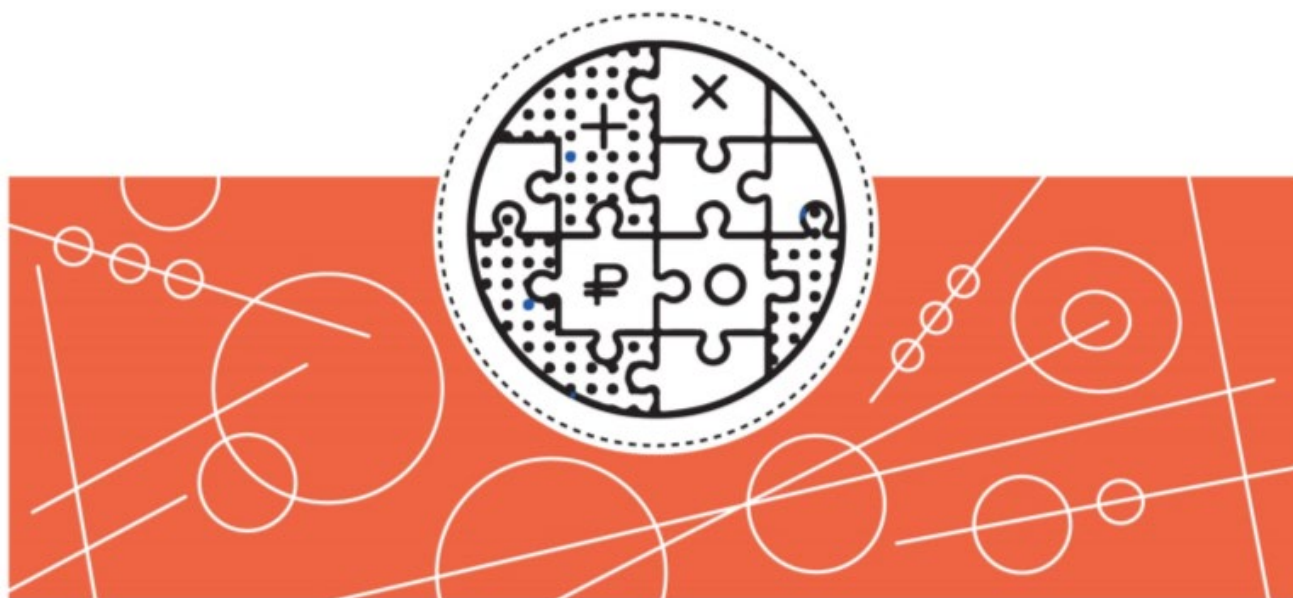


# ІІТМО

---

**А.В. ВОЗИАНОВА, М.Е. КОНОНОВА,  
А.В. КУПЕРА**

**ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ:  
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ  
ПЕРЕМЕННЫХ**



**Санкт-Петербург  
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.В. Возианова, М.Е. Кононова, А.В. Купера**  
**ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ: ФУНКЦИИ**  
**НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлениям подготовки, изучающим дисциплину «Дополнительные  
главы математического анализа», в качестве Учебно-методического пособия для  
реализации основных профессиональных образовательных программ высшего  
образования бакалавриата.

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2026

Возианова А.В., Кононова М.Е., Купера А.В. От простого к сложному:  
функции нескольких переменных – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 56 с.

Рецензент(ы):

Андреев Юрий Александрович, преподаватель (квалификационная категория "преподаватель") факультета информационных технологий и программирования, Университета ИТМО.

Данное учебное пособие посвящено ключевым разделам математического анализа — дифференциальному исчислению функции нескольких переменных. В нем детально рассматриваются вопросы дифференцируемости и теории экстремумов. Материал отличается двухуровневой структурой: базовый уровень обеспечивает фундаментальную подготовку, а продвинутый — включает в себя строгие доказательства и задачи повышенной сложности для IT-специальностей и исследовательских направлений. Особенностью пособия является интеграция теоретических методов с современными программными средствами. В тексте приведены примеры реализации математических алгоритмов, визуализации поверхностей и проведения символьных вычислений с использованием Python, а также ссылки на анимации по каждой теме. Такой подход позволяет студентам не только освоить классический аппарат анализа, но и научиться применять его для решения прикладных инженерных и вычислительных задач.

Предназначено для студентов Университета ИТМО, обучающихся по техническим и программным направлениям бакалавриата.

Авторы подтверждают, что при подготовке рукописи инструменты искусственного интеллекта использовались исключительно для литературного редактирования, проверки грамматики и коррекции стиля. Весь содержательный контент, логика изложения и научные выводы созданы автором самостоятельно.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The 'I' and 'T' are connected, and the 'M' and 'O' are also connected.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026

© Возианова А.В., Кононова М.Е., Купера А.В., 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Введение.....  | 4  |
| Глава 1. Общие сведения о функциях нескольких переменных. Области в $\mathbb{R}^n$ ....                    | 6  |
| § 1. Понятие функции нескольких переменных.....  | 6  |
| § 2. Классификация подмножеств в $\mathbb{R}^n$ .....  | 7  |
| § 3. Понятие предела функции нескольких переменных.....  | 9  |
| § 4. Непрерывность функции нескольких переменных.....  | 12 |
| § 5. Пример решения задачи расчетно-графической работы. Исследование функции на существование предела..... | 16 |
| Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 1.....   | 18 |
| Вопросы и задания для самопроверки к Главе 1.....  | 20 |
| Глава 2. Дифференцируемость функций нескольких переменных.....   | 22 |
| § 1. Частные производные.....  | 22 |
| § 2. Полное приращение и дифференцируемость.....   | 23 |
| § 3. Инвариантность формы первого дифференциала.....   | 26 |
| § 4. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.....  | 28 |
| § 5. Градиент и его связь с линиями уровня. Производная по направлению.....                                | 29 |
| § 6. Производные и дифференциалы высших порядков.....  | 32 |
| § 7. Введение в теорию неявных функций.....  | 35 |
| § 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....  | 37 |
| § 9. Пример решения задачи расчетно-графической работы. Связь линий уровня и градиента.....                | 38 |
| Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 2.....   | 41 |
| Вопросы и задания для самопроверки к Главе 2.....  | 42 |
| Глава 3. Экстремум функций нескольких переменных.....  | 44 |
| § 1. Локальный (свободный) экстремум.....  | 44 |
| § 2. Условный экстремум и метод Лагранжа.....  | 47 |
| § 3. Нахождение максимума и минимума функции на компакте.....  | 49 |
| § 4. Пример решения задачи РГР: Исследование функции на экстремумы.....                                    | 50 |
| Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 3.....   | 53 |
| Вопросы и задания для самопроверки к Главе 3.....  | 55 |
| Список литературы.....   | 56 |

# 1 Введение

Данное учебное пособие посвящено ключевым разделам математического анализа — дифференциальному исчислению функций нескольких переменных. В нем детально рассматриваются вопросы дифференцируемости и теории экстремумов. Материал отличается двухуровневой структурой: базовый уровень обеспечивает фундаментальную подготовку, а продвинутый — включает в себя строгие доказательства и задачи повышенной сложности для IT-специальностей и исследовательских направлений. Особенностью пособия является интеграция теоретических методов с современными программными средствами. В тексте приведены примеры реализации математических алгоритмов, визуализации поверхностей и проведения символьных вычислений с использованием Python, а также ссылки на анимации по каждой теме. Такой подход позволяет студентам не только освоить классический аппарат анализа, но и научиться применять его для решения прикладных инженерных и вычислительных задач.

В соответствии с рабочей программой дисциплины Дополнительные главы математического анализа результатами освоения станут:

- знание принципов построения логических рассуждений и способов их формулирования, ознакомление с источниками информации, их возможностями, надёжностью и ограничениями;
- знание математических методов для решения задач профессиональной деятельности;
- знание математических методов, применяемых для оценки эффективности процессов, представление о математических программных продуктах;
- знание о способах представления результатов учебной и научной деятельности;
- ознакомление с современными способами и каналами коммуникации;
- умение логически мыслить и выстраивать причинно-следственные связи, формулировать и представлять их, анализировать сложные задачи и разбивать их на более простые компоненты, пользоваться компьютерными программами для решения математических задач, работать с литературой, печатными и электронными изданиями;
- умение использовать для анализа и решения задач знание основных понятий и теорем, представлять результаты в виде устных докладов, письменных работ и отчётов, выбрать программное обеспечение для проведения

математических расчётов, анализировать поставленную задачу и предлагать эффективные способы ее решения;

- навыки решения задач с ограничениями и дополнительными условиями;
- навыки анализа данных и принятия решений на основе математических методов;
- навыки решения многокомпонентных задач и оценки полученных результатов, навыки поиска информации и сравнения по нескольким источникам, навыки защиты научных тезисов в предметной дискуссии и при выступлениях с докладом, работы с программными продуктами для моделирования и анализа, логически верных рассуждений и корректных вычислений, использования онлайн-ресурсов для поиска дополнительных материалов.

Предназначено для студентов Университета ИТМО, обучающихся по техническим и программным направлениям бакалавриата.

Коллектив авторов благодарит Артема Дмитриевича Пшеничникова, обучающегося на факультете программной инженерии и компьютерной техники, за помощь в создании анимаций по темам учебно-методического пособия.

# Глава 1. Общие сведения о функциях нескольких переменных. Области в $\mathbb{R}^n$

## § 1. Понятие функции нескольких переменных

Реальные прикладные задачи требуют анализа более сложных процессов, чем те, что описываются функциями одной переменной. Поэтому целесообразно рассматривать совокупность нескольких факторов совместно, как аргументы единой функции, описывающей целостный процесс.

Напомним, что в общем виде функцией называется отображение  $f : X \rightarrow Y$ . В случае числовых функций это  $f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ . По аналогии с функцией одной переменной дадим определение для  $n$  аргументов.

**Определение 1.** Функцией нескольких переменных называется отображение вида:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  - область определения функции  $f$ .

Такое представление естественным образом подводит нас к понятию сложной функции (суперпозиции), которое мы будем использовать далее. Рассмотрим выражение:

$$f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n)) : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Здесь каждая функция  $\varphi_i$  характеризует внутреннюю зависимость для набора аргументов  $(x_1, \dots, x_n)$ , формируя промежуточные переменные, от которых зависит внешняя функция  $f$ .

Для анализа поведения функции и переноса теории функций одной переменной на более сложные зависимости (например, для определения предела или непрерывности) необходимо ввести понятие «близости» точек в  $n$ -мерном пространстве. Поскольку точка теперь представляется вектором аргументов, требуется универсальный способ измерения расстояния между ними.

**Определение 2.** Пусть  $X$  - линейное пространство. На элементах этого множества задана функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , которая называется **метрикой**, если для любых  $x, y, z \in X$  выполняются следующие аксиомы:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$  (аксиома тождества);
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (неравенство треугольника).

Определив метрику как способ измерения расстояния между произвольными точками, мы можем сузить это понятие для линейных (векторных) пространств.

В таких пространствах расстояние между точками удобно выражать через «длину» вектора, соединяющего эти точки. Связь между расстоянием и линейной структурой пространства выражается через понятие нормы.

**Определение 3. Нормой** в линейном пространстве  $X$  называется неотрицательная функция  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ , которая сопоставляет каждому вектору  $x$  число, характеризующее его длину, и удовлетворяет аксиомам:

1.  $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  для любого скаляра  $\lambda$  (однородность);
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Любая такая функция порождает метрику (расстояние) по правилу  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . В математическом анализе чаще всего используется **евклидова метрика** (или норма), определяющая расстояние между точками  $M(x_1, \dots, x_n)$  и  $A(a_1, \dots, a_n)$ :

$$\rho(M, A) = \|M - A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

Таким образом, расстояние между точками в  $\mathbb{R}^n$  - это не что иное, как норма вектора, соединяющего эти точки.

## § 2. Классификация подмножеств в $\mathbb{R}^n$

Используя понятие метрики, мы можем формализовать различные типы областей, на которых будет задана функция. Пусть  $P_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - фиксированная точка,  $\delta > 0$  - радиус.

- **$n$ -мерный замкнутый шар:**  $B_\delta(P_0) = \{M \mid \rho(M, P_0) \leq \delta\}$ .
- **$n$ -мерный открытый шар или  $\delta$ -окрестность точки  $P_0$ :**  
 $\bar{B}_\delta(P_0) = \{M \mid \rho(M, P_0) < \delta\}$ .
- **$n$ -мерная сфера (граница шара):**  $S(P_0, R) = \{M \mid \rho(M, P_0) = \delta\}$ .
- **проколота  $\delta$ -окрестность:**  $\mathring{U}_\delta(P_0) = \{M \mid 0 < \rho(M, P_0) < \delta\}$  (сама точка  $P_0$  исключается).
- **$n$ -мерный параллелепипед:** множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств  $|x_i - a_i| \leq \delta_i$  для всех  $i = 1 \dots n$ . В случае равенства всех  $\delta_i$  мы получаем  $n$ -мерный куб  $K_\delta(P_0)$ .

**Важное замечание:** В любом шаре с центром в точке  $P_0$  существует куб  $K_\delta(P_0)$  с центром в точке  $P_0$ , который принадлежит шару.

**Определение 4.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называется **областью**, если оно открыто, т.е. каждая его точка входит в него вместе с некоторой своей окрестностью ( $\exists \{ \forall M | \rho(M, P_0) < \varepsilon \} \subset D$ ) и связно (любые две точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей из отрезков, соединённых между собой и целиком лежащей в  $D$ ).

**Пример:** Пусть  $P_0 = (0, 0)$  и  $\delta = 2$ . Тогда открытый шар - это множество точек  $M(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 < 4$$

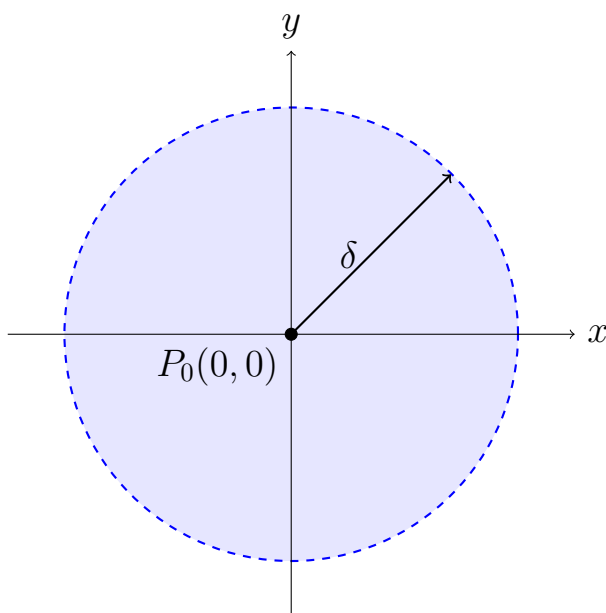


Рис. 1: Открытый шар  $B(P_0, \delta)$  (граница не включена)

## Линии и поверхности уровня

Поскольку графическое представление функции  $n$  переменных требует пространства размерности  $n + 1$ , визуализация становится затруднительной уже при  $n = 3$ . Для анализа таких функций используют метод сечений.

**Определение 5.** **Линией уровня** (для  $n = 2$ ) или **поверхностью уровня** (для  $n = 3$ ) называется множество точек, в которых функция принимает одно и то же фиксированное значение  $C$ :

$$E_C = \{(x_1, \dots, x_n) \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = C\}$$

Геометрически линия уровня - это проекция линии пересечения поверхности  $z = f(x, y)$  с горизонтальной плоскостью  $z = C$  на плоскость  $Oxy$ .

**Пример:** Для функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (параболоид) линиями уровня являются концентрические окружности:

$$x^2 + y^2 = C, \quad (C \geq 0)$$

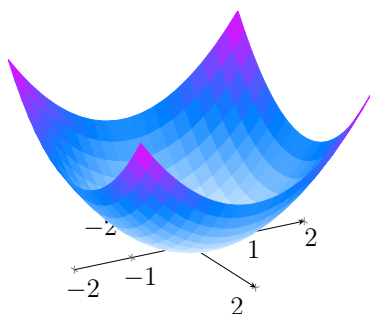


Рис. 2: Поверхность  $z = x^2 + y^2$

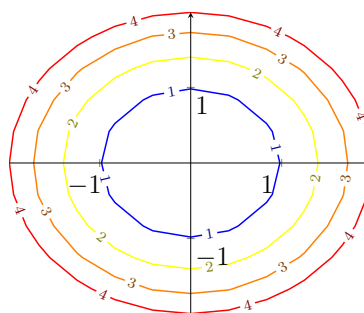


Рис. 3: Линии уровня (окружности)

Этот метод широко применяется в картографии (изогипсы на картах высот) и метеорологии (изотермы и изобары).

### § 3. Понятие предела функции нескольких переменных

Сформировав представление о метрике и структуре множеств в  $\mathbb{R}^n$ , мы можем перейти к анализу поведения функций вблизи конкретных точек. Понятие предела функции нескольких переменных (ФНП) является фундаментальным развитием классического определения для функции одной переменной, однако оно обладает важной специфической особенностью.

В одномерном случае переменная  $x$  могла приближаться к точке  $x_0$  лишь с двух сторон - слева или справа. В пространстве же  $\mathbb{R}^n$  (при  $n \geq 2$ ) точка  $P$  может стремиться к предельной точке  $P_0$  по бесконечному множеству различных путей: вдоль прямых, парабол или любых других кривых.

Математическая строгость требует, чтобы значение предела не зависело от способа приближения и направления. Это накладывает более жесткие условия на существование предела.

Важно понимать: если по двум разным траекториям функция стремится к одному и тому же значению, это еще **не гарантирует** существование предела, так как может найтись третья траектория с иным результатом. Однако, если хотя бы по двум путям получены разные значения, это является достаточным

основанием утверждать, что предел **не существует**.

Таким образом, для доказательства существования предела недостаточно перебрать несколько путей - необходимо использовать строгое определение, которое «контролирует» сразу все возможные траектории в окрестности точки или аналитические оценки. Однако прежде чем говорить о стремлении к точке, нужно убедиться, что мы можем подойти к ней достаточно близко, оставаясь в рамках области определения функции. Это подводит нас к необходимости формализовать понятие «точки сгущения».

**Определение 6.** Точка  $P_0$  называется **предельной точкой или точкой сгущения** множества  $\{D\}$ , если в любой её проколотой окрестности содержатся элементы из этого множества.

Заметим, что предельная точка не обязательно должна принадлежать самому множеству  $D$ . Теперь, когда у нас есть инструмент для корректного описания процесса приближения, мы можем дать строгие формулировки предела функции многих переменных, базирующиеся на введенном ранее понятии проколотой окрестности.

## Три эквивалентных определения предела

### 1. На языке окрестностей:

$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ , если для любой сколь угодно малой окрестности значения  $A$  найдется такая проколотая окрестность точки  $P_0$ , что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}_\delta(P_0) : \forall P \in \dot{U}_\delta(P_0) \cap D \implies f(P) \in U_\varepsilon(A)$$

### 2. По Коши (на языке расстояний):

Число  $A$  называется пределом функции в точке  $P_0$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M \in D (0 < \rho(M, P_0) < \delta) \implies |f(M) - A| < \varepsilon$$

### 3. По Гейне (на языке последовательностей):

Число  $A$  называется пределом функции в точке  $P_0$ , если для любой последовательности точек  $\{M_n\} \subset D \setminus \{P_0\}$ , сходящейся к  $P_0$ , соответствующая последовательность значений функции сходится к  $A$ :

$$\forall \{M_n\} \rightarrow P_0 \implies \{f(M_n)\} \rightarrow A$$

## Примеры.

### 1. Доказательство существования предела.

Рассмотрим предел  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ . Покажем, что он равен 0, используя опре-

деление по Коши. Нам нужно для любого  $\varepsilon > 0$  найти такое  $\delta > 0$ , чтобы из условия  $0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$  следовало  $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ .

Проведем оценку модуля разности:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x| \cdot x^2}{x^2 + y^2} + \frac{|y| \cdot y^2}{x^2 + y^2}$$

Так как  $x^2 \leq x^2 + y^2$  и  $y^2 \leq x^2 + y^2$ , то дроби  $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$  и  $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$  не превосходят единицы. Тогда:

$|f(x, y) - 0| \leq |x| + |y|$  Поскольку  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  и  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , получаем  $|x| + |y| < 2\delta$ . Положив  $\delta = \varepsilon/2$ , мы доказываем, что предел равен 0.

## 2. Доказательство отсутствия предела.

Рассмотрим предел  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Воспользуемся определением по Гейне, выбирая различные последовательности точек, стремящиеся к  $(0, 0)$ :

- Пусть  $M_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ . Тогда  $f(M_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- Пусть  $M'_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ . Тогда  $f(M'_n) = \frac{-1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ .

Так как пределы по различным последовательностям не совпадают ( $1/2 \neq -1/2$ ), то, согласно определению по Гейне, предел данной функции в точке  $(0, 0)$  не существует.

Визуализацию процесса приближения к точке по различным траекториям можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Предел ФНП\]](#)

Визуализацию случая, когда двойной предел не существует, можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Предел ФНП не существует\]](#)

## Связь двойного и повторных пределов

Помимо двойного предела  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ , в анализе функций нескольких переменных рассматривают *повторные пределы*, когда переход осуществляется последовательно по каждой переменной:  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$ . Следующая теорема устанавливает связь между этими понятиями.

### Теорема о существовании повторного предела.

Пусть функция  $f(x, y)$  определена в проколотой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$ . Если:

1. Существует двойной предел  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ ;
2. Для каждого  $y$  из окрестности  $y_0$  существует собственный предел по первой переменной:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ ,

тогда существует повторный предел  $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ , и он равен двойному пределу  $A$ .

**Доказательство.**

По условию существования двойного предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \dot{U}_\delta(P_0) \implies |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное  $y$ , удовлетворяющее условию  $0 < |y - y_0| < \delta$ . Для этого  $y$ , согласно условию (2), существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ .

Перейдем к пределу в неравенстве  $|f(x,y) - A| < \varepsilon$  при  $x \rightarrow x_0$ . По свойствам предельных переходов в неравенствах получаем:

$$|\varphi(y) - A| \leq \varepsilon.$$

Так как это верно для любого  $y$  из проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $y_0$ , то по определению предела это означает, что:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A. \quad \square$$

*Визуализацию, как повторные пределы влияют на существование двойного предела, можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Связь двойного предела ФНП и повторных пределов\]](#)*

## § 4. Непрерывность функции нескольких переменных

Понятие непрерывности ФНП вводится аналогично одномерному случаю: оно означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение значения функции.

**Определение 7.** Функция  $u = f(P)$  называется **непрерывной в точке**  $P_0$ , если предел функции в этой точке существует и совпадает с её значением:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$



функция:

$$F(T) = F(t_1, \dots, t_m) = f(\phi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_m))$$

непрерывна в точке  $(t_1^0, \dots, t_m^0)$ .

*Доказательство.* 1) Из непрерывности  $f$  в  $P_0$  следует, что для заданного  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что:

$$|x_i - x_i^0| < \delta \quad \forall i = 1 \dots n \implies |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

2) Для найденного  $\delta$ , в силу непрерывности каждой функции  $\phi_i$  в точке  $T_0$ , найдутся такие  $\delta_i > 0$ , что:

$$\rho(T, T_0) < \delta_i \implies |\phi_i(T) - \phi_i(T_0)| < \delta$$

3) Выберем  $\delta^* = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$ . Тогда при  $\rho(T, T_0) < \delta^*$  будут одновременно выполнены условия  $|\phi_i(T) - \phi_i(T_0)| < \delta$  для всех  $i$ . Это, в свою очередь, гарантирует выполнение условия:

$$|F(T) - F(T_0)| = |f(\dots) - f(\dots)| < \varepsilon$$

что доказывает непрерывность суперпозиции. □

## Классификация точек разрыва

Если в некоторой точке  $P_0$  нарушается хотя бы одно из условий непрерывности (функция не определена, предел не существует или не равен значению функции), то точка  $P_0$  называется **точкой разрыва**.

В многомерном случае классификация разрывов сложнее, так как разрывы могут происходить не только в изолированных точках, но и вдоль целых линий или поверхностей.

1. **Устранимый разрыв:** Двойной предел  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  существует, но функция в этой точке либо не определена, либо  $f(P_0) \neq A$ .
2. **Разрыв второго рода:** Двойной предел в точке  $P_0$  не существует (включая случаи, когда он равен бесконечности). К этому типу относятся:
  - *Бесконечный разрыв:*  $f(P) \rightarrow \infty$  при  $P \rightarrow P_0$ .
  - *Существенный разрыв:* значение функции зависит от траектории приближения (как в примере с  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ).

## Свойства функций на компакте

Если же функция непрерывна в каждой точке множества, которое является **компактом** (т. е. оно замкнуто и ограничено, например, замкнутый шар или прямоугольник с границей), то она обладает рядом важных свойств, по аналогии с функциями одной переменной.

**Теорема 1 (Первая теорема Вейерштрасса).** Если функция  $f(P)$  непрерывна на компакте  $K$ , то она ограничена на нем:

$$\exists M > 0 : \forall P \in K \implies |f(P)| \leq M$$

**Теорема 2 (Вторая теорема Вейерштрасса).** Если функция  $f(P)$  непрерывна на компакте  $K$ , то она достигает на нем своих точных границ. Это значит, что существуют такие точки  $P_{min}, P_{max} \in K$ , что:

$$f(P_{min}) = \inf_{P \in K} f(P), \quad f(P_{max}) = \sup_{P \in K} f(P)$$

**Теорема 3 (Больцано — Коши о промежуточном значении).** Если функция  $f(P)$  непрерывна в связной области  $D$  и принимает в ней значения  $A = \min_{P \in D} f(M)$  и  $B = \max_{P \in D} f(M)$ , тогда для любого числа  $C$ , такого что  $A < C < B$ , существует точка  $P^* \in D$ , в которой  $f(P^*) = C$ .

*Доказательство.* 1) По второй теореме Вейерштрасса, непрерывная на компакте  $D$  функция достигает своих точного нижнего и точного верхнего значений. Следовательно, существуют точки  $M_A, M_B \in D$ , такие что  $f(M_A) = A$  и  $f(M_B) = B$ .

2) Так как множество  $D$  линейно связно, существует непрерывная кривая  $L \subset D$ , соединяющая точки  $M_A$  и  $M_B$ . Эту кривую можно задать параметрическим уравнением:

$$M = \varphi(t), \quad t \in [0, 1],$$

где  $\varphi(0) = M_A$ ,  $\varphi(1) = M_B$ , и функция  $\varphi(t)$  непрерывна на  $[0, 1]$ .

3) Рассмотрим сложную функцию одной переменной  $g(t) = f(\varphi(t))$ . По теореме о непрерывности суперпозиции  $g(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ . При этом:

$$g(0) = f(M_A) = A, \quad g(1) = f(M_B) = B.$$

4) Согласно классической теореме Больцано - Коши для функции одной переменной, для любого  $C \in (A, B)$  найдется такое значение  $t^* \in (0, 1)$ , что  $g(t^*) = C$ .

5) Положим  $M^* = \varphi(t^*)$ . Так как  $t^* \in (0, 1)$ , то  $M^* \in D$  и  $f(M^*) = g(t^*) = C$ . □

## § 5. Пример решения задачи расчетно-графической работы. Исследование функции на существование предела

**Условие:** Исследовать на существование двойной и повторные пределы функции  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  в точке  $M(0, 0)$ .

*Примечание:* Область определения функции  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$ . Траектория  $y = -x$  исключается, так как на ней знаменатель обращается в нуль.

### 1. Повторные пределы

Вычислим повторные пределы, фиксируя одну из переменных:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$2) \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Так как повторные пределы существуют, но не равны между собой ( $1 \neq -1$ ), это уже является достаточным условием для утверждения, что двойной предел не существует.

### 2. Двойной предел (исследование по траекториям)

Для полноты анализа рассмотрим стремление к точке  $(0, 0)$  по пучкам прямых  $y = kx$  (где  $k \neq -1$ ):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x - kx}{x + kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - k)}{x(1 + k)} = \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Мы видим, что значение предела напрямую зависит от выбора коэффициента наклона  $k$ :

- При  $k = 0$  (вдоль оси  $Ox$ ) предел равен 1;
- При  $k = 1$  (вдоль прямой  $y = x$ ) предел равен 0;
- При  $k \rightarrow \infty$  (вдоль оси  $Oy$ ) предел равен  $-1$ .

Поскольку значение предела меняется при смене траектории, единого двойного предела в точке  $(0, 0)$  не существует.

### 3. Геометрическая интерпретация

На графике поверхности  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  это проявляется в том, что разные кривые на поверхности сходятся к разным «высотам» над началом координат:

- **Зеленая траектория** (вдоль  $Ox$ ): точки вида  $(t, 0, 1)$ , предел равен 1.
- **Фиолетовая траектория** (вдоль  $Oy$ ): точки вида  $(0, t, -1)$ , предел равен  $-1$ .
- **Красная траектория** ( $y = \frac{1}{3}x$ ): точки вида  $(t, \frac{1}{3}t, \frac{1}{2})$ , предел равен  $\frac{1}{2}$ .

*Поверхность в окрестности  $(0, 0)$  напоминает «разрыв», где листы поверхности сходятся в одну вертикальную линию.*

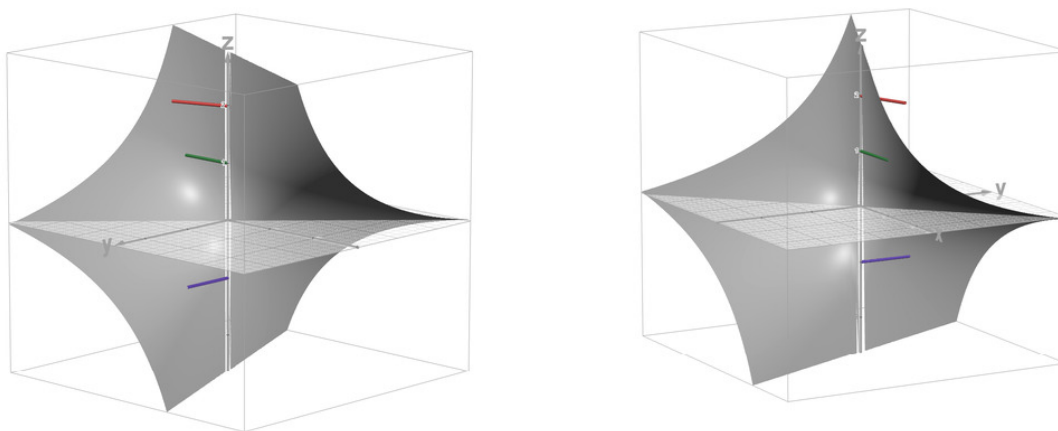


Рис. 4: Геометрическая интерпретация точек разрыва

# Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 1

## Вариант 1

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^2}$ , точка М (0, 0)

## Вариант 2

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ , точка М (0, 0)

## Вариант 3

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ , точка М (0, 0)

## Вариант 4

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$ , точка М (0, а)

## Вариант 5

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$ , точка М (0, 0)

## Вариант 6

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к

предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2+2y^2}$ , точка М (0, 0)

### Вариант 7

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ , точка М (0, 0)

### Вариант 8

Вычислите повторные пределы и двойной предел функции двух переменных, если они существуют. Изобразите на графике функции траектории движения к предельной точке. При этом, если двойного предела не существует, покажите на графике траектории, которые дадут разные значения предела при приближении к предельной точке. Функция:  $f(x, y) = (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2y^2}}$ , точка М (0, 0)

## Вопросы и задания для самопроверки к Главе 1

1. В чем заключается принципиальное отличие окрестности точки на прямой ( $\mathbb{R}^1$ ) от окрестности точки на плоскости ( $\mathbb{R}^2$ )?
2. Какая из аксиом метрики гарантирует, что расстояние между двумя различными точками всегда строго больше нуля?
3. Дайте определение **предельной точки** множества. Может ли точка быть предельной для множества, но не принадлежать ему? Приведите пример.
4. Почему для определения «области» недостаточно условия открытости? Зачем вводится требование **связности**?
5. Дайте определение функции и переменных, ее области определения и области значений.
6. Дайте определение функции двух переменных и ее области определения. Какой геометрический смысл этих понятий?
7. Постройте поверхность  $z = x^2 + 4y^2$  и ее линии уровня.
8. Что называют линией уровня функции двух переменных? Как получить поверхность уровня для функции трёх переменных  $f(x, y, z)$ ?
9. Могут ли две различные линии уровня одной и той же функции пересекаться? Ответ обоснуйте.
10. Как по карте с изолиниями определить участки с наибольшей скоростью изменения функции («крутизну» поверхности)?
11. Если при приближении к точке  $(0, 0)$  вдоль любой прямой  $y = kx$  предел функции равен  $L$ , гарантирует ли это существование двойного предела?
12. В чем заключается различие между определениями предела по Коши и по Гейне в контексте функций многих переменных?
13. Сформулируйте условия, при которых двойной предел гарантированно совпадает с повторными.
14. Приведите пример случая, когда оба повторных предела существуют и равны, но двойной предел при этом отсутствует.
15. В чем содержательная сложность условия непрерывности для ФНП по сравнению с функцией одной переменной?

16. Что такое **линия разрыва**? Приведите аналитический пример функции с такой линией.
17. Почему для выполнения теорем Вейерштрасса критически важно, чтобы множество было **замкнутым** и **ограниченным**?
18. Сформулируйте теорему о непрерывности суперпозиции. Какие условия накладываются на «внутренние» функции  $\phi_i$ ?

## Глава 2. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Переход от функций одной переменной к многомерному анализу принципиально усложняет геометрию исследуемого пространства. В отличие от одномерного случая, здесь существование частных производных в точке больше не гарантирует общую гладкость функции, поскольку приближаться к точке теперь можно по бесконечному числу направлений. Это важное ограничение требует возможности аппроксимации приращения функции линейной формой сразу по всем аргументам. В данном разделе будут рассмотрены и доказаны необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Также будет введено понятие полного дифференциала функции нескольких переменных, показана его инвариантность и рассмотрено применение к приближенным вычислениям. Полученный математический аппарат послужит фундаментом для решения прикладных задач оптимизации и математического моделирования.

### § 1. Частные производные

Для функции одной переменной  $y = f(x)$  производная характеризует скорость изменения функции при изменении её единственного аргумента. В случае функции многих переменных  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мы можем изменять как все переменные сразу, так и каждую по отдельности. В связи с этим введем понятие частной производной.

**Определение 1.** Частной производной функции нескольких переменных по некоторой переменной называется предел отношения частного приращения функции по этой переменной к приращению самой переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных  $f(x, y)$  частная производная по  $x$  в точке  $(x_0, y_0)$  определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Аналогично по  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

*Геометрический смысл:* Частная производная  $f'_x(x_0, y_0)$  равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к кривой пересечения поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостью  $y = y_0$ .

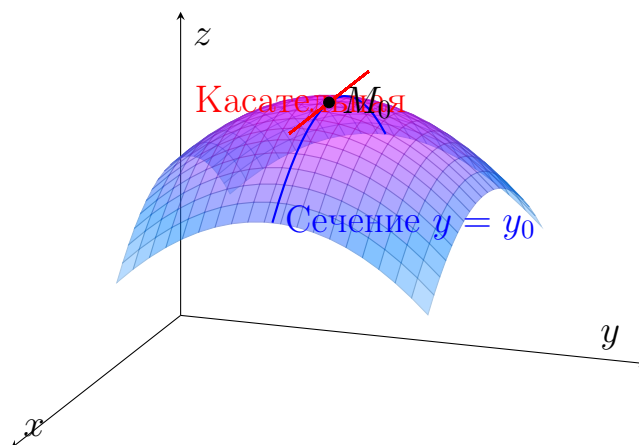


Рис. 5: Геометрический смысл частной производной  $f'_x$ : тангенс угла наклона касательной к кривой сечения поверхности плоскостью  $y = const$ .

**Правило вычисления:** При нахождении частной производной по одной переменной все остальные переменные считаются **константами**. Это позволяет использовать все стандартные правила дифференцирования функций одной переменной.

Найти частные производные функции  $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$ .

1. Считаем  $y = const$ :  $f'_x = 2xy + y \cos(xy)$ .
2. Считаем  $x = const$ :  $f'_y = x^2 + x \cos(xy)$ .

Визуализацию геометрического смысла частных производных можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Геометрический смысл частных производных\]](#)

## § 2. Полное приращение и дифференцируемость

В отличие от функции одной переменной, существование частных производных в точке **не гарантирует** непрерывность функции и её дифференцируемость. Для определенности и, не нарушая общности, рассмотрим функцию двух переменных.

**Определение 2.** Функция  $f(x, y)$  называется **дифференцируемой** в точке  $P_0$ , если её полное приращение  $\Delta f$  в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $\alpha$  и  $\beta \rightarrow 0$ , а  $A$  и  $B$  - некоторые числа (на самом деле  $A = f'_x, B = f'_y$ ).

**Определение 3.** Функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  называется **дифференцируемой** в точке  $M(x_1, \dots, x_m)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

где  $A_1, \dots, A_m$  - некоторые числа (не зависящие от  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ ), а  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  - бесконечно малые функции при  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , причем  $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0$ .

**Теорема. Необходимое условие дифференцируемости.**

Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $P_0$ , то она имеет в этой точке частные производные по всем переменным, т.е.

$$\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0), \quad \forall i = 1, \dots, m$$

*Доказательство.* Воспользуемся определением дифференцируемости для приращения  $\Delta u$ :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i$$

Положим все  $\Delta x_i = 0$ , кроме одного  $\Delta x_k$ . Тогда:

$$\Delta_{x_k} u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k \implies \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k$$

Так как  $\alpha_k \rightarrow 0$  при  $\Delta x_k \rightarrow 0$ , то:

$$\exists \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k$$

Аналогично доказывается равенство для всех частных производных. □

**Теорема. Достаточное условие дифференцируемости.**

Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет частные производные по всем переменным в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $P_0$  и эти производные непрерывны в самой точке  $P_0$ , то функция дифференцируема в этой точке.

*Доказательство.* Рассмотрим доказательство для случая  $m = 2$  Пусть  $\exists f'_x, f'_y$

непрерывны в точке  $P_0(x_0, y_0)$ . Рассмотрим полное приращение:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

Применим формулу Лагранжа (для функции одной переменной) к каждой скобке:

$$\Delta u = f'_x(x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_i < 1$$

В силу непрерывности производных в точке  $(x, y)$ :

$$f'_x(x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha_1$$

$$f'_y(x, y + \theta_2\Delta y) = f'_y(x, y) + \alpha_2$$

где  $\alpha_i \rightarrow 0$  при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ . Подставляя это в выражение для  $\Delta u$ , получаем формулу дифференцируемости:

$$\Delta u = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

□

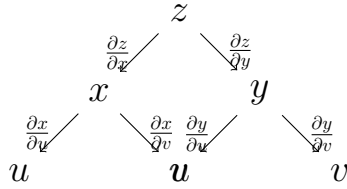
**Теорема о дифференцируемости сложной функции** Если функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $P_0(x_0, y_0)$ , а функции  $x = \phi(u, v)$  и  $y = \psi(u, v)$  дифференцируемы в точке  $T_0(u_0, v_0)$ , причем  $\phi(u_0, v_0) = x_0$  и  $\psi(u_0, v_0) = y_0$ , то сложная функция  $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$  также дифференцируема в точке  $T_0$ . Ее частные производные вычисляются по правилу «цепочки» или «матрешки»:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

*Пояснение:* Чтобы найти производную сложной функции по независимой переменной ( $u$  или  $v$ ), нужно просуммировать произведения производной внешней функции по каждой промежуточной переменной на производную этой промежуточной переменной по выбранной независимой.

**Графическая схема зависимостей:** Для запоминания удобно использовать дерево зависимостей:



*Доказательство.* Пусть независимая переменная  $u$  получила приращение  $\Delta u$  (при фиксированном  $v$ ). Это вызовет приращения промежуточных переменных:

$$\Delta x = \phi(u_0 + \Delta u, v_0) - \phi(u_0, v_0), \quad \Delta y = \psi(u_0 + \Delta u, v_0) - \psi(u_0, v_0)$$

Так как функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ , ее полное приращение можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где  $\alpha, \beta \rightarrow 0$  при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ .

Разделим обе части равенства на  $\Delta u \neq 0$ :

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta u} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta u} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Перейдем к пределу при  $\Delta u \rightarrow 0$ . Учитывая, что:

1. По определению частных производных:  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\partial x}{\partial u}$  и  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u}$ .
2. В силу дифференцируемости (а значит, и непрерывности) функций  $\phi$  и  $\psi$ , при  $\Delta u \rightarrow 0$  имеем  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ , следовательно  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ .

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + 0 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \end{aligned}$$

Аналогично доказывается формула для  $\frac{\partial z}{\partial v}$  при приращении переменной  $v$ .  $\square$

### § 3. Инвариантность формы первого дифференциала

По аналогии с функцией одной переменной, **первый дифференциал** - это линейная комбинация приращений аргументов (главная часть полного прира-

щения):

$$df = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n$$

Поскольку для независимых переменных  $\Delta x_i = dx_i$ , а роль производной  $A$  теперь играют частные производные  $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , итоговая структура полностью повторяет одномерный случай, переходя в сумму по всем направлениям:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Одним из самых удобных свойств первого дифференциала является сохранение его внешнего вида при переходе к новым переменным. Это свойство называется **инвариантностью**.

**Теорема об инвариантности формы первого дифференциала**  
**Форма первого дифференциала функции нескольких переменных не зависит от того, являются ли её аргументы независимыми переменными или дифференцируемыми функциями других переменных.**

*Доказательство.* Не ограничивая общности, проведем доказательство для случая функции двух переменных.

Пусть  $z = f(x, y)$ , в случае когда  $x$  и  $y$  - независимые переменные, условие теоремы выполняется по определению дифференциала:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

Здесь  $dx = \Delta x$  и  $dy = \Delta y$ .

Пусть теперь  $x$  и  $y$  являются дифференцируемыми функциями новых переменных  $u$  и  $v$ :  $x = \phi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ . Тогда  $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$  является сложной функцией от переменных  $u$  и  $v$ . Ее дифференциал по определению равен:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Воспользуемся теоремой о производной сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f'_x \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \frac{\partial y}{\partial v}$$

Подставим эти выражения в формулу для  $dz$ :

$$dz = \left( f'_x \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( f'_x \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые относительно  $f'_x$  и  $f'_y$ :

$$dz = f'_x \underbrace{\left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)}_{dx} + f'_y \underbrace{\left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)}_{dy}$$

Заметим, что выражения в скобках по определению являются дифференциалами функций  $x$  и  $y$ . Таким образом:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

Форма дифференциала **не изменилась**, что и требовалось доказать. □

*Важное замечание:* Несмотря на внешнее сходство, смысл величин  $dx$  и  $dy$  изменился. В первом случае это были произвольные приращения независимых переменных, а во втором - линейные части приращений функций  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$ .

## § 4. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

Исходя из определения дифференциала как главной линейной части приращения функции, при достаточно малых  $\Delta x$  справедливо приближенное равенство  $\Delta y \approx dy$ . Это позволяет заменить приращение функции  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  дифференциалом  $f'(x_0)dx$ .

С учетом того, что для независимой переменной  $dx = \Delta x$ , получаем рабочую формулу для оценки значения функции в «близкой» точке:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{1}$$

Геометрически это означает замену участка графика функции его касательной в точке  $x_0$ . Благодаря свойству *инвариантности формы* первого дифференциала, данная методика остается справедливой и в том случае, если  $x$  является не независимой переменной, а дифференцируемой функцией другого аргумента.

### **Пример: Вычисление $\sqrt{16,2}$**

Рассмотрим алгоритм применения данной формулы на конкретном примере:

- Выбор функции:** Пусть  $f(x) = \sqrt{x}$ . Нам нужно найти значение в «неудобной» точке 16,2.

2. **Определение базисной точки:** Выберем  $x_0 = 16$ , так как значение функции  $f(16) = 4$  и значение производной в этой точке вычисляются точно и легко.

3. **Приращение:** Определим малый шаг  $\Delta x = 16,2 - 16 = 0,2$ .

4. **Производная:** Находим общий вид производной  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

5. **Локальные расчеты:**

- $f(x_0) = \sqrt{16} = 4$ ;
- $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0,125$ .

6. **Итоговый расчет:** Подставляем данные в формулу (1):

$$\sqrt{16,2} \approx 4 + 0,125 \cdot 0,2 = 4 + 0,025 = 4,025$$

**Результат:** Мы получили значение 4,025. Сравнивая с точным значением  $\approx 4,02492$ , видим, что ошибка пренебрежимо мала и возникает лишь в пятом знаке после запятой, что подтверждает эффективность метода для малых приращений.

## § 5. Градиент и его связь с линиями уровня. Производная по направлению

Частные производные характеризуют скорость изменения функции вдоль координатных осей. Чтобы описать скорость максимального изменения функции в произвольном направлении, вводится понятие градиента.

**Определение 4.** Градиентом функции  $f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  называется вектор, координатами которого являются соответствующие частные производные в этой точке:

$$\text{grad } f(P_0) = \nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)$$

### Свойства и геометрическая связь

Градиент обладает двумя важнейшими геометрическими свойствами, которые связывают его с линиями уровня:

1. **Направление наискорейшего роста:** Вектор  $\nabla f$  всегда указывает в сторону самого крутого подъема поверхности  $z = f(x, y)$ , а его длина  $|\nabla f|$  равна величине этой максимальной скорости.
2. **Ортогональность линиям уровня:** В каждой точке градиент функции перпендикулярен (ортогонален) касательной к линии уровня, проходящей через эту точку.

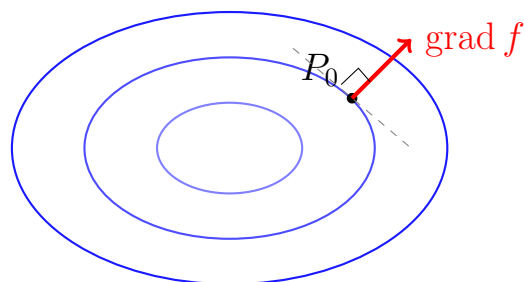


Рис. 6: Градиент в точке  $P_0$  перпендикулярен касательной к линии уровня  $f(x, y) = C$  и указывает направление максимального роста функции.

Это свойство используется в численных методах оптимизации (метод градиентного спуска), где для поиска минимума функции нужно двигаться в сторону, противоположную градиенту.

## Производная по направлению

Градиент характеризует изменение функции вдоль осей координат или в направлении максимального роста. Для вычисления скорости изменения функции в произвольном направлении, заданном единичным вектором  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , используется понятие производной по направлению.

**Определение 5.** Производной функции  $f$  по направлению  $\vec{l}$  в точке  $P_0$  называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\vec{l}) - f(P_0)}{t}$$

Если функция дифференцируема, то производная по направлению вычисляется через скалярное произведение градиента и вектора направления:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

Рассмотрим прямую, проходящую через точку  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  в направлении вектора  $\vec{l}$ .

Уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma} = t$$

где  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  - направляющий вектор прямой, причём  $|\vec{l}| = 1$ .  
Следовательно:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases}$$

Пусть точка  $p$  имеет координаты  $(x, y, z)$ . Тогда расстояние  $|pp_0|$  равно:

$$|p p_0| = \sqrt{t^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)} = |t|$$

Тогда предел принимает вид:

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{|t|}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$ . Данный предел (при  $t \rightarrow 0^+$ ) соответствует значению  $F'(0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0)$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

Таким образом, производная по направлению  $\vec{l}$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  вычисляется по формуле:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

**Связь с градиентом:** Из формулы скалярного произведения ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\nabla f| \cdot \cos \theta$$

где  $\theta$  - угол между вектором градиента и вектором направления  $\vec{l}$ .

Отсюда вытекают важные следствия:

- Производная по направлению **максимальна**, когда направление  $\vec{l}$  совпадает с направлением градиента ( $\theta = 0$ ).
- Производная по направлению **равна нулю**, если направление  $\vec{l}$  перпендикулярно градиенту ( $\theta = 90^\circ$ ), то есть вдоль линии уровня.
- Производная по направлению **минимальна** (наибольшее убывание), когда  $\vec{l}$  противоположно градиенту ( $\theta = 180^\circ$ ).

## § 6. Производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$  сами являются функциями нескольких переменных, а значит, их также можно дифференцировать. Так возникают частные производные второго, третьего и более высоких порядков.

Для функции двух переменных существует четыре производные второго порядка:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  называются **смешанными**. Возникает естественный вопрос: зависит ли результат дифференцирования от порядка переменных? Ответ дает классическая теорема математического анализа.

### Теорема Шварца

Если функция  $f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $P_0(x, y)$ , причем в этой окрестности существуют смешанные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$ , и они непрерывны в самой точке  $P_0$ , то они равны в этой точке:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательное выражение (вторую разность):

$$F = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

Введем функцию  $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ . Тогда  $F = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ .

По теореме Лагранжа о конечном приращении:

$$F = \varphi'(\xi)\Delta x = [f'_x(\xi, y + \Delta y) - f'_x(\xi, y)]\Delta x, \quad \xi \in (x, x + \Delta x)$$

Применим теорему Лагранжа еще раз, теперь к функции внутри квадратных скобок (по переменной  $y$ ):

$$F = f''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y, \quad \eta \in (y, y + \Delta y)$$

С другой стороны, введем  $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ . Тогда аналогично  $F = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$ . Повторяя те же рассуждения (сначала по  $y$ , затем по  $x$ ), получим:

$$F = f''_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\Delta x\Delta y, \quad \bar{\xi} \in (x, x + \Delta x), \bar{\eta} \in (y, y + \Delta y)$$

Приравнивая два выражения для  $F$  и сокращая на  $\Delta x\Delta y$ , имеем:

$$f''_{xy}(\xi, \eta) = f''_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

Устремляя  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , точки  $(\xi, \eta)$  и  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  стремятся к  $(x, y)$ . В силу непрерывности смешанных производных в пределе получаем:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

□

## Нарушение инвариантности формы второго дифференциала

Напомним, что форма первого дифференциала  $df = f'_x dx + f'_y dy$  обладает свойством инвариантности: она сохраняет свой вид независимо от того, являются ли  $x$  и  $y$  независимыми переменными или функциями других переменных. Рассмотрим, сохраняется ли это свойство для дифференциалов высших порядков.

### Теорема о нарушении инвариантности формы второго дифференциала.

Форма второго дифференциала функции нескольких переменных не является инвариантной относительно перехода к новым переменным.

*Доказательство.* Пусть  $z = f(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  - независимые переменные. Тогда:

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f''_{xx} dx + f''_{xy} dy)dx + (f''_{yx} dx + f''_{yy} dy)dy$$

Так как  $dx$  и  $dy$  для независимых переменных постоянны ( $d^2x = 0, d^2y = 0$ ), получаем стандартную форму:

$$d^2z = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Теперь предположим, что  $x$  и  $y$  сами являются функциями переменных  $u, v$ :  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ . Тогда при вычислении  $d(dz)$  мы должны рассматривать  $dx$  и  $dy$  как переменные величины (дифференциалы функций):

$$d^2z = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x) \cdot dx + f'_x \cdot d(dx) + d(f'_y) \cdot dy + f'_y \cdot d(dy)$$

Вычислим  $d(f'_x)$  и  $d(f'_y)$  по правилу дифференцирования сложной функции:

$$d^2z = \underbrace{(f''_{xx}dx + f''_{xy}dy)dx + (f''_{yx}dx + f''_{yy}dy)dy}_{\text{стандартная часть}} + \underbrace{f'_x d^2x + f'_y d^2y}_{\text{добавочная часть}}$$

Таким образом, в случае зависимых переменных формула принимает вид:

$$d^2z = (f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2) + (f'_x d^2x + f'_y d^2y)$$

Наличие добавочной части ( $f'_x d^2x + f'_y d^2y$ ) доказывает, что форма второго дифференциала не является инвариантной.  $\square$

*Замечание:* Если  $x$  и  $y$  связаны с новыми переменными  $u, v$  линейно, то  $d^2x = 0$  и  $d^2y = 0$ , и инвариантность формы второго дифференциала восстанавливается.

## Пример

Рассмотрим функцию  $z = x^2$  и пусть  $x = u^2$ .

**1. Прямой расчет:**  $z = (u^2)^2 = u^4$ . Тогда  $dz = 4u^3 du$ , а второй дифференциал:

$$d^2z = d(4u^3 du) = 12u^2 du^2$$

**2. Расчет через формулу дифференциала:** Находим производные и дифференциалы:  $f'_x = 2x$

$$dx = d(u^2) = 2udu$$

$$d^2x = d(2udu) = 2du^2$$

Подставим в формулу неинвариантного второго дифференциала:

$$d^2z = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x$$

$$f''_{xx} = 2.$$

$$d^2z = 2 \cdot (2udu)^2 + (2x) \cdot (2du^2)$$

Заменим  $x$  на  $u^2$ :

$$d^2z = 2 \cdot 4u^2 du^2 + 2u^2 \cdot 2du^2 = 8u^2 du^2 + 4u^2 du^2 = 12u^2 du^2$$

*Замечание:* Если бы мы использовали «инвариантную» формулу  $f''_{xx} dx^2$ , мы бы получили  $8u^2 du^2$ , что является неверным результатом. Только учет члена  $f'_x d^2x$  дает правильный ответ.

## § 7. Введение в теорию неявных функций

До настоящего момента мы работали исключительно с понятием явно заданной функции  $y = f(x)$ , где каждому значению аргумента ставится в соответствие единственное значение функции по прямому правилу, как это принято в курсе математического анализа. Однако на практике зависимости между переменными чаще всего задаются уравнениями вида:

$$F(x, y) = 0,$$

то есть нулями функции. Наглядным примером может служить уравнение окружности  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ . Формально это уравнение не является функцией в классическом понимании, так как одному значению  $x$  могут соответствовать два значения  $y$  (верхняя и нижняя дуги), или не соответствовать вовсе. Таким образом отсутствует биективность. Взяв точку  $(x_0, y_0)$  и рассмотрев её окрестность, мы можем утверждать, что в этой окрестности выполняется биективность. Но вот в точках  $(-1, 0); (1, 0)$  на окружности биективность нарушается.

Тем не менее, для решения физических и технических задач нам необходимо уметь исследовать такие зависимости: находить их скорость изменения (производную), строить касательные и искать экстремумы.

Чтобы перенести обсуждаемый в предыдущих разделах аппарат математического анализа на такие «скрытые» зависимости, мы вводим понятие **неявной функции**. Основная идея заключается в том, чтобы выделить такие условия (окрестности), в которых уравнение  $F(x, y) = 0$  однозначно определяет  $y$  как функцию от  $x$ . Это позволяет нам работать с производными, даже не имея возможности (или необходимости) выражать  $y$  в явном виде.

### Теорема о неявной функции.

Пусть  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  - гладкое отображение;  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ,  $x = (x^1, \dots, x^{n+k})$ .  $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкие отображения,  $F(x_0) = 0$  и матрица  $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$  обратима ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Тогда  $\exists$  окрестности  $V, W$ , в которых поверхность задается как

график гладкой функции.

Общая теорема о неявной функции описывает условия, при которых система уравнений разрешима относительно выбранной группы переменных. Рассмотрим частный, наиболее прикладной случай этой теоремы - когда уравнение  $F(x, y) = 0$  связывает две переменные  $x$  и  $y$ , и мы хотим выразить  $y$  как функцию от  $x$ .

В терминах общей теоремы это соответствует случаю  $n = 1$  (одно уравнение) и  $k = 1$  (одна свободная переменная). Тогда условие обратимости матрицы частных производных вырождается в условие отличия от нуля одной-единственной производной по той переменной, которую мы хотим «выразить».

Это приводит нас к следующей формулировке:

### **Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции**

Пусть функция  $F(x, y)$  удовлетворяет следующим условиям в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$ :

1.  $F(x_0, y_0) = 0$  (точка принадлежит графику);
2. Функции  $F, F'_x, F'_y$  непрерывны в этой окрестности;
3.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$  (условие разрешимости относительно  $y$ ).

Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует единственная непрерывная и дифференцируемая функция  $y = f(x)$ , такая что  $f(x_0) = y_0$  и  $F(x, f(x)) \equiv 0$ . При этом её производная вычисляется по формуле:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

**Геометрический смысл условия  $F'_y \neq 0$ :** Это условие гарантирует, что в данной точке касательная к кривой не вертикальна. Если  $F'_y = 0$ , то мы попадаем в «критическую» точку (например, крайние левая или правая точки окружности), где зависимость перестает быть однозначной функцией.

*Визуализацию производной неявной функции можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Производная неявной функции\]](#)*

Теорема о неявной функции дает нам инструмент для локального описания множества решений уравнения  $F(x^1, \dots, x^d) = 0$ . Если в каждой точке такого множества выполнены условия теоремы (в частности, условие о невырожденности матрицы производных), то само это множество можно рассматривать как геометрический объект — поверхность.

Перейдем к строгому определению.

**Определение 6.** Подмножество  $S \subset \mathbb{R}^d$  называется **гладкой (гипер) поверхностью** размерности  $k$ , если для каждой точки  $x_0 \in S$  существует ее окрестность  $U \subset \mathbb{R}^d$  и гладкое отображение  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  (где  $n = d - k$  - количество уравнений) такие, что:

1.  $S \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ ;
2. Ранг матрицы Якоби  $rg \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = d - k$  во всех точках  $x \in S \cap U$  (условие регулярности).

В случае, когда  $d = 3$  и  $n = 1$ , мы получаем привычное определение гладкой поверхности в трехмерном пространстве, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Условие полноты ранга здесь означает, что градиент  $\nabla F \neq 0$ , что гарантирует существование касательной плоскости в каждой точке.

**Замечание о связи с теоремой:** Фактически, теорема о неявной функции утверждает, что локально любая такая поверхность может быть представлена в виде графика функции  $y = f(x)$ , где  $y \in \mathbb{R}^n$ , а  $x \in \mathbb{R}^k$ .

**Определение 7:** Поверхность  $S$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  — называется **регулярной**, если в окрестности каждой её точки можно задать гладкое отображение (т.е. непрерывное отображение) в соответствующих декартовых координатах.

**Способы задания регулярных поверхностей:**

1. Множество нулей функции  $F(x, y, z) = 0$ .
2. Параметрически. Например, можно взять отображение координат с плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , т.е.  $r : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , что равносильно параметризации:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

## § 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим гладкую поверхность  $S$ , заданную уравнением  $F(x^1, \dots, x^d) = 0$ . Пусть  $x_0 \in S$  — некоторая точка на поверхности.

**Вектором нормали**  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  в точке  $x_0$  называется градиент функции  $F$ , вычисленный в этой точке:

$$\vec{n} = \nabla F(x_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x^d}(x_0) \right)$$

Согласно условию регулярности ( $\text{rank} F' = 1$ ), этот вектор всегда отличен от нулевого и ортогонален любому вектору, касающемуся поверхности.

**Касательной плоскостью**  $T_{x_0}S$  к поверхности  $S$  в точке  $x_0$  называется множество точек  $x$ , удовлетворяющих уравнению:

$$\langle \nabla F(x_0), x - x_0 \rangle = 0 \quad (2)$$

Или в координатной форме:

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i) = 0$$

**Геометрический смысл:** Касательная плоскость состоит из всех векторов  $\vec{v} = x - x_0$ , которые ортогональны вектору нормали. Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ , то уравнение (2) переходит в классический вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Пример: Сфера**  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

- Градиент:  $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$ .
- В точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  вектор нормали:  $\vec{n} = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \parallel (x_0, y_0, z_0)$ .
- Уравнение касательной плоскости:  $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$ .

## § 9. Пример решения задачи расчетно-графической работы. Связь линий уровня и градиента

Нужно найти и изобразить графически линии уровня и поле градиента функции  $z = x^2 + y^2$ .

### 3. Связь линий уровня и градиента

Важной особенностью является распределение линий уровня на плоскости:

- Расстояние между линиями уровня  $C_1, C_2, \dots$  при фиксированном шаге константы  $C$  обратно пропорционально модулю градиента.
- Там, где линии уровня расположены гуще, значение модуля градиента  $|\text{grad } z|$  больше. Это означает, что в этих областях функция изменяется (растет) быстрее.

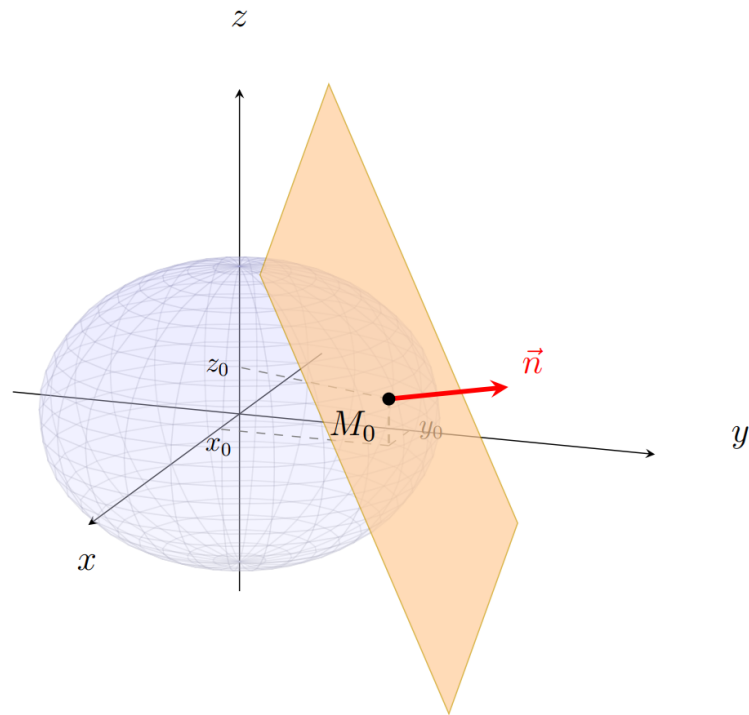


Рис. 7: Касательная плоскость и нормаль в точке  $M_0$

- В нашем случае  $|\text{grad } z| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2R$ . Таким образом, при удалении от начала координат окружности (линии уровня) при одном и том же шаге по  $z$  будут располагаться все ближе друг к другу, так как величина градиента растет.

**Ответ:** Линии уровня - концентрические окружности. Поле градиента - радиальные лучи, направленные от центра. Плотность расположения линий уровня визуально отображает величину градиента: чем теснее прилегают окружности друг к другу, тем выше скорость роста функции.

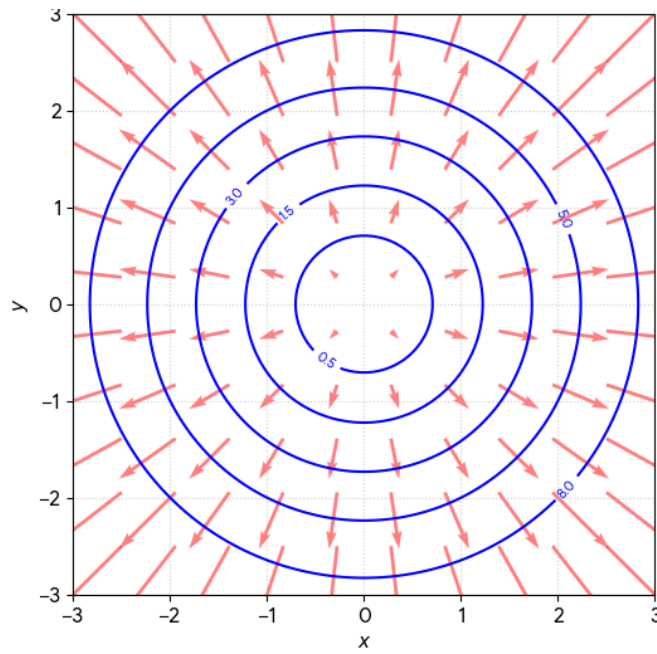


Рис. 8: Линии уровня и градиент  $z = x^2 + y^2$

Визуализацию линий уровня и поля градиента можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Линии уровня и поле градиента\]](#)

## Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 2

### Вариант 1

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = x^2 + y^2$

### Вариант 2

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = x^2 - y^2$

### Вариант 3

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = (x + y)^2$

### Вариант 4

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = \sqrt{xy}$

### Вариант 5

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = \frac{y}{x}$

### Вариант 6

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$

### Вариант 7

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = |x| + y$

### Вариант 8

Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента следующей функции:  $z = x^y (x > 0)$

## Вопросы и задания для самопроверки к Главе 2

1. Определите частные производные функции  $u = f(P)$  в точке  $P$ .
2. Сформулируйте правило вычисления частной производной по одной из переменных. Что происходит с остальными переменными в процессе дифференцирования?
3. В чем заключается геометрический смысл частной производной  $f'_y(x_0, y_0)$ ? Опишите положение секущей плоскости и соответствующей касательной.
4. Верно ли утверждение: «Если функция имеет частные производные в точке, то она непрерывна в этой точке»? Приведите контрпример или объяснение.
5. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных. Чем оно отличается от необходимого условия?
6. Как записывается «цепное правило» для производной сложной функции  $z = f(x, y)$ , где  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ ?
7. Изобразите дерево зависимостей для функции  $u = f(x, y, z)$ , где  $x, y, z$  являются функциями одной переменной  $t$ . Запишите формулу полной производной  $\frac{du}{dt}$ .
8. Приведите определение полного дифференциала функции  $n$  переменных; двух переменных.
9. Как применяется полный дифференциал в приближенных вычислениях?
10. В чем преимущество формулы дифференцирования неявной функции  $F(x, y, z) = 0$  по сравнению с попыткой выразить  $z$  в явном виде?
11. Дайте определение вектора-градиента. В каком пространстве он лежит: в области определения функции или в пространстве её графика?
12. Как связаны вектор  $\text{grad } f$  и линии уровня  $f(x, y) = C$  в одной и той же точке?
13. Дайте определение производной по направлению.
14. В каком направлении производная по направлению принимает свое максимальное значение, и чему оно равно?

15. Может ли производная по направлению быть отрицательной? Что это означает с точки зрения рельефа поверхности?
16. Каков физический смысл градиента температурного поля в комнате?
17. Что такое «смешанная» частная производная?
18. Сформулируйте теорему Шварца о равенстве смешанных производных. Какое условие является ключевым для её выполнения?
19. Сколько различных частных производных второго порядка существует для функции трех переменных?
20. Сформулируйте правило дифференцирования неявно заданной функции.
21. Как проводится дифференцирование системы неявно заданных функций?
22. Определите и укажите правила нахождения производных и дифференциалов высших порядков.
23. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости неявной функции  $F(x, y, z) = 0$ . Какое ограничение накладывается на частную производную  $F'_z$  в рассматриваемой точке?
24. Как составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ ? Запишите формулу через частные производные в точке  $P_0$ .
25. Выведите уравнение нормали к поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Как координаты вектора нормали связаны с вектором-градиентом?
26. В чем заключается геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных в точке? Какая связь существует между приращением аппликаты касательной плоскости и дифференциалом  $dz$ ?
27. Как изменится уравнение касательной плоскости, если поверхность задана параметрически:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ?
28. Объясните, почему вектор  $\text{grad } F(x_0, y_0, z_0)$  ортогонален касательной плоскости к поверхности уровня  $F(x, y, z) = C$ .
29. Что такое особая точка поверхности  $F(x, y, z) = 0$ ? Можно ли в такой точке однозначно провести касательную плоскость?

# Глава 3. Экстремум функций нескольких переменных

Одним из важнейших приложений дифференциального исчисления функций многих переменных является нахождение их экстремальных значений. В рамках расчетно-графической работы рассматриваются три ключевых типа задач:

- **Локальный экстремум:** поиск точек, в которых функция достигает максимума или минимума в некоторой окрестности. Геометрически это соответствует точкам, где касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости  $Oxy$ .
- **Условный экстремум:** нахождение экстремальных значений при условии, что переменные связаны дополнительным уравнением (уравнением связи). Это эквивалентно поиску наивысших и низших точек кривой (например, по оси  $z$ ), лежащей на поверхности над линией связи.
- **Глобальный экстремум (наибольшее и наименьшее значения) в области:** комплексное исследование функции в замкнутой области  $D$ , включающее проверку критических точек внутри области и анализ поведения функции на её границе.

Рассмотрим каждый из перечисленных видов экстремума подробнее.

## § 1. Локальный (свободный) экстремум

Точка  $x_0$  называется точкой *локального максимума (минимума)*, если существует такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ).

**Теорема Ферма. Необходимое условие** Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $M_0$  и имеет в ней экстремум, то все её частные производные первого порядка равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0 \quad (\text{или градиент обращается в ноль } \nabla f(M_0) = \vec{0})$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай локального минимума (для максимума рассуждения аналогичны). Зафиксируем все переменные, кроме одной, например  $x_i$ , положив их равными координатам точки  $M_0$ . В результате получим

функцию одной переменной:

$$\varphi(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0).$$

Так как исходная функция  $f$  имеет в точке  $M_0$  локальный минимум, то и вспомогательная функция  $\varphi(x_i)$  имеет в точке  $x_i^0$  локальный минимум (по определению экстремума функции многих переменных).

По условию теоремы функция  $f$  дифференцируема в точке  $M_0$ , а значит, в этой точке существуют все её частные производные. Следовательно, функция  $\varphi(x_i)$  дифференцируема в точке  $x_i^0$ , и её производная совпадает с соответствующей частной производной функции  $f$ :

$$\varphi'(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0).$$

Согласно классической теореме Ферма для функции одной переменной, если дифференцируемая функция имеет в точке экстремум, то её производная в этой точке равна нулю:

$$\varphi'(x_i^0) = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = 0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждой переменной  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , мы получаем, что все частные производные первого порядка в точке  $M_0$  равны нулю.  $\square$

**Пример отсутствия экстремума при выполнении необходимого условия** Рассмотрим поверхность  $f(x, y) = y^2 - x^2$ , которая называется гиперболический параболоид. Исследуем функцию  $f(x, y) = y^2 - x^2$  в окрестности начала координат.

1. **Необходимое условие:** Находим частные производные первого порядка:

$$f'_x = -2x, \quad f'_y = 2y$$

В точке  $M_0(0, 0)$  обе производные равны нулю:  $f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$ . Необходимое условие выполнено.

2. **Анализ поведения по направлениям (осям):** Рассмотрим поведение функции при движении вдоль координатных осей:

- Вдоль оси  $Oy$  (где  $x = 0$ ): функция  $f(0, y) = y^2$  имеет в нуле **минимум**. При удалении от центра значения растут.
- Вдоль оси  $Ox$  (где  $y = 0$ ): функция  $f(x, 0) = -x^2$  имеет в нуле **максимум**. При удалении от центра значения убывают.

Так как в любой окрестности точки  $(0, 0)$  есть как точки с бóльшими значениями ( $z > 0$ ), так и с меньшими ( $z < 0$ ), то **экстремума нет**.

Следовательно, в любой сколь угодно малой окрестности точки  $(0, 0)$  функция принимает как значения больше  $f(0, 0)$ , так и меньше  $f(0, 0)$ . По определению, это означает, что в данной точке **экстремума нет**.

*Визуализацию того, как выглядит данная поверхность с седловой точкой, в которой выполнено необходимое условие, но нет экстремума, можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Связь двойного предела ФНП и повторных пределов\]](#)*

**Теорема. Достаточное условие** Пусть  $M_0$  - критическая точка. Характер экстремума определяется знаком второго дифференциала (Квадратичной формы  $dx_1 \dots dx_n$ )  $d^2 f(M_0) = \sum \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ , а именно:

- Если квадратичная форма  $d^2 f(M_0)$  **положительно определена**, то  $M_0$  является точкой строгого **локального минимума**.
- Если квадратичная форма  $d^2 f(M_0)$  **отрицательно определена**, то  $M_0$  является точкой строгого **локального максимума**.
- Если квадратичная форма **знакопеременна**, то в точке  $M_0$  **экстремума нет**.
- Если квадратичная форма **квазизнакопостоянна** (полуопределена), то требуется дополнительное исследование.

Напомним критерий Сильвестра для установления знакоопределенности квадратичной формы.

**Критерий Сильвестра.** Для практической проверки знакоопределенности используется матрица Гессе  $H(M_0)$ . Вычисляются её главные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ :

- Если все  $\Delta_i > 0$  - минимум.
- Если знаки чередуются:  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \dots$  (т.е.  $(-1)^k \Delta_k > 0$ ) - максимум.

Визуализацию использования необходимого и достаточного условия на основе критерия Сильвестра можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Экстремум ФНП. Необходимое и достаточное условие\]](#)

*Замечание:*

Для функции двух переменных  $f(x, y)$  введем дискриминант  $\Delta$  (определитель матрицы Гессе), который совпадает с гауссовой кривизной поверхности в точке  $(x, y)$ :

$$\Delta = \det H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

- Если  $\Delta > 0$ : экстремум существует. При  $f''_{xx} > 0$  — **минимум**, при  $f''_{xx} < 0$  — **максимум**. Также, можно определять максимум или минимум у функции с помощью знака средней кривизны, которая равна значению половины следа матрицы Гессе.
- Если  $\Delta < 0$ : экстремума нет (**седловая точка**).
- Если  $\Delta = 0$ : требуется исследование дифференциалов высших порядков.

## § 2. Условный экстремум и метод Лагранжа

Задача нахождения условного экстремума заключается в том, чтобы найти экстремум  $f(x, y)$  при ограничении (условии)  $\varphi(x, y) = 0$ .

**Определение ??**. Условным экстремумом функции  $z = f(x, y)$  называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что её переменные связаны уравнением  $\varphi(x, y) = 0$  (уравнение связи).

Геометрическая интерпретация состоит в следующем: В точке условного экстремума линия уровня функции  $f(x, y) = C$  касается линии связи  $\varphi(x, y) = 0$ . Следовательно, их нормали (градиенты) параллельны:  $\nabla f = -\lambda \nabla \varphi$ .

Для нахождения точек условного экстремума составляется вспомогательная **функция Лагранжа**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

где  $\lambda$  - вспомогательный множитель Лагранжа.

### Алгоритм решения:

1. **Необходимое условие:** Составляется и решается система уравнений для нахождения стационарных точек  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ :

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

2. **Достаточное условие:** Для каждой полученной точки вычисляется **окаймленный гессиан** (определитель матрицы вторых производных функции Лагранжа):

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

- Если  $\bar{H} > 0$ , то в точке  $(x_0, y_0)$  наблюдается **условный максимум**.
- Если  $\bar{H} < 0$ , то в точке  $(x_0, y_0)$  наблюдается **условный минимум**.

### Метод прямой подстановки

Если из уравнения связи  $\varphi(x, y) = 0$  можно явно выразить одну переменную через другую (например,  $y = \psi(x)$ ), то задача сводится к поиску экстремума функции одной переменной:

$$z = f(x, \psi(x))$$

Этот метод удобен для простых линейных ограничений или окружностей. **Достаточное условие:** Исследуется знак  $d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$ . При этом переменные  $dx$  и  $dy$  связаны уравнением  $dF = F'_x dx + F'_y dy = 0$ . Если при этом условии  $d^2L > 0$  — это условный минимум, если  $d^2L < 0$  — условный максимум.

### Пример решения методом Лагранжа

**Задача:** Найти условный экстремум функции  $f(x, y) = xy$  при условии  $x + y - 2 = 0$ .

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 2)$$

## 2. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \implies \lambda = -y \\ L'_y = x + \lambda = 0 \implies \lambda = -x \\ x + y = 2 \implies x + x = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Получена стационарная точка  $M_0(1, 1)$  при  $\lambda = -1$ .

## 3. Проверим достаточное условие через окаймленный гессиан: На-

ходим производные:  $\varphi'_x = 1$ ,  $\varphi'_y = 1$

$L''_{xx} = 0$ ,  $L''_{yy} = 0$ ,  $L''_{xy} = 1$

Составляем определитель  $\bar{H}$ :

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Разложим по первой строке:

$$\bar{H} = 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(0 - 1) + 1(1 - 0) = 1 + 1 = 2$$

## 4. Вывод: Так как $\bar{H} = 2 > 0$ , то точка $M_0(1, 1)$ является точкой **условного максимума**.

Значение функции:  $z_{\max} = 1 \cdot 1 = 1$ .

## § 3. Нахождение максимума и минимума функции на компакте

Исследование функции на замкнутом ограниченном множестве (компакте)  $D$  основывается на **теореме Вейерштрасса**: функция, непрерывная на компакте, достигает на нем своего наибольшего ( $M$ ) и наименьшего ( $m$ ) значений.

Процесс поиска глобального максимума и минимума состоит из объединения методов поиска локального и условного экстремумов:

1. **Поиск внутренних критических точек:** Находятся стационарные точки внутри области  $D$  (решением системы  $f'_x = 0, f'_y = 0$ ). Отбираются только те точки, которые лежат *строго внутри* границы. Вычисляются значения функции в этих точках.
2. **Исследование функции на границе (Условный экстремум):** Граница области  $\partial D$  рассматривается как уравнение связи  $\varphi(x, y) = 0$ . Здесь

задача сводится к поиску **условного экстремума**.

- Если граница состоит из нескольких линий (например, стороны треугольника), каждая линия исследуется отдельно.
- Точки «стыка» границ (вершины многоугольника) рассматриваются как дополнительные критические точки.

3. **Финальное сравнение:** Составляется список значений функции во всех найденных точках:

- стационарные точки внутри области;
- точки условного экстремума на границе;
- «угловые» точки границы.

Из этого списка выбирается самое большое ( $z$ ) и самое маленькое ( $z$ ) значения.

Важно понимать: в задачах на компакт нам не обязательно проверять достаточное условие (через гессиан или окаймленный гессиан). Поскольку мы *гарантированно* ищем самое большое и малое значения среди ограниченного набора кандидатов, нам достаточно просто сравнить числа в финальном списке. **Пример:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  на диске  $x^2 + y^2 \leq 1$

- **Внутри:**  $\nabla f = (2x, 2y) = 0 \implies (0, 0)$ . Значение  $f(0, 0) = 0$ .
- **На границе** ( $x^2 + y^2 = 1$ ): Очевидно, что  $f(x, y) = 1$  в любой точке границы.
- **Итог:** Глобальный минимум 0 в точке  $(0, 0)$ , глобальный максимум 1 в любой точке окружности.

Визуализацию глобального экстремума на компакте можно посмотреть по ссылке: [\[Анимация: Экстремум ФНП на компакте\]](#)

## § 4. Пример решения задачи РГР: Исследование функции на экстремумы

Рассмотрим функцию  $z = x^2 + y^2 - 8x$ . Выделим полный квадрат, чтобы понять геометрию поверхности:

$$z = (x - 4)^2 + y^2 - 16$$

Графиком является параболоид вращения с вершиной в точке  $(4, 0, -16)$ .

### а) Поиск локального экстремума

Для нахождения стационарных точек вычислим частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 8 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(4, 0)$$

Проверим достаточное условие с помощью определителя матрицы Гессе (дискриминанта  $K$ ):

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = 0$$
$$K = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4$$

Так как  $K > 0$  и  $z''_{xx} > 0$ , точка  $M_0(4, 0)$  является **точкой локального минимума**. Значение функции в этой точке:  $z(4, 0) = -16$ .

### б) Условный экстремум на окружности $x^2 + y^2 = 1$

Для поиска экстремумов на границе подставим уравнение связи  $x^2 + y^2 = 1$  непосредственно в функцию:

$$z|_{x^2+y^2=1} = (x^2 + y^2) - 8x = 1 - 8x$$

Так как точка принадлежит единичной окружности, переменная  $x$  ограничена:  $x \in [-1, 1]$ .

- **Минимум:** достигается при максимальном значении  $x = 1$ . Из  $x^2 + y^2 = 1$  следует  $y = 0$ .  
 $z_{\min} = 1 - 8(1) = -7$  в точке  $(1, 0)$ .
- **Максимум:** достигается при минимальном значении  $x = -1$ . Отсюда  $y = 0$ .  
 $z_{\max} = 1 - 8(-1) = 9$  в точке  $(-1, 0)$ .

### в) Глобальный максимум и минимум в области $D : x^2 + y^2 \leq 1$

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области:

1. Сравним значение в стационарной точке со значениями на границе.
2. Стационарная точка  $M_0(4, 0)$  лежит вне круга  $D$  ( $4^2 + 0^2 = 16 > 1$ ), поэтому внутри области экстремумов нет.

3. Все критические значения достигаются на границе (вычислены в пункте «б»).

**Ответ:** в области  $D$  значение  $z_{\text{наиб}} = 9$ ,  $z_{\text{наим}} = -7$ .

# Варианты задачи расчетно-графической работы к Главе 3

## Вариант 1

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = -4$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

## Вариант 2

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = -3$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

## Вариант 3

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = -2$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

## Вариант 4

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = -1$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

## Вариант 5

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = 1$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

### Вариант 6

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = 2$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

### Вариант 7

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = 3$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

### Вариант 8

Для функции двух переменных  $z = x^2 + 2ax + y^2$  ( $a = 4$ ) найти:

- а) локальный экстремум
- б) условный экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$
- в) максимум и минимум в области  $x^2 + y^2 = 1$

## Вопросы и задания для самопроверки к Главе 3

### Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение локального максимума и минимума функции  $n$  переменных. В чем различие между строгим и нестрогим экстремумом?
2. **Необходимое условие:** Почему равенство градиента нулю ( $\nabla f = 0$ ) является необходимым, но не достаточным условием экстремума? Приведите пример.
3. **Геометрический смысл:** Как расположена касательная плоскость к поверхности  $z = f(x, y)$  в точке локального экстремума?
4. **Достаточное условие:** Опишите поведение функции в стационарной точке, если определитель матрицы Гессе  $\Delta < 0$ . Как называется такая точка?
5. Что такое «окаймленный гессиан» и для чего он используется в задачах на условный экстремум?
6. Сформулируйте теорему Вейерштрасса. Почему она гарантирует существование глобального максимума и минимума на компакте?
7. В каких точках замкнутой области  $D$  может достигаться её наибольшее значение? Обязательно ли это должна быть стационарная точка?

### Практические задания

1. **Исследование стационарных точек:** Проверьте характер критической точки  $(0, 0)$  для функций:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$
  - $f(x, y) = -x^2 - y^2$
  - $f(x, y) = xy$
2. **Условный экстремум:** Найдите экстремум функции  $f(x, y) = x + y$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ . Дайте геометрическую интерпретацию (линия связи — окружность, линии уровня — прямые).
3. **Метод Лагранжа:** Составьте функцию Лагранжа для нахождения кратчайшего расстояния от точки  $(0, 0)$  до прямой  $x + 2y - 5 = 0$ .
4. **Глобальный экстремум:** Найдите наибольшее значение функции  $z = x + y$  в области  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ .
5. **Анализ матрицы Гессе:** Используя критерий Сильвестра, определите характер стационарной точки  $(0, 0, 0)$  для функции трех переменных  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy$ .

## Список литературы

- [1] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. — М.: Физматлит, 2023. — 680 с. (или любое другое издание).
- [2] *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Современные геометрические структуры и поля. — М.: МЦНМО, 2014. — 584 с.
- [3] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть 1. — М.: МЦНМО, 2019. — 564 с.
- [4] *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. В 3-х томах. Т. 2. Ряды. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. — М.: Дрофа, 2004.
- [5] *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. — М.: Интеграл-Пресс, 2010. — 416 с.

Возианова Анна Викторовна  
Купера Александра Валерьевна  
Кононова Мария Евгеньевна

## **От простого к сложному: функции нескольких переменных**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А