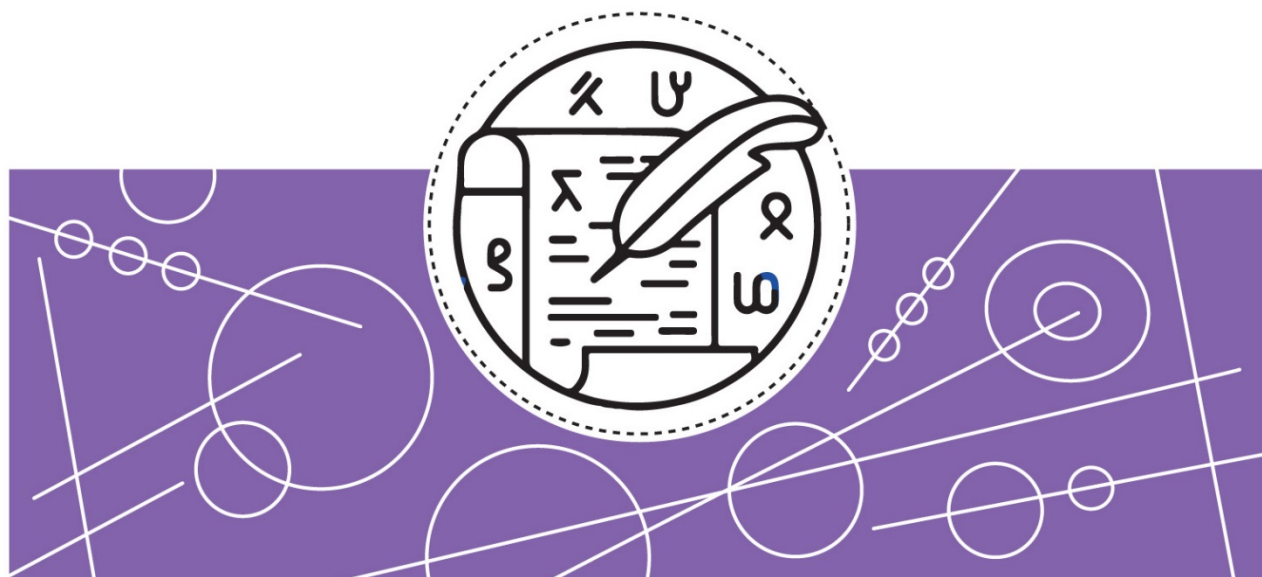


# ІІТМО

---

**Г.П. Мирошніченко**

## **ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Г.П. Мирошниченко**  
**ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ**  
**ФИЗИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИТМО

по направлению подготовки 12.04.01, 16.04.01

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования магистратуры

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2026

# Мирошниченко Г.П., ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ– СПб: Университет ИТМО, 2026. – 50 с.

Рецензент(ы):

Попов Игорь Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ведущий профессор") института математики, Университета ИТМО.

Задачник является дополнением к пособию “МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ”. Здесь разработаны задачи по одномерным уравнениям теплопроводности и диффузии в ограниченных слоях с источником тепла или без такового. Особое место уделено задачам на регулярный режим теплопроводности, на стационарный режим теплопроводности в неоднородном слое. Представлены задачи, решаемые с помощью функций Грина для теплопроводности на неограниченной и полуограниченной прямой. Разработаны задачи для трехмерных резонаторов и волноводов электромагнитного поля. Подробно рассмотрены задачи акустики в идеальной и вязкой жидкости и задачи волноводного распространения звука. Представлены задачи на стационарные уравнения гидродинамики и другие задачи. Темы задач в большей степени ориентированы на численные оценки тепловых, диффузионных, волновых процессов, чем на математические доказательства существования и сходимости исследуемых решений. Для этой цели задачник снабжен необходимыми справочниками и литературой.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

# Содержание

<b>Введение</b> -----	<b>5</b>
<b>1. Одномерные уравнения теплопроводности и диффузии в ограниченном слое</b> -----	<b>6</b>
1.1. Теплопроводность в ограниченном слое-----	6
1.2. Уравнение теплопроводности с источником тепла-----	10
1.3. Регулярные режимы-----	12
1.4. Уравнение диффузии с конвекцией-----	15
1.5. Стационарные уравнения теплопроводности-----	16
<b>2. Теория: метод функций Грина для одномерного уравнения диффузии на неограниченной и полуограниченной прямой</b> -----	<b>20</b>
2.1. Функция Грина уравнения диффузии на прямой-----	20
2.2. Функция Грина уравнения диффузии на полупрямой с однородным и неоднородным граничным условием 1 рода-----	20
2.3. Неоднородное уравнение диффузии на неограниченной прямой с источником-----	22
<b>3. Задачи на уравнение диффузии на неограниченной прямой с источником</b> -----	<b>23</b>
<b>4. Задачи для одномерного однородного уравнения диффузии на неограниченной или полуограниченной прямой</b> -----	<b>24</b>
<b>5. Волновое уравнение струны</b> -----	<b>25</b>
<b>6. Трехмерные и двумерные нестационарные уравнения для тепловых и волновых процессов</b> -----	<b>27</b>
6.1. Нестационарные тепловые процессы в трехмерных ограниченных объемах-----	27
6.2. Нестационарные волновые процессы колебания мембран-----	28
6.3. Уравнения Максвелла-----	28
<b>7. Трехмерные стационарные уравнения для тепловых процессов</b> -----	<b>31</b>
<b>8. Акустика</b> -----	<b>33</b>
8.1. Звуковые волны в идеальной несжимаемой жидкости-----	33
8.2. Затухание звука в вязкой среде-----	34
8.3. Волновод для звуковых волн-----	35
<b>9. Стационарные уравнения гидродинамики</b> -----	<b>36</b>
9.1. Уравнение Бернулли-----	36

9.2. Стационарное потенциальное течение идеальной жидкости-----	38
Литература-----	39
Справочники-----	41

## Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов Университета ИТМО по направлению подготовки 16.04.01 «Техническая физика», 12.04.01 «Приборостроение» и является методическим обеспечением курса «Основные уравнения математической физики». Разработанные задачи служат для практического освоения лекционного материала, а также для самостоятельной работы магистрантов в качестве самопроверки и более глубокого изучения отдельных частей курса. Данные задачи могут выноситься на зачет по курсу. Задачник является дополнением к пособию «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ». Здесь разработаны задачи по одномерным уравнениям теплопроводности и диффузии в ограниченных слоях с источником тепла или без такового. Особое место уделено задачам на регулярный режим теплопроводности, на стационарный режим теплопроводности в неоднородном слое. Представлены задачи, решаемые с помощью функций Грина для теплопроводности на неограниченной и полуограниченной прямой. Разработаны задачи для трехмерных резонаторов и волноводов электромагнитного поля. Подробно рассмотрены задачи акустики в идеальной и вязкой жидкости и задачи волноводного распространения звука. Представлены задачи на стационарные уравнения гидродинамики и другие задачи. Темы задач в большей степени ориентированы на численные оценки тепловых, диффузионных, волновых процессов, чем на математические доказательства существования и сходимости исследуемых решений. Для этой цели задачник снабжен необходимыми справочниками и литературой.

# 1. Одномерные уравнения теплопроводности и диффузии в ограниченном слое

## 1.1. Теплопроводность в ограниченном слое

Для успешного решения нестационарных задач теплопроводности в ограниченном одномерном слое предлагается повторить разделы 2.1.1 – 2.1.9 пособия [1] а также изучить дополнительную литературу [2], [4], [7], [11-15]. Ниже приводятся задачи теплопроводности без конвекции и источников для слоя толщины  $L$ , исследуемые методом Фурье.

Исследовать методом Фурье однородное уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \\ T(x,0) = T_0(x), \\ \text{Однородные граничные условия.} \end{cases}$$

Здесь:  $T(x,t)$  - температура в слое,  $c_p$  - удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\rho$  - объемная плотность массы,  $k$  - коэффициент теплопроводности. Под однородными граничными условиями будем понимать:

1. Условия 1 рода

$$T(x,t)|_{x=0} = T(x,t)|_{x=L} = 0 ,$$

2. Условия 2 рода

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = 0 ,$$

3. Условия 3 рода

$$T(x,t)|_{x=0} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = 0 \text{ или } T(x,t)|_{x=L} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0 ,$$

4. Условия 4 рода

$$\left( k \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) - \alpha_1 \cdot T(x,t) \right) \Big|_{x=0} = 0$$

$$\left( k \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) + \alpha_2 \cdot T(x,t) \right) \Big|_{x=L} = 0$$

1.1.1. В начальный момент времени температура  $T(x,t)|_{t=0} = T_0$  была одинакова между точками  $x_0 = 0.25L$ ,  $x_1 = 0.75L$  слоя:  $0 < x_0 \leq x \leq x_1 < L$ . Построить решение уравнения теплопроводности для однородных граничных условий 1 рода. Построить приближенное решение в условиях регулярного режима 1 рода. Толщина слоя  $L = 5$  см. Найти суммарное количество тепла, вытекшее из слоя за время действия регулярного режима 1 рода остывания слоя. Рассмотреть три типа веществ для слоя: кирпич, пробка, алюминий (справочная таблица 1).

1.1.2. Среднюю температуру на отрезке  $[x_0, x_1]$  определим так:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} T(x,t) dx.$$

Найти закон изменения средней температуры во времени в условиях задачи 1.1.1.

1.1.3. Найти общее количество тепла, вытекшее через правую и левую границы в условиях задачи 1.1.1.

1.1.4. Найти собственные числа и собственные векторы задачи Штурма-Лиувилля для однородных граничных условий первого рода одномерного уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку базиса. Построить решение для начальной температуры  $T_0(x) = W \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ . Рассмотреть слой толщиной  $L = 3$  см из вещества: а) чугун, в) бетон, с) мрамор (справочная таблица 1).

1.1.5. Используя решения задачи 1.1.4., найти скорость изменения количества тепла в слое и суммарный поток тепла через левую и правую границы и

проверить закон сохранения тепла. Найти суммарное количество тепла, вытекшее из слоя за все время остывания слоя.

1.1.6. Найти собственные числа и собственные векторы задачи Штурма-Лиувилля для однородных граничных условий первого рода одномерного уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку базиса. Построить решение для начальной температуры  $T_0(x) = W \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$ . Рассмотреть слой толщиной  $L = 10$  см из вещества: а) медь, в) вода, с) гелий (справочная таблица 1).

1.1.7. Используя решения задачи 1.1.6. найти скорость изменения количества тепла в слое и суммарный поток тепла через левую и правую границы и проверить закон сохранения тепла. Найти суммарное количество тепла, вытекшее из слоя за все время остывания слоя. Дать объяснение полученному результату.

1.1.8. В начальный момент времени температура  $T(x, t)|_{t=0} = T_0$  была одинакова между точками  $x_0 = 0.25L$ ,  $x_1 = 0.75L$  слоя:  $0 < x_0 \leq x \leq x_1 < L$ . Построить решение уравнения теплопроводности для однородных граничных условий 2 рода. Построить приближенное решение в условиях регулярного режима 1 рода. Толщина слоя  $L = 5$  см. Рассмотреть три типа веществ для слоя: вольфрам, войлок, бензол (справочная таблица 1).

1.1.9. Найти собственные числа и собственные векторы задачи Штурма-Лиувилля для однородных граничных условий второго рода одномерного уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку базиса. Построить решение для начальной температуры из задачи 1.1.8. Найти количество тепла в слое в условиях термодинамического равновесия. Какое количество тепла перейдет в состояние термодинамического равновесия за время действия регулярного режима 1 рода? Рассмотреть слой толщиной  $L = 10$  см из вещества: а) полистирол, в) глицерин, с) водород (справочные таблицы 1, 2, 3).

1.1.10. В начальный момент времени температура  $T(x, t)|_{t=0} = T_0$  была одинакова между точками  $x_0 = 0.25L$ ,  $x_1 = 0.75L$  слоя:  $0 < x_0 \leq x \leq x_1 < L$ . Построить решение уравнения теплопроводности для однородных граничных условий 3 рода. Построить приближенное решение в условиях регулярного режима 1 рода. Толщина слоя  $L = 5$  см. Найти суммарное количество тепла, вытекшее из слоя за время действия регулярного режима 1 рода остывания слоя. Рассмотреть три типа веществ для слоя: кирпич, пробка, алюминий (справочная таблица 1). Сравнить найденное решение с решением задачи 1.1.1. и дать объяснение полученным результатам.

1.1.11. Найти собственные числа и собственные векторы задачи Штурма-Лиувилля для однородных граничных условий 3 рода одномерного уравнения теплопроводности и проверить ортогональность и нормировку базиса. Построить решение для начальной температуры  $T_0(x) = W \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ . Рассмотреть слой толщиной  $L = 3$  см из вещества: а) гранит, в) вода, с) кислород (справочные таблицы 1, 2, 3).

1.1.12. Используя решения задачи 1.1.11. найти скорость изменения количества тепла в слое и суммарный поток тепла через границы и проверить закон сохранения тепла. Найти суммарное количество тепла, вытекшее из слоя за все время остывания слоя.

1.1.13. Построить решение однородного одномерного уравнения теплопроводности для смешанных граничных условий вида:

$$T(x, t)|_{x=0} = 0$$

$$\left( k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \alpha \cdot T(x, t) \right) \Big|_{x=L} = 0$$

Дать оценку темпа остывания слоя  $\lambda_1$  и оценить время  $t^*$  начала регулярного режима 1 рода для слоя толщины  $L = 8$  см, коэффициента теплоотдачи поверхности  $\alpha = 10$  ккал/(м<sup>2</sup>·час·°С), если слой состоит из: а) графит, в) глицерин, с) азот (справочные таблицы 1, 2, 3). Найти предельное значение  $\lambda_1$

для бесконечного предельного значения  $\alpha$ . Объяснить физический смысл данных граничных условий и предельного результата.

## 1.2. Уравнение теплопроводности с источником тепла

Для успешного решения нестационарных задач теплопроводности в ограниченном одномерном слое с источником тепла предлагается повторить раздел 2.1.13 пособия [1] а также дополнительную литературу [3], [11-15]. Ниже приводятся задачи теплопроводности без конвекции, но с источником тепла, исследуемые методом Фурье.

Исследовать методом Фурье одномерное неоднородное уравнение теплопроводности с граничными условиями для слоя толщины  $L$

$$\begin{cases} c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \\ T(x,t)|_{t=0} = F(x), \\ \text{Граничные условия.} \end{cases}$$

1.2.1. Показать, что неоднородное уравнение теплопроводности может быть преобразовано к неоднородному уравнению теплопроводности с источником тепла, с однородными граничными условиями и с нулевым начальным данным.

1.2.2. В слое толщиной  $L = 0.5 \text{ м}$ , содержащем ацетон (справочная таблица 2), в момент времени  $t = 0$  включен нагреватель, который нагревал слой равномерно по времени до момента  $t_0 = 1 \text{ час}$ . Задавшись нулевыми начальными данными и однородными граничными условиями 1 рода, найти температуру в середине слоя в момент  $t = t_0$ . Нагреватель прогревает слой неравномерно вдоль оси  $x$ , согласно уравнению  $f(x,t) = W \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ . Максимальная объемная

плотность мощности  $W = 20000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ .

1.2.3. Используя решение задачи 1.2.2. найти количество тепла, вытекшее из левой и правой границ слоя за время действия нагревателя. Принять площадь сечения слоя  $\Sigma = 1 \text{ м}^2$ . Найти количество тепла, выделившееся в слое из-за действия нагревателя в течение времени  $t_0 = 1 \text{ час}$ . Проверить закон сохранения энергии.

1.2.4. В слое толщиной  $L = 0.4 \text{ м}$ , выполненном из кирпича (справочная таблица 1), в момент времени  $t = 0$  включен нагреватель, который нагревал слой равномерно по времени до момента  $t_0 = 10 \text{ час}$ . Задавшись нулевыми начальными данными и однородными граничными условиями 2 рода (слой изолирован от внешней среды), найти максимальную температуру в слое в момент  $t = t_0$ . Нагреватель прогревает слой неравномерно вдоль оси  $x$ , согласно уравнению

$$f(x,t) = \frac{W}{2} \cdot \left( \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + 1 \right), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad \text{Максимальная объемная плотность}$$

мощности  $W = 20000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ .

1.2.5. Используя решение задачи 1.2.4. найти количество тепла, выделившееся в слое из-за действия нагревателя в течение времени  $t_0 = 10 \text{ час}$ . Принять площадь сечения слоя  $\Sigma = 1 \text{ м}^2$ . Проверить закон сохранения энергии.

1.2.6. В слое толщиной  $L = 0.3 \text{ м}$ , выполненном из кирпича (справочная таблица 1), в момент времени  $t = 0$  включен нагреватель, который нагревал слой равномерно по времени до момента  $t_0 = 2 \text{ часа}$ . Задавшись нулевыми начальными данными и однородными граничными условиями 3 рода, найти максимальную температуру в слое в момент  $t = t_0$ . Нагреватель прогревает слой неравномерно вдоль оси  $x$ , согласно уравнению  $f(x,t) = W \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

Максимальная объемная плотность мощности  $W = 70 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ .

1.2.7. Используя решение задачи 1.2.6. найти количество тепла, вытекшее из слоя за время действия нагревателя. Принять площадь сечения слоя  $\Sigma = 1 \text{ м}^2$ . Найти количество тепла, выделившееся в слое из-за действия нагревателя в течение времени  $t_0 = 2 \text{ час}$ . Проверить закон сохранения энергии.

### 1.3. Регулярные режимы

Для успешного решения нестационарных задач теплопроводности в ограниченном одномерном слое методом регулярного режима предлагается повторить разделы 2.2.1 – 2.2.8 пособия [1] а также изучить дополнительную литературу [5-14]. Ниже приводятся задачи теплопроводности, решаемые методом регулярного режима. В методе регулярного режима исследуется приближенное уравнение теплопроводности для средней по объему температуры  $T_V(t)$ , справедливое при условии малого параметра  $Bi \ll 1$ . При этом условии  $T_V(t) \approx T_\Sigma(t)$ , где  $T_\Sigma(t)$  - средняя температура по поверхности

$$\frac{d}{dt} T_V(t) = -\lambda_1 (T_V(t) - T_L(t)) + f_V(t) .$$

$$T_V(t)|_{t=0} = T_{0V}$$

Здесь  $f_V(t)$  - средняя по объему функция источника,  $\lambda_1 = \frac{\alpha \Sigma}{c_p \cdot \rho V}$  - темп охлаждения, для слоя  $Bi = K \frac{\alpha \Sigma}{k V}$ ,  $K$  - коэффициент формы тела. Для пластины толщины  $L$  коэффициент формы равен  $\left(\frac{L}{\pi}\right)^2$ .

1.3.1. Регулярный режим 1 рода. Пластина из алюминия (справочная таблица 1) остывает в воздухе при температуре  $T_L = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 10 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Толщина пластины 1 м. Сколько времени требуется для остывания до  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ , если начальная температура пластины  $600 \text{ }^\circ\text{C}$  ?

1.3.2. Регулярный режим 1 рода. Пластина из стали (справочная таблица 1) остывает в воздухе с обдувом при температуре  $T_L = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ . Толщина пластины  $0.2 \text{ м}$ . До какой температуры остынет пластина за 10 часов при начальной температуре пластины  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  ?

1.3.3. Регулярный режим 1 рода. Пластина из стекла (справочная таблица 1) остывает в воздухе с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ . Толщина пластины  $0.01 \text{ м}$ . Какая должна быть температура воздуха  $T_L$ , чтобы через час температура пластины была бы равна  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ , если начальная температура пластины  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  ?

1.3.4. Регулярный режим 2 рода. Пластина из стекла (справочная таблица 1) остывает в воздухе с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ . Толщина пластины  $0.01 \text{ м}$ . Температура окружающей среды линейно возрастает по закону  $T_L(t) = T_0 + B \cdot t$ . Начальная температура пластины  $T_0 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ . Найти эффект отставания температуры пластины от температуры  $T_L(t)$  в момент времени  $t = 1 \text{ час}$ . Скорость нагрева среды  $B = 60 \text{ }^\circ\text{C}/\text{час}$ .

1.3.5. Регулярный режим 3 типа. Пластина из стекла (справочная таблица 1) помещена в термокамеру и остывает в воздухе с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ . Толщина пластины  $0.001 \text{ м}$ . Температура окружающей среды колеблется по закону  $T_L(t) = T_0 + A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Начальная температура пластины  $T_{0v} = T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Амплитуда колебаний температуры среды  $A = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ . Частота колебаний температуры  $\nu = 10^{-3} \text{ Гц}$ . Сделать вывод о возможности применения решения для регулярного режима и найти амплитуду колебаний температуры пластины в установившемся режиме.

1.3.6. Регулярный режим 3 типа. Пластина из свинца (справочная таблица 1) омывается водой с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 100 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$ . Толщина пластины 0.001 м. Температура окружающей среды колеблется по закону  $T_L(t) = T_0 + A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Начальная температура пластины  $T_{0V} = T_0 = 50 \text{ }^\circ C$ . Амплитуда колебаний температуры среды  $A = 40 \text{ }^\circ C$ . Частота колебаний температуры  $\nu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Гц}$ . Сделать вывод о возможности применения решения для регулярного режима и найти сдвиг фазы колебаний температуры пластины и среды в установившемся режиме.

1.3.7. Регулярный режим с источником тепла. В мраморной плите (справочная таблица 1) толщиной  $L = 5 \text{ см}$  расположен нагреватель, который включается по закону  $f(t) = f_0 \cdot (1 - \exp(-\gamma t))$ . Параметр включения  $f_0 = 0.04 \text{ }^\circ C/\text{сек}$ . Скорость включения  $\gamma = 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ . Плита омывается водой с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 30 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$ . Начальная температура пластины и воды  $T_{0V} = T_0 = 0.5 \text{ }^\circ C$ . Сделать вывод о возможности применения решения для регулярного режима и найти установившуюся температуру.

1.3.8. Регулярный режим с источником тепла. В алюминиевой пластине (справочная таблица 1) толщиной  $L = 5 \text{ см}$  расположен нагреватель, который функционирует по периодическому закону  $f(t) = f_0 \cdot \cos(\omega t)$ . Амплитуда  $f_0 = 0.04 \text{ }^\circ C/\text{сек}$ . Частота  $\nu = 10^{-4} \text{ Гц}$ . Пластина омывается водой с коэффициентом теплоотдачи поверхности  $\alpha = 50 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$ . Начальная температура пластины и воды  $T_{0V} = T_0 = 20 \text{ }^\circ C$ . Сделать вывод о возможности применения решения для регулярного режима и найти амплитуду установившейся температуры.

## 1.4. Уравнение диффузии с конвекцией

Для успешного решения нестационарных задач диффузии с конвекцией методом Фурье предлагается повторить раздел 2.1.10 пособия [1] а также дополнительную литературу [8-14].

Одномерное уравнение диффузии с полной производной по времени имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,t), \\ \rho(x,0) = F(x), \\ \rho(x,t)|_{x=0} = \rho(x,t)|_{x=L} = 0. \end{cases}$$

Плотность растворенного вещества вне слоя условно принята за ноль.

1.4.1. Сделать замену неизвестной функции по формуле

$$\rho(x,t) = \exp(\alpha \cdot t) \cdot \exp(\beta \cdot x) \cdot \rho_v(x,t),$$

и переписать уравнение диффузии с полной производной в лабораторную систему координат, исключив конвекционный поток. Найти решение  $\rho(x,t)$  для

начального условия  $\rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0 \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{v}{2D} \cdot x\right)$ . Выбрать скорость

конвекционного потока: а)  $v = 10^{-4} \text{ м/сек}$ , в)  $v = 10^{-2} \text{ м/сек}$ . Слой  $L = 2 \text{ м}$ . Газ гелий диффундирует в воздухе (справочная таблица 6). Найти время, за которое суммарная масса растворенного вещества уменьшится в два раза в слое  $L$ .

1.4.2. В начальный момент времени плотность растворенного вещества  $\rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0$  была одинакова между точками  $x_0 = 0.25L$ ,  $x_1 = 0.75L$  слоя:  $0 < x_0 \leq x \leq x_1 < L$ . Построить решение уравнения диффузии с конвекцией для однородных граничных условий 1 рода. Построить приближенное решение в условиях регулярного режима 1 рода. Толщина слоя  $L = 2 \text{ м}$ . Найти суммарное количество примеси, вытекшее из слоя за время действия регулярного режима 1 рода. Рассмотреть три типа веществ: а) азотная кислота в воде (справочная

таблица 5), в) хлорид натрия в воде (справочная таблица 5), с) уксусная кислота в воздухе (справочная таблица 6). Скорость потока выбрать  $v = 10^{-4}$  м/сек.

1.4.3. В начальный момент времени в слой толщиной  $L$ , в сечении с координатой  $x = x_0$ , вброшена масса примеси с плотностью  $F(x) = \mu \cdot \delta(x - x_0)$ . Построить решение одномерного уравнения диффузии с конвекцией для граничного условия 1 рода. Какой смысл имеет параметр  $\mu$  распределения?

### 1.5. Стационарные уравнения теплопроводности

Для успешного решения стационарных задач теплопроводности для неоднородных одномерных слоев вещества предлагается повторить разделы 5.1 – 5.4 пособия [1] а также дополнительную литературу [11-13].

Стационарное уравнение теплопроводности со стационарным источником, стационарными неоднородными граничными условиями, для слоя вещества имеет вид

$$k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) + f(x) = 0 .$$

Под неоднородными стационарными граничными условиями будем понимать:

1. Условия 1 рода

$$T(x)|_{x=0} = T_1, T(x)|_{x=L} = T_2 ,$$

2. Условия 2 рода

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x)|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} T(x)|_{x=L} = J ,$$

3. Условия 3 рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T(x) \Big|_{x=0} &= \frac{\alpha_1}{k} \cdot (T(x)|_{x=0} - T_{L1}) \\ \frac{d}{dx} T(x) \Big|_{x=L} &= -\frac{\alpha_2}{k} \cdot (T(x)|_{x=L} - T_{L2}) \end{aligned} ,$$

4. Условия 4 рода

$$a): T(x)|_{x=0} = T_1, \quad \left. \frac{d}{dx} T(x) \right|_{x=L} = -\frac{\alpha_2}{k} \cdot (T(x)|_{x=L} - T_{L2}),$$

$$b): T(x)|_{x=L} = T_2, \quad \left. \frac{d}{dx} T(x) \right|_{x=0} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot (T(x)|_{x=0} - T_{L1}).$$

1.5.1. Найти поток тепла через слой толщиной  $L = 0.13 \text{ м}$  и площадью  $4 \text{ м}^2$ , если температуры поверхностей слоя равны  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$  (граничные условия 1 рода). Рассмотреть: кирпич, медь, графит (справочная таблица 1). Источник тепла в слое отсутствует.

1.5.2. Найти поток тепла через слой толщиной  $L = 0.5 \text{ м}$  и площадью  $40 \text{ м}^2$ , для граничных условий 4 рода а), если температура левой поверхности равна  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , температура окружающей среды  $T_{L2} = 90 \text{ }^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи правой поверхности  $\alpha_2 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$ . Рассмотреть: пробка, латунь, свинец (справочная таблица 1). Источник тепла в слое отсутствует.

1.5.3. Найти поток тепла через слой толщиной  $L = 0.2 \text{ м}$  и площадью  $50 \text{ м}^2$ , для граничных условий 3 рода, если температура левой окружающей среды равна  $T_{L1} = 250 \text{ }^\circ\text{C}$ , правой окружающей среды  $T_{L2} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ , коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$ ,  $\alpha_2 = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$ . Рассмотреть: мрамор, графит, железо (справочная таблица 1). Источник тепла в слое отсутствует.

1.5.4. Найти температуру среды  $T_{L1}$ , если через слой толщиной  $L = 0.3 \text{ м}$  и площадью  $40 \text{ м}^2$  протекает поток тепла  $I = 100000 \text{ Вт}$ . Использовать граничные условия 4 рода в). Температура правой поверхности равна  $T_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи левой поверхности  $\alpha_1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$ . Рассмотреть: дерево, гранит, серебро (справочная таблица 1). Источник тепла в слое отсутствует.

1.5.5. В слое толщиной  $L = 0.5 \text{ м}$  и площадью  $4 \text{ м}^2$  расположен нагреватель с объемной плотностью мощности  $f = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ . Температуры поверхностей слоя равны  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$  (граничные условия 1 рода). Найти поток тепла через левую и правую поверхности слоя. Рассмотреть: пробка, вольфрам, стекло (справочная таблица 1).

1.5.6. Найти температуры  $T_2, T_3$  на поверхностях трехслойной стенки с толщинами слоев  $L_1 = 0.5 \text{ м}$ ,  $L_2 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_3 = 0.4 \text{ м}$ , коэффициентами теплопроводности слоев  $k_1, k_2, k_3$ . Температуры левой и правой поверхности равны:  $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_4 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  (граничные условия 1 рода). Слои выполнены из (по порядку): кирпич, воздух, кирпич (справочная таблица 1).

1.5.7. Найти плотность теплового потока через трехслойную стенку с толщинами слоев  $L_1 = 0.5 \text{ м}$ ,  $L_2 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_3 = 0.4 \text{ м}$ , коэффициентами теплопроводности слоев  $k_1, k_2, k_3$ . Температуры левой и правой поверхности равны:  $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_4 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$  (граничные условия 1 рода). Слои выполнены из (по порядку): сталь, дерево, кирпич (справочная таблица 1).

1.5.8. Двойной слой выполнен из дерева толщиной  $L_1 = 0.5 \text{ м}$  и поролоната толщиной  $L_2$ . Плотность теплового потока через двойной слой равна  $J = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Температура на внешней поверхности дерева  $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ , на внешней поверхности поролоната  $T_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Найти: а) температуру между слоями, в) толщину слоя поролоната (справочная таблица 1).

1.5.9. Определить коэффициент теплопроводности материала стенки, если при разности температур на поверхностях стенки  $\Delta T = T_1 - T_2 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$  и толщине  $L = 50 \text{ мм}$ , плотность теплового потока  $J = 1000 \text{ Вт/м}^2$ .

1.5.10. Имеется трехслойная стенка с толщинами слоев  $L_1 = 0.5 \text{ м}$ ,  $L_2 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_3 = 0.4 \text{ м}$ , коэффициентами теплопроводности слоев  $k_1, k_2, k_3$ . Слои выполнены из (по порядку): сталь, воздух, кирпич (справочная таблица 1). Определить общее термическое сопротивление этой многослойной стенки. Сравнить с термическим сопротивлением без наличия воздушной прослойки, сделать вывод.

1.5.11. Тепловой поток с плотностью  $J = 200 \text{ ккал}/(\text{сек} \cdot \text{м}^2)$  проходит через стенку толщиной  $L = 50 \text{ мм}$ . Найти градиент температуры на стенке, выполненной из: а) меди, в) воздуха, с) пробки (справочная таблица 1, 3).

1.5.12. Кирпичная (справочная таблица 1) стенка размещена в среде с коэффициентом теплоотдачи левой поверхности  $\alpha_1 = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  и правой поверхности  $\alpha_2 = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ . Температура газов с левой стороны  $T_{L1} = 700^\circ\text{C}$ , температура газов с правой стороны  $T_{L2} = 20^\circ\text{C}$ . Вычислить: а) плотность потока тепла  $J$  через стенку, в) температуру  $T_1$  и  $T_2$  на поверхности стенки.

1.5.13. Стальная стенка (справочная таблица 1) парового котла толщиной  $\delta = 12 \text{ мм}$ , нагревается газами с температурой  $T_{L1} = 1000^\circ\text{C}$  (коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1 = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ) и кипящей водой  $T_{L2} = 200^\circ\text{C}$  (коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ). Вычислить: а) плотность потока тепла  $q$  через стенку, в) температуру  $T_1$  и  $T_2$  на поверхности стенки.

1.5.14. Температура левой поверхности стенки из кирпича (справочная таблица 1) равна  $T_1 = 300^\circ\text{C}$ . Правая стенка омывается жидкостью с температурой  $T_{L2} = 20^\circ\text{C}$  (коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ). Найти толщину стенки, если плотность теплового потока равна  $q = 1000 \text{ Дж}/(\text{сек} \cdot \text{м}^2)$ .

## 2. Теория: метод функций Грина для одномерного уравнения диффузии на неограниченной и полуограниченной прямой

### 2.1. Функция Грина уравнения диффузии на прямой

На стр. 68 пособия [1] получено решение одномерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t)$$

$$\rho(x, t)|_{t=0} = \Psi(x)$$

на неограниченной прямой ( $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ )

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot t \cdot D}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4 \cdot t \cdot D}\right) \cdot \Psi(x') dx' . \quad (1)$$

Здесь  $\rho(x, t)$  - плотность массы на единицу длины. Функцией Грина уравнения диффузии называется решение для точечного источника единичной массы, расположенного в точке  $\xi$

$$\Psi(x) = \delta(x - \xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) dx = 1 .$$

Функция Грина  $G(x, \xi, t)$  имеет вид

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot t \cdot D}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4 \cdot t \cdot D}\right) .$$

### 2.2. Функция Грина уравнения диффузии на полупрямой с однородным и неоднородным граничным условием 1 рода

Поместим точечный источник на левой полупрямой в точку  $x = -\xi$  и запишем функцию Грина на правой полупрямой в виде

$$G_h(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot t \cdot D}} \left( \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4 \cdot t \cdot D}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4 \cdot t \cdot D}\right) \right) .$$

Эта функция удовлетворяет уравнению, граничному условию

$$G_h(x, \xi, t) \Big|_{x=0} = 0$$

и начальному условию при  $x > 0$

$$G_h(x, \xi, t) \Big|_{x>0, t=0} = \delta(x - \xi) .$$

Получим решение уравнения диффузии на правой полупрямой с однородным граничным условием 1 рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t), \\ \rho(x, t) \Big|_{t=0} &= \begin{cases} \rho_0 & 0 < x \leq x_0 \\ 0 & x > x_0 \end{cases}, \\ \rho(x, t) \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

В начальный момент на границе имеется слой толщиной  $x_0$ , заполненный диффундирующим веществом. С помощью функции Грина  $G_h(x, \xi, t)$  получаем решение

$$\rho(x, t) = \rho_0 \cdot \left( 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{x + x_0}{\sqrt{2Dt}}\right) \right).$$

Получим решение уравнения диффузии на правой полупрямой с неоднородным граничным условием 1 рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t), \\ \rho(x, t) \Big|_{t=0, x>0} &= 0, \\ \rho(x, t) \Big|_{x=0} &= \rho_0. \end{aligned}$$

Введем избыточную линейную плотность по формуле

$$\tilde{\rho}(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0 .$$

Уравнение для однородного граничного условия имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\rho}(x, t), \\ \tilde{\rho}(x, t) \Big|_{t=0, x>0} &= -\rho_0, \\ \tilde{\rho}(x, t) \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Решение для  $\rho(x, t)$  с помощью функции Грина  $G_h(x, \xi, t)$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \cdot \left( 1 - 2 \cdot \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2Dt}} \right) \right).$$

Здесь введена функция Лапласа  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ , численные значения которой даны в Таблице 7.

### 2.3. Неоднородное уравнение диффузии на неограниченной прямой с источником

Рассмотрим неоднородное одномерное уравнение диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) + W(x, t) \\ \rho(x, t) \Big|_{t=0} &= \Psi(x) \end{aligned}$$

с источником на неограниченной прямой ( $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ ). Решение ищем в виде суммы

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t).$$

Функция  $\rho_1(x, t)$  удовлетворяет уравнению и начальным данным

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_1(x, t), \\ \rho_1(x, t) \Big|_{t=0} &= \Psi(x) \end{aligned}$$

решение которого найдено методом функции Грина в (1). Функция  $\rho_2(x, t)$  удовлетворяет уравнению с нулевыми начальными данными

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_2(x, t) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_2(x, t) + W(x, t), \\ \rho_2(x, t) \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение этого уравнения находим подстановкой

$$\rho_2(x, t) = \int_0^t \omega(x, t, \tau) d\tau.$$

Функция  $\omega(x, t, \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t, \tau) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega(x, t, \tau), \\ \omega(x, t, \tau) \Big|_{t=\tau} &= W(x, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (2) ищем методом функции Грина

$$\omega(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) W(\xi, \tau) d\xi .$$

Решение (2) имеет вид

$$\rho_2(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) W(\xi, \tau) d\xi d\tau . \quad (4)$$

### 3. Задачи на уравнение диффузии на неограниченной прямой с источником

3.1. Проверить справедливость преобразования (2). Проверить справедливость вывода (3). Проверить справедливость решения (4).

3.2. Методом функции Грина решить задачу Коши для одномерного однородного уравнения диффузии в бесконечном цилиндре с начальным распределением линейной плотности массы вдоль цилиндра:

$$\rho(x, t) \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x_0/2 < x < \infty \\ 0 & -\infty < x < -x_0/2 \\ \rho_0 & -x_0/2 \leq x \leq x_0/2 \end{cases} .$$

Рассмотреть диффузию ацетона в воздухе (справочная таблица 6). Найти момент времени, когда плотность ацетона в точке  $x = 0$  уменьшится в два раза. Принять  $x_0 = 1 \text{ см}$

3.3. В момент  $t = t_0$  в интервале  $x_0 \leq x \leq x_1$  на оси  $x$  сработал мгновенный источник, создавший в этом интервале равномерно распределенную массу  $m = 10 \text{ г}$  примеси. Найти линейную плотность массы примеси в точках  $x_2$  и  $x_3$  в

момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Функция включения источника  $\delta$  - образная:  $\delta(t - t_0)$ .  
 Принять:  $x_0 = 1$  мкм,  $x_1 = 50$  мкм,  $x_2 = 100$  мкм,  $x_3 = 300$  мкм,  $\Delta t = 10$  сек,  $t_0 = 1$  сек.  
 Пространство заполнено растворителем – вода. Рассмотреть примеси: 1. Соляная кислота, 2. Хлорид натрия (справочная таблица 5).

#### 4. Задачи для одномерного однородного уравнения диффузии на неограниченной или полуограниченной прямой

4.1. Методом функции Грина решить задачу Коши для одномерного однородного уравнения диффузии в бесконечном цилиндре с начальным распределением линейной плотности массы вдоль цилиндра:

$$\rho(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} A \cdot \exp(-\alpha \cdot x), & 0 \leq x < \infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}.$$

Использовать интеграл Пуассона.

4.2. Методом функции Грина решить задачу Коши для одномерного однородного уравнения диффузии в бесконечном цилиндре с начальным распределением линейной плотности массы вдоль цилиндра:

$$\rho(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} B, & 0 \leq x < \infty \\ A, & -\infty < x < 0 \end{cases}, \quad B > A > 0.$$

4.3. Найти связь координаты и момента времени, когда значение линейной плотности равно  $\rho(x, t) = \frac{3B + A}{4}$ . Используя таблицу функции  $\Phi(z)$  (справочная таблица 7) привести несколько значений координаты и времени для выбранного коэффициента диффузии. Использовать решение предыдущей задачи.

4.4. Найти скорость перемещения вдоль оси  $x$  точки, которая определена в предыдущей задаче. Используя таблицу функции  $\Phi(z)$  (справочная таблица 7) привести несколько значений скорости перемещения для выбранного коэффициента диффузии.

4.5. Пластина кремния помещена в газовую среду при температуре  $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Газ диффундирует через поверхность, создавая в кремнии диффузионный слой. Принимая концентрацию газа на поверхности пластины  $10^{18}\text{ см}^{-3}$  найти концентрацию газа на расстоянии 1 мкм для трех значений времени. Диффундирующее вещество- бор, фосфор, сурьма (справочная таблица 8).

4.6. Пластина кремния помещена в газовую среду при температуре  $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Газ диффундирует через поверхность, создавая в кремнии диффузионный слой. Принимая концентрацию газа  $10^{18}\text{ см}^{-3}$  найти местоположение и момент времени, когда концентрация диффундирующего вещества будет равна 10% от поверхностной. Диффундирующее вещество- алюминий, мышьяк, галлий (справочная таблица 8).

4.7. Поверхность железа покрывают пленкой хрома методом диффузии, погружая пластину в порошкообразный хром и нагревая до  $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Найти процентное соотношение концентрации диффундирующего хрома к поверхностной концентрации на глубине 200 нм после минутной выдержки. Коэффициент диффузии хрома в железе принять равным  $3.5 \cdot 10^{-10}\text{ см}^2/\text{сек}$

## 5. Волновое уравнение струны

Для успешного решения нестационарных задач колебаний струны методом Фурье предлагается повторить разделы 3.4, 4.1 пособия [1].

Волновое уравнение плоских колебаний струны

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x,t) = V^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,t) + f(x,t), \\ Y(x,t) \Big|_{t=0} = \Phi(x), \\ \frac{\partial}{\partial x} Y(x,t) \Big|_{t=0} = \Psi(x), \\ \text{граничные условия.} \end{array} \right.$$

Здесь  $Y(x,t)$  - смещение струны из положения равновесия,  $V = \sqrt{\frac{N}{\rho \cdot \Sigma}}$  - фазовая скорость возбуждения,  $N$  - сила натяжения струны,  $\rho$  - объемная плотность массы струны,  $\Sigma$  - площадь поперечного сечения,  $f(x,t)$  - внешняя сила на единицу массы. Граничные условия на правом конце:

1. Условие 1 рода – закон движения правого края струны

$$Y(x,t)\Big|_{x=L} = \mu(t),$$

2. Условие 2 рода – закон приложенной силы к правому краю

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x,t)\Big|_{x=L} = v(t),$$

3. Условие 3 рода – упругая сила с жесткостью  $h \geq 0$  и законом движения правого края  $\Theta(t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x,t)\Big|_{x=L} = -h \cdot \left( Y(x,t)\Big|_{x=L} - \Theta(t) \right).$$

На левом краю возможны те же условия, но следует положить, что жесткость  $h \leq 0$ . Получаем 9 различных граничных условий для движения ограниченной струны.

5.1. Струна из меди (справочная таблица 1) длиной  $L = 1$  метр, кругового сечения радиусом 0.5 мм, натянута с силой натяжения 10 ньютонов. Струна закреплена по краям. В начальный момент времени струна покоилась и имела форму

$$Y(x,t)\Big|_{t=0} = Y_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \text{ где амплитуда } Y_0 = 1 \text{ мм. Найти решение однородного}$$

волнового уравнения струны, определить амплитуду и частоту колебаний (в герцах).

5.2. Струна из стали (справочная таблица 1) длиной 1.5 метра, кругового сечения радиусом 0.25 мм, натянута с силой 100 ньютонов. Струна закреплена по краям. Начальное смещение струны было равно нулю, а начальная скорость точек

$$\text{струны равнялась } \frac{\partial}{\partial t} Y(x,t)\Big|_{t=0} = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right), \text{ где амплитуда начальной скорости}$$

$V_0 = 10$  м/сек. Найти решение однородного волнового уравнения, амплитуду и частоту (в герцах) колебаний струны.

5.3. Струна из латуни (справочная таблица 1) длиной 0.5 метра, кругового сечения радиусом 0.5 мм, натянута с силой натяжения 50 ньютонов. Края струны не закреплены и могут без трения смещаться. То есть на краях струны поставлены однородные граничные условия 2 рода. В начальный момент времени струна покоилась и имела форму  $Y(x,t)|_{t=0} = Y_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + Y_1$ , где амплитуда  $Y_0 = 1$  мм, смещение струны  $Y_1 = 2$  мм. Найти решение однородного волнового уравнения струны, определить амплитуду и частоту колебаний (в герцах).

## 6.Трехмерные и двухмерные нестационарные уравнения для тепловых и волновых процессов

### 6.1. Нестационарные тепловые процессы в трехмерных ограниченных объемах

6.1.1. Параллелепипед с размерами вдоль осей  $L_x = 1$  см,  $L_y = 10$  см,  $L_z = 20$  см в начальный момент времени  $t = 0$  имеет распределение температуры согласно уравнению  $T(x,y,z,t)|_{t=0} = T_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L_z}\right)$ . Граничные условия имеют вид:

$$T(x,y,z,t)|_{y=0,L_y} = T(x,y,z,t)|_{z=0,L_z} = 0, \quad \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \Big|_{x=0,L_x} = 0.$$

Найти скорость остывания тела, сделанного из: 1. дерево, 2. сталь, 3. кирпич (справочная таблица 1).

6.1.2. Куб с размерами вдоль осей  $L_x = L_y = L_z = 20$  см в начальный момент времени  $t = 0$  имеет распределение температуры согласно уравнению

$$T(x,y,z,t)|_{t=0} = T_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{2L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{2L_z}\right).$$

Граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x, y, z, t) \Big|_{y=L_y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z, t) \Big|_{z=L_z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} T(x, y, z, t) \Big|_{x=L_x} = 0,$$

$T(x, y, z, t) \Big|_{y=0} = 0, T(x, y, z, t) \Big|_{z=0} = 0, T(x, y, z, t) \Big|_{x=0} = 0$ . Найти скорость остывания тела, сделанного из: 1. пробка, 2. стекло, 3. графит (справочная таблица 1).

## 6.2. Нестационарные волновые процессы колебания мембран

6.2.1. Применить метод деления переменных к волновому уравнению колебаний прямоугольной мембраны  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(x, y, t)$ , закрепленной по краям, найти базис Фурье, частоты колебаний гармоник и привести формальное решение нестационарной задачи в виде ряда Фурье с произвольными начальными данными.

6.2.2. Найти частоты колебаний мод прямоугольной медной (справочная таблица 1) мембраны с размерами  $a_x = 10 \text{ см}$ ,  $a_y = 20 \text{ см}$ . Сила натяжения мембраны  $N = 100$  ньютонов. Толщина мембраны  $\Delta L = 1 \text{ мм}$ .

## 6.3. Уравнения Максвелла

Для успешного решения уравнений Максвелла предлагается повторить раздел 3.1 пособия [1] а также дополнительную литературу [15].

Система уравнений в вакууме для электрического  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  полей

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r},t), \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r},t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) &= 0.\end{aligned}$$

Связь векторного  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  и скалярного  $\Phi(\mathbf{r},t)$  потенциалов с электромагнитным полем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r},t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{r},t)).\end{aligned}$$

Калибровка Лоренца потенциалов

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r},t) = 0 .$$

Волновые уравнения для скалярного и векторного потенциалов в калибровке Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= c^2 \cdot \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r},t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r},t) &= c^2 \cdot \Delta \Phi(\mathbf{r},t).\end{aligned}$$

6.3.1. Записать уравнения Максвелла для гармонической электромагнитной волны, зависимость от времени всех неизвестных полей и функций которой выбрать в виде множителя  $\exp(-i\omega \cdot t)$ . Отделить временную переменную от координатной, выразить амплитуду вектора электрического и магнитного полей через амплитуду векторного потенциала и получить уравнение Гельмгольца для векторного потенциала монохроматической волны.

6.3.2. Найти граничные условия для векторного потенциала монохроматической волны на границах резонатора, выполненного из отрезка металлической трубы прямоугольного сечения. Ось трубы направлена по оси  $z$  по вектору  $\mathbf{e}_z$ , торцы трубы закрыты тем же металлом. На границе раздела вакуума и идеального

металла граничные условия выбрать равными:  $\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\tau} = 0$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})|_{\nu} = 0$ . Здесь  $\tau$  - касательная компонента к поверхности,  $\nu$  - нормальная компонента к поверхности раздела. Рассмотреть решение для векторного потенциала с одной  $z$  компонентой:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(x, y, z) \cdot \mathbf{e}_z$ .

6.3.3. Решить уравнение Гельмгольца методом деления переменных для  $z$ -компоненты векторного потенциала для резонатора, определенного в задачах 6.3.1. и 6.3.2.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(x, y, z) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \cdot A(x, y, z),$$

для граничных условий:

$$A(x, y, z)|_{\Sigma_{xy}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} A(x, y, z)|_{z=0, L} = 0.$$

Здесь  $\Sigma_{xy}$  - боковая поверхность трубы с размерами  $a_x \times a_y$ ,  $L$  - длина резонатора. Для решения можно использовать решение задачи 6.2.1. колебаний прямоугольной мембраны.

6.3.4. Использовать решение задачи 6.3.1., построить решение для ТМ мод и найти константы распространения мод для волновода прямоугольного сечения. Для поиска поперечного распределения векторного потенциала можно использовать решение задачи 6.2.1. колебаний прямоугольной мембраны. Рассмотреть решение для векторного потенциала с одной  $z$  компонентой:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(x, y, z) \cdot \mathbf{e}_z$ . На границе раздела вакуума и идеального металла граничные условия выбрать равными:  $A(x, y, z)|_{\Sigma} = 0$ . Здесь  $\Sigma$  - боковая поверхность волновода.

6.3.5. Привести решения волновых уравнений для электромагнитных потенциалов для плоской, цилиндрической (не зависящей от координаты  $z$  и полярного угла  $\phi$ ) и сферической (не зависящей от сферических угловых переменных) волн. Найти формы волновых фронтов этих волн.

## 7. Трехмерные стационарные уравнения для тепловых процессов

Для успешного решения трехмерных стационарных уравнений теплопроводности предлагается повторить разделы 5.6 – 5.8 пособия [1] а также дополнительную литературу [11-15].

Трехмерные стационарные эллиптические уравнения для тепловых, диффузионных, волновых процессов для скалярной функции  $A(x, y, z)$  имеют вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(x, y, z) = 0 \text{ - уравнение Лапласа,}$$
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(x, y, z) = F(x, y, z) \text{ - уравнение Пуассона.}$$

Граничные условия на различных участках поверхности рассматриваемого объема выбираются трех видов:

1. Условие 1 рода на участке поверхности  $\Sigma$

$$A(\mathbf{r})\Big|_{r \in \Sigma} = f_1(\mathbf{r}),$$

2. Условие 2 рода на участке поверхности  $\Sigma$

$$(\nabla A(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r}))\Big|_{r \in \Sigma} = f_2(\mathbf{r}),$$

3. Условие 3 рода на участке поверхности  $\Sigma$

$$(\nabla A(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r}))\Big|_{r \in \Sigma} = -h \cdot (A(\mathbf{r})\Big|_{r \in \Sigma} - f_3(\mathbf{r})).$$

Здесь  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ -внешняя нормаль  $h \geq 0$ .

7.1. Рассмотреть стационарный режим теплопроводности без источников в цилиндрической медной стенке (справочная таблица 1) (полый цилиндр, труба) с внутренним радиусом  $r_1 = 20$  см, внешним радиусом  $r_2 = 25$  см. Найти радиальное распределение температуры для граничного условия 1 рода на внутренней поверхности  $T(r)\Big|_{r=r_1} = T_1$  и граничного условия 3 рода на внешней

поверхности  $\frac{\partial}{\partial r} T(r)\Big|_{r=r_2} = -\frac{\alpha_2}{k} \cdot (T(r)\Big|_{r=r_2} - T_{L2})$ , где:  $T_1 = 200$  °C,  $T_{L2} = 20$  °C,

$\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ . Найти тепловой поток на единицу длины цилиндра через внешнюю поверхность.

7.2. Рассмотреть стационарный режим теплопроводности без источников в цилиндрической чугуновой (справочная таблица 1) стенке (полый цилиндр, труба) с внутренним радиусом  $r_1 = 40$  см, внешним радиусом  $r_2 = 50$  см. Найти радиальное распределение температуры для граничного условия 3 рода на внутренней поверхности  $\left. \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot (T(r)|_{r=r_1} - T_{L1})$  и граничного условия 3 рода на внешней поверхности  $\left. \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right|_{r=r_2} = -\frac{\alpha_2}{k} \cdot (T(r)|_{r=r_2} - T_{L2})$ , где:  $T_{L1} = 100 \text{ °C}$ ,  $T_{L2} = 25 \text{ °C}$ ,  $\alpha_1 = 500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ ,  $\alpha_2 = 800 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ . Найти тепловой поток на единицу длины цилиндра через внешнюю поверхность.

7.3. Рассмотреть стационарный режим теплопроводности без источников через шаровую чугуновую (справочная таблица 1) стенку (полый шар) с внутренним радиусом  $r_1 = 40$  см, внешним радиусом  $r_2 = 50$  см. Найти радиальное распределение температуры для граничного условия 1 рода на внутренней стенке с температурой  $T_1 = 100 \text{ °C}$  и внешней стенке с температурой  $T_2 = 20 \text{ °C}$ . Найти поток тепла через внешнюю и внутреннюю стенку шара.

7.4. Рассмотреть стационарный режим теплопроводности без источников через шаровую алюминиевую (справочная таблица 1) стенку (полый шар) с внутренним радиусом  $r_1 = 30$  см, внешним радиусом  $r_2 = 60$  см. Найти радиальное распределение температуры для граничного условия 1 рода на внутренней стенке с температурой  $T_1 = 100 \text{ °C}$  и внешней стенке с температурой  $T_2$ . Найти температуру внешней стенки, если поток тепла через внешнюю стенку шара равен 10 кВт.

7.5. Рассмотреть стационарный режим теплопроводности без источников через шаровую чугуновую (справочная таблица 1) стенку (полый шар) с внутренним

радиусом  $r_1 = 10$  см, внешним радиусом  $r_2 = 50$  см. Найти радиальное распределение температуры для граничного условия 3 рода на внутренней поверхности  $\left. \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot (T(r)|_{r=r_1} - T_{L1})$  и граничного условия 3 рода на внешней поверхности  $\left. \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right|_{r=r_2} = -\frac{\alpha_2}{k} \cdot (T(r)|_{r=r_2} - T_{L2})$ , где:  $T_{L1} = 100$  °C,  $T_{L2} = 40$  °C,  $\alpha_1 = 200$  Вт/(м<sup>2</sup> · °C),  $\alpha_2 = 500$  Вт/(м<sup>2</sup> · °C). Найти поток тепла через внешнюю и внутреннюю стенку шара.

## 8. Акустика

### 8.1. Звуковые волны в идеальной несжимаемой жидкости

Для успешного решения задач акустики, использующих линеаризованную теорию акустических звуковых волн в адиабатическом приближении для идеальной среды, предлагается повторить раздел 3.3 пособия [1] а также дополнительную литературу [15, 16].

Характеристиками теории акустики идеальной среды являются: избыточное звуковое давление  $p'(\mathbf{r}, t)$ , отклонение плотности от равновесного значения  $\rho'(\mathbf{r}, t)$ , колебательная скорость частиц среды  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , потенциал скорости  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

8.1.1. Найти решения в гармоническом приближении волновых уравнений для бегущей плоской звуковой волны. Проверить, что звуковая волна продольна и найти связи между характеристиками  $p'(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho'(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

8.1.2. Используя формулу для скорости звука в идеальных газах, найти скорость звука для одноатомных и двухатомных газов при температуре 0 °C: He, Ne, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>.

8.1.3. Используя формулу уравнения состояния идеального газа  $p_0 = n \cdot k \cdot T$  ( $n$  – объемная плотность числа частиц), найти колебательные скорости частиц при

давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  и звуковом давлении  $p' = 2 \cdot 10^{-4} \text{ дин/см}^2$  для одноатомных и двухатомных газов для условий задачи 8.1.2.

8.1.4. Рассчитать интенсивность звука  $I = \frac{1}{2} c \cdot \rho_0 \cdot |\mathbf{v}|^2$ , где  $c$  - скорость звуковой волны, для условий задач 8.1.2., 8.1.3.

8.1.5. Используя решение задачи 8.1.1. получить выражение для смещения колеблющихся в звуковой волне частиц из положения равновесия и ускорение колеблющихся частиц.

8.1.6. Используя решение задач 8.1.1., 8.1.2. и 8.1.5. найти звуковые давления в среде из одно и двух атомных газов на частоте 800 герц а также амплитуды смещения и ускорения для частиц с колебательной скоростью  $|\mathbf{v}| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}$  при давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  и температуре  $0^\circ \text{C}$ .

## 8.2. Затухание звука в вязкой среде

Волновое уравнение для малых звуковых колебаний в вязкой теплопроводящей жидкости (газе) для потенциала колебательной скорости

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \mathbf{r}) - c^2 \Delta \phi(t, \mathbf{r}) - \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi(t, \mathbf{r}) = 0 .$$

Здесь  $b = \frac{4}{3} \eta + \eta' + \frac{k}{c_p} (\gamma - 1)$ ,  $c$  - адиабатическая скорость звука,  $\rho$  - объемная плотность среды,  $\eta$  - динамическая вязкость,  $\eta'$  - объемная вязкость,  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $c_p$  - удельная теплопроводность,  $\gamma = \frac{i+2}{i}$  - показатель адиабаты,  $i$  - число степеней свободы. Для оценки можно положить  $\eta' = 0$ , что справедливо для одноатомных газов (справочная таблица 4).

8.2.1. Найти решение волнового уравнения для малых звуковых колебаний в вязкой теплопроводящей жидкости (газе) для потенциала колебательной скорости для плоской монохроматической волны. Привести связанные решения для потенциала скорости, колебательной скорости, избыточного давления в звуковой волне. Доказать продольность распространения звуковой волны.

8.2.2. Звуковая волна с частотой 20 кГц падает нормально на слой газа гелия (при температуре  $0^\circ\text{C}$ ). Взяв стандартный уровень интенсивности волны за  $J_{st} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$  и ее уровень на входе 80 дБ (по отношению к стандартному), найти уровень мощности на расстоянии 500 метров от границы.

8.2.3. Найти коэффициент поглощения звуковой волны на частоте 10 кГц в воздухе. Выразить коэффициент поглощения в децибелах на километр.

### 8.3. Волновод для звуковых волн

8.3.1. Слой газа ограничен бесконечными жесткими стенками, расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга. Стенки ортогональны оси  $z$ , условия на границах определяются равенством нулю  $z$  - составляющей колебательной скорости частиц в звуковой волне:  $v_z|_{z=0,h} = 0$ . Найти решения в гармоническом приближении волновых уравнений для плоской звуковой волны, бегущей вдоль оси  $x$  плоского волновода. Найти связи между характеристиками  $p'(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho'(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Найти разрешенные волновые числа  $k_x$  распространения волноводных мод вдоль оси  $x$ .

8.3.2. Используя формулу для скорости звука в идеальных газах в адиабатическом приближении, найти скорость звука  $c$  для одноатомных и двухатомных газов при температуре  $0^\circ\text{C}$ :  $\text{He}$ ,  $\text{Ne}$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ . Найти фазовые

скорости  $v_f = \frac{\omega}{k_x}$  волноводных мод для задачи 8.3.1. Частота звуковой волны

$\nu = 20$  кГц, расстояние между стенками  $h = 30$  сантиметров.

8.3.3. Найти частоты отсечки (критические частоты) волноводных мод задачи 8.3.2. Найти групповые скорости и дисперсии групповых скоростей звуковых мод задачи 8.3.2.

8.3.4. Найти частоты основных колебаний звуковых мод в прямоугольной камере с твердыми стенками с размерами  $L_x = 2$  метра,  $L_y = 1$  метр,  $L_z = 3$  метра, заполненной газами (раздельно)  $He$ ,  $Ne$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ . Граничные условия для твердой стенки  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\Sigma} = 0$ . Здесь  $\mathbf{n}$  - нормаль к поверхности  $\Sigma$ .

## 9. Стационарные уравнения гидродинамики

Для успешного решения задач на стационарные уравнения гидродинамики предлагается повторить разделы 5.11, 5.12 пособия [1] а также дополнительную литературу [3, 5, 6, 16].

### 9.1. Уравнение Бернулли

9.1.1. Упростить интеграл Бернулли, предположив несжимаемость идеальной жидкости в стационарных уравнениях гидродинамики. Убедиться, что в таком случае интеграл Бернулли на линии тока  $s(\mathbf{r})$  имеет вид:

$$\left( \frac{v(\mathbf{r})^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} \right) \Big|_{s(\mathbf{r})} = const.$$

9.1.2. В баке, заполненном водой, пробито отверстие на высоте 10 метров от края воды. Использовать интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости, положить, что размер отверстия гораздо меньше поперечного размера бака и оценить скорость вытекания воды из бака.

9.1.3. Через плотину высотой 40 метров переливается избыток воды. Предположим, что вытекание ламинарное и совпадает с линией тока. Найти скорость жидкости в основании плотины в предположении, что жидкость несжимаема. Предположить, что скорость воды на вершине плотины гораздо меньше скорости воды у ее основания.

9.1.4. В лаборатории изучают подъемную силу крыла, помещая крыло в поток жидкости, скорость которого вдалеке от крыла равна  $v_\infty$ . Площадь крыла 10 квадратных метров. Скорость воды в верхней точке крыла равна  $v_1 = 100 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Скорость воды в нижней точке крыла равна  $v_2 = 90 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Расстояние между точками измерения скоростей по вертикали равно 0.5 метров. Предположить, что форма верхней и нижней огибающих крыла совпадают с соответствующими линиями тока. Найти подъемную силу крыла.

9.1.5. Цилиндрический сосуд, заполненный несжимаемой идеальной жидкостью, вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг своей оси. Жидкость приходит в движение и через некоторое время приходит в стационарное состояние. Применить интеграл Бернулли и убедиться, что форма поверхности жидкости в стационарных условиях не зависит от полярного угла цилиндрической системы координат.

9.1.6. Ламинарный поток жидкости течет по каналу с переменным сечением. В первой точке канала (середина) измерение скорости течения дало результат  $v_1 = 5$  метров в секунду, во второй точке в середине измерение показало  $v_2 = 1$  метр в секунду. Найти разность давлений между этими точками в потоке.

9.1.7. В условиях задачи 9.1.5. получить стационарное решение уравнения Эйлера

$$\left[ \mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \text{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{r})) \right] = \nabla \left( \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} \right) \text{ и показать, что форма поверхности}$$

жидкости есть эллиптический параболоид.

## 9.2. Стационарное потенциальное течение идеальной жидкости

9.2.1. Поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  идеальной жидкости подчиняется уравнению:  $v_x = 5y + 3z$ ,  $v_y = 5x + 2z$ ,  $v_z = 3x + 2y$ . Здесь  $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ . Проверить условие потенциальности течения и условие несжимаемости жидкости. Найти распределение давления в потоке. Найти потенциал скорости потока.

9.2.2. Поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  идеальной жидкости подчиняется уравнению:  $v_x = 5 \cdot x$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z = -5 \cdot z$ . Здесь  $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ . Проверить условие потенциальности течения и условие несжимаемости жидкости. Найти распределение давления в потоке. Найти потенциал скорости потока. Найти уравнения линий постоянного давления в потоке.

9.2.3. В точке  $\mathbf{r} = 0$  находится стационарный источник идеальной жидкости, создающий потенциал скорости  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{4\pi \cdot r}$ . Проверить гармоничность этой функции и найти поле скоростей жидкости в области, не содержащей начало координат. Проверить несжимаемость жидкости и найти распределение давления в стационарном потоке. Каков физический смысл параметра  $Q$  источника?

9.2.4. В точке  $\mathbf{r} = 0$  находится стационарный источник идеальной жидкости, создающий потенциал скорости  $\Phi_0(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{4\pi \cdot r}$ . К потоку источника добавлен поступательный поток с потенциалом  $v_0 \cdot x$ . Суммарный потенциал имеет вид:  $\Phi(\mathbf{r}) = v_0 \cdot x - \frac{Q}{4\pi \cdot r}$ . Проверить гармоничность этой функции и найти поле скоростей жидкости в области, не содержащей начало координат. Проверить несжимаемость жидкости и найти распределение давления в стационарном потоке. Найти координаты точки в потоке, где скорость потока равна нулю.

## Литература

1. Мирошниченко Г.П., Мешковский И.К., МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ– СПб: Университет ИТМО, 2022. – 121 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика: Часть 1 (Серия: «Теоретическая физика», том V) М., 1976, 584 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986, 736 с.
4. Новиков, И. И. Термодинамика: учебное пособие / И. И. Новиков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2021, 592 с.
5. Шумилов, Р. Н. Проектирование систем вентиляции и отопления: учебное пособие / Р. Н. Шумилов, Ю. И. Толстова, А. Н. Бояршинова. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2021, 336 с.
6. Карпов, К. А. Прикладная гидргазодинамика: учебное пособие / К. А. Карпов, Р. О. Олехнович. — Санкт-Петербург: Лань, 2021, 100 с.
7. Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики: учебное пособие / М. М. Карчевский. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2021, 164 с.
8. Исаченко В.П. и др. Теплопередача. М.: “Энергия”, 1975, 488 с.
9. Г.Н. Дульнев. Теория тепло – и массообмена. Учебное пособие СПб.: НИУ ИТМО, 2012, 195 с.
10. Г.М. Кондратьев. Регулярный тепловой режим. М.: ГИТТЛ, 1954, 408 с.
11. А.В. Лыков. Теория теплопроводности. М.: “Высшая школа”, 1967, 600 с.
12. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.:” Энергия”, 1977, 342 с.
13. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.Л.: ГЭИ, 1961, 680 с.
14. Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: “Высшая школа”, 1973, 360 с.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999, 799 с.

16. Исакович М.А., Общая акустика: Учебное пособие. - Изд. "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973 г.

## Справочники

Таблица 1. Тепловые свойства твердых тел

Твердое тело	Коэффициент теплопроводности $k \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C})$	Коэффициент температуропроводности $\kappa \text{ м}^2/\text{сек}$	Удельная теплоемкость $c_p \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{°C})$	Объемная плотность $\rho \text{ г}/\text{см}^3$
кирпич	0.5	$5.2 \cdot 10^{-7}$	750	1.8
пробка	0.047	$2.78 \cdot 10^{-7}$	1884	0.24
алюминий	220	$8.4 \cdot 10^{-5}$	920	2.7
чугун	52.3	$1.7 \cdot 10^{-5}$	550	7.0
бетон	1.75	$5.56 \cdot 10^{-7}$	880	2.3
мрамор	2.77		808	2.7
медь	401	$1.11 \cdot 10^{-4}$	380	8.9
сталь	50	$1.17 \cdot 10^{-5}$	460	7.8
вольфрам	162.8	$6.3 \cdot 10^{-5}$	125.6	19.3
поролон	0.03			
латунь	100	$3.4 \cdot 10^{-5}$	380	8.5
графит	1500			
железо	92	$2.3 \cdot 10^{-5}$	460	7.8
дерево	0.15	$8.2 \cdot 10^{-8}$	2700	0.4
свинец	35.3	$2.4 \cdot 10^{-5}$	120	11.3
асбест	0.022			0.576
стекло	0.814		837	2.71

войлок	0.058			0.33
серебро	418.7	$1.7 \cdot 10^{-4}$	251.2	10.52
Вода замёрзшая	лёд (при 0°C): 2.21; снег свежий: 0.105; снег старый: 0.35; снег тающий: 0.64		$4.19 \cdot 10^3$	лёд(при 0°C): 0.917; снег свежий: (0.09 .. 0.18); снег старый: (0.2..0.4)
Гранит	3.14		$0.79 \cdot 10^3$	2.5 .. 3.0
Древесина дуба (8-10% влажности)	0.2..0.4		$2.4 \cdot 10^3$	0.7 .. 0.9
Древесина сосны (8-10% влажности)	0.14..0.41		$1.7 \cdot 10^3$	0.4 .. 0.55
Золото	312.8		$0.13 \cdot 10^3$	19.31
Поливинилхлорид жёсткий (ПВХ, винипласт)	0.16..0.19		$1.05 \cdot 10^3$ .. $2.14 \cdot 10^3$	1.35 .. 1.43
Полипропилен блок-сополимер (PP)	0.15..0.20		$1.9 \cdot 10^3$	0.9
Полипропилен рандом-сополимер (PPRC)	0.24		$1.9 \cdot 10^3$	0.9
Полистирол	0.08..0.12		$1.26 \cdot 10^3$	1.06
Фторопласт-4	0.233		$0.92 \cdot 10^3$ .. $1.05 \cdot 10^3$	2.1 .. 2.4

Таблица 2. Тепловые свойства жидкостей

Название	Удельная плотность $\rho$ , кг / м <sup>3</sup>	Удельная теплоёмкость $c_p$ , Дж / (кг·К)	Удельная теплопроводность $k$ , Вт / (м·К)
Ацетон	$0.791 \cdot 10^3$	$2.18 \cdot 10^3$	0.165
Бензол	$0.879 \cdot 10^3$	$1.705 \cdot 10^3$	0.14

Глицерин	$1.26 \cdot 10^3$	$2.4 \cdot 10^3$	0.28
Спирт этиловый	$0.79 \cdot 10^3$	$2.43 \cdot 10^3$	0.183
Толуол	$0.866 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^3$	0.137
Вода	$1.0 \cdot 10^3$	4200	0.6

Таблица 3. Тепловые свойства газов

Газ	Коэффициент теплопроводности $k \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C})$	Коэффициент температуропроводности $\kappa \text{ м}^2/\text{сек}$	Удельная теплоемкость $c_p \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{°C})$	Объемная плотность $\rho \text{ кг}/\text{м}^3$
углекислота	0.016	$0.83 \cdot 10^{-5}$	830	1.98
аммиак	0.027	$0.17 \cdot 10^{-4}$	2100	0.65
гелий	0.174	$1.9 \cdot 10^{-4}$	5200	0.18
воздух	0.025	$1.9 \cdot 10^{-5}$	1000	1.29
азот	0.025	$1.6 \cdot 10^{-5}$	1000	1.25
водород	0.186	$11 \cdot 10^{-5}$	14000	0.081
Аргон Ar	0.0187		520	1.783
Кислород O <sub>2</sub>	0.0262		914.9	1.429

Таблица 4. Динамическая вязкость газов Па•с при 0 °С

воздух	$1,73 \cdot 10^{-5}$	аммиак	$0,92 \cdot 10^{-5}$	водород	$0,84 \cdot 10^{-5}$
CO <sub>2</sub>	$1,36 \cdot 10^{-5}$	неон	$2,98 \cdot 10^{-5}$	гелий	$1,8 \cdot 10^{-5}$

азот	$1,66 \cdot 10^{-5}$	кислород	$1,95 \cdot 10^{-5}$	ксенон	$2,12 \cdot 10^{-5}$
хлор	$1,23 \cdot 10^{-5}$	метан	$1,03 \cdot 10^{-5}$	пропан	$0,75 \cdot 10^{-5}$

Таблица 5. Коэффициенты диффузии неорганических веществ в водных растворах

Растворенное вещество	Концентрация, моль/л	T, K	$D \cdot 10^9, \text{ м}^2/\text{с}$
Соляная кислота	0,10	285	2,29
Азотная кислота	0,05	293	2,62
Азотная кислота	0,25	293	2,59
Гидроксид натрия	0,05	288	1,49
Хлорид лития	0,05	291	1,12
Хлорид натрия	0,40	291	1,17
Хлорид натрия	0,80	291	1,19
Хлорид натрия	2,00	291	1,23

Таблица 6. Коэффициенты диффузии вещества В в веществе А

Среда, где происходит процесс диффузии А	Диффундирующее вещество В	Коэффициент диффузии $D \text{ см}^2/\text{сек}$
гелий	аргон	0.7
воздух	водород	0.64
азот	кислород	0.2
воздух	этиловый спирт	0.1
водород	метиловый спирт	0.5
воздух	уксусная кислота	0.11
кислород	бензол	0.18

воздух	гелий	0.63
воздух	ацетон	0.109
воздух	аммиак	0.227
воздух	хлор	0.124
воздух	нафталин	0.0611
кремний	водород	0.0094 (предэкспонента )
железо	углерод	$2 \cdot 10^{-2}$ (предэкспонента )
Ni	Cu	$1.01 \cdot 10^{-3}$ (предэкспонента )

Таблица 7. Функция Лапласа  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблица 8. Коэффициенты диффузии вещества В в веществе А

Диффундирующее вещество В	Среда, происходит диффузия А	где Температура °С	D , см <sup>2</sup> /с
Бор	Si	900 - 1250	$10^{-15} - 10^{-11}$
Фосфор	Si	1000 - 1250	$10^{-14} - 10^{-11}$
Сурьма	Si	1000	$10^{-13}$
Al	Si	1100 - 1250	$10^{-12} - 10^{-11}$
Мышьяк	Si	1100 - 1200	$10^{-14} - 10^{-12}$
Галлий	Si	1100 - 1250	$10^{-12} - 10^{-11}$
Гелий	Полиизопрен	20	$216 \cdot 10^{-7}$
СО2	Полиэтилен	20	$3.7 \cdot 10^{-7}$

Мирошниченко Георгий Петрович

**ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А