: $L_1 = 5.2, L_2 = 4.8, L_3 = 4.0, L_4 = 4.6$, следовательно $i = 1$.
13	b	Максимум в 3-м столбце равен 9. Риск $r_{2,3} = 9 - 3 = 6$.
14	e	Максимальные риски по строкам: $S_1 = 4, S_2 = 4, S_3 = 5, S_4 = 6$. Стратегии $i = 1$ и $i = 2$ равнозначны по минимуму риска.
15	c	Расчет: $0.4 \cdot (\min = 1) + 0.6 \cdot (\max = 10) = 0.4 + 6.0 = 6.4$.
16	c	Расчет: $0.1(5) + 0.2(6) + 0.4(4) + 0.2(3) + 0.1(10) = 0.5 + 1.2 + 1.6 + 0.6 + 1.0 = 4.9$.
17	b	При ранжировании 5 гипотез сумма рангов $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Вероятности: $5/15, 4/15, 3/15, 2/15, 1/15$.
18	a	Расчет: $0.5 \cdot (W = 6) + 0.5 \cdot (\min = 2) = 3 + 1 = 4.0$.
19	b	Стратегия $i = 2$ доминируемая по определению.
20	a	При $q = 0.2$ взвешенная строка: $(-2, -1, -3, -4, -2)$. Минимум равен -4 .
21	a	Для $i = 1$ при ненулевых q_1, q_5 : $0.5(4) + 0.5(6) = 2 + 3 = 5.0$.
22	b, e	Оценки G (при $\lambda = 0.7$ как коэф. пессимизма): $G_1 = 3.0, G_2 = 4.0, G_3 = 3.8, G_4 = 1.5$. Стратегия 2 лучшая.
23	e	Сумма элементов равна 20. Среднее значение $L = 20/5 = 4.4$.
24	a	По Сэвиджу выбирается минимум из максимальных рисков. $2 < 5$, следовательно $i = 1$ предпочтительнее.

Список рекомендуемой литературы

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. — 319 с.
2. Васин А. А., Морозов П. С. Теория игр и модели экономики. — М.: Макс Пресс, 2005. — 272 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1972. — 552 с.
4. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 496 с.
5. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985. — 272 с.
6. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 383 с.
7. Данилов В. И. Лекции по теории игр. — М.: РЭШ, 2002. — 140 с.
8. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 838 с.
9. Колокольцов В. Н., Малафеев О. А. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех). — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 624 с.
10. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1980. — 300 с.
11. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. — СПб.: Лань, 2010. — 448 с.
12. Нэш Дж. Бескоалиционные игры // Матричные игры / под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматлит, 1961. — С. 205–221.
13. Оуэн Г. Теория игр. — Изд. 4-е. — М.: ЛКИ, 2014. — 216 с.
14. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998. — 304 с.
15. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр. — Минск: БГУ, 2015. — 256 с.
16. Таха Х. А. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.
17. Aumann R. J. Game Theory // The New Palgrave: A Dictionary of Economics. — 1987. — Vol. 2. — P. 460–482.
18. Binmore K. Game Theory: A Very Short Introduction. — Oxford University Press, 2007. — 184 p.
19. von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. — Princeton: Princeton University Press, 1944. — 625 p.

Кочевадов Виталий Алексеевич

**Рефлексивный контроль освоения
учебного материала по теории игр.
Модуль I. Антагонистические игры**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н. Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А