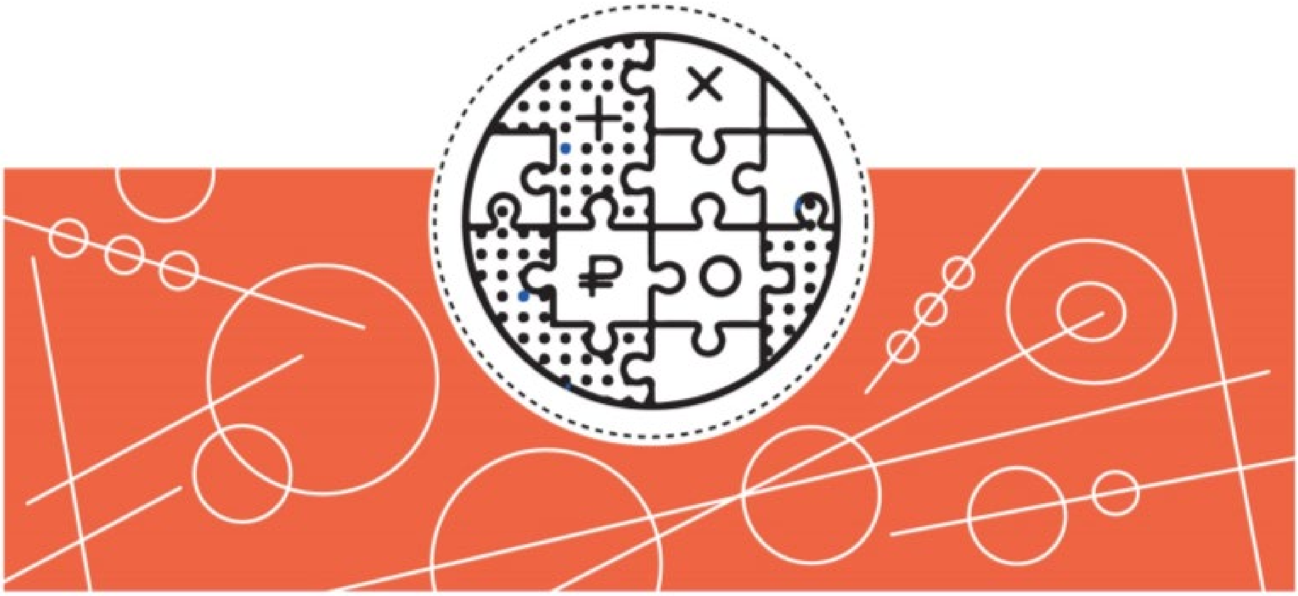
А.И. ПОПОВ, И.Ю. ПОПОВ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ



Санкт-Петербург
2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 03.03.02, 04.03.01, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05
в качестве Учебно-методическое пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Санкт-Петербург
2026

Попов А.И., Попов И.Ю. Расчетно-графическая работа по теории устойчивости и уравнениям в частных производных – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 37 с.

Рецензент:
Уздин Валерий Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") физического факультета, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. Пособие включает в себя задачи по следующим темам: «Теория устойчивости», «Циклы и предельные циклы», «Теория бифуркаций» и «Уравнения в частных производных»

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.
Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента. ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

Содержание

Методические указания

Расчетно-графическая работа (РГР) включает в себя задачи по темам: «Теория устойчивости», «Циклы и предельные циклы», «Теория бифуркаций» и «Уравнения в частных производных». Методические указания не содержат полного изложения теории, а лишь напоминают некоторые факты и типовые приёмы. Для части заданий разобраны типовые примеры.

Каждый студент обязан выполнить десять заданий, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

РГР следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие. Все чертежи и рисунки следует сделать на миллиметровке, затем подклеить их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения. По окончании решения написать ответ.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к работе, то есть провести защиту РГР.

Задание 1. Устойчивость по определению и с помощью систем первого приближения

Пример выполнения задания 1

Пример 1. Необходимо определить характер устойчивости каждой точки покоя автономной системы по первому приближению

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

Из условий $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$ найдём точки покоя:

$$\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$$

Точки покоя: $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

Проанализируем характер устойчивости точки покоя $(0, 1)$. Для этого в автономной системе сделаем замену $y - 1 = y_1$, а правые части автономной системы разложим в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $(0, 0)$, которая будет являться точкой покоя новой системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y_1} = -4x + o(x). \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$. Так как один из корней имеет положительную вещественную часть ($\lambda_1 > 0$), значит точка покоя $(0, 1)$ неустойчива.

Для исследования устойчивости точки покоя $(0, -1)$ в автономной системе сделаем замену $y + 1 = y_1$. Тогда точка $(0, -1)$ перейдет в $(0, 0)$ и можно в окрестности точки $(0, 0)$ разложить в ряд Тейлора правые части новой системы. Получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (y_1 - 1)^2 = -2x + 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y_1} = -4x + o(x). \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{7}$, $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{7}$.

Оба корня имеют отрицательные вещественные части, значит точка покоя $(0,-1)$ асимптотически устойчива.

Пример 2. Исследовать характер устойчивости точек покоя автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -xy - y^3. \end{cases}$$

Единственная точка покоя системы – это $(0,0)$. В этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не имеет собственных чисел, поэтому воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению не получится. Тогда попробуем подобрать функцию Ляпунова. Если взять в качестве функции $V(x,y) = x^2 + y^2$, то полная производная, составленная в силу автономной системы

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(-x+y^2) + \frac{\partial V}{\partial y}(-xy-y^3) = 2x(-x+y^2) + 2y(-xy-y^3) = \\ = -2(x^2+y^4) \leqslant 0,$$

причем $\dot{V}(x,y) = 0$ лишь при $x = y = 0$. По теореме Ляпунова отсюда следует, что точка покоя $(0,0)$ асимптотически устойчива.

Варианты задания 1

Используя определение устойчивости по Ляпунову, исследовать устойчивость решений следующих уравнений с начальными условиями:

1. $\begin{cases} 3(t-1)\dot{x} = x, \\ x(2) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - t^2 x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = t - x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2t\dot{x} = x - x^3, \\ x(1) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (1+t^2)\dot{x} = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Проанализировать точки покоя на устойчивость с помощью системы первого приближения:

6. $\begin{cases} \dot{x} = -3 + 2x + y, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(xy). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - x(3y+2) - 9y^2, \\ \dot{y} = \ln \frac{1+x}{1-2x}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^3y + y^2, \\ \dot{y} = \ln(x^3+y) - 3y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x-y), \\ \dot{y} = e^{2xy+x+y} - 1. \end{cases}$

11. $\ddot{x} + \dot{x} = \ln(1 - 3x + x^2 - \dot{x})$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 8y + 3, \\ \dot{y} = \ln \frac{x}{y}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x, \\ \dot{y} = \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = e^{xy} + y^2 - 3, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x+y), \\ \dot{y} = x^3 + y^3 - 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = e^{\frac{xy^3}{2}} + y^2 - 3, \\ \dot{y} = 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{y^5}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2-2y} - e^{2x}, \\ \dot{y} = -x - 2y - y^2. \end{cases}$

19. $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}$.

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x^2, \\ \dot{y} = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1+2x+2y^2}. \end{cases}$

Задание 2. Устойчивость линейных систем и систем первого приближения

Варианты задания 2

Исследовать характер устойчивости точки покоя $(0,0,0)$ для линейных систем.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x - z, \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z, \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = -6x + 7y + z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -x + z, \\ \dot{y} = -y - z, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y, \\ \dot{z} = 3x + 2y + 4z. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = 3x + 5y - z, \\ \dot{z} = -x + 2z. \end{cases}$

Исследовать на устойчивость нулевое решение при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3x}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

Задание 3. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова и Четаева

Варианты задания 3

Исследовать характер устойчивости точки покоя $(0, 0)$ для автономных систем с помощью функции Ляпунова вида $V(x, y) = ax^2 + by^2$.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^3, \\ \dot{y} = -2x - y^3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2, \\ \dot{y} = xy - x^2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = -y - 2x^2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = -4xy^2 - 2y^3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = xy + y^3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x^3, \\ \dot{y} = 2x + y^3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -4x^2y - 2x^3, \\ \dot{y} = -x^2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -3x^3 + y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - y^3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 3y, \\ \dot{y} = 4x - y^3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -x^5 - 5y, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и использовав теоремы Ляпунова или Четаева.

13. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$

Задание 4. Условия Рауса-Гурвица. Критерий Михайлова

Варианты задания 4

Исследовать устойчивость нулевое решение следующих уравнений, используя критерий Рауса-Гурвица либо геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова).

1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$
3. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$
4. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$
5. $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$
6. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$
7. $y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$
8. $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$
9. $y^{IV} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0.$
10. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$
11. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$
12. $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$
13. $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$
14. $y^{V} + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$
15. $y^{V} + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$
16. $y^{V} + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$
17. $y^{V} + 2y^{IV} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$
18. $y^{IV} + y''' + 4y'' + 2y' + 2y = 0.$
19. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$
20. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' + 2y' + y = 0.$

Задание 5. Исследование положений равновесия. Задачи с параметром

Варианты задания 5

Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво:
1. $y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$
2. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$
3. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0.$
4. $y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0.$
5. $ay^{IV} + y''' + y'' + y' + by = 0.$
6. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0.$
Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение системы асимптотически устойчиво:

7. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + x + ay). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

Найти все точки покоя и исследовать их на устойчивость для систем:

13. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

Задание 6. Поведение фазовых траекторий системы

Пример выполнения задания 6

Для автономной системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases}$$

где функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области Ω, точка покоя (a_1, a_2) называется негрубой, если собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы линеаризованной в точке (a_1, a_2) системы либо равны $(\lambda_1 = \lambda_2)$, либо вещественная часть одного из значения равна нулю ($\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$, или $\mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$). В окрестности негрубой точки покоя фазовые траектории нелинейной автономной системы и её линеаризации могут существенно отличаться.

Пример 1. Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности точки покоя $(0, 0)$ для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + ay(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Точка $(0, 0)$ является центром для линеаризованной системы в точке $(0, 0)$ при $a = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

так как матрица линеаризации имеет собственные числа $\lambda = \pm i$.

Для исследования поведения фазовых траекторий заданной системы при $a \neq 0$, удобно использовать полярные координаты $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$. Сделав необходимые замены, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi + ar^3\cos\varphi, \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + ar^3\sin\varphi, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} \dot{r} = ar^3, \\ \dot{\varphi} = r. \end{cases}$$

При $r = 0$ имеем точку покоя. При $r > 0$ $\varphi = t + C$ и $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$, а $\dot{r} < 0$ при $a < 0$ и $\dot{r} > 0$ при $a > 0$.

Значит, при $r > 0$ траекториями системы являются спирали, закручивающиеся против часовой стрелки. При $a < 0$ спирали будут закручиваются вокруг $(0, 0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ спирали будут раскручиваются вокруг $(0, 0)$ при $t \to +\infty$.

Пример 2. Исследовать поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для всех значений вещественного параметра a для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + ay(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

При $a = 0$ имеем линейную систему, для которой точка $(0, 0)$ является центром. Пусть $a \neq 0$. Перейдём к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos(t)$, $y(t) = r(t)\sin(t)$ и получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot r = ar(r^2 - 1), \\ \dot\varphi = r. \end{cases}$$

$r = 0$ дает точку покоя $(0, 0)$, а $r = 1$ является решением. При $r > 0$, $r \neq 1$, фазовые траектории представляют собой спирали. Если $a < 0$, то $\dot r > 0$ при $0 < r < 1$, тогда спирали раскручиваются вокруг $r = 0$ против часовой стрелки при $t \to +\infty$ и стремятся изнутри к окружности $r = 1$. При $a < 0$ и $r > 1$ имеем $r < 0$. Спирали против часовой стрелки извне накручиваются на окружность $r = 1$ при $t \to +\infty$. Таким образом, при $a < 0$ окружность $r = 1$ является устойчивым предельным циклом. Если $a > 0$, то при $0 < r < 1$ спирали закручиваются вокруг $r = 0$ при $t \to +\infty$, а при $r > 1$ спирали раскручиваются вокруг окружности при $t \to +\infty$ против часовой стрелки, так как $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае окружность $r = 1$ является неустойчивым предельным циклом системы.

Варианты задания 6

Исследовать поведение фазовых траекторий в окрестности точки покоя $(0, 0)$ при всех значениях вещественного параметра a для систем:

1. $\begin{cases} \dot x = -2y + ax\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot y = 2x + ay\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot x = y + ax\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot y = x + ay\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot x = 4y + ax\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot y = -4x + ay\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot x = -3y + ax(x^2 + y^2)^2, \\ \dot y = 3x + ay(x^2 + y^2)^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot x = 2y + ax(x^2 + y^2)^2, \\ \dot y = -2x + ay(x^2 + y^2)^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot x = -ay + x(x^2 + y^2), \\ \dot y = ax + y(x^2 + y^2). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot x = -y - axy^2, \\ \dot y = x + ax^2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot x = y - axy^2, \\ \dot y = -x + ax^2y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot x = -y(x^2 + y^2 - a), \\ \dot y = x(x^2 + y^2 - a). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot x = y(-a + x^2 + y^2), \\ \dot y = -x(-a + x^2 + y^2). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot x = -y(x^2 + y^2 + a^2), \\ \dot y = x(x^2 + y^2 + a^2). \end{cases}$

Исследовать поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости при всех значениях вещественного параметра a для систем:

12. $\begin{cases} \dot x = y + ax(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot y = -x + ay(x^2 + y^2 - 2). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + ax(\sqrt{x^2+y^2} - 1)(2 - \sqrt{x^2+y^2}), \\ \dot{y} = 2x + ay(\sqrt{x^2+y^2} - 1)(2 - \sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax(1 - \sqrt{x^2+y^2})(2 - \sqrt{x^2+y^2}), \\ \dot{y} = -2x + ay(1 - \sqrt{x^2+y^2})(2 - \sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = ax + y\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = [-y + ax(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1), \\ \dot{y} = [x + ay(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1). \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = -2x + ay\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = [y + ax(x^2+y^2-2)](x^2+y^2-2), \\ \dot{y} = [-x + ay(x^2+y^2-2)](x^2+y^2-2). \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -ay + x(x^2+y^2-2), \\ \dot{y} = ax + y(x^2+y^2-2). \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = -ay + x(\sqrt{x^2+y^2} - 1), \\ \dot{y} = ax + y(\sqrt{x^2+y^2} - 1). \end{cases}$

Задание 7. Уравнения гиперболического типа

Пример выполнения задания 7

Задача. Решить начально-краевую задачу для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

с однородными граничными условиями:

$$u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями:

$$u\,(x,0) = 0, \quad u'_t\,(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Применим метод Фурье (метод разделения переменных). Напишем анзатц и будем искать решение $u\,(x,t)$ данной задачи в виде произведения двух функций:

$$u\,(x,t) = X\,(x)\,T\,(t)\,. \tag{4}$$

Здесь $X(x)$ – функция, зависящая только от x, $T(t)$ – функция, зависящая только от t. Подставим (4) в (1), вычислим частные производные, затем разделим обе части на $X(x)\,T(t)$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}. \tag{5}$$

Если оставлять x неизменным, при этом менять t (или наоборот), получим, что правая и левая части (5) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda. \tag{6}$$

Равенство (6) равносильно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых можно найти функции $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) - \lambda T(t) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из граничных условий при ненулевом решении получим условия для функции $X(x)$:

$$X(0)\,T(t) = X(2)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(2) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, для функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения системы

$$\left.\begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Здесь необходимо рассмотреть три случая: а) $\lambda > 0$, б) $\lambda = 0$ и в) $\lambda < 0$. Нетрудно убедиться, что в первых двух случаях существует только нулевое решение $X(x) = 0$, поэтому подробного рассмотрения заслуживает только случай в). Пусть $\lambda = -p^2 < 0$, тогда корни характеристического уравнения

$$q^2 + p^2 = 0 \tag{10}$$

будут равны $q = \pm ip$. Учитывая, что корни не содержат вещественных частей, имеем следующее общее решение уравнения (9)

$$X(x) = C\cos(px) + D\sin(px). \tag{11}$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем:

$$X(0) = C = 0, \quad X(2) = D\sin(2p) = 0. \tag{12}$$

Нетривиальное решение $X(x) \neq 0$ мы получим только если $\sin(2p) = 0$,

откуда
$$p_n = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z. \tag{13}$$
Подставив (13) в (12), получаем $X_n(x) = D\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$ – ненулевое решение задачи (9). Значениям p_n из (13) соответствуют следующие решения для $T(t)$:
$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right), \quad \text{где } A_n,\ B_n = const. \tag{14}$$
Подведем итог. Мы получили набор функций $u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$, которые являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (2). Общее решение задачи (1)-(3) будем искать в виде ряда:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cdot \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \cdot \sin\frac{\pi n t}{2}\right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} \tag{15}$$
Искомая функция функция $u(x,t)$ должна удовлетворять начальным условиям (3):
$$\begin{cases} u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} = 0, \\ u'_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{\pi n}{2} \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2. \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$
Коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ находятся по формуле: $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$. В нашем случае из первого условия системы (16) найдем $A_n = 0$, а из второго условия получим выражение для коэффициентов B_n:
$$B_n = \frac{2}{\pi n}\left(\int\limits_0^1 x \cdot \sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int\limits_1^2 (2-x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right) = -\frac{16}{\pi^3 n^3}\sin\frac{\pi n}{2}. \tag{17}$$
Подставляя полученные результаты в (15), получаем решение исходной начально-краевой задачи:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{8}{\pi^2 n^2} \cdot \sin\frac{\pi n t}{2} \cdot \sin\frac{\pi n x}{2}. \tag{18}$$

Варианты задания 7

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны:

1. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = -x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(6,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(6,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = x(1-x); \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1-x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2; \end{cases} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 4-x; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2, \end{cases} \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = x; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 9-x; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \\ u'_x(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = x; \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, \\ u'_x(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 - x, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x + 2, \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2, \\ u'_x(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0. \end{cases}$

Задание 8. Уравнения параболического типа

Пример выполнения задания 8

Задача. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, \tag{19}$$

с однородными граничными условиями:

$$u'_x(-1,t) = u'_x(1,t) = 0 \tag{20}$$

и начальными условиями:

$$u(x,0) = x^2. \tag{21}$$

Решение. Сделаем замену переменной $z = x + 1$. В этом случае граничные и начальное условия примут вид:

$$u'_z(0,t) = u'_z(2,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(z,0) = (z-1)^2. \tag{23}$$

Для решения задачи будем использовать метод Фурье (метод разделения переменных). Положим

$$u(z,t) = X(z)\,T(t), \tag{24}$$

где $X(z)$ – функция, зависящая только от z, а $T(t)$ – функция, зависящая только от t. Подставим функцию $u(z,t)$ в исходное дифференциальное уравнение, вычислим частные производные, разделим обе части уравнения на $X(z)\,T(t)$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} + 4 = \frac{1}{X(z)}\frac{d^2X(z)}{dz^2}. \tag{25}$$

Левая часть уравнения зависит только от переменной t, правая – только от переменной x, меняются они независимо друг от друга. Такое возможно только если правая и левая части уравнения при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt}+4=\frac{1}{X(z)}\frac{d^2X(z)}{dz^2}=\lambda. \tag{26}$$

Отсюда получаем два дифференциальных уравнения для определения функций $X(z)$ и $T(t)$:

$$X''(z)-\lambda X(z)=0, \tag{27}$$

$$T'(t)+(4-\lambda)T(t)=0. \tag{28}$$

Из граничных условий при ненулевом решении получим условия для функции $X(z)$:

$$X'(0)=X'(2)=0. \tag{29}$$

Для функции $X(z)$ получилась задача о собственных значениях:

$$X''(z)-\lambda X(z)=0, \tag{30}$$

$$X'(0)=X'(2)=0. \tag{31}$$

Здесь требованию о ненулевом решении удовлетворяют случаи: $\lambda=0$, $\lambda<0$.

1) $\lambda=0$. В этом случае уравнение (30) примет вид: $X''(z)=0$. Его решение: $X(z)=Az+B$. Подставляя граничные условия $X'(0)=X'(2)=0$, находим $X(z)=B$. Уравнение (28) при $\lambda=0$:

$$T'(t)+4T(t)=0 \;\Leftrightarrow\; T(t)=Ce^{-4t}. \tag{32}$$

Тогда решение уравнения теплопровожности при $\lambda=0$ примет следующий вид:

$$u(x,t)=X(z)T(t)=Be^{-4t}. \tag{33}$$

В формуле (33) постоянную C включили в произвольную константу B.

2) $\lambda=-p^2<0$. В этом случае пространственное уравнение примет вид: $X''(z)+p^2X=0$. Соответствующее характеристическое уравнение: $q^2+p^2=0 \;\Leftrightarrow\; q=\pm ip$. Следовательно,

$$X(z)=C\cos(pz)+D\sin(pz). \tag{34}$$

$$X'(z)=-Cp\sin(pz)+Dp\cos(pz). \tag{35}$$

Функция $X(z)$ должна удовлетворять граничным условиям:

$$X'(0)=Dp=0, \quad X'(2)=Cp\sin(2p)=0. \tag{36}$$

Нас интересует нетривиальное решение $X'(z)\neq 0$, это возможно только если $\sin(2p)=0$, откуда

$$p_n=\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{37}$$

Значит
$$X_n(z) = C\cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{38}$$
Теперь решим временное уравнение $T'(t)+(4-\lambda)T(t)=0$ при $\lambda=-p_n^2$:
$$T_n'(t) + \left(4+p_n^2\right)T_n(t) = 0. \tag{39}$$
Характеристическое уравнение:
$$q + 4 + p_n^2 = 0, \tag{40}$$
то есть
$$T_n(t) = A\exp\left(\left(-p_n^2-4\right)t\right) = A\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right). \tag{41}$$
Мы получили набор функций $u_n(z,t) = X_n(z)\,T_n(t)$, которые являются частными решениями уравнения (19), удовлетворяющими граничным условиям (20). Для того, чтобы удовлетворить начальному условию (21), общее решение задачи (19)-(21) будем искать в виде ряда:
$$u(z,t) = \frac{B_0}{2}e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right)\cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{42}$$
Удовлетворим начальному условию
$$u(z,0) = (z-1)^2 = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{43}$$
Получили разложение функции $(z-1)^2$ в ряд Фурье по косинусам. Найдём B_n как коэффициенты ряда Фурье по косинусам:
$$B_0 = \int_0^2 (z-1)^2\,dz = \left.\frac{(z-1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2}{3}. \tag{44}$$
$$B_n = \int_0^2 (z-1)^2 \cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right)dz. \tag{45}$$
После двукратного интегрирования по частям, получаем коэффициент B_n:
$$B_n = \frac{8}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n + 1\right), \quad n \neq 0, \tag{46}$$
Подставим данное выражение в решение $u(z,t)$, сделаем обратную за-

мену $x = z - 1$, и получим решение начально-краевой задачи (19)-(21):

$$u(z,t) = \frac{1}{3}e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n + 1\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right)\cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{47}$$

Варианты задания 8

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

1. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x); \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x(2 - x); \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 4 - x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = x(4 - x); \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, \\ u(x,0) = x; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 3x - x^2; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 3 - x; \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2 - 2x; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(1,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1; \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(-1,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(1,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \\ u(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x + x^2; \end{cases}$

Задание 9. Уравнения эллиптического типа

Пример выполнения задания 9

Задача. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольцевой области

$$\Delta u = 0, \quad 2 \le r \le 3 \tag{48}$$

с граничными условиями:

$$u|_{r=2} = 4 + \sin\varphi, \quad u|_{r=3} = 5\cos 2\varphi. \tag{49}$$

Решение. Введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{50}$$

Оператор Лапласа в полярной системе координат имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{51}$$

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$u(r,\varphi) = P(r)\,\Phi(\varphi). \tag{52}$$

Подставим предполагаемое решение в (51), разделим переменные и получим:

$$\frac{r^2\left(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)\right)}{P(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const. \tag{53}$$

Отсюда сразу получаем уравнения для функций $P(r)$, $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} r^2\left(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)\right) = \lambda P(r), \\ \Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Рассмотрим различные варианты значения λ: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.
1 случай. $\lambda < 0$. Пусть $\lambda = -p^2$. Тогда $\Phi''(\varphi) = p^2\Phi(\varphi)$. Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p \tag{55}$$

Тогда

$$\Phi(\varphi) = A \cdot e^{p\varphi} + B \cdot e^{-p\varphi}. \tag{56}$$

Данное решение не подойдёт, потому что оно не удовлетворяет условию периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. При изменении угла φ на 2π функция $u(r,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению:

$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$.

2 случай. $\lambda = 0$. Тогда $\Phi'' = 0 \Leftrightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B$. Удовлетворяя условию периодичности, находим $\Phi(\varphi) = B$. Подставим $\lambda = 0$ в первое уравнение из системы (54) для $\lambda = 0$:

$$r^2 \left(P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) \right) = 0, \tag{57}$$

что эквивалентно (так как $r \neq 0$):

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) = 0 \tag{58}$$

Сделаем замену переменной: $V = P'(r)$:

$$V' + \frac{1}{r} V = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{V}{r} \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r}$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\ln |V| = -\ln |r| + C_1 \Leftrightarrow |Vr| = e^{C_1} \Leftrightarrow V = \frac{C_2}{r},$$

то есть:

$$P'(r) = \frac{C_2}{r} \Leftrightarrow P = \int \frac{C_2}{r} dr = C_2 \ln r + D \quad (\ln |r| = \ln r \text{ при } r > 0). \tag{59}$$

$$u = P(r) \cdot \Phi(\varphi) = (C_2 \ln r + C_3)\, B = C \ln r + D \tag{60}$$

3 случай. $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = p^2$. Тогда $\Phi''(\varphi) + p^2 \Phi(\varphi) = 0$. Запишем характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip \tag{61}$$

Общее решение уравнения:

$$\Phi\,(\varphi) = C \cos p\varphi + D \sin p\varphi, \quad p = 0, 1, \ldots \tag{62}$$

Из-за условия периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ параметр p должен быть целым числом. Подставим $\lambda = p^2 > 0$ в первое уравнение из системы (54):

$$r^2 \left(P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) \right) = p^2 P(r). \tag{63}$$

Функцию $P(r)$ ищем в виде: $P(r) = r^a$.

$$r^2 \left(a(a-1) r^{a-2} + a r^{a-2} \right) = p^2 \cdot r^a \Leftrightarrow (a^2 - a) r^a + a r^a = p^2 \cdot r^a.$$

Сократив подобные члены, получим: $a^2 = p^2 \Leftrightarrow a = \pm p$. Запишем фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} P_1(r) = r^p, \\ P_2(r) = r^{-p}. \end{cases} \tag{64}$$

Любое решение линейного однородного дифференциального уравнения представляет собой линейную комбинацию из всех функций из фундаментальной системы решений:

$$P(r) = A \cdot r^{p} + B \cdot r^{-p} \tag{65}$$

Теперь подставим найденные функции (62) и (65) в формулу общего решения (52):

$$u(r,\varphi) = (C \cdot \cos p\varphi + D \cdot \sin p\varphi)\left(A \cdot r^{p} + B \cdot r^{-p}\right) \tag{66}$$

Для удовлетворения краевым условиям (49), решение задачи будем искать в виде ряда:

$$u\left(r,\varphi\right) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{-n} + B_n r^{n}\right)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right). \tag{67}$$

Из граничных условий найдём коэффициенты A_n, B_n, C_n и D_n. Подставим $r = 2$:

$$u\left(2,\varphi\right) = A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n 2^{-n} + B_n 2^{n}\right)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) = 4 + \sin\varphi. \tag{68}$$

Отсюда, приравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$A_0 + B_0 \ln 2 = 4, \quad \left(A_1 2^{-1} + 2B_1\right) D_1 = 1, \quad C_1 = 0, \quad A_2 2^{-2} + 4B_2 = 0. \tag{69}$$

С другой стороны:

$$u\left(3,\varphi\right) = A_0 + B_0 \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n 3^{-n} + B_n 3^{n}\right)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) = 5\cos 2\varphi, \tag{70}$$

отсюда

$$A_0 + B_0 \ln 3 = 0, \quad \frac{A_1}{3} + 3B_1 = 0, \quad \left(A_2 3^{-2} + 3^2 B_2\right) C_2 = 5, \quad D_2 = 0. \tag{71}$$

Все остальные коэффициенты $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$. Из написанных соотношений (69), (71) определим неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 2 = 4 \\ A_0 + B_0 \ln 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = 4 + \frac{4\ln 2}{\ln\frac{3}{2}}, \quad B_0 = -\frac{4}{\ln\frac{3}{2}};$$

$$\begin{cases} \frac{A_1'}{2} + 2B_1' = 1 \\ \frac{A_1'}{3} + 3B_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1' = \frac{18}{5}, \quad B_1' = -\frac{2}{5};$$

$$\begin{cases} \frac{A_2'}{4} + 4B_2' = 0 \\ \frac{A_2'}{9} + 9B_2' = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad A_2' = -\frac{144}{13}, \quad B_2' = \frac{9}{13};$$

Здесь $A_1' = A_1D_1$, $A_2' = A_2C_2$ и $B_1' = B_1D_1$, $B_2' = B_2C_2$. Таким образом, решение уравнения:

$$u(r,\varphi) = 4 + \frac{4\ln 2}{\ln\frac{3}{2}} - \frac{4}{\ln\frac{3}{2}}\ln r + \left(\frac{18}{5r} - \frac{2}{5}r\right)\sin\varphi + \left(-\frac{144}{13r^2} + \frac{9}{13}r^2\right)\cos 2\varphi.$$

Варианты задания 9

Решить граничную задачу для оператора Лапласа в заданной области:

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 1, \\ u\,|_{\rho=1} = \cos\varphi; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 2, \\ u\,|_{\rho=2} = 2\sin\varphi + \cos 2\varphi; \,, \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\,|_{r=1} = \sin\varphi \,, \\ u\,|_{r=2} = \cos\varphi; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=2} = 1 \,, \\ u\,|_{r=3} = 4\cos\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 4, \\ u\,|_{r=1} = 1 + \sin\varphi \,, \\ u\,|_{r=4} = 4\sin 2\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\,|_{r=1} = \cos 3\varphi + 1, \\ u\,|_{r=2} = 3\sin\varphi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2, \\ u(x,2) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{cases} \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ u(0,y) = 0, \\ u(1,y) = y^2 - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = x^2 - 2x, \\ u(x,2) = u(0,y) = 0, \\ u(2,y) = y^2 - 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(\pi x)\,, \\ u(x,2) = \sin(2\pi x)\,, \\ u(0,y) = u(2,y) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 1, \\ u\,\Big|_{r=1} = \varphi^2(2\pi - \varphi)^2\,. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 2, \\ u\,|_{r=2} = \sin 2\varphi + 2\cos\varphi\,. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(\pi x)\,, \\ u(x,1) = \sin(2\pi x)\,, \\ u(0,y) = \sin(3\pi y)\,, u(1,y) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(4\pi x)\,, \\ u(x,2) = u(2,y) = 0, \\ u(0,y) = \sin(\pi y)\,. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = u(0,y) = 0, \\ u(x,2) = \sin(\pi x)\,, \\ u(1,y) = \sin(2\pi y)\,. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=2} = 4 + 3\sin\varphi\ , \\ u\,|_{r=3} = 5\cos 2\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=1} = 4\cos\varphi + 1\ , \\ u\,|_{r=3} = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 4, \\ u\,|_{r=1} = 5 + 2\sin\varphi\ , \\ u\,|_{r=4} = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\,|_{r=1} = 5\cos\varphi\ , \\ u\,|_{r=2} = 2\sin 2\varphi + 3\cos 3\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=1} = 4 + 3\cos 4\varphi\ , \\ u\,|_{r=3} = 3\sin 2\varphi. \end{cases}$

Задание 10. Приведение уравнений к каноническому виду

Общая форма линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка в пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0, \tag{72}$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями от координат $x,\ y$. Характеристическое уравнение для него имеет вид:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \tag{73}$$

Решения уравнения (73) называются характеристиками уравнения (72). При помощи характеристик задаётся новая удобная система координат, в которой изначальное уравнение приобретает канонический вид.

Классификация уравнений

Введём дискриминант $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

В зависимости от знака дискриминанта имеем различные типы уравнений.

1. Эллиптическое уравнение: $\Delta < 0$;
2. Гиперболическое уравнение: $\Delta > 0$;
3. Параболическое уравнение: $\Delta = 0$.

Алгоритм приведения уравнения к каноническому виду

1) Найти Δ и определить тип уравнения.

2) Найти первые интегралы характеристических уравнений:

При $a_{11} \neq 0 :\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$;

При $a_{22} \neq 0 :\quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}$;

3) Найти первые интегралы в зависимости от типа уравнения:

а. Гиперболический тип: $\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = C$;

б. Эллиптический тип: $\alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = C$;

в. Параболический тип: $\delta(x, y) = C$.

4) Сделать замену переменных в зависимости от типа уравнения:

а. Гиперболический тип: $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases}$

б. Эллиптический тип: $\begin{cases} \xi = \alpha(x,y), \\ \eta = \beta(x,y). \end{cases}$

в. Параболический тип: $\begin{cases} \xi = \delta(x,y), \\ \eta = \varepsilon(x,y), \end{cases}$

где $\varepsilon(x,y)$ – функция из C^1 такая, что: $J = \begin{vmatrix} \delta'_x & \delta'_y \\ \varepsilon'_x & \varepsilon'_y \end{vmatrix} \neq 0$.

После замены уравнение примет канонический вид.

Пример выполнения задания 10

Задача. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется; назвать тип уравнения:

$$yu''_{xx} + xu''_{yy} = 0. \tag{74}$$

Решение.

1) Сначала вычислим дискриминант Δ в нашей задаче. Так как $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = x$, получаем:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -yx.$$

Поэтому

а) в первой четверти $(x > 0,\ y > 0)$ дискриминант $\Delta < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ эллиптический тип;

б) в третьей четверти $(x < 0,\ y < 0)$ дискриминант $\Delta < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ эллиптический тип;

в) во второй четверти $(x < 0,\ y > 0)$ дискриминант $\Delta > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ гиперболический тип;

г) в четвертой четверти $(x > 0,\ y < 0)$ дискриминант $\Delta > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ гиперболический тип;

д) на прямой $y = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип;

е) на прямой $x = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип;

2) Составим характеристическое уравнение. В нашем случае характеристическое уравнение (73) примет вид:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0 \Leftrightarrow y(dy)^2 = -x(dx)^2. \tag{75}$$

а) в первой четверти $(x > 0,\ y > 0)$ уравнение примет вид:

$$\sqrt{y}dy = \pm i\sqrt{x}dx.$$

Интегрируя обе части, получим:

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}} + C_2 \Leftrightarrow y^{\frac{3}{2}} \mp ix^{\frac{3}{2}} = C_1 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} \pm iy^{\frac{3}{2}} = C$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y) = C, \quad \text{где } \alpha(x,y) = x^{\frac{3}{2}}, \quad \beta(x,y) = y^{\frac{3}{2}}.$$

б) в третьей четверти $(x < 0,\ y < 0)$ уравнение примет вид:

$$y(dy)^2 = -x(dx)^2 \Leftrightarrow -y(dy)^2 = x(dx)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-y}dy = \pm i\sqrt{-x}dx.$$

Интегрируя обе части, получим:

$$-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = \mp\frac{2}{3}i(-x)^{\frac{3}{2}} + C_1 \Leftrightarrow (-y)^{\frac{3}{2}} \mp i(-x)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y) = C, \quad \text{где } \alpha(x,y) = (-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \beta(x,y) = (-y)^{\frac{3}{2}}.$$

в) во второй четверти $(x < 0,\ y > 0)$ уравнение примет вид:

$$y(dy)^2 = -x(dx)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{-x}dx.$$

Интегрируя обе части, получим:

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \mp\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + C_1 \Leftrightarrow y^{\frac{3}{2}} \pm (-x)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\varphi(x,y) = y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}} = C, \quad \psi(x,y) = y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}} = C.$$

г) в четвертой четверти $(x > 0,\ y < 0)$ уравнение примет вид:

$$y(dy)^2 = -x(dx)^2 \Leftrightarrow -y(dy)^2 = x(dx)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-y}dy = \pm\sqrt{x}dx.$$

Интегрируя обе части, получим:

$$-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 \Leftrightarrow (-y)^{\frac{3}{2}} = \mp x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\varphi(x,y) = (-y)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = C, \quad \psi(x,y) = (-y)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = C.$$

3) Сделаем замену переменных.

а) в первой четверти $(x > 0,\ y > 0)$: $\begin{cases} \xi = x^{\frac{3}{2}}, \\ \eta = y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

Частные производные $u'_x,\ u'_y,\ u''_{xx},\ u''_{yy}$ могут быть выражены в новых переменных следующим образом:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{\frac{1}{3}},$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{\frac{1}{3}},$$

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}u'_\xi \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u'_\xi\right)x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}u'_\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}u''_{\xi\xi}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}u'_\xi\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}u''_{\xi\xi}\cdot\xi^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}u'_\xi\cdot\xi^{-\frac{1}{3}},$$

$$u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{3}{2}u'_\eta \cdot y^{\frac{1}{2}}\Big) = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u'_\eta\right)\cdot y^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}u'_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}u''_{\eta\eta}\cdot\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}u'_\eta\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}u''_{\eta\eta}\cdot\eta^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}u'_\eta\cdot\eta^{-\frac{1}{3}}.$$

В новых переменных изначальное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\xi^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{-\frac{1}{3}}\right)\eta^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{-\frac{1}{3}}\right)\xi^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Сократим правую и левые части уравнения на $\frac{9}{4}\left(\eta\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, тогда дифференциальное уравнение примет канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

б) в третьей четверти $(x < 0,\ y < 0)$: $\begin{cases} \xi = (-x)^{\frac{3}{2}}, \\ \eta = (-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

Частные производные $u'_x,\ u'_y,\ u''_{xx},\ u''_{yy}$ могут быть выражены в новых переменных следующим образом:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}(-x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{\frac{1}{3}},$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}(-y)^{1/2} = -\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{\frac{1}{3}},$$

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}u'_\xi\cdot(-x)^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u'_\xi\right)(-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\xi\frac{\partial}{\partial x}(-x)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{3}{2}u''_{\xi\xi}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\xi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}u''_{\xi\xi}\cdot\xi^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}u'_\xi\cdot\xi^{-\frac{1}{3}},$$

$$u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{3}{2}u'_\eta\cdot(-y)^{\frac{1}{2}}\Big) = -\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u'_\eta\right)\cdot(-y)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial y}(-y)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{3}{2}u''_{\eta\eta}\cdot\Big(-\frac{3}{2}\Big)(-y)^{\frac{1}{2}}\cdot(-y)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\eta\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)(-y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}u''_{\eta\eta}\cdot\eta^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}u'_\eta\cdot\eta^{-\frac{1}{3}}.$$

В новых переменных изначальное дифференциальное уравнение примет точно такой же вид как и в пункте а):

$$\left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\xi^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{-\frac{1}{3}}\right)\eta^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{-\frac{1}{3}}\right)\xi^{\frac{2}{3}}=0.$$

Сократим правую и левые части уравнения на $\frac{9}{4}\left(\eta\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, тогда дифференциальное уравнение примет канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

в) во второй четверти $(x<0,\ y>0)$:

$$\left\{\begin{array}{l}\xi=y^{\frac{3}{2}}+(-x)^{\frac{3}{2}}\\ \eta=y^{\frac{3}{2}}-(-x)^{\frac{3}{2}}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}(-x)^{\frac{3}{2}}=\frac{\xi-\eta}{2}\\ y^{\frac{3}{2}}=\frac{\xi+\eta}{2}\end{array}\right.$$

Частные производные $u'_x,\ u'_y,\ u''_{xx},\ u''_{yy}$ могут быть выражены в новых переменных следующим образом:

$$u'_x=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{3}{2}u'_\xi(-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}u'_\eta(-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi),$$

$$u'_y=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{3}{2}u'_\xi y^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}u'_\eta y^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi),$$

$$u''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)\right)=\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}(-x)^{\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(u'_\eta-u'_\xi)=$$

$$=-\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\left(u''_{\eta\xi}\underbrace{\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}}-u''_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+u''_{\eta\eta}\underbrace{\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}}-u''_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=-\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{9}{4}(-x)(-u''_{\eta\xi}+u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}-u''_{\xi\eta}),$$

$$u''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)\right)=\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\frac{1}{2}})(u'_\eta+u'_\xi)+\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(u'_\eta+u'_\xi)=$$

$$=\frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)+\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\left(u''_{\eta\xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}}+u''_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+u''_{\eta\eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}}+u''_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)+\frac{9}{4}y(u''_{\eta\xi}+u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}+u''_{\xi\eta}).$$

После подстановки производных исходное дифференциальное уравнение

$yu''_{xx}+xu''_{yy}=0$ примет вид:

$$-\frac{3}{4}y(-x)^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)-\frac{9}{4}yx(u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}-2u''_{\xi\eta})+$$
$$+\frac{3}{4}xy^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)+\frac{9}{4}xy(u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}+2u''_{\xi\eta})=0,$$

что эквивалентно:

$$-\frac{3}{4}y(-x)^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{3}{4}xy^{-\frac{1}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)+9yxu''_{\xi\eta}=0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $9xy$:

$$u''_{\xi\eta}-\frac{1}{12}\underbrace{\frac{(-x)^{-\frac{1}{2}}}{x}}_{-(-x)^{-\frac{3}{2}}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{1}{12}y^{-\frac{3}{2}}(u'_\eta+u'_\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta}+\frac{1}{12}\underbrace{(-x)^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{2}{\xi-\eta}}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{1}{12}\underbrace{y^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{2}{\xi+\eta}}(u'_\eta+u'_\xi)=0.$$

После подстановки в уравнение $(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{\xi-\eta}$ и $y^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{\xi+\eta}$ получаем:

$$u''_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u'_\eta-u'_\xi)+\frac{1}{6(\xi+\eta)}(u'_\eta+u'_\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta}+\frac{1}{6}u'_\xi\left(\frac{1}{\xi+\eta}-\frac{1}{\xi-\eta}\right)+\frac{1}{6}u'_\eta\left(\frac{1}{\xi+\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}\right)=0,$$

что эквивалентно каноническому виду уравнения:

$$u''_{\xi\eta}-\frac{1}{3}\frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}u'_\xi+\frac{1}{3}\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}u'_\eta=0.$$

г) в четвертой четверти $(x>0,\ y<0)$:

$$\begin{cases}\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\\ \eta=(-y)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^{\frac{3}{2}}=\frac{\xi-\eta}{2}\\ (-y)^{\frac{3}{2}}=\frac{\xi+\eta}{2}\end{cases}$$

Частные производные $u'_x,\ u'_y,\ u''_{xx},\ u''_{yy}$ могут быть выражены в новых переменных следующим образом:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{3}{2}u'_\xi x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\eta x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta),$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{3}{2}u'_\xi(-y)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}u'_\eta(-y)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta),$$

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta)\right) = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x^{\frac{1}{2}})\cdot(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(u'_\xi - u'_\eta) =$$

$$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(u''_{\xi\xi}\underbrace{\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} - u''_{\eta\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + u''_{\xi\eta}\underbrace{\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} - u''_{\eta\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{9}{4}x(u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\xi} - u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}),$$

$$u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta)\right) = -\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}(-y)^{\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta) -$$

$$-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(u'_\xi + u'_\eta) = \frac{3}{4}(-y)^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta) -$$

$$-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}\left(u''_{\xi\xi}\underbrace{\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}} + u''_{\eta\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + u''_{\xi\eta}\underbrace{\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}} + u''_{\eta\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}(-y)^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta) - \frac{9}{4}y(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\xi} + u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}).$$

После подстановки производных исходное дифференциальное уравнение $yu''_{xx} + xu''_{yy} = 0$ примет вид:

$$\frac{3}{4}yx^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{9}{4}yx(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} - 2u''_{\eta\xi}) +$$

$$+\frac{3}{4}x(-y)^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta) - \frac{9}{4}xy(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + 2u''_{\eta\xi}) = 0,$$

что эквивалентно:

$$\frac{3}{4}yx^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{3}{4}x(-y)^{-\frac{1}{2}}(u'_\xi + u'_\eta) - 9yxu''_{\eta\xi} = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $(-9yx)$:

$$u''_{\eta\xi} - \frac{1}{12}x^{-\frac{3}{2}}(u'_\xi - u'_\eta) - \frac{1}{12}\underbrace{\frac{(-y)^{-\frac{3}{2}}}{y}}_{-(-y)^{-\frac{3}{2}}}(u'_\xi + u'_\eta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta} - \frac{1}{12}\underbrace{x^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{2}{\xi-\eta}}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{1}{12}\underbrace{(-y)^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{2}{\xi+\eta}}(u'_\xi + u'_\eta) = 0.$$

После подстановки в уравнение $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\xi-\eta}$ и $(-y)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\xi+\eta}$ получаем:

$$u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u'_\xi - u'_\eta) + \frac{1}{6(\xi+\eta)}(u'_\xi + u'_\eta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta} + \frac{1}{6}u'_\xi\left(\frac{1}{\xi+\eta} - \frac{1}{\xi-\eta}\right) + \frac{1}{6}u'_\eta\left(\frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}\right) = 0,$$

что эквивалентно каноническому виду уравнения:

$$u''_{\xi\eta} - \frac{1}{3}\frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}u'_\xi + \frac{1}{3}\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}u'_\eta = 0.$$

д) На оси $y = 0$ дифференциальное уравнение вырождается: $u''_{yy} = 0$.
е) На оси $x = 0$ уравнение также вырождается: $u''_{xx} = 0$.
Ответ:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 & \text{в I и III четвертях, эллиптический тип;} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{3}\frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{1}{3}\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 & \text{во II и IV четвертях, гиперболический тип;} \\ u''_{yy} = 0 & \text{на прямой } y = 0, \text{ параболический тип;} \\ u''_{xx} = 0 & \text{на прямой } x = 0, \text{ параболический тип.} \end{cases}$$

При этом замены переменных:

$$\begin{cases} \xi = x^{\frac{3}{2}},\ \eta = y^{\frac{3}{2}} & \text{в I четверти: } x > 0,\ y > 0; \\ \xi = (-x)^{\frac{3}{2}},\ \eta = (-y)^{\frac{3}{2}} & \text{в III четверти: } x < 0,\ y < 0; \\ \xi = y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}},\ \eta = y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}} & \text{во II четверти: } x < 0,\ y > 0; \\ \xi = (-y)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}},\ \eta = (-y)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} & \text{в IV четверти: } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Варианты задания 10

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$;
2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$;
3. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$;
4. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$;

5. $yu_{xx} - xu_{yy} = 0;$

6. $xu_{xx} - yu_{yy} = 0;$

7. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$

8. $u_{xx} \operatorname{sign}(y) + 2u_{xy} + u_{yy} = 0;$

9. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0;$

10. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0;$

11. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0;$

12. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0;$

13. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0;$

14. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0;$

15. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0;$

16. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} + 16x^4u = 0;$

17. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0;$

18. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign}(y))u_{yy} = 0;$

19. $u_{xx} \operatorname{sign}(y) + 2u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign}(x) = 0;$

20. $u_{xx} \sin^2 x - 2yu_{xy} \sin x + y^2u_{yy} = 0.$

Список литературы

[1] Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002, 766 pp.

[2] MacCluer B.D., Bourdon P.S., Kriete T.L. Differential equations: techniques, theory, and applications. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019, 890 pp.

[3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие для вузов. — 4-е изд., стер. — СПб: "Лань", 2023, 480 с.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциалным уравнениям: Учеб. пособие для втузов. — М.: "Высшая школа", 1978, 287 с.

[5] Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике: Учебно-методическое пособие / Рецензенты: Мирошниченко Г. П., Уздин В. М. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018, 39 с.

[6] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000, 176 с.

Попов Антон Игоревич
Попов Игорь Юрьевич

Расчетно-графическая работа по теории устойчивости и уравнениям в частных производных

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А