

# ІІТМО

---

**И.А. Коняхин**

## **АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИКО- ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2026**

1.МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**И.А. Коняхин**  
**АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ**  
**ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИКО-ЦИФРОВЫХ**  
**СИСТЕМ МЕТОДОМ ИМИТАЦИОННОГО**  
**МОДЕЛИРОВАНИЯ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.04.02 Опотехника  
в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных  
профессиональных образовательных программ высшего образования  
магистратуры

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2026

Коняхин И.А. Анализ параметрической чувствительности оптико-цифровых систем методом имитационного моделирования – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 74. с

Рецензент:

Рыжова Виктория Александровна, кандидат технических наук, доцент, доцент Физико-технического мегафакультета Университета ИТМО.

В учебно-методическом пособии изложены структура и методика синтеза имитационных моделей анализа параметрической чувствительности оптико-цифровых систем. На примере моделей двух видов оптико-цифровой системы: системы формирования оптического спецэффекта посредством сканирования лазерного пучка и автоколлимационной системы измерения трёх углов поворота контролируемого объекта, рассматриваются особенности применения методик построения имитационных моделей с фиксированным и стохастическим отклонением параметров элементов от номинальных значений. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе магистерской подготовки, дисциплина «Разработка оптико-цифровых систем/Digital Signal Processing in Optoelectronics».

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' is slightly taller than the others, and there is a small dot above the 'O'.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук..

© Университет ИТМО, 2026

© Коняхин И.А., 2026

СОДЕРЖАНИЕ	
СОДЕРЖАНИЕ .....	3
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....	4
Введение .....	5
1 Структура имитационной модели анализа параметрической чувствительности.....	7
1.1 Свойства и классификация проектных моделей .....	7
1.2 Структура проектных имитационных моделей .....	9
1.3 Однонаправленные и двунаправленные имитационные проектные модели.....	11
Контрольные вопросы.....	13
2 Исследование влияния составляющих суммарной погрешности формирования траектории сканирования лазерной системы синтеза оптического спецэффекта ..	14
2.1 Структура исследуемой системы создания лазерного спецэффекта.....	14
2.2 Детерминированная имитационная модель лазерной системы создания оптического спецэффекта.....	15
2.3 Параметры элементов исследуемой системы создания лазерного спецэффекта .....	20
2.4 Имитационная проектная модель анализа параметрической чувствительности сканирующей системы создания оптического спецэффекта	22
2.5 Моделирование сканирующей системы создания оптического спецэффекта со специальным отражающим элементом .....	39
Контрольные вопросы.....	53
3 Исследование влияния отклонения параметров оптико-цифровой автоколлимационной системы на точность измерения углов поворота объекта..	54
3.1 Структурная схема и принцип действия автоколлимационной системы.....	54
3.2 Математическая модель углоизмерительной автоколлимационной системы ....	56
3.1 Параметры элементов исследуемой автоколлимационной системы измерения трёх углов поворота объекта.....	62
Контрольные вопросы.....	71
Заключение.....	72
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	73

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩАЕНИЯ

АЦП – аналого-цифровой преобразователь

ИОИ – источник оптического излучения

ОС – оптическая система

ОЦС – оптико-цифровая система

ПОИ – приёмник оптического излучения

ПУ – предварительный усилитель

СКО – среднее квадратическое отклонение

ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь

ЦВУ – центральное вычислительное устройство

## Введение

При проектировании сложных технических систем, в частности оптико-цифровых, одной из важных процедур является анализ параметрической чувствительности. Этой аналитической процедуре предшествуют процедуры параметрического синтеза, в результате которых определяются параметры элементов проектируемой системы, при которых общие характеристики проектируемой оптико-цифровой системы (ОЦС) соответствуют требованиям технического задания.

При реализации ОЦС найденные значения параметров практически всех элементов не будут точно соответствовать расчётным. Возможные причины этого несоответствия:

- технологические допуски при изготовлении элементов;
- влияние условий функционирования будущей ОЦС – температурный дрейф характеристик элементов, нестабильность питания, вибрационные воздействия и прочие эксплуатационные факторы;
- оптические фоны, шумы электронных компонентов, сбои элементов цифровой обработки и прочие случайные воздействия и процессы, обусловленные физической природой элементов ОЦС и обрабатываемых сигналов.

В результате в процессе проектирования необходимо на каждом этапе определять степень влияния возможных случайных и детерминированных отклонений параметров элементов от расчётных (номинальных) значений на характеристики ОЦС, регламентированные техническим заданием. Фактически проверка соответствия характеристик ОЦС техническому заданию в случае отклонения параметров её элементов от номинальных значений составляет содержание проектной процедуры анализа параметрической чувствительности.

Одним из эффективных методов выполнения процедуры анализа параметрической чувствительности является экспериментальное исследование соответствия характеристик качества ОЦС техническому заданию на детерминированных и стохастических имитационных моделях.

Другим фактором, определяющим важность применения проектных имитационных моделей, является особенность структуры ОЦС, включающей как аналоговые, так и цифровые компоненты. Наличие столь разнородных элементов затрудняет применение методик проектирования, основанных на теоретическом описании процессов преобразования сигналов, в то время как имитационные модели, построенные на основе алгоритма функционирования ОЦС, в значительной степени абстрагированы от физической природы моделируемых компонентов, а именно, наличием как аналоговых, так и цифровых элементов.

В результате многие аналитические проектные процедуры могут быть реализованы на основе моделей, математически описывающих алгоритм

функционировании ОЦС с имитацией детерминированных или случайных отклонений параметров элементов от номинальных значений.

В учебно-методическом пособии кратко рассмотрены принципы построения и методики алгоритмизации имитационной модели анализа параметрической чувствительности ОЦС при детерминированном и случайном изменении параметров элементов.

Изучение методики построения имитационной модели параметрической чувствительности выполняется на примере двух прикладных ОЦС, при этом обучающиеся на практике осваивают методики построения программного кода с использованием технологии Matlab.

Теоретические и практические вопросы моделирования рассматриваются в двух лабораторных работах:

1. Анализ параметрической чувствительности системы формирования оптического спецэффекта методом сканирования лазерного пучка.
2. Исследование составляющих суммарной погрешности измерения автоколлимационной оптико-цифровой системы

Первая лабораторная работа включает 2 части, её объем – 6 часов. Части работы различаются структурой моделируемой системы и составом параметров, отклонения от номинальных значений которых моделируется. При выполнении каждой части 1 час отводится на изучение основных теоретических положений, 1 часа на алгоритмизацию имитационной модели ОЦС, написание и отладку программного кода и 1 час на анализ и обработку результатов измерений.

Объем второй лабораторной работы – 4 часа. При этом 1 час отводится на изучение основных теоретических положений, 2 часа на алгоритмизацию модели автоколлимационной системы, написание и отладку программы её реализации и 1 час на анализ и обработку результатов моделирования. Оформление отчетов выполняется за время, отведённое на самостоятельную работу.

По рассмотренным лабораторным работам приводится схема исследуемой системы, указана цель исследований, задачи, которые необходимо решить в результате, подробно указаны практические шаги выполнения методики исследований, а также приводятся контрольные вопросы для самопроверки.

Контроль знаний предполагает оформление студентом отчета с последующей защитой преподавателю результатов, полученных при выполнении лабораторной работы. Целью защиты является контроль приобретенных студентом компетенций, предусмотренных направлениями подготовки и формируемых в рамках осваиваемой дисциплины (модуля), включая уровень достижения студентом конкретных результатов обучения (умений, навыков). При необходимости студенту может потребоваться изучение литературы, рекомендованной преподавателем.

# **1 Структура имитационной модели анализа параметрической чувствительности**

## **1.1 Свойства и классификация проектных моделей**

Моделирование как проектная процедура представляет собой исследование характеристик объекта проектирования с использованием более простого по структуре, принципу действия, необходимой трудоёмкости операций объекта (модели), свойства которого подобны целевым свойствам и характеристикам оригинального объекта проектирования. Подобие по целевым свойствам заключается в отображении или воспроизведении характеристик проектируемого объекта, позволяющем выполнить необходимые проектные операции и изучить требуемые закономерности.

Основное требование к проектной модели - её адекватность (или подобие), в соответствии с которым необходимо наличие однозначного соответствия (допускается линейное масштабирование) между свойствами модели и исследуемыми свойствами объекта проектирования.

Также модель должна обладать определённой универсальностью и обеспечивать возможность проектирование не только конкретной ОЦС, но и подобных ей по структуре и алгоритму функционирования.

Третьим требованием к модели является экономичность её применения, в соответствии с которым трудоёмкость процессов создания модели и выполнения проектной процедуры должны быть значительно меньше по сравнению с проектированием без её использования.

Условно модели разделяются на следующие виды (Рисунок 1.1).

Физические модели представляют собой экспериментальные установки и макеты, воспроизводящие структуру и основные функциональные элементы проектируемой ОЦС, что позволяет в процессе проектирования проверить правильность подбора компонентов системы.

Статистические модели, наоборот, не соответствуют ни физической природе, ни алгоритмам функционирования проектируемой системы и фактически представляют собой результаты статистической обработки массивов данных, полученных при проектировании подобных ОЦС и использовании аналогичных элементов ОЦС. Полученные тренды, позволяющие прогнозировать характеристики ОЦС, являются основным результатом использования статистических моделей.

Основой для теоретических моделей являются известные аналитические зависимости, определяющие связь параметров и характеристик проектируемой ОЦС с физическими процессами, лежащими в основе функционирования её элементов. Потенциально теоретические модели обеспечивают наибольшее соответствие свойств оригинальной системы и её проектной модели. Однако в

большинстве случаев сложность теоретических моделей не позволяет их использовать для инженерных расчётов. В качестве методик проектирования, расчётных формул и диаграмм используются числовые аппроксимации и функциональные упрощения полных теоретических моделей.

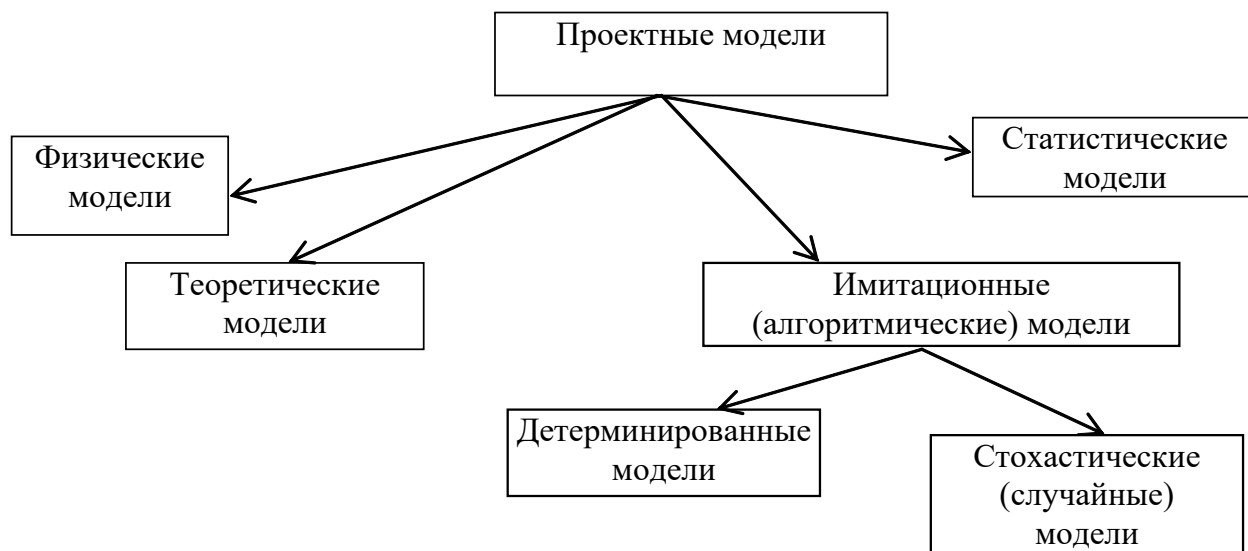


Рисунок 1.1 – Классификация проектных моделей

Инженерные методики и расчётные зависимости во многих случаях неадекватно описывают закономерности, определяющие параметры и характеристики проектируемой ОЦС по причине сложности определяющих их процессов.

Более универсальным средством проектирования являются имитационные модели. Использование имитационных компьютерных моделей не требует точного описания физических процессов в ОЦС, достаточно воспроизведения (имитации) структуры и алгоритма функционирования проектируемой системы.

По этой причине в большинстве практических случаев для анализа параметрической чувствительности используются именно имитационные проектные модели.

При исследовании влияния отклонения параметров элементов ОЦС от номинальных значений возможно построение имитационной модели в двух вариантах – детерминированном и стохастическом.

В детерминированной имитационной модели отклонения параметров элементов от номинальных значений задаются фиксированными величинами с возможностью дискретного изменения их значений в цикле моделирования. Соответственно, в стохастических имитационных моделях отклонения параметров моделируются как случайные величины с заданными функциями распределения.

Практика использования имитационного моделирования показывает большую степень адекватности стохастических имитационных моделей по

сравнению с детерминированными, поскольку значительное количество процессов, влияющих на характеристики проектируемых ОЦС – шумы, фоны, отказы, являются случайными событиями, в отношении которых стохастические (случайные) имитационные модели являются более адекватными по сравнению с детерминированными.

## **1.2 Структура проектных имитационных моделей**

Особенностью имитационных моделей является адекватность их структуры и алгоритмов проектируемой ОЦС.

Обобщенная структура ОЦС представлена на рисунке 1.2 [1].

К аналоговой части ОЦС относятся:

- источник оптического излучения (ИОИ);
- среда распространения оптического излучения;
- оптическая система (ОС), принимающая и концентрирующая оптическое излучение, находящееся в пределах её углового поля, а также во многих случаях формирующая изображение регистрируемого объекта в виде поля облучённости;

- приемник оптического излучения (ПОИ), преобразующий энергию принятого излучения в электрический сигнал и являющийся по многим случаям анализатором формируемого поля облучённости (например, при использовании матричных фотоприёмников);

- предварительный усилитель (ПУ), усиливающий сигнал с ПОИ до уровня, достаточного для дальнейшей обработки и выполняющий во многих системах предварительную обработку сигнала аналоговыми фильтрами.

К элементам цифровой обработки в схеме ОЦС относятся:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП), преобразующий аналоговый сигнал в форму, требуемую для цифровой обработки, в частности, выполняющий квантование и дискретизацию исходного сигнала после ПУ;

- цифровое вычислительное устройство (ЦВУ), содержащее значительное количество элементов цифровой обработки, например, цифровых фильтров, микропроцессоров, контроллеров, непосредственно выполняющих цифровую обработку сигнала в соответствии с предписанными алгоритмами;

- цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), выполняющий восстановление аналоговой формы обработанного цифрового сигнала для его последующей обработки аналоговыми системами; в случае, если ОЦС является частью более сложной системы цифровой обработки, выходной сигнал сохраняет цифровую форму.

Рассматриваемое разделение ОЦС на аналоговую и цифровую части достаточно условно, поскольку имеются многочисленные опытные разработки оптических цифровых элементов, а также серийные элементы с глубокой интеграцией аналоговых и цифровых компонентов, например, матричные фотоприёмники на КМОП-структурах ведущих фирм, у которых аналоговый

сигнал с каждого пикселя оцифровывается и предварительно обрабатывается интегрированными с пикселем ПУ и АЦП.

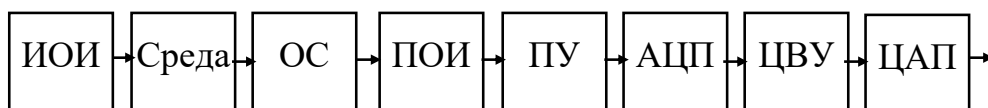


Рисунок 1.2 – Обобщённая структура оптико-цифровой системы

Имитационная модель анализа параметрической чувствительности представляет собой математическое описание алгоритма функционирования ОЦС, отдельные части которого имеют фиксированное отклонение параметров элементов системы от номинальных значений или воспроизводят массивы значений случайных величин, имитирующих это отклонение. В завершающей части модели выполняется оценка влияния моделируемых отклонений параметров на характеристики ОЦС.

Во многих приложениях проектная имитационная модель включает как стохастическую (случайную), так и детерминированную части.

Обобщённая структура проектной имитационной модели представлена на рисунке 1.3

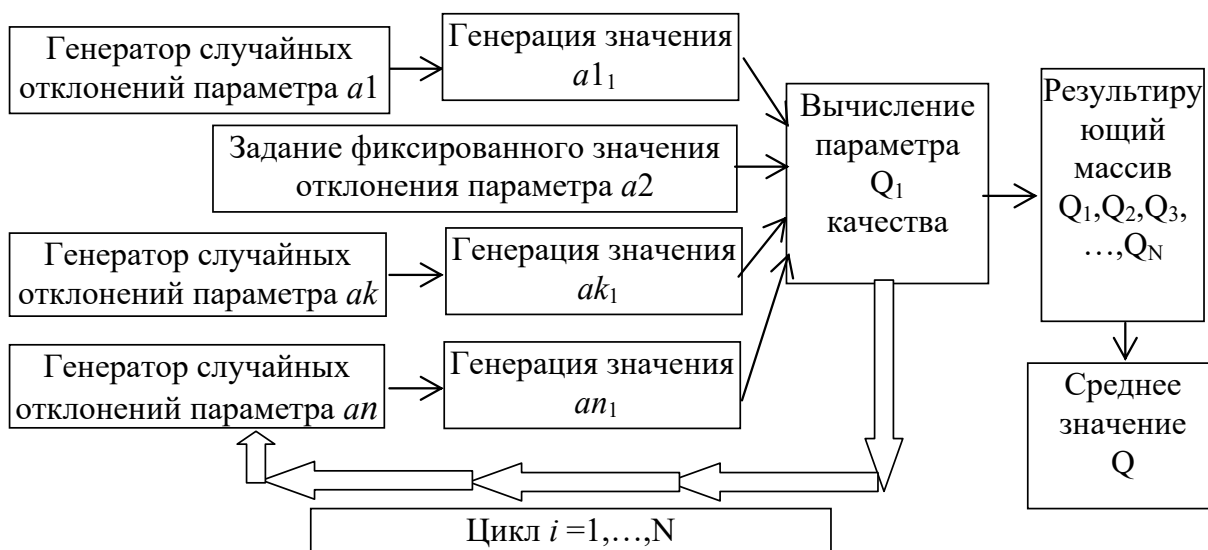


Рисунок 1.3 – Структура проектной имитационной модели

В соответствии со структурой ОЦС выбираются  $n$  проектируемых параметров  $a_1...a_n$ , затем, в зависимости от характера отклонения параметра, для каждого из них назначается фиксированное значение отклонения (на схеме это параметр  $a_2$ ) или, в соответствии с известными характеристиками воздействующих на параметр случайных процессов (функция распределения, плотность вероятности), создаётся программный генератор значений случайной величины, имитирующей отклонение значений этого параметра от номинального (параметры  $a_1; a_3, ..., a_n$ ).

Далее, из каждого генератора, имитирующего случайное отклонение значений соответствующего параметра, запрашивается текущее его значение  $a_1$  и  $a_2, \dots, a_n$ , затем с учётом полученных отклонений параметров и алгоритма функционирования ОЦС значения, вычисляется некоторая характеристика  $Q_1$ , определяющая качество проектируемой ОЦС (например, если проектируется измерительная система, определяется текущее значение погрешности измерения). Эти действия циклически повторяются  $N$  раз (единицы тысяч и более для получения репрезентативной выборки) до формирования ряда значений  $Q_1, \dots, Q_N$ . В результате статистической обработки этого ряда случайных значений (например, усреднения или вычисления дисперсии  $Q$ ) определяется изменение характеристики качества проектируемой ОЦС в зависимости от отклонений значений параметров её элементов. Наличие в структуре модели фиксированного значения отклонения некоторых параметров не уменьшает достоверность результатов моделирования, которые основаны на анализе полученных характеристик случайной величины  $Q$ , поскольку, как правило, количество фиксированных отклонений параметров в модели значительно меньше, чем имитируемых случайных отклонений.

Подобный подход позволяет проанализировать параметрическую чувствительность ОЦС к отклонению параметров элементов и определить влияние отклонений параметров как отдельных элементов, так и их групп на качество ОЦС, оптимизировать значения параметров и характеристик элементов.

### **1.3 Однонаправленные и двунаправленные имитационные проектные модели**

В зависимости от структуры и назначения проектируемой ОЦС имитационные модели могут быть разделены на однонаправленные и двунаправленные.

Однонаправленные имитационные модели используются при проектировании цифровых систем связи, информационных видеосистем со стационарным или сканируемым полем обзора, обзорных систем и систем обнаружения.

Структура алгоритма однонаправленной модели изображена на рисунке 1.4. В соответствии со структурой на различных циклах моделирования накапливается массив показателей качества  $Q_i$ . ОЦС на основе циклов моделирования накапливается массив показателей качества  $Q_i$  ОЦС (например, вероятностей правильного обнаружения при различных отклонениях параметров элементов). Далее в результате статистической обработки полученного массива вычисляется обобщённая характеристика качества  $Q$ , которая сравнивается с соответствующей характеристикой, указанной в техническом задании. По результатам моделирования могут быть сделаны выводы о ходе данного этапа проектирования.

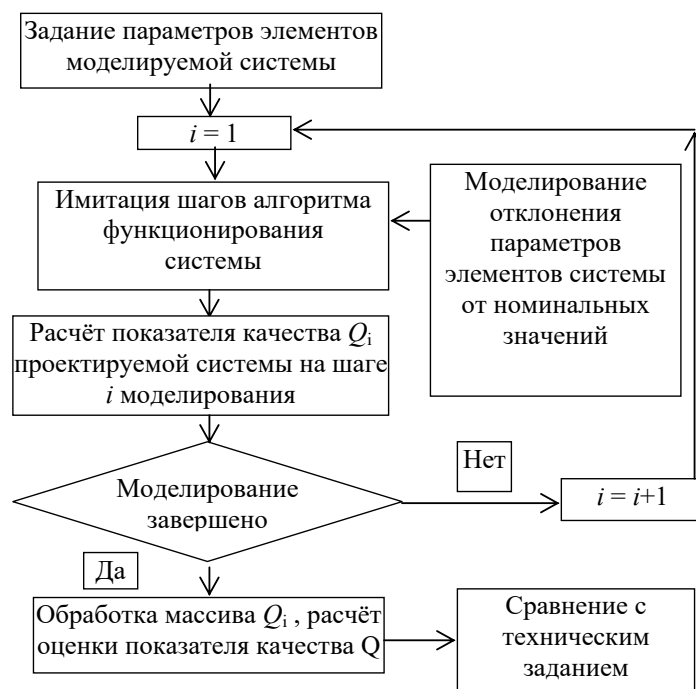


Рисунок 1.4 – Структура алгоритма однонаправленной модели

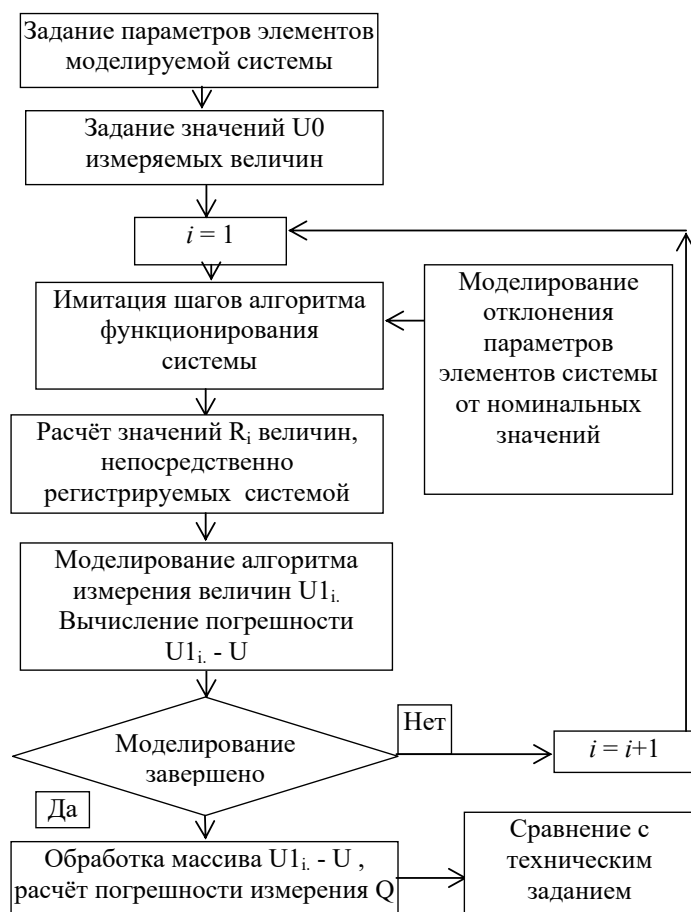


Рисунок 1.5 – Структура алгоритма двунаправленной модели

Двунаправленные имитационные модели типичны для измерительных ОЦС, действующих по методу косвенных измерений, в соответствии с которым для измерения требуемой величины (например, линейного смещения деформируемого объекта) элементы системы сначала регистрируют изменение некоторой иной величины, непосредственно связанной с измеряемой (например, смещение изображения по чувствительной площадке матичного фотоприёмника), которая затем в соответствии с алгоритмом измерения пересчитывается в величину линейного перемещения объекта, измеряемую системой.

В двунаправленной модели наряду с заданием параметров элементов ОЦС задаются и значения измеряемых величин  $U$  (Рисунок 1.5). Далее в соответствии с алгоритмом функционирования ОЦС вычисляются значения величин  $R$ , регистрируемых элементами при наличии отклонений параметров элементов. На завершающем этапе моделирования зарегистрированные величины  $R$  в соответствии с алгоритмом измерения пересчитываются в величины  $U'$ , «измеренные» системой. При этом в алгоритме измерения используются номинальные значения параметров элементов. В результате обработки массива разностей  $U-U'$  определяется оценка погрешности измерения величины  $U$ , которая является одним из показателей качества  $Q$  измерительной системы. Сравнение показателя качества  $Q$  с величиной, указанной в техническом задании, позволяет оценить ход проектирования на рассматриваемом этапе.

### **Контрольные вопросы**

1. В чём заключается особенность структуры оптико-цифровых систем? Какие элементы структуры можно отнести к аналоговым, а какие элементы – к цифровым? Существуют ли оптоэлектронные структурные элементы, содержащие как аналоговую, так и цифровую части?
2. Поясните общий алгоритм проектирования с использованием имитационных моделей. Возможно ли использование в имитационной модели одновременно фиксированных и случайных отклонений параметров элементов от номинальных значений?
3. Перечислите основные виды моделей, приведите примеры моделей, относящихся к каждому виду.
4. В каком из видов моделей отсутствует однозначное соответствие алгоритму функционирования моделируемой системы?
5. В чем заключается различие алгоритмов однонаправленной и двунаправленной имитационных моделей?
6. Укажите конкретные виды ОЦС, при проектировании которых используются однонаправленные и двунаправленные имитационные модели.
7. Какие характеристики случайных величин используются при построении имитационных стохастических имитационных моделей?

## **2 Исследование влияния составляющих суммарной погрешности формирования траектории сканирования лазерной системы синтеза оптического спецэффекта**

Оптические спецэффекты на основе лазерных систем широко используются для создания зрительных образов при проведении зрелищных мероприятий, генерации арт-пространств, светового дизайна и художественного творчества.

К числу типичных приложений лазерных сканирующих систем относятся, в частности, следующие варианты их использования.

1. Концертные и театральные программы, при проведении которых лазерные эффекты и композиции, образованные движущимися световыми пятнами, образованными при пересечении лазерного луча с отражающей средой на стенах, потолке, или треками самих лучей на поддымленной атмосфере зрительного зала, используются как элемент светового оформления спектакля или концерта.
2. Собственно лазерные шоу, основным содержанием которых являются движущиеся абстрактные изображения, регулярные картины, сложные геометрические узоры, которые формируются лазерными лучами, сканирующими объемные или плоскостные экраны.
3. Визуальные проекции музыкальных произведений, образованные движением лазерных лучей, управляемых по определённому алгоритму звуковым и тональным рядом исполняемого музыкального произведения.
4. Оформление и сопровождение рекламных образов с целью привлечения внимания и усиления восприятия рекламного продукта посредством соответствующей динамической подсветки рекламного on-board.

Развитие технических средств создания лазерных спецэффектов с соответствующим усложнением их структуры сделало актуальной задачу контроля их качества непосредственно в процессе их проектирования и настройки. При этом важным инструментом определения влияния технологических и инструментальных погрешностей элементов технического средства на качество формируемого спецэффекта является имитационное моделирование соответствующих отклонений их параметров.

### **2.1 Структура исследуемой системы создания лазерного спецэффекта**

Наиболее простой по структуре аппаратной реализацией установки для создания лазерного спецэффекта является оптико-механическая дефлекторная лазерная система.

Лазерная дефлекторная или так называемая сканирующая система предназначена для формирования зрительных образов, сформированных световым пятном лазерного пучка на плоском или объёмном экране.

Структура лазерной сканирующей системы создания визуального спецэффекта приведена на рисунке 2.1 [5].

Система размещена на некоторой неподвижной базе (основании, массивной треноге, платформе с опорами) и предназначена для формирования визуальных образов (узоров, фигур, тематических рисунков) на экране наблюдения, расположенном на расстоянии  $L$  от сканирующей системы.

Световой пучок с малым углом расходимости (далее - лазерный пучок) генерируется лазером и направляется в сканирующую систему. Сканирующая система отклоняет лазерный пучок от первоначального направления по определённому закону на некоторый угол, величина которого зависит от времени. В результате световое пятно, образованное при попадании лазерного пучка на экран наблюдения, перемещается, создавая у наблюдателей единый зрительный образ вследствие высокой скорости перемещения пучка ( не более 0,025 секунды на «прорисовку» одной фигуры) или использования экрана с покрытием, обеспечивающим послесвечение.

Помимо свойства послесвечения, покрытие экрана обеспечивает диффузное рассеивание (или диффузное пропускание, в зависимости от расположения наблюдателей) падающего на него лазерного пучка. При проведении лазерных шоу во многих случаях в роли рассеивающих экранов выступают оштукатуренные стены архитектурного сооружения, асфальтовые покрытия, негладкий лёд, поверхность воды.

## **2.2 Детерминированная имитационная модель лазерной системы создания оптического спецэффекта**

Основными структурными элементами рассматриваемой системы являются лазер и сканирующая система.

При построении рассматриваемой модели с элементами, не отклоняющими лазерный пучок, а именно, с собственно лазером и с экраном наблюдения, связывается базовая система координат  $XYZ$ . При этом ось  $OZ$  системы координат совпадает с осью излучаемого лазерного пучка и направлена против направления его распространения. В соответствии с практикой построения подобных устройств плоскость  $XOZ$  располагается в горизонтальной, а плоскость  $YOZ$  - в вертикальной плоскостях. Такое расположение базовой системы координат  $XYZ$  разделяет пространство на квадранты, относительно которых математическое описание отклонения лазерного пучка, формирующего оптический спецэффект, может быть сведено к нескольким базовым операторам.

Собственно сканирующая система, как правило, включает две движущиеся части (дефлекторы), одна из которых отклоняет лазерный пучок в горизонтальной, а вторая – в вертикальной плоскости или придаёт ему круговое вращение. При математическом описании с первым отклоняющим элементом связывается система координат  $X_1Y_1Z_1$ , а со вторым – система координат  $X_2Y_2Z_2$ . Оси систем координат  $X_1Y_1Z_1$  и  $X_2Y_2Z_2$  параллельны соответствующим осям

базовой системы координат  $XYZ$ .

Первоначально орт  $A$  оси лазерного пучка коллинеарен  $OZ$  и имеет противоположное ей направление.

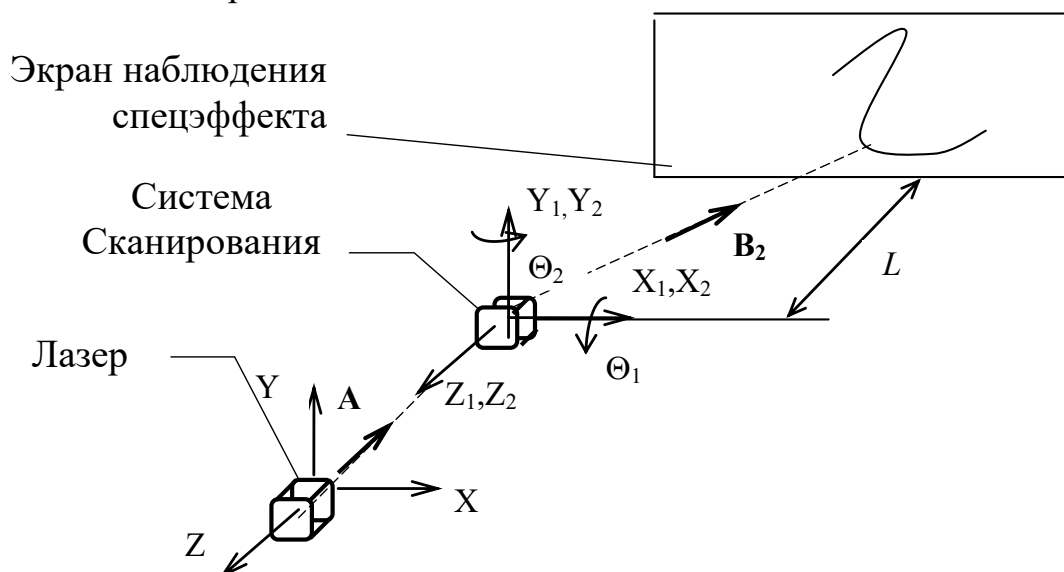


Рисунок 2.1 – Схема сканирующей системы генерации оптического спецэффекта

Орт  $A$  описывается матрицей-столбцом общего вида:

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $A_x, A_y, A_z$  - координаты (другое название – проекции) орта  $A$  в базовой системе координат  $XYZ$ .

Поскольку ось лазерного пучка совпадает с осью  $OZ$ , но направление самого пучка противоположно направлению этой координатной оси, его орт  $A$  определяется следующей одностолбцовой матрицей [4]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

В большинстве практических случаев отклоняющими элементами (дефлекторами) сканирующей системы являются плоские зеркала. Действие плоского зеркала описывается матрицей отражения  $M_3$  вида (формула (1.55) [3]):

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot N_x^2 & -2 \cdot N_x \cdot N_y & -2 \cdot N_x \cdot N_z \\ -2 \cdot N_x \cdot N_y & 1 - 2 \cdot N_y^2 & -2 \cdot N_y \cdot N_z \\ -2 \cdot N_x \cdot N_z & -2 \cdot N_y \cdot N_z & 1 - 2 \cdot N_z^2 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $N_x, N_y, N_z$  – координаты орта  $\mathbf{N}$  нормали к плоскости зеркала, которая определена в системе координат  $X_1Y_1Z_1$  или  $X_2Y_2Z_2$  одностолбцовой матрицей :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Оси систем координат  $X_1Y_1Z_1$  или  $X_2Y_2Z_2$  сканирующей системы во многих практических случаях являются осями вращения или периодического качания плоских зеркал сканирующей системы. Поворот относительно трёх координатных осей описывается тремя ортогональными матрицами [4]:

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta_1) & -\sin(\Theta_1) \\ 0 & \sin(\Theta_1) & \cos(\Theta_1) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_2) & 0 & \sin(\Theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Theta_2) & 0 & \cos(\Theta_2) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_3) & -\sin(\Theta_3) & 0 \\ \sin(\Theta_3) & \cos(\Theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Для упрощения конструкции сканирующей системы каждое из двух зеркал вращается или совершает колебательное движение относительно одной оси. В некоторых системах колебания происходят относительно двух осей. В этом случае общее вращение зеркала описывается матрицей поворота, полученной в результате перемножения двух матриц поворотов относительно отдельных осей. Например, при поворотах относительно осей  $OX_1$  и  $OY_1$  общая матрица поворота определяется выражением:

$$\mathbf{M}_{xy} = \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{M}_x, \quad (2.8)$$

В сканирующей системе лазерный пучок сначала попадает на первое зеркало, отклоняется им от первоначального направления, затем попадает на

второе зеркало, где вновь отклоняется и в результате, получив отклонение относительно двух взаимно-перпендикулярных координатных плоскостей, направляется на экран наблюдения спецэффекта (Рисунок 2.2).

Орт  $\mathbf{B}_1$  лазерного пучка после отражения от первого зеркала сканирующей системы определяется по выражению (формула (2.1) [4]):

$$\mathbf{B}_1 = M_{r1} \cdot M_{s1} \cdot M_{r1}^T \cdot \mathbf{A} , \quad (2.9)$$

где  $M_{r1}$ ,  $M_{r1}^T$  – прямая и транспонированная матрицы поворота первого зеркала вида (2.5), (2.6), (2.7) или (2.8),  $M_{s1}$  матрица отражения первого зеркала вида (2.3),  $\mathbf{A}$  – орт лазерного пучка по выражению (2.2) .

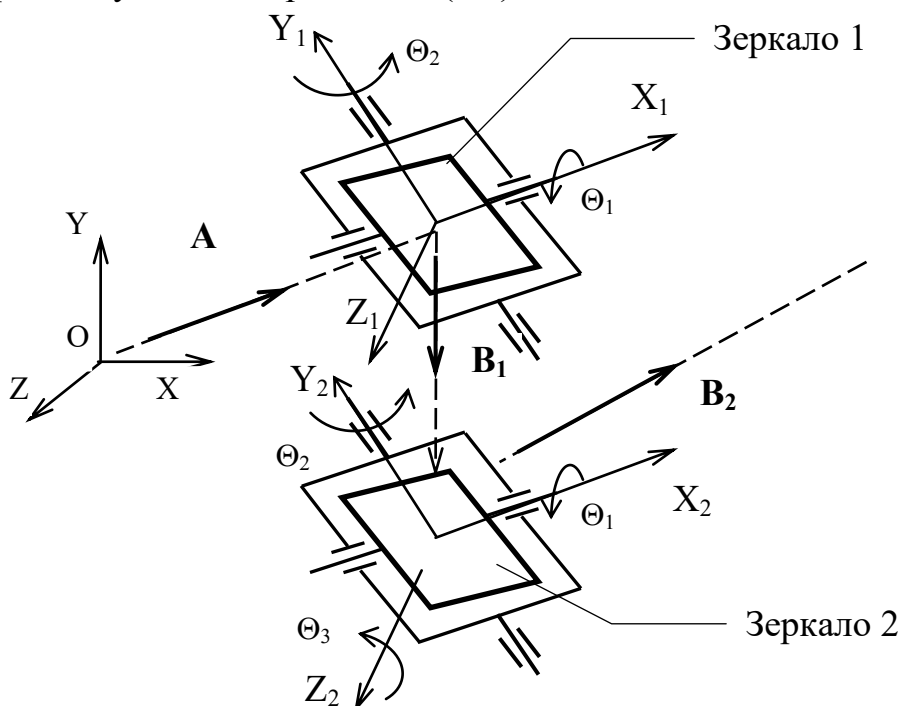


Рисунок 2.2 – Структура сканирующей системы с двумя зеркалами

Далее, лазерный пучок с ортом  $\mathbf{B}_1$  направляется ко второму зеркалу и после отражения от него орт пучка  $\mathbf{B}_2$  определяется аналогичным по форме выражением:

$$\mathbf{B}_2 = M_{r2} \cdot M_{s2} \cdot M_{r2}^T \cdot \mathbf{B}_1 , \quad (2.10)$$

где  $M_{r2}$ ,  $M_{r2}^T$  – прямая и транспонированная матрицы поворота второго зеркала вида (2.5), (2.6), (2.7) или (2.8),  $M_{s2}$  – матрица отражения второго зеркала вида (2.3),  $\mathbf{B}_1$  – орт лазерного пучка после отражения от первого зеркала по выражению (2.9).

В общем виде орт (2.10)  $\mathbf{B}_2$  лазерного пучка, который непосредственно формирует на экране наблюдения зрительный образ, также задаётся однострочной матрицей:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $B_{2x}, B_{2y}, B_{2z}$  – координаты орта  $\mathbf{B}_2$  в базовой системе координат  $XYZ$ .

Углы  $Y_y$  и  $Y_x$  между осью лазерного пучка с ортом  $\mathbf{B}_2$  и плоскостями  $YOZ$  и  $XOY$  базовой системы координат определяются выражениями:

$$Y_y = \arctg\left(\frac{B_{2x}}{B_{2z}}\right), \quad Y_x = \arctg\left(\frac{B_{2y}}{B_{2z}}\right). \quad (2.12)$$

Координаты  $x, y$  точек траектории перемещения пятна засветки от лазерного пучка на экране определяются через тангенсы углов  $Y_y$  и  $Y_x$ :

$$\mathbf{x} = \left(\frac{B_{2x}}{B_{2z}}\right) \cdot L, \quad \mathbf{y} = \left(\frac{B_{2y}}{B_{2z}}\right) \cdot L, \quad (2.13)$$

где  $L$  – дистанция от системы сканирования до экрана наблюдения спецэффекта.

При алгоритмизации рассмотренной имитационной модели задавать орты пучков, нормалей, осей через их координаты по осям системы координат неудобно. Более просто и наглядно определять орты через их углы отклонения от координатных плоскостей.

Рассмотрим запись ортов на примере формулы орта  $\mathbf{A}$  лазерного пучка общего вида. Проведём вспомогательную плоскость 1, содержащую координатную ось  $OY$  и орт  $\mathbf{A}$  и спроецируем орт на плоскость  $XOZ$ , получим проекцию  $A_1$  (Рисунок 2.3).

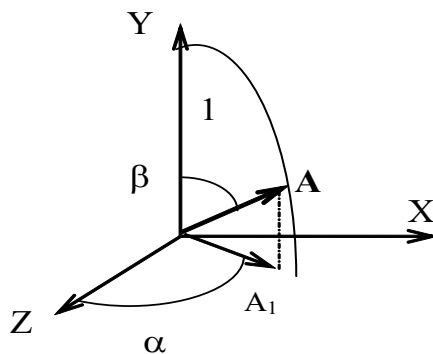


Рисунок 2.3 – Задание координат орта лазерного пучка

Орт  $\mathbf{A}$  составляет в плоскости 1 угол  $\beta$  с осью  $OY$ . Очевидно, что величина проекций орта  $\mathbf{A}$  на ось  $OY$  и  $A_1$  на плоскость  $XOZ$  соответственно равны  $A_y = \cos(\beta)$ ,  $A_1 = \sin(\beta)$ . Тогда, если угол между осью  $OZ$  и вспомогательной плоскостью 1 равен  $\alpha$ , орт  $\mathbf{A}$ , определяемый формулой (2.1), может быть записан в виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

Подобная запись векторов упрощает алгоритмизацию рассматриваемой имитационной модели, поскольку угол  $\alpha$  фактически задаёт отклонение орта по вертикали, а угол  $\beta$  – по горизонтали.

### 2.3 Параметры элементов исследуемой системы создания лазерного спецэффекта

Рассмотрим структуру практического варианта сканирующей системы с дефлекторами в виде двух зеркал (Рисунок 2.4).

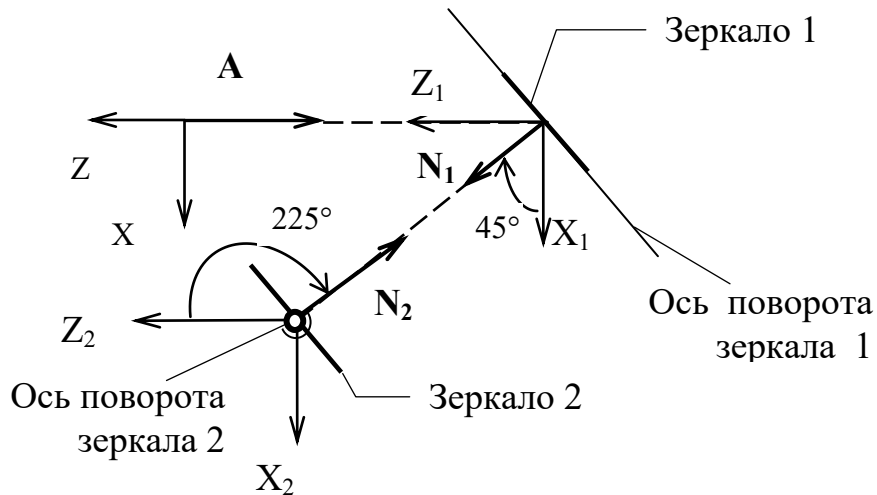


Рисунок 2.4 – Схема исследуемого варианта сканирующей системы

Сканирующая система построена по планарной схеме, согласно которой при номинальных значениях параметров элементов орты векторов нормалей к зеркалам, оси их поворотов, ось лазерного пучка или расположены в одной плоскости, а именно, в координатной плоскости  $XOZ$ , или перпендикулярны ей (ось поворота зеркала 2 перпендикулярна плоскости  $XOZ$ ).

Имитационная модель исследуемой сканирующей системы имеет два отличия от рассмотренной.

1. Оба зеркала выполняют не вращательное, а колебательное движение относительно соответствующих осей по гармоническим законам. Зависимость угла поворота зеркала от времени  $\Theta(t)$  определяется выражением:

$$\Theta(t) = \frac{\Theta_{\max} + \Theta_{\min}}{2} + \frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{2} \cdot \sin(n_{\Theta} \cdot 2\pi \cdot t), \quad (2.15)$$

где  $\Theta_{\max}$ ,  $\Theta_{\min}$  - наибольшее и наименьшее по алгебраической величине отклонение зеркала от среднего положения при колебании,  $n_{\Theta}$  - относительная

частота колебаний, показывающая количество колебаний зеркала за один цикл формирования на экране фигуры оптического спецэффекта.

Задание максимального и минимального углов поворота зеркала как алгебраических величин позволяет изменением любого из этих параметров смещать ось симметрии формируемой на экране наблюдения фигуры или перемещать её в нужном направлении.

2 Ось колебаний одного из зеркал (первого) не совпадает с осью системы координат. Описание такого вращения с помощью матриц вращения относительно коллимационных осей (2.5),(2.6),(2.7) выполняется с помощью сложных математических выражений, затрудняющих алгоритмизацию модели. С этой точки зрения удобно использовать описание вращения, используя матрицу, элементы которой образованы параметрами Родрига-Гамильтона [4].

Пусть орт  $\Psi$  оси поворота зеркала 1 задан одностолбцовой матрицей вида:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

Четыре параметра Родрига-Гамильтона тогда определяются по выражениям:

$$\lambda_0 = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.17)$$

$$\lambda_1 = \Psi_x \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.18)$$

$$\lambda_2 = \Psi_y \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.19)$$

$$\lambda_3 = \Psi_z \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.20)$$

где  $\omega$  - угол поворота относительно оси с ортом  $\Psi$ .

Матрица  $M_r$  поворота определяется параметрами Родрига-Гамильтона по выражению::

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_0 \cdot \lambda_3) & 2 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_3 - \lambda_0 \cdot \lambda_2) \\ 2 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 - \lambda_0 \cdot \lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_0 \cdot \lambda_1) \\ 2 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_0 \cdot \lambda_2) & 2 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 - \lambda_0 \cdot \lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Указанные дополнения к математической модели позволяют выполнить её алгоритмизацию.

## **2.4 Имитационная проектная модель анализа параметрической чувствительности сканирующей системы создания оптического спецэффекта**

Имитационная модель по выражениям (2.9), (2.10) является детерминированной и позволяет при проектировании определять соотношения между параметрами элементов, при которых формируется требуемая траектория перемещения оси лазерного пучка. Однако такая модель не учитывает погрешности формы создаваемой на экране наблюдения фигуры оптического спецэффекта вследствие возможных случайных отклонений параметров элементов структурной схемы от номинальных значений.

В рассмотренной схеме возможны следующие источники погрешностей, влияющих на точность формирования траектории светового пятна лазерного пучка на экране наблюдения спецэффекта:

- отклонение от номинального положения оси лазерного пучка вследствие вибраций опор установки для создания оптического спецэффекта;
- угловое смещение осей поворота зеркал сканирующей системы по причине нестационарных механических деформаций;
- нестабильность углов поворота зеркал сканирующей системы из-за случайных изменений скорости вращения ведущих валов электродвигателей или пьезо-вибраторов;
- отклонение от номинального положения всей сканирующей системы;
- отклонение от номинальной частоты колебаний зеркал вследствие девиации частоты задающих генераторов.

Указанные отклонения параметров от номинальных значений, а также вызываемые ими погрешности траектории сканирования являются случайными процессами, что позволяет для оценки степени их влияния использовать имитационные стохастические модели.

Выполним имитационное моделирование погрешностей формирования траектории лазерного пучка в случае, если структурная схема сканирующей системы соответствует рисунку 2.4.

Параметры модели указаны в Таблице 2.1

### **Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы**

1. Алгоритмизация имитационной стохастической модели влияния отклонений параметров системы создания спецэффекта на погрешность воспроизведения координат точек формируемой фигуры оптического спецэффекта.
2. Составление программного кода модели в технологии Matlab.
3. Выполнение «нулевого» эксперимента, при котором формируется график фигуры оптического спецэффекта при отсутствии отклонений параметров элементов сканирующей системы.

4. Дополнение кода модели генераторами случайных величин, имитирующих отклонения параметров элементов сканирующей системы от номинальных значений.

5. Выполнение эксперимента с дополненной моделью, формирование графика фигуры оптического спецэффекта, содержащей погрешности координат образующих её точек.

6. Сравнение координат двух полученных фигур, получение численной оценки суммарной погрешности воспроизведения координат формируемой фигуры оптического спецэффекта по двум координатным осям.

7. Оценка степени влияния отклонений одного из параметров системы от номинального значения на погрешность формирования координат точек фигуры оптического спецэффекта. Для выполнения этого этапа следует отключить участок кода модели, соответствующий формированию случайных отклонений от номинального значения этого параметра, и затем повторить этапы 4 и 5.

8. Выводы о степени влияния моделируемых отклонений параметров элементов системы формирования оптического спецэффекта.

Выполнение Этапа 3. «Нулевой эксперимент при отсутствии отклонений параметров элементов сканирующей системы

Структура модели соответствует рисунку 2.3, движение зеркала 1 и зеркала 2 – колебательное, по гармоническому закону относительно среднего положения

%Модель с номинальными величинами параметров сканирующей %системы, вариант 1, второй дефлектор – зеркало clear

n = 500; %количество точек в траектории

deg = pi/180; %коэффициент для пересчёта угловых градусов в % радианы

L=15000; %дистанция до экрана наблюдения спецэффекта

px = 8; %относительная частота качания зеркала 1

py2 = 7; %Относительная частота качания зеркала 2, ось OY2

pz2 = 0; %Относительная частота вращения зеркала 2, ось OX2

Вращение зеркала 2 относительно оси  $OX_2$  отсутствует в данной версии модели.

Углы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  в тексте программы заменены на Q1, Q2, их амплитудные значения – соответственно на q1,q2

q1max = 3\*deg; %Максимальный угол качания зеркала 1

q1min = -3\*deg; %Минимальный угол качания зеркала 1

p2max = 3\*deg; %Максимальный угол качания зеркала 2

%относительно оси OY2

p2min = -3\*deg; %Минимальный угол качания зеркала 2

% относительно оси OY2

Задание параметров ориентации вектора  $A$  луча лазера в соответствии с рисунком 2.3

```
beta = 90*deg; % угол между вектором A и осью OY
alpha = 180*deg; % угол между вектором A и осью OZ
%Координаты вектора A в системе координат XYZ
Ax = sin(beta)*sin(alpha);
Ay = cos(beta);
Az = sin(beta)*cos(alpha);
%Орт A оси пучка лазера
A = [Ax
     Ay
     Az];
%
```

Задание номинальных параметров вектора  $N_1$  нормали зеркала 1 в соответствии с рисунком 2.3

```
betan1 = 90*deg; % угол между вектором N1 и осью OY1
alphan1 = 45*deg; % угол между вектором N1 и осью OZ1
%Координаты вектора N1 нормали зеркала 1 в системе координат
X1Y1Z1
N1x = sin(betan1)*sin(alphan1);
N1y = cos(betan1);
N1z = sin(betan1)*cos(alphan1);
%Орт N1 нормали зеркала 1
N1 = [N1x
     N1y
     N1z];
```

Задание матрицы отражения плоского зеркала 1 в системе координат  $X_1Y_1Z_1$  в соответствии с формулой (2.3).

```
%Элементы матрицы отражения зеркала 1
c11= 1-2*N1x^2;
c12= -2*N1x*N1y;
c13= -2*N1x*N1z;
c21= -2*N1x*N1y;
c22= 1-2*N1y^2;
c23= -2*N1y*N1z;
c31= -2*N1x*N1z;
c32= -2*N1y*N1z;
c33= 1-2*N1z^2;
```

Задание номинальных параметров вектора  $N_1$  нормали зеркала 1 в соответствии с рисунком 2.3

```
betan1 = 90*deg; % угол между вектором N1 и осью OY1
alphan1 = 45*deg; % угол между вектором N1 и осью OZ1
```

Таблица 2.1 Параметры элементов моделируемой системы

№	Параметр	Значение	Распределение случайной величины
1	Количество точек траектории $n$	500	-
2	Дистанция до экрана наблюдения $L$ , мм	15000	-
3	Относительная частота качания зеркала 1 $\mu x$	8	-
4	Относительная частота качания зеркала 2 относительно оси $OY_2$ $\mu y$	7	-
5	Максимальный угол поворота зеркала 1, град.	3	-
6	Минимальный (алгебраически) угол поворота зеркала 1, град.	-3	-
7	Максимальный угол поворота зеркала 2 относительно оси $OY_2$ , град.	3	-
8	Минимальный (алгебраически) угол поворота зеркала 2, ось $OY_2$ , град.	-3	-
9	Верхняя граница диапазона случайных отклонений оси лазерного пучка от оси $OY$ , град.	0,1	Равномерное распределение
10	Нижняя граница диапазона случайных отклонений оси лазерного пучка от оси $OY$ , град.	-0,1	
11	Верхняя граница диапазона случайных отклонений оси лазерного пучка от оси $OZ$ , град.	0,2	Равномерное распределение
12	Нижняя граница диапазона случайных отклонений оси лазерного пучка от оси $OZ$ , град.	-0,2	
13	Верхняя граница диапазона случайных отклонений оси качания зеркала 2 относительно оси $OX_2$ , град.	0,3	Равномерное распределение
14	Нижняя граница диапазона случайных отклонений оси качания зеркала 2 относительно оси $OX_2$ , град.	-0,3	

```

%Координаты вектора N1 нормали зеркала 1 в системе координат
X1Y1Z1
N1x = sin(betan1)*sin(alphan1);
N1y = cos(betan1);
N1z = sin(betan1)*cos(alphan1);
%Орт N1 нормали зеркала 1
N1 = [N1x
      N1y
      N1z];
%
```

Задание матрицы отражения плоского зеркала 1 в системе координат  $X_1Y_1Z_1$  в соответствии с формулой (2.3).

```

%Элементы матрицы отражения зеркала 1
c11= 1-2*N1x^2;
c12= -2*N1x*N1y;
c13= -2*N1x*N1z;
c21= -2*N1x*N1y;
c22= 1-2*N1y^2;
c23= -2*N1y*N1z;
c31= -2*N1x*N1z;
c32= -2*N1y*N1z;
c33= 1-2*N1z^2;
%Матрица отражения зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
M1= [c11 c12 c13
     c21 c22 c23
     c31 c32 c33];
%
```

Задание номинальных параметров вектора  $N_2$  нормали зеркала 2 в соответствии с рисунком 2.3

```

betan2 = 90*deg;%Угол между вектором N2 и осью OY2
alphan2 = 225*deg;%Угол между вектором N2 и осью OZ2
%Координаты вектора N2 в системе координат X2Y2Z2
betan2 = 90*deg;
alphan2 = 225*deg;
N2x = sin(betan2)*sin(alphan2);
N2y = cos(betan2);
N2z = sin(betan2)*cos(alphan2);
%Орт N2 нормали зеркала 2
N2 = [N2x
      N2y
      N2z];
%
```

Задание матрицы отражения плоского зеркала 2 в системе координат  $X_2Y_2Z_2$  в соответствии с формулой (2.3)

%Элементы матрицы отражения зеркала 2

k11= 1-2\*N2x^2;

k12= -2\*N2x\*N2y;

k13= -2\*N2x\*N2z;

k21= -2\*N2x\*N2y;

k22= 1-2\*N2y^2;

k23= -2\*N2y\*N2z;

k31= -2\*N2x\*N2z;

k32= -2\*N2y\*N2z;

k33= 1-2\*N2z^2;

%Матрица отражения зеркала 2 в системе координат  $X_2Y_2Z_2$

```
M2= [k11 k12 k13
      k21 k22 k23
      k31 k32 k33];
```

%

%Циклы моделирования [5].

```
for i=1:1:n
```

Угол поворота зеркала 1 на данном цикле моделирования относительно оси качания в соответствии с формулой (2.15)

```
Q1(i)=(q1max+q1min)/2+(q1max-q1min)/2*sin(nx*(i-1)*2*pi/(n-1));
```

Задание матрицы отражения плоского зеркала 1 в системе координат  $X_1Y_1Z_1$  в соответствии с формулой (2.21)

%Элементы матрицы поворота зеркала 1

```
Lya0= cos(Q1(i)/2);
```

```
Lya1= cos(45*deg)*sin(Q1(i)/2);
```

```
Lya2= cos(90*deg)*sin(Q1(i)/2);
```

```
Lya3= cos(135*deg)*sin(Q1(i)/2);
```

%Элементы матрицы поворота зеркала 1 в системе координат

%  $X_1Y_1Z_1$

```
m11 = Lya0^2+Lya1^2-Lya2^2-Lya3^2;
```

```
m12 = 2*(Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
```

```
m13 = 2*(Lya1*Lya3-Lya0*Lya2);
```

```
m21 = 2*(-Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
```

```
m22 = Lya0^2+Lya2^2-Lya1^2-Lya3^2;
```

```
m23 = 2*(Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
```

```
m31 = 2*(Lya0*Lya2+Lya1*Lya3);
```

```
m32 = 2*(-Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
```

```
m33 = Lya0^2+Lya3^2-Lya1^2-Lya2^2;
```

```

%Матрица поворота зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
mx1 = [ m11 m12 m13
        m21 m22 m23
        m31 m32 m33];
%
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
зеркала 1
ms=mx1;
    Угол поворота зеркала 2 на данном цикле моделирования относительно
оси качания в соответствии с формулой (2.15)

Q21(i)=(p2max+p2min)/2+((p2max-p2min)/2)*sin(ny2*(i-1)*2*
pi/(n-1));
    Матрица поворота (качания) зеркала 2 в системе координат X2Y2Z2
относительно оси OY2 в соответствии с формулой (2.6)
my2= [cos(Q21(i)) 0 sin(Q21(i))
      0 1 0
      -sin(Q21(i)) 0 cos(Q21(i))];
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы
%поворота зеркала 2
ms2=my2;
%Моделирование направления вектора B1 луча лазера,
%отражённого от зеркала 1 на данном цикле моделирования
    Орт пучка лазера, отражённого первым зеркалом в соответствии с
выражением (2.9).
B1= ms*M1*ms'*A;
%Моделирование направления вектора B2 луча лазера,
% отражённого от зеркала 2 и вышедшего из сканирующей системы
% на данном цикле моделирования
    Орт пучка, отражённого вторым зеркалом в соответствии с выражением
(2.10).
B2= ms2*M2*ms2'*B1;
%Вычисление координат пятна засветки, формируемого лучом
% лазера на экране наблюдения спецэффекта
    Вычисление координат точек фигуры, формируемой на экране
наблюдения в соответствии с формулами (2.13):
x1(i)= L*B2(1)/B2(3);
y1(i)= L*B2(2)/B2(3);
%Вспомогательный оператор для отладки программы
z1(i)= B2(3);
end
    Построение фигуры, формируемой лазерным лучом системы создания

```

спецеффекта  
`plot(x1, y1)`

Фигура спецеффекта в миллиметрах, полученная на экране наблюдения в результате сканирования лазерного пучка, изображена на рисунке 2.5.

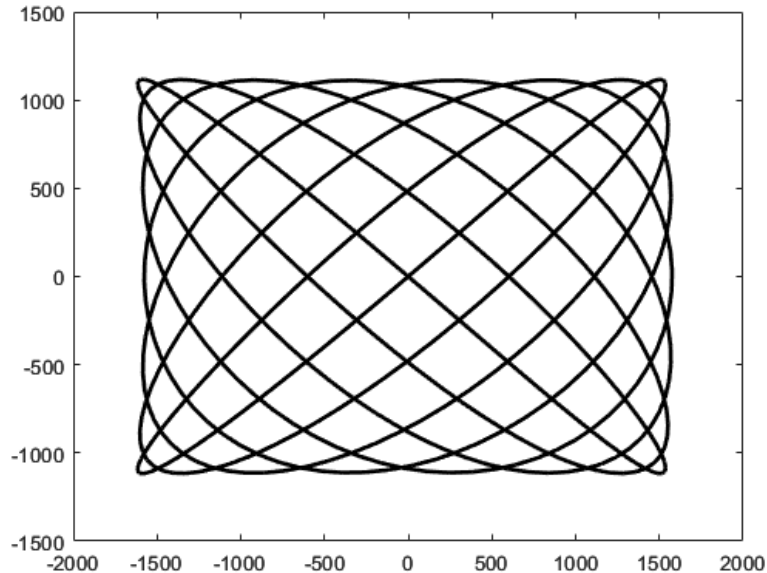


Рисунок 2.5 – Фигура, полученная в результате сканирования при номинальных значениях параметров системы создания спецеффекта

Для выполнения этапов 4 и 5 Лабораторной работы, соответствующих экспериментам с моделью при наличии случайных отклонений параметров элементов системы создания оптического спецеффекта, необходимо выполнить следующие действия.

1. Разместить в цикле эксперимента копию оператора, включающего параметр системы, случайные изменения которого моделируются.
2. Синтезировать значение требуемой случайной величины отклонения параметра в строках, предшествующих копии матричного оператора.
3. Подставить полученное значение случайной величины в матричный оператор или прибавить его к параметру, отклонение которого моделируется.
4. Выполнить расчёт орта оси пучка, формирующего траекторию перемещения пучка лазера по экрану наблюдения при отклонении параметров элементов сканирующей системы
5. Построить фигуру, формируемую лазерным лучом системы создания спецеффекта при наличии погрешностей в формировании координат составляющих её точек.

В соответствии с данными Таблицы 2.1, обе случайные величины, имитирующие отклонения параметров элементов, имеют равномерное распределение, причём указаны границы интервала  $[a,b]$ , в которых изменяются значения случайных величин. Моделирование значений величин  $\xi$  с

равномерным распределением в указанном ограниченном интервале выполняется по алгоритму [2]:

$$\xi = a + (b - a) \cdot \gamma, \quad (2.22)$$

где  $\gamma$  - значение случайной величины  $\Gamma$  с равномерным распределением в интервале  $[0,1]$ .

В технологии Matlab значения  $\gamma$  случайной величины  $\Gamma$  синтезируются генератором случайных значений rand.

Программа модели при выполнении этапов на этапах 4 и 5 без комментариев, поясняющих одинаковые фрагменты ранее рассмотренной модели, имеет вид:

```
clear
n = 500; %Количество точек в траектории
deg = pi/180;%Коэффициент для перевода из угловых градусов
в радианы
L=15000; % Дистанция до экрана наблюдения спецэффекта
px = 8; % Относительная частота качания зеркала 1
py2 = 7;% Относительная частота качания зеркала 2, ось OY2
pz2 = 0;% Относительная частота вращения зеркала 2, ось OX2
q1max = 3*deg;%Максимальный угол качания зеркала 1
q1min = -3*deg;%Минимальный угол качания зеркала зеркала 1
p2max = 3*deg;%Максимальный угол качания зеркала 2
относительно оси OY2
p2min = -3*deg;%Минимальный угол качания зеркала 2
относительно оси OY2
```

Задание пределов случайного изменения углов отклонения орта А оси лазерного пучка от номинального направления в двух координатных плоскостях  
% Величина угла наибольшего отклонения вектора А оси оси лазера от оси OY

```
dAymax = 0.1*deg ;
```

% Величина угла наименьшего отклонения вектора А оси оси лазера от оси OY

```
dAymn=-0.1*deg ;
```

% Величина угла наибольшего отклонения вектора А оси оси лазера от оси OZ

```
dAzmax = 0.2*deg ;
```

% Величина угла наименьшего отклонения вектора А оси оси лазера от оси OZ

```
dAzmn=-0.2*deg ;
```

Продолжение первоначального программного кода

%Задание номинальных параметров вектора А пучка (оси) лазера

```
beta = 90*deg; % угол между вектором А и осью OY
```

```

alpha = 180*deg; %угол между вектором A и осью OZ
%Координаты вектора A в системе координат XYZ
Ax = sin(beta)*sin(alpha);
Ay = cos(beta);
Az = sin(beta)*cos(alpha);
A = [Ax
     Ay
     Az];
%Задание номинальных параметров вектора N1 нормали зеркала
1
betan1 = 90*deg;%угол между вектором N1 и осью OY1
alphan1 = 45*deg;% угол между вектором N1 и осью OZ1
%Координаты вектора N1 нормали зеркала 1 в системе координат
X1Y1Z1
N1x = sin(betan1)*sin(alphan1);
N1y = cos(betan1);
N1z = sin(betan1)*cos(alphan1);
N1 = [N1x
     N1y
     N1z];
%
%Задание матрицы отражения плоского зеркала 1 в системе
координат X1Y1Z1
%Элементы матрицы отражения зеркала 1
c11= 1-2*N1x^2;
c12= -2*N1x*N1y;
c13= -2*N1x*N1z;
c21= -2*N1x*N1y;
c22= 1-2*N1y^2;
c23= -2*N1y*N1z;
c31= -2*N1x*N1z;
c32= -2*N1y*N1z;
c33= 1-2*N1z^2;
%Матрица отражения зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
M1= [c11 c12 c13
     c21 c22 c23
     c31 c32 c33];
%
%Задание номинального вектора N2 нормали зеркала 2
betan2 = 90*deg;%угол между вектором N2 и осью OY2
alphan2 = 225*deg;%угол между вектором N2 и осью OZ2
%Координаты вектора N2 в системе координат X2Y2Z2

```

```

betan2 = 90*deg;
alphan2 = 225*deg;
N2x = sin(betan2)*sin(alphan2);
N2y = cos(betan2);
N2z = sin(betan2)*cos(alphan2);
N2 = [N2x
      N2y
      N2z];
% Задание матрицы отражения плоского зеркала 2 в системе
координат X2Y2Z2
%Элементы матрицы отражения зеркала 2
k11= 1-2*N2x^2;
k12= -2*N2x*N2y;
k13= -2*N2x*N2z;
k21= -2*N2x*N2y;
k22= 1-2*N2y^2;
k23= -2*N2y*N2z;
k31= -2*N2x*N2z;
k32= -2*N2y*N2z;
k33= 1-2*N2z^2;
%Матрица отражения зеркала 2 в системе координат X1Y1Z1
M2= [k11 k12 k13
     k21 k22 k23
     k31 k32 k33];
    Задание пределов случайного отклонения оси качания зеркала 2
вследствие вибраций относительно оси  $OX_2$ 
% Величина наибольшего угла отклонения оси качания зеркала
% 2 относительно оси  $OX_2$  вследствие вибраций
dQ22max = 0.3*deg ;
% Величина наименьшего угла отклонения оси качания зеркала
% 2 относительно оси  $OX_2$  вследствие вибраций
dQ22min=-0.3*deg ;
%Начало цикла моделирования
for i=1:1:n
    Моделирование случайного отклонения орта оси излучаемого лазерного
пучка относительно оси  $OY$ 
    dbeta = dAymin+(dAymax-dAymin)*rand;
    %Угол beta не равен номинальному
    betar = beta + dbeta;
    Моделирование случайного отклонения вектора оси лазерного пучка
относительно оси  $OZ$ 
    dalpha = dAzmin+(dAzmax-dAzmin)*rand;

```

```

%Угол alpha не равен номинальному
alphar = alpha + dalphi;
Задание орта А оси лазерного пучка при его случайном отклонении:
Arx = sin(betar)*sin(alphar);
Ary = cos(betar);
Arz = sin(betar)*cos(alphar);
Ar = [Arx
      Ary
      Arz]

Продолжение первоначального программного кода:
%Угол поворота зеркала 1 на данном цикле моделирования
%относительно оси качания
Q1(i)=
(q1max+q1min)/2+((q1max-q1min)/2)*sin(nx*(i-1)*2*pi/(n-1)
) ;
%Элементы матрицы поворота зеркала 1
Lya0= cos(Q1(i)/2);
Lya1= cos(45*deg)*sin(Q1(i)/2);
Lya2= cos(90*deg)*sin(Q1(i)/2);
Lya3= cos(135*deg)*sin(Q1(i)/2);
%Элементы матрицы поворота зеркала 1 в системе координат
%X1Y1Z1
m11 = Lya0^2+Lya1^2-Lya2^2-Lya3^2;
m12 = 2*(Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
m13 = 2*(Lya1*Lya3-Lya0*Lya2);
m21 = 2*(-Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
m22 = Lya0^2+Lya2^2-Lya1^2-Lya3^2;
m23 = 2*(Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
m31 = 2*(Lya0*Lya2+Lya1*Lya3);
m32 = 2*(-Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
m33 = Lya0^2+Lya3^2-Lya1^2-Lya2^2;
%Матрица поворота зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
mx1 = [ m11 m12 m13
        m21 m22 m23
        m31 m32 m33];

%
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
%зеркала 1
ms=mx1;
%Угол качания зеркала 2 относительно оси OY2 на данном цикле
% моделирования

```

```

Q21(i)=(p2max+p2min)/2+((p2max-p2min)/2)*sin(ny2*(i-1)*2*
pi/(n-1));
%Матрица поворота зеркала 2 в системе координат X2Y2Z2
% относительно оси OY2
my2= [cos(Q21(i)) 0 sin(Q21(i))
      0 1 0
      -sin(Q21(i)) 0 cos(Q21(i))];
    Моделирование случайного отклонения оси качания зеркала 2
относительно координатной оси OX2
dQ22 = dQ22min+(dQ22max-dQ22min)*rand;
    Матрица случайного поворота оси качания зеркала 2 относительно оси
OX2 в соответствии с выражением (2.5):
mx2= [1 0 0
      0 cos(dQ22) -sin(dQ22)
      0 sin(dQ22) cos(dQ22)];
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
зеркала 2
ms2=my2;
    Продолжение первоначального программного кода:
%Моделирование орта B1 оси лазерного пучка %отражённого
% от зеркала 1 на данном цикле моделирования
B1= ms*M1*ms'*A;
%Моделирование орта B2 оси лазерного пучка, отражённого от
% зеркала 2 и вышедшего из сканирующей системы
B2= ms2*M2*ms2'*B1;
%Вычисление координат пятна засветки, формируемого лазерным
пучком на экране наблюдения спецэффекта
x1(i)= L*B2(1)/B2(3);
y1(i)= L*B2(2)/B2(3);
    Моделирование направления орта B1r оси лазерного пучка, отражённого
от зеркала 1 при наличии случайного отклонения оси лазерного пучка
B1r= ms*M1*ms'*Ar
    Вычисление полной матрицы поворота 2 с учётом дополнительного
колебания оси поворота относительно оси OX2
ms2=mx2*my2;
    Моделирование направления вектора B2 луча лазера, отражённого от
зеркала 2 и вышедшего из сканирующей системы при наличии отклонений
параметров
B2r= ms2*M2*ms2'*B1r;
    Вычисление координат пятна засветки, формируемого лучом лазера на
экране наблюдения спецэффекта при наличии случайных отклонений
параметров элементов

```

```
x1r(i) = L*B2r(1)/B2r(3);  
y1r(i) = L*B2r(2)/B2r(3);
```

```
end
```

Построение номинального вида фигуры, формируемой лазерным пучком системы создания спецэффекта при отсутствии случайных отклонений параметров элементов

```
plot(x1,y1)  
pause
```

После рассмотрения номинального вида фигуры спецэффекта для продолжения расчёта следует нажать клавишу пробел.

Построение вида фигуры, формируемой лазерным пучком системы создания спецэффекта при наличии отклонения параметров элементов.

```
plot(x1r,y1r)  
pause
```

Фигура спецэффекта, полученная на экране наблюдения в результате сканирования лазерным пучком, изображена на рисунке 2.6.

Для выполнения этапа 6 Лабораторной работы следует найти численные оценки суммарной погрешности воспроизведения координат формируемой фигуры оптического спецэффекта по двум координатным осям, например, среднее квадратическое отклонение координат точек искажённой траектории фигуры спецэффекта от номинальной.

```
% Вычисление массивов отклонения координат точек
```

```
% формируемой фигуры от номинальных значений
```

```
% По оси OX
```

```
dx=x1-x1r;
```

```
%
```

```
% По оси OY
```

```
dy= y1-y1r;
```

Построение облака отклонений координат построенной фигуры в миллиметрах при наличии отклонений параметров сканирующей системы (Рисунок 2.7).

```
plot(dx,dy,'black*')
```

Вычисление стандартного отклонения координат построенной фигуры вследствие отклонения параметров системы от номинальных значений

```
dX=std(dx)
```

```
dY=std(dy)
```

Получены следующие результаты:

```
dX = 30.6 мм
```

```
dY = 46.9 мм
```

В соответствии с этапом 7, следует оценить степень влияния двух рассмотренных случайных погрешностей на суммарную погрешность воссоздания координат формируемой траектории. Для этого обнуляется влияние

одной из них, посредством «отключения» генератора её значений.

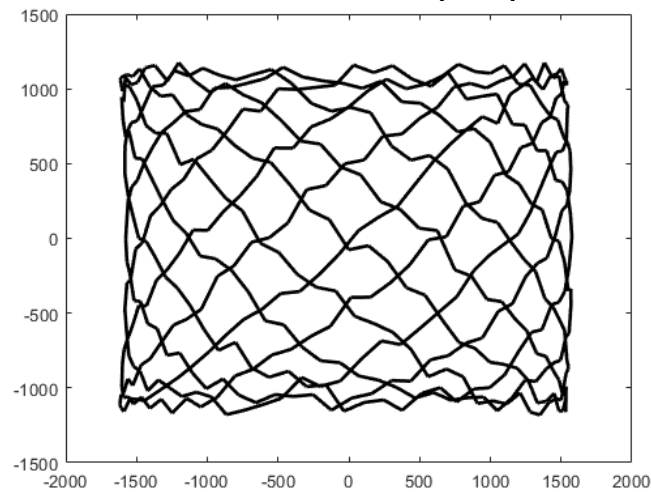


Рисунок 2.6 – Траектория сканирования при наличии отклонений параметров элементов сканирующей системы от номинального

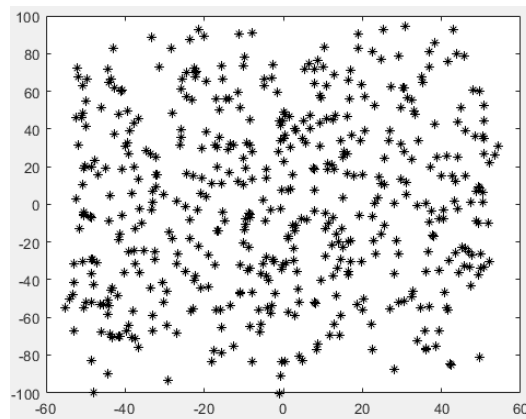


Рисунок 2.7 – Погрешность воспроизведения координат траектории при отклонении двух параметров элементов сканирующей системы от номинальных

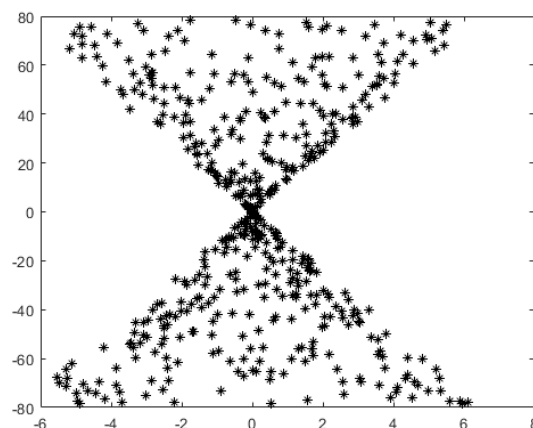


Рисунок 2.8 – Погрешность воспроизведения координат траектории при случайном отклонении орта А оси лазера от номинального направления

Чтобы отключить генерацию значений случайной величины, в тело цикла моделирования следует внести следующие изменения:

```
%Моделирование случайного отклонения орта оси излучаемого  
% лазерного пучка относительно оси OY
```

```
dbeta = dAymin+(dAymax-dAymin)*rand;  
dbeta = 0
```

Угол beta вновь будет равен номинальному значению!

```
betar = beta + dbeta;
```

```
%Моделирование случайного отклонения вектора оси лазерного  
% пучка относительно оси OZ
```

```
dalpha = dAzmin+(dAzmax-dAzmin)*rand;  
dalpha = 0
```

Угол alpha вновь будет равен номинальному значению !

```
alphar = alpha + dalpha;
```

Построен график величин погрешности координат формируемой на экране траектории по двум координатам  $x$  и  $y$  (Рисунок 2.8).

Получены следующие результаты:

```
dX = 2.5 мм
```

```
dY = 43.9 мм
```

Из сравнения полученных результатов следует, что случайное отклонение орта  $A$  оси лазерного пучка приводит к погрешности формирования координат траектории по оси  $OX$  и практически не влияет на погрешность траектории по оси  $OY$ . Соответственно, погрешность координат траектории сканирования при случайной величине отклонения оси вращения зеркала 2 относительно оси  $OZ_2$  имеет обратную зависимость.

Возможен вариант лабораторной работы, при котором моделируется система создания оптического эффекта, формирующая зрительные образы в виде кругов и «розеток».

В этом случае в структуру сканирующей системы добавляется управляемый шаговый электродвигатель, который дополнительно поворачивает зеркало 2 относительно оси  $OZ_2$  на угол  $\Theta_3$  (Рисунок 2.2).

Соответственно, в таблицу 2.1 исходных данных для выполнения лабораторной работы добавляются данные поворота относительно оси  $OZ_3$ :

Относительная частота качания зеркала 2 относительно оси  $OZ_2$ ,  $nz = 7$ ;

Максимальный угол поворота зеркала 2 относительно оси  $OZ_2$ ,  $smax = 4^\circ$ ;

Минимальный (алгебраически) угол поворота зеркала 2, ось  $OZ_2$ ,  $smin = -4^\circ$ ;

В результате секция задания исходных данных содержит следующие операторы:

```
nz2 = 7; %Относительная частота качания зеркала 2, ось OZ2
```

```
s2max = 4.*deg; %Максимальный угол качания зеркала 2
```

```
% относительно оси OZ2
```

```
s2min = -4.*deg; %Минимальный угол качания зеркала 2
```

% относительно оси OZ2

При выполнении этапов 5,6,7 лабораторной работы добавляются исходные данные, определяющие отклонение параметров поворота зеркала 2 относительно оси  $OZ_2$ .

В программном коде тела цикла следует добавить оператор, определяющий изменение угла поворота зеркала 2 на каждом цикле, и задать матрицу дополнительного поворота зеркала 2 на угол  $\Theta_3$  относительно оси  $OZ_2$  вида (2.7). Поскольку теперь зеркало 2 поворачивается относительно двух координатных осей, общая матрица поворота также задаётся произведением двух отдельных матриц выражением вида (2.8).

Дополнительные операторы, добавляемые в теле цикла, имеют вид:

```
%Угол качания зеркала 2 относительно оси OZ2 на данном
% цикле моделирования
Q23(i)=(s2max+s2min)/2+((s2max-s2min)/2)*sin(nz2*(i-1)*2*
pi/(n-1));
%Матрица поворота зеркала 2 относительно оси OZ2
my3= [cos(Q23(i)) -sin(Q23(i)) 0
      sin(Q23(i))  cos(Q23(i)) 0
      0           0           1];
%Результирующая матрица поворота зеркала 2
% относительно осей OY2 и OZ2
ms2=my3*my2;
```

На экране наблюдения в результате формируется фигуры круговой и «розеточной» формы (Рисунок 2.9)

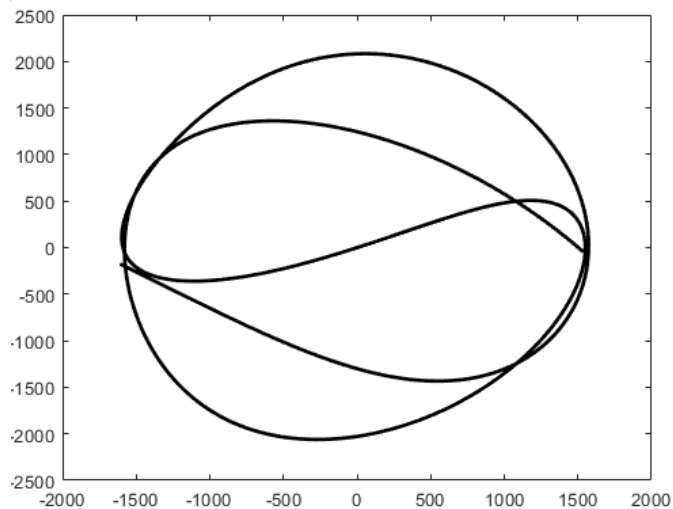


Рисунок 2.9 – Фигура, формируемая на экране наблюдения при поворотах зеркала 2 относительно двух осей

Для моделирования траектории сканирования при наличии отклонений элементов системы от номинальных значений и определения погрешностей

формирования координат фигуры на экране наблюдения в модель добавляются операторы, рассмотренные в программном коде предыдущей модели.

## 2.5 Моделирование сканирующей системы создания оптического спецэффекта со специальным отражающим элементом

Система создания оптического спецэффекта, структура которой соответствует рисунку 2.4, при использовании простых линейных контроллеров управления шаговыми электродвигателями или пьезовибраторами предназначена для формирования относительно несложных геометрических фигур или узоров сопровождении массовых зрелищ. Для получения сложных световых композиций в стиле «световое искусство» (*light art*) необходимо использовать программируемые микропроцессорные системы управления движением зеркал сканирующей системы.

Другим возможным вариантом усложнения траекторий сканирования является использование в качестве дефлекторов более сложных отражательных систем, например – двугранных зеркал.

Двугранное зеркало представляет собой композицию из двух плоских зеркал, образующих пространственный двугранный угол с углом  $\sigma$  между ними. Как правило, угол  $\sigma$  между зеркалами прямой ( $\sigma = 90^\circ$ ) или его величина отличается от  $90^\circ$  на малую величину  $\delta$  ( $\sigma = 90^\circ - \delta$ ). Вариант структуры сканирующей системы с использованием дефлектора в виде двугранного зеркала представлен на рисунке 2.10.

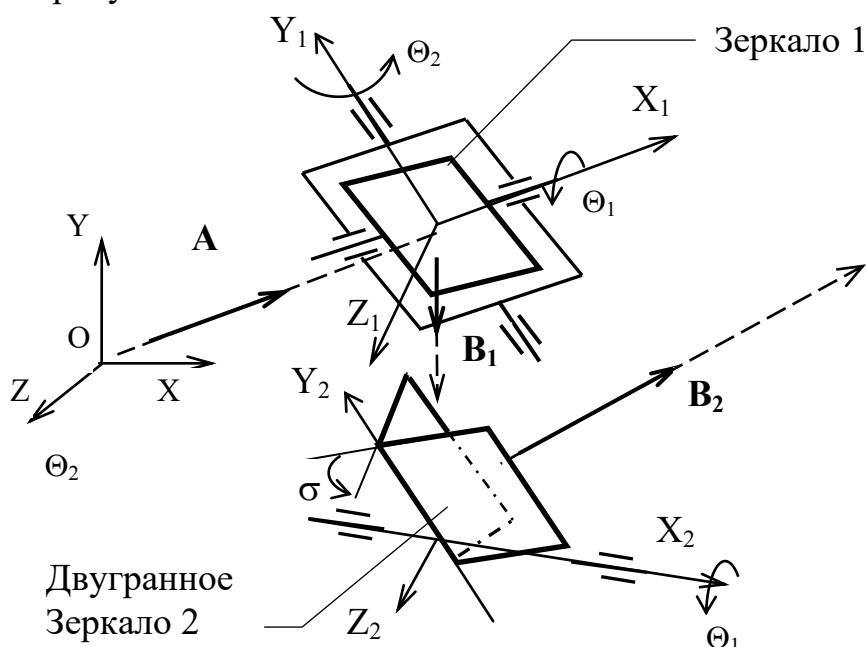


Рисунок 2.10 – Структура сканирующей системы с одиночным зеркалом и двугранным зеркалом

Свойства двугранного зеркала как отражающего элемента отличаются от

свойств одиночного зеркала:

- пучок лазера последовательно отражается от каждого из зеркал при отражении;

- величина отклонения орта пучка при отражении от двугранного зеркала зависит как от его положения относительно падающего пучка, так и от угла между составляющими зеркалами;

- при повороте двугранного зеркала относительно оси, перпендикулярной его ребру, отражённый пучок отклоняется в плоскости, коллинеарной биссекторной плоскости двугранного угла;

- направление орта отражённого пучка не изменяется при повороте двугранного зеркала относительно его ребра.

Таким образом, для изменения направления орта отражённого пучка при сканировании следует поворачивать двугранное зеркало относительно оси, перпендикулярной его ребру, и изменять угол  $\sigma$  между составляющими его зеркалами.

Практический вариант сканирующей системы при использовании дефлектора в виде двугранного зеркала представлен на рисунке 2.11. В отличие от одиночного зеркала 1, свойства двугранного зеркала во многом определяются направлением орта его ребра  $P_2$ .

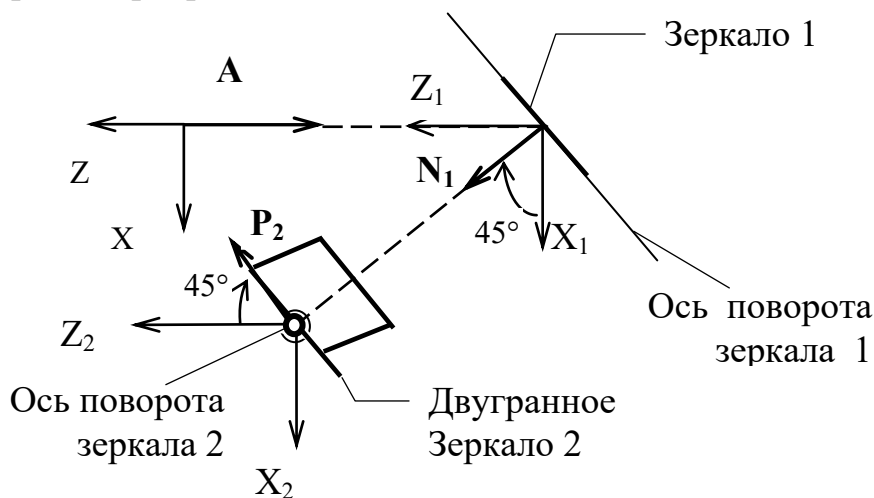


Рисунок 2.11 – Схема сканирующей системы с одиночным зеркалом и двугранным зеркалом (показана одна плоскость)

Матрица отражения двугранного зеркала определяется выражением [4]:

$$M_{дв} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где  $c_{11} \dots c_{33}$  – элементы матрицы, определяемые следующими формулами:

$$c_{11} = \cos(2 \cdot \sigma) + 2 \cdot P_x^2 \cdot 2 \cdot (\sin(\sigma))^2, \quad (2.24)$$

$$c_{12} = 2 \cdot P_x \cdot P_y \cdot (\sin(\sigma))^2 - 2 \cdot P_z \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.25)$$

$$c_{13} = 2 \cdot P_x \cdot P_z \cdot (\sin(\sigma))^2 + 2 \cdot P_y \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.26)$$

$$c_{21} = \cos(2 \cdot \sigma) + 2 \cdot P_x^2 \cdot 2 \cdot (\sin(\sigma))^2, \quad (2.27)$$

$$c_{22} = 2 \cdot P_x \cdot P_y \cdot (\sin(\sigma))^2 + 2 \cdot P_z \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.28)$$

$$c_{23} = \cos(2 \cdot \sigma) + 2 \cdot P_x^2 \cdot 2 \cdot (\sin(\sigma))^2, \quad (2.29)$$

$$c_{31} = 2 \cdot P_y \cdot P_z \cdot (\sin(\sigma))^2 - 2 \cdot P_x \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.30)$$

$$c_{32} = 2 \cdot P_x \cdot P_z \cdot (\sin(\sigma))^2 - 2 \cdot P_y \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.31)$$

$$c_{33} = 2 \cdot P_y \cdot P_z \cdot (\sin(\sigma))^2 + 2 \cdot P_x \cdot \sin(2 \cdot \sigma), \quad (2.32)$$

$$c_{33} = \cos(2 \cdot \sigma) + 2 \cdot P_z^2 \cdot 2 \cdot (\sin(\sigma))^2. \quad (2.33)$$

В этих выражениях  $P_x, P_y, P_z$  – координаты орта  $\mathbf{P}$  ребра двугранного зеркала вида (2.1).

Особенностью моделируемой системы является объединение в одном дефлекторе – двугранном зеркале двух принципиально различных действий по отклонению орта отражённого пучка: колебание относительно оси  $OY_2$ , перпендикулярной ребру двугранного угла, и периодическое изменение угла  $\sigma$  между составляющими его зеркалами.

Параметры элементов моделируемой системы приведены в Таблице 2.2.

Программный код модели системы создания оптического спецэффекта включает секцию задания исходных данных и собственно цикл имитационного моделирования.

```
%Модель с номинальными величинами параметров элементов,
% один из двух дефлекторов - двугранное зеркало
clear
n = 500; %количество точек в траектории
deg = pi/180; %Коэффициент пересчёта градусы -> радианы
L=15000; %дистанция до экрана наблюдения спецэффекта
px = 2; %Относительная частота качаний зеркала 1
py2 = 3; %Относительная частота качаний двугранного
%зеркала 2, ось OY2
q1max = 5*deg; %Максимальный угол качания зеркала 1
q1min = -5*deg; %Минимальный угол качания зеркала 1
p2max = 10*deg; %Максимальный угол качания двугранного
```

%зеркала 2 относительно оси OY<sub>2</sub>  
 $p_{2min} = -10 \cdot \text{deg}$ ; %Минимальный угол качания двугранного  
 %зеркала 2 относительно оси OY<sub>2</sub>

Таблица 2.2 Параметры элементов моделируемой системы с дефлектором в виде двугранного зеркала

№	Параметр	Значение	Распределение случайной величины
1	Количество точек траектории $n$	500	-
2	Дистанция до экрана наблюдения $L$ , мм	15000	-
3	Относительная частота качания зеркала 1 $n_x$	2	-
4	Относительная частота качания двугранного зеркала 2 относительно оси OY <sub>2</sub> $n_y$	3	-
5	Относительная частота изменения угла $\sigma$ между гранями двугранного зеркала 2 $n_s$	5	-
6	Максимальный угол поворота зеркала 1, град.	5	-
7	Минимальный (алгебраически) угол поворота зеркала 1, град.	-5	-
8	Максимальный угол поворота зеркала 2 относительно оси OY <sub>2</sub> , град	10	-
9	Минимальный (алгебраически) угол поворота зеркала 2, ось OY <sub>2</sub> , град	-10	-
10	Среднее значение угла между гранями двугранного зеркала 2, град.	90	-
11	Среднее квадратическое отклонение угла качания зеркала 1 относительно оси поворота, град	0,1	Нормальное распределение
10	Отклонения относительной частоты изменения угла $\sigma$ двугранного зеркала	+0,01	Постоянная величина

%Задание параметров ориентации вектора A луча лазера

```

beta = 90*deg; % угол между вектором A и осью OY
alpha = 180*deg; % угол между вектором A и осью OZ
%Координаты вектора A в системе координат XYZ
Ax = sin(beta)*sin(alpha);
Ay = cos(beta);
Az = sin(beta)*cos(alpha);
A = [Ax
     Ay
     Az];
%
%Координаты вектора N1 нормали зеркала 1
betan1 = 90*deg;%угол между вектором N1 и осью OY1
alphan1 = 45*deg;% угол между вектором N1 и осью OZ1
%Координаты вектора N1 нормали зеркала 1
N1x = sin(betan1)*sin(alphan1);
N1y = cos(betan1);
N1z = sin(betan1)*cos(alphan1);
N1 = [N1x
     N1y
     N1z];
%Задание матрицы отражения плоского зеркала 1
%Элементы матрицы отражения зеркала 1
c11= 1-2*N1x^2;
c12= -2*N1x*N1y;
c13= -2*N1x*N1z;
c21= -2*N1x*N1y;
c22= 1-2*N1y^2;
c23= -2*N1y*N1z;
c31= -2*N1x*N1z;
c32= -2*N1y*N1z;
c33= 1-2*N1z^2;
%Матрица отражения зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
M1= [c11 c12 c13
     c21 c22 c23
     c31 c32 c33];
Задаются координаты орта N2 ребра двугранного зеркала 2
betan2 = 90*deg;%угол между ортом N2 и осью OY2
alphan2 = 45*deg;%угол между ортом N2 и осью OZ2
%Координаты вектора N2 в системе координат X2Y2Z2
N2x = sin(betan2)*sin(alphan2);
N2y = cos(betan2);
N2z = sin(betan2)*cos(alphan2);

```

```

N2 = [N2x
      N2y
      N2z];
%
      Среднее значение угла между гранями двугранного зеркала 2
sigma=90*deg;
      Задаются параметры процесса изменения угла между гранями
двугранного зеркала 2 при сканировании
%Максимальная величина изменения угла между гранями
двугранного зеркала 2
dsigmamax = 1.5*deg;
%Минимальная величина изменения угла между гранями
двугранного зеркала 2
dsigmamin = -1.5*deg;
      Задаётся относительная частота изменения угла между гранями
двугранного зеркала 2
ns=5;
      Циклы имитационного моделирования
for i=1:1:n
      %Угол поворота зеркала 1
Q1(i)=(q1max+q1min)/2+((q1max-q1min)/2)*sin(nx*(i-1)*2*pi
/(n-1));
%Элементы матрицы поворота зеркала 1
      Lya0= cos(Q1(i)/2);
      Lya1= cos(45*deg)*sin(Q1(i)/2);
      Lya2= cos(90*deg)*sin(Q1(i)/2);
      Lya3= cos(135*deg)*sin(Q1(i)/2);
      m11 = Lya0^2+Lya1^2-Lya2^2-Lya3^2;
      m12 = 2*(Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
      m13 = 2*(Lya1*Lya3-Lya0*Lya2);
      m21 = 2*(-Lya0*Lya3+Lya1*Lya2);
      m22 = Lya0^2+Lya2^2-Lya1^2-Lya3^2;
      m23 = 2*(Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
      m31 = 2*(Lya0*Lya2+Lya1*Lya3);
      m32 = 2*(-Lya0*Lya1+Lya3*Lya2);
      m33 = Lya0^2+Lya3^2-Lya1^2-Lya2^2;
%Матрица поворота зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
      mx1 = [ m11 m12 m13
              m21 m22 m23
              m31 m32 m33];
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
      ms=mx1;

```

```

%Угол качания двугранного зеркала 2
Q21(i)=(p2max+p2min)/2+((p2max-p2min)/2)*sin(ny2*(i-1)*2*
pi/(n-1));
%Матрица поворота зеркала 2 относительно оси OY2
my2= [cos(Q21(i)) 0 sin(Q21(i))
      0 1 0
      -sin(Q21(i)) 0 cos(Q21(i))];
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
ms2=my2;
%
    Моделирование изменения угла между гранями двугранного зеркала
s(i)=sigma+((dsigmamax-dsigmamin)/2)*sin(ns*(i-1)*2*pi/(n
-1));
    sigm=s(i);
    Элементы матрицы отражения двугранного зеркала 2 и формирование
матрицы отражения
c11= cos(2*sigm)+2*N2x^2*(sin(sigm))^2;
c12= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2-N2z*sin(2*sigm);
c13= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2+N2y*sin(2*sigm);
c21= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2+N2z*sin(2*sigm);
c22= cos(2*sigm)+2*N2y^2*(sin(sigm))^2;
c23= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2-N2x*sin(2*sigm);
c31= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2-N2y*sin(2*sigm);
c32= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2+N2x*sin(2*sigm);
c33= cos(2*sigm)+2*N2z^2*(sin(sigm))^2;
%Формирование матрицы отражения двугранного зеркала 2
M2= [c11 c12 c13
     c21 c22 c23
     c31 c32 c33];
%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота
ms2=my2;
%Моделирование направления вектора B1 луча лазера,
%отражённого от зеркала 1 на данном цикле моделирования
B1= ms*M1*ms'*A;
%Моделирование направления вектора B2 луча лазера,
% отражённого от двугранного зеркала 2

B2= (ms2)*M2*(ms2) '*B1;
%Вычисление координат пятна засветки, формируемого лучом
лазера на экране наблюдения спецэффекта
x1(i)= L*B2(1)/B2(3);
y1(i)= L*B2(2)/B2(3);

```

```

end
%Построение фигуры, формируемой лазерным лучом системы
создания спецэффекта
plot(x1, y1)

```

Фигура, формируемая на экране наблюдения, изображена на рисунке 2.12

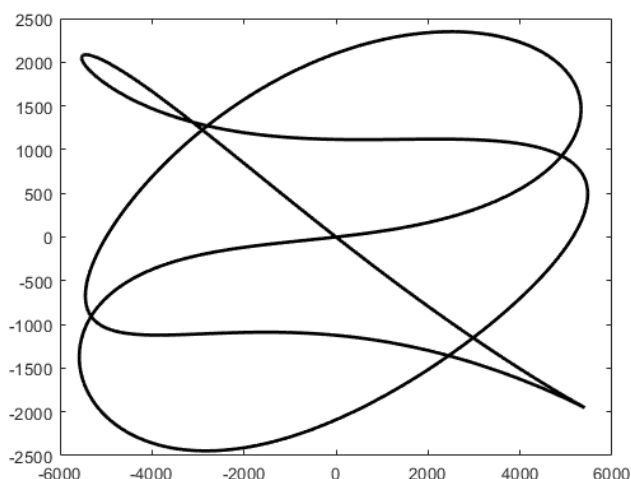


Рисунок 2.12 – Фигура, формируемая на экране наблюдения при использовании дефлектора в виде двугранного зеркала

Для выполнения лабораторной работы по анализу влияния отклонения параметров элементов системы от номинальных значений при использовании дефлектора в виде двугранного зеркала следует выполнить те же 7 этапов, что и при рассмотренной методике исследования системы с двумя одиночными зеркалами.

Из анализа данных таблицы 2.2 следует, что анализ влияния отклонения параметров элементов от номинальных значений выполняется по двум различным моделям: отклонение относительно частоты изменения величины двугранного зеркала моделируется по имитационной детерминированной модели, а моделирование неустойчивости задания угла поворота двугранного зеркала относительно оси  $OY_2$  - по имитационной стохастической.

Отклонение угла поворота зеркала 1 от номинального является нормально распределённой случайной величиной, значение которой при моделировании может создаваться на основе встроенного в Matlab генератора значений нормированной случайной величины с нормальным распределением согласно алгоритму [2]:

$$X_n = \sigma \cdot \text{randn}, \quad (2.34)$$

где  $\text{randn}$  – генератор значения нормированной нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице,  $X_n$  – значение нормальной случайной величины с нулевым математическим

ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

При выполнении лабораторной работы на этапах 4 и 5 выполняется построение фигуры оптического спецэффекта с погрешностью воспроизведения координат её точек, для чего изменяется программный код цикла моделирования, в который внесены операторы, имитирующие соответствующие отклонения параметров элементов от номинальных значений.

В результате цикл моделирования принимает следующий вид:

```
%Среднее квадратическое отклонение угла качания зеркала 1  
% относительно оси поворота вследствие вибраций
```

```
Sq1 = 0.1*deg ;
```

Задаётся постоянная величина отклонения относительной частоты изменения угла  $\sigma$  между зеркалами двугранного зеркала

```
dns = 0.01;
```

```
%Циклы моделирования
```

```
for i=1:1:n
```

Угол поворота зеркала 1 при отсутствии погрешности задания величины поворота

```
Q1(i)=(q1max+q1min)/2+((q1max-q1min)/2)*sin(nx*(i-1)*2*pi  
/(n-1)) ;
```

```
%Элементы матрицы поворота зеркала 1
```

```
Lya0= cos(Q1(i)/2) ;
```

```
Lya1= cos(45*deg)*sin(Q1(i)/2) ;
```

```
Lya2= cos(90*deg)*sin(Q1(i)/2) ;
```

```
Lya3= cos(135*deg)*sin(Q1(i)/2) ;
```

```
m11 = Lya0^2+Lya1^2-Lya2^2-Lya3^2;
```

```
m12 = 2*(Lya0*Lya3+Lya1*Lya2) ;
```

```
m13 = 2*(Lya1*Lya3-Lya0*Lya2) ;
```

```
m21 = 2*(-Lya0*Lya3+Lya1*Lya2) ;
```

```
m22 = Lya0^2+Lya2^2-Lya1^2-Lya3^2;
```

```
m23 = 2*(Lya0*Lya1+Lya3*Lya2) ;
```

```
m31 = 2*(Lya0*Lya2+Lya1*Lya3) ;
```

```
m32 = 2*(-Lya0*Lya1+Lya3*Lya2) ;
```

```
m33 = Lya0^2+Lya3^2-Lya1^2-Lya2^2;
```

```
%Матрица поворота зеркала 1 в системе координат X1Y1Z1
```

```
mx1 = [ m11 m12 m13
```

```
        m21 m22 m23
```

```
        m31 m32 m33];
```

Моделирование значения нормированной нормальной случайной величины

```
nq=randn
```

Величина случайного отклонения угла поворота зеркала 1

```
dQ1 = nq*Sq1;
```

Угол поворота зеркала 1 при отклонении угла поворота от номинального значения

$$Q1r(i) = (q1max + q1min) / 2 + ((q1max - q1min) / 2) * \sin(n \times (i-1) * 2 * \pi / (n-1)) + dQ1;$$

Элементы матрицы поворота зеркала 1 при наличии погрешности угла поворота

$$\begin{aligned} Lya0 &= \cos(Q1r(i) / 2); \\ Lya1 &= \cos(45 * \text{deg}) * \sin(Q1r(i) / 2); \\ Lya2 &= \cos(90 * \text{deg}) * \sin(Q1r(i) / 2); \\ Lya3 &= \cos(135 * \text{deg}) * \sin(Q1r(i) / 2); \\ m11 &= Lya0^2 + Lya1^2 - Lya2^2 - Lya3^2; \\ m12 &= 2 * (Lya0 * Lya3 + Lya1 * Lya2); \\ m13 &= 2 * (Lya1 * Lya3 - Lya0 * Lya2); \\ m21 &= 2 * (-Lya0 * Lya3 + Lya1 * Lya2); \\ m22 &= Lya0^2 + Lya2^2 - Lya1^2 - Lya3^2; \\ m23 &= 2 * (Lya0 * Lya1 + Lya3 * Lya2); \\ m31 &= 2 * (Lya0 * Lya2 + Lya1 * Lya3); \\ m32 &= 2 * (-Lya0 * Lya1 + Lya3 * Lya2); \\ m33 &= Lya0^2 + Lya3^2 - Lya1^2 - Lya2^2; \end{aligned}$$

Матрица поворота зеркала 1 при наличии погрешности угла поворота

```
%
mx1r = [ m11 m12 m13
          m21 m22 m23
          m31 m32 m33];
```

%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота зеркала 1

```
ms=mx1;
```

%Угол качания двугранного зеркала 2 на данном цикле моделирования относительно оси OY2

$$Q21(i) = (p2max + p2min) / 2 + ((p2max - p2min) / 2) * \sin(ny2 * (i-1) * 2 * \pi / (n-1));$$

%Матрица поворота (качания) зеркала 2 в системе координат % X2Y2Z2 относительно оси OY2

```
my2= [cos(Q21(i)) 0 sin(Q21(i))
       0 1 0
       -sin(Q21(i)) 0 cos(Q21(i))];
```

%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота

```
ms2=my2;
```

```
%
```

Угол между гранями двугранного зеркала 2 на данном цикле моделирования при отсутствии отклонения относительной частоты колебания зеркал ns от номинальной

```

s(i)=sigma+((dsigmamax-dsigmamin)/2)*sin(ns*(i-1)
*2*pi/(n-1));
sigm=s(i);

```

Элементы матрицы двугранного зеркала 2 при номинальной относительной частоте колебания зеркал

```

c11= cos(2*sigm)+2*N2x^2*(sin(sigm))^2;
c12= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2-N2z*sin(2*sigm);
c13= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2+N2y*sin(2*sigm);
c21= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2+N2z*sin(2*sigm);
c22= cos(2*sigm)+2*N2y^2*(sin(sigm))^2;
c23= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2-N2x*sin(2*sigm);
c31= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2-N2y*sin(2*sigm);
c32= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2+N2x*sin(2*sigm);
c33= cos(2*sigm)+2*N2z^2*(sin(sigm))^2;

```

%Формирование матрицы отражения двугранного зеркала 2

```

M2= [c11 c12 c13
c21 c22 c23
c31 c32 c33];
%
```

%Вспомогательное изменение идентификатора матрицы поворота  
ms2=my2;

Моделирование направления вектора  $\mathbf{B}_1$  луча лазера, отражённого от зеркала 1 при номинальном угле его поворота

```
B1= ms*M1*ms'*A;
```

Моделирование направления вектора  $\mathbf{B}_2$  луча лазера, отражённого от двугранного зеркала 2 при номинальных значениях параметров элементов

```
B2 = (ms2)*M2*(ms2) '*B1;
```

Вычисление координат пятна засветки, формируемого лучом лазера на экране наблюдения спецэффекта при номинальных значениях параметров системы

```

x1(i)= L*B2(1)/B2(3);
y1(i)= L*B2(2)/B2(3);

```

Относительная частота колебания зеркал между гранями двугранного зеркала 2 при неизменном отклонении от номинального значения

```
nsr=ns+dns
```

Угол между гранями двугранного зеркала 2 при отклонении относительной частоты от номинального значения

```

s(i)=sigma+((dsigmamax-dsigmamin)/2)*sin(nsr*(i-1)
*2*pi/(n-1));
sigm=s(i);

```

Элементы матрицы и матрица отражения при отклонении относительной частоты колебаний зеркал двугранного зеркала

```

c11= cos(2*sigm)+2*N2x^2*(sin(sigm))^2;
c12= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2-N2z*sin(2*sigm);
c13= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2+N2y*sin(2*sigm);
c21= 2*N2x*N2y*(sin(sigm))^2+N2z*sin(2*sigm);
c22= cos(2*sigm)+2*N2y^2*(sin(sigm))^2;
c23= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2-N2x*sin(2*sigm);
c31= 2*N2x*N2z*(sin(sigm))^2-N2y*sin(2*sigm);
c32= 2*N2y*N2z*(sin(sigm))^2+N2x*sin(2*sigm);
c33= cos(2*sigm)+2*N2z^2*(sin(sigm))^2;
%Формирование матрицы отражения двугранного зеркала 2
M2r= [c11 c12 c13
      c21 c22 c23
      c31 c32 c33];

```

Моделирование направления вектора  $\mathbf{B}_1$  луча лазера, отражённого от зеркала 1 при отклонении угла его поворота от номинального значения

```
B1= mx1r*M1*mx1r'*A;
```

Моделирование направления вектора  $\mathbf{B}_2$  луча лазера при отклонении от номинальной относительной частоты изменения угла  $\sigma$  между зеркалами двугранного зеркала

```
B2r= (ms2)*M2r*(ms2) '*B1;
```

Вычисление координат пятна засветки, формируемого лучом лазера на экране наблюдения спецэффекта при наличии отклонения параметров системы

```
x1r(i) = L*B2r(1)/B2r(3);
y1r(i) = L*B2r(2)/B2r(3);
```

```
end
```

Построение фигуры, формируемой лазерным лучом системы создания спецэффекта при номинальных значениях параметров системы

```
plot(x1,y1)
pause
```

Построение фигуры, формируемой лазерным лучом системы создания спецэффекта при наличии отклонения параметров системы от номинальных

```
plot(x1r,y1r)
pause
```

Фигура спецэффекта, полученная на экране наблюдения при наличии отклонений параметров системы изображена на рисунке 2.13.

Для выполнения этапа 6 лабораторной работы следует найти численные оценки суммарной погрешности воспроизведения координат формируемой фигуры оптического спецэффекта по двум координатным осям. Особенностью рассматриваемого варианта модели является наличие наряду со случайным изменением параметра одного элемента системы (отклонение угла поворота зеркала 1) детерминированного отклонения второго (неноминальное значение относительной частоты изменения угла между зеркалами двугранного зеркала 2).

Поскольку наличие детерминированного отклонения приводит к погрешности воспроизведения координат каждой точки искажённой траектории фигуры спецэффекта от номинальной, в качестве общей оценки формирования траектории сканирования могут быть использованы характеристики случайных величин, в частности, среднее квадратическое отклонение координат точек искажённой траектории фигуры спецэффекта от номинальной.

```
% Вычисление массивов отклонения координат точек
% формируемой фигуры от номинальных значений
% По оси OX
dx=x1-x1r;
% По оси OY
dy= y1-y1r;
```

Строится график величин погрешности координат формируемой на экране траектории по координатам  $x$  и  $y$

```
plot(dx, dy, 'black*')
```

Двумерный массив отклонений координат построенной фигуры в миллиметрах при наличии отклонений параметров сканирующей системы представлен на рисунке 2.14.

Вычисление стандартного отклонения координат построенной фигуры вследствие отклонения параметров системы от номинальных значений

```
dX=std(dx)
dY=std(dy)
```

Получены следующие результаты:

```
dX = 3.8 мм; dY = 40.4мм
```

В соответствии с этапом 7 выполнения лабораторной работы определяется степень влияния двух рассмотренных погрешностей на суммарную погрешность воссоздания координат формируемой траектории. Для этого обнуляется влияние одной из них, например, посредством «отключения» генератора случайной величины отклонения угла поворота зеркала 1 от номинального значения. При этом в тело цикла моделирования вносятся следующие изменения:

```
% Величина случайного отклонения угла поворота зеркала 1
%dQ1 = nq*Sq1;
dQ1 = 0
```

В результате величина угла поворота зеркала 1 будет иметь номинальное значение.

Двумерный массив величины погрешности измерения координат формируемой на экране траектории при отклонении от номинального значения относительной частоты изменения угла  $\sigma$  между зеркалами двугранного зеркала изображён на рисунке 2.15 .

Получены следующие результаты:

```
dX =1.27 мм; dY = 15.3 мм
```

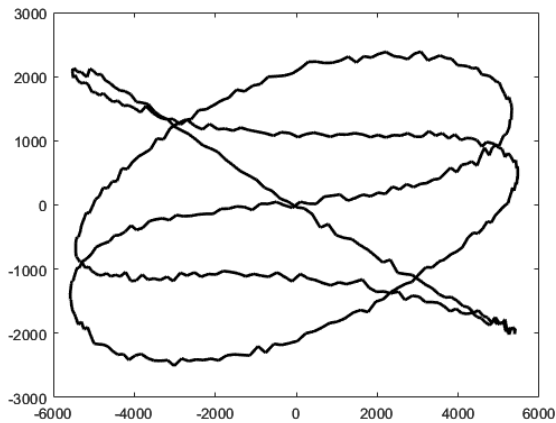


Рисунок 2.13 – Траектория сканирования при наличии отклонений параметров элементов сканирующей системы от номинального

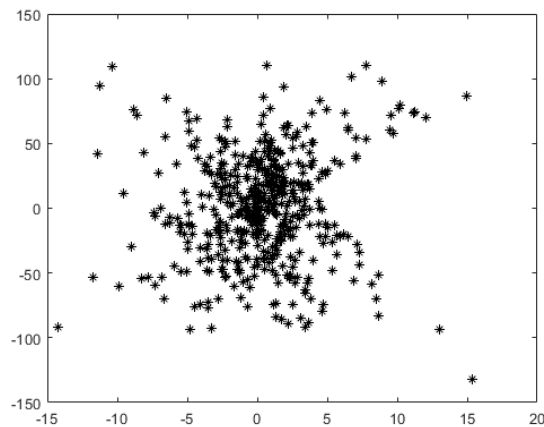


Рисунок 2.14 – Массив погрешностей воспроизведения координат траектории при отклонении двух параметров элементов сканирующей системы от номинальных

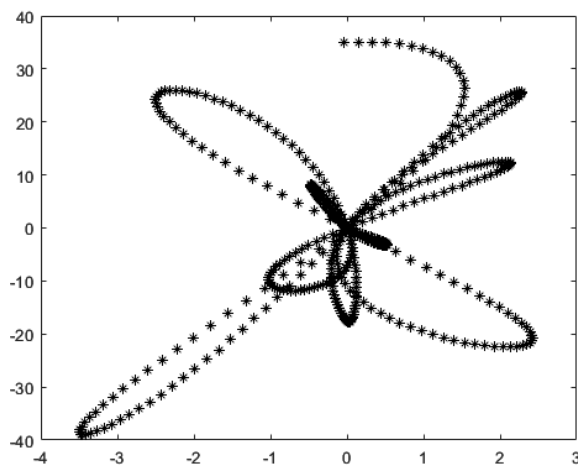


Рисунок 2.15 – Массив погрешностей воспроизведения координат траектории при отклонении одного параметра сканирующей системы от номинального

Из сравнения полученных результатов следует, что как случайное

отклонение угла поворота двугранного зеркала 2 от номинального значения, так и детерминированное отклонение частоты изменения угла двугранного зеркала приводят к примерно одинаковой погрешности формирования координат траектории по оси  $OY$  и практически не влияют на погрешность траектории по оси  $OX$ .

### Контрольные вопросы

1. Поясните, в чём различие между математическим описанием вращения элемента сканирующей системы относительно оси, совпадающей с одной из координатных осей, и описанием вращения относительно произвольно ориентированной в пространстве оси.

2. Какова структура матрицы отражения элемента сканирующей системы? В чём её отличие от матрицы описания вращения относительно координатной оси?

3. Какие операторы модели двухзеркальной сканирующей системы следует изменить для преобразования подушкообразной формируемой фигуры на экране наблюдения в круговую или спиральную?

4. В чем заключается отличие модели системы формирования оптического спецэффекта при использовании сканирующей системы на основе двух плоских зеркал от аналогичной по структуре системы, но использующей двугранное зеркало? Какие траектории сканирования реализуются в этих двух видах сканирующих систем?

5. К какому типу относится алгоритм выполнения Лабораторной работы по исследованию параметрической чувствительности системы формирования оптического спецэффекта – однонаправленному или двунаправленному? В чем конкретно заключается различие этих типов алгоритмов моделирования?

6. Какое изменение в структуре модели следует сделать для исследования влияния детерминированного отклонения параметра элемента исследуемой системы от номинального значения?

7. Как следует изменить модель для анализа влияния отдельных случайных отклонений параметров сканирующей системы от номинальных значений?

8. Укажите другие параметры, влияние отклонения которых от номинальных значений может быть исследовано при использовании рассмотренной стохастической модели. Влияние каких из них может имитироваться детерминированным значением отклонения от номинального, а какие – только случайным?

9. Поясните, почему при оценке влияния детерминированного отклонения параметра сканирующей системы от номинального значения на точность воспроизведения координат точек фигуры спецэффекта используется оценка, характерная при рассмотрении случайных величин.

### **3 Исследование влияния отклонения параметров оптико-цифровой автоколлимационной системы на точность измерения углов поворота объекта**

Для решения задач, связанных с определением пространственного углового положения объектов при контроле деформаций нагруженных сооружений в энергетике (нефте- и газопроводов, фундаментов реакторов, плотин), промышленности и строительной индустрии, используются углоизмерительные системы различных типов.

Наиболее эффективны высокоточные угломеры автоколлимационного типа с цифровой регистрацией измеряемых величин, использующие автоколлимационный метод измерения, при котором в процессе измерения на контролируемом объекте размещается малогабаритный отражатель - контрольный элемент, не требующий подключения к сети электропитания и постоянного эксплуатационного обслуживания.

Принципиальная схема автоколлиматора включает десятки элементов, различающихся по физической природе (оптика, механика, электроника), принципу действия и алгоритму функционирования. При столь сложной структуре имитационное моделирование является фактически единственным средством проверки влияния отклонения параметров элементов от номинальных значений на качество проектируемой автоколлимационной системы.

#### **3.1 Структурная схема и принцип действия автоколлимационной системы**

Для проведения автоколлимационных измерений на контролируемом объекте располагается отражатель, при этом собственно автоколлиматор с приёмной и излучающей системами размещён на базовом объекте, конструкция и технология изготовления которого практически исключает вибрации и колебания автоколлиматора.

С автоколлиматором связана базовая система координат  $XYZ$ , с отражателем и, соответственно, с контролируемым объектом – система координат  $X_1Y_1Z_1$  (Рисунок 3.1).

Оси системы координат ориентированы следующим образом [6]:

- ось  $OZ$  параллельна условной линии, соединяющей контролируемый и базовый объекты и совпадает с оптической осью объектива автоколлиматора;
- ось  $OX$  обычно расположена в горизонтальной плоскости, ось  $OY$  - в вертикальной;
- при отсутствии деформаций объекта и, соответственно, поворотов отражателя, оси систем координат  $XYZ$  и  $X_1Y_1Z_1$  параллельны.

Автоколлимационная система измеряет следующие три угла поворота: коллимационный угол  $\Theta_1$  относительно оси  $OX_1$ , коллимационный угол  $\Theta_2$  относительно оси  $OY_1$  и угол скручивания  $\Theta_3$  относительно оси  $OZ_1$ .

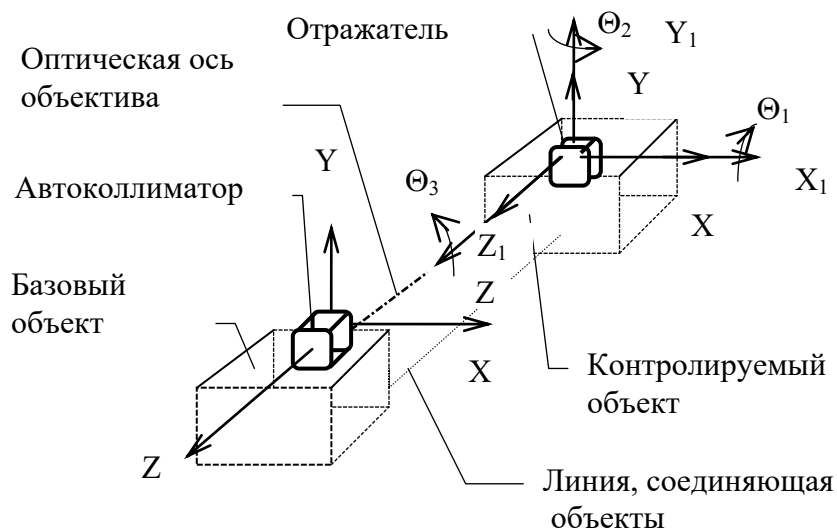


Рисунок 3.1 – Расположение автоколлиматора и отражателя углоизмерительной системы

Структура автоколлимационной углоизмерительной системы приведена на рисунке 3.2.

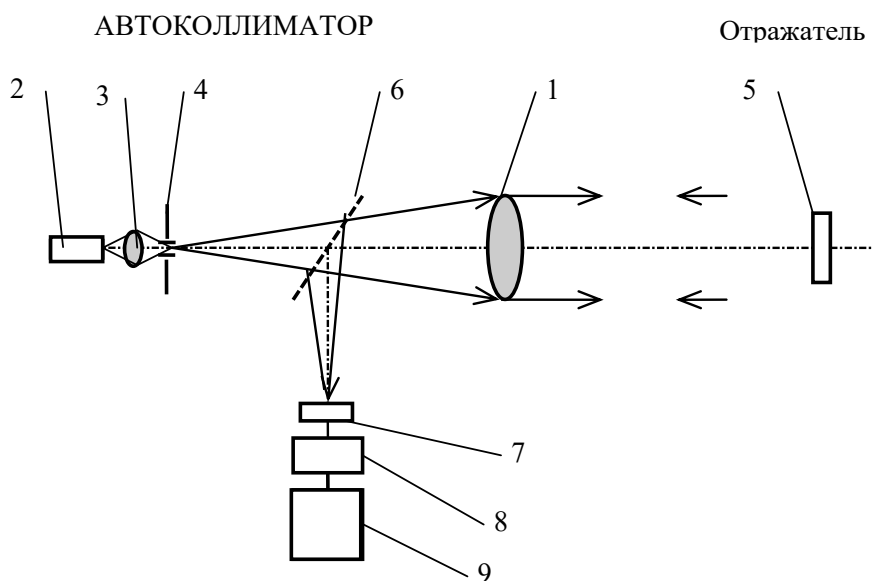


Рисунок 3.2 – Структура автоколлимационной углоизмерительной системы

Излучающая марка 4, подсвечиваемая источником оптического излучения 2 через конденсор 3, устанавливается в фокальной плоскости объектива автоколлиматора 1. Параллельный пучок лучей, сформированный объективом 1, после отражения от отражателя 5 проходит в обратном направлении объективом 1 и формирует на площадке матричного фотоприёмника 7 изображение (или несколько изображений) марки автоколлиматора. Видеокадр с матричного

фотоприёмника оцифровывается АЦП и обрабатывается микропроцессором 9, который вычисляет координаты изображений на матричном фотоприёмнике.

При повороте отражателя 5, например, вследствие деформации контролируемого объекта, отражённые пучки отклоняются от первоначального направления, что приводит к смещениям изображений марки автоколлиматора на чувствительной площадке матричного фотоприёмника 7. Микропроцессор 9 по результатам обработки оцифрованного видеокadra определяет величины смещений изображений, после чего по алгоритму, определяемому теоретической моделью автоколлимационной системы, вычисляет измеренные углы поворота  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  отражателя 5 и, соответственно, угловые деформации контролируемого объекта, на котором он установлен.

### 3.2 Математическая модель углоизмерительной автоколлимационной системы

В настоящее время автоколлиматоры широко представлены на рынке контрольно-измерительной техники, например, приборы фирм Оптротех (Россия), Taylor Hobson (США), Möller-Wedel и Trioptics (Германия). Серийные модели имеют достаточно высокую точность (чувствительность к измеряемым углам не превышает долей угловых секунд), однако с их помощью могут быть измерены только коллимационные углы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ . Причина заключается в метрологических свойствах используемого отражателя – одиночного плоского зеркала.

При трёхкоординатных измерениях углов  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  используется специальный отражатель в виде зеркального триэдра или стеклянного тетраэдра.

Отражатель в виде зеркального триэдра состоит из трёх зеркал 1, 2 и 3, образующих пространственный трёхгранный угол (Рисунок 3.3)

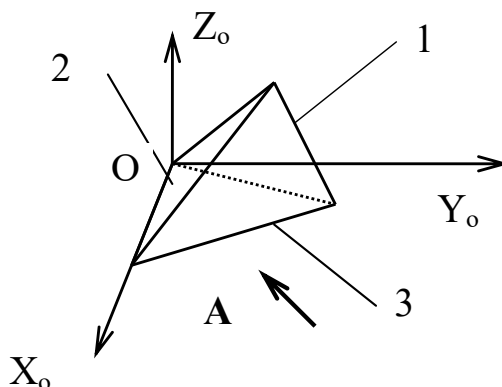


Рисунок 3.3 – Триэдрический отражатель трёхкоординатной автоколлимационной углоизмерительной системы

Падающий на отражатель пучок с ортом  $A$  последовательно отражается от трёх зеркал, после чего выходит из отражателя в направлении, близком к направлению, противоположному орту падающего пучка.

В случае, если все три двугранных угла триэдра равны  $90^\circ$ , отражатель формирует единый отражённый пучок, угловое положение которого не зависит от поворотов самого отражателя, что делает невозможным измерение углов поворота при его использовании.

Однако если, в соответствии с теорией построения трёхкоординатных угломеров, двугранный угол между гранями 2 и 3 триэдра равен  $90^\circ - \delta_2$ , а двугранный угол между гранями 1 и 3 равен  $90^\circ - \delta_3$ , триэдрический отражатель разделяет падающий пучок на 4 части и формирует две пары отражённых пучков, пучки 1,2 и 3,4. Пучки в каждой паре составляют с осью объектива автоколлиматора одинаковые по величине углы, значения которых зависят от последовательности отражения лучей от зеркал триэдра и соотношения между отклонениями  $\delta_2$  и  $\delta_3$  его двух двугранных углов от  $90^\circ$ . При этом орты пучков, составляющих каждую пару, расположены в одной плоскости и симметричны относительно оптической оси объектива автоколлиматора. Третий двугранный угол триэдрического отражателя между гранями 1 и 2 равен номинальному значению  $90^\circ$ , и, соответственно, для него  $\delta_1 = 0$ . В этом случае отражатель обладает чувствительностью к поворотам относительно всех трёх осей координат.

Для удобства последующей алгоритмизации математической модели отклонения  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  двугранных углов от  $90^\circ$  зададим в следующем виде:

$$\delta_2 = \delta, \quad \delta_3 = k \cdot \delta, \quad (3.1)$$

где  $k$  – коэффициент, не равный нулю. Тогда матрицы отражения  $M_1$  и  $M_3$  рассматриваемого триэдра, определяющие отклонения ортов двух отражённых пучков из разных пар, соответственно, пучков 1 и 3 имеют вид [6]:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) & -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \\ \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) & -1 & -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) & \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) & \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) & -1 & \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) & -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

Для двух других пучков каждой пары – пучков 2 и 4 матрицы отражения

$M_2$  и  $M_4$  имеют аналогичную структуру, но элементы, не лежащие на главной диагонали, имеют обратные знаки.

Орты  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_3$  отражённых пучков 1 и 3 определяются по выражению:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{V}$  - орт отражённого пучка 1 или 3,  $\mathbf{M}$  – матрицы отражения  $M_1$  или  $M_3$ , соответственно,  $\mathbf{A}$  – орт входного пучка, параллельного оптической оси объектива автоколлиматора и задаваемого одностробцовой матрицей (2.2).

При подстановке сомножителей в выражение (3.4) определяются орты  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_3$  отражённых пучков 1 и 3:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k-1)}{3} \\ \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k+1)}{3} \\ -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Соответственно, орты отражённых пучков 2 и 4 описываются аналогичными выражениями в которых элементы первой и второй строк имеют противоположные знаки.

Две пары отражённых пучков формируют на чувствительной площадке матричного фотоприёмника автоколлиматора соответствующие пары изображений 1,2 и 3,4 (Рисунок 3.4).

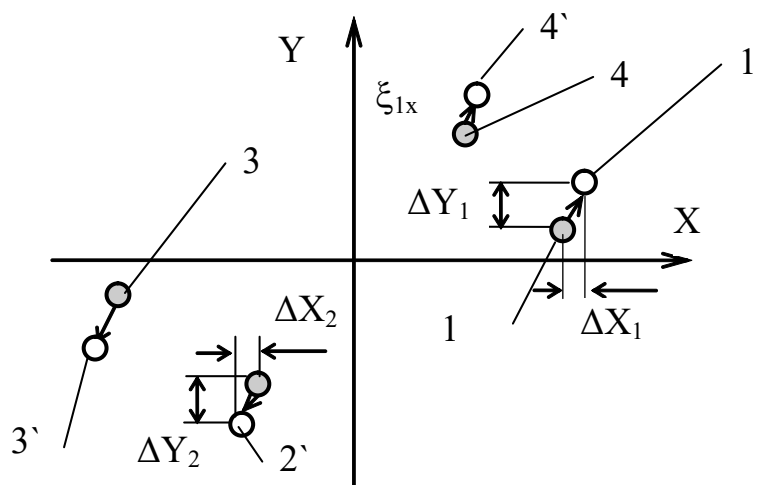


Рисунок 3.4 – Расположение изображений марки автоколлиматора на чувствительной площадке матричного фотоприёмника

При повороте отражателя на углы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  орты  $\mathbf{V}_r$  отражённых пучков определяются по выражению:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{M}_r \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}_r^T \cdot \mathbf{A}, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{M}_r$ ,  $\mathbf{M}_r^T$  – прямая и транспонированная матрицы поворота отражателя на

углы  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ ,  $M$  - матрица отражения для соответствующего пучка,  $A$  – орт лазерного пучка по выражению (2.2) .

Матрица  $M_r$  поворота определяется при последовательном перемножении матриц (2.5),(2.6),(2.7) поворотов на углы  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ .

Для удобства алгоритмизации модели используется приближённый вид матрицы  $M_r$  поворота, использование которого приводит к методической погрешности моделирования, не превышающей 3% при углах  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  не более 3°:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 1 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

При подстановке сомножителей в выражение (3.6) орты  $B_r$  отражённых пучков 1 и 3 определяются выражениями:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k-1)}{3} - \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_3 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_1 \\ \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) + \frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k-1)}{3} \cdot \Theta_3 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k+1)}{3} + \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_1 \\ -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) - \frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k+1)}{3} \cdot \Theta_3 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

Разность  $\Delta B$  ортов отраженных пучков определяется по выражениям (3.8),(3.9) с учётом выражений (3.5):

$$\Delta B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_3 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_1 \\ \frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k-1)}{3} \cdot \Theta_3 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\Delta B_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_1 \\ -\frac{\sqrt{6} \cdot \delta \cdot (k+1)}{3} \cdot \Theta_3 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Изменение  $\Delta B$  ортов отражённых пучков приводит к пропорциональному смещению изображений марки автоколлиматора (Рисунок 3.4).

В выражениях (3.10), (3.11) первые две строки являются координатами векторов разности по осям  $OX$ ,  $OY$  в соответствии с выражением (2.11) и, соответственно, определяют смещения изображений по этим осям. При малых углах поворота  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  величины смещений  $\Delta X, \Delta Y$  определяются по выражениям:

$$\Delta X = f \cdot \Delta B_x, \quad (3.12)$$

$$\Delta Y = f \cdot \Delta B_y, \quad (3.13)$$

где  $f$  – фокусное расстояние объектива автоколлиматора,  $\Delta B_x$ ,  $\Delta B_y$  – координаты вектора разности  $\Delta B$  по осям  $OX$ ,  $OY$ .

После подстановки в выражения (3.12) и (3.13) двух координат вектора разности  $\Delta B_1$  по выражению (3.10) и одной (например,  $\Delta B_{3x}$ ) координаты вектора  $\Delta B_3$  по выражению (3.11), получена система линейных уравнений:

$$\Delta X_1 = f \cdot \left( -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_3 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_1 \right), \quad (3.14)$$

$$\Delta Y_1 = f \cdot \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_2 \right), \quad (3.15)$$

$$\Delta X_3 = f \cdot \left( \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_1 \right), \quad (3.16)$$

Полученные уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\left( -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_3 + 0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_1 \right) = \frac{\Delta X_1}{f}, \quad (3.17)$$

$$\left( \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_2 + 0 \right) = \frac{\Delta Y_1}{f}, \quad (3.18)$$

$$\left( \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) \cdot \Theta_3 + 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \cdot \Theta_1 \right) = \frac{\Delta X_3}{f}, \quad (3.19)$$

Полученная система линейных уравнений может быть записана в матричной форме.

В матричном уравнении (3.20)  $M_k$  – матрица коэффициентов исходной системы уравнений (3.19), которая задаётся выражением (3.21).

$$M_k \cdot \begin{bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_2 \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_1}{f} \\ \frac{\Delta Y_1}{f} \\ \frac{\Delta X_3}{f} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$M_k = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k+1) & 0 & \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) & \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k-1) & 0 \\ \sqrt{2} \cdot \delta \cdot (k-1) & 0 & -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \delta \cdot (k+1) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Очевидно, что измеряемые углы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  определяются как корни системы уравнений (3.20) :

$$\begin{bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_2 \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = M_k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_1}{f} \\ \frac{\Delta Y_1}{f} \\ \frac{\Delta X_3}{f} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где  $M_k^{-1}$  - матрица, обратная матрице коэффициентов:

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2} \cdot (k+1)}{8 \cdot \delta \cdot k} & 0 & -\frac{\sqrt{2} \cdot (k-1)}{8 \cdot \delta \cdot k} \\ \frac{k+1}{8 \cdot \delta \cdot k} & \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \delta \cdot (k-1)} & \frac{k-1}{8 \cdot \delta \cdot k} \\ -\frac{\sqrt{3} \cdot (k-1)}{8 \cdot \delta \cdot k} & 0 & -\frac{\sqrt{3} \cdot (k+1)}{8 \cdot \delta \cdot k} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

При подстановке обратной матрицы  $M_k^{-1}$  по выражению (3.23) в уравнение (3.22) получены алгоритмы измерения углов  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$ :

$$\Theta_3 = -\frac{\sqrt{2}}{8 \cdot \delta \cdot f \cdot k} (\Delta X_1 - \Delta X_3 + \Delta X_1 \cdot k + \Delta X_3 \cdot k), \quad (3.24)$$

$$\Theta_2 = \frac{\Delta X_3 - \Delta X_1 + \Delta X_1 \cdot k^2 + \Delta X_3 \cdot k^2 - 2 \cdot \Delta X_3 \cdot k + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \Delta Y_1 \cdot k}{8 \cdot \delta \cdot f \cdot k \cdot (k - 1)}, \quad (3.25)$$

$$\Theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{8 \cdot \delta \cdot f \cdot k} (\Delta X_3 - \Delta X_1 + \Delta X_1 \cdot k + \Delta X_3 \cdot k), \quad (3.26)$$

Полученные выражения (3.1),(3.7),(3.14),(3.15),(3.16), а также (3.24), (3.25) (3.26) составляют основу математической модели автоколлимационной системы измерения углов поворота  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  контролируемого объекта. На основе этой математической модели может быть сформирована имитационная двухпроходная модель.

### 3.1 Параметры элементов исследуемой автоколлимационной системы измерения трёх углов поворота объекта

Структура имитационной модели рассматриваемой автоколлимационной системы включает два прохода следующего содержания:

- на первом («прямом») проходе моделирования по выражениям (3.1),(3.7) задаются параметры отражателя и значения измеряемых углов  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ ;
- задаются детерминированные или случайные значения отклонений элементов автоколлиматора, например,  $f$  или  $\delta$  от номинальных значений;
- по выражениям (3.14),(3.15),(3.16) вычисляются смещения изображений по чувствительной площадке матричного фотоприёмника приёмного канала автоколлиматора, не равные номинальным из-за влияния отклонения параметров;
- на втором («обратном») проходе моделирования по выражениям (3.24), (3.25) (3.26), определяющим алгоритм измерения углов поворота при номинальных значениях параметров, вычисляются значения  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  углов поворота, «измеренных» автоколлимационной системой;
- разность  $d\Theta_1 = \Theta_1 - \theta_1, d\Theta_2 = \Theta_2 - \theta_2, d\Theta_3 = \Theta_3 - \theta_3$  между заданными и «измеренными» углами определяет погрешность измерения вследствие наличия отклонения параметров автоколлиматора от номинальных величин.

По рассмотренной методике формируется имитационная модель при выполнении лабораторной работы.

Выполним имитационное моделирование погрешностей формирования траектории лазерного пучка в случае, если структурная схема автоколлиматора соответствует рисунку 3.2, а параметры имеют значения, определяемые таблицей 3.1

### Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы

1. Алгоритмизация имитационной стохастической модели влияния отклонений параметров автоколлимационной системы на погрешность измерения трёх углов поворота объекта

2. Составление программного кода модели в технологии Matlab.

Таблица 3.1 Параметры элементов моделируемой автоколлимационной системы

№	Параметр	Значение	Распределение случайной величины
1	Количество элементов массива моделируемых случайных величин $n$	100	-
2	Величины измеряемых углов $\Theta_1$ , $\Theta_2$ , $\Theta_3$ , соответственно, град.	1; -1,5; 3	-
3	Отклонение от $90^\circ$ двугранного угла $\delta_2$ между гранями 2 и 3 отражателя, рад.	0,1	-
4	Коэффициент пересчёта к отклонению $\delta_3$ от $90^\circ$ градусов угла между гранями 3 и 1 $k$	2	-
5	Фокусное расстояние объектива автоколлиматора $f$ , мм	300	-
6	Размер стороны квадратного пикселя фотоприёмной матрицы $d$ , мм	0,003	-
7	Среднее квадратическое отклонение погрешности измерения координат изображений в долях пикселя $m$	0,1	Нормальное распределение
8	Верхняя граница возможного отклонения величины $\delta_2$ между гранями 2 и 3 отражателя от номинального значения $D\delta_{\max}$ , рад.	0,1	Равномерное распределение
9	Нижняя граница возможного отклонения величины $\delta_2$ между гранями 2 и 3 отражателя от номинального значения $D\delta_{\min}$ , рад.	-0,1	

3. Выполнение «нулевого» эксперимента, при котором отсутствуют отклонения параметров элементов автоколлимационной системы от номинальных значений. В результате должны быть зафиксированы величины погрешностей измерения всех трёх углов поворота, равные нулю.

4. Дополнение программного кода модели генераторами случайных величин, имитирующих отклонения параметров элементов автоколлимационной системы от номинальных значений.

5. Выполнение эксперимента со стохастической моделью, содержащей генераторы значений случайных величин, имитирующих отклонения параметров элементов автоколлимационной системы от номинальных величин. В ходе этого этапа сначала вычисляются смещения изображений по площадке матричного фотоприёмника при отклонении параметров автоколлимационной системы от номинальных значений (прямой проход алгоритма), а затем по этим смещениям в соответствии с алгоритмом измерения, содержащим номинальные значения параметров, вычисляются углы поворота  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , измеренные системой (обратный проход).

6. Сравнение углов поворота  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , определённых по алгоритму измерения с изначально заданными углами  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  поворота отражателя, получение численной оценки суммарной погрешности измерения углов поворота.

7. Оценка степени влияния на погрешность измерения углов различных составляющих суммарной погрешности измерения. Для выполнения этого этапа следует отключить участок кода модели, соответствующий формированию случайных отклонений одного из параметров автоколлиматора, после чего повторить этапы 5 и 6.

8. Формулирование выводов о степени влияния моделируемых отклонений параметров элементов автоколлимационной системы на величину суммарной погрешности измерения трёх углов поворота.

Выполнение Этапа 3. «Нулевой эксперимент при отсутствии отклонений параметров элементов автоколлимационной системы.

Программный код «нулевой» модели имеет следующий вид:

```
%Модель с номинальными значениями параметров элементов
% автоколлимационной системы измерения углов поворота
clear
deg = pi/180;%коэффициент пересчёта из угловых градусов
%в радианы
%Величины измеряемых углов
ТЕТА1 = 1*deg; %Угол поворота отражателя относительно
% оси ОХ1
ТЕТА2 = -1.5*deg;%Угол поворота отражателя относительно
% оси ОУ1
```

```

ТЕТА3 = 3*deg;%Угол поворота отражателя относительно
%оси OZ1
%Задание параметров элементов автоколлимационной системы
delta0 = 0.1;%Отклонение угла между гранями 2 и 3
%от 90 градусов

```

В соответствии с выражением (3.1) задаётся коэффициент пересчёта от величины  $\delta_2$  отклонения от  $90^\circ$  угла между гранями 2 и 3 отражателя к отклонению от  $90^\circ$  угла  $\delta_3$  между гранями 3 и 1

```

k=2;%Коэффициент пересчёта
f = 300;%Фокусное расстояние объектива автоколлиматора
d = 0.003;%Размер стороны квадратного пикселя
%фотоприёмной матрицы

```

При отсутствии погрешности изготовления отражателя отклонения  $\delta$  углов между отражающими гранями от  $90^\circ$  равны истинным значениям.

```

delta=delta0;

```

Расчёт смещений изображений марки автоколлиматора по чувствительной площадке матричного фотоприёмника в соответствии с выражениями (3.14) - (3.19).

```

% Коэффициенты в формулах расчёта смещений изображений марки
автоколлиматора на матричном фотоприёмнике

```

```

a1=sqrt(6)/3*delta0*(k-1);
b1=-sqrt(2)*delta0*(k+1);
c1=2*sqrt(3)/3*delta0*(k-1);
b2=sqrt(2)*delta0*(k-1);
c2=-2*sqrt(3)/3*delta0*(k+1);

```

```

%Расчёт смещений изображений марки по площадке
%матричного фотоприёмника

```

```

DX1=f*(b1*ТЕТА3+c1*ТЕТА1);%Смещение первого изображения
% по оси OX

```

```

DY1=f*(a1*ТЕТА3+c1*ТЕТА2);%Смещение первого изображения
%по оси OY

```

```

DX3=f*(b2*ТЕТА3+c2*ТЕТА1);%Смещение второго изображения
%по оси OX

```

При отсутствии шумов фотоприёмной матрицы измеренные смещения  $\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta X_3$ , изображений 1 и 3 равны истинным значениям смещений.

```

dX1=DX1;

```

```

dY1=DY1;

```

```

dX3=DX3;

```

Вычисление углов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  поворота отражателя, «измеренных» автоколлимационной системой в соответствии с алгоритмом (3.24),(3.25),(3.26)

```

tetal1=- (sqrt(3) / (8*delta0*f*k) ) * (dX3-dX1+k*(dX1+dX3) ) ;

```

```

teta2=(1/(8*delta0*f*k*(k-1)))*(dX3-dX1+k^2*(dX1+dX3)+
k*(4*sqrt(3)*dY1-2*dX3));
teta3=-(sqrt(2)/(8*delta0*f*k))*(dX1-dX3+k*(dX1+dX3));
%Расчёт погрешности измерения углов
dTETA1=TETA1-teta1
dTETA2=TETA2-teta2
dTETA3=TETA3-teta3

```

Получен результат:

```

dTETA1=0
dTETA2=0
dTETA3=0

```

При отсутствии отклонений параметров элементов автоколлимационной системы от номинальных значений погрешность измерения углов поворота равна нулю. «Нулевая» модель построена правильно!

Для выполнения этапов 5 и 6 лабораторной работы, соответствующих экспериментам с моделью при наличии случайных отклонений параметров элементов автоколлимационной системы необходимо выполнить следующие действия.

1. Синтезировать значение требуемых случайных величин отклонения параметра.

3. Подставить полученное значение случайной величины непосредственно в матричный оператор или прибавить его к параметру, отклонение которого моделируется.

4. Выполнить расчёт смещений изображений по чувствительной площадке матричного фотоприёмника.

5. В соответствии с алгоритмом вычислить углы, «измеренные» автоколлимационной системой.

В соответствии с Таблицей 3.1 одна из случайных величин, имитирующая несовпадение величины  $\delta$  отклонения углов между гранями отражателя от  $90^\circ$ , имеет равномерное распределение, причём указаны границы интервала  $[a,b]$ , в которых эта случайная величина изменяется. Моделирование этой равномерно распределённой величины выполняется по алгоритму (2.22).

Фактически величина отклонения угла  $\delta$ , описывающего величину неравенства угла между гранями отражателя прямому углу (угол между гранями рассматриваемого отражателя равен  $90^\circ - \delta$ ), является детерминированной величиной, обусловленной технологией изготовления отражателя. Однако, поскольку известны только поля допуска на изготовление отражателя, а конкретная величина угла  $\delta$  неизвестна, величина  $\delta$  рандомизируется, и, соответственно, она рассматривается при моделировании как случайная величина, значение которой находится внутри интервала, определяемого полями допуска.

Вторая случайная величина – отклонение измеренных координат от истинных значений вследствие шумов фотоприёмной матрицы по своей природе является случайной, имеет нормальное распределение и моделируется по выражению (2.34).

Отклонение от номинальной величины других параметров автоколлимационной системы, например, фокусного расстояния объектива автоколлиматора, в рассматриваемом варианте лабораторной работы не выполняется.

Программный код стохастической имитационной модели имеет вид:

```
%Модель с отклонением параметров элементов
%автоколлимационной системы от номинальных значений
clear
n = 100; %Количество моделируемых значений
случайных %величин
deg = pi/180;%коэффициент пересчёта угловых градусов в
%радианы
%Величины измеряемых углов
ТЕТА1 = 1*deg; %Угол поворота отражателя относительно
%оси OX1
ТЕТА2 = -1.5*deg;%Угол поворота отражателя относительно
%оси OY1
ТЕТА3 = 3*deg;%Угол поворота отражателя относительно
%оси OZ1
%Задание параметров элементов автоколлимационной системы
delta0 = 0.01;%Отклонение от 90 градусов угла между
% гранями 2 и 3 отражателя в радианах
k=2;%Кoeffициент пересчёта delta к отклонению
%от 90 градусов угла между гранями 3 и 1
f = 300;%Фокусное расстояние объектива автоколлиматора
d = 0.003;%Размер стороны квадратного пикселя
%фотоприёмной матрицы
```

Данные об отклонении параметров автоколлимационной системы от номинальных значений

```
m=0.1;%Среднее квадратическое отклонение погрешности
%измерения координат изображения на матричном
фотоприёмнике %в долях пикселя
```

Вычисление среднего квадратического отклонения погрешности измерения координат изображения на матричном фотоприёмнике в миллиметрах.

```
sigma=m*d;
%Верхняя граница возможного отклонения величины delta0 от
%номинального значения
```

```

Ddeltamax=0.01;%Значение в радианах
%Нижняя граница возможного отклонения величины delta0 от
%номинального значения
Ddeltamin=-0.01;%Значение в радианах
    Моделирование n значений случайной величины погрешности
отклонения  $\delta$  углов между от гранями отражателя от номинального значения
z=rand(1,n);%массив n значений случайной величины с
%равномерным распределением в интервале [0,1]
Z=Ddeltamin+(Ddeltamax-Ddeltamin)*z;
    Вычисление n значений элементов массива случайной величины Z
погрешности отклонения углов  $\delta$  между гранями отражателя от номинального
значения
delta=delta0+Z;%Отклонение от 90 градусов угла между гранями
отражателя, содержащее погрешность
% Коэффициенты выражений для расчёта смещений изображений
% марки автоколлиматора на матричном фотоприёмнике
%, содержащие погрешность угла delta
a1=sqrt(6)/3*delta*(k-1);
b1=-sqrt(2)*delta*(k+1);
c1=2*sqrt(3)/3*delta*(k-1);
b2=sqrt(2)*delta*(k-1);
c2=-2*sqrt(3)/3*delta*(k+1);
%Расчёт смещений изображений марки по площадке
% матричного фотоприёмника
DX1=f*(b1*ТЕТА3+c1*ТЕТА1);%Смещение первого изображения
%по оси OX
DY1=f*(a1*ТЕТА3+c1*ТЕТА2);%Смещение первого изображения по
% оси OY
DX3=f*(b2*ТЕТА3+c2*ТЕТА1);%Смещение второго изображения по
% оси OX
    Моделирование случайной погрешности измерения координат первого
изображения вследствие шумов по оси OX
Z1=randn(1,n);
x1=Z1*sigma;
    Моделирование случайной погрешности измерения координат первого
изображения вследствие шумов по оси OY
Z2=randn(1,n);
y1=Z2*sigma;
    Моделирование случайной погрешности измерения координат второго
изображения вследствие шумов по оси OX
Z3=randn(1,n);
X3=Z3*sigma;

```

Измеренные величины смещения изображений на матричном фотоприёмнике, содержащие погрешность измерения.

$$dX1=DX1+x1;$$

$$dY1=DY1+y1;$$

$$dX2=DX2+x2;$$

Вычисление углов поворота отражателя, измеренных автоколлимационной системой

$$teta1=-(\text{sqrt}(3)/(8*\text{delta}0*f*k))*(dX3-dX1+k*(dX1+dX3));$$

$$teta2=(1/(8*\text{delta}0*f*k*(k-1)))*(dX3-dX1+k^2*(dX1+dX3)+k*(4*\text{sqrt}(3)*dY1-2*dX3));$$

$$teta3=-(\text{sqrt}(2)/(8*\text{delta}0*f*k))*(dX1-dX3+k*(dX1+dX3));$$

Расчёт массива погрешностей измерения углов

$$dTETA1=TETA1-teta1;$$

$$dTETA2=TETA2-teta2;$$

$$dTETA3=TETA3-teta3;$$

Для визуального контроля функционирования стохастической модели строится график зависимости погрешности измерения угла  $\Theta_1$  от номера случайных величин отклонений параметров от номинальных значений.

```
figure('Color','w')
```

```
%Графическое изображение массива погрешности измерения  
%угла TETA1
```

```
plot(dTETA1,'black','LineWidth',1)
```

График изображён на рисунке 3.5.

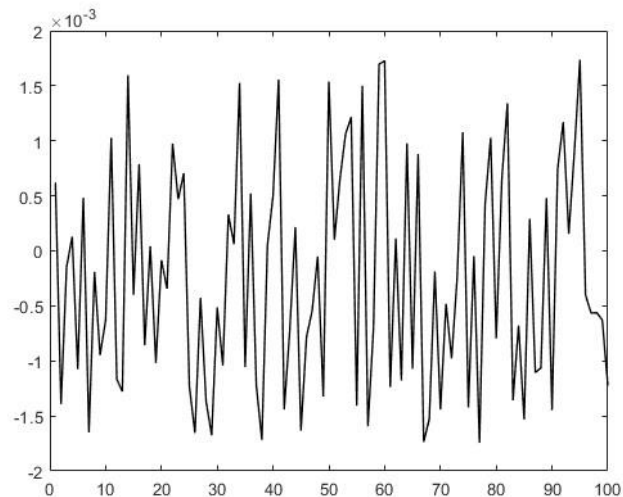


Рисунок 3.5 – Погрешность измерения угла  $\Theta_1$  при отклонении параметров двух элементов автоколлимационной системы от номинальных значений

На этапе 6 выполняется оценка среднего квадратического отклонения погрешности измерения углов  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  поворота отражателя.

```
%Расчёт среднеквадратического отклонения
```

```

%погрешности измерения углов поворота отражателя
ErrTETA1=std(dTETA1)
ErrTETA2=std(dTETA2)
ErrTETA3=std(dTETA3)

```

Получены следующие результаты расчёта оценки суммарной погрешности

```

ErrTETA1 =
    0.0100 «радианы»
ErrTETA2 =
    0.0151 «радианы»
ErrTETA3 =
    0.0301 «радианы»

```

В соответствии с этапом 7 выполнения лабораторной работы определяется степень влияния двух рассмотренных погрешностей на суммарную погрешность углов поворота. Для этого обнуляется влияние одной из них, например, посредством «отключения» генератора случайной величины несовпадения отклонения  $\delta$  углов между отражающими гранями от  $90^\circ$ . Для этого в программный код вносятся следующие изменения:

```

delta=delta0+Z;%Отклонение от 90 градусов угла между гранями
отражателя, содержащее погрешность
delta = delta0

```

Для контроля правильности функционирования стохастической модели строится график погрешности измерения угла  $\Theta_1$  (Рисунок 3.6).

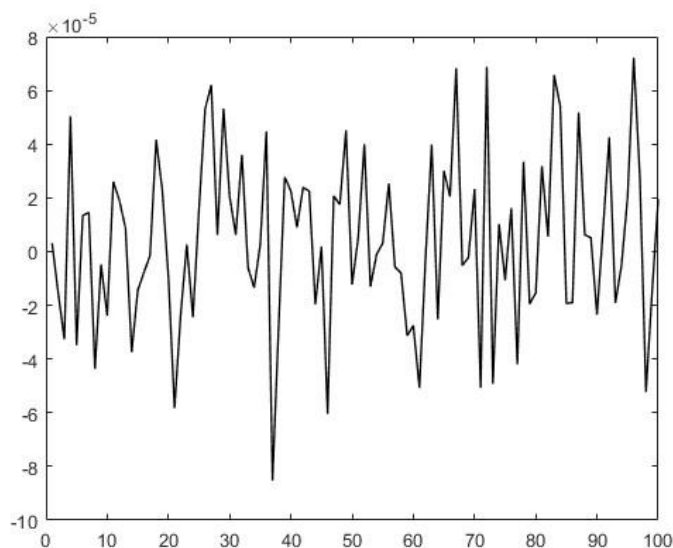


Рисунок 3.6 – Погрешность измерения угла  $\Theta_1$  при отклонении параметров одного элемента автоколлимационной системы от номинального значения

Получены следующие результаты расчёта оценки суммарной погрешности:

```

ErrTETA1 =

```

$$\text{ErrTETA2} = \frac{3.1907e-05}{8.5327e-05}$$

$$\text{ErrTETA3} = \frac{8.5327e-05}{2.8140e-05}$$

На этапе 8 выполняется анализ полученных результатов. Из сравнения полученных результатов с результатами при несовпадении отклонения  $\delta$  углов между гранями от  $90^\circ$  от номинальных величин следует, что именно это отклонение наиболее сильно (практически на 2 порядка) влияет на величину суммарной погрешности измерения углов  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  поворота отражателя по сравнению с погрешностью измерения координат изображений.

### Контрольные вопросы

1. К какому типу относится алгоритм выполнения лабораторной работы по исследованию параметрической чувствительности автоколлимационной углоизмерительной системы – однонаправленному или двунаправленному? В чем конкретно заключается различие этих типов алгоритмов моделирования?

2. Отклонение каких параметров автоколлимационной системы от номинального значения моделируется в рассмотренном варианте выполнения лабораторной работы? Какие другие параметры могут быть рассмотрены как источники случайных погрешностей измерения в других вариантах модели автоколлимационной системы?

3. Отклонение величины какого параметра автоколлимационной системы моделировалось по методике моделирования случайных величин, хотя фактически сама величина параметра является детерминированной? Поясните необходимость использования методики рандомизации при моделировании отклонений от номинальных величин детерминированных величин параметров в подобных случаях.

4. Какова особенность специального триэдра, используемого в качестве отражателя при трёхкоординатных угловых измерениях? В чем заключается его отличие от традиционного прямоугольного триэдра?

5. Поясните, какие изменения следует внести в программный код «нулевой» модели для исследования влияния случайных отклонений параметров элементов автоколлимационной системы.

6. Как следует изменить модель для анализа влияния отдельных случайных отклонений параметров автоколлиматора от номинальных значений?

7. Какие характеристики используются для итоговой оценки влияния случайных отклонений параметров элементов исследуемой системы от номинальных значений?

## Заключение

В учебно-методическом пособии рассмотрены методики и алгоритмы построения имитационных детерминированных и стохастических моделей при выполнении процедуры анализа параметрической чувствительности оптико-цифровых систем. В первой части изложены основные понятия и определения моделирования как проектной процедуры анализа и синтеза на системотехническом уровне проектирования. Приведена классификация проектных моделей, даны определения и рассмотрены основные свойства каждого вида. Рассмотрены два основных типа имитационных проектных моделей – однонаправленная и двунаправленная, указаны виды ОЦС, при проектировании которых используются каждый из этих видов.

Во второй и третьей частях пособия изложены теоретические основы и методики построения имитационных стохастических моделей анализа параметрической чувствительности двух типовых ОЦС – генерации оптических спецэффектов методом сканирования лазерного пучка и автоколлимационной системы измерения угловых деформаций объектов. При этом модель первой системы построена по однонаправленному типу, вторая – по двунаправленному. Помимо вопросов собственно моделирования, изложены теоретические основы функционирования отражательных систем различных классов: сдвоенные зеркала, двугранное зеркало, зеркальный триэдр, а также описание их действия при поворотах относительно координатных осей, а также произвольно ориентированных осей. Рассмотренные теоретические положения могут найти применение для построения проектных моделей других ОЦС, оптическая схема которых включает отражающие компоненты.

Предлагаемые лабораторные работы позволяют получить практические навыки по расчету параметров стохастических моделей, а также умение создания программного кода компьютерных моделей в технологии Matlab.

Соответственно, рассмотренные примеры реализации стохастических моделей в MatLab могут использоваться не только для анализа параметрической чувствительности и анализа влияния составляющих погрешности измерения углов автоколлимационным методом, но и для параметрического синтеза в других процедурах компьютерного проектирования, в частности, оценки эффективности цифровой фильтрации.

Разделы 2 и 3, относящиеся к методам имитационного стохастического моделирования, могут быть рекомендованы аспирантам, занимающимся построением моделей для исследования ОЦС различного назначения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коняхин И.А. Статистические модели проектирования оптико-электронных систем — СПб: Университет ИТМО, 2023. - 60 с.
2. Коняхин И.А. Статистическое моделирование оптико-электронных систем (определение параметров надёжности)— СПб: Университет ИТМО, 2020. – 70 с.
3. Vanderwerf F. Dennis , Applied prismatic and reflective optics. - Bellingham, Washington, USA : SPIE Press, 2010. – 303 p.
4. Бронштейн Ю.Л. Геометрия и юстировка крупных зеркальных систем. – М.:ДПК Пресс, 2020. – 820 с. ил.
5. Дьяконов В.П. MatLab. Полный самоучитель. - М: ДМК Пресс, 2019.- 768 с. ил
6. Коняхин И.А., Тургалиева Т.В. Экспериментальное исследование информационно-измерительных оптико-электронных систем (углоизмерительные автоколлиматоры): Учебно-методическое пособие. – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. – 71 с

Коняхин Игорь Алексеевич

**Анализ параметрической чувствительности  
оптико-цифровых систем методом имитационного  
моделирования**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А