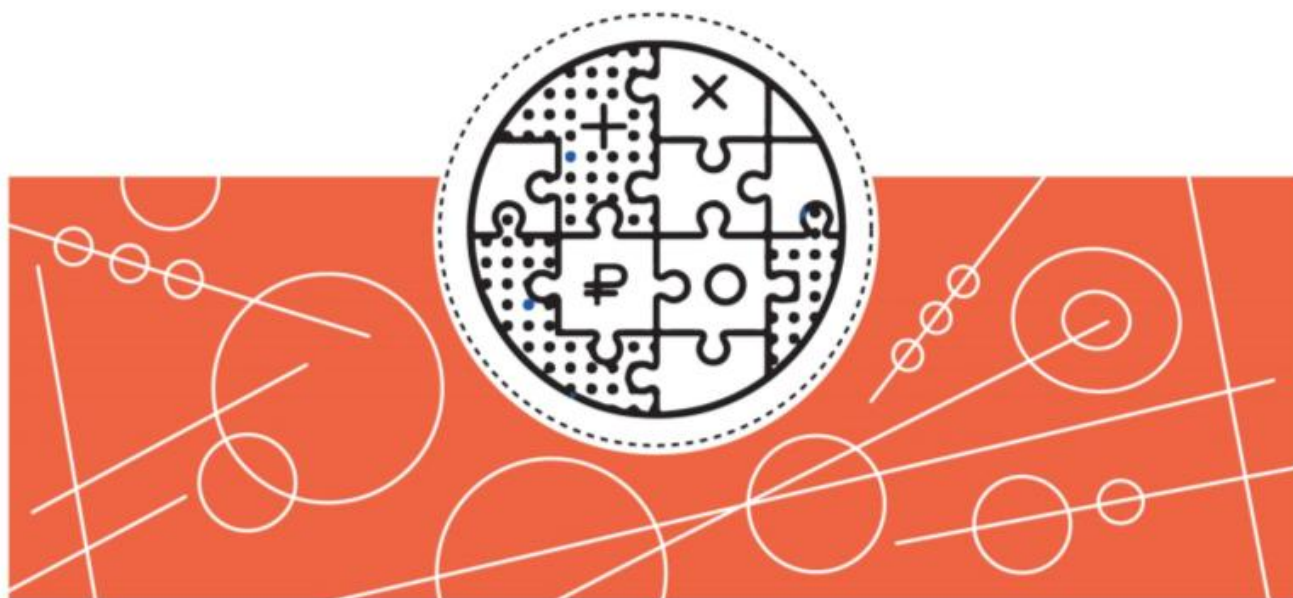


ІІТМО

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ I СЕМЕСТР



Санкт-Петербург
2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
1 СЕМЕСТР**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ
ИТМО

по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и
технологии

в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург

2026

Введение в математический анализ 1 семестр/ Бровкина Е.А., Брылевская Л.И., Зубок Д.А.[и др.]– СПб: Университет ИТМО, 2026. – 175 с.

Рецензент(ы):

Попков Роман Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") факультета технологий искусственного интеллекта, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие адресовано студентам бакалавриата по направлению подготовки 09.03.02. Содержит справочные сведения, примеры решения задач основных типов по темам «Множества и вещественные числа», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции». Приведены задачи и упражнения для самостоятельного решения, которые могут быть использованы как для аудиторной работы, так и для индивидуальных заданий. В пособие включены как типовые, так и содержательные задачи, решение которых позволит студенту углубить понимание курса и расширить свой математический кругозор.

ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

©Университет ИТМО, 2026

©Бровкина Е.А., Брылевская Л.И., Зубок Д.А., Ржонсницкая Ю.Б.,
Тертычный В.Ю., 2026

Оглавление

1	Множества. Вещественные числа	9
1.1	Интуитивная теория множеств	11
1.1.1	Задачи	14
1.2	Функции, биекции	17
1.2.1	Виды отображений	19
1.2.2	Задачи: Функции и отображения	21
1.2.3	Композиция функций. Обратная функция	23
1.2.4	Отношения	26
1.2.5	Задачи: Свойства отношений	28
1.3	Множество натуральных чисел. Индукция	29
1.4	Аксиомы Джузеппе Пеано	30
1.4.1	Действия сложения и умножения в \mathbb{N}	32
1.4.2	Порядок на \mathbb{N}	33
1.4.3	Математическая индукция	36
1.4.4	Примеры	37
1.4.5	Задачи	40
1.5	Мощность множества. Счетные множества	43
1.5.1	Замечательная теорема Кантора	45
1.5.2	Задачи	47
1.6	Целые и рациональные числа	49
1.6.1	Понятие поля	51
1.6.2	Простейшие примеры полей	52
1.6.3	Задачи: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} и Поля	53

1.7	Упорядоченное поле	55
1.7.1	Задачи	56
1.8	Принцип полноты.	
	Вещественные числа	57
1.8.1	Принцип полноты.	57
1.8.2	Неполнота множества рациональных чисел	59
1.8.3	Определение множества вещественных чисел	60
1.9	Свойства поля вещественных чисел \mathbb{R}	63
1.9.1	Верхняя (нижняя) грань числового множества	63
1.9.2	Задачи	66
1.10	Модели поля \mathbb{R}	67
1.11	Следствия из аксиомы полноты	68
1.11.1	Принцип Архимеда	68
1.11.2	Лемма о вложенных и стягивающихся отрезках	71
1.11.3	Конечное покрытие (Принцип Бореля - Лебега)	75
1.11.4	Предельная точка	77
1.11.5	Задачи	78
1.11.6	Задачи	81
1.11.7	Дополнительные задачи	83
1.12	Топология числовой прямой	85
2	Предел последовательности	89
2.1	Предел последовательности: от интуиции к стро- гости	89
2.2	Понятие последовательности	93
2.2.1	Способы задания последовательностей	93
2.3	Ограниченные и неограниченные последователь- ности	97
2.4	Монотонные последовательности	98
2.4.1	Задачи	99
2.4.2	Задачи*	100

2.5	Предел числовой последовательности: формальный подход	101
2.5.1	Определение на языке $\varepsilon - N$	101
2.5.2	Геометрическая интерпретация	102
2.5.3	Примеры	103
2.5.4	Задачи	104
2.6	Основные теоремы о пределах	105
2.6.1	Теорема о единственности предела	105
2.6.2	Теорема об ограниченности сходящейся последовательности	106
2.6.3	Арифметические свойства пределов	106
2.7	Предельный переход в неравенствах	109
2.7.1	Теорема о двух милиционерах (о зажатой последовательности)	110
2.7.2	Задачи	111
2.8	Существование предела	112
2.8.1	Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности	113
2.8.2	Второй замечательный предел	114
2.8.3	Задачи	116
2.8.4	Задачи на критерий Коши	118
2.9	Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	119
2.9.1	Связь между БМП и ББП	120
2.9.2	Сравнение БМП (O-символика)	121
2.9.3	Задачи	125
2.10	Полезные теоремы о последовательностях	126
2.10.1	Теорема Коши о связи пределов	126
2.10.2	Задачи	128
2.10.3	Теорема Штольца	128
2.11	Подпоследовательности и теорема Больцано – Вейерштрасса	130

2.11.1	Теорема	
	Больцано – Вейерштрасса	130
2.11.2	Частичные пределы	131
2.11.3	Задачи	133
2.12	Вычислительный практикум:	
	Пределы последовательностей	133
3	Предел и непрерывность функции	138
3.1	Предел функции в точке	138
3.2	Свойства предела функции	145
3.3	Односторонние пределы в точках	146
3.4	Замечательные пределы	149
3.4.1	Первый замечательный предел	149
3.4.2	Второй замечательный предел	150
3.4.3	Дополнительные замечательные пределы	152
3.5	Бесконечно малые функции	152
3.5.1	Сравнение бесконечно малых функций	153
3.6	Эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$	155
3.7	Бесконечно большие функции	157
3.8	Неопределённости	157
3.8.1	Непрерывность функции	158
3.8.2	Односторонняя непрерывность	160
3.9	Основные свойства функции, непрерывной на отрезке	161
3.10	Точки разрыва	162
3.10.1	Классификация точек разрыва функции	162
3.11	Задачи для самостоятельного решения	166

Введение

Учебное пособие «Введение в математический анализ» охватывает темы «Множества и вещественные числа», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции» и предназначено для студентов, обучающихся по программе топ-уровня в области информационных технологий «Разработка программного обеспечения / Software Engineering».

Основой для данного пособия служит курс лекций по математическому анализу, читаемый на первом курсе студентам ФИТИП. Целью является помощь первокурсникам в изучении теоретических основ предмета и их применении в решении практических задач. Изложение сопровождается историческими замечаниями, которые подсвечивают логику развития математического анализа от задач вычисления площадей и объемов к дифференциальному и интегральному исчислению, от понятия бесконечно малых к аксиоматическому построению множества натуральных и вещественных чисел.

Пособие не заменяет курс лекций, а дополняет его, так как акцент перенесен со строгого изложения теории на большое количество примеров, а задачи, приведенные в конце каждого раздела, позволяют проявить инициативу в изучении предмета. По словам Анри Пуанкаре, «с помощью логики доказывают, с помощью интуиции изобретают». Он подчеркивал, что чисто формальный путь в обучении убивает творческое начало, превращая математику в сухой перебор правил.

Глава 1

Множества. Вещественные числа

Число в математике, как время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам.

В.А. Зорич

Математический анализ – это больше, чем просто набор теорем, определений, задач и методов, это стиль мышления. Корни математического анализа уходят глубоко в античность – в труды Архимеда и других древнегреческих геометров, которые разработали методы нахождения площадей, объёмов, центров тяжести, длин дуг и касательных к кривым.

В семнадцатом веке эти методы получили дальнейшее развитие, достигнув вершины – изобретения интегрального и дифференциального исчисления Ньютоном и Лейбницем.

В восемнадцатом веке трудами великих математиков Леонарда Эйлера, Жана ле Рона Даламбера, семейства Бернулли, Жозефа-Луи Лагранжа, Пьера-Симона Лапласа, Мишеля Ролля математический анализ превратился в инструмент огромной вычислительной мощности. Наступил расцвет математического анализа, возникли теория дифференциальных уравнений, числовых и функциональных рядов, комплексный анализ, вариационное исчисление, математическая физика и многое другое.

Но в то же время основа анализа – его логическое обоснование – оставалась в подвешенном состоянии. Понятия бесконечности, непрерывности, предела и даже числа не имели однозначных определений, а вместо доказательств приводились примеры и интуитивные рассуждения.

В девятнадцатом веке задача обоснования математического анализа была поставлена прямо и решена.

В 1821 г. Огюстен Луи Коши¹ вводит новые требования к строгости в своем Cours d'analyse de l'École royale polytechnique – первом учебнике математического анализа.

Этот труд впервые систематизировал и строго обосновал многие понятия, включая пределы, непрерывность и производную, интеграл, сумму ряда.

Коши поставил следующие вопросы и ответил на них:

Что такое производная? Ответ: предел.

Что такое интеграл? Ответ: предел.

Что такое бесконечный ряд? Ответ: предел.

Отсюда следует вопрос: Что такое предел? Ответ: число.

И, наконец, последний вопрос: Что такое число?²

Около 1870-1872 гг. Вейерштрасс, Гейне и Кантор ответили на этот вопрос.

Карл Вейерштрасс сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории вещественных чисел и так называемого $\varepsilon - \delta$ -языка.³

Первое строгое определение вещественных чисел было дано в работах Дедекинда, Вейерштрасса и Гейне в 1860-х годах.

Позже появилась теория множеств как результат работ Кантора, Пеано и Фреге, и под понятия натурального и вещественного числа был подведен фундамент из аксиом.



¹ Огюстен Луи Коши рекордсмен по количеству доказанных теорем. Он строго вывел почти все результаты математического анализа. До него утверждения обосновывались только рассуждениями и примерами.

² Э. Хайрер Г. Ваннер Математический анализ в свете его истории

³ Анри Пуанкаре: «Вейерштрасс отказывается пользоваться интуицией или по крайней мере оставляет ей только ту часть, которую не может у неё отнять»

Интуитивная теория множеств

«Множество — это большое количество, которое позволяет воспринимать себя как одно»

Георг Кантор



Георг Кантор в 1870 году.

Георгу Кантору принадлежит высказывание: «Множество — это соединение в целое определенных различных объектов нашей интуиции или нашего мышления. Эти объекты называются точками полученного множества»⁴.

⁴ К сожалению, такое широкое толкование понятия множество приводит к парадоксам...

Опр. 1 Между *элементом* x и *множеством* A задано бинарное отношение — *отношение принадлежности*. Запись $x \in A$ означает, что x является элементом множества A .

Замечание Исходные принципы канторовской («наивной») теории множеств заключаются в следующем:

1. множество может состоять из *любых различных объектов*;
2. множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;
3. *любое свойство* определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Рассмотрим классический *парадокс*, иллюстрирующий противоречивость такого слишком свободного определения.

Парадокс Рассела

Пример 1 Пусть U — множество всех множеств. Определим множество

$$A = \{x \mid x \notin x\},$$

то есть множество таких множеств, которые не содержат себя самого в качестве элемента (а возможно ли в *наивной теории* задать множество, которое содержит себя в качестве элемента?)⁵. Возникает вопрос: принадлежит ли A са-

⁵ Да, например, множество всех множеств, которые можно определить с помощью фразы, содержащей не более двадцати слов.

мому себе, то есть верно ли, что $A \in A$?

- Если предположить, что $A \in A$ то по определению множества A оно не должно быть элементом A . Получаем противоречие ($A \in A \implies A \notin A$).
- Если предположить, что $A \notin A$, то по определению A оно обязано быть элементом A . Снова противоречие ($A \notin A \implies A \in A$).

Таким образом, получили: $A \in A \iff A \notin A$. Этот пример показывает, что наивная теория множеств внутренне противоречива.

Замечание

Современная математика использует **аксиоматику Цермело-Френкеля (ZF)**, которая запрещает такие самореферентные конструкции. В аксиоматической теории «множество» и «элемент» — неопределяемые понятия, а их свойства регулируются аксиомами, позволяющими избегать парадоксов.

Опр. 2 (Подмножество и включение)

Если все элементы множества A являются также элементами множества B , то A является подмножеством B (запись: $A \subseteq B$). Множество является подмножеством самого себя ($A \subseteq A$).

Опр. 3 (Равенство множеств)

Множества A и B равны (запись: $A = B$), если они содержат одни и те же элементы (другими словами, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).

Опр. 4 (Собственное подмножество)

Если A — подмножество B , не равное всему B , то A называют собственным подмножеством B (запись: $A \subset B$).

Опр. 5 *Пустое множество*⁶ — это множество, которое не содержит элементов. Оно обозначается \emptyset . Для любого объекта x $x \notin \emptyset$, следовательно, $\emptyset = \{\}$.

⁶ Заметим, что пустое множество — это не **ничто**, лучший образ для него — пустой мешок. Однако это не то же самое, что пустота в пустом мешке! 😊

Пример 2 Пусть $S = \{1, 2\}$. Перечислим все подмножества S : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

Пример 3 $A = \{1, 2, \emptyset\}$ – это множество содержит три элемента: числа один и два и пустое множество.

Пример 4 $B = \{\emptyset\}$ ⁷ – это множество не является пустым множеством, оно содержит один элемент, а именно пустое множество.

Пример 5 $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ – это множество содержит два элемента: пустое множество и множество, которое содержит пустое множество (множество B из примера выше).

⁷ Множество B можно представить как пустой мешок в мешке.

Опр. 6 (Декартово произведение)
 Декартово произведение A и B , обозначаемое как $A \times B$ – это множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары (a, b) , где $a \in A$, а $b \in B$.

Опр. 7 Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B . Это записывают так:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

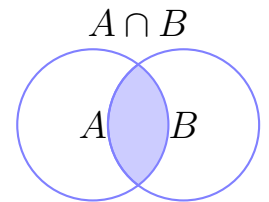


Рис. 1.1. Пересечение

Опр. 8 Объединение $A \cup B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

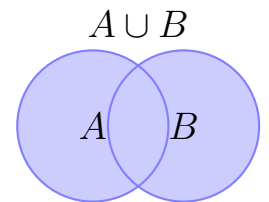


Рис. 1.2. Объединение

Опр. 9 Разность $A \setminus B$ состоит из элементов, которые принадлежат A , но не принадлежат B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если множество B является подмножеством множества A , разность $A \setminus B$ называют также **дополнением B до A** .

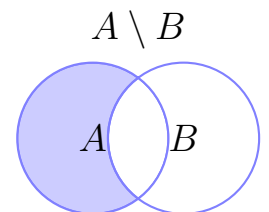


Рис. 1.3. Разность

Опр. 10 Дополнение \bar{A} множества A состоит из элементов, которые не принадлежат множеству A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Опр. 11 *Симметрическая разность* $A \Delta B$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Опр. 12 *Булеан* 2^A (или $\mathcal{P}(A)$) множества A состоит из всех подмножеств множества A .

Пример 6 $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
Обратите внимание, что если множество A содержит n элементов, то $\mathcal{P}(A)$ содержит 2^n элементов.

Пример 7 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Пример 8 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ПОДРАЗДЕЛ 1.1.1

Задачи

Задача 1. Булевы операции и логика

Пусть U — множество пользователей онлайн-сервиса. A — пользователи, купившие подписку в декабре. B — пользователи, активные более 10 дней в декабре. Опишите словами следующие множества:

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $B \setminus A$
4. $A \Delta B$
5. $\bar{A} \cap \bar{B}$

Задача 2. Докажите *законы де Моргана*, используя определения операций над множествами (например, через при-

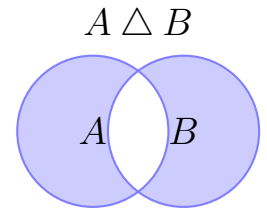


Рис. 1.4. Симметрическая разность

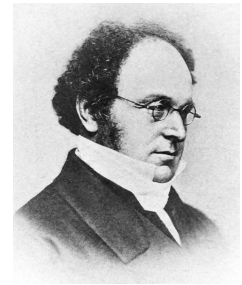
надлежность элемента):

$$1. \overline{(B \cup C)} = \bar{B} \cap \bar{C},$$

$$2. \overline{(B \cap C)} = \bar{B} \cup \bar{C},$$

$$3. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$4. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$



Огастес де Морган.

Задача 3. а) Докажите, что пустое множество является подмножеством любого множества.

б) Докажите, что пустое множество единственно.

Задача 4. Свойства булеана

Докажите утверждение: Пусть A, B — множества. Тогда $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Задача 5. Сколько а) элементов; б) подмножеств у каждого из следующих множеств:

$$\{0\}, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, 3\}?$$

Задача 6. Может ли у множества быть ровно а) 0; б) 7; в) 16 подмножеств?

Задача 7. * Может ли у множества A быть ровно на 2000 подмножеств больше, чем у множества B ?

Задача 8. * Может ли у множества A быть ровно 2000 подмножеств, не являющихся ни подмножествами множества B , ни подмножествами множества C ?

Задача 9. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Задача 10. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Задача 11. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов — и во сколько раз?

Задача 12. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности? (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.) Тот же вопрос для трёх множеств.

Задача 13.

Проверьте соотношения

1. $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Leftrightarrow ((A \cup B) \subset C)$;
2. $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow (C \subset (A \cap B))$;
3. $\overline{\overline{A}} = A$;
4. $(A \subset \overline{B}) \Leftrightarrow (B \subset \overline{A})$;
5. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{A} \supset \overline{B})$.

Задача 14. Покажите, что

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) := A \cup B \cap C$;
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Задача 15. Проиллюстрируйте геометрически декартово про-

извлечение

1. двух отрезков (прямоугольник);
2. двух прямых (плоскость);
3. прямой и окружности (цилиндрическая поверхность);

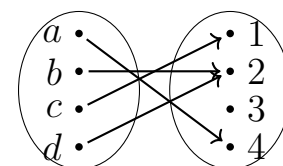
РАЗДЕЛ 1.2

Функции, биекции

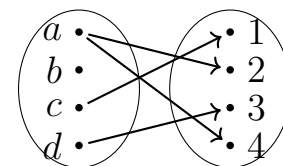
Идея сравнения размеров двух множеств, в том числе бесконечных, заключается в построении **взаимно-однозначного отображения** между этими множествами. Если такое отображение существует, то множества имеют одинаковую **мощность**.

Пусть A и B – множества.

Опр. 13 **Функция** $f : A \rightarrow B$ – это отображение, сопоставляющее $\forall x \in A$ **единственный** элемент B , обозначаемый $f(x)$.



Функция



Не функция

Замечание Важно помнить два ключевых свойства функции:

1. **Определенность:** Каждый элемент из A должен быть куда-то отображен (область определения $Dom(f) = A$).
2. **Однозначность:** У одного элемента не может быть двух разных образов.

Пусть $f : A \rightarrow B$.

Опр. 14 **Прообразом** подмножества $D \subset B$ называется множество всех элементов $x \in A$, для которых $f(x) \in D$. Оно обозначается $f^{-1}(D)$:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Опр. 15 *Образом* множества $C \subset A$ называется множество всех значений функции f на всех элементах множества C . Оно обозначается $f(C)$:

$$f(C) = \{f(a) | a \in C\} = \{b \in B | f(a) = b \text{ для некоторого } a \in C\}.$$

Задача 16. Образы и прообразы. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как $f(x) = x^2$. Найдите:

1. $f([0, 4])$
2. $f([-3, -1] \cup [1, 2])$
3. $f^{-1}(\{0\})$
4. $f^{-1}(\{1\})$
5. $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$
6. $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$
7. $f^{-1}(\{-1\})$
8. $f^{-1}([-4, -1])$

Задача 17. Докажите, что если

$$f : E \rightarrow F \text{ и } A \subset E, B \subset E,$$

то справедливо равенство

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Задача 18. Пусть $f : A \rightarrow B$, и пусть

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq A, D_1 \subseteq D_2 \subseteq B.$$

Докажите, что

$$f(C_1) \subseteq f(C_2)$$

и

$$f^{-1}(D_1) \subseteq f^{-1}(D_2).$$

Задача 19. Пусть $f(x) = x^2$. Найти образ отрезка $A = [-1, 2]$ и прообраз интервала $B = (1, 4)$.

Задача 20. Найти прообраз полуинтервала $B = [0, 1)$ для функции $f(x) = \sin(x)$.

Задача 21. Дана характеристическая функция (функция Дирихле) $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, равная 1, если $x \in \mathbb{Q}$, и 0, если $x \notin \mathbb{Q}$. Найти образ отрезка $[0, 1]$ и прообраз множества $\{1\}$.

Задача 22. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задана как $f(x, y) = x^2 + y^2$. Описать прообраз множества $B = \{1\}$ и $B = [1, 4]$.

Задача 23. Доказать или опровергнуть на примере:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

ПОДРАЗДЕЛ 1.2.1

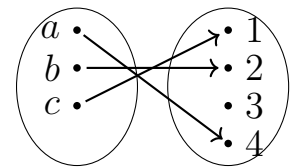
Виды отображений

Определим 3 важных типа отображений.

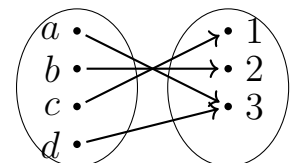
Опр. 16 Пусть $f : X \rightarrow Y$. f называется **инъективным** или «отображением в», если оно сопоставляет разным элементам множества A разные образы:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Пример 9 Отображение IP-адресов в имена хостов в DNS — инъекция. Двум разным хостам не может соответствовать один IP-адрес.



Инъекция, но не сюръекция



Сюръекция, но не инъекция

Опр. 17 f называется **сюръективным** или «отображением на», если у каждого элемента множества Y есть прообраз в множестве X : $f(X) = Y$.

Пример 10 Отображение логинов пользователей в их email-адреса для системы рассылки — сюръекция, так как каждый email в системе должен кому-то принадлежать.

Опр. 18 f называется **биективным** или **взаимно-однозначным**, если оно инъективно и сюръективно.

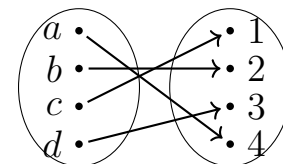
Пример 11 Ключ шифрования (например, AES) создает биекцию между исходным сообщением и зашифрованным текстом. Это значит, что для каждого зашифрованного блока существует ровно один исходный блок, который можно однозначно восстановить.

Опр. 19 Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ биективна. **Обратной** к f называется функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$, которая присваивает каждому $y \in Y$ единственное значение $x \in X$ так, что $f(x) = y$. Заметим, что $f(f^{-1}(x)) = x$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

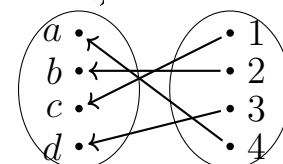
Замечание В силу сюръективности f , такой элемент $x \in X$ найдется, а ввиду инъективности f он единственный. Таким образом, отображение f^{-1} определено корректно. Свойство двух отображений быть обратными является взаимным: если f^{-1} обратное для f , то f обратное для f^{-1} .

Замечание Символ $f^{-1}(B)$ прообраза множества $B \subset Y$ не следует путать с символом f^{-1} обратной функции⁸.

К тому же прообраз множества определен для любого отображения $f : X \rightarrow Y$, даже если оно не является биективным и, следовательно, не имеет обратного.



Биекция



Обратная функция

⁸ Смысл записи $f^{-1}(x)$ надо определять из контекста... ☺ Слова, которые звучат одинаково, но означают разное, называются **омофонами**.

Задачи: Функции и отображения

Задача 24. Абстрактная инъективность

Докажите, что функция $f : X \rightarrow Y$ инъективна тогда и только тогда, когда для любых подмножеств $A, B \subseteq X$ выполняется условие: если $f(A) = f(B)$, то $A = B$.

Задача 25. Декомпозиция функции

Покажите, что любую функцию $f : X \rightarrow Y$ можно представить как композицию сюръекции $g : X \rightarrow Z$ и инъекции $h : Z \rightarrow Y$ для некоторого промежуточного множества Z . Что это за множество Z ?

Задача 26. Образы пересечений

Верно ли равенство $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для произвольной функции $f : X \rightarrow Y$? Если нет, приведите контрпример и сформулируйте условие, при котором равенство выполняется.

Задача 27. Прообразы и операции

Докажите, что для любой функции $f : X \rightarrow Y$ и любых подмножеств $D_1, D_2 \subseteq Y$ всегда выполняются равенства:

1. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$
2. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$

Задача 28. Хеширование

В криптографии используется хеш-функция $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^{256}$, которая отображает бинарные строки любой длины в строки фиксированной длины 256 бит.

1. Является ли такая функция инъективной?
2. Является ли она сюръективной?
3. Объясните, почему для хеш-функций важно отсутствие коллизий (ситуаций, когда $H(x_1) = H(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$).

Задача 29. Мощность и биекция

Докажите, что не существует биекции между конечным множеством A и его булеаном $\mathcal{P}(A)$.

Задача 30. Сужение области определения

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Функция не является ни инъективной, ни сюръективной. Предложите такие сужения областей определения и значений (X, Y) , чтобы функция $f : X \rightarrow Y$ стала биекцией.

Задача 31. Функция как множество пар

Формально функция $f : A \rightarrow B$ может быть определена как подмножество $G \subseteq A \times B$ (график функции) с некоторыми свойствами.

Сформулируйте эти свойства на языке теории множеств.

Задача 32. Обратная функция к композиции

Докажите, что если $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ — биекции, то

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Задача 33. Прообраз пустого множества

Чему равен прообраз пустого множества $f^{-1}(\emptyset)$ для любой функции $f : X \rightarrow Y$? Ответ обоснуйте.

Композиция функций. Обратная функция

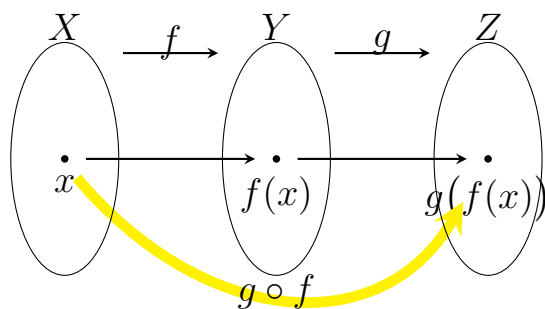
Новые функции и даже последовательности (числовые и функциональные) можно создавать с помощью операции **КОМПОЗИЦИИ**.

Опр. 20 **Композиция функций**

Если отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ такие, что множество значений первого отображения $f(X)$ является подмножеством области определения второго отображения $Dom(g) = Y$, то новое отображение $g \circ f : X \rightarrow Z$, значения которого на элементах множества определяются формулой:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

называется **композицией функций** f и g (или суперпозицией).



Композиция функций

Операцию композиции можно проводить и несколько раз.

Лемма 1 | Операция композиции ассоциативна, т. е.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Док-во: Применим определение к обеим частям для произвольного x :

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Результаты совпадают.

Замечание Если в композиции $f_n \circ \dots \circ f_1$ все функции одинаковы и равны f , то ее обозначают f^n .

Опр. 21 Итерационный процесс

Вычисление, при котором аргументом функции становится ее значение, полученное на предыдущем шаге ($x_{n+1} = f(x_n)$), называется **итерационным процессом**.

Пример 12 Квадратный корень из числа 2 можно вычислить последовательными приближениями по формуле⁹

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_1 = 1.$$

⁹ Хороший пример рациональной последовательности, не имеющей предела в \mathbb{Q} .

Замечание **Некоммутативность**

Даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, они не всегда совпадают. В общем случае

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$$\sin(x^2) \neq \sin^2 x$$

Опр. 22 Тожественное отображение

Отображение $Id_X : X \rightarrow X$, сопоставляющее каждому элементу множества X его же, т. е. $Id_X(x) = x$ для всех $x \in X$, обозначают Id_X и называют **тождественным отображением** множества X .

Лемма 2 (Свойства инъективности и сюръективности композиции)

Если $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, и $g \circ f = Id_X$ и $f \circ g = Id_Y$, то f и g являются биективными и взаимно обратными.

1. Если $g \circ f = Id_X$, то f инъективно, а g сюръективно.
2. Если $f \circ g = Id_Y$, то g инъективно, а f сюръективно.

Док-во: | **Доказательство (первой части):**

$$Id_X(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subseteq g(Y).$$

Поскольку $Id_X(X) = X$, получаем $X \subseteq g(Y)$.

Так как область значений $Im(g) \subseteq Y$, получаем, что $Im(g)$ совпадает с Y , а значит, g сюръективно.

Для инъективности f : если $f(x_1) = f(x_2)$, то $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, что означает $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, или $Id_X(x_1) = Id_X(x_2)$, откуда $x_1 = x_2$.

Через операцию композиции функций можно описать **взаимно обратные функции**.

Лемма 3 (Критерий взаимной обратимости)

Отображения $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ являются биективными и взаимно обратными тогда и только тогда, когда $g \circ f = Id_X$ и $f \circ g = Id_Y$.

Док-во: | Это следствие предыдущей леммы.

Задачи

Композиция функций $g \circ f$ является основой модульного программирования, а итерационные процессы $x_{n+1} = f(x_n)$ лежат в основе алгоритмов оптимизации и машинного обучения.

Задача 34. (Функциональные цепи)

Даны функции $f(x) = x + 1$ (инкремент) и $g(x) = x^2$. Сравнить композиции $(g \circ f)(x)$ и $(f \circ g)(x)$. Является ли операция композиции коммутативной?

Задача 35. (Линейный конгруэнтный метод)

Итерационный процесс

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \pmod{m}$$

используется для генерации псевдослучайных чисел.

Пусть $a = 3, c = 1, m = 8, x_0 = 0$. Найти первые 5 членов последовательности и определить период.

Задача 36. (Нормализация данных)

Функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

(сигмоида) часто используется в нейросетях. Найдите $f(f(0))$.

Задача 37. (Инварианты)

Найти неподвижные точки (инварианты итерации) для отображения

$$f(x) = x^2 - 0.75.$$

Задача 38. (Скорость сходимости)

Рассмотреть итерацию $x_{n+1} = \cos(x_n)$ с $x_0 = 1$. Доказать, что процесс сходится к единственной точке.

Задача 39. (Рекурсивное сжатие)

Функция $f(S) = S + "!"$ добавляет восклицательный знак к строке. Описать n -кратную композицию $f^n(S)$.

ПОДРАЗДЕЛ 1.2.4

Отношения

Наша дальнейшая цель – определить числовые множества, опираясь только на понятия теории множеств. А значит, сравнение чисел и арифметические действия над ними должны определяться только через действия над множествами.

Числа "с нуля"!

Для того, чтобы внутри множества ввести структуру (упоря-

дочить элементы, разбить их на классы или на подмножества), нам понадобится понятие отношения.

Опр. 23 На множестве X имеется *отношение* \mathcal{R} , если задано некоторое подмножество R множества $X \times X$.
Между элементами x_1 и x_2 множества X существует *отношение* \mathcal{R} , если упорядоченная пара (x_1, x_2) принадлежит подмножеству R множества $X \times X$. В этом случае пишут $x\mathcal{R}x$.

Опр. 24 Отношение \mathcal{R} называется *рефлексивным*, если для $\forall a \in X$

$$a\mathcal{R}a.$$

Пример 13 | Отношения \leq и $=$ на \mathbb{R} .

Опр. 25 Отношение \mathcal{R} называется *симметричным*, если для $\forall a, b \in X$

$$a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a.$$

Пример 14 | Отношение $=$ и \neq на \mathbb{R} .

Опр. 26 Отношение \mathcal{R} называется *антисимметричным*, если для $\forall a, b \in X$

$$a\mathcal{R}b \text{ и } b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b.$$

Пример 15 | Отношение \leq на \mathbb{R} .

Опр. 27 Отношение \mathcal{R} называется *транзитивным*, если для $\forall a, b, c \in X$

$$a\mathcal{R}b \text{ и } b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c.$$

Пример 16 | Отношения $<$, \leq , $=$ на \mathbb{R} .

Опр. 28 Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение \mathcal{R} называется *отношением эквивалентности*.

Замечание Отношение эквивалентности обозначается символом \sim

$a \sim b \Leftrightarrow a$ эквивалентно b .

($a \sim b \Leftrightarrow a$ эквивалентно b). Фундаментальное свойство отношений эквивалентности: они разбивают множество X на непересекающиеся классы эквивалентности.

Опр. 29 | Отношение называется отношением *частичного порядка* (или отношением нестрогого частичного порядка), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.¹⁰

¹⁰ Например, отношение \subseteq , заданное на булеане $\mathcal{P}(A)$, является отношением частичного порядка.

Опр. 30 | Отношение называется отношением *строгого частичного порядка*, если оно антирефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Замечание | Отношение частичного порядка удобно обозначать как \leq . Отношение строгого частичного порядка – как $<$.

Опр. 31 | *Линейным порядком* называется отношение частичного порядка, относительно которого сравнимы любые два элемента множества.

Пример 17 | Отношение включения на множестве

$$\{\emptyset, \mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))), \dots\}$$

– линейный порядок¹¹.

¹¹ Это множество – модель \mathbb{N} :

Пример 18 | Лексикографический порядок – порядок слов в словаре. (При таком порядке любые два слова в словаре сравнимы по буквам, т.е. это линейный порядок).

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{\emptyset\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Подраздел 1.2.5

Задачи: Свойства отношений

Задача 40. На множестве \mathbb{Z} задано отношение $a \equiv b \pmod{m}$ (сравнимость по модулю). Доказать, что это отношение эквивалентности.

Задача 41. На множестве всех людей введено отношение R : « x является потомком y ». Исследовать свойства.

Задача 42. Отношение R на \mathbb{R} : $xRy \iff x^2 = y^2$. Исследовать свойства.

Задача 43. На множестве файлов в ОС задано отношение

R : « x доступен для чтения пользователю y ». Является ли оно симметричным?

Задача 44. На множестве натуральных чисел \mathbb{N} задано отношение $a|b$ (делимость). Доказать, что это отношение частичного порядка.

Задача 45. Дано отношение $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ на множестве $X = \{1, 2, 3\}$. Какие свойства нарушены?

Задача 46. В теории баз данных существует отношение «быть ключом в таблице». Обладает ли оно свойством транзитивности?

Задача 47. Дано отношение « x не старше y » на множестве студентов. Является ли оно отношением эквивалентности?

Задача 48. Дано отношение R на \mathbb{R} : $xRy \iff |x - y| \leq 1$. Является ли оно транзитивным?

Задача 49. На множестве подмножеств $P(S)$ задано отношение $A \subseteq B$. К какому типу оно относится?

РАЗДЕЛ 1.3

Множество натуральных чисел. Индукция

«Честное слово, я и не подозревал, что вот уже более сорока лет говорю прозой. Большое вам спасибо, что сказали».

Жан Батист Мольер «Мещанин во дворянстве».

Надо ли определять очевидное?¹²

¹² Попробуйте сформулировать, что такое множество натуральных чисел \mathbb{N} .

Все величайшие достижения математики были получены без определения множества натуральных чисел и без теории множеств.

Однако оказалось, что разобраться, что такое бесконечность, что такое бесконечно малая величина и что такое вещественное число, без формализации понятия натурального ряда не получится

Итак, к предпоследнему десятилетию 19-го века математики добрались до вопроса, а что такое *натуральное число*?

Особая роль множества натуральных чисел заключается в том, что это в некотором смысле *самое маленькое бесконечное множество*.

Оказалось, что можно определить множество натуральных чисел, а также формализовать арифметику, используя только понятия *множества* и *отображения*.

Это сделал итальянский математик **Джузеппе Пеано** в 1889 году с помощью системы из пяти аксиом, задающих множество \mathbb{N} , и четырех аксиом, задающих арифметику (сложение и умножение) на \mathbb{N} .

РАЗДЕЛ 1.4

Аксиомы Джузеппе Пеано



Джузеппе Пеано

Опр. 32

Аксиомы Пеано.

Пусть \mathbb{N} – это множество со следующими свойствами:

A1. \mathbb{N} имеет выделенный элемент, который мы называем '1'.

A2. Существует выделенное отображение (функция) σ :

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, называемое **функцией следования** (successor function).¹³

A3. σ является инъективным отображением.¹⁴

A4. Не существует элемента $n \in \mathbb{N}$ такого, что $\sigma(n) = 1$.¹⁵

A5. (Принцип индукции)

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ такое, что:

(a) $1 \in S$ (база индукции), и

(b) если $n \in S$, то $\sigma(n) \in S$ (индукционный переход).

Тогда $S = \mathbb{N}$.¹⁶

Такое множество \mathbb{N} называется **множеством натуральных чисел**, а элементы этого множества — **натуральными числами**.

¹³ *Отображение σ задает переход к следующему элементу.*

¹⁴ *То есть двум разным элементам множества \mathbb{N} отображение σ сопоставляет разные последующие.*
¹⁵

σ не является сюръективным, а у единицы нет предшественника

¹⁶ *Аксиома индукции говорит, что \mathbb{N} — самое маленькое бесконечное множество!*

Пример 19 | Рекурсивное определение типов данных

Для ИТ-специалиста аксиомы Пеано — это формальное определение **рекурсивного типа данных**. Например, как определить список в функциональном программировании:

1. Выделенный элемент: Nil (пустой список). (Аналог A1).

2. Функция следования: Cons(head, tail) (добавить элемент в голову списка). (Аналог A2).

3. Аксиома A5 (Индукция) — это основа для доказательства свойств алгоритмов, работающих с такими структурами данных.

Лемма 4 | Лемма о предшественнике

У любого натурального числа, кроме единицы, существует предшествующее: если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\sigma(m) = n$.

Упр. 1 Докажите лемму о предшественнике.

Действия сложения и умножения в \mathbb{N}

Арифметические действия в \mathbb{N} также задаются аксиоматически — через функцию следования σ .

Опр. 33 | Операция сложения на множестве \mathbb{N} задается следующими двумя рекурсивными правилами:

1. Для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$n + 1 := \sigma(n)$$

2. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$:

$$n + \sigma(m) := \sigma(n + m)$$

Пример 20 | **Реализация сложения на основе σ**

Это определение позволяет запрограммировать сложение натуральных чисел, имея только функцию `successor(n)` (которая возвращает $n + 1$). В Haskell это выглядело бы примерно так: `add n 1 = successor(n)`

`add n (successor(m)) = successor(add n m)`

Упр. 2 | Докажите, что любое натуральное число либо равно 1, либо имеет вид $\sigma(m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и, таким образом, приведенное выше определение сложения определяет его для любых двух натуральных чисел n, m .

Пример 21 | $n + 3 = n + \sigma(2) = \sigma(n + 2) = \sigma(n + \sigma(1)) = \sigma(\sigma(n + 1)) = \sigma(\sigma(\sigma(n + 1)))$

Опр. 34 | Умножение на \mathbb{N} задается следующими двумя рекурсивными правилами:

1. Для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot 1 := n$$

2. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot \sigma(m) := n \cdot m + n$$

Упр. 3 Проверьте, пользуясь определением 33, что

$$2 + 3 = 5.$$

Упр. 4 Проверьте, пользуясь определением 34, что

$$2 \cdot 2 = 4.$$

Упр. 5 Докажите, что из аксиом Пеано следует коммутативность умножения $ab = ba$.

ПОДРАЗДЕЛ 1.4.2

Порядок на \mathbb{N}

Важным свойством множества натуральных чисел является его свойство *линейной упорядоченности*: любые два натуральных числа можно сравнить.

Опр. 35 **Отношение порядка на \mathbb{N}**

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$.

Число n меньше m , (записывается $n < m$) если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $m = n + k$.

$n \leq m$, если либо $n = m$, либо $n < m$.

Отношение порядка на \mathbb{N} не предусмотрено, его надо определить, используя аксиомы Пеано и операции сложения или умножения.

Если натуральные числа можно сравнивать, то возникает понятие *наименьшего* и *наибольшего* элемента подмножества \mathbb{N} .

Теорема 1 **Свойство полной упорядоченности множества \mathbb{N}**

Если $S \subset \mathbb{N}$, то существует $x \in S$, такой что $x \leq y$ для всех $y \in S$.

Другими словами, в любом непустом подмножестве \mathbb{N} существует **наименьший элемент**.

Упр. 6 Попробуйте доказать теорему о полной упорядоченности множества \mathbb{N} , используя аксиому индукции (А5).

Задачи

Задача 50. Ассоциативность сложения

Используя только определения сложения (Опр. 34) и принцип индукции (А5), докажите, что операция сложения ассоциативна, т.е.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Задача 51. Коммутативность сложения

Докажите, что операция сложения коммутативна, т.е. $a + b = b + a$ для любых $a, b \in \mathbb{N}$. (Это более сложная задача, чем ассоциативность).

Задача 52. Определение возведения в степень

Используя только аксиомы Пеано и ранее введенные операции (сложение, умножение), дайте рекурсивное определение операции возведения в степень a^b .

Задача 53. Доказательство свойств порядка

Докажите, что введенное отношение порядка ($<$) на \mathbb{N} является отношением строгого линейного порядка (т.е. транзитивно, антирефлексивно, и любые два элемента сравнимы).

Задача 54. Принцип полной индукции

Принцип математической индукции (А5) эквивалентен **принципу полной (или сильной) индукции**, который форму-

лируется так:

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, если $\{1, 2, \dots, n-1\} \subseteq S$, то $n \in S$. Тогда $S = \mathbb{N}$. Докажите эквивалентность этих двух принципов.

Задача 55. Корректность рекурсивной функции

Рассмотрим функцию нахождения факториала:

```
function factorial(n):  
    if n == 1 return 1  
    else return n * factorial(n - 1)
```

С помощью принципа индукции докажите, что эта функция корректно вычисляет факториал для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 56. Определение четных чисел

Дайте определение множества четных натуральных чисел $E \subseteq \mathbb{N}$, используя только функцию следования σ и операции, определенные аксиоматически.

Задача 57. Единственность \mathbb{N}

Аксиомы Пеано определяют множество \mathbb{N} с точностью до изоморфизма. Объясните, что это значит, и почему это важно для математики и программирования (почему все реализации натуральных чисел "одинаковы" по структуре).

Математическая индукция

Разберемся с одним важным методом доказательства – *методом математической индукции*, который был введен в математический оборот **Блезом Паскалем** в 1665 году.



Блез Паскаль

Теорема 2 Принцип математической индукции

Пусть $P(n)$ — это утверждение (предикат), зависящее от натурального числа $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что выполнены два условия:

1. **База индукции:** Утверждение $P(1)$ истинно.
2. **Индукционный переход:** Для любого $m \in \mathbb{N}$, если $P(m)$ истинно (индукционное предположение), то $P(m + 1)$ тоже истинно.

Тогда утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$.

Док-во: Пусть S — множество натуральных чисел, для которых утверждение $P(n)$ ложно: Мы хотим показать, что $S = \emptyset$. Докажем это методом «от противного».

Предположим, что $S \neq \emptyset$. Тогда, по свойству полной упорядоченности множества \mathbb{N} , S имеет наименьший элемент $m \in S$.

Так как $P(1)$ истинно по условию 1 (база индукции), то $m \neq 1$, т.е. $m > 1$.

Поскольку m — наименьший элемент S , следовательно, элемент $m - 1$ не принадлежит S , а значит, утверждение $P(m - 1)$ истинно.

Из условия 2 (индукционный переход) следует, что если $P(m - 1)$ истинно, то $P((m - 1) + 1) = P(m)$ должно быть истинно.

Но тогда мы пришли к противоречию: $m \in S$ (по предположению) и $m \notin S$ (по индукционному переходу).

Таким образом, наше изначальное предположение неверно,

$| S = \emptyset$, и $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

ПОДРАЗДЕЛ 1.4.4

Примеры

Теорема 3 Сумма геометрической прогрессии

Для всех вещественных чисел $c \neq 1$ и для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + c + c^2 + \dots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

Док-во: Докажем ММИ.

Сперва проверим базу индукции ($n = 1$).

Левая часть равенства – это $1 + c$ для $n = 1$.

Правая часть

$$\frac{1 - c^2}{1 - c} = \frac{(1 - c)(1 + c)}{1 - c} = 1 + c.$$

База доказана.

Предположим, что равенство истинно для $k \in \mathbb{N}$, другими словами

$$1 + c + c^2 + \dots + c^k = \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 1 + c + c^2 + \dots + c^k + c^{k+1} &= (1 + c + c^2 + \dots + c^k) + c^{k+1} = \\ &= \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} + c^{k+1} = \frac{1 - c^{k+1} + c^{k+1}(1 - c)}{(1 - c)} = \frac{1 - c^{(k+1)+1}}{1 - c}. \end{aligned}$$

Доказали индукционный переход.

Еще пример:

Теорема 4 **Неравенство Бернулли**

Для всех $c \geq -1$

$$(1 + c)^n \geq 1 + nc$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Док-во: ММИ.

База: $(1 + c)^1 = 1 + 1 \cdot c$.

Для индукционного перехода предположим, что

$$(1 + c)^m \geq 1 + mc.$$

Затем,

$$(1 + c)^{m+1} = (1 + c)^m \cdot (1 + c) \geq$$

по предположению

$$\geq (1 + mc) \cdot (1 + c) = 1 + (m + 1)c + mc^2 \geq 1 + (m + 1)c.$$

Доказали переход.

Теорема 5 **Неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического.**

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для любых n вещественных неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad (1.4.1)$$

Док-во: Для $n = 1$ неравенство является равенством, поэтому предположим, что $n \geq 2$.

Сначала докажем следующий результат, который является частным случаем нашего неравенства. Для любых n вещественных неотрицательных чисел x_1, \dots, x_n , произведение которых равно единице,

$$x_1 + \dots + x_n \geq n. \quad (1.4.2)$$

Если все числа a_1, \dots, a_n положительны, определим

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad \dots, \quad x_n =$$

$$\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}.$$

Следовательно, произведение x_1, \dots, x_n равно единице, и по (еще не доказанному) неравенству 1.4.2 мы получаем, что $x_1 + \dots + x_n \geq n$. Подставляя x_1, \dots, x_n их формулами, получаем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим 1.4.1.

Чтобы доказать неравенство 1.4.2, используем индукцию по n .

Базовый случай $n = 2$ следует из неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad x > 0.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \geq 2$. Предположим, что неравенство 1.4.2 верно для любых n вещественных неотрицательных чисел x_1, \dots, x_n , для которых $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Мы покажем, что для любых $n+1$ вещественных неотрицательных чисел y_1, \dots, y_n, y_{n+1} , для которых $y_1 \cdot \dots \cdot y_n \cdot y_{n+1} = 1$, верно следующее неравенство:

$$y_1 + \dots + y_n + y_{n+1} \geq n + 1.$$

Если все числа y_1, \dots, y_n, y_{n+1} равны единице, то неравенство 1.4.2 является равенством и верно. В противном случае, поскольку произведение чисел y_1, \dots, y_n, y_{n+1} равно единице, должно быть хотя бы одно из этих чисел, которое больше единицы, и хотя бы одно из этих чисел, которое меньше единицы.

Без потери общности предположим, что $y_n > 1 > y_{n+1}$. Следовательно, $(y_n - 1)(1 - y_{n+1}) > 0$, что означает, что $y_n + y_{n+1} > 1 + y_n y_{n+1}$. Поскольку произведение $n+1$ чисел $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ равно единице, получаем, что произведение n чисел $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n y_{n+1}$ равно единице. Поэтому, по нашему индукционному предположению, должно выполняться неравенство

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n y_{n+1} \geq n.$$

Поскольку $y_n y_{n+1} < y_n + y_{n+1} - 1$, получаем, что

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} > n + 1.$$

ПОДРАЗДЕЛ 1.4.5

Задачи

Задача 58. Сумма квадратов

Докажите методом математической индукции (ММИ), что для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ сумма квадратов первых n натуральных чисел вычисляется по формуле:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача 59. Сумма кубов

Докажите ММИ формулу для суммы кубов первых n натуральных чисел:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Задача 60. Делимость

Докажите, что для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ выражение $n^3 - n + 6$ делится на 6 без остатка.

Задача 61. Неравенство

Докажите, что для всех натуральных чисел $n \geq 4$ справедливо неравенство:

$$2^n < n!.$$

(Подсказка: База индукции начинается с $n = 4$.)

Задача 62. Бинарные деревья

В информатике бинарное дерево — это структура данных, где каждая вершина имеет не более двух потомков. Докажите по ММИ, что в непустом полном бинарном дереве, содержащем L листьев, общее количество вершин V всегда равно $2L - 1$.

Задача 63. Рекуррентные соотношения

Последовательность Фибоначчи определяется рекурсивно:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

для $n \geq 3$. Докажите ММИ, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Задача 64. Обобщенный гармонический ряд

Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Задача 65. Сумма арифметической прогрессии

Докажите ММИ классическую формулу Гаусса для суммы первых n натуральных чисел:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 66. Неравенство Коши-Буняковского в дискретном виде

Докажите, что для любых вещественных чисел a_1, \dots, a_n и

b_1, \dots, b_n справедливо неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

(Это сложная задача для данного этапа, но она отлично демонстрирует мощь ММИ в доказательстве фундаментальных неравенств.)

Задача 67. Делимость

Докажите, что для любого натурального числа n число $7^n - 1$ делится на 6.

Задача 68. Неравенство для средних

Пусть

$$a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Обозначим

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$
$$\Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Докажите, что

$$A_n \geq G_n \geq \Gamma_n$$

для $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ¹⁷

Замечание: Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

¹⁷ Выражения A_n называется средним арифметическим, G_n - средним геометрическим, Γ_n - средним гармоническим чисел a_1, a_2, \dots, a_n .

Задача 69. Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Докажите, что

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

РАЗДЕЛ 1.5

Мощность множества. Счетные множества

Прежде всего, я протестую против использования бесконечной величины как завершённой, что в математике совершенно недопустимо. Бесконечность – это не более чем фигура речи, помогающая нам говорить о пределах. Понятие завершённой бесконечности не относится к математике.

Карл Фридрих Гаусс

Проблема бесконечности в математике

До работ Георга Кантора в конце XIX века математики избегали понятия «актуальной» или «завершённой» бесконечности. Бесконечность рассматривалась как *потенциальный* процесс (например, мы всегда можем прибавить единицу к самому большому числу), но не как объект, с которым можно работать как с единым целым.

Понятие актуальной бесконечности вызывало глубокое недоверие по нескольким причинам:

1. **Философский и теологический барьер:** Актуальная бесконечность считалась атрибутом божественного и недоступным для человеческого разума.
2. **Возникновение парадоксов:** Интуитивное применение правил конечных множеств к бесконечным приво-

дило к противоречиям, таким как **парадокс Галилея** (множество квадратов "равно" множеству всех чисел), что подрывало основы логики.

3. **Отсутствие строгого аппарата:** Не было инструментов, который позволили бы работать с бесконечностью и не получать противоречий.

Георг Кантор совершил революцию, введя строгое понятие **мощности** (кардинального числа), позволяющее сравнивать размеры бесконечных множеств без опоры на интуицию.

Когда же два множества, даже бесконечных, имеют одинаковый размер?

Опр. 36 Два множества A и B имеют одинаковую мощность (**равномощны**), если существует **биекция** $f : A \rightarrow B$.

С понятием мощности связаны следующие обозначения:

1. $|A| = |B|$: A и B имеют одинаковую мощность.
2. $|A| = n$: $|A| = |\{1, \dots, n\}|$. В этом случае говорят, что A конечно.
3. $|A| \leq |B|$: существует инъекция $f : A \rightarrow B$.
4. $|A| < |B|$: $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Теорема 6 **Кантор-Шредер-Бернштейн**¹⁸
Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Упр. 7 Докажите теорему Кантора-Шредера-Бернштейна.

Опр. 37 Если $|A| = |\mathbb{N}|$, то A называется **счетным** множеством. Если множество A конечно или счетное, то его называют **не более чем счетным** (нбчс). В противном случае множество **несчетно**.

Упр. 8 Докажите:

¹⁸ Это сильный инструмент: чтобы доказать равенство мощностей, достаточно найти инъекцию из A в B и инъекцию из B в A , нет необходимости строить биекцию напрямую.

1. $|\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$.¹⁹
2. $|\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$.

¹⁹ «Чисел в два раза больше, чем чисел». Ричард Фейнман

В следующем разделе мы увидим, что существуют бесконечные несчётные множества.

ПОДРАЗДЕЛ 1.5.1

Замечательная теорема Кантора

Множество называется бесконечным, если оно подобно какой-либо правильной своей части

Р. Дедекинд

Существуют ли множества более мощные, чем \mathbb{N} ?

Если A – множество, то $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ – булеан множества A .

До Кантора все бесконечные множества по умолчанию считались равномошными...

Вот несколько примеров:

1. $A = \emptyset$, тогда $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.
2. $A = \{1\}$, тогда $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
3. $A = \{1, 2\}$, тогда $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

В общем случае, если $|A| = n$, то $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Теорема 7 Кантор

Если A – множество, то $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ²⁰.

²⁰ Эта теорема революционна! В ней суть канторовской теории множеств.

Замечание Канторовская революция: существует бесконечная иерархия бесконечностей:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots$$

Док-во:

1. **Покажем, что $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$:** Определим инъективную функцию $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ как $f(x) = \{x\}$. Ясно, что разным элементам x, y соответствуют разные одноэлементные множества $\{x\}, \{y\}$.
2. **Покажем, что $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ (методом от противного):** Предположим, что $|A| = |\mathcal{P}(A)|$. Тогда должна существовать биекция (а значит, и сюръекция) $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

Рассмотрим «канторово» множество $B \subseteq A$, определяемое как множество всех элементов $x \in A$, которые **не принадлежат** своему собственному образу при отображении g :

$$B := \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(A).$$

Так как g сюръективно, для этого множества B должен найтись прообраз $b \in A$ такой, что $g(b) = B$. Теперь спросим: $b \in B$?

- **Если $b \in B$:** По определению множества B , если элемент принадлежит B , он не должен принадлежать своему образу, т.е. $b \notin g(b)$. Но мы предположили, что $g(b) = B$, значит $b \notin B$. **Противоречие.**
- **Если $b \notin B$:** По определению B , если элемент не принадлежит B , он обязан принадлежать своему образу, т.е. $b \in g(b)$. Но мы предположили, что $g(b) = B$, значит $b \in B$. **Снова противоречие.**

В обоих возможных случаях мы пришли к противоречию. Следовательно, наше первоначальное предположение о существовании биекции g было ложным. $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

Задачи

Задача 70. Счетность целых чисел

Докажите, что множество целых чисел \mathbb{Z} является счетным. Постройте явную биекцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Задача 71. Счетность рациональных чисел

Докажите, что множество рациональных чисел \mathbb{Q} является счетным. (Подсказка: используйте метод «змейки» для пересчета дробей p/q , где $p, q \in \mathbb{N}$.)

Задача 72. Несчетность отрезка

Докажите, что отрезок $[0, 1]$ является несчетным множеством. (Подсказка: используйте диагональный метод Кантора, предполагая существование биекции и строя противоречие.)

Задача 73. Свойства счетных множеств

Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств также является счетным множеством.

Задача 74. Применение теоремы Кантора-Шрёдера-Бернштейна

Докажите, что открытый интервал $(0, 1)$ и отрезок $[0, 1]$ имеют одинаковую мощность, используя теорему Кантора-Шрёдера-Бернштейна.

Задача 75. Мощность языков программирования

Рассмотрим множество всех возможных компьютерных программ, написанных на языке C++. Является ли это множество счетным или несчетным? Ответ обоснуйте. (Подсказка: каждая программа — это конечная строка символов.)

Задача 76. Мощность множества функций

Рассмотрим множество всех функций $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Докажите, что это множество имеет мощность, равную мощности континуума (отрезка $[0, 1]$), и является несчетным. (Подсказка: подумайте о бинарных представлениях чисел и теореме Кантора).

Задача 77. Мощность комплексных чисел

Докажите, что множество комплексных чисел \mathbb{C} равномощно множеству вещественных чисел \mathbb{R} .

Задача 78. Парадокс Галилея

Используя строгое определение мощности (через биекцию), объясните, почему множество всех натуральных чисел \mathbb{N} и множество всех четных натуральных чисел $E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеют одинаковую мощность, несмотря на то, что E является собственным подмножеством \mathbb{N} .

Задача 79. Мощность иррациональных чисел

Известно, что множество рациональных чисел \mathbb{Q} счетно, а множество вещественных чисел \mathbb{R} несчетно. Используя эти факты, докажите, что множество иррациональных чисел $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является несчетным.

Задача 80. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ равномощен множеству всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Задача 81. Докажите, что квадрат (со внутренностью) равномощен отрезку.

Задача 82. Верно ли, что следующие множества являются счётными:

а) множество всевозможных конечных последовательностей

нулей и единиц;

б) множество всевозможных русских «слов»;

в) множество конечных подмножеств множества \mathbb{N} ?

РАЗДЕЛ 1.6

Целые и рациональные числа

Целые числа дал Бог, остальное — дело рук человеческих.

Леопольд Кронекер

Множество натуральных чисел замкнуто относительно операции сложения, однако не замкнуто относительно вычитания. Введение нуля и отрицательных чисел позволяет построить множество целых чисел \mathbb{Z} , замкнутое относительно этого действия.

$3 - 5 \notin \mathbb{N}$

Замечание

Множество целых чисел \mathbb{Z} является **коммутативным кольцом с единицей**. Это значит, что сложение и умножение обладают всеми привычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, наличие нуля и единицы) и для каждого элемента есть противоположный по сложению.

Опр. 38

Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным числам, и нуля называется множеством целых чисел.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Кольцо целых чисел \mathbb{Z} не замкнуто относительно операции деления²¹, поэтому пополнение его дробными числами приводит к построению множества рациональных чисел \mathbb{Q} .

²¹ Из этого обстоятельства зародилась теория чисел

Опр. 39 Несократимые дроби вида $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, называются *рациональными числами*.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Поскольку арифметика целых и рациональных чисел хорошо известна из школьного курса, не будем останавливаться на ее формализации²².

²² Подробно можно посмотреть в книге Эдмунда Ландау *Основы анализа*

Замечание **Плотность \mathbb{Q} :** Множество рациональных чисел существенно плотнее множества целых чисел: между любыми двумя рациональными числами существует бесконечно много чисел из этого множества. Однако оказывается, что \mathbb{Q} "не больше" \mathbb{N} (Теорема Кантора: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$).

Теорема 8 Кантор
Множества натуральных чисел \mathbb{N} и рациональных чисел \mathbb{Q} равномощны: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Док-во: Чтобы показать, что множество рациональных чисел \mathbb{Q} счетно, Кантор расположил положительные рациональные числа \mathbb{Q}_+ в виде бесконечной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & \cdots \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & \cdots \\ 4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Затем он определил отображение $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$, последовательно нумеруя дроби по восходящим диагоналям, выбирая только те дроби, которые еще не появлялись (пропуская сократимые дроби, чтобы гарантировать инъективность):

- $s(1) = 1/1$;
- $s(2) = 2/1$; $s(3) = 1/2$;
- $s(4) = 3/1$; $s(5) = 1/3$ ($2/2$ была пропущена, так как $2/2 = 1/1 = s(1)$);
- $s(6) = 4/1$; $s(7) = 3/2$; $s(8) = 2/3$; $s(9) = 1/4$;

- $s(10) = 5/1$; $s(11) = 1/5$ ($4/2 = s(2)$, $3/3 = s(1)$, $2/4 = s(3)$ были пропущены).

Очевидно, что такое отображение s является инъективным и сюръективным (мы покроем все \mathbb{Q}_+), что показывает, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}_+|$.

Теперь несложно использовать это отображение s для построения биекции $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, которая показывает, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Упр. 9 Докажите, что $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

ПОДРАЗДЕЛ 1.6.1

Понятие поля

Поле – это числовое множество, в котором определены четыре арифметических операции – сложение, вычитание, умножение и деление, обладающие всеми свойствами соответствующих действий над рациональными числами. Аксиоматизация этих свойств приводит к следующему определению.

Опр. 40 Множество \mathbb{F} с двумя операциями $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, *сложение* $(a, b) \rightarrow a + b$ и *умножение* $(a, b) \rightarrow ab$, называется *полем*, если выполняются следующие три набора аксиом:

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ

1. *коммутативность*:
 $a + b = b + a$ для любых $a, b \in \mathbb{F}$,
2. *ассоциативность*:
 $a + (b + c) = (a + b) + c$ для любых $a, b, c \in \mathbb{F}$,
3. *наличие нуля*:
 $\exists 0 \in \mathbb{F} : a + 0 = a$ для любого $a \in \mathbb{F}$,
4. *наличие противоположных*:
для любого $a \in \mathbb{F}$ существует $(-a) \in \mathbb{F} : a + (-a) = 0$;

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ

5. *коммутативность*:

$$ab = ba \text{ для любых } a, b \in \mathbb{F},$$

6. *ассоциативность*:

$$a(bc) = (ab)c \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{F},$$

7. *наличие единицы*:

$$\exists 1 \in \mathbb{F} : 1a = a \text{ для любого } a \in \mathbb{F},$$

8. *наличие обратных*:

$$\text{для любого } a \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \text{ существует } a^{-1} \in \mathbb{F} : aa^{-1} = 1;$$

свойства, связывающие сложение с умножением

9. *дистрибутивность*:

$$a(b + c) = ab + ac \text{ для любых } a, b \in \mathbb{F},$$

10. *нетривиальность*:

$$0 \neq 1.$$

Подраздел 1.6.2

Простейшие примеры полей

Пример 22 | \mathbb{Q} — **Рациональные числа**. \mathbb{Q} является полем. Именно на этом множестве основана работа с дробными числами в большинстве ЯП (Python ‘float’ исторически ближе к \mathbb{R} , но операции следуют аксиомам поля).

Пример 23 | $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Это интересное поле, все элементы которого являются подмножеством \mathbb{R} , но оно позволяет проводить все 4 арифметические операции, не покидая это множество.

Пример 24 | Поле из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Действия сложения и умножения заданы так (арифметика по модулю 2, XOR и AND): $0 + 1 = 1$, $1 \cdot 1 = 1$, а все остальные суммы и произведения равны нулю (включая $1 + 1 = 0$).

Замечание **ИТ-Приложение \mathbb{Z}_2 :** Это основа всей цифровой логики и компьютерной инженерии! Каждая операция в процессоре, каждая схема XOR, каждый бит в памяти — это реализация поля \mathbb{Z}_2 . Аксиомы поля здесь гарантируют, что логические операции ведут себя предсказуемо и корректно.

Пример 25 | **Тривиальное множество из одного элемента.**
Рассмотрим множество, состоящее из одного элемента $\{x\}$. Тогда сложение и умножение совпадают, и их результатом будет этот единственный элемент. Все аксиомы будут выполнены, кроме последней ($0 \neq 1$), так как 0 и 1 обязаны совпадать с x . И наоборот, если все аксиомы, кроме последней, выполнены, то поле состоит из одного элемента.

Подраздел 1.6.3

Задачи: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} и Поля

Задача 83. Биекция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

Постройте явную формулу биекции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ (например, используя отображение четных чисел в положительные, а нечетных в отрицательные и ноль).

Задача 84. Счетность декартова произведения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Докажите, что множество пар натуральных чисел $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ является счетным. Объясните, как это используется в доказательстве счетности \mathbb{Q} .

Задача 85. Доказательство счетности \mathbb{Q}

Используя метод «змейки» Кантора, объясните, как построить биекцию $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, которая включает в себя отрицательные рациональные числа и ноль.

Задача 86. Свойства поля \mathbb{Z}_2

Проверьте все аксиомы поля для поля $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ с арифметикой по модулю 2. Убедитесь, что аксиома нетривиальности ($0 \neq 1$) выполняется.

Задача 87. Кольцо \mathbb{Z} vs Поле \mathbb{Q}

Объясните, какая именно аксиома поля выполняется для \mathbb{Q} , но не выполняется для \mathbb{Z} ? Приведите контрпример для \mathbb{Z} .

Задача 88. Рациональная арифметика

Объясните, почему для финансовых расчетов в программировании часто используют специальный тип данных "рациональное число" (структура с целыми числителем и знаменателем), а не стандартный 'float' или 'double'. Свяжите это с аксиомами поля.

Задача 89. Существует ли поле \mathbb{Z}_4 ?

Можно ли на множестве $\{0, 1, 2, 3\}$ определить операции сложения и умножения по модулю 4 так, чтобы оно стало полем? (Подсказка: проверьте аксиому наличия обратных элементов для всех ненулевых элементов).

Задача 90. Плотность \mathbb{Q}

Докажите строго, что между любыми двумя различными рациональными числами $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ существует другое рациональное число r_3 .

Задача 91. Декартово произведение $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Докажите, что множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ также является счетным. (Подсказка: используйте тот факт, что \mathbb{Q} счетно, и результат Упражнения 2).

Задача 92. Поле \mathbb{R} как упорядоченное поле

Хотя \mathbb{R} будет в следующем разделе, подумайте: какие дополнительные аксиомы нужно добавить к аксиомам поля, чтобы

определить отношение порядка (например, \leq) на \mathbb{R} , которое согласуется с операциями сложения и умножения?

РАЗДЕЛ 1.7

Упорядоченное поле

Опр. 41 Поле \mathbb{F} называется упорядоченным, если на нем задано отношение линейного порядка, согласованное с действиями сложения и умножения, то есть выполняется 6 аксиом:

4 аксиомы линейного порядка

1. *рефлексивность*

$x \leq x$ для любого $x \in \mathbb{F}$.

2. *антисимметричность*

$x \leq y$ и $y \leq x$ влечет $x = y$ для любых $x, y \in \mathbb{F}$.

3. *транзитивность*

$x \leq y$ и $y \leq z$ влечет для любых $x, y, z \in \mathbb{F}$.

4. *линейная упорядоченность*

Для любых x и y из \mathbb{F} выполнено $x \leq y$ или $y \leq x$.

2 аксиомы упорядоченного поля

5. *связь сложения и порядка*

$x \leq y$ влечет $x + z \leq y + z$ для любых x, y, z из \mathbb{F} .

6. *связь умножения и порядка*

если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то и $0 \leq x \cdot y$ для любых x, y из \mathbb{F} .

Пример 26 | \mathbb{Q} – упорядоченное поле.

Пример 27 | Отрицательный пример – это \mathbb{Z}_2 .

Например, предположим, что $0 < 1$.

Если $0 < 1$, то $1 + 0 < 1 + 1 = 0 \implies 1 < 0$, что является противоречием.

Если $1 < 0$, то $0 = 1 + 1 < 0 + 1 \implies 0 < 1$, что опять является противоречием.
Значит, \mathbb{Z}_2 не является упорядоченным полем.

Подраздел 1.7.1

Задачи

Задача 93. Пусть F – упорядоченное поле, P – множество всех его положительных элементов, то есть $P = \{a \in F \mid a > 0\}$. Докажите, что тогда выполнены следующие свойства:

(P1) $\forall a \in F$: либо $a \in P$, либо $a = 0$, либо $-a \in P$.

(P2) Если $a, b \in P$, то $a + b \in P$ и $ab \in P$.

Задача 94. Пусть F – поле, $P \subset F$ – подмножество, удовлетворяющее условиям (P1) и (P2) из предыдущей задачи. Докажите, что поле F можно сделать упорядоченным таким образом, что P будет множеством положительных элементов, причём отношение порядка однозначно определяется множеством P .

Задача 95. Докажите, что в любом упорядоченном поле бесконечно много элементов.

Задача 96. Пусть F – упорядоченное поле. Рассмотрим множество рациональных функций от переменной x

$$F(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \mid P(x), Q(x) \right.$$

– многочлены с коэффициентами в поле $F, Q(x) \neq 0$

с обычными операциями сложения и умножения.

а) Проверьте, что $F(x)$ – это поле.

б) Докажите, что поле $F(x)$ можно сделать упорядоченным.

в)* Докажите, что поле $F(x)$ можно сделать упорядоченным как минимум двумя различными способами.

РАЗДЕЛ 1.8

Принцип полноты. Вещественные числа

Сравнение множества рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъятий, неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чём же, собственно, состоит непрерывность?

Рихард Дедекинд

ПОДРАЗДЕЛ 1.8.1

Принцип полноты.

Фундамент, на котором строятся основные для математического анализа понятия предела последовательности, функции, а также непрерывности – это идея непрерывности, слитности числовой прямой.

Рихард Дедекинд в своей книге "Непрерывность и иррациональные числа" (1872 год) писал: "Во мне тогда это чувство неудовлетворенности преобладало в такой степени, что я принял твердое решение думать до тех пор, пока не найду чисто арифметического и вполне строгого основания для начал анализа бесконечных. Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности, и даже при самом строгом изложении дифференциаль-

ного исчисления доказательства апеллируют к геометрическим представлениям."

В этой работе Дедекиннд сформулировал **аксиому полноты**: «Если все точки прямой линии распадаются на два класса таким образом, что каждая точка первого класса лежит левее каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение всех точек на два класса, это разрезание прямой линии на две части».

На возможную критику, что столь банальное утверждение едва ли заслуживает особого внимания, Дедекиннд иронично заметил: «Я рад, если каждый находит вышеприведенный принцип столь очевидным и гармонирующим с его собственными представлениями о линии; ибо я совершенно не в состоянии привести никаких доказательств его правильности, и никто не в силах это сделать».

Рассмотрим упорядоченные множества A и B .

Опр. 42 | Говорят, что множество A лежит левее множества B ($A \prec B$), если $a \leq b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.

Пример 28 | Например, если множество A состоит из всех рациональных чисел, меньших 10, а B состоит из всех рациональных чисел, больших 10, то A лежит левее B .

Опр. 43 | Пусть множество A лежит левее B . Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B , если $a \leq c \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$.

Например, число 10 разделяет указанные выше множества.



Рихард Дедекиннд

Неполнота множества рациональных чисел

Не всегда найдется рациональное число, разделяющее подмножества!

В этом и состоит ключевой «изъян» множества \mathbb{Q} — его неполнота.

Пример 29

Пусть

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0, a^2 < 2\},$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0, b^2 \geq 2\}.$$

Тогда A лежит левее B . Если число c разделяет A и B , то оно обязано удовлетворять равенству $c^2 = 2$.

Доказательство, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$:

Предположим, что $x \in \mathbb{Q}$ такое, что $x^2 = 2$.

Запишем $x = m/n$ в несократимом виде ($m, n \in \mathbb{N}$).

Тогда $(m/n)^2 = 2$, или $m^2 = 2n^2$.

Следовательно, m^2 делится на 2, и поэтому m должно делиться на 2. Запишем $m = 2k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Подставляя в уравнение: $(2k)^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2$.

Разделим на 2: $2k^2 = n^2$.

Следовательно, n^2 делится на 2, и поэтому n делится на 2.

Но мы получили, что и m , и n делятся на 2. Это противоречит нашему первоначальному предположению, что дробь m/n несократима. Значит, такого рационального числа x не существует.

Если допустить, что в этом примере множества A и B состоят лишь из рациональных чисел, то, как мы видим, может не найтись рационального числа, разделяющего два подмножества множества рациональных чисел. **В числовой прямой \mathbb{Q} есть «дырки».**

Важным свойством числового множества является принцип

полноты, о котором речь идёт в следующем определении.

Опр. 44 (Аксиома полноты для упорядоченного множества)

Для упорядоченного множества F выполняется **аксиома полноты**, если для любых двух его непустых подмножеств X и Y , обладающих свойством $X \prec Y$, найдётся элемент $c \in F$, разделяющий эти множества:²³

$\exists c \in F$ такое, что $x \leq c \leq y$ для любых $x \in X, y \in Y$.

²³ Если разрезать числовую прямую на два куска, то на месте разреза обязательно окажется число, а не дырка, в этом суть непрерывности.

ПОДРАЗДЕЛ 1.8.3

Определение множества вещественных чисел

“What is real? How do you define 'real'?”

Morpheus, “The Matrix”

Опр. 45 (Поле вещественных чисел)

Пусть \mathbb{R} — упорядоченное поле (т.е. поле с отношением линейного порядка, согласующимся с операциями). \mathbb{R} называется **полем вещественных чисел**, если для него выполнен следующий комплекс условий:

1. 10 аксиом поля (коммутативность, ассоциативность, наличие нулей/единиц/обратных и т.д.);
2. 4 аксиомы линейного порядка (рефлексивность, транзитивность, антисимметричность, линейность);
3. 2 аксиомы упорядоченного поля (порядок согласуется со сложением и умножением);
4. **аксиома полноты (непрерывности)**.

Пример 30 | **Аксиома полноты в машинном обучении** Для ИТ-специалиста аксиома полноты — это гарантия существования решений.

Пример 31 | Когда мы ищем минимум функции потерь в нейронной сети (градиентный спуск), мы предполагаем, что этот минимум **существует** в \mathbb{R} . Если бы мы работали только в \mathbb{Q} , многие фундаментальные алгоритмы оптимизации просто бы не работали.

Пример 32 | В анализе сигналов \mathbb{R} гарантирует, что такие числа, как π или $\sqrt{2}$ (которые постоянно возникают в физических моделях), существуют и могут быть корректно использованы в вычислениях.

Задачи на следствия из аксиомы полноты (в форме Дедекинда)

Задача 97. Принцип Архимеда

Докажите, что множество натуральных чисел \mathbb{N} не ограничено сверху. То есть для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > x$.

Задача 98. Существование точной верхней грани

Пусть непустое множество X ограничено сверху. Докажите, что существует число s , которое является наименьшей из всех верхних граней.

Задача 99. Существование квадратного корня

Докажите, что существует число $\xi > 0$ такое, что $\xi^2 = 2$.

Задача 100. Плотность рациональных чисел. Докажите, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $x < y$, найдется рациональное число $q = \frac{m}{n}$ такое, что $x < q < y$.

Задача 101. Принцип вложенных отрезков

Пусть дана система отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

таких, что каждый последующий содержится в предыдущем. Докажите, что существует точка ξ , принадлежащая всем отрезкам сразу.

Задача 102. Связь разделяющего числа и границ

Пусть A и B удовлетворяют условию аксиомы полноты. Докажите, что разделяющее число ξ единственно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $a \in A$ и $b \in B$, что $b - a < \varepsilon$.

Задача 103. Свойство нижней грани

Докажите, что если множество ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.

Задача 104. Операции с гранями

Пусть X и Y — ограниченные сверху множества. Пусть

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Докажите, что если $s_x = \sup X$ и $s_y = \sup Y$, то $s_x + s_y$ будет являться точной верхней гранью множества $X + Y$.

Задача 105. Целая часть числа

Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное целое число k такое, что $k \leq x < k + 1$.

Задача 106. Непустота пересечения лучей

Пусть $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots$ — две системы чисел такие, что $a_n \leq b_m$ для любых индексов n, m . Докажите существование числа, разделяющего эти два числовых семейства.

Свойства поля вещественных чисел \mathbb{R}

Подраздел 1.9.1

Верхняя (нижняя) грань числового множества

Опр. 46 Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что для всякого $a \in A$ верно, что $a \leq C$.

Число C при этом называется *верхней границей* или *гранью*.

$A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$.

Опр. 47 Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху* $\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \exists a \in A : a > C$.

Замечание Аналогичным образом определяются *ограниченные снизу* (существует нижняя граница $C \in \mathbb{R}$) и *неограниченные снизу* множества (нижней границы не существует).

Опр. 48 Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

$A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным* $\Leftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R} \forall a \in A : |a| \leq C$.

Опр. 49 Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

Опр. 50 Число $M \in A$ называется **максимальным** или **наибольшим** элементом множества A , если оно является верхней границей множества A , то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \leq M$.

Число $m \in A$ называется **минимальным** или **наименьшим** элементом множества A , если оно является нижней границей множества A , то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \geq m$.

Обозначения.

$$M = \max A = \max\{x | x \in A\} = \max_{x \in A} x;$$

$$m = \min A = \min\{x | x \in A\} = \min_{x \in A} x.$$

Упр. 10 Выведите единственность наибольшего и наименьшего элементов ограниченного множества (при условии, что они есть) из аксиомы порядка.

Пример 33 Наибольшим элементов множества неположительных вещественных чисел является 0, наименьшего элемента нет (множество не ограничено снизу); множество отрицательных чисел не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов (наибольшим элементом должен был бы быть 0, но он не является отрицательным числом), наименьшего элемента нет, т.к. множество не ограничено снизу.

Итак, не у каждого множества, даже ограниченного, есть наибольший и (или) наименьший элемент.

Опр. 51 Число $M \in \mathbb{R}$ называется **супремумом** или **точной верхней гранью** множества A , если оно является наименьшей верхней границей этого множества:

$$(\forall x \in A : x \leq M) \wedge (\forall y < M : \exists x \in A : x > y).$$

Число $m \in \mathbb{R}$ называется **инфимумом** или **точной нижней гранью** множества A , если оно является наи-

большой нижней верхней границей этого множества:

$$(\forall x \in A : x \geq m) \wedge (\forall y > m : \exists x \in A : x < y).$$

Обозначения:

$$M = \sup A; m = \inf A.$$

Например, если A – это числовой интервал $0 < x < 1$ или любой промежуток с концами $0, 1$, то $\sup A = 1$, а $\inf A = 0$.

Лемма 5 | Принцип верхней грани

Всякое **непустое** ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет, и притом единственную, верхнюю грань.

Док-во: Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – данное подмножество, а $B \subset \mathbb{R}$ – множество верхних границ A .

По условию оба эти множества непустые.

Тогда в силу аксиомы полноты существует единственное число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества, точнее, такое, что

$$\forall x \in A \forall y \in B (x \leq c \leq y).$$

Число c , таким образом, является верхней границей A и нижней границей B .

Как верхняя граница A число c является элементом B , но как нижняя граница B число c является минимальным элементом множества B .

Итак,

$$c = \min B = \sup A.$$

Аналогично доказывается существование и единственность нижней грани у ограниченного снизу числового множества:

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет, и притом единственную, нижнюю грань.

Упр. 11 Докажите, что **принцип существования верхней (нижней) грани** можно было бы принять за аксиому и вывести из него в качестве теоремы **аксиому полноты** (теорему

Дедекинда).

ПОДРАЗДЕЛ 1.9.2

Задачи

Задача 107. Найдите $\inf X$ и $\sup X$ для множества

$$X = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Существуют ли максимум и минимум?

Задача 108. Найдите грани множества

$$X = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 109. Множество X задано условием

$$X = \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Найдите грани.

Задача 110. Найдите грани множества сумм

$$X = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 111. Пусть A и B — ограниченные сверху множества. Докажите, что $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, где $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Задача 112. Исследуйте множество $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Найдите грани в \mathbb{Q} и в \mathbb{R} .

Модели поля \mathbb{R}

Модель множества вещественных чисел – это любой пример упорядоченного поля, на котором действует аксиома непрерывности. Для каждого такого примера надо проверять выполнение семнадцати аксиом \mathbb{R} .

1. Множество бесконечных десятичных дробей²⁴

²⁴Идея Вейерштрасса

Вещественные числа определяются как формальные²⁵ десятичные разложения

²⁵Что означает бесконечная сумма? Ведь для того, чтобы понять ее смысл, мы должны определить вещественные числа! Получился замкнутый круг... Вот почему сумма формальная.

$$d_0, d_1 d_2 d_3 \dots = d_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \dots = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k},$$

(не определяя смысл бесконечных сумм), и все их свойства выводятся из алгоритмов для сложения и умножения этих формальных сумм.

Здесь d_0 – целое число, и каждая цифра d_k – одно из чисел $0, \dots, 9$.

2. Числовая прямая.

Изображение чисел в виде точек на прямой настолько привычно, и эта картинка так глубоко укореняется со времен начальной школы, что легко забыть, что соответствие между числами и точками когда-то было новой идеей.

Модель числовой прямой строится с помощью биекции между точками прямой \mathbb{L} и множеством вещественных

чисел \mathbb{R} . При этом нулю на прямой сопоставляется точка начала отсчета, а с помощью образа числа 1 задается масштаб. Отношением порядка $<$ является отношение «лежать правее», а операции задаются с помощью геометрических построений.²⁶

²⁶ *Подробности можно посмотреть в 1-м томе учебника В.А. Зорича.*

3. Дедекиндовы сечения.

Сечением Дедекунда называется разбиение множества \mathbb{Q} на два подмножества A и B таким образом, чтобы всякое число из A было бы меньше всякого числа из B .

На множестве таких сечений можно ввести структуру упорядоченного множества, операции сложения и умножения и проверить аксиому непрерывности.

4. Множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Здесь две фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их «объединение» — снова фундаментальная последовательность. Об этом речь пойдёт позже.

РАЗДЕЛ 1.11

Следствия из аксиомы полноты

ПОДРАЗДЕЛ 1.11.1

Принцип Архимеда

Существуют ли среди вещественных чисел «недостижимые» величины? Ответ дает **аксиома Архимеда**.

Измерение длин отрезков с использованием линейки с делениями (единицами длины), основано на фундаментальном свойстве множества вещественных чисел – **принципе Архимеда**: за конечное число шагов фиксированной длины $h > 0$ можно пройти путь любой фиксированной длины S .

Теорема 9 **Принцип Архимеда**

Если $h > 0$, то для любого вещественного числа x найдется единственное целое число k , такое что

$$kh \leq x < (k + 1)h.$$

Док-во: Покажем, что найдется единственное целое число k , такое что

$$k \leq \frac{x}{h} < (k + 1).$$

Рассмотрим множество натуральных чисел

$$E = \left\{ n \mid n > \frac{x}{h} \right\}.$$

У него есть наименьший элемент $k + 1 \in \mathbb{N}$.

Покажем, что

$$k \leq \frac{x}{h}.$$

Но если это не так, то не наименьший элемент E !

Принцип Архимеда часто используется в такой интерпретации:

Следствие 1 **Аксиома Архимеда**

Для любого положительного числа $a > 0$ и любого числа b найдется такое натуральное число n , что

$$na > b$$

На первый взгляд аксиома кажется очевидной, но она несет в себе глубокий смысл:

- **Отсутствие актуальных бесконечно малых**

Из аксиомы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует

такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$. Это означает, что не существует чисел, которые «больше нуля, но меньше любого рационального числа». Любую сколь угодно малую погрешность можно превзойти, дробя единицу на достаточно много частей.

- **Принцип измерения**

Именно эта аксиома позволяет нам измерять отрезки. Если a — это эталон (линейка), а b — расстояние до звезды, аксиома гарантирует, что, приложив линейку конечное число раз, мы покроем это расстояние.

- **В программировании (Floating Point)**

В компьютерных вычислениях (стандарт IEEE 754) аксиома Архимеда «нарушается» на практике из-за ограниченной точности. Существует так называемое *машинное эpsilon* (ε_m). Если вы прибавляете очень маленькое число к очень большому, значение не меняется ($b + a = b$), так как разница в порядках превышает размер мантиссы.

Пример 34 | **(Парадокс бесконечного цикла)** Представьте алгоритм:

```
x = 0;
while (x < 1,000,000) { x = x + 0.000001; }
```

Аксиома Архимеда гарантирует, что в математической модели этот цикл **всегда завершится**. Однако в реальности, если шаг станет меньше точности представления числа, программа уйдет в бесконечный цикл.

Пример 35 | Используя аксиому Архимеда, доказать, что

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Решение:

1) Очевидно, что 0 — нижняя грань, так как $1/n > 0$ для всех n .

- 2) Предположим, что существует большая нижняя грань $\varepsilon > 0$.
- 3) По аксиоме Архимеда для $a = \varepsilon$ и $b = 1$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n \cdot \varepsilon > 1$.
- 4) Разделив на n , получаем $\varepsilon > 1/n$.
- 5) Мы нашли элемент множества $(1/n)$, который меньше нашей предполагаемой грани ε . Противоречие. Значит, $\inf = 0$.

Замечание Аксиома Архимеда лежит в основе не только измерения отрезков, но и построения любой позиционной системы счисления, т.е. записи чисел в виде конечных или бесконечных дробей.

Следствие 2 Множество \mathbb{N} натуральных чисел неограничено сверху.

Док-во: В противном случае у него была бы верхняя грань $c \in \mathbb{R}$. Поскольку c — наименьшее из чисел, ограничивающих множество \mathbb{N} сверху, то найдется натуральное число n , такое что $c - 1 < n$. Но тогда $c < n + 1$, что невозможно, поскольку $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Следствие 3 Для любого положительного числа ε найдется натуральное число n , такое что

$$0 < 1/n < \varepsilon$$

Следствие 4 В любом, отличном от точки, промежутке вещественных чисел имеются рациональные числа.

Подраздел 1.11.2

Лемма о вложенных и стягивающихся отрезках

Принцип вложенных отрезков постулирует непрерывность числовой прямой: если мы бесконечно сужаем область поиска, «сжимая» её к одной точке, то эта точка обязательно существует.

Опр. 52 Пусть

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

– последовательность каких-то множеств.

Если

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots,$$

т.е. каждое следующее множество содержится в предыдущем, то говорят, что имеется **последовательность вложенных множеств**.

Лемма 6 **Принцип вложенных отрезков**

Для любой последовательности

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k , длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Док-во: Условие вложенности отрезков

$$I_k = [a_k, b_k]$$

означает, что

$$a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1$$

т.е. $a_m \leq b_n$ при любых значениях m и n .

Тогда по аксиоме полноты существует точка $c \in \mathbb{R}$, разделяющая множества A и B левых и правых концов этих отрезков, т.е.

$$a_m \leq c \leq b_n.$$

В частности,

$$a_n \leq c \leq b_n$$

при любых значениях $n \in \mathbb{N}$.

Но это и значит, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n .

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, обладающие этим свой-

ством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$$

поэтому

$$0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$$

и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная.

Замечание

- **Почему важна замкнутость?**

Если заменить отрезки на открытые интервалы, лемма перестанет работать. Например, для системы $(0, 1/n)$ пересечение будет пустым, так как 0 не входит в интервалы. В программировании это соответствует ошибке «выхода за границы» (off-by-one error), когда не учитывается граничное значение.

- **Бинарный поиск**

Работа этого алгоритма — прямая иллюстрация леммы. Мы имеем массив (отрезок), на каждом шаге выбираем половину, в которой гарантированно лежит искомый элемент. Мы получаем систему вложенных отрезков. Лемма гарантирует, что если процесс бесконечен (в вещественных числах), мы сойдемся к искомому числу.

- **Связь с вычислительной сложностью**

Стягивающиеся отрезки позволяют оценить точность численных методов. Если на шаге n длина отрезка L_n , то максимальная ошибка нахождения корня не превышает L_n . В алгоритме дихотомии $L_n = L_0/2^n$, что дает логарифмическую сложность $O(\log N)$.

Следствие 5 **Теорема Кантора о несчетности отрезка**

Точки отрезка нельзя взаимно однозначно занумеровать натуральным рядом чисел.

Док-во: Покажем, что множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно. Предположим, что оно счетно, т. е. может быть записано в виде последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Возьмем точку x_1 и на отрезке

$$[0, 1] = I_1$$

и выберем отрезок ненулевой длины, не содержащий точку x_1 .

В отрезке I_1 строим отрезок I_2 , не содержащий x_2 , и так далее.

Если уже построен отрезок I_n , то, поскольку $|I_n| > 0$, в нем строим отрезок I_{n+1} так, что

$$x_{n+1} \notin I_{n+1} \text{ и } |I_{n+1}| > 0.$$

По лемме о вложенных отрезках найдется точка c , принадлежащая всем отрезкам $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$

Но эта точка отрезка $I_1 = [0, 1]$ по построению не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Следствие 6

$$\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}.$$

Конечное покрытие (Принцип Бореля - Лебега)

Опр. 53 Система $S = \{X\}$ множеств *покрывает* множество Y , если

$$Y \subset \bigcup_{x \in S} X,$$

т.е. если любой элемент y множества Y содержится по крайней мере в одном из множеств X системы S .

Опр. 54 Подмножество множества

$$S = \{X\}$$

(являющегося системой множеств) называется *подсистемой* системы S .

Замечание Подсистема системы множеств является системой множеств того же типа.

Лемма 7 **Принцип выделения конечного покрытия**

В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

Док-во: Пусть $S = \{U\}$ - система интервалов U , покрывающая отрезок

$$[a, b] = I_1.$$

Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S , то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим через I_2 , тоже не допускает конечного покрытия.

С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т.д.

Таким образом, возникает последовательность

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S .

Поскольку длина отрезка, полученного на n -м шаге, по построению равна

$$|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n},$$

то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины (см. следствия леммы о верхней грани).

По лемме о вложенных отрезках существует точка c , принадлежащая всем отрезкам I_n , $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$c \in I_1 = [a, b],$$

то найдется интервал

$$(\alpha, \beta) = U \in S$$

системы S , содержащий точку c , т.е.

$$\alpha < c < \beta.$$

Пусть

$$\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}.$$

Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n , что $|I_n| < \varepsilon$.

Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, заключаем, что

$$I_n \subset U = (\alpha, \beta).$$

Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы.

Предельная точка

Принцип Больцано — Вейерштрасса

Опр. 55 Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X .

Упр. 12 Проверьте, что это условие равносильно тому, что в любой окрестности точки c есть *по крайней мере одна* не совпадающая с c точка множества X .

Пример 36 Если

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

то предельной для X является только точка $0 \in \mathbb{R}$.

Пример 37 Для интервала (a, b) предельной является каждая точка отрезка $[a, b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Пример 38 Для множества \mathbb{Q} рациональных чисел предельной является каждая точка \mathbb{R} , ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

Лемма 8 **Принцип предельной точки**

Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

Док-во: Пусть X – данное подмножество \mathbb{R} .

Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке

$$[a, b] = I \subset \mathbb{R}.$$

Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для X .

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо вообще нет точек множе-

ства X , либо их там конечное число.

Совокупность $\{U(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему

$$U(x_1), \dots, U(x_n)$$

интервалов, покрывающую отрезок I .

Но, поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает все множество X .

Однако в каждом интервале $U(x)$ только конечное число точек множества X , значит, и в их объединении тоже конечное число точек X , т.е. X - конечное множество.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Подраздел 1.11.5

Задачи

Задача 113. Найти $\inf X$ и $\sup X$ для множества $X = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Существуют ли максимум и минимум?

Решение:

Заметим, что $x_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

1) Так как $n \geq 1$, то x_n принимает значения $1/2, 2/3, 3/4, \dots$. Очевидно, x_n возрастает.

2) Наименьшее значение достигается при $n = 1$: $x_1 = 1/2$. Следовательно, $\inf X = \min X = 1/2$.

3) Поскольку $\frac{1}{n+1} > 0$, то $x_n < 1$ для всех n . При увеличении n дробь $\frac{1}{n+1}$ становится сколь угодно малой, значит, значения приближаются к 1.

$\sup X = 1$. Однако значения 1 последовательность никогда не достигает, поэтому $\max X$ не существует.

Задача 114. Найти грани множества $X = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решение: Рассмотрим члены последовательности:

$$n = 1 : -1 + 1 = 0;$$

$$n = 2 : 1 + 1/4 = 1.25;$$

$$n = 3 : -1 + 1/9 \approx -0.88;$$

$$n = 4 : 1 + 1/16 = 1.0625.$$

Для четных n : $1 + 1/n^2$ убывает к 1 (наибольшее при $n = 2$ равно 1.25).

Для нечетных n : $-1 + 1/n^2$ убывает к -1 (наибольшее при $n = 1$ равно 0).

Итого: $\sup X = \max X = 1.25$. Нижняя грань достигается «в пределе» при нечетных $n \rightarrow \infty$: $\inf X = -1$ (\min не существует).

Задача 115. Множество X задано условием $X = \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Найти грани.

Решение: Знаменатель $x^2 + 1$ может принимать любые значения в полуинтервале $[1, +\infty)$.

1) Максимальное значение дроби достигается при минимальном знаменателе ($x = 0$): $1/(0 + 1) = 1$. Значит, $\sup X = \max X = 1$.

2) При $x \rightarrow \infty$ знаменатель неограниченно растет, а дробь стремится к 0, оставаясь строго положительной. Значит, $\inf X = 0$, \min не существует.

Задача 116. Найти грани множества сумм $X = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Решение:

1) Каждое слагаемое максимально при $n = 1, m = 1$.

$\sup X = 1/1 + 1/1 = 2$. Это $\max X$.

2) Слагаемые положительны, значит, $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > 0$.

При $n, m \rightarrow \infty$ сумма может стать сколь угодно малой (например, для любого ε можно взять $n, m > 2/\varepsilon$). $\inf X = 0$. \min не существует.

Задача 117. Пусть A и B — ограниченные сверху множества. Доказать, что $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, где

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Решение:

1) $\forall a, b : a \leq \sup A, b \leq \sup B \Rightarrow a + b \leq \sup A + \sup B$.
Значит, $\sup A + \sup B$ — верхняя грань.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $a > \sup A - \varepsilon/2$ и $b > \sup B - \varepsilon/2$.

Тогда $a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$. По определению это означает, что $\sup A + \sup B$ — *точная* грань.

Задача 118. Исследовать множество $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
Найти грани в \mathbb{Q} и в \mathbb{R} .

Решение:

1) В множестве рациональных чисел \mathbb{Q} точных граней не существует, так как число $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ иррациональны (принцип полноты в \mathbb{Q} не выполняется).

2) В множестве вещественных чисел \mathbb{R} : $\sup X = \sqrt{2}$, $\inf X = -\sqrt{2}$. Максимума и минимума нет, так как неравенство строгое и границы иррациональны.

ПОДРАЗДЕЛ 1.11.6

Задачи

Определение. Точка x_0 называется *предельной точкой* (точкой накопления) множества X , если в любой её проколотой окрестности $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$ содержится хотя бы одна точка из X .

Эквивалентно: x_0 — предельная точка, если существует последовательность различных точек $\{x_n\} \subset X$, такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Задача 119. Найти все предельные точки множества

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решение:

1) Рассмотрим точку 0. Для любого $\varepsilon > 0$ по свойству Архимеда найдется $n > 1/\varepsilon$, тогда $1/n \in (0, \varepsilon)$. Значит, в любой окрестности нуля есть точки множества. 0 — предельная точка.

2) Любая другая точка $a > 0$ не является предельной. Если $a \notin X$, можно выбрать окрестность, не пересекающуюся с элементами $1/n$.

Если $a = 1/k \in X$, то в достаточно малой окрестности (меньше расстояния до $1/(k-1)$ и $1/(k+1)$) других точек множества нет.

Ответ: $\{0\}$.

Задача 120. Определить предельные точки множества рациональных чисел \mathbb{Q} на отрезке $[0, 1]$.

Решение:

Согласно свойству плотности рациональных чисел, в любой окрестности любого вещественного числа $r \in [0, 1]$ найдется бесконечно много рациональных чисел. Следовательно, любая точка $x \in [0, 1]$ является предельной для $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Ответ: Отрезок $[0, 1]$.

Задача 121. Найти предельные точки множества

$$X = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решение:

Разделим последовательность на две подпоследовательности:

1) Для четных $n = 2k$: $x_{2k} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Для нечетных $n = 2k - 1$: $x_{2k-1} = -\frac{2k-2}{2k-1} \rightarrow -1$ при $k \rightarrow \infty$. В любой окрестности точки 1 лежит бесконечно много «четных» элементов, в окрестности -1 — «нечетных». Других точек сгущения нет.

Ответ: $\{-1, 1\}$.

Задача 122. Указать предельные точки для множества целых чисел \mathbb{Z} .

Решение:

Возьмем любое число $a \in \mathbb{R}$. Если мы выберем радиус окрестности $\varepsilon < 0.5$, то в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ может оказаться

максимум одно целое число. По определению, в проколотой окрестности предельной точки должно быть хотя бы одно значение из множества. Здесь это условие не выполняется ни для какой точки.

Ответ: \emptyset (предельных точек нет).

Задача 123. Доказать, что если множество X конечно, то оно не имеет предельных точек.

Решение: Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Возьмем произвольную точку a . Пусть $d = \min |a - x_i|$ для всех $x_i \neq a$. Если выбрать $\varepsilon < d$, то проколотая окрестность $\dot{U}_\varepsilon(a)$ будет пустой. Следовательно, ни одна точка не может быть предельной.

ПОДРАЗДЕЛ 1.11.7

Дополнительные задачи

Задача 124. Разделяющее число для конкретных множеств

Даны два множества: $A = \left\{ \frac{2n-1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ и $B = \left\{ \frac{3n+1}{3n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Докажите, что любое $a \in A$ меньше любого $b \in B$, и найдите разделяющее их число ξ .

Задача 125. Принцип Архимеда в малых величинах

Дано число $\varepsilon = 0,0001$. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого выполняется неравенство $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. (Докажите существование такого n через принцип Архимеда, не используя логарифмы).

Задача 126. Точные грани числового набора

Найдите $\sup X$ и $\inf X$ для множества $X = \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Обоснуйте результат, опираясь на аксиому полноты.

Задача 127. Десятичные приближения

Пусть $x = \sqrt{2}$. Рассмотрим множество $A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$ (все конечные десятичные приближения $\sqrt{2}$ «с недостатком») и множество $B = \{2, 1.5, 1.42, 1.415, \dots\}$ (приближения «с избытком»). Докажите, что $\sup A = \inf B$.

Задача 128. Иррациональность в интервале

Пользуясь тем, что $\sqrt{2}$ существует и иррационально, докажите, что в любом интервале (x, y) , где $x < y$, найдется хотя бы одно иррациональное число вида $r + \frac{\sqrt{2}}{n}$, где r — рациональное.

Задача 129. Оценка степени

Докажите, что для любого $M > 0$ найдется такое натуральное n , что $1.01^n > M$.

Задача 130. Нижняя грань положительных дробей

Рассмотрим множество

$$A = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Найдите $\inf A$.

Задача 131. Множество сумм

Пусть $A = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ и $B = \left\{ \frac{1}{3^k} : k \in \mathbb{N} \right\}$. Найдите $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Задача 132. Квадратный корень из 3

Постройте два множества A и B , разделяющим элементом которых является $\sqrt{3}$, и докажите, что между ними не может

быть рационального разделяющего числа.

Задача 133. Вложенные отрезки с рациональными концами

Приведите пример последовательности вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, где все $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, таких, что их общая точка ξ является иррациональной.

РАЗДЕЛ 1.12

Топология числовой прямой

Для изучения пределов и непрерывности функций необходимо формализовать структуру множеств на вещественной прямой \mathbb{R} . Основным инструментом здесь выступает понятие близости, реализуемое через окрестности.

Опр. 56 ε -окрестностью точки x_0 называется интервал

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Проколотой окрестностью называется множество

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Рассмотрим классификацию точек по отношению к произвольному множеству $X \subset \mathbb{R}$:

Опр. 57 Точка $x \in X$ называется **внутренней точкой** множества X , если существует окрестность $U_\varepsilon(x)$, целиком содержащаяся в X . Множество всех внутренних точек обозначается $\text{int}X$.

Опр. 58 Точка $x \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** (точкой накопления) множества X , если в любой её проколотой окрестности содержится хотя бы одна точка из X . Предельная точка не обязательно должна принадлежать само-

му множеству X .

Опр. 59 Точка $x \in X$ называется **изолированной точкой**, если она не является предельной. Это означает, что у точки x существует окрестность, в которой нет других точек множества X , кроме самой x .

Опр. 60 Точка $x \in \mathbb{R}$ называется **граничной точкой** множества X , если в любой её окрестности содержатся как точки, принадлежащие X , так и точки, не принадлежащие X (лежащие в дополнении $\mathbb{R} \setminus X$). Совокупность таких точек образует границу ∂X .

На основе этих определений вводятся фундаментальные понятия открытости и замкнутости:

Опр. 61 Множество X называется **открытым**, если каждая его точка является внутренней (т.е. $X = \text{int}X$).

Опр. 62 Множество X называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Важные замечания:

- Множества могут быть одновременно открытыми и замкнутыми (например, \emptyset и \mathbb{R}) или ни тем, ни другим (например, полуинтервал $[a, b)$).
- Понятие окрестности в многомерных пространствах преобразуется в открытые шары, что является основой для метрических методов в машинном обучении (k -NN, кластеризация).
- Замкнутость множества допустимых решений часто является необходимым условием существования экстремума (оптимального значения) алгоритма.

Интересные примеры и контрпримеры

Интуиция часто может подводить. Рассмотрим несколько классических объектов:

Пример 39 | Множество Кантора

Множество, получаемое путем бесконечного удаления средних третей из отрезка $[0, 1]$. Сначала удаляем $(1/3, 2/3)$, затем из оставшихся отрезков удаляем их средние трети и т.д.

- Это множество замкнуто (как пересечение замкнутых множеств), не содержит ни одного интервала (его внутренность пуста), но при этом не имеет изолированных точек.
- Это классический пример фрактальной структуры с нулевой мерой, используемой в теории сжатия данных.

Пример 40 | Пунктированная прямая

Множество $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (прямая без целых чисел).

- Это множество является открытым, так как любая точка (не целая) входит в него с некоторой малой окрестностью. Его границей является само множество целых чисел \mathbb{Z} .

Пример 41 | Множество рациональных чисел \mathbb{Q}

Множество, которое «дыряво» в каждой своей точке.

- Оно не является ни открытым (ни одна точка не является внутренней), ни замкнутым (все иррациональные числа — его предельные точки, но они в него не входят).
- Работа с типом данных `float` или `double` — это всегда работа с дискретным подмножеством рациональных чисел, что порождает ошибки округления из-за отсутствия «полноты» (наличия пустот между числами).

Задача 134. Пусть $X = \{1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^n, \dots\} \cup \{0\}$. Определить тип множества.

Решение:

- 1) Предельные точки: Единственная предельная точка — 0. Она принадлежит множеству. Значит, множество **замкнуто**.
- 2) Внутренние точки: Любая окрестность любой точки $1/2^n$ содержит точки, не принадлежащие X . Внутренность пуста. Множество **не является открытым**.
- 3) Все точки вида $1/2^n$ являются **изолированными**.

Задача 135. Приведите пример множества, у которого граница совпадает с самим множеством.

Решение:

Любое конечное множество точек или, например, множество

$$X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Так как у него нет внутренних точек, каждая его точка является граничной. Также граничной является любая точка, к которой можно подойти сколь угодно близко извне.

Глава 2

Предел последовательности

РАЗДЕЛ 2.1

Предел последовательности: от интуиции к строгости

Понятие предела — это фундамент всего математического анализа. Однако путь к его современному, строгому определению занял более двух тысячелетий.

Древние прозрения и метод исчерпывания

На интуитивном уровне идея предела использовалась еще в Древней Греции. Зенон Элейский (V век до н.э.) своими знаменитыми парадоксами ("Ахиллес и черепаха") впервые указал на сложности работы с бесконечно малыми величинами и бесконечными суммами — проблемами, которые стали камнем преткновения для последующих поколений.

Эвдокс Книдский и Архимед Сиракузский разработали «метод исчерпывания». Они вычисляли площади криволинейных фигур, вписывая в них многоугольники с бесконечно увеличивающимся числом сторон. По сути, они интуитивно использовали предельный переход: площадь многоугольников «исчерпывала» площадь круга.

Эпоха инфинитезималей: гениальные догадки и логический хаос (XVII век)

В XVII веке Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц независимо друг от друга создали основы дифференциального и интегрального исчисления. Их методы были невероятно эффективны и привели к революционным открытиям в физике и астрономии.

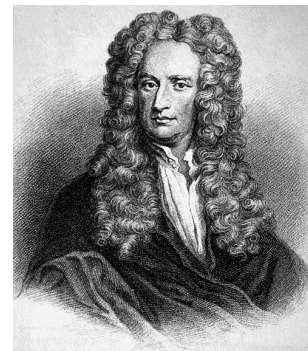
Ньютон использовал метод флюксий для формулировки своих трех законов движения. Понятие производной позволило строго определить мгновенную скорость (как производную пути по времени) и ускорение (как вторую производную).

Готфрид Лейбниц, используя понятие дифференциала, ввел понятие «живой силы» (*vis viva*), ставшее прообразом современной кинетической энергии. Это заложило фундамент для закона сохранения энергии.

В своих «Началах» Ньютон применил бесконечно малые величины для изучения движения тел в сопротивляющейся среде и основ гидродинамики.

Матанализ позволил Ньютону доказать, что сила, удерживающая Луну на орбите, и сила, заставляющая яблоко падать на Землю, имеют одну и ту же природу.

Используя интегральное исчисление, Ньютон математически вывел законы Кеплера, доказав, что планеты должны дви-



Исаак Ньютон



Готфрид Лейбниц

гаться именно по эллиптическим орбитам под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Ньютон смог объяснить явление океанских приливов как результат гравитационного воздействия Луны и Солнца, что было бы невозможно без методов суммирования бесконечно малых воздействий (интегрирования).

Матанализ позволил предсказывать движение комет и возмущения в орбитах планет, превратив астрономию из науки наблюдений в точную предсказательную дисциплину.

Однако эти гениальные методы опирались на зыбкий логический фундамент – концепцию *бесконечно малых величин* (инфинитезималь). Что такое бесконечно малая? Это не ноль, но и не конечное число. Такая неопределенность вызывала критику и ставила под сомнение весь новый раздел математики.

Леонард Эйлер и «алхимия» бесконечности (XVIII век).

Для величайшего вычислителя всех времен, Леонарда Эйлера, анализ был искусством волшебных превращений формул. Именно Эйлер создал тот «дизайн» формул, которым мы сейчас пользуемся.²⁷ Его анализ – это не просто вычисления, а создание совершенного синтаксиса математики. Эйлер не боялся «бесконечно больших» и «бесконечно малых» чисел, считая их полноценными объектами. Он мог написать, что $n = \infty$, и получить верный ответ, полагаясь на колоссальную интуицию.

Однако его методы работали в руках гения, но пугали современников отсутствием фундамента. Математика того времени напоминала великолепное здание, построенное на зыбучем песке: ответы были точными, но никто не мог объяснить, **почему** эти методы законны.



Леонард Эйлер

²⁷ Именно Эйлер ввел обозначения $f(x)$, e , i , π , \sum , \sin , \cos , Δx .

Огюстен Луи Коши: Попытка навести порядок (начало XIX века).

Барон Огюстен-Луи Коши первым осознал, что бесконечно малым величинам как «числам» нет места в математическом анализе. Он провозгласил: *«Бесконечно малая — это переменная величина, предел которой равен нулю»*²⁸.

Коши изгнал мистику, но внес в математику «динамику». В его определениях чувствовалось время: последовательность *«стремится»*, значение *«приближается»*. Но как доказать что-то математически, используя глаголы движения? Математика все еще была слишком похожа на физику.

Карл Вейерштрасс: триумф логики (середина XIX века).

Точку в этом споре поставил «отец современного анализа» Карл Вейерштрасс. Он совершил немислимое: полностью «обездвигил» матанализ. Из определений исчезло время, исчезло стремление. Осталась лишь сухая логика неравенств.

Вейерштрасс разработал $\varepsilon - \delta$ -язык (эпсилон-дельта), перевел расплывчатое понятие «приближения» на язык строго проверяемых расстояний между числами. Его определение устранило все двусмысленности и позволило строго доказать все теоремы математического анализа. Это можно назвать победой статики над динамикой. Математики наконец-то обрели абсолютную уверенность в своих выводах, превратив анализ в совершенный инструмент, лишенный эмоций и физических метафор.

Мы начнем изложение теории предела именно с этого строгого языка, применительно к последовательностям — функциям натурального аргумента.

²⁸ Рассказывают, что после собрания Французской академии наук, где Коши изложил свои идеи о сходимости рядов, обеспокоенный Лаплас заперся у себя дома и не выходил, пока не проверил, что все ряды, использованные им в «Небесной механике», сходятся, и лишь тогда вздохнул с облегчением.



Карл Вейерштрасс

Понятие последовательности

Опр. 63 Последовательностью вещественных чисел является функция

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Обозначение: $x(n) = x_n$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$, или x_1, x_2, \dots

Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n; x_n)$, в которых первое число принимает последовательно значения $1, 2, 3, \dots$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называются **элементами** (или членами) последовательности. Символ x_n — **общим элементом** (n — членом) последовательности; а число n — его номером.

Последовательность считается **заданной**, если указан способ получения любого ее члена.

ПОДРАЗДЕЛ 2.2.1

Способы задания последовательностей

Аналитический способ (формулой общего члена).

Пример 42 | Формула $x_n = 1 + (-1)^n$ задает последовательность:
 $0, 2, 0, 2, \dots$

Пример 43 | Формула $x_n = \frac{1}{n}$ задает последовательность:
 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Пример 44 | Формула $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ задает последовательность:
 $1, 0, -1, 0, \dots$

Рекуррентный способ (через предыдущие члены).

Задаются начальные члены и правило, по которому каждый следующий член выражается через предыдущие.

Пример 45 | Арифметическая прогрессия: $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 5$ задает последовательность: $3, 8, 13, 18, \dots$

Описательный (словесный) способ:

- последовательность всех натуральных чисел: $1, 2, 3, \dots$;
- последовательность всех членов, обратных натуральным числам:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

- последовательность $1, 0, 1, 0, \dots$, в которой на местах с нечетными номерами находится 1, а на местах с четными номерами находится 0;
- последовательность $5, 5, 5, 5, \dots$, на каждом месте которой находится число 5.

Пример 46 | По данным первым членам последовательности

$$\frac{6}{7}; \frac{9}{10}; \frac{14}{15}; \frac{21}{22}; \frac{30}{31}; \dots$$

написать ее общий член.

Прежде всего, отметим, что заданием нескольких первых членов последовательности не определяется вся последовательность. Однако условимся считать, что как написанные члены последовательности, так и все следующие за ними составлены по одному и тому же закону соответствия между натуральными числами и членами последовательности. В нашем случае нетрудно усмотреть, что числитель каждой

доби равен квадрату номера плюс пять:

$$\frac{6}{7} = \frac{1^2 + 5}{(1^2 + 5) + 1}; \frac{9}{10} = \frac{2^2 + 5}{(2^2 + 5) + 1};$$

$$\frac{14}{15} = \frac{3^2 + 5}{(3^2 + 5) + 1}; \frac{21}{22} = \frac{4^2 + 5}{(4^2 + 5) + 1}; \frac{30}{31} = \frac{5^2 + 5}{(5^2 + 5) + 1}; \dots$$

Т.е. числитель равен $n^2 + 5$, а знаменатель каждой дроби на единицу больше числителя, т.е. равен $n^2 + 6$. Итак, $x_n = \frac{n^2 + 5}{n^2 + 6}$.

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности.

Пример 47 | **Математика и природа: Числа Фибоначчи**

Последовательность задается рекуррентно:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ где } F_0 = 0, F_1 = 1.$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Отражает закономерности филлотаксиса (рост растений) и связана с «золотым сечением» через предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Пример 48 | **Фундамент анализа: последовательность для числа**

e

Последовательность, предложенная Якобом Бернулли при изучении сложных процентов:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство её сходимости и ограниченности является классической задачей матанализа. Предел этой последовательности — число Эйлера $e \approx 2,71828$.

Пример 49 | **Простые числа**

Последовательность P_n , где каждое число имеет ровно два

делителя:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Фундамент современной криптографии (алгоритм RSA). Исследование распределения этих чисел привело к созданию важнейших функций комплексного анализа (Дзета-функция Римана).

Пример 50 | **Вычислительная математика: итерации Ньютона**

Для вычисления \sqrt{a} используется последовательность Герона (метод Ньютона):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Демонстрирует квадратичную скорость сходимости. Это основа численных методов в программировании и инженерных расчетах.

Пример 51 | **Физика и хаос: последовательность логистического отображения**

Задается уравнением $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Использовалась для моделирования популяций, но в 1970-х годах стала ключом к открытию детерминированного хаоса и универсальных постоянных Фейгенбаума.

Последовательности

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* двух последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$).

Ограниченные и неограниченные последовательности

Опр. 64 Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если существует такое число M , что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n \leq M$. Аналогично определяется **ограниченность снизу** ($a_n \geq m$).

Опр. 65 Последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу: $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M$.

Замечание (Типичные ошибки) Не путайте *неограниченную* последовательность с той, что *стремится к бесконечности*. Последовательность

$$a_n = n \cdot (-1)^n$$

$(-1, 2, -3, 4, \dots)$ неограничена, так как её модули растут, но она не «уходит» в плюс или минус бесконечность, а постоянно «прыгает» через ноль.

Пример 52 Ограниченность важна при работе с типами данных. Например, последовательность значений индекса в массиве фиксированного размера `buffer[N]` должна быть ограничена сверху числом $N - 1$ во избежание *buffer overflow*.

Пример 53 Проверьте на ограниченность последовательность $a_n = \sin(n)$.
Решение: Ограничена, так как $|\sin(n)| \leq 1$ для любого n . Несмотря на то что значения распределены «хаотично», они никогда не покинут отрезок $[-1, 1]$.

Пример 54 Доказать, что последовательность $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n}$ ограничена.

Решение: Заметим, что

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n n + 1}{n} \right| \leq \frac{|(-1)^n n| + 1}{n} = \frac{n + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Следовательно, последовательность ограничена числом $M = 2$.

РАЗДЕЛ 2.4

Монотонные последовательности

Опр. 66 Последовательность $\{a_n\}$ называется:

- **Возрастающей**, если $a_{n+1} > a_n$ для всех n .
- **Неубывающей**, если $a_{n+1} \geq a_n$ для всех n .

Аналогично определяются убывающие и невозрастающие последовательности. Все они объединяются термином **монотонные**.

Пример 55 Последовательность «Пинг-понг»: $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

Она принимает значения $0, 1, 0, 1, \dots$

- Ограничена? Да ($M = 1$).
- Монотонна? Нет, она осциллирует.

Пример 56 Факториал против экспоненты: $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Выпишем первые члены: $2, 2, 4/6, 8/24, \dots$

(или $2, 2, 0.66, 0.33, 0.13, \dots$).

- Начиная со второго члена ($n = 2$), последовательность **строго убывает** (проверьте).
- Она **ограничена снизу** нулем (так как все члены положительны).

Пример 57 Числа Фибоначчи: F_n . $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

- Монотонно возрастает (начиная со второго члена).
- Неограничена сверху.

Замечание **Связь понятий – предчувствие предела**

Важнейшее наблюдение: если последовательность **неубывающая** и при этом **ограничена сверху**, то она обязана «прижаться» к какой-то невидимой границе. Она не может расти вечно (мешает ограничение) и не может повернуть назад (мешает монотонность).

ПОДРАЗДЕЛ 2.4.1

Задачи

Задача 136. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

при $n \geq 1$. Доказать, что последовательность является строго возрастающей и ограниченной сверху числом 2.

Задача 137. Исследовать на монотонность и ограниченность последовательность, заданную формулой общего члена:

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Задача 138. Последовательность задана формулой общего члена

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Доказать, что она является строго возрастающей и ограниченной сверху числом 1.

Задача 139. Доказать, что последовательность $x_n = n^3 - 2n^2$ является неограниченной.

Задача 140. Является ли последовательность $x_n = n \cdot (-1)^n$ ограниченной?

Задача 141. Исследовать на монотонность и ограниченность последовательность $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

Задача 142. Доказать, что последовательность $x_n = \sin(n)$ является ограниченной, но не является монотонной.

Задача 143. Последовательность задана формулой общего члена $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Доказать, что она является строго возрастающей и ограниченной сверху (например, числом 3), не используя факт существования числа e .

Задача 144. Определить способ задания последовательности $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ и задать ее рекуррентным и аналитическим (формулой общего члена) способами.

Задача 145. Последовательность задана аналитически: $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. Является ли она ограниченной? Является ли она монотонной?

Подраздел 2.4.2

Задачи*

Задача 146. Алгоритм вычисления квадратного корня (Метод Герона).

Пусть

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), a_1 = 2.$$

Докажите, что эта последовательность ограничена снизу и монотонно убывает, начиная со второго члена (сходясь к $\sqrt{2}$).

Примечание: Это классический пример итерационного процесса с квадратичной скоростью сходимости.

Задача 147. Гармонический ряд и переполнение.

Последовательность частичных сумм гармонического ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Доказать, что она монотонно растет, но **не ограничена**.

Замечание Хотя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, рост происходит крайне медленно ($S_n \approx \ln n + \gamma$). Для того чтобы сумма превысила 100, потребуется больше слагаемых, чем атомов в наблюдаемой Вселенной.²⁹ Это пример того, как теоретическая расходимость может игнорироваться в практических вычислениях из-за ограничений времени работы.

²⁹ $S_N > 100 \Leftrightarrow N \approx 1.5 \times 10^{43}$

Задача 148. Оценка в O -нотации.

Доказать монотонность последовательности $a_n = \frac{\log_2 n}{n}$ при $n \geq 3$.³⁰

³⁰ Это доказывает, что время доступа к элементам в сбалансированном дереве поиска растет медленнее, чем количество самих элементов.

РАЗДЕЛ 2.5

Предел числовой последовательности: формальный подход

Понятие предела — это способ описать поведение последовательности «в бесконечности» с помощью конечных чисел.

ПОДРАЗДЕЛ 2.5.1

Определение на языке $\varepsilon - N$

Говоря неформально, число A является пределом, если, какую бы малую погрешность ε («эпсилон») мы ни задали, все

члены последовательности рано или поздно окажутся на расстоянии меньше ε от этого числа.

Опр. 67 **Предел последовательности**³¹

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N (зависящий от ε), что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

Записывается это так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ или $a_n \rightarrow A$.

³¹ Это определение — присяга математика! Какую бы точность ε ни запросил ваш «заказчик», вы всегда сможете вычислить момент N , после которого погрешность вашего алгоритма не превысит этот порог.

На языке логики это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Разбор определения для программиста:

- ε — это *unit test* на точность. Мы требуем: «Хочу, чтобы ошибка была меньше 0.001».
- N — это *время стабилизации*. Это ответ математики на вопрос: «С какого шага (итерации) наш алгоритм гарантированно начнет выдавать ответ с такой точностью?».
- Важно: N обычно растет при уменьшении ε . Чем выше точность, тем больше итераций нужно.

Подраздел 2.5.2

Геометрическая интерпретация

Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ равносильно $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Это значит, что a_n попадает в ε -окрестность точки A .

Смысл определения: Вне любой, даже самой крошечной ε -окрестности точки A , может лежать лишь **конечное** число

членов последовательности (не более N штук). Все остальные бесконечное множество членов «живут» внутри окрестности.

ПОДРАЗДЕЛ 2.5.3

Примеры

Пример 58

Доказать по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.
2. Нам нужно найти такое N , чтобы при всех $n > N$ выполнялось:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

3. Так как $n > 0$, имеем

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

4. Если мы возьмем $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ (целая часть), то для любого $n > N$ неравенство будет верно.

Например: Если $\varepsilon = 0.01$, то $N = 100$. С 101-го члена последовательность «стабилизируется» в зоне ошибки.

Пример 59

Доказать, что предел $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ равен 2.

Решение.

1. Рассмотрим разность:

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n+1 - 2(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

2. Ставим условие:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

3. Отсюда

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \implies n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

4. Выберем

$$N(\varepsilon) = \max(1, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rfloor).$$

ПОДРАЗДЕЛ 2.5.4

Задачи

Задача 149. Используя строгое определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 150. Используя строгое определение предела, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}.$$

Задача 151. Используя строгое определение предела, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Задача 152. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n+1} = 0.$$

Задача 153. Доказать по определению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 1} = 1.$$

Основные теоремы о пределах

В этой части мы докажем фундаментальные свойства сходящихся последовательностей, которые позволяют нам оперировать пределами как обычными числами.

Подраздел 2.6.1

Теорема о единственности предела

Теорема 10 Единственность

Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Док-во: ³² Предположим противное: пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет два различных предела A и B ($A \neq B$). Пусть для определенности $B > A$. Выберем такое малое расстояние ε , чтобы окрестности точек A и B не пересекались.

Для этого достаточно взять $\varepsilon = \frac{B - A}{2}$.

1. Так как $a_n \rightarrow A$, то начиная с некоторого номера N_1 все члены a_n лежат в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

2. Так как $a_n \rightarrow B$, то начиная с некоторого номера N_2 все члены a_n лежат в интервале $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$.

Возьмем $n > \max(N_1, N_2)$. Тогда a_n должен одновременно находиться в двух непересекающихся интервалах, что невозможно. Следовательно, наше предположение ложно, и $A = B$.

³² Теорема о единственности доказывается методом «от противного» через непересекающиеся окрестности.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема 11 Ограниченность

Если последовательность сходится, то она ограничена.

Док-во: ³³ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Возьмем $\varepsilon = 1$. По определению предела, найдется номер N , такой что для всех $n > N$ выполняется:

$$|a_n - A| < 1 \implies A - 1 < a_n < A + 1$$

Это значит, что все члены последовательности, начиная с $N + 1$, ограничены. Осталось конечное число членов: a_1, a_2, \dots, a_N . Любое конечное множество чисел имеет свой максимум и минимум.

Выберем $M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |A - 1|, |A + 1|)$.

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $|a_n| \leq M$, что и означает ограниченность.

Важное замечание: Обратное неверно. Последовательность $(-1)^n$ ограничена, но не сходится. Ограниченность — это *необходимое*, но не *достаточное* условие сходимости.

Арифметические свойства пределов

Теорема 12 Арифметика пределов

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$.

Тогда:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

³³ Теорема об ограниченности доказывается через разделение последовательности на «хвост» (который сидит в ε -окрестности) и «голову» (конечный набор первых элементов).

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \text{ (при } B \neq 0 \text{ и } b_n \neq 0)$$

ДОК-ВО: 34

1. Доказательство для суммы

Нам нужно показать, что $|(a_n + b_n) - (A + B)|$ может быть сколь угодно малым. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \rightarrow A$, существует N_1 , такое что для всех $n > N_1 \implies |a_n - A| < \varepsilon/2$. Так как $b_n \rightarrow B$, существует N_2 , такое что для всех $n > N_2 \implies |b_n - B| < \varepsilon/2$. Тогда для всех $n > \max(N_1, N_2)$ получаем:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

2. Доказательство для произведения

Нам нужно оценить разность $|a_n b_n - AB|$. Используем классический прием: вычтем и добавим перекрестное произведение $a_n B$.

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB|$$

Применим неравенство треугольника ($|x + y| \leq |x| + |y|$):

$$|a_n b_n - AB| \leq |a_n(b_n - B)| + |B(a_n - A)| = |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|$$

Теперь оценим каждое слагаемое:

1. Так как $\{a_n\}$ сходится, она **ограничена** (по доказанной ранее теореме). Значит, $\exists M > 0$, такое что $|a_n| \leq M$ для всех n .
2. Пусть задано $\varepsilon > 0$.
3. Так как $b_n \rightarrow B$, найдется N_1 , такой что для $n > N_1$ выполняется $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
4. Так как $a_n \rightarrow A$, найдется N_2 , такой что для $n > N_2$

34 Арифметика пределов базируется на «распределении» ошибки ε между слагаемыми.

выполняется $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}$ (добавляем +1 в знаменатель на случай, если $B = 0$).

Для всех $n > \max(N_1, N_2)$ подставим эти оценки в наше неравенство:

$$|a_n b_n - AB| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, по определению, $\lim(a_n b_n) = AB$.

3. Доказательство для частного

Для доказательства достаточно показать, что $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$, а затем применить теорему о произведении для $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Доказательство для $1/b_n$:

Оценим разность: $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|}$.

Основная сложность здесь – ограничить знаменатель $|b_n|$ снизу, чтобы дробь не стала бесконечно большой.

1. Так как $b_n \rightarrow B$, выберем $\varepsilon_0 = \frac{|B|}{2}$.

Существует номер N_1 , такой что для всех $n > N_1$ выполняется

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

2. Из этого следует (по свойству модуля), что

$$|b_n| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Таким образом, мы «отделили» последовательность от нуля.

3. Теперь возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Существует N_2 , такой что для $n > N_2$ выполняется

$$|b_n - B| < \varepsilon \cdot \frac{B^2}{2}.$$

4. Для всех $n > \max(N_1, N_2)$ имеем:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n| \cdot |B|} < \frac{\varepsilon \cdot B^2/2}{(|B|/2) \cdot |B|} = \frac{\varepsilon \cdot B^2/2}{B^2/2} = \varepsilon$$

Пример 60

Вычислить предел $x_n = \frac{5n^2 + n}{2n^2 - 3}$.

Разделим числитель и знаменатель на n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 1/n}{2 - 3/n^2} = \frac{\lim(5 + 1/n)}{\lim(2 - 3/n^2)} = \frac{5 + 0}{2 - 0} = 2.5$$

Здесь мы использовали арифметику пределов и тот факт, что $\lim 1/n^k = 0$.

РАЗДЕЛ 2.7

Предельный переход в неравенствах

Теорема 13 Сохранение знака

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и начиная с некоторого номера $a_n \geq 0$, то и $A \geq 0$.

Док-во: Предположим противное: пусть $A < 0$.

Возьмем $\varepsilon = |A|/2$ (или $\varepsilon = -A/2$).

По определению предела, начиная с некоторого N , все члены a_n должны лежать в ε -окрестности точки A :

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \implies A - (-A/2) < a_n < A + (-A/2) \implies a_n < A/2$$

Так как $A < 0$, то и $A/2 < 0$. Значит, $a_n < 0$ для всех $n > N$. Это противоречит условию $a_n \geq 0$. Следовательно, $A \geq 0$.

Следствие 7 О сравнении пределов

Если $a_n \leq b_n$ для всех $n > N_0$ и обе последовательности сходятся, то $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Важное замечание: Строгое неравенство $a_n < b_n$ в пределе может превратиться в равенство. Пример: $a_n = 0$, $b_n = 1/n$. Всегда $a_n < b_n$, но пределы у обоих равны 0.

Теорема о двух милиционерах (о зажатой последовательности)

Эта теорема — основной инструмент нахождения пределов «сложных» последовательностей через их оценку более простыми.

Теорема 14 Пусть даны три последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Если:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ для всех $n > N_0$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$,

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Док-во: Зададим $\varepsilon > 0$.

Так как $a_n \rightarrow A$, то

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \implies A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Так как $c_n \rightarrow A$, то

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \implies A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Пусть $N = \max(N_0, N_1, N_2)$.

Тогда при $n > N$ выполняются оба неравенства и условие зажатости:

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

Отсюда

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon,$$

что по определению означает $\lim b_n = A$.

Пример 61 Осциллирующая последовательность

Найти предел $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

Мы знаем, что $-1 \leq \sin(n) \leq 1$. Разделим всё на n ($n > 0$):

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Так как $\lim(-1/n) = 0$ и $\lim(1/n) = 0$, то по теореме о двух милиционерах $\lim \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Пример 62 | **Сумма многих слагаемых**

Найти предел

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Оценим сумму сверху и снизу:

- Сверху: заменим каждое из n слагаемых на самое большое $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

$$b_n < n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

- Снизу: заменим каждое слагаемое на самое маленькое $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

$$b_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

ПОДРАЗДЕЛ 2.7.2

Задачи

Задача 154. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{n},$$

используя теорему о двух милиционерах.

Задача 155. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n},$$

используя теорему о двух милиционерах.

Задача 156. Используя теорему о сжатой переменной, найти предел последовательности $x_n = \left(\frac{n}{7n+3}\right)^n$.

Задача 157. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу A , а последовательность $\{b_n\}$ сходится к пределу B . Известно, что существует номер N_0 такой, что для всех $n > N_0$ выполняется неравенство $a_n \geq b_n$. Используя теорему о предельном переходе в неравенствах, что можно сказать о соотношении между A и B ?

Задача 158. Найти предел последовательности $x_n = \sqrt{1 + 2^n}$, используя теорему о двух милиционерах.

РАЗДЕЛ 2.8

Существование предела

В практических задачах часто важно знать, *существует ли* решение в принципе, даже если мы не можем найти его точное аналитическое выражение.

Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности

Теорема 15 Вейерштрасс³⁵

Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ (монотонное возрастание);
2. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$ (ограниченность сверху).

Тогда существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

³⁵ Данная теорема эквивалентна аксиоме полноты!

Док-во: Рассмотрим множество $S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящее из всех элементов нашей последовательности. По условию теоремы, множество S не пусто и ограничено сверху числом M .

Согласно **аксиоме о полноте вещественных чисел** (непрерывности), любое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Пусть:

$$A = \sup S$$

Докажем, что число A и является искомым пределом последовательности. Воспользуемся определением предела:

1. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.
2. По определению точной верхней грани (\sup):
 - Число $A - \varepsilon$ не является верхней гранью множества S (так как оно меньше A).
 - Следовательно, найдется хотя бы один элемент последовательности a_N , такой что:

$$a_N > A - \varepsilon$$

3. В силу монотонного возрастания последовательности для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство:

$$a_n \geq a_N > A - \varepsilon$$

4. С другой стороны, так как A — верхняя грань, то для всех n выполняется:

$$a_n \leq A < A + \varepsilon$$

5. Объединяя пункты 3 и 4, получаем, что для любого $n > N$:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \iff |a_n - A| < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

Замечание

В численных методах теорема Вейерштрасса обосновывает критерий остановки: если шаг изменения параметра становится меньше ε , а процесс монотонен и ограничен, мы гарантированно находимся в окрестности предела (точки сходимости).

ПОДРАЗДЕЛ 2.8.2

Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что она имеет конечный предел, используя теорему Вейерштрасса.

Теорема 16

Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху.

Док-во:

1. Монотонность

Применим неравенство Бернулли $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Рассмотрим отношение соседних членов:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1 + 1/n)^n}{(1 + 1/(n-1))^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли:

$$(1 - 1/n^2)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2}.$$

Тогда:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = \frac{n^3 + 1}{n^3} > 1$$

Следовательно, $x_n > x_{n-1}$ — последовательность строго возрастает.

2. Ограниченность

Разложим x_n по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что каждая скобка $(1 - k/n) < 1$. Тогда:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Так как $n! \geq 2^{n-1}$, заменим слагаемые на члены геометрической прогрессии:

$$x_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + 2 = 3$$

Последовательность ограничена сверху числом 3.

Опр. 68 Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ называется **числом e** .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828\dots$$

Пример 63 Число e возникает при анализе «равномерного» роста. В Computer Science оно часто встречается в алгоритмах с ран-

домизацией. Например, вероятность того, что при хешировании n ключей в n ячеек конкретная ячейка останется пустой (при больших n), стремится к $1/e \approx 0.37$.

Подраздел 2.8.3

Задачи

Задача 159. Исследовать на сходимость $x_n = \frac{10^n}{n!}$.

Задача 160. Доказать сходимость

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Задача 161. Исследовать $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$,

где $a > 0, x_1 > \sqrt{a}$.

Задача 162. Исследовать на сходимость $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$ (n радикалов, $a > 0$).

Задача 163. Доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_1 = \sqrt{2}.$$

Задача 164. $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, x_1 = 2$. Исследовать на сходимость.

Задача 165. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, x_1 = 1$. Найти предел.

Задача 166. $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n^2 + \frac{1}{4} \right), x_1 = 0$. Доказать сходимость.

Задача 167. Исследовать $x_{n+1} = \sin(x_n)$, $x_1 = 1$.

Задача 168. $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$, $x_1 = 1$. Найти предел.

Критерий Коши и фундаментальные последовательности

Критерий Коши позволяет определить сходимость последовательности, не используя само значение предела, а только анализируя близость её членов друг к другу.

Опр. 69 Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной** (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , такой что для любых $n, m > N$ выполняется

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Теорема 17 **Критерий Коши**

Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пример 64 **Условие остановки**

В численных методах (например, при обучении нейросети или расчете физической симуляции) мы не знаем «истинного» ответа. Мы проверяем условие $|x_{n+1} - x_n| < \text{tolerance}$. Это упрощенный вариант проверки на фундаментальность: если изменения в результатах становятся исчезающе малыми, итерационный процесс считается сошедшимся.

Пример 65 Доказать сходимость

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}.$$

Воспользуемся фундаментальностью. Пусть $m > n$:

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{|\sin k|}{2^k} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k}.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии: $|a_m - a_n| < \frac{1}{2^n}$.

При $n \rightarrow \infty$ величина $1/2^n \rightarrow 0$. Для любого ε можно найти такое N , что при $n, m > N$ разность $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Последовательность фундаментальна \implies предел существует.

Подраздел 2.8.4

Задачи на критерий Коши

Задача 169. Доказать сходимость последовательности

$$a_n = \frac{\cos(1!)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(2!)}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}.$$

Задача 170. Доказать расходимость гармонической последовательности

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Задача 171. Исследовать на сходимость последовательность

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Задача 172. Доказать сходимость последовательности a_n , если известно, что

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}.$$

Задача 173. Показать, что последовательность $a_n = \sqrt{n}$ не является фундаментальной, хотя $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$.

Задача 174. Исследовать сходимость

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

РАЗДЕЛ 2.9

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Бесконечно малые последовательности (БМП)

Опр. 70 Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если её предел равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

На языке $\varepsilon - N$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$.

Свойства БМП:

1. Сумма и произведение конечного числа БМП есть БМП.
2. Произведение БМП на ограниченную последовательность есть БМП.

Бесконечно большие последовательности (ББП)

Опр. 71 Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$, такой что для всех $n > N$ выполняется

$$|x_n| > E$$

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Замечание Не путайте *неограниченную* последовательность и *бесконечно большую*.

- Для ББП: **все** члены с некоторого номера должны быть больше E .
- Для неограниченной: **хотя бы один** член для каждого E должен быть больше него.

Пример: $x_n = n^{(-1)^n}$ (члены: $1/1, 2, 1/3, 4, \dots$) — неограничена, но не является бесконечно большой.

ПОДРАЗДЕЛ 2.9.1

Связь между БМП и ББП

Эта связь лежит в основе работы со сложностью алгоритмов и позволяет переходить от исследования «взрывного» роста к исследованию «затухания».

Теорема 18 **О связи БМП и ББП**

1. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность ($x_n \neq 0$), то последовательность $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ является бесконечно малой.
2. Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность

$(\alpha_n \neq 0)$, то последовательность $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ является бесконечно большой.

Док-во: Докажем первую часть. Пусть $\{x_n\}$ — ББП. Это значит

$$\forall E > 0 \exists N : |x_n| > E.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/E$. Тогда неравенство $|x_n| > E$ эквивалентно

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E},$$

то есть $|\alpha_n| < \varepsilon$. Это в точности совпадает с определением БМП. Вторая часть доказывается аналогично.

ПОДРАЗДЕЛ 2.9.2

Сравнение БМП (О-символика)

Опр. 72 Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, то α_n называется БМП *более высокого порядка малости*, чем β_n ($\alpha_n = o(\beta_n)$)³⁶.

³⁶ Или так: $\beta_n \ll \alpha_n$

Опр. 73 Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = A \neq 0$, то они называются БМП *одного порядка*.

Пример 66 Исследовать на ББП последовательность $x_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

Решение. Разделим почленно: $x_n = n + \frac{1}{n}$.

Так как n — ББП, а $1/n$ — БМП, их сумма является ББП.

Для любого E при $n > E$ значение $x_n > E$.

Ответ: ББП.

Иерархия бесконечно больших

Сравнение бесконечно больших последовательностей определяет классическую иерархию:

$$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^s \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (s > 0, a > 1)$$

Докажем несколько ключевых переходов.

1. Степенная против показательной:

$$n^s \ll a^n$$

(где $a > 1, s > 0$).

Док-во: Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n^s}{a^n}$ при $a > 1$.
Понятно, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}.$$

Так как

$$\frac{n^s}{(n-1)^s a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} < 1,$$

то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \frac{n^s}{(n-1)^s a} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает.

Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса, существует предел x_n . Назовем его A .

Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1},$$

получаем, что

$$A = \frac{1}{a} \cdot A \Rightarrow A = 0,$$

2. Показательная против факториала:

$$a^n \ll n!^{37}.$$

Док-во: Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Понятно, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}.$$

Так как $\frac{a}{n} \rightarrow 0$, то, взяв $\varepsilon = 1$,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \frac{a}{n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$ и, тем самым, последовательность строго убывает.

Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса, существует предел x_n .

Назовем его A .

Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1},$$

получаем, что

$$A = 0 \cdot A \Rightarrow A = 0$$

3. Логарифм против линейной функции:

$$\ln n \ll n.$$

Док-во: Чтобы не впадать в технические сложности, докажем позже с помощью дифференциального исчисления (правила Лопиталья).

Замечание Это доказательство объясняет, почему *бинарный поиск* в массиве из миллиарда элементов (сложность $\log_2 n \approx 30$ операций) — это почти мгновенная операция, в то

³⁷ Факториал — это «черная дыра» вычислительной сложности. Любой алгоритм с такой сложностью (например, полный перебор задачи коммивояжера) непригоден для больших данных.

время как *линейный поиск* ($n = 10^9$ операций) может заставить пользователя ждать несколько секунд. Разрыв между логарифмом и линейной функцией — это пропасть, в которой рождается высокая производительность кода.

4. Показательно-степенная функция против факториала:

$$n! \ll n^n$$

Док-во: Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Справедливо равенство

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

следовательно, последовательность

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Таким образом, последовательность x_n убывает, а снизу ограничена нулем, следовательно, сходится. Проверьте, что предел x_n равен нулю.

Пример 67 | Сравним n^2 и 2^n для $n = 10$ и $n = 100$:

- При $n = 10$: $10^2 = 100$, $2^{10} = 1024$ (Экспонента уже в 10 раз больше).
- При $n = 100$: $100^2 = 10,000$, а $2^{100} \approx 1.26 \cdot 10^{30}$.

Это число (10^{30}) больше, чем количество миллисекунд, прошедших с момента Большого взрыва.

Задачи

Задача 175. Докажите, что сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей бесконечно мала.

Задача 176. Докажите, что произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей бесконечно мало.

Задача 177. Докажите, что произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной бесконечно мало.

Задача 178. Существует ли последовательность, которая не является бесконечно малой, но $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot a_{n+1}) = 0$?

Задача 179. О «силе» экспоненты

Исследуйте последовательность

$a_n = \frac{n^{1000}}{1.001^n}$. Является ли она бесконечно малой? Если да, найдите номер N , начиная с которого члены последовательности начинают убывать.

Задача 180. Относительный порядок малости

Сравните две БМП:

$\alpha_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\beta_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$. Определите, является ли одна из них бесконечно малой более высокого порядка.

Задача 181. Колебания и бесконечность

Пусть $a_n = \left(n^2 \sin \frac{\pi n}{2} + n\right)$. Является ли эта последовательность бесконечно большой? Ограничена ли она снизу?

Задача 182. Теорема Штольца³⁸

³⁸ Дискретное правило Лопиталья

Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

РАЗДЕЛ 2.10

Полезные теоремы о последовательностях

ПОДРАЗДЕЛ 2.10.1

Теорема Коши о связи пределов

Теорема 19

Коши

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность положительных чисел.
Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L,$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = L.$$

Док-во: Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$.

По определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies L - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon.$$

Запишем произведение неравенств для индексов от N до

$n - 1$:

$$(L - \varepsilon)^{n-N} < \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} < (L + \varepsilon)^{n-N}$$

$$(L - \varepsilon)^{n-N} < \frac{x_n}{x_N} < (L + \varepsilon)^{n-N}$$

Извлекая корень n -й степени и группируя константы, имеем:

$$\sqrt[n]{x_N(L - \varepsilon)^{-N}} \cdot (L - \varepsilon) < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_N(L + \varepsilon)^{-N}} \cdot (L + \varepsilon)$$

При $n \rightarrow \infty$ выражения $\sqrt[n]{C}$ стремятся к 1. По теореме о зажатой последовательности:

$$L - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq L + \varepsilon$$

В силу произвольности ε , предел равен L .

Пример 68 Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$$

используя теорему Коши.

Пусть $x_n = \frac{n^n}{n!}$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Задачи

Задача 183. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$

Задача 184. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1), x > 0$

Задача 185. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{\sqrt{n^2 + n}}$

Задача 186. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$

Теорема Штольца

Теорема 20

Штольц

Пусть $y_n \rightarrow +\infty$ и y_n строго возрастает. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

то существует и предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

Док-во: Рассмотрим случай конечного предела A . По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , такой что при $n > N$:

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < A + \varepsilon$$

Так как $y_n - y_{n-1} > 0$, запишем:

$$(A - \varepsilon)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (A + \varepsilon)(y_n - y_{n-1})$$

Запишем такие неравенства для всех индексов от $N + 1$ до n и просуммируем их:

$$(A - \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=N+1}^n (x_k - x_{k-1}) < (A + \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1})$$

Используем свойство телескопической суммы

$$\sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1}) = y_n - y_N :$$

$$(A - \varepsilon)(y_n - y_N) < x_n - x_N < (A + \varepsilon)(y_n - y_N)$$

Разделим всё на y_n (считаем $y_n > 0$ при больших n):

$$(A - \varepsilon) \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_N}{y_n} < (A + \varepsilon) \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)$$

Преобразуем к виду для $\frac{x_n}{y_n}$:

$$(A - \varepsilon) \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) + \frac{x_N}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < (A + \varepsilon) \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) + \frac{x_N}{y_n}$$

Устремим $n \rightarrow \infty$. Поскольку $y_n \rightarrow \infty$, слагаемые $\frac{y_N}{y_n}$ и $\frac{x_N}{y_n}$ стремятся к нулю. Пределы левой и правой частей при $n \rightarrow \infty$ равны $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$ соответственно. В силу произвольности ε , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Подпоследовательности и теорема Больцано – Вейерштрасса

Опр. 74 Пусть дана последовательность $\{x_n\}$. Если мы выберем бесконечную возрастающую последовательность натуральных индексов

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

то последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется **подпоследовательностью** исходной последовательности.

Теорема 21 (О пределе подпоследовательности) Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A (конечный или бесконечный), то любая её подпоследовательность также имеет предел A .

Подраздел 2.11.1

Теорема Больцано – Вейерштрасса

Это одна из центральных теорем анализа, утверждающая возможность выделения сходящегося процесса из любого ограниченного хаоса.

Теорема 22 **Больцано – Вейерштрасса** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Док-во: Применим метод **дихотомии** (принцип вложенных отрезков Кантора):

1. Пусть $\{x_n\}$ ограничена, т.е. все её члены лежат на отрезке $[a, b]$. Обозначим его $[a_0, b_0]$.
2. Разделим $[a_0, b_0]$ пополам. Хотя бы в одной из поло-

вин содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем эту половину и назовем её $[a_1, b_1]$. Из бесконечного набора индексов выберем n_1 такой, что $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

3. Повторим процесс: делим $[a_k, b_k]$ пополам, выбираем ту часть, где лежит бесконечно много членов, и называем её $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Выбираем индекс $n_{k+1} > n_k$ такой, что $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.
4. Мы получили систему вложенных отрезков, длина которых $(b - a)/2^k \rightarrow 0$. Согласно лемме Кантора, существует единственная точка C , общая для всех отрезков.
5. Так как $|x_{n_k} - C| \leq (b - a)/2^k$, то по теореме о зажатой последовательности $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = C$.

Пример 69

Доказательство теоремы фактически описывает алгоритм **бинарного поиска**. Даже если данные не отсортированы, мы можем сужать область поиска до тех пор, пока не «зажмем» предельную точку. В анализе данных это соотносится с поиском устойчивых паттернов в зашумленном сигнале.

Подраздел 2.11.2

Частичные пределы

Опр. 75

Предел любой сходящейся подпоследовательности называется **частичным пределом** исходной последовательности.

Задача 187. Найти частичные пределы последовательности $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. *Решение.* Рассмотрим члены последовательности: $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

- При $n = 4k + 1$, $x_n = \sin(\pi/2 + 2\pi k) = 1 \rightarrow 1$.
- При $n = 2k$, $x_n = \sin(\pi k) = 0 \rightarrow 0$.
- При $n = 4k + 3$, $x_n = \sin(3\pi/2 + 2\pi k) = -1 \rightarrow -1$.

Ответ: Множество частичных пределов — $\{-1, 0, 1\}$.

Интересные примеры и контрпримеры

1. Всюду плотные частичные пределы

Существует последовательность, частичными пределами которой являются **все** числа отрезка $[0, 1]$. Примером может служить перенумерованное множество всех рациональных чисел на этом отрезке. Из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\sqrt{2}/2$, к $\pi/4$ или к любому другому числу из $[0, 1]$.

2. Расходящаяся, но с частичными пределами

Последовательность

$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Она не имеет предела, но имеет два частичных предела: 1 и -1 . В программировании это похоже на *осцилляцию* (jitter) — сигнал прыгает между двумя устойчивыми состояниями.

3. Теорема о верхнем и нижнем пределах

Наибольший из частичных пределов называется верхним ($\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$), а наименьший — нижним ($\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$).

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

Задачи

Задача 188. Найти все частичные пределы последовательности

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Задача 189. Найти нижний и верхний пределы ($\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$) последовательности

$$x_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Задача 190. Может ли неограниченная последовательность иметь ровно один частичный предел? Приведите пример.

Задача 191. Доказать, что если подпоследовательности $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ и $\{x_{3n}\}$ сходятся, то и сама последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Задача 192. Из последовательности $x_n = \sin(n)$ (аргумент в радианах) выделили сходящуюся подпоследовательность. Какое максимальное значение может иметь её предел?

Вычислительный практикум: Пределы последовательностей

Задача 193. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{5n^2 + n}$.

Задача 194. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$.

Задача 195. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$.

Задача 196. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right)$.

Задача 197. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n+3}$.

Задача 198. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln n)$.

Задача 199. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^5}{3^n + n!}$.

Задача 200. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^2 + 1)}{\log_3(n^3 + 1)}$.

Задача 201. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + e^n)}{n}$.

Задача 202. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

Задача 203. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

Задача 204. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Задача 205. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

Задача 206. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$

Задача 207. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ где $a_n > 0$ и $A > 0$. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Задача 208. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n^2}$.

Задача 209. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$.

Задача 210. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Задача 211. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}$.

Задача 212. * Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Задача 213. * Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$.

Задача 214. * Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n}$.

Метод Штольца и суммирование

Вычислите пределы, используя дискретный аналог правила Лопиталья:

Задача 215. (Вывод формулы интегральной суммы)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}},$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Задача 216. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n}$.

Задача 217. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^n \ln \binom{n}{i}$ (Связь с энтропией).

Задача 218. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

Второй замечательный предел

Задача 219. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{\sqrt{n^2 + n}}.$

Задача 220. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ при $x > 0$.

Задача 221. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$

Задача 222. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n.$

Рекуррентные последовательности

Исследуйте на сходимость и найдите пределы:

Задача 223. $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2}.$

Задача 224. (Алгоритм Герона для \sqrt{b}) $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right),$
где $b > 0, a_1 > 0$.

Задача 225. $a_{n+1} = \sin(a_n), a_1 \in (0, \pi/2).$

Задача 226. $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}, a_1 = 1$ (Доказать расходимость и найти порядок роста).

Теорема о «зажатой» последовательности и оценки

Задача 227. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}.$

Задача 228. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$

Задача 229. (Классическая иерархия роста) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.

Задача 230. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ для $x \in \mathbb{R}$.

Сложные комбинаторные и иррациональные формулы

Задача 231. (Среднее колмогоровское) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

при $a, b > 0$.

Задача 232. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + n} \right)$.

Задача 233. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}$.

Задача 234. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

Глава 3

Предел и непрерывность функции

РАЗДЕЛ 3.1

Предел функции в точке

Опр. 76 Пусть функция f определена на множестве $D(f)$, x_0 - предельная точка этого множества, в самой точке x_0 функция f может быть не определена. Назовём **индуцированной проколотой δ -окрестностью точки x_0** множество $\dot{V}_\delta(x_0)$:

$$\dot{V}_\delta(x_0) = \dot{U}_\delta(x_0) \cap D(f).$$

где $\dot{U}_\delta(x_0)$ — проколотая δ -окрестность точки x_0 .

Опр. 77 ((О.-Л. Коши)) Число $A \in \mathbb{R}$ называют **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее от ε , такое что для $x \in D(f)$,

удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x \in D(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Замечание В дальнейшем мы будем рассматривать функцию f только на своей области определения (только индуцированные окрестности точки x_0), поэтому указание « $\forall x \in D(f)$ » будем опускать.

Выясним **геометрический смысл понятия предела функции $f(x)$ в точке x_0** . Все точки, абсциссы которых удовлетворяют неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta, \implies x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0$$

образуют $\dot{V}_\delta(x_0)$ – индуцированную проколотую δ -окрестность точки x_0 . Неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \implies A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

показывает, что образы этих точек $f(x)$ попадают в $U_\varepsilon(A)$ – ε -окрестность значения предела A . Значит, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

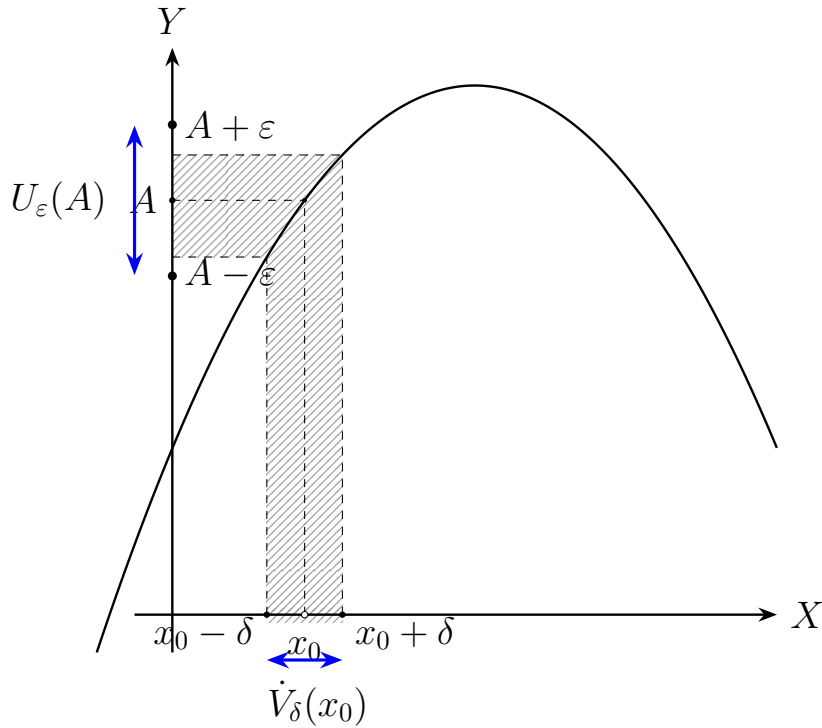
A , для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(A)$ найдётся такая проколотая δ -окрестность $\dot{V}_\delta(x_0)$, образ которой $f(\dot{V}_\delta(x_0))$ полностью попадет в $U_\varepsilon(A)$. Это позволяет сформулировать определение предела функции в точке на языке окрестностей.

Опр. 78 Число A называют **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(A)$ найдётся такая проколотая индуцированная δ -окрестность $\dot{V}_\delta(x_0)$, образ которой $f(\dot{V}_\delta(x_0))$ содержится в окрестности $U_\varepsilon(A)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists \dot{V}_\delta(x_0) : f(\dot{V}_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$$

ИЛИ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists \dot{V}_\delta(x_0) : \\ (\forall x \in \dot{V}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))$$



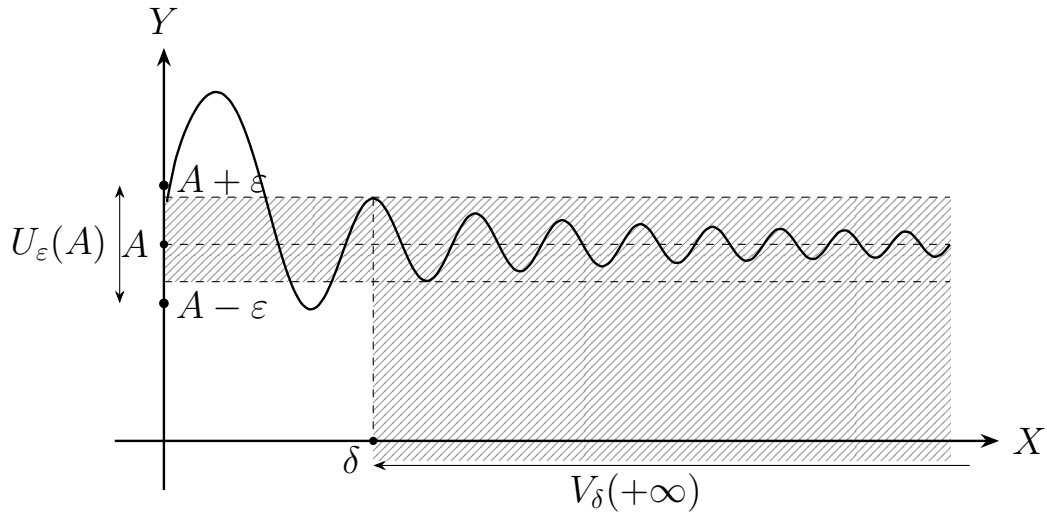
Предел функции в точке x_0 .

В случае, когда $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}}$, определение предела можно сформулировать следующим образом. Если $A \in \mathbb{R}, x_0 = +\infty$ (рис. 2), то:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (1.1)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists V_\delta(+\infty) : (\forall x \in V_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))$$



Предел функции при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 70

Аналогично дайте определение $\lim f(x) = A$, если

a) $A \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow -\infty$; b) $x \rightarrow +\infty$, $A \rightarrow +\infty$; c) $x \in \mathbb{R}$, $A \rightarrow -\infty$.

Решение

Учитывая определения окрестностей $+\infty$ и $-\infty$, получим:

a) на языке « ε - δ »:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (1.2)$$

на языке окрестностей:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists V_\delta(-\infty) : (\forall x \in V_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon) \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(+\infty) \exists \dot{V}_\delta(+\infty) : (\forall x \in \dot{V}_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(+\infty))$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon) \quad (1.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(-\infty) \exists \dot{V}_\delta(x_0) : (\forall x \in \dot{V}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(-\infty))$$

Можно сформулировать еще одно определение предела функции $f(x)$ в точке x_0 , если воспользоваться понятием предела последовательности.

Опр. 79 (Г. Гейне)

Число A называют **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любой последовательности точек $\{x_n\}$ ($x_n \in D(f), x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$), сходящейся к точке x_0 , последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A .

Теорема 23 Определение предела функции по Гейне эквивалентно определению предела функции по Коши.

Пример 71 Используя определение предела (1), докажите, что:

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} (12 - 6x - x^2) = 21;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Доказательство.

1. Наша задача заключается в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ подобрать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x + 3| < \delta(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство $|(12 - 6x - x^2) - 21| < \varepsilon$.

Найдём зависимость $\delta(\varepsilon)$.

Для этого преобразуем левую часть последнего неравенства:

$$\begin{aligned} |(12 - 6x - x^2) - 21| &= |-x^2 - 6x - 9| = \\ &= |-(x^2 + 6x + 9)| = |x^2 + 6x + 9| = |(x + 3)^2| = (x + 3)^2. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства $(x + 3)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x + 3| < \sqrt{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} : (0 < |x + 3| < \delta \Rightarrow |(12 - 6x - x^2) - 21| < \varepsilon).$$

Тогда по определению предела (1):

$$\lim_{x \rightarrow -3} (12 - 6x - x^2) = 21.$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ подберём такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при

$x > \delta(\varepsilon)$ выполняется:

$$\frac{x^4 + 2}{x - 1} > \varepsilon.$$

При $x > 1$ имеем оценку:

$$\frac{x^4 + 2}{x - 1} > \frac{x^4}{x - 1} > \frac{x^4}{x} = x^3.$$

Из неравенства $x^3 > \varepsilon$ получаем $x > \sqrt[3]{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.

То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \sqrt[3]{\varepsilon} : (x > \delta \Rightarrow \frac{x^4 + 2}{x - 1} > \varepsilon).$$

Значит, по определению предела (1.3), имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2}{x - 1} = +\infty.$$

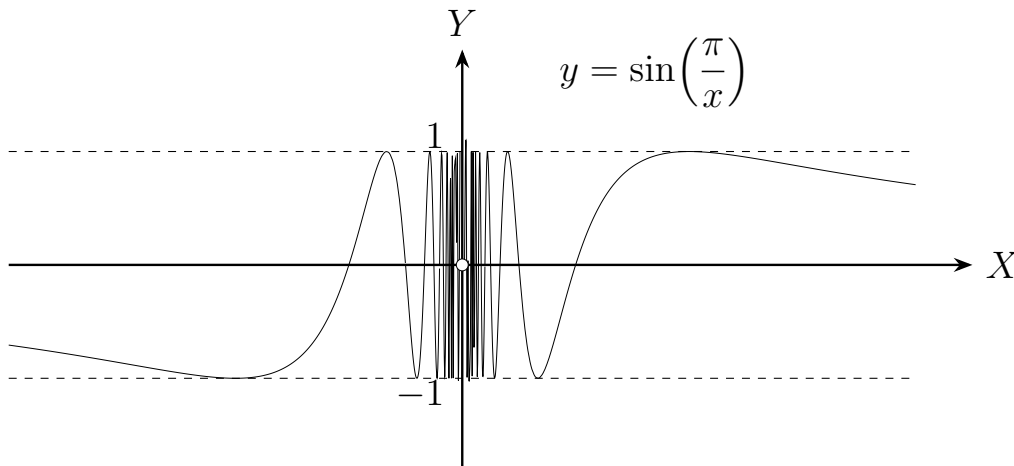


График функции $y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Пример 72

Докажите, что функция $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

Доказательство.

Воспользуемся определением предела по Гейне (2).

Чтобы доказать, что в точке $x = 0$ не существует предела функции $f(x)$, достаточно найти две последовательности аргумента $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, такие, что $x_n \rightarrow 0$, $x'_n \rightarrow 0$ и соответствующие им последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ имеют различные пределы.

а) Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

$$f(x_n) = \sin(\pi n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

б) Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$:

$$x'_n = \frac{2}{4n-1}, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0,$$

$$f(x'_n) = \sin\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1.$$

С учётом пунктов а) и б) получаем $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1$.

Значит, функция $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

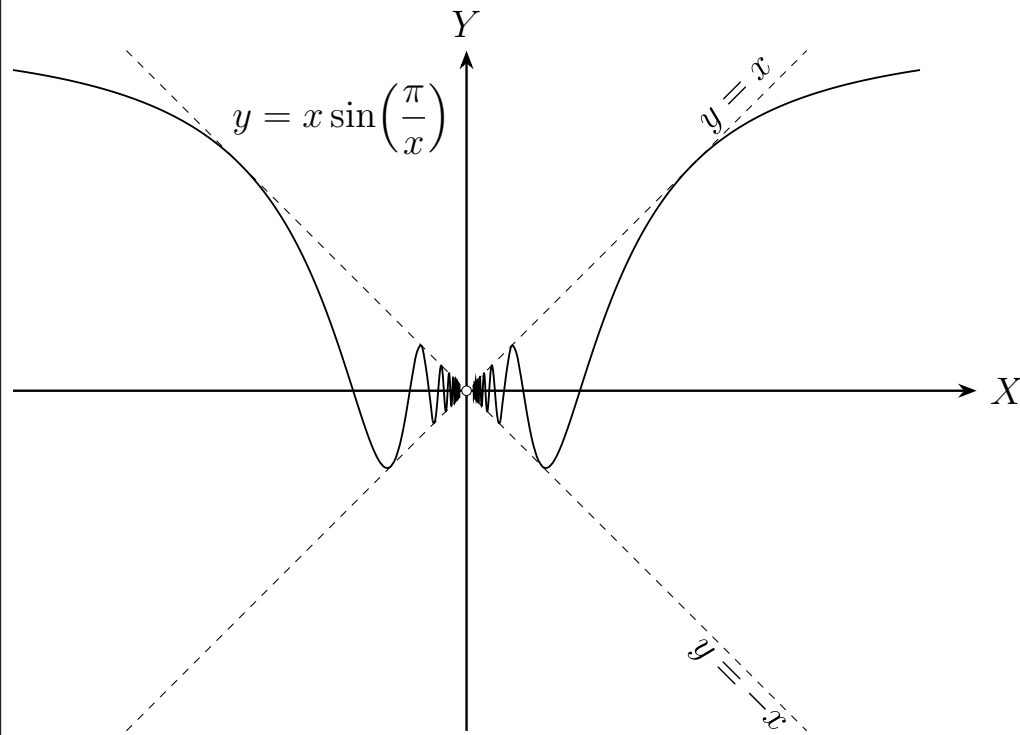


График функции $y = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Функция $y = \sin \frac{\pi}{x}$ такова, что образом любой, сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$ является $[-1, 1]$. Поэтому из геометрических соображений понятно, что условия определения предела не могут быть выполнены. Одна-

ко, если уменьшить разброс значений функции в окрестности $x = 0$ за счёт умножения синуса на x , функция $y = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ будет иметь предел в нуле: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$.

Докажем это.

Для этого оценим модуль:

$$\left| x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0 \right| = |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

РАЗДЕЛ 3.2

Свойства предела функции

Теорема 24 Единственность предела

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , то он единственный.

Теорема 25 Арифметика пределов

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 , то тогда существуют пределы суммы, произведения и частного этих функций, причём

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right).$$

Теорема 26 Предел композиции функций.

Пусть множество значений функции $y = \varphi(x)$, определённой на множестве X , входит в область определения функ-

ции $f(y)$.

Если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, причём $\varphi(x) \neq B$ при $x \neq x_0$, и предел $\lim_{y \rightarrow B} f(y) = C$, то функция $f \circ \varphi$ имеет предел в точке x_0 , равный C ($x_0, B, C \in \mathbb{R}$).

Теорема 27 **Предельный переход в неравенстве**

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0 и в некоторой проколотаой окрестности этой точки $f(x) \geq g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Теорема 28 **О пределе сжатой функции**

Если функция $f(x), g(x)$ и $h(x)$, заданные в некоторой окрестности $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$, удовлетворяют неравенству $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ($\forall x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0)$) и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, то существует также предел $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

Теорема 29 **О локальной ограниченности функции, имеющей предел**

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки x_0 .

Теорема 30 **О сохранении знака**

Если в точке x_0 существует предел функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, то найдётся такая проколотаая окрестность $\dot{V}_\delta(x_0)$, в которой функция будет иметь тот же знак, что и предел A .

РАЗДЕЛ 3.3

Односторонние пределы в точках

Пусть любая односторонняя δ -окрестность предельной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ области определения функции $f(x)$ не является

пустой.

Опр. 80 Число $A \in \mathbb{R}$ называют **левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, зависящее от ε , такое что если $x_0 - \delta < x < x_0$, то выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A, \quad f(x_0 - 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \\ (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Сформулируем определение левостороннего предела на языке окрестностей.

Опр. 81 Число $A \in \mathbb{R}$ называют **левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(A)$ найдётся такая левосторонняя δ -окрестность $V_\delta^-(x_0)$ точки x_0 , что $f(V_\delta^-(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists V_\delta^-(x_0) : \\ (x \in V_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)).$$

Опр. 82 Число $A \in \mathbb{R}$ называют **правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, зависящее от ε , такое что если $x_0 < x < x_0 + \delta$, то выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \quad f(x_0 + 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение правостороннего предела на языке окрестностей.

Опр. 83 Число $A \in \mathbb{R}$ называют **правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(A)$ найдётся такая правосторонняя δ -окрестность $V_\delta^+(x_0)$, что $f(V_\delta^+(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U_\varepsilon(A) \exists V_\delta^+(x_0) :$$

$$\forall x \in V_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Замечание. 1) аналогично случаям (1.3-5) можно определить бесконечные односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0 - 0) = \pm\infty$ и $f(x_0 + 0) = \pm\infty$; 2) Поскольку окрестности $-\infty$ и $+\infty$ по определению односторонние:

$$U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta), \quad U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$$

то пределы функции $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ являются односторонними.

Теорема 31 Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в некоторой окрестности $V_\delta(x_0)$, то существуют конечный левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$ в точке x_0 .

Критерий существования предела функции в точке

Теорема 32 **Критерий существования предела функции в точке с использованием односторонних пределов**
Для того чтобы существовал предел функции $f(x)$ в точке x_0 , равный A , необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны A оба односторонних предела функции в

этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A.$$

Теорема 33 **Критерий существования предела функции в точке по Больцано-Коши**

Для того чтобы существовал конечный предел функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $\dot{V}_\delta(x_0)$, что для любых $x', x'' \in \dot{V}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

РАЗДЕЛ 3.4

Замечательные пределы

ПОДРАЗДЕЛ 3.4.1

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Пример 73 Докажите очевидные следствия из первого замечательного предела:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

1) Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1;$$

2) Второй предел докажем, используя замену переменной:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} x = \sin t; \quad t = \arcsin x \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1;$$

3) Используя замену переменной, аналогично предыдущему

му случаю, получим третий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t; \quad t = \operatorname{arctg} x \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1.$$

ПОДРАЗДЕЛ 3.4.2

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел был рассмотрен в разделе «Предел последовательности»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Пример 74

Докажите, что предел $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \rightarrow \pm\infty$ также равен e .

Доказательство. Пусть $x > 0$. Положим $n = [x] \Rightarrow n \leq x \leq n + 1$. Рассмотрим следующие неравенства:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Откуда имеем

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \quad (*)$$

Найдем пределы крайних выражений неравенства (*), учитывая $x \rightarrow +\infty$ и $n = [x] \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Тогда из теоремы о сжатой функции следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть $x < 0$. Рассмотрим предел при $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left[\begin{array}{l} t = -x - 1; \quad x = -t - 1 \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = e. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (**)$$

Пример 75 Докажите следствие из предела (**): $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство. Используя подстановку, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}; \quad x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \end{aligned}$$

Замечание Мы дополнили \mathbb{R} двумя элементами: $-\infty$ и $+\infty$
 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Символ бесконечности ∞ без знака используется, чтобы подчеркнуть, что рассуждения верны и для $x \rightarrow 0 + 0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty$, и для $x \rightarrow 0 - 0 \Rightarrow t \rightarrow -\infty$.

Подраздел 3.4.3

Дополнительные замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример 76 Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$).

Доказательство: Воспользуемся свойствами логарифмов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Пример 77 Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a > 0$).

Доказательство: Перейдём к новой переменной

$$y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(1+y),$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a.$$

РАЗДЕЛ 3.5

Бесконечно малые функции

Опр. 84 Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой в точке** $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Пример 78 Функция $f(x) = \sin(x)$ является бесконечно малой в точке $x_0 = 0$ так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$, однако не является бесконечно малой в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

Пример 79 | Функция $f(x) = (e^{\frac{1}{x}} - 1) \cdot \cos(x)$ бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$,
т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) \cdot \cos(x) = 0$

Пример 80 | В общем случае, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то разность $\alpha(x) = f(x) - A$, очевидно, будет бесконечно малой функцией в точке x_0 .
Действительно, $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x , попадающих в δ -окрестность точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, значит, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - A| = 0$
С другой стороны, если $\alpha(x) = f(x) - A$ бесконечно малая в точке x_0 , то $f(x) = A + \alpha(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный A . Таким образом, мы доказали ещё один **критерий существования конечного предела функции**.

Теорема 34 | Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы разность $f(x) - A$ была бесконечно малой в точке x_0 .

Свойства бесконечно малых:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке x_0 функций есть функция бесконечно малая в точке x_0 .
2. Произведение конечного числа бесконечно малых в точке x_0 функций есть функция бесконечно малая в точке x_0 .
3. Произведение функции, ограниченной в некоторой окрестности точки x_0 , на бесконечно малую в x_0 есть бесконечно малая в точке x_0 функция.

ПОДРАЗДЕЛ 3.5.1

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ - две бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Опр. 85 Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $\beta(x)$ в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$. Читается так: « $\alpha(x)$ равно о малое от $\beta(x)$ ».

Свойства бесконечно малых более высокого порядка:

1) $o(\beta(x)) \pm o(\beta(x)) = o(\beta(x))$

2) если $\alpha(x) = o(\beta(x))$, то $o(\beta(x) \pm \alpha(x)) = o(\beta(x))$

3) если $\alpha(x), \beta(x)$ бесконечно малые функции в точке x_0 , то $\alpha(x), \beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждый из сомножителей, т.е.

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = o(\alpha(x)) \quad \text{и} \quad \alpha(x) \cdot \beta(x) = o(\beta(x))$$

4) $o(o(\beta(x))) = o(\beta(x))$

Опр. 86 Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка** (имеют одинаковый порядок малости) в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, где K конечное число, отличное от нуля.

Опр. 87 Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Читается: « $\alpha(x)$ эквивалентна $\beta(x)$ ».

Замечание. Определенное таким образом отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Пусть $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$, заданные в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$, являются бесконечно малыми в точке x_0 . Тогда:

а) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$; в) $\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$; с) $\begin{cases} \alpha(x) \sim \beta(x) \\ \beta(x) \sim \gamma(x) \end{cases} \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x)$

Эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$

Следствия первого замечательного предела	Следствия второго замечательного предела
$\sin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\arcsin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$(1+x)^m - 1 \sim mx, \quad m \in \mathbb{R}$

Пример 81 | Функция $\alpha(x) = x^3$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x) = x$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Пример 82 | Бесконечно малые функции $\alpha(x) = \log_3\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ и $\beta(x) = \frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow +\infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 3}, \quad \text{конечен и отличен от нуля.}$$

Пример 83 | Бесконечно малые $\alpha(x) = \operatorname{arctg} x$, $\beta(x) = e^x - 1$ в точке 0

являются эквивалентными, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1} = 1.$$

Пример 84

Докажем, что $o(\beta(x)) \pm o(\beta(x)) = o(\beta(x))$.

Пусть $\gamma_1(x) = o(\beta(x))$ и $\gamma_2(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma_1(x)}{\beta(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma_2(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma_1(x) \pm \gamma_2(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma_1(x)}{\beta(x)} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma_2(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то есть $\gamma_1(x) \pm \gamma_2(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 35

(О замене на эквивалентные бесконечно малые.)

Пусть $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ — бесконечно малые функции в точке x_0 . Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Пример 85

Найдите:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cdot \ln(1+x)}{\cos(x) \cdot (2^{x^2} - 1)}$$

Решение: найдём эквивалентные бесконечно малые для бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$ в числителе и знаменателе дроби: $\sin(2x) \sim 2x$, $\ln(1+x) \sim x$, $2^{x^2} - 1 \sim x^2 \cdot \ln(2)$. $\cos(x)$ не является бесконечно малой в точке $x_0 = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$.

По теореме о замене на эквивалентные бесконечно малые получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cdot \ln(1+x)}{\cos(x) \cdot (2^{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{1 \cdot x^2 \cdot \ln(2)} = \frac{2}{\ln(2)}.$$

Бесконечно большие функции

Опр. 88 Функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует определённая связь.

Теорема 36

1. Если функция $f(x)$ в точке x_0 бесконечно большая, то в некоторой окрестности точки x_0 определена функция $\frac{1}{f(x)}$ и она является бесконечно малой в точке x_0 .
2. Если функция $f(x)$ в точке x_0 бесконечно малая и $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 , то функция $\frac{1}{f(x)}$ в точке x_0 является бесконечно большой.

Следствие 8 Если $g(x)$ — бесконечно большая в точке x_0 , а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ — бесконечно малая в точке x_0 .

Следствие 9 Если $g(x)$ — бесконечно малая в точке x_0 и $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 , а $f(x)$ такова, что существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ — бесконечно большая в точке x_0 .

Неопределённости

Теоремы о пределе суммы, произведения, частного с учётом понятий бесконечно малой и бесконечно большой величины

не дают ответа в следующих случаях, которые О.-Л. Коши в «Алгебраическом анализе» назвал «неопределённостями»:

1. $\frac{б.м}{б.м}$ — неопределённость вида “ $\frac{0}{0}$ ”
2. $\frac{б.б}{б.б}$ — неопределённость вида “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”
3. $б.м \cdot б.б$ — неопределённость вида “ $0 \cdot \infty$ ”
4. $б.б - б.б$ — неопределённость вида “ $\infty - \infty$ ”

Неопределённости могут возникнуть и у показательной-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

« 1^∞ », « ∞^0 », « 0^0 ». В этих случаях прибегают либо к преобразованиям, либо к замечательным пределам, которые позволяют раскрыть неопределённость (то есть избавиться от неё).

Подраздел 3.8.1

Непрерывность функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определённую в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Опр. 89 Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in \mathbb{R}$, если существует предел функции в точке x_0 , равный значению в этой точке:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Опр. 90 Точка, в которой функция $f(x)$ непрерывна, называется **точкой непрерывности функции** $f(x)$.

Замечание Пусть функция $f(x)$ определена не в некоторой окрестности, а на множестве X и $x_0 \in X$. Тогда функцию называют непрерывной в точке x_0 , если эта точка — изолированная точка множества X или x_0 — предельная точка X и имеет равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Можно дать ещё одно определение непрерывности функции.

Равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ эквивалентно равенству $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

$$f(x_0)) = 0.$$

Если $x \rightarrow x_0$, то $\Delta x \rightarrow 0$, значит, для непрерывной в точке x_0 функции $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Опр. 91 Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x) \rightarrow 0.$$

Пример 86 Функция $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ непрерывна в любой точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Действительно, для этой функции $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0$, поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$. Следовательно, постоянная функция непрерывна на всей числовой оси.

Пример 87 Функция $f(x) = x^2 + 3$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Доказательство: $f(1) = 4$, покажем, что $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$.

Воспользуемся определением предела на языке « ε - δ » и рассмотрим модуль разности:

$$|(x^2 + 3) - 4| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$$

Так как в некоторой окрестности точки $x_0 = 1$ $|x + 1| \leq 3$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, что если выполняется неравенство $|x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, то $|f(x) - 4| = |(x^2 + 3) - 4| < \varepsilon$. Следовательно, по определению предела $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$, и согласно определению 10 $f(x) = x^2 + 3$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Пример 88 Функция $f(x) = x \cdot (1 - \chi(x))$, где

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

— функция Дирихле, непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Действительно, предел произведения бесконечно малой функции x на ограниченную функцию $1 - \chi(x)$, согласно свойству (3) бесконечно малых является бесконечно малой функцией в точке x_0 , $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ и $f(0) = 0$. Значит,

$f(x) = x \cdot (1 - \chi(x))$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Следует отметить, что в любой другой точке $x_0 \neq 0$ предел функции $f(x)$ не существует, так как не существует предел функции $\chi(x)$, а, значит, функция $f(x)$ не является непрерывной в любой точке $x_0 \neq 0$.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке будут также непрерывны функции

$$C \cdot f(x) (C \in \mathbb{R}), f(x) + g(x); f(x) \cdot g(x); \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0).$$

2. Если функция непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность этой точки, в которой функция будет иметь тот же знак, что и $f(x_0)$.

4. Если функция $\varphi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке, функция $f(t)$ определена в некоторой окрестности точки $t_0 = \varphi(x_0)$ и непрерывна в точке t_0 , то функция $f \circ \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 .

ПОДРАЗДЕЛ 3.8.2

Односторонняя непрерывность

Опр. 92 Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа в точке** $x_0 \in \mathbb{R}$, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Опр. 93 Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева в точке** $x_0 \in \mathbb{R}$, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание 1) очевидно, что для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и непрерывна справа в этой точке;
2) если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, то естественно говорить о непрерывности слева функции $f(x)$ в точке $x = b$ и непрерывности в точке $x = a$.

Пример 89 Приведём пример односторонней непрерывности функции. Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, она непрерывна только справа во всех целочисленных точках числовой прямой.

Опр. 94 Функция называется **непрерывной на множестве X** , если она непрерывна в каждой точке множества X .

Теорема 37 Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке её области определения.

РАЗДЕЛ 3.9

Основные свойства функции, непрерывной на отрезке

Теорема 38 (**1-я теорема Вейерштрасса.**) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Теорема 39 (**2-я теорема Вейерштрасса.**) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

Теорема 40 (**1-я теорема Больцано-Коши.**) Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдётся хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Теорема 41 (**2-я теорема Больцано-Коши.**) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, принимая любые два значения на $[a, b]$, функция принимает и всякое промежуточное

значение.

РАЗДЕЛ 3.10

Точки разрыва

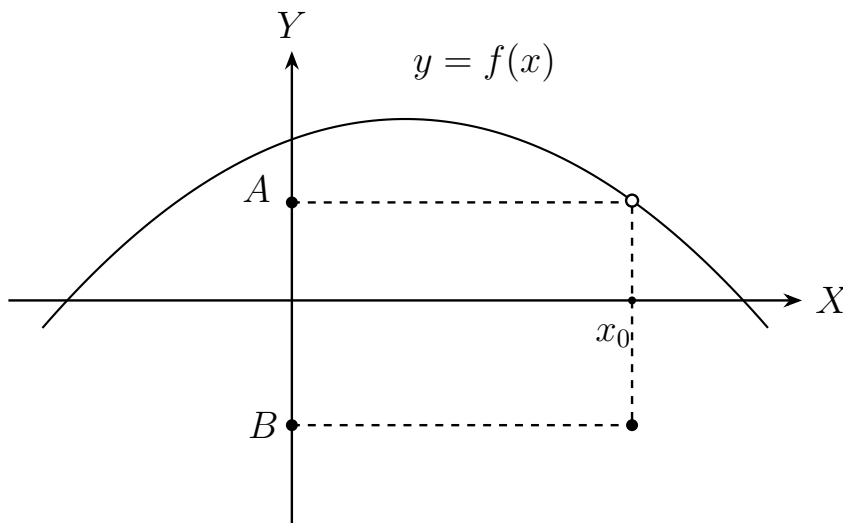
Опр. 95 Точка x_0 , предельная точка $D(f)$, называется **точкой разрыва функции** $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в этой точке x_0 . Функцию $f(x)$ называют **разрывной** в точке x_0 .

ПОДРАЗДЕЛ 3.10.1

Классификация точек разрыва функции

Устранимый разрыв

Опр. 96 Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, но либо $f(x_0) \neq A$, либо $x_0 \notin D(f)$, то разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называют **устранимым**.



Устранимый разрыв.

В самом деле, этот разрыв можно легко устранить, доопределив функцию $f(x)$ в точке x_0 по непрерывности, положив $f(x_0) \stackrel{def}{=} A$. Заданная таким образом функция будет непрерывна в точке x_0 .

Пример 90 | Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв

в точке $x = 1$, так как

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (2x - 1) = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq 0 = f(1).$$

По теореме 11 функция $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ непрерывна на $(1, +\infty)$ как элементарная, аналогично функция $2x - 1$ непрерывна на $(-\infty, 1)$, а в точке $x = 1$, $f(x)$ можно доопределить по непрерывности, изменив её значение в той точке следующим образом: $f(1) = 1$. Тогда функция

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{если } x > 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

будет непрерывна на всей числовой оси.

Пример 91 | Функция $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (см. рис. 4) имеет устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$. Существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$, однако в точке $x = 0$ функция не определена.

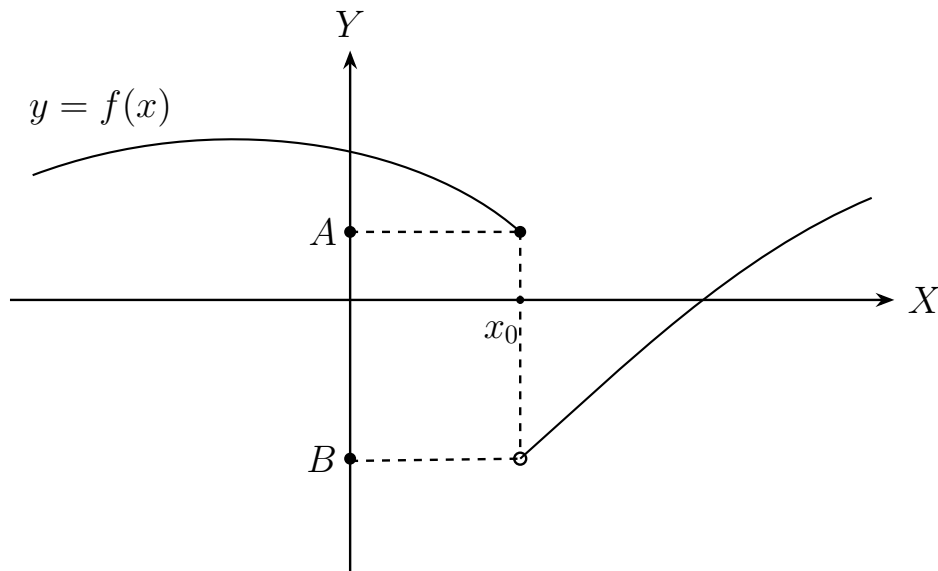
Доопределим её по непрерывности:

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В результате, $f_1(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ так как $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = f_1(0)$.

2. Разрыв I рода (конечный разрыв, скачок)

Опр. 97 Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **точкой разрыва 1-го рода** (или **точкой конечного разрыва**), если в этой точке существует два конечных односторонних предела, не равных друг другу: $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.



Разрыв I рода.

Говорят, что в точке x_0 функция допускает скачок, величина которого равна разности односторонних пределов: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Пример 92 | Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e\left(\frac{1}{x}\right)}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

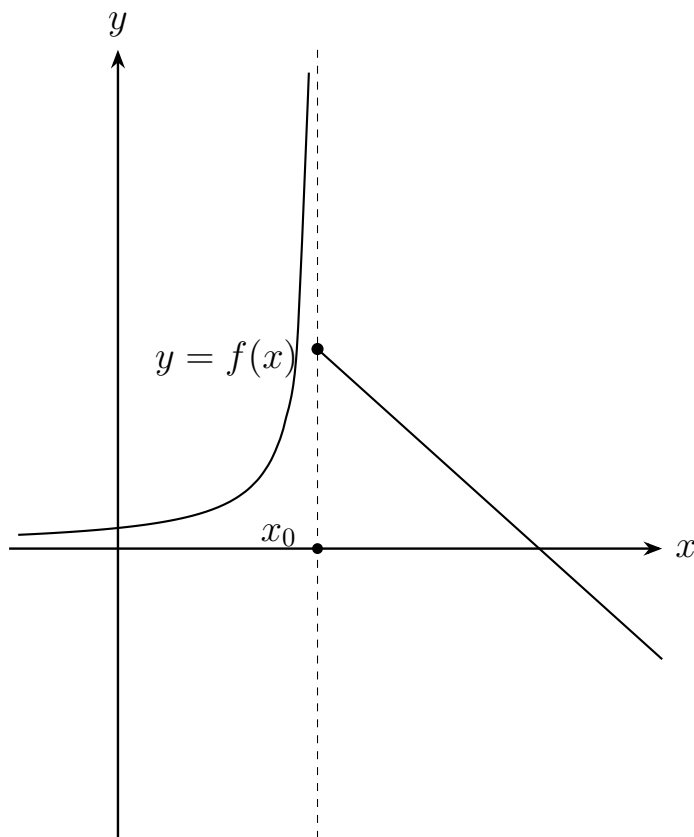
имеет разрыв I рода в точке $x = 0$, так как

$$f(0 - 0) = -1 \neq 0 = f(0 + 0).$$

Величина скачка в точке $x = 0$ равна $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 0 - (-1) = 1$.

3. Разрыв II рода (бесконечный разрыв)

Опр. 98 Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **точкой разрыва 2-го рода** (или **точкой бесконечного разрыва**), если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке бесконечен или не существует.



Пример 93

Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x+3}, & x \neq -3, \\ 1, & x = -3. \end{cases}$ имеет разрыв второго рода в точке $x = -3$, так как $f(-3-0) = -\infty$, $f(-3+0) = +\infty$.

РАЗДЕЛ 3.11

Задачи для самостоятельного решения

Задача 235. Пользуясь определением предела, докажите, что

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) = 5$;

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$;

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)^2 = 16$;

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$;

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$;

7. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$;

4. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4} = 3$;

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + x - 6} = 1$.

Задача 236. Запишите в символической форме на языке « ε - δ » определение предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ для случая:

a) $A = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$; b) $A = +\infty$, $x_0 = -\infty$;

c) $A = -\infty$, $x_0 = +\infty$; d) $A = -\infty$, $x_0 = -\infty$.

Задача 237. Запишите в символической форме на языке окрестностей определение предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ для случая:

a) $A = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$; b) $A = +\infty$, $x_0 = -\infty$;

c) $A = -\infty$, $x_0 = +\infty$; d) $A = -\infty$, $x_0 = -\infty$.

Задача 238. Пользуясь определением предела (1), докажите, что

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x - 4)^2} = +\infty$;

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$;

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3) = +\infty$;

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$;

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$;

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{x}) = -\infty$;

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 4x^3 + x + 6}{2x^4 + x^2 + 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 7}{x^4 + 6x^2 - 8}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 2x^4 - x^3 - 3}{x^7 - 4x^5 + x^2 + 4}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^4}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + x^{11} + 7x^{13})^3}{(1 + x^4)^{10}}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 + \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^4 - 1}}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[3]{x^4 - 1}}$
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7 + x^3 + 1} - 2x}{x^2 + \sqrt[5]{x + 8}};$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sqrt[3]{x^6 + 5x - 1}}{\sqrt[5]{32x^{10}} + 3}.$

Задача 242. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^5 - 2x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{(x - 1)^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$

Задача 243. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{\sqrt{8 - x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{14 + x} - 4}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^3 + x + 1} - 2 - x}{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7 + 2x - x^2} - \sqrt{1 + x + x^2}}{2x - x^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 26} - 3}{x^2 - 1};$
6. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x - 4}}{\sqrt{2x + 9} - 1};$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$

Задача 244. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 10x - 9} - x)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2});$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3});$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2});$
5. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{20}{4 - x^2} - \frac{5}{x + 2} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x - x^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{m}{1 - x^m} \right)$, $m, n \in \mathbb{N}$;
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$;
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln(e^x + e^{-x}) \right)$.

Задача 245. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5)(\ln(x - 3) - \ln x)$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg}(2x)$ 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right)$;
3. $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} x \right)$ 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)$.

Задача 246. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\beta \neq 0$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{\sin(bx)}$ 9. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + 5y)}{y}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin 3x}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + \sin x} - 1}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5 - \sqrt{x + 25}}$ 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(5x)} - e^{\sin x}}{\ln(1 + 2x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin(6x) - \sin(7x)}$ 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \sin^2 2x} - \sqrt{1 + \sin^2 x}}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + x) + \ln(2 - x) - 2 \ln 2}{\ln(1 - x^2)}$;
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{16^x - 4^x}{x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} - \sqrt[4]{1 - 2x^2}}{x^2}$.

Задача 247. Найдите значения пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{27 - x^3}$ 3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\pi - x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x - 3)}{x^2 - 2x - 3}$;

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}; \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

Задача 248. Найдите значения пределов.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1+4x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{x+5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-1} \right)^x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x^4)^{\frac{1}{\sin^7 x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-x+3} \right)^x;$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\sin(\pi x)};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\sqrt{x^2+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}}.$$

Задача 249. Сравните бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$1) \alpha(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad \beta(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1;$$

$$2) \alpha(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}, \quad \beta(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = +\infty;$$

$$3) \alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad \beta(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$$

$$4) \alpha(x) = \sin^2 x, \quad \beta(x) = \sqrt{\cos(2x)} - 1, \quad x_0 = 0.$$

Задача 250. Исследуйте функцию на непрерывность:

$$1. f(x) = \frac{2-x}{x+1};$$

$$3. f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{(x^2+5x+6)^2}}.$$

$$2. f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2};$$

Задача 251. Найдите точки разрыва функции и определите

характер разрывов:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} & 4) \quad f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \\
 2) \quad f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x+1}} & 5) \quad f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} \\
 3) \quad f(x) = \frac{\cos x}{x} & 6) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ 0, & x = -1, \\ x^2 - 2, & x > -1. \end{cases}
 \end{array}$$

Задача 252. Существуют ли такие значения параметров a и b , чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на всей числовой прямой? Если при определенных значениях этих параметров функция $f(x)$ имеет разрывы, то определите их характер. При каких значениях параметров a и b функция непрерывна слева (справа) в точках разрыва?

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} - 1, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases} & 6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-2}} + a, & x < 2, \\ a + b, & x = 2, \\ \frac{\ln(1 + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} - 2}, & x > 2; \end{cases} \\
 2. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(bx)}{2x^2}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 0; \end{cases} & 7. \quad f(x) = \begin{cases} 4x + a, & x \leq -2, \\ ax^2 + bx, & -2 < x \leq 2, \\ \frac{5x^3 - 18x^2 + 12x + 8}{x^3 - 3x^2 + 4}, & x > 2; \end{cases} \\
 3. \quad f(x) = \frac{a}{1 - 2^{\frac{1}{x-1}}}; & 8. \quad f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1. \end{cases} \\
 4. \quad f(x) = \begin{cases} a \cdot 2^{\frac{1}{x+3}}, & x < -3, \\ b, & x = -3, \\ 2^{\frac{1}{x+3}}, & x > -3; \end{cases} & \\
 5. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(ax)}{x}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}, & x > 0; \end{cases} &
 \end{array}$$

Задача 253. При каком значении параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = 0$? При каких значениях a функция $f(x)$ будет разрывной в точке $x = 0$? Ответ обос-

нуйте.

Задача 254. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \in \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна во всех точках числовой прямой, а при каких имеет хотя бы одну точку непрерывности.

Литература

- [1] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — М.: Издательство МЦНМО, 2019 (10-е издание, исправленное). — 564 с.
- [2] Эрнст Хайрер (Ernst Hairer), Герхард Ваннер (Gerhard Wanner). Математический анализ в свете его истории. — М.: Издательство Научный мир — 2008. — 396 с.
- [3] Дедекин Р. Что такое числа и для чего они служат. — М.: Издательство URSS, 2015. — 98 с.
- [4] Антонио Дуран — Истина в пределе. — Издательство Де Агостини, 2014. — 144 с.
- [5] Вацлав Серпинский — О теории множеств. — М.: Издательство Просвещение, 1966 — 60 с.
- [6] Юшкевич А.П ., Березкина Э.И., Володарский А.И. и др. — История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах.— М.: Издательство Наука, 1970.

Зубок Дмитрий Александрович
Бровкина Екатерина Анатольевна
Ржонсницкая Юлия Борисовна
Брылевская Лариса Ивановна
Тертычный Владимир Юрьевич

Введение в математический анализ 1 семестр

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел

Университета ИТМО

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А