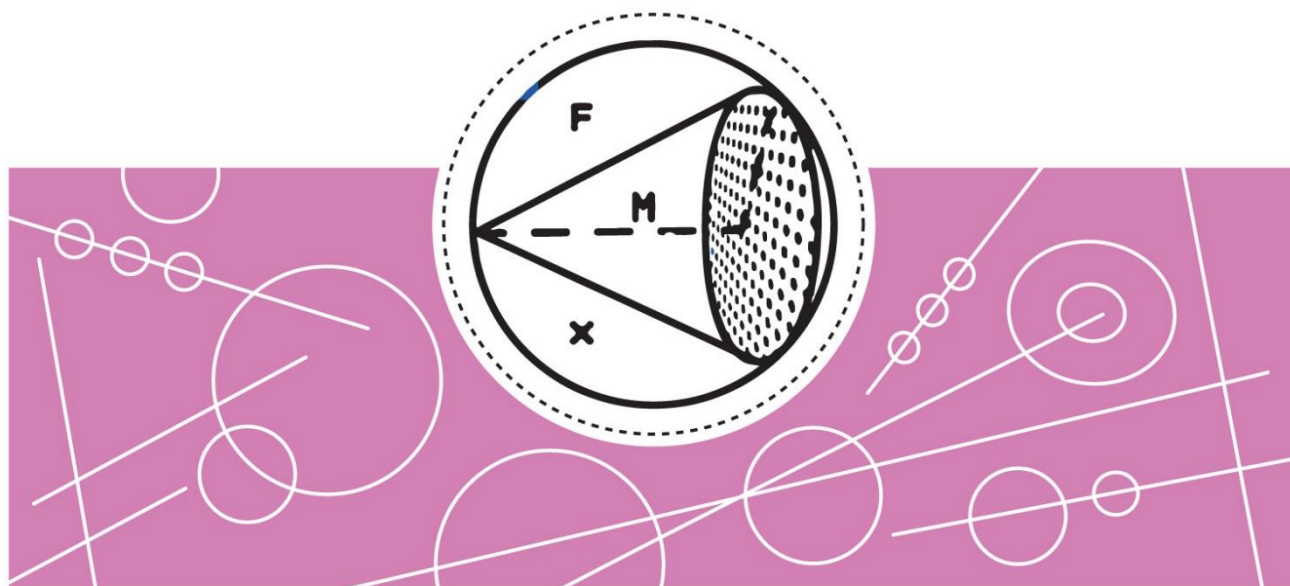


ІІТМО

А.А. ДРОЗДОВ, С.А. КОЗЛОВ

**НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 1.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ
И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**



**Санкт-Петербург
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.А. Дроздов, С.А. Козлов

**НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 1.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ
И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

УДК 535.18, 517.95

Дроздов А.А., Козлов С.А., Нелинейная оптика. Часть 1. Нелинейные волновые и материальные уравнения. Методы их решения – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 49 с.

Рецензент(ы):

Цыпкин Антон Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, директор научно-образовательный центр фотоники и оптоинформатики, Университета ИТМО.

В пособии дана краткая история развития нелинейной оптики, обсуждается природа зависимости оптических характеристик вещества от интенсивности излучения, анализируются явления, обусловленные этими зависимостями, рассмотрены применения нелинейных оптических явлений в фотонике и оптоинформатике.

Основная часть настоящего пособия посвящена обоснованию приближений, используемых при решении теоретических задач нелинейной оптики как при описании отклика вещества на силовое воздействие оптического поля, так и при выводе и упрощении нелинейных волновых уравнений.

Дана классификация механизмов нелинейности поляризованного отклика оптических сред. Подробно рассмотрена классическая модель колебательной нелинейности вещества. На ее примере обсуждается дисперсия нелинейных восприимчивостей третьего порядка изотропных сред. Приведены материальные уравнения, получаемые на основе формализма матрицы плотности, описывающие динамику поляризованности изотропных диэлектрических сред при одно- и двухфотонных резонансных взаимодействиях излучения с веществом. Обсуждаются отличия нелинейности поляризованного отклика изотропных сред в поле излучения с линейной и эллиптической поляризацией.

Обоснованы упрощения нелинейного волнового уравнения при описании распространения параксиального излучения в диэлектрических средах. Описано приближение однонаправленного распространения оптических волн. Обсуждаются различия в приближениях медленно меняющегося профиля поля волны и ее медленно меняющейся амплитуды. Приведены типичные укороченные уравнения динамики поля оптического излучения для волн с широким спектром и динамики огибающей поля излучения для квазимонохроматических волн в нелинейных диэлектрических средах.

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' is stylized with a small dot above it.

Университет ИТМО (Санкт-Петербург) – национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода».

С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд – в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026.

© Дроздов А.А., Козлов С.А., 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ЛЕКЦИЯ 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ	6
I. Краткая история развития нелинейной оптики	7
II. О природе зависимости характера протекания оптических явлений от интенсивности излучения	8
III. Самовоздействие оптических волн	10
1. Самофокусировка оптических волн	10
2. Самосжатие оптических импульсов. Солитоны	12
3. Оптический транзистор. Оптическая бистабильность	13
4. Генерация гармоник и комбинационных частот.....	16
Вопросы для самоконтроля.....	17
ЛЕКЦИЯ 2. ВОЛНОВЫЕ И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	17
I. Волновое уравнение	18
Математическое приложение.....	19
II. Нелинейная поляризованность среды	21
III. Уравнения динамики нелинейного поляризационного отклика среды колебательной природы.....	22
Математическое приложение.....	23
IV. Уравнения динамики нелинейного поляризационного отклика среды при одно- и двухфотонных резонансных взаимодействиях излучения с веществом.....	26
Вопросы для самоконтроля.....	29
ЛЕКЦИЯ 3. РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	30
I. Нелинейный поляризационный отклик в поле квазимонохроматического излучения	30
II. Нелинейный поляризационный отклик в произвольном поле импульсного излучения.....	34
III. Нелинейный поляризационный отклик в поле излучения произвольной поляризации.....	37
Вопросы для самоконтроля.....	39

ЛЕКЦИЯ 4 ПРИБЛИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.....	39
I. Приближение параксиальной волны	40
II. Приближение однонаправленного распространения.....	42
III. Приближение квазимонохроматического излучения	45
Вопросы для самоконтроля.....	46
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	47

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие написано на основе материалов лекционного курса по дисциплине «Нелинейная оптика», который читается бакалаврам научно-образовательного центра фотоники и оптоинформатики. Наличие такого курса в бакалаврской образовательной программе обусловлено тем, что во многих современных системах и устройствах фотоники в поле оптического излучения проявляется нелинейность характеристик материалов этих систем. Проявление такой нелинейности определяет особые закономерности взаимодействия излучения с веществом, которые могут как мешать функционированию оптических систем, так и эффективно использоваться в них для управления параметрами излучения. Обо всем этом и пойдет речь в настоящем пособии.

Изучив дисциплину на лекциях и лабораторных занятиях, а также прочитав настоящее пособие, Вы ознакомитесь с историей развития нелинейной оптики, проясните для себя природу зависимости оптических характеристик вещества от интенсивности излучения, проанализируете явления, обусловленные этими зависимостями. Важно, что Вы будете знать о многочисленных применениях нелинейных оптических явлений в фотонике и оптоинформатике.

Вы научитесь пользоваться приближениями, используемыми при решении теоретических задач нелинейной оптики, в том числе теми, что используются как при описании отклика вещества на силовое воздействие оптического поля, так и при выводе и упрощении нелинейных волновых уравнений. Вы будете уметь классифицировать механизмы нелинейности поляризационного отклика оптических сред. Научитесь пользоваться как классической моделью нелинейности отклика вещества, так и квантовой, построенной на основе формализма матрицы плотности. Вы будете уметь пользоваться различными упрощениями нелинейного волнового уравнения, в том числе в часто встречающихся на практике случаях распространения в оптических средах параксиального излучения и при однонаправленном распространении волн. Вы будете владеть самыми современными методами описания динамики поля оптического излучения для волн со сверхшироким спектром, в том числе состоящих из всего нескольких колебаний поля.

При изучении курса, особенно при более глубоком погружении в мир нелинейной оптики, рекомендуем также дополнительно использовать следующие учебники и монографии [1–5].

ЛЕКЦИЯ 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ

В поле интенсивного лазерного излучения оптические характеристики вещества проявляют зависимость от интенсивности излучения. Так, зависимость показателя преломления оптической среды n от интенсивности I излучения на частоте ω может во многих практических случаях (например, при нерезонансном взаимодействии излучения с веществом) иметь простой вид

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega)I, \quad (1.1)$$

где $n_0(\omega)$ – привычный в оптике показатель преломления среды, а $n_2(\omega)$ – ее коэффициент нелинейного показателя преломления. Этот коэффициент является важнейшей нелинейной характеристикой оптической среды. Понятно, что при малых интенсивностях второе слагаемое в выражении (1.1) становится малым, и распространение света в среде можно рассматривать традиционно, характеризуя среду ее показателем преломления, величина которого практически не зависит от интенсивности излучения.

Зависимость коэффициента поглощения κ от интенсивности I излучения на частоте ω во многих случаях тоже можно записать в аналогичном виде

$$\kappa(\omega) = \kappa_0(\omega) + \kappa_2(\omega)I, \quad (1.2)$$

где $\kappa_0(\omega)$ – коэффициент поглощения среды, а параметр $\kappa_2(\omega)$ характеризует его зависимость от интенсивности.

Важно заметить, что зависимость оптических характеристик материалов от интенсивности излучения может быть значительно более сложной, чем линейные зависимости (1.1) и (1.2), например, при резонансном взаимодействии излучения с веществом. Эти случаи также будут рассмотрены в данном пособии.

Направление в оптической физике, в котором изучаются явления, характер протекания которых зависит от интенсивности излучения, в том числе обусловленные зависимостью от интенсивности оптических параметров материалов, называют **нелинейной оптикой**.

Напоминание: **интенсивность волны** – это энергия, переносимая волной в единицу времени через единицу площади поверхности (перпендикулярной к направлению распространения волны).

Это напоминание полезно в связи с широко используемым на практике представлением интенсивности как величины, которая пропорциональна квадрату электрического поля, усредненного за большое число его колебаний в электромагнитной волне [5]. Такое представление, действительно, очень удобно в оптике квазимонохроматического излучения, и мы его тоже будем использовать в лекциях. Но такое

представление не всегда является адекватным в быстро развивающейся в последние годы оптике волн из малого числа колебаний. Об особенностях этого раздела оптики, в том числе нелинейной, тоже пойдет речь в настоящем пособии.

I. Краткая история развития нелинейной оптики

Термин «нелинейная оптика», по-видимому, впервые был введен в монографии С.И. Вавилова [6]. Именно им и его сотрудниками еще в долазерную эпоху были осуществлена серия исследований по целенаправленному поиску нелинейных оптических эффектов. С.И. Вавилову с сотрудниками, например, принадлежат первые наблюдения эффекта «просветления» непрозрачной среды в поле интенсивной волны, который и сегодня широко используется в лазерной технике.

Но бурное свое развитие нелинейная оптика получила только после создания в начале 60-х годов прошлого века первых лазеров – источников излучения с уникальными свойствами, в том числе с высокой интенсивностью.

В первое десятилетие «лазерной эпохи» энтузиазм исследователей в области нелинейной оптики был, в основном, связан с большим общенаучным интересом к обнаруживаемым в поле интенсивного лазерного излучения нелинейно-оптическим эффектам, например, таким, как генерация гармоник излучения, его самофокусировка или вынужденное комбинационное рассеяние.

В 70-е годы этот интерес начал приобретать более практический характер. В первую очередь, он был связан с разработкой сверхмощных лазерных систем для получения управляемой термоядерной реакции. Оказалось, что основным препятствием для фокусировки излучения на мишень являются крупномасштабная самофокусировка лазерного излучения и его пространственная неустойчивость к малым пространственным возмущениям в оптических элементах лазерных систем. По этой причине шел поиск материалов с особо малой нелинейностью показателя преломления.

В 80-е годы значительных интерес исследователей привлекали перспективы создания цифровых оптических компьютеров, от которых ждали большего быстрого действия, чем у их электронных аналогов. В это время шли интенсивные исследования новых материалов уже с большой нелинейностью показателя преломления.

Многие красивые научные идеи в области нелинейной оптики, рожденные еще в XX веке, в наступившем XXI веке реализуются в изделиях современной фотоники на новой технологической базе. Создаются нелинейные метаматериалы, развивается нанооптика, осваивается нелинейная оптика волн из малого числа колебаний, причем

в разных спектральных диапазонах. Рождаются вдохновляющие концепции петагерцовой электроники, основанные на уже хорошо развитой нелинейной оптике фемтосекундного излучения.

Со многими базовыми идеями нелинейной оптики, как хорошо известными, так и относительно новыми, Вы познакомитесь, прочитав настоящее пособие.

II. О природе зависимости характера протекания оптических явлений от интенсивности излучения

В этой вводной лекции дадим традиционное для всех учебников пояснение природы нелинейности поляризационного отклика среды на силовое воздействие оптического поля, которое приводит к зависимости параметров вещества и характера протекания оптических явлений в нем от интенсивности излучения. Более внимательное обсуждение этого вопроса оставим на другие лекции.

В классической физике простейшая модель вещества представляется, как это показано на рисунке 1.1 ниже, в виде совокупности большого числа атомов или молекул.

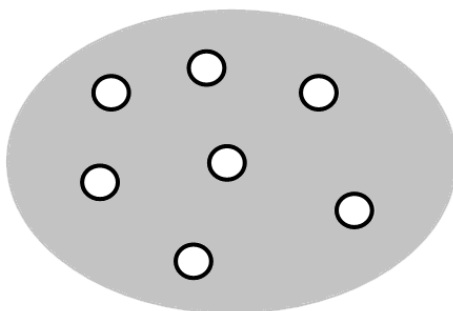


Рисунок 1.1 – Атомы в веществе

При рассмотрении оптических явлений вводится понятие оптического электрона, который наиболее легко взаимодействует с электрическим полем излучения. Движение такого оптического электрона описывают с помощью классических уравнений его динамики вида

$$m\ddot{r} = -kr - ar^2 - br^3 - g\dot{r} + eE. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) – это уравнение осциллятора: r в нем – отклонение оптического электрона от положения равновесия, m – масса электрона, k характеризует возвращающую в положение равновесия внутриатомную силу, g описывает затухание колебаний, e – заряд оптического электрона, E – напряженность электрического поля излучения. В сильном оптическом поле осциллятор (1.3) является ангармоническим, поскольку при больших отклонениях оптического электрона от равновесия проявляется нелинейность возвращающей силы, которая описывается вторым и третьим слагаемыми в правой части (1.3). Именно ангармонизм

колебаний оптических электронов при их сильном отклонении от положения равновесия в атоме и определяет нелинейные эффекты в веществе. Для простоты выше привели скалярное, а не векторное уравнение динамики оптического электрона, так как рассматривали воздействующее на атом излучение линейно поляризованным и полагали, что параметры осциллятора можно считать скалярными.

Макроскопическая величина, характеризующая усредненный дипольный момент единицы объема вещества, называется **поляризованностью среды** и часто представляется в простом виде:

$$P = N \cdot er, \quad (1.4)$$

где N – концентрация атомов вещества, а er – дипольный момент отдельного атома p . В поле излучения может изменяться как концентрация атомов, так и дипольный момент атома. В этой вводной лекции рассмотрим нелинейность поляризационного отклика среды, обусловленную только ангармонизмом колебаний в поле оптического излучения дипольных моментов отдельных атомов. Возможность изменения концентрации учитывать не будем.

Из уравнения движения отдельного оптического электрона (1.3) с учетом вида поляризованности среды (1.4) для отклика среды на электрическое поле излучения несложно получить уравнение

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \alpha P^2 + \beta P^3 + \dots = \frac{e^2}{m} NE, \quad (1.5)$$

в котором параметры γ , ω_0 , α и β можно определить через параметры уравнения динамики оптического электрона отдельного атома (1.3) с учетом связи его дипольного момента с макроскопической поляризованностью среды вида (1.4) (смотри упражнение 1 к данной лекции).

Уравнение (1.5) называют материальным уравнением. Решаемое совместно с уравнениями Максвелла, оно позволяет анализировать закономерности распространения поля излучения в оптических средах.

Поляризационный отклик среды в гармоническом поле монохроматической волны

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (1.6)$$

где $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда монохроматического излучения, при определенных приближениях, которые мы подробнее рассмотрим уже в следующей лекции, принимает вид

$$P = \left(\frac{1}{2} \hat{P}_\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \left(\frac{1}{2} \hat{P}_{2\omega} e^{2i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \left(\frac{1}{2} \hat{P}_{3\omega} e^{3i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \dots, \quad (1.7)$$

в котором, как это будет показано ниже,

$$\hat{P}_\omega = \chi(\omega) \mathcal{E}(\omega) + \chi^{(3)}(\omega) |\mathcal{E}(\omega)|^2 \mathcal{E}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \mathcal{E}(\omega). \quad (1.8)$$

В выражении (1.8) $\tilde{\chi}(\omega) = \chi(\omega) + \chi^{(3)}(\omega)|\mathcal{E}(\omega)|^2$.

Сопоставляя выражения для нелинейной восприимчивости среды (1.8) и ее нелинейного показателя преломления (1.1), видим, что они одинаковы по структуре, поскольку $|E|^2$ с точностью до коэффициента и есть интенсивность среды. Оптическое излучение меняет само себе восприимчивость среды, соответственно, и ее показатель преломления, которые становятся зависимыми от интенсивности излучения. Явления, обусловленные таким индуцированным светом изменением оптических характеристик среды, называют явлениями **самовоздействия оптических волн**.

Как видно из (1.7) в среде появляются также колебания поляризованности на новых частотах:

- $\hat{P}_0 = \chi^{(2)}(0)|\mathcal{E}_\omega|^2$ – возникающий в нелинейной среде поляризационный отклик такого вида обеспечивает появление в среде квазипостоянных полей. Такой эффект называют **оптическим выпрямлением**. В экспериментах благодаря этому эффекту, например, можно реализовывать преобразование части интенсивного фемтосекундного излучения ближнего ИК диапазона спектра в низкочастотное излучение ТГц спектрального диапазона. ТГц излучение в последние годы широко применяется в фотонике.
- $\hat{P}_{2\omega} = \chi^{(2)}(2\omega)\mathcal{E}_\omega^2$ – обеспечивает **генерацию второй гармоники**, эффект, который используется для расширения спектрального диапазона излучения лазерных систем.
- $\hat{P}_{3\omega} = \chi^{(3)}(3\omega)\mathcal{E}_\omega^3$ – обеспечивает **генерацию** следующей по порядку **третьей гармоники**.

Эти и другие нелинейные явления мы рассмотрим подробно во второй части пособия. А в настоящей вводной лекции лишь проиллюстрируем некоторые из названных явлений.

III. Самовоздействие оптических волн

Рассмотрим некоторые характерные явления самовоздействия оптического излучения.

1. Самофокусировка оптических волн

На рисунке 1.2 поясняется, почему происходит самофокусировка оптической волны в среде с положительным коэффициентом нелинейного показателя преломления ($n_2 > 0$). Такая положительная (или, как часто говорят, «самофокусировочная») нелинейность показателя преломления характерна для большинства оптических сред в значительной части

ближнего ИК диапазонов спектра). Но характер протекания процесса самофокусировки может быть для них другим. Если мощность в оптическом импульсе больше критической, то самофокусировка не останавливается дифракцией, а дисперсия такой растягивающей импульс во времени роли, как для волн из малого числа колебаний, уже не играет. Может происходить самосжатие пучка вплоть до разрушения материала оптической среды. В этом случае говорят об **оптическом коллапсе** волны [9].

Самофокусировка излучения является причиной ограничения яркости сверхмощных лазерных систем. Это пример негативного характера такого явления в определенных ситуациях. С другой стороны, самофокусировка позволяет осуществлять синхронизацию мод в фемтосекундных лазерах. Именно сверхбыстрый эффект самовоздействия света и дает возможность управлять свойствами излучения в столь коротких временных диапазонах.

2. Самосжатие оптических импульсов. Солитоны

На рисунке 1.3 приведена иллюстрация другого явления самовоздействия волны – самосжатия оптического импульса (рассматриваемого, например, в волноводе, в котором поперечная пространственная структура волны неизменна) в среде с положительной нелинейностью показателя преломления для случая, когда спектр импульса находится в области ее аномальной групповой дисперсии. Как видно из рисунка, в нелинейной среде реализуется фазовая самомодуляция излучения и формируется «временная линза», аналогичная «пространственной линзе» при выше рассмотренной самофокусировке. Нелинейность показателя преломления приводит к временной самофокусировке импульса, предельное сжатие которого ограничивается явлением дисперсии света.

При определенных условиях нелинейное сжатие и дисперсионное уширение импульса могут полностью скомпенсировать друг друга, и сформируются так называемые **оптические солитоны** – импульсы, не меняющие свою форму при распространении в оптической среде. Строго говоря, чтобы волны называть солитонами, кроме сохранения ими формы должны соблюдаться и некоторые другие требования. Но о них расскажем в дальнейших лекциях. На практике важно, что солитоны могут сохранять свою форму на больших расстояниях и использоваться для передачи информации в волоконно-оптических линиях связи [10].

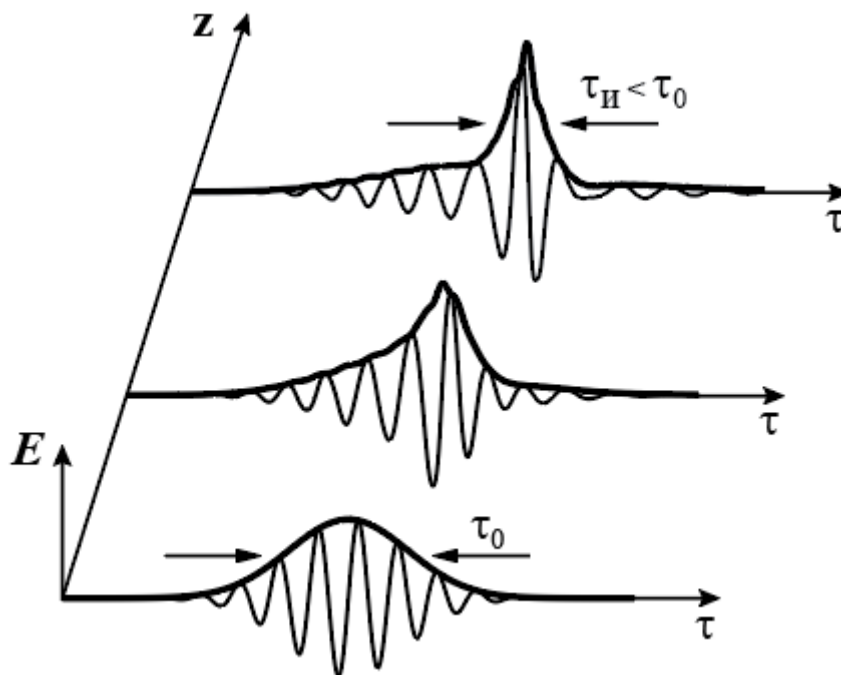


Рисунок 1.3 – Иллюстрация процесса самосжатия импульса при его распространении в оптической среде с расстоянием z : изменение профиля поля E импульса от «запаздывающего» времени $\tau = t - \frac{z}{V}$, где t – текущее время, V – групповая скорость волны

3. Оптический транзистор. Оптическая бистабильность

Другое интересное проявления самовоздействия оптического излучения рассмотрим на примере его прохождения через интерферометр Фабри-Перо. Впервые его конструкцию предложили для применений в качестве многолучевого интерферометра еще в 1899 году французские физики Шарль Фабри и Альфред Перо. Простая схема такого интерферометра приведена на рисунке 1.4, где Π_1 и Π_2 – две плоскопараллельные пластины с нанесенными на внутренние стороны высокоотражающими покрытиями, между которыми расположена оптическая среда. На рисунке $I_{\text{вх}}$ и $I_{\text{вых}}$ обозначают интенсивность входного и выходного излучения, соответственно.

Если интенсивность излучения на входе достаточно высокая, то в оптической среде внутри интерферометра проявляется зависимость показателя преломления от интенсивности, соответственно, пропускание интерферометра тоже становится зависящим от интенсивности. Устройство в таком случае называют **нелинейным интерферометром Фабри-Перо** [11].

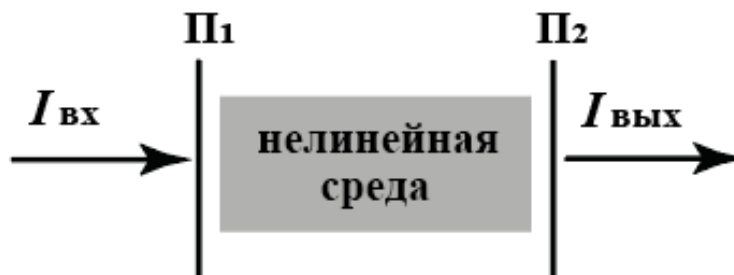


Рисунок 1.4 – Схема нелинейного интерферометра Фабри-Перо

Подробно принцип работы нелинейного интерферометра Фабри-Перо опишем во второй части пособия. В данной вводной лекции первой части пособия мы только проиллюстрируем некоторые полезные для его применений результаты.

На рисунке 1.5 продемонстрирован принцип работы нелинейного интерферометра Фабри-Перо в режиме оптического транзистора. На рисунке 1.5а приведена зависимость интенсивности на выходе интерферометра $I_{\text{вых}}$ от ее величины на входе в устройство $I_{\text{вх}}$. Из-за зависимости показателя преломления оптической среды в интерферометре от интенсивности излучения внутри интерферометра его пропускание становится нелинейной функцией от входной интенсивности (сплошная линия). Пунктиром на рисунке представлена для сравнения и линейная зависимость пропускания, справедливая для случая линейной оптической среды в интерферометре. На рисунке 1.5б показано, что на интерферометр под малым углом можно подать модулированный слабый по интенсивности сигнал на той же частоте, что и излучение накачки. Как видно из рисунка 1.5а, из-за нелинейности пропускания интерферометра от интенсивности входного излучения его можно использовать как устройство, в котором слабый модулированный входной оптический сигнал с интенсивностью $I_{\text{мод.вх}}$ на выходе устройства становится модулированным оптическим излучением с более высокой интенсивностью $I_{\text{мод.вых}} > I_{\text{мод.вх}}$. Энергия для усиления слабого сигнала поступает от интенсивной волны накачки. Возможность реализации усиления сигналов – важнейшая функция транзистора. Таким образом, на основе представленного на рисунке оптического транзистора возможно реализовывать логические операции в полностью оптических системах, что перспективно для создания цифровых фотонных компьютеров, в которых скорость обработки информации превышает возможности электронных аналогов.

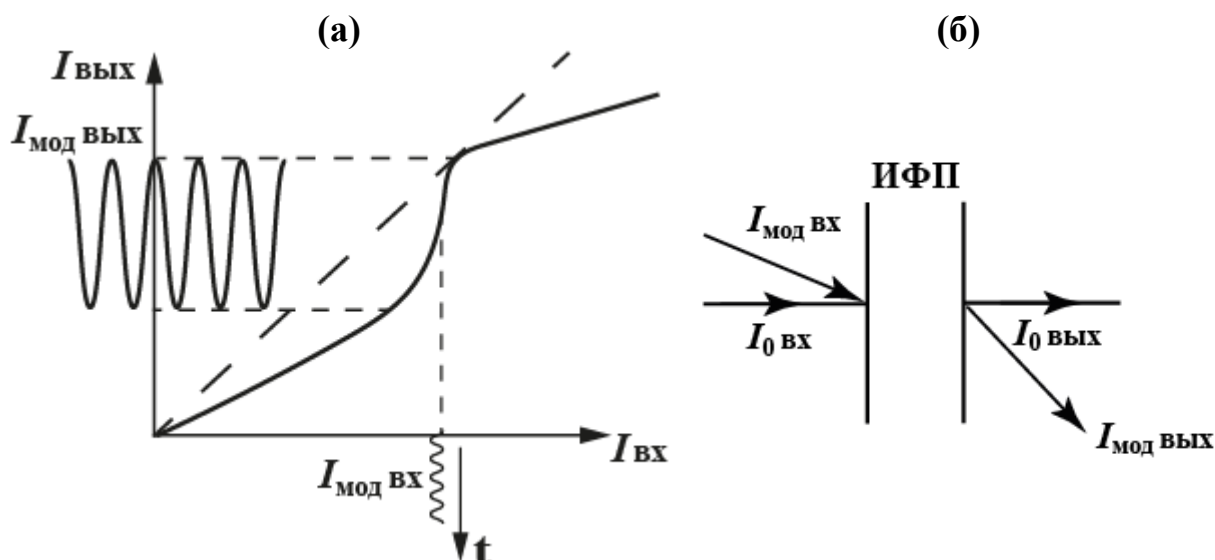


Рисунок 1.5 – Режим работы нелинейного интерферометра Фабри-Перо в качестве оптического транзистора: а) зависимость интенсивности излучения на выходе интерферометра $I_{\text{ВЫХ}}$ от его интенсивности на входе $I_{\text{ВХ}}$, б) схема подачи в интерферометр излучения накачки и усиливаемого сигнала

Возможна и более удивительная реализация нелинейного пропускания интерферометром Фабри-Перо оптического излучения. Из рисунка 1.6а видно, что одному значению интенсивности на входе в интерферометр могут соответствовать три значения интенсивности излучения на его выходе. Такую ситуацию называют проявлением **оптической мультистабильности** нелинейного устройства. Поскольку лишь два из этих состояний являются устойчивыми, то в указанном случае говорят об **оптической бистабильности**. Такой бистабильный (в общем случае мультистабильный) режим работы интерферометра представляет интерес для приложений в оптической логике и обработке сигналов, когда устройство необходимо переключать между несколькими дискретными состояниями. Нелинейный интерферометр может использоваться и как оптическое запоминающее устройство: при одной и той же входной интенсивности на выходе могут существовать два устойчивых состояния выходящего излучения (рисунок 1.6б), что позволяет хранить один бит информации (0 или 1). Информация, таким образом, хранится «оптически», без её преобразования в электрические сигналы, что перспективно для применения в фотонных компьютерах и при оптической обработке данных.

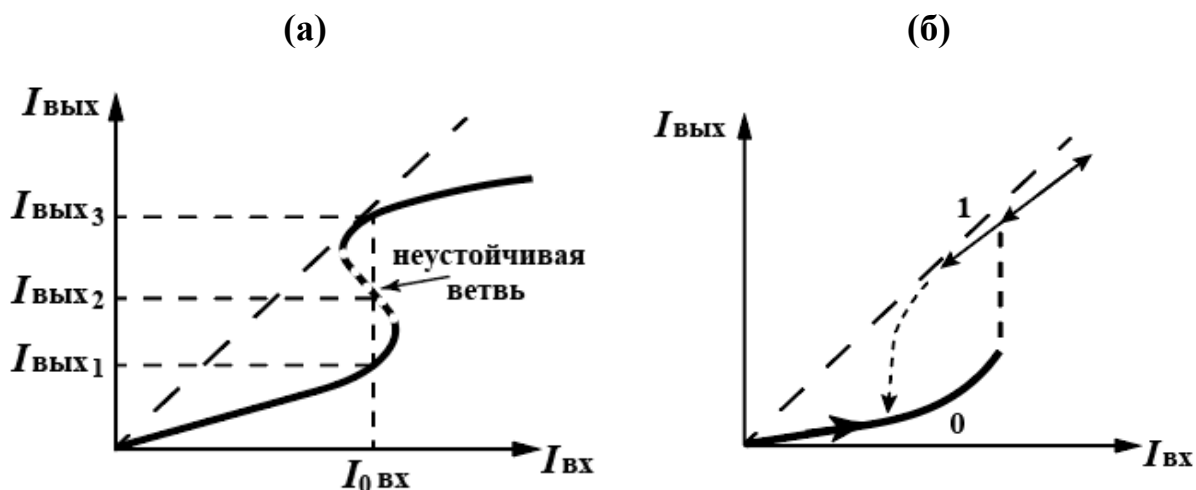


Рисунок 1.6 – Иллюстрация работы нелинейного интерферометра Фабри-Перо в качестве элемента оптической памяти:

- (а) бистабильное пропускание интерферометра,
 (б) элемент оптической памяти с двумя состояниями

4. Генерация гармоник и комбинационных частот

Из соотношения (1.7) следует, что при распространении в нелинейной среде излучения на частоте ω в среде появляется поляризационный отклик на частотах 2ω и 3ω . Соответственно, в среде появится и излучение на этих частотах, механизм возникновения которых мы рассмотрим в дальнейших лекциях. Эти явления называют **генерацией второй и третьей гармоник**. Из материального уравнения (1.5) ясно, что при распространении в нелинейной среде волн на двух частотах ω_1 и ω_2 в ней дополнительно ко вторым и третьим гармоникам может появиться излучение и на комбинационных частотах $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$, $|2\omega_1 - \omega_2|$, $|\omega_1 - \omega_2|$. **Генерацию излучения на комбинационных частотах** можно использовать для расширения спектрального диапазона источников излучения. С другой стороны, эти эффекты могут ограничивать скорость передачи информации по волоконным линиям связи при большом числе информационных каналов в них.

Таким образом, в целях мотивации к изучению Вами дисциплины «Нелинейная оптика» в данной вводной лекции мы кратко обрисовали ряд интересных нелинейных явлений и их возможные применения. Теперь приступим к последовательному изучению этих явлений. Начнем с обсуждения волновых и материальных уравнений, используемых в нелинейной оптике, и общих методов их анализа.

Упражнение 1: получить уравнение (1.5) из уравнения (1.3) и получить соотношения между коэффициентами одного и другого уравнения $\gamma = \gamma(m, g)$, $\omega_0^2 = \omega_0^2(m, k, \alpha, \beta)$, $\alpha = \alpha(e, m, N, a)$, $\beta = \beta(e, m, N, b)$.

Ответ: $\gamma = \frac{1}{2} \frac{g}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\alpha = \frac{a}{emN}$, $\beta = \frac{b}{e^2 m N^2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую величину называют коэффициентом нелинейного показателя преломления?
2. Какова причина ангармоничности колебаний оптических электронов в атомах вещества под воздействием поля излучения?
3. Какие эффекты относят к эффектам самовоздействия света?
4. За счет энергии какого источника происходит усиление модулированного света в оптическом транзисторе на основе нелинейного интерферометра Фабри-Перо?
5. При каких условиях можно наблюдать в оптической среде генерацию гармоник и излучения на комбинационных частотах?

ЛЕКЦИЯ 2. ВОЛНОВЫЕ И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Поскольку нелинейные оптические явления, как обсуждалось во вводной лекции, обычно проявляются в поле излучения высокой интенсивности, то в нелинейной оптике динамика поля описывается как классическая, т.е. уравнениями Максвелла. Значимые отклонения от закономерностей, предсказываемых классическими уравнениями Максвелла, как правило, наблюдаются лишь в оптике единичных фотонов. Такие явления в настоящем пособии мы рассматривать не будем, отсылая читателя, например, к монографии [12].

Вещество, в отличие от поля, в данном пособии будем описывать как в рамках классической физики, так и законами квантовой механики. В первом случае метод анализа явлений нелинейной оптики называют **классическим**, а во втором – **полуклассическим**.

Итак, в нашем анализе мы будем основываться на уравнениях Максвелла и следствиях из них. Покажем, как уравнения Максвелла можно редуцировать к волновому уравнению.

I. Волновое уравнение

Напомним, что уравнения Максвелла (в системе СИ) имеют вид

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \vec{D} = \rho, \\ \nabla \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где \vec{E} и \vec{H} – напряженности электрического и магнитного поля электромагнитной волны, \vec{D} и \vec{B} – электрическая и магнитная индукция, ρ – плотность свободных зарядов, \vec{j} – плотность тока.

Часто уравнения Максвелла записывают и в системе СГС, которую мы тоже будем использовать.

При нахождении решений системы уравнений Максвелла важно понимать, что в ней пять векторных неизвестных величин и одна скалярная. Иными словами, в этой системе всего 16 скалярных неизвестных. При этом в системе два уравнения – векторные, а два – скалярные, т.е. всего в системе уравнений Максвелла 8 скалярных уравнений. Таким образом, неизвестных в системе уравнений больше, чем самих уравнений. Поэтому уравнения Максвелла дополняют так называемыми **материальными уравнениями**, которые описывают дополнительные взаимосвязи между искомыми физическими величинами.

Например, для частного, но распространенного в оптике случая диэлектрических сред эти уравнения имеют вид:

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0, \quad (2.2a)$$

что физически означает отсутствие свободных электрических зарядов в рассматриваемом объекте.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.2b)$$

т.е. полагаем, что среда – немагнитная.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad (2.2b)$$

– считаем, что электрическая индукция не определяется магнитным полем, а зависит только от электрического поля электромагнитной волны.

Приближения (2.2), которые мы привели в качестве примера материальных уравнений, не дают возможности анализа распространения электромагнитного излучения во многих полезных на практике случаях,

например, в металлах, магнитных или бианизотропных средах, при наличии в средах свободных зарядов. Но при этом они хорошо описывают динамику поля излучения в другом широком классе оптических сред, например, в стеклах, жидкостях, газах, многих кристаллах. Кроме того, на простом примере материалов с зависимостями физических величин от напряженностей оптических полей, описываемыми уравнениями (2.2), мы отработаем общие методы анализа решений уравнений Максвелла, которые применимы и в случае сред, характеризующихся более сложными материальными уравнениями.

Системы дифференциальных уравнений с несколькими переменными, подобные системе уравнений Максвелла, решают разными способами. Для понимания традиционного принципа редукции уравнений Максвелла к волновому уравнению предварительно дадим математическое приложение, иллюстрирующее типичный метод решения простейшей системы, состоящей из всего двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Математическое приложение

Пусть имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, например, вида

$$\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{y} - a^2 x = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где x и y – это искомые переменные, точкой в (2.3) обозначается дифференцирование по времени.

Типичный прием, позволяющий решить систему (2.3), заключается в дополнительном дифференцировании первого уравнения системы по времени [13]

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0 \quad (2.4)$$

и подстановке в получившееся уравнение (2.4) значения производной y по времени из второго уравнения системы (2.3).

Вместо системы из двух уравнений с двумя неизвестными в итоге получаем одно уравнение и только с одним неизвестным

$$\ddot{x} + a^2 x = 0, \quad (2.5)$$

гармоническое решение которого хорошо известно [13].

Аналогично тому, как в вышеприведенном математическом приложении проведена редукция системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями к одному уравнению, хоть и более высокого порядка, но с одной искомой функцией, можно поступить и с системой уравнений Максвелла. Применим операцию дифференцирования к первому уравнению системы, но на этот раз более сложную, чем в вышеприведенном приложении, в виде векторной

операции дифференцирования вида $\nabla \times$. Потом, как и в приложении, подставляя выражение для векторной производной вида ротора $\nabla \times \vec{H}$ из второго уравнения системы уравнений Максвелла (2.1), с учетом приближения (2.2а) для немагнитных диэлектриков получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, для электромагнитного излучения в диэлектриках получаем волновое уравнение вида

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \text{ (СИ)}, \quad (2.7а)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \text{ (СГС)}. \quad (2.7б)$$

Как видим, вместо первых двух уравнений системы уравнений Максвелла для искоемых функций \vec{E} и \vec{H} получили одно уравнение в частных производных и только с одной искомой величиной \vec{E} (полагаем, что выполняется (2.2в), т.е. электрическая индукция определяется только электрическим полем оптической волны), но более высокого порядка. Под волновыми уравнениями в оптике обычно называют уравнения динамики электрического поля излучения, поскольку, как правило, в задачах оптической физики взаимодействием магнитного поля волны с веществом можно пренебречь.

Первое слагаемое в волновом уравнении (2.7) описывает дифракцию излучения, а второе – отклик вещества на силовое воздействие электромагнитного поля.

Напомним теперь, что электрическая индукция по определению имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ (СИ)} \quad (2.8)$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ (СГС)},$$

где \vec{P} – поляризованность среды. С учетом (2.8) волновое уравнение для диэлектрических сред можно записать в виде

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \text{ (СИ)} \quad (2.9а)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \text{ (СГС)}. \quad (2.9б)$$

При переходе от (2.7а) к (2.9а) учтена связь электрической и магнитной постоянных со скоростью света вида $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, ставшая в свое время убедительным доказательством того, что свет – это волны электромагнитной природы.

Как видно из волнового уравнения (2.9), для анализа динамики электрического поля излучения (его иногда называют оптическим полем,

поскольку обычно именно оно определяет взаимодействие излучения с веществом) необходимо знать вид поляризационного отклика среды на силовое воздействие этого поля.

Рассмотрим некоторые наглядные методы описания и анализа такого отклика.

II. Нелинейная поляризованность среды

Обычно поляризованность среды удобно представлять в виде двух слагаемых

$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_{\text{лин}}(\vec{E}) + \vec{P}_{\text{нел}}(\vec{E}), \quad (2.10)$$

где $\vec{P}_{\text{лин}}$ – линейный, а $\vec{P}_{\text{нел}}$ – нелинейный функционалы от \vec{E} .

В неполярных диэлектриках часто хорошим приближением, как обсуждалось на первой лекции, является представление поляризованности среды в виде $\vec{P}(\vec{E}) = N\vec{p}$, где N – концентрация частиц, а \vec{p} – дипольный момент отдельной частицы (атома или молекулы) вещества.

Тогда в сильном поле излучения поляризованность среды может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \vec{P} = N\vec{p} &= (N_0 + \Delta N)(\vec{p}_{\text{лин}} + \vec{p}_{\text{нел}}) = \\ &= N_0 \vec{p}_{\text{лин}} + N_0 \vec{p}_{\text{нел}} + \Delta N \vec{p}_{\text{лин}} + \Delta N \vec{p}_{\text{нел}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где N_0 – концентрация частиц в отсутствие поля, ΔN – изменение их концентрации в поле оптического излучения, $\vec{p}_{\text{лин}}$ – линейная по полю \vec{E} часть отклика дипольного момента отдельной молекулы, а $\vec{p}_{\text{нел}}$ – его нелинейная часть. Поскольку нелинейные изменения параметров среды, как правило, малы, то слагаемое $\Delta N \vec{p}_{\text{нел}}$ в (2.11) можно полагать еще более высокой степени малым и пренебречь им. Таким образом, первое слагаемое в (2.11) описывает линейный поляризационный отклик среды, следующие два слагаемых – нелинейный отклик, а последним слагаемым можно пренебречь.

Вывод: можно различать два механизма нелинейности оптических сред:

1. Обусловленные нелинейностью отклика отдельной частицы вещества: электронный, ионный, электронно-колебательный и др.
2. Обусловленные изменением плотности среды: тепловой, химический и др.

Эти механизмы нелинейности имеют как различную физическую природу, так и разный формализм их описания [2]. В данном учебном пособии ограничимся анализом нелинейности макроскопического отклика среды, обусловленной отдельными ее частицами. Такой выбор обусловлен значительно меньшей инерционностью нелинейного отклика отдельных

частиц вещества, чем связанного с изменением ее плотности, и, соответственно, преимуществами ее применения для сверхбыстрого управления параметрами излучения.

Начнем обсуждать характерные черты нелинейного поляризационного отклика среды на примере ионной или, как часто говорят, колебательной нелинейности, которая обусловлена колебаниями ионов в отдельных молекулах вещества. Взаимодействие излучения с веществом будем рассматривать в рамках классического метода, т.е. и вещество, и поле описываем в рамках классической физики.

III. Уравнения динамики нелинейного поляризационного отклика среды колебательной природы

Математическая модель колебаний атомов молекулы диэлектрической среды в поле линейно поляризованного излучения при классическом подходе может быть представлена уравнением ангармонического осциллятора вида (смотри также Лекцию 1, в которой аналогичной математической моделью описывается электронный механизм нелинейности):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x + ax^2 + bx^3 = \alpha E, \quad (2.12)$$

где x – отклонение атомов в молекуле от положения равновесия, t – время, γ – коэффициент затухания колебаний молекулярного осциллятора, ω_0 – частота его свободных колебаний, a и b – коэффициенты, характеризующие квадратичный и кубичный ангармонизм молекулярных колебаний соответственно, α – коэффициент поляризации среды, E – электрическая напряженность электромагнитного поля оптического импульса.

Материальное уравнение (2.12) хорошо, например, описывает молекулярный отклик диэлектрических сред в поле излучения дальнего ИК диапазона спектра [7, 14], который в диапазоне от 0,1 до 10 ТГц называют также терагерцовым спектральным диапазоном.

Модель (2.12) предполагает нелинейность молекулярных колебаний малой (используется разложение силы, возвращающей ионы в положение равновесия, в ряд по величине отклонения от этого равновесия). Тогда можно рассматривать решение (2.12) тоже в виде ряда

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}, \quad (2.13)$$

где $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ – функционалы, пропорциональные первой степени, квадрату и кубу электрической напряженности поля E соответственно, и для которых выполняется неравенство

$$x^{(1)} \gg x^{(2)}, x^{(3)}. \quad (2.14)$$

Перед тем, как упростить уравнение (2.12) с учетом представления его решения в виде (2.13) напомним характерный итерационный метод решения дифференциальных уравнений при наличии в них малых параметров.

Математическое приложение

Рассмотрим метод малого параметра в теории нелинейных дифференциальных уравнений [13], на примере уравнения вида

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, \dot{x}, \mu), \quad (2.15)$$

где μ – малый параметр, $\ddot{x} + a^2 x = f(t)$ – это так называемое «порождающее» для нелинейного уравнения.

Ищем решение уравнения (2.15) в виде ряда разложения по малому параметру

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (2.16)$$

Тогда исходное уравнение (2.15) примет вид

$$\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + a^2 x_0 + a^2 \mu x_1 + a^2 \mu^2 x_2 = f(t) + \mu \left[F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \mu + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \dots \right]. \quad (2.17)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + a^2 x_0 = f(t), \\ \ddot{x}_1 + a^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \ddot{x}_2 + a^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_1}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_1}} \dot{x}_1, \\ \dots \end{cases} \quad (2.18)$$

Вывод. Вместо одного сложного нелинейного уравнения (2.12), в котором есть малый параметр, можно получить целую систему, но простых линейных дифференциальных уравнений (2.18). Эти уравнения обычно несложно решаются, в то время как исходное нелинейное уравнение простого аналитического решения может не иметь.

Используя описанные выше в приложении итерационные процедуры, нелинейное уравнение (2.12) можно представить в виде более простой для получения аналитических решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x^{(1)}}{\partial t} + \omega_0^2 x^{(1)} &= \alpha E, \\
\frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x^{(2)}}{\partial t} + \omega_0^2 x^{(2)} + a(x^{(1)})^2 &= 0, \\
\frac{\partial^2 x^{(3)}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x^{(3)}}{\partial t} + \omega_0^2 x^{(3)} + 2ax^{(1)}x^{(2)} + b(x^{(1)})^3 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

За описанием вывода уравнений (2.19) из (2.12) отсылаем читателя к статьям [14, 15].

Поляризованность среды колебательной природы рассматриваем в виде

$$P = Nq\langle x \rangle, \tag{2.20}$$

где N – концентрация молекул, q – заряд ионов в молекуле, а угловые скобки означают усреднение значений отклонений от положения равновесия отдельных ионов по единичному объему вещества.

Далее ограничимся рассмотрением нелинейного поляризационного отклика только изотропных сред. Тогда квадратичный по полю поляризационный отклик среды (он определяет генерацию в среде второй гармоники) при усреднении отдельных молекулярных квадратичных откликов (2.20) по их большому ансамблю в единичном объеме изотропной среды в силу ее симметрии исчезает (несколько подробнее мы это обсудим ниже). Тогда для изотропной среды при отклике молекулы вида (2.19) эволюция во времени макроскопической характеристики вещества (2.20) может быть записана в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_{\text{лин}}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial P_{\text{лин}}}{\partial t} + \omega_0^2 P_{\text{лин}} &= Nq\alpha E, \\
\frac{\partial^2 P_{\text{нел}}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial P_{\text{нел}}}{\partial t} + \omega_0^2 P_{\text{нел}} &= RP_{\text{лин}} - \frac{b}{(Nq)^2} P_{\text{лин}}^3,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 R = \frac{2a^2}{(Nq)^2} P_{\text{лин}}^2.$$

Первое уравнение системы (2.21) описывает эволюцию во времени линейной части поляризационного отклика среды колебательной природы $P_{\text{лин}}$, а пара параметрически связанных уравнений описывает нелинейный кубический по полю поляризационный отклик среды $P_{\text{нел}}$.

Параметр R определяется как $R = -2ax^{(2)}$.

Упрощая нелинейное уравнение для отдельной молекулы (2.12) и вытекающую из него систему (2.19) до уравнения (2.21) для поляризованности изотропной среды, мы не рассматриваем в этом макроскопическом отклике квадратичную по полю его нелинейность. Таким образом, мы выводим из рассмотрения нелинейные эффекты

в анизотропных кристаллах. Но напоминаем, что задача курса – продемонстрировать общие методы решения нелинейной оптики, пусть даже на самых простых объектах. Эти методы, будучи освоенными, позволят при необходимости изучать и нелинейные эффекты в более сложных для описания средах, например, в кристаллах.

Обратим внимание также на то, что хоть в изотропном материале квадратичная нелинейность отклика микроскопического объекта – отдельной молекулы – из-за усреднения не возбуждает квадратичного по полю макроскопического отклика поляризованности объема вещества, тем не менее, квадратичная нелинейность молекулярных колебаний вносит вклад в кубическую нелинейность поляризованности среды. Более того, такой вклад в определенных ситуациях является основным [16, 17].

Уместно дополнительно отметить, что в учебной литературе, да и в научной тоже, для описания динамики поляризованности изотропной среды часто используется нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P + \frac{b}{(Nq)^2} P^3 = qN\alpha E, \quad (2.22)$$

К нему сводится уравнение (1.5) (смотри Лекцию 1) в пренебрежении квадратичной нелинейностью поляризационного отклика. Действительно, в изотропной среде при изменении направления поля на обратное (смотри рисунок 2.1) из соображений симметрии должно поменяться тоже на обратное и направление поляризационного отклика среды. А это при описании динамики поляризованности среды уравнением (1.5) возможно только при $\alpha P^2 = 0$. Таким образом, в изотропной среде квадратичная нелинейность поляризационного отклика по полю должна отсутствовать.

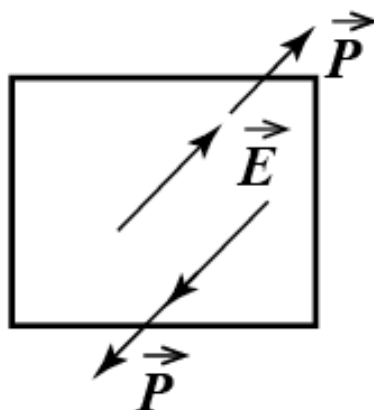


Рисунок 2.1 – Иллюстрация изменения направления вектора поляризованности изотропной среды при изменении направления вектора напряженности поля излучения

Обратим внимание на то, что так же получаемая в рамках классического подхода модель поляризационного отклика изотропной

среды на поле излучения вида (2.22) качественно не соответствует той модели, что дает квантовая теория. Уравнение (2.22) не предсказывает, например, такой известный в нелинейной оптике эффект, как возрастание нелинейной восприимчивости среды при двухфотонном резонансе. В то же время рассмотренная выше система (2.21), как будет показано в следующей лекции, описывает этот эффект. По-видимому, впервые внимание на то, что для согласованности характера описания дисперсии нелинейной восприимчивости, получаемого с помощью классической модели взаимодействия света с веществом, с результатами квантовых расчетов классическая модель должна включать параметрически связанные осцилляторы, было обращено в работе [18].

Поскольку мы стали сравнивать результаты описания поляризационного отклика вещества, получаемые в рамках классической теории, с тем, что дает более полная квантовая теория, то в заключение настоящей лекции уместно привести математические модели нелинейной поляризованности сред, которые выводятся в рамках квантового формализма. Полуклассический подход, когда поле по-прежнему описывается классически, но вещество – в рамках квантовой теории, продемонстрируем для случаев резонансного взаимодействия излучения с веществом.

IV. Уравнения динамики нелинейного поляризационного отклика среды при одно- и двухфотонных резонансных взаимодействиях излучения с веществом

При резонансном взаимодействии излучения с веществом для описания динамики поляризационного отклика среды методами квантовой физики чаще всего применяют аппарат матрицы плотности в приближении малого числа энергетических состояний квантового объекта, для которых и выполняются резонансные условия [19–21].

Рисунки 2.2, 2.3 и 2.4 иллюстрируют в поле излучения «двухуровневую» и «трехуровневую» квантовые частицы вещества.

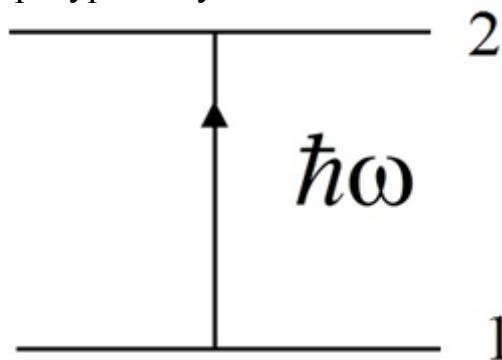


Рисунок 2.2 – «Двухуровневая» квантовая частица при однофотонном резонансе с излучением на частоте ω

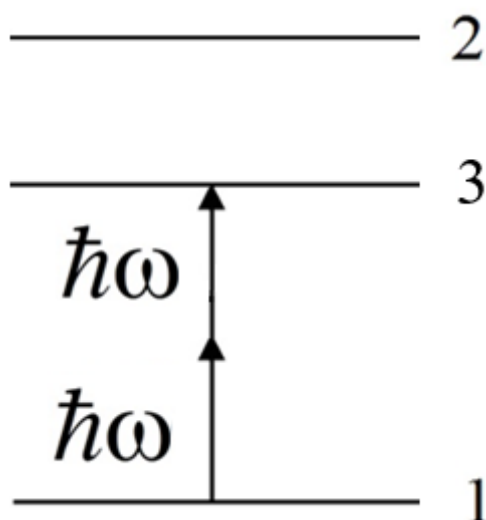


Рисунок 2.3 – «Трехуровневая» квантовая частица при двухфотонном резонансе с излучением на частоте ω

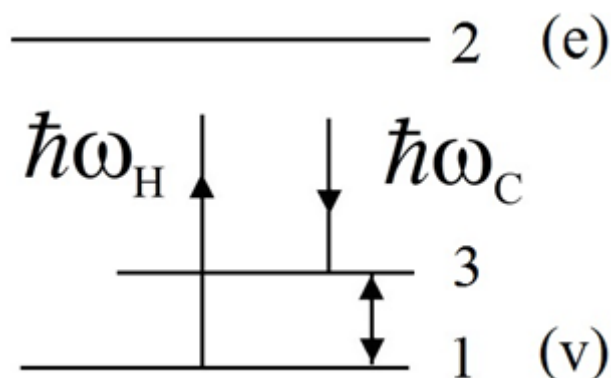


Рисунок 2.4 – «Трехуровневая» квантовая частица при двухфотонном резонансе с бихроматическим излучением.

(e) и (v) – комбинационно-активные электронные и колебательные состояния молекулы, ω_H – частота излучения накачки, ω_C – частота генерируемой в среде стоксовой компоненты излучения

Рисунок 2.2 соответствует, например, однофотонному резонансному взаимодействию лазерного излучения и активаторного центра усиливающей среды лазера. Уровни 1 и 2 характеризуются энергиями квантовой частицы E_1 и E_2 . При однофотонном резонансе разность энергий $E_2 - E_1$ близка к энергии кванта излучения $\hbar\omega$, где \hbar – приведенная постоянная Планка, ω – частота излучения.

Рисунок 2.3 иллюстрирует двухфотонное резонансное взаимодействие лазерного излучения на частоте ω с, например, примесным центром оптической среды, через которую оно распространяется. При двухфотонном резонансе разность энергий $E_3 - E_1$ близка удвоенной энергии кванта излучения $\hbar\omega$. Обычно взаимодействие излучения с веществом при двухфотонном резонансе сильное, когда

переход из состояния 1 в состояние 3 в электродипольном приближении запрещен (слабо разрешен) [20]. Поэтому на рисунке 2.3 отображено также эффективное возбужденное энергетическое состояние квантовой частицы 2, переход на которое из состояния 1 и из состояния 3 разрешен.

Рисунок 2.4 демонстрирует двухфотонное резонансное взаимодействие бихроматического излучения накачки и стокова излучения на частотах ω_H и ω_C , соответственно, с молекулярным колебанием при вынужденном комбинационном рассеянии. Энергетические уровни 1, 2 и 3 соответствуют основному состоянию молекулы E_1 , возбужденному состоянию ее электронной подсистемы E_2 и возбужденному колебательному состоянию E_3 . При двухфотонном резонансе разность энергий $E_3 - E_1$ близка к разности энергий квантов излучения $\hbar\omega_H - \hbar\omega_C$. Переход из состояния 1 в состояние 3 является запрещенным, а переходы из 1 в 2 и из 2 в 3 – разрешенные.

В двухуровневом энергетическом приближении структурной единицы оптической среды для ее поляризационного отклика в поле линейно поляризованного излучения можно получить хорошо известную в оптической физике систему [19–21]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_{21}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_{21}^2} \right) \mathbf{P} = \frac{2\omega_{21}^2}{\hbar} |\mathbf{p}_{12}|^2 N_{12} \mathbf{E}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial t} + \frac{N_{12} - N_{12}^{(0)}}{\tau_{12}} = -\frac{2}{\hbar\omega_{21}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{T_{21}} \mathbf{P} \right) \mathbf{E}, \quad (2.24)$$

где $\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ – собственная частота колебаний двухуровневой квантовой частицы, T_{21} и τ_{12} – времена поперечной и продольной релаксации ее возбужденных состояний, \mathbf{p}_{12} – дипольный момент квантового перехода между состояниями, N_{12} – разность заселенностей энергетических состояний 1 и 2 двухуровневой квантовой частицы, $N_{12}^{(0)}$ – равновесная разность заселенностей.

Первое уравнение системы (2.23) описывает динамику поляризованности среды в поле излучения, второе уравнение (2.24) описывает изменение заселенностей резонансных уровней. Видно, если изменение заселенностей энергетических состояний частицы мало, то материальное уравнение (2.23) идентично тому, что обсуждается в рамках классической теории дисперсии света в линейной оптике [3, 5]. Таким образом, полезно лишний раз подчеркнуть, что квантовая теория вовсе не перечеркивает классическую, а определяет пределы ее применимости.

Учет изменения заселенностей энергетических состояний квантовой частицы в поле излучения приводит к нелинейности отклика среды и многообразию явлений резонансной нелинейной оптики [7].

При описании двухфотонных резонансов в приближении трехуровневой квантовой системы (смотри рисунки 2.3 и 2.4), можно показать [19, 20], что материальные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_{21}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \omega_{21}^2 \mathbf{P} = 2\omega_{21}^2 \frac{1}{\hbar} |\mathbf{p}_{12}|^2 N_{12} \mathbf{E} + \omega_{21} \frac{1}{\hbar} \mathbf{R} \mathbf{E}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_{31}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \omega_{31}^2 \mathbf{R} = \omega_{31} \frac{1}{\hbar} |\mathbf{p}_{23}|^2 \mathbf{P} \mathbf{E}, \quad (2.26)$$

где $\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ и $\omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}$ – собственные частоты колебаний трехуровневой квантовой частицы, T_{21} и T_{31} – времена поперечной релаксации возбужденных состояний, \mathbf{p}_{12} и \mathbf{p}_{23} – дипольные моменты квантовых переходов, N_{12} – разность заселенностей энергетических состояний 1 и 2. В зависимости от выбора вида излучения в виде монохроматической или бихроматической волны система (2.25–2.26) теоретически описывает двухфотонное резонансное взаимодействие, приведенное либо на рисунке 2.3, либо на рисунке 2.4.

Первое уравнение системы материальных уравнений (2.25) описывает динамику поляризованности среды. Уравнение (2.26) описывает осциллятор, переходы между энергетическими состояниями которого в электродипольном приближении запрещены. Его колебания вызываются квадратом амплитуды поля. В линейной спектроскопии переходы между данными возбужденными состояниями не обнаруживаются. Изменением населенностей уровней в таких процессах обычно пренебрегают, они более высокого порядка малости.

В заключение этой лекции обратим внимание на структурное совпадение квантовых формул (2.25–2.26) и их классических аналогов (2.21).

Упражнение: вывести волновое уравнение для металлов, принимая дополнительно во внимание для них материальное уравнение в виде закона Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Совпадает ли число уравнений в системе уравнений Максвелла с числом искомых величин в этой системе?
2. Какие механизмы нелинейности поляризационного отклика в поле оптического излучения можно различать?

3. В чем суть метода малого параметра решения задач нелинейной физики?
4. Почему в изотропной среде отсутствует квадратичный по полю ее поляризационный отклик?
5. Влияет ли квадратичная нелинейность колебаний отдельных молекул изотропной среды на ее макроскопический поляризационный отклик?
6. Почему при однофотонном резонансе возможно использовать приближение двухуровневой структурной единицы вещества, а при двухфотонном резонансе следует рассматривать уже трехуровневое приближение?
7. Почему при рассмотрении двухфотонных резонансов обычно пренебрегают эффектом изменения населенностей энергетических состояний вещества?

ЛЕКЦИЯ 3.

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим характерные для нелинейной оптики методы анализа и решения материальных уравнений. Прежде всего, продемонстрируем особенности этих методов при обсуждении полученного в предыдущей лекции уравнения динамики в поле ТГц излучения поляризационного отклика изотропных диэлектрических сред с нелинейностью колебательной природы.

Получим решения (2.21) сначала для частного случая силового воздействия на среду квазимонохроматического излучения, а затем обсудим это решение уже для общего случая, т.е. для поля E в виде произвольной функции от времени t .

I. Нелинейный поляризационный отклик в поле квазимонохроматического излучения

Для случая квазимонохроматического импульсного излучения

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{E}_\omega(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{E}_\omega(t)$ – зависящая от времени t комплексная амплитуда напряженности электрического поля импульса с несущей частотой ω , в системе (2.21) полагаем

$$P_{\text{лин}} = \frac{1}{2} P_\omega^{\text{лин}}(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (3.2)$$

$$P_{\text{нел}} = \frac{1}{2} \left(P_{\omega}^{\text{нел}}(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.} + P_{3\omega}^{\text{нел}}(t) e^{i3\omega t} + \text{к.с.} \right). \quad (3.3)$$

$$R = R_0(t) + \frac{1}{2} \left(R_{2\omega}(t) e^{i2\omega t} + \text{к.с.} \right). \quad (3.4)$$

В выражениях (3.2–3.4) $P_{\omega}^{\text{линь}}(t)$, $P_{\omega}^{\text{нел}}(t)$, $P_{3\omega}^{\text{нел}}(t)$, $R_0(t)$ и $R_{2\omega}(t)$ – это зависящие от времени комплексные амплитуды линейной и нелинейной частей поляризационного отклика среды на несущей частоте квазимонохроматического импульса, нелинейной поляризованности на его утроенной частоте, колебаний параметрически связанных осцилляторов на «нулевых» и удвоенных частотах.

Система (2.21) в новых переменных (3.2-3.4) примет вид (смотри упражнение 1 настоящей лекции)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{\omega}^{\text{линь}}}{\partial t^2} + (\gamma + 2i\omega) \frac{\partial P_{\omega}^{\text{линь}}}{\partial t} + (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) P_{\omega}^{\text{линь}} &= Nq\alpha \mathcal{E}_{\omega}, \\ \frac{\partial^2 P_{\omega}^{\text{нел}}}{\partial t^2} + (\gamma + 2i\omega) \frac{\partial P_{\omega}^{\text{нел}}}{\partial t} + (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) P_{\omega}^{\text{нел}} &= \\ = R_0 P_{\omega}^{\text{линь}} + \frac{1}{2} R_{2\omega} (P_{\omega}^{\text{линь}})^* - \frac{3}{4} \frac{b}{(Nq)^2} |P_{\omega}^{\text{линь}}|^2 P_{\omega}^{\text{линь}}, & \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 R_{2\omega}}{\partial t^2} + (\gamma + 4i\omega) \frac{\partial R_{2\omega}}{\partial t} + (\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\gamma\omega) R_{2\omega} = \frac{a^2}{(Nq)^2} (P_{\omega}^{\text{линь}})^2,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial R_0}{\partial t} + \omega_0^2 R_0 = \frac{a^2}{(Nq)^2} |P_{\omega}^{\text{линь}}|^2.$$

Для импульсов с длительностями, много большими характерных времен колебательного отклика среды, т.е. для которых выполняется неравенство

$$\tau_{\text{pulse}} \gg \omega_0^{-2}, \gamma^{-1}, \quad (3.6)$$

линейная часть поляризационного отклика принимает вид (в системе СГС):

$$P_{\omega}^{\text{линь}} = \chi_{\omega}^{(1)}(\omega) \mathcal{E}_{\omega}, \quad (3.7)$$

где зависимость от несущей частоты ω оптического импульса линейной восприимчивости среды принимает хорошо известный в классической теории дисперсии вид [5]

$$\chi_{\omega}^{(1)} = \frac{Nq\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (3.8)$$

Нелинейный поляризационный отклик среды на частоте ω , как следует из системы (3.5), принимает вид (в системе СГС):

$$P_{\omega}^{\text{нел}} = \chi_{\omega}^{(3)}(\omega) |\mathcal{E}_{\omega}|^2 \mathcal{E}_{\omega}, \quad (3.9)$$

где зависимость от несущей частоты излучения ω кубической нелинейной восприимчивости может быть записана в виде

$$\chi_{\omega}^{(3)}(\omega) = \frac{1}{4} \frac{qN\alpha^3}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \times \left[2a^2 \frac{3\omega_0^2 - 8\omega^2 + 4i\gamma\omega}{\omega_0^2(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\gamma\omega)} - 3b \right]. \quad (3.10)$$

Кубическая восприимчивость (3.10) характеризует нелинейную часть поляризованности среды на той же частоте, что и несущая частота оптического импульса, т.е. определяет зависимость показателя преломления среды от интенсивности излучения и, соответственно, эффекты самовоздействия излучения (смотри Лекцию 1).

Из системы уравнений (3.5) при условии (3.6) можно получить и выражение для нелинейного поляризационного отклика на утроенной частоте волны накачки:

$$P_{3\omega}^{\text{нел}} = \chi^{(3)}(3\omega) \mathcal{E}_{\omega}^3, \quad (3.11)$$

в котором кубическая восприимчивость $\chi^{(3)}(3\omega)$ характеризует нелинейную часть поляризованности среды на утроенной частоте по отношению к несущей частоте ω оптического импульса, т.е. определяет эффект генерации третьей гармоники в нелинейной среде (смотри Лекцию 1). Зависимость $\chi^{(3)}(3\omega)$ от частоты излучения ω читателю предлагается определить из уравнений (3.5) в условиях (3.6) самостоятельно (смотри упражнение к этой лекции).

Как видно из соотношения (3.10), в нем можно выделить два слагаемых (в квадратных скобках, у которых общий множитель). Первое слагаемое в кубической восприимчивости обусловлено квадратичной нелинейностью колебаний атомов в молекуле и пропорционально квадрату параметра этой нелинейности a , второе слагаемое обусловлено кубической нелинейностью колебаний атомов и пропорционально параметру b . Первое слагаемое, в частности, описывает возможность двухфотонного резонанса при взаимодействии излучения с веществом. Второе слагаемое можно интерпретировать как динамический штарковский сдвиг частоты колебаний атомов в молекуле под воздействием поля излучения, поскольку в уравнении ангармонических колебаний (2.12) слагаемые $\omega_0^2 x + bx^3$ можно записать в виде $(\omega_0^2 + bx^2)x$.

Принципиально отметить, что по своей структуре зависимость кубической нелинейной восприимчивости от частоты излучения (3.10), полученная выше в рамках классической теории взаимодействия излучения с веществом, качественно совпадает с получаемой в рамках квантовомеханического рассмотрения динамикой многоуровневой

структурной единицы вещества в сильном поле монохроматического излучения [7]. Такое совпадение говорит о хорошей применимости классической теории дисперсии при описании взаимодействия излучения с веществом в случае не только линейной, но и нелинейной оптики.

Измерения нелинейных восприимчивостей материалов, характеризующих малоинерционные механизмы нелинейности, являются непростой экспериментальной задачей [7]. Поэтому для предсказательной оценки нелинейных восприимчивостей очень важна роль теории. Обсудим, как, например, рассмотренная выше теория нелинейности поляризационного отклика сред колебательной природы может помочь в оценке нелинейных оптических характеристик вещества в ТГц диапазоне спектра.

Модель ангармонических колебаний молекулярного осциллятора вида (2.12) в отсутствие внешнего электромагнитного поля давно и широко используется в физике твердого тела для описания теплового расширения вещества. При использовании этой классической модели коэффициент теплового расширения материала среды представляется формулой

$$\alpha_T = -\frac{ak_B}{m\omega_0^4 a_1}, \quad (3.12)$$

где k_B – постоянная Больцмана, m – приведенная масса колебательной моды, a_1 – постоянная решетки (для твердых тел) или диаметр молекулы (для жидкостей). Таким образом, в рамках простой классической модели ангармонического молекулярного осциллятора (2.12) можно параметр a , определяющий искомую нелинейную оптическую характеристику вещества, оценить по хорошо известной и просто определяемой на практике величине коэффициента теплового расширения

$$a = -\frac{m\omega_0^4 a_1}{k_B} \alpha_T. \quad (3.13)$$

Остальные коэффициенты модели ангармонического молекулярного осциллятора (2.12) также можно выразить через другие, уже известные из литературы, характеристики среды, например, линейную восприимчивость среды (3.8) (на практике – ее линейный показатель преломления), частоту валентных колебаний атомов молекулы и другие [14, 17].

Пользуясь такими оценками, в работе [14] была сначала теоретически предсказана, а затем авторами работ [16, 17] экспериментально обнаружена гигантская нелинейность показателя преломления целого ряда оптических материалов в ТГц спектральном диапазоне. Например, коэффициент нелинейного показателя преломления воды с инерционностью нелинейного отклика, меньшей одной пикосекунды, в ТГц спектральном диапазоне оказался в миллион раз большим, чем этот ее коэффициент в видимом и ближнем ИК диапазонах

спектра [16]. Разумеется, обнаружение материалов с такой аномально большой и малоинерционной нелинейностью показателя преломления привлекло значительный интерес исследователей перспективой создания сверхбыстрых устройств ТГц фотоники, построенных на эффектах самовоздействия излучения.

На примере колебательного механизма нелинейности диэлектрических сред мы рассмотрели характерный вид их нелинейного поляризационного отклика на квазигармоническое воздействие оптического поля излучения.

Теперь обсудим методы описания нелинейного поляризационного отклика сред в поле импульсного излучения произвольного профиля.

II. Нелинейный поляризационный отклик в произвольном поле импульсного излучения

Решение первого уравнения системы материальных уравнений (2.21) несложно найти не только для случая воздействия на осциллятор поля квазигармонического вида (3.1), но, поскольку оно линейное, то и при произвольной зависимости поля от времени. Для произвольного профиля поля такое решение можно записать в виде [22]

$$P_{\text{лин}}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(C_1 \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t \right) \right) + \frac{Nq\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \int_{-\infty}^t E(t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} (t-t') \right) dt', \quad (3.14)$$

где первое слагаемое описывает затухающие собственные колебания атомов на частоте ω_0 , а второе слагаемое – вынужденные колебания в поле E .

Далее рассмотрим только вынужденные колебания поляризованности среды. В соотношении (3.14) удобно перейти к переменной $\tau = t - t'$, тогда оно примет вид

$$P_{\text{лин}}(t) = \frac{Nq\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \int_0^{\infty} E(t-\tau) e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot \tau \right) d\tau. \quad (3.15)$$

При переходе от (3.14) к (3.15) учтено, что при $t' \rightarrow t$ имеем $\tau \rightarrow 0$, а при $t' \rightarrow -\infty$ имеем $\tau \rightarrow +\infty$.

Таким образом, привели решение уравнения динамики линейной части поляризационного отклика среды (2.21) к виду

$$P_{\text{лин}}(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau, \quad (3.16)$$

где линейная восприимчивость диэлектрической среды выражается соотношением

$$\chi(\tau) = \frac{Nq\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot \tau\right). \quad (3.17)$$

Как видно из (3.16), отклик среды зависит от поля, воздействующего на среду не только в данный, но и в предыдущие моменты времени. Интегрирование ведется от нуля в полном соответствии с принципом причинности, поскольку отклик среды не может появиться раньше воздействия на нее.

Зависимость нелинейной восприимчивости от задержки по времени τ может быть, в общем случае, значительно более сложной, чем (3.17), например, в рамках классической теории дисперсии она описывается сразу несколькими осцилляторами вещества.

Замечание: Отклик среды в данный момент времени в данной точке пространства на силовое воздействие поля излучения может зависеть не только от значения поля в предыдущие моменты времени, но и от поля в соседних точках пространства. Тогда говорят о **пространственной дисперсии** и поляризационный отклик среды рассматривают в виде

$$P_{\text{лин}}(t, \vec{r}) = \int_0^{\infty} \int_V \chi(\tau, \Delta\vec{r}) E(t - \tau, \vec{r} - \Delta\vec{r}) d\tau d\Delta\vec{r}, \quad (3.18)$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ – координата пространства, в которой рассматривается поляризационный отклик, \vec{r}' – соседние координаты пространства. Далее в данном учебном пособии обсуждать особенности распространения излучения в средах с пространственной дисперсией мы не будем.

Аналогичными, но более сложными размышлениями можно показать, что общее решение нелинейных уравнений системы (2.21) приводится к виду

$$P_{\text{нел}}(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) E(t - \tau_1) E(t - \tau_1 - \tau_2) \times \\ \times E(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (3.19)$$

где $\chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ – нелинейная восприимчивость диэлектрической среды третьего порядка.

Таким образом, поляризованность нелинейной изотропной диэлектрической среды может быть представлена в виде

$$P(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) E(t - \tau_1) E(t - \tau_1 - \tau_2) E(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (3.20)$$

или, как и обсуждали в предыдущей лекции, в виде $P(t) = P_{\text{лин}}(t) + P_{\text{нел}}(t)$.

Представление (3.20) имеет весьма общий характер. Но обосновано оно было нами для тех случаев, когда нелинейность поляризационного отклика предполагалась значимо малой величиной. Так, нелинейный характер силы, возвращающей электрон в атоме (смотри уравнение (1.1)) или атомы в молекуле (смотри уравнение (2.1)) в положение равновесия давался в виде разложения в ряд по величине отклонения от этого положения равновесия. Соответственно, и в конечном результате поляризационный отклик среды описывается в формуле (3.20) в виде ряда по степеням поля. Это обычно справедливо как при нерезонансном, так и резонансном взаимодействии излучения с оптическими средами. Например, описывающая двухфотонный резонансный процесс система (2.25–2.26), которая получена на основе формализма матрицы плотности в приближении трехуровневой энергетической структуры молекулы вещества, не учитывает изменение заселенностей резонансных уровней. Этот процесс при вынужденном комбинационном рассеянии имеет пятый порядок по полю. Им обычно при проведении теоретических оценок пренебрегают, хотя при однофотонном резонансе (2.23–2.24) именно изменение заселенностей резонансных уровней является основным механизмом нелинейности поляризационного отклика среды.

Рассмотрим еще одно полезное на практике упрощение математической модели нелинейного поляризационного отклика изотропной среды. При нерезонансном взаимодействии излучения с веществом, когда временная дисперсия не является сильной, в соотношении (3.20) можно поле представить в виде разложения в ряд по временной задержке τ от текущего времени t

$$E(t - \tau) = E(t) - \tau \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \dots \quad (3.21)$$

Тогда линейный по полю поляризационный отклик среды (3.20) можно представить в виде

$$P_{\text{лин}}(t) = \chi_0 E(t) + P_{\text{ин}}(t), \quad (3.22)$$

где первое слагаемое описывает безынерционную часть отклика, а второе

$$P_{\text{ин}}(t) = \chi_{\text{погл}} \frac{\partial E}{\partial t} + \chi_{\text{дисп}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \dots \quad (3.23)$$

– его инерционную часть. В соотношениях (3.22) и (3.23)

$$\chi_0^{(1)} = \int_0^{\infty} \chi(\tau) d\tau, \quad (3.24)$$

$$\chi_{\text{погл}} = -\int_0^{\infty} \tau \cdot \chi(\tau) d\tau, \quad (3.25)$$

$$\chi_{\text{дисп}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \tau^2 \cdot \chi(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

– это параметры среды, характеризующие, соответственно, безынерционную часть линейной восприимчивости среды, линейное по полю поглощение и дисперсию. В анизотропных материалах эти величины являются тензорными.

В нелинейной по полю части поляризационного отклика при рассмотрении нерезонансного взаимодействия излучения с веществом при разложении поля в ряд (3.21) на практике можно ограничиться только его безынерционным слагаемым, поскольку сама нелинейная часть поляризованности мала, а ее инерционная часть получается малой от малого. Выражение для нелинейной поляризованности изотропной оптической среды тогда примет очень простой вид:

$$P_{\text{нел}}(t) = \chi^{(3)} E^3(t), \quad (3.27)$$

где кубичная по полю восприимчивость среды

$$\chi^{(3)} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \quad (3.28)$$

III. Нелинейный поляризационный отклик в поле излучения произвольной поляризации

В поле излучения произвольной поляризации выражение для нелинейной части поляризованности изотропной оптической среды (3.27) следует записать в векторном виде

$$\vec{P}_{\text{нел}}(t) = \chi^{(3)} \vec{E}^3(t). \quad (3.29)$$

В поле квазимонохроматического излучения произвольной поляризации

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}_{\omega}(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (3.30)$$

выражение (3.29) примет вид

$$\vec{P}_{\text{нел}}(t) = \frac{\chi^{(3)}}{8} \left[\left(\vec{\mathcal{E}}_{\omega} \vec{\mathcal{E}}_{\omega} \right) \vec{\mathcal{E}}_{\omega}^* + 2 \left(\vec{\mathcal{E}}_{\omega} \vec{\mathcal{E}}_{\omega}^* \right) \vec{\mathcal{E}}_{\omega} \right] e^{i\omega t} + \frac{\chi^{(3)}}{8} \left(\vec{\mathcal{E}}_{\omega} \vec{\mathcal{E}}_{\omega} \right) \vec{\mathcal{E}}_{\omega} e^{3i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (3.31)$$

в котором первое слагаемое характеризует эффекты самовоздействия излучения, а второе – генерацию излучения на утроенных частотах.

Таким образом, комплексная амплитуда поляризованности изотропной среды на той же частоте, что и возбуждающее излучение, может быть записана в виде

$$\vec{P}_{\text{нел}_\omega} = \frac{\chi^{(3)}}{4} \left[2 \left(\vec{\mathcal{E}}_\omega \vec{\mathcal{E}}_\omega^* \right) \vec{\mathcal{E}}_\omega + \left(\vec{\mathcal{E}}_\omega \vec{\mathcal{E}}_\omega \right) \vec{\mathcal{E}}_\omega^* \right]. \quad (3.32)$$

Замечание. В общем случае нелинейный кубичный по полю отклик оптической среды можно записать в виде [2]

$$P_{\text{нел}_i} = \sum_{jkl} \chi^{ijkl}(\omega; \omega, \omega_i - \omega) \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l^*, \quad (3.33)$$

где χ^{ijkl} – компоненты тензора нелинейной восприимчивости среды третьего порядка по полю. Их всего 81 компонента. В изотропных средах независимых компонент две. Отметим, что в изотропных в линейной оптике кубических кристаллах таких независимых компонент уже три.

Можно показать, что в изотропной среде с инерционным нелинейным откликом комплексная амплитуда поляризованности на той же частоте, что и возбуждающее излучение, может быть записана в виде

$$P_{\text{нел}_\omega} = \left(\chi^{1111} - \chi^{1221} \right) \left(\vec{\mathcal{E}}_\omega \vec{\mathcal{E}}_\omega^* \right) \vec{\mathcal{E}}_\omega + \chi^{1221} \left(\vec{\mathcal{E}}_\omega \vec{\mathcal{E}}_\omega \right) \vec{\mathcal{E}}_\omega^*. \quad (3.34)$$

Соотношение между компонентами тензора нелинейной восприимчивости для среды с безынерционным откликом (3.29) предлагается найти читателю самостоятельно. Смотри упражнение 3 к данной лекции.

Упражнение 1 (сложное): для квазимонохроматического импульсного излучения (3.1) вывести систему уравнений (3.5) из системы уравнений (2.21) с учетом обозначений (3.2-3.4).

Упражнение 2 (сложное): для нелинейной поляризованности (3.11) определить из системы уравнений (3.5) в условиях (3.6) зависимость нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}(3\omega)$ от несущей частоты излучения.

Упражнение 3: найти отношение χ^{1221}/χ^{1111} для сред с безынерционной кубичной нелинейностью (3.29).

Вопросы для самоконтроля

1. Влияет ли квадратичная нелинейность колебательного движения атомов в молекулах изотропных сред на их кубическую нелинейную восприимчивость?
2. Какие резонансы возможны при взаимодействии излучения с нелинейным веществом, кроме проявляемых в линейной спектроскопии?
3. Какая нелинейность в классическом описании колебательного движения атомов в молекуле может быть интерпретирована как динамический штарковский сдвиг?
4. Что такое пространственная дисперсия?
5. Какие теоретические подходы используются при рассмотрении поляризационного отклика оптических сред при слабой дисперсии вещества?

ЛЕКЦИЯ 4 ПРИБЛИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Обсудив в предыдущих лекциях виды нелинейного поляризационного отклика оптических сред различной физической природы и упрощения, применяемые при их анализе, рассмотрим теперь приближения, которые используются при решении нелинейных волновых уравнений.

Характерные приближения изучим на примере волнового уравнения (2.76), которое описывает динамику оптического поля в диэлектрических средах. Это уравнение имеет широкую область использования, но методы его анализа и упрощений, которые мы продемонстрируем ниже, применимы и для других волновых уравнений.

Напомним волновое уравнение (2.76). В СГС оно имеет вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Обычно уравнение (4.1) дополнительно преобразуют, используя векторное тождество

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}. \quad (4.2)$$

Далее, часто пренебрегая первым слагаемым в (4.2), из (4.1) получают волновое уравнение в виде

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3)$$

решения которого и рассматривают при изучении особенностей распространения поля излучения в оптических материалах.

Покажем, что переход от волнового уравнения (4.1) к уравнению (4.3) физически означает ограничение анализа рассмотрением динамики только параксиального излучения.

I. Приближение параксиальной волны

Для того, чтобы оценить, в каком случае можно пренебречь первым слагаемым в правой части тождества (4.2), рассмотрим еще одно уравнение Максвелла:

$$\nabla \vec{D} = 0, \quad (4.4)$$

которое, как и (4.1), записано для сред с отсутствием токов и свободных зарядов.

Учитывая связь электрической индукции с поляризованностью оптической среды по определению вида (2.8), возможность выделения в поляризованности ее линейной и нелинейной частей (2.10), а также разделения линейной части поляризованности среды на ее безынерционную и инерционную компоненты (3.22), уравнение (4.4) получаем в виде

$$\nabla \vec{D} = \nabla \vec{E} + 4\pi(\chi_0 \nabla \vec{E} + \nabla \vec{P}_{\text{ин}} + \nabla \vec{P}_{\text{нел}}). \quad (4.5)$$

Из записанного в СГС соотношения (4.5) следует, что

$$\nabla \vec{E} = -\frac{4\pi}{1 + 4\pi\chi_0} (\nabla \vec{P}_{\text{ин}} + \nabla \vec{P}_{\text{нел}}). \quad (4.6)$$

Таким образом, волновое уравнение (4.1) с учетом векторного тождества (4.2) и полученного из еще одного уравнения Максвелла выражения (4.6) принимает вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{ин}}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нел}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{n_0^2} [\nabla(\nabla \vec{P}_{\text{ин}}) + \nabla(\nabla \vec{P}_{\text{нел}})] = 0. \quad (4.7)$$

Оценим третье, четвертое, пятое и шестое слагаемые в волновом уравнении (4.7) и сопоставим эти оценки. Для третьего и четвертого слагаемых выполняется

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{ин, нел}}}{\partial t^2} \sim \frac{P_{\text{ин, нел}}^{\text{max}}}{c^2 T_c^2} = \frac{P_{\text{ин, нел}}^{\text{max}}}{\lambda_c^2}, \quad (4.8)$$

где $P_{\text{ин, нел}}^{\text{max}}$ – амплитуды колебаний линейной инерционной и нелинейной частей поляризованности среды, T_c – центральный период этих колебаний, λ_c – центральная длина волны. В то же время для пятого и шестого слагаемых уравнения (4.7) выполняется оценка

$$\nabla(\nabla P_{\text{ин, нел}}) \sim \frac{\partial^2 P_{\text{ин, нел}}}{\partial x \partial y} \sim \frac{P_{\text{ин, нел}}^{\text{max}}}{a^2}, \quad (4.9)$$

где x и y – декартовы координаты, поперечные оси z , вдоль которого распространяется пучок излучения, a – его характерный поперечный размер.

Сопоставляя оценки (4.8) и (4.9), видим, что пятым и шестым слагаемыми по сравнению с третьим и четвертым можно пренебречь, если $a \gg \lambda_c$. (4.10)

Неравенство (4.10) характеризует параксиальное излучение [20, 23]. При этом условии уравнение (4.7) принимает вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{ин}}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нел}}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.11)$$

который при указанных выше обозначениях полностью соответствует уравнению (4.3).

На первый взгляд, в среде со слабой дисперсией и малой нелинейностью, где $P_{\text{ин}} \cong 0$ и $P_{\text{нел}} \cong 0$, например, в воздухе, из (4.6) следует

$$\nabla \vec{E} = -\frac{4\pi}{1 + 4\pi\chi_0} (\nabla \vec{P}_{\text{ин}} + \nabla \vec{P}_{\text{нел}}) = 0. \quad (4.12)$$

Тогда в векторном тождестве (4.2) можно говорить о строгом равенстве нулю первого слагаемого в правой его части и, соответственно, при условии (4.12) математически корректном переходе от уравнения (4.1) к его упрощению вида

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.13)$$

Однако при переходе описания динамики поля в свободном пространстве от волнового уравнения (4.1) к уравнению (4.13), несмотря на его кажущуюся математическую строгость, приобретаются решения, которые не являются решениями уравнения Максвелла (4.12). Поэтому для свободного пространства волновое уравнение (4.13) надо обязательно рассматривать совместно с уравнением (4.12). Можно показать, что «лишние» решения в уравнении (4.13) по сравнению с решениями системы (4.12–4.13) приобретаются именно для непараксиального излучения [20, 23]. Поэтому решения волнового уравнения (4.13) являются и решениями исходных уравнений Максвелла даже для свободного пространства только для параксиального излучения (исключение составляет непараксиальная динамика щелевых ТЕ-поляризованных волн).

Таким образом, переход в волновом уравнении (4.1) от векторного оператора $\nabla \times \nabla \times$ к оператору $-\Delta$, в том числе в не рассмотренном выше случае анизотропных сред, означает ограничение анализа волновых процессов изучением особенностями распространения только параксиального излучения.

Уравнение (4.11) описывает динамику поля параксиальных волн, распространяющихся как в положительном, так и отрицательном направлении оси z , в том числе взаимодействие встречных волн в нелинейной среде. Во многих практических ситуациях появление в среде встречной волны (например, из-за поперечной модуляции ее линейной восприимчивости или вследствие возникновения нелинейного рассеяния излучения назад [24]) можно не учитывать. Тогда используют приближение однонаправленного распространения волны. Рассмотрим его.

II. Приближение однонаправленного распространения

Для определенности будем обсуждать описание волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси z (смотри иллюстрацию на рисунке 4.1). Тогда уравнение (4.11) целесообразно привести в новых координатах

$$\begin{aligned} z' &= z \\ \tau &= t - \frac{n_0}{c} z, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где τ – это «запаздывающее» время.

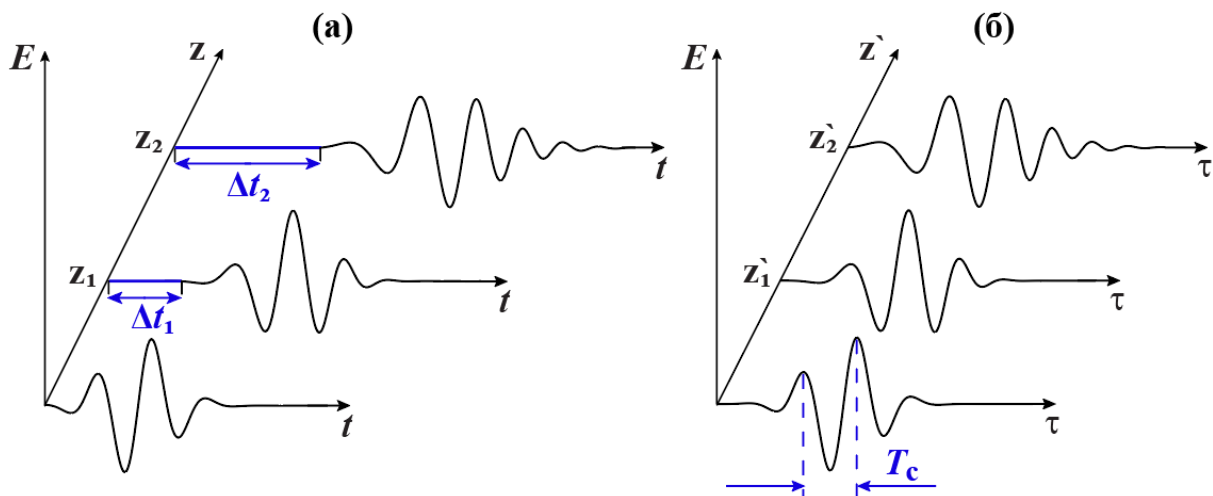


Рисунок 4.1 – Иллюстрация зависимости профиля электрического поля E импульса излучения на разных расстояниях в оптической среде от (а) обычного t и (б) «запаздывающего» τ времени

Из рисунка 4.1 видно, что импульс в обычном времени в точку z_1 и z_2 приходит с опозданием Δt_1 и Δt_2 , в то время как в «запаздывающем» времени импульс располагается по-прежнему вблизи начала отсчета времени (хотя и несколько сдвигается из-за различия фазовой и групповой скорости импульса). Очевидно удобство описания динамики поля излучения в координатах (4.14) при, например, численных расчетах, при которых нужна существенно меньшая расчетная сетка по оси времени τ .

В переменных (4.14) уравнение (4.11) примет вид (смотри упражнение 1 к лекции)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} + \Delta_{\perp} \vec{E} - \frac{2n_0}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z' \partial \tau} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{ин}}}{\partial \tau^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нел}}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (4.15)$$

где Δ_{\perp} – поперечный (по координатам x и y) лапласиан.

Из рисунка 4.1б видно, что за характерный период колебаний T_c поле в импульсе меняется значительно, и можно дать его производной простую оценку:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial \tau} \sim \frac{4E^{\text{max}}}{cT_c} = \frac{4E^{\text{max}}}{\lambda_c}. \quad (4.16)$$

Из того же рисунка видно, что в отсутствие встречной волны изменение поля на расстояниях z порядка центральной длины волны λ_c можно ожидать значительно меньше самого поля и

$$\frac{\partial E}{\partial z} \ll \frac{E}{\lambda_c}. \quad (4.17)$$

Из оценок (4.16) и (4.17) ясно, что первым слагаемым по сравнению с третьим в уравнении (4.15) можно пренебречь и после интегрирования по τ получить укороченное уравнение вида

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{2\pi}{cn_0} \frac{\partial \vec{P}_{\text{ин}}}{\partial \tau} + \frac{2\pi}{cn_0} \frac{\partial \vec{P}_{\text{нел}}}{\partial \tau} = \frac{c}{2n_0} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} \vec{E} d\tau'. \quad (4.18)$$

Неравенство (4.17) называют **приближением медленно меняющегося профиля поля волны**. Оно предполагает, что профиль поля E в импульсе при прохождении им в среде расстояния порядка центральной длины волны излучения меняется слабо. На практике это справедливо для однонаправленной параксиальной волны даже в оптической среде с сильной дисперсией. Таким образом, физическая суть приближения медленно меняющегося профиля волны заключается в пренебрежении наличием или возникновением в среде встречного излучения, которое вместе с прямой волной может формировать стоячую волну со значительным изменением поля на расстоянии порядка центральной длины волны излучения.

При инерционной части поляризованности изотропной среды вида (3.23) и его нелинейном отклике в поле линейно поляризованного излучения вида (3.27) уравнение динамики поля излучения (4.18) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial z'} - \Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + gE^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{c}{2n_0} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} E d\tau', \quad (4.19)$$

где $\Gamma = -\frac{2\pi\chi_{\text{погл}}}{cn_0}$, $a = -\frac{2\pi\chi_{\text{дисп}}}{cn_0}$, $g = \frac{4\pi\chi^{(3)}}{cn_0}$.

В поле излучения с произвольной поляризацией и, соответственно, при нелинейном отклике (3.29) полевое уравнение (4.19) несколько усложнится, став векторным вида

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} - \Gamma \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial \tau^3} + g \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} \right) \vec{E} + \frac{g}{2} (\vec{E} \vec{E}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} = \frac{c}{2n_0} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} \vec{E} d\tau'. \quad (4.20)$$

При наличии комбинационно-активных колебательных состояний в среде и возможности двухфотонного резонанса линейно поляризованного многочастотного излучения с ними (смотри рисунок 2.4) уравнение (4.18) с учетом нелинейного поляризационного отклика (2.25–2.26) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial z'} - \Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial \tau} (R_v E) = \frac{c}{2n_0} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} E d\tau' \\ \frac{\partial^2 R_v}{\partial \tau^2} + \frac{2}{T_v} \frac{\partial R_v}{\partial \tau} + \omega_v^2 R_v = \gamma_v E^2 \end{cases}, \quad (4.21)$$

где ω_v , T_v и γ_v – параметры комбинационно-активного колебательного состояния оптической среды (смотри Лекцию 2).

Таким образом, уравнение (4.18) порождает множество уравнений динамики поля, различающихся учетом разных физических факторов взаимодействия излучения с веществом. Более подробно они рассмотрены в монографии [20].

Чтобы изучить особенности динамики поля в разных средах, например, описываемых уравнением (4.18) необходимо знать коэффициенты этого уравнения Γ , a , g , n_0 . Чтобы связать их с известными из справочной литературы данными для конкретной среды, запишем (4.18) в исходных координатах z и t

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{n_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + g E^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c}{2n_0} \int_{-\infty}^t \Delta_{\perp} E dt', \quad (4.22)$$

и найдем его простейшее решение в виде

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\omega} e^{i(kz - \omega t)} + \text{к.с.} \quad (4.23)$$

В качестве упражнения рекомендуем читателю самостоятельно показать, что выражение (4.23) является решением полевого уравнения (4.22) при зависимости волнового числа от частоты излучения вида

$$k = \frac{n_0}{c} \omega + i\Gamma \omega^2 + a\omega^3 + \frac{g\omega}{4} |\mathcal{E}_{\omega}|^2. \quad (4.24)$$

При выводе (4.24) пренебрегли явлением генерации третьей гармоники.

Поскольку показатель преломления среды n связан с волновым числом выражением $n = \frac{ck}{\omega}$, то из (4.24) следует соотношение

$$n = n_0 + i\Gamma c\omega + ac\omega^2 + \frac{gc}{4}|\mathcal{E}_\omega|^2. \quad (4.25)$$

Второе слагаемое в (4.25) описывает зависимость от частоты мнимой части показателя преломления, т.е. коэффициента поглощения, третье слагаемое – зависимость от частоты действительной части показателя преломления, а последнее – индуцированное излучением нелинейную часть показателя преломления

$$\Delta n_{\text{нел}} = \frac{1}{2}n_2|\mathcal{E}_\omega|^2, \quad (4.26)$$

где $n_2 = \frac{gc}{2}$ – коэффициент нелинейного показателя преломления среды (в СГС). Все эти характеристики для конкретных сред можно найти в справочниках.

Приведенные выше уравнения динамики непосредственно поля излучения особенно полезны при анализе эволюции волн из малого числа колебаний [20, 25, 26, 27]. При изучении нелинейной оптики квазимонохроматических импульсов с большим числом колебаний часто удобнее анализировать динамику огибающих этих импульсов. Рассмотрим методы описания распространения в нелинейной среде квазимонохроматических импульсов.

III. Приближение квазимонохроматического излучения

Уравнения динамики огибающих квазимонохроматических импульсов несложно получить из более общих полевых уравнений – например, из уравнения (4.19), в котором для простоты будем пренебрегать поглощением (часто рассматриваемый на практике случай), подстановкой

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r}, t)e^{i(k_0z - \omega_0t)} + \text{к.с.}, \quad (4.27)$$

где ω_0 – несущая частота импульса (4.27), $k_0 = \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c}$, $n(\omega)$ описывается линеаризованной формулой (4.25) (полагаем $\Gamma = 0$), для огибающей импульса получаем

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial t^3} - i\gamma_1 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial t} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = \frac{i}{2k_0} \Delta_\perp \mathcal{E}. \quad (4.28)$$

В (4.28) $V = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}^{-1}$, $\beta_n = \left(\frac{\partial^n k(\omega)}{\partial \omega^n} \right)_{\omega_0}$, $k = \frac{n_0}{c} \omega + a\omega^3$, $\gamma_1 = \frac{g\omega_0}{4}$, $\gamma_2 = \frac{g}{4}$.

Используемые приближения при выводе (4.28) подробнее можно посмотреть в монографии [20]. Они базируются на **приближении медленно меняющейся огибающей импульса**. Такое приближение близко по физическому смыслу рассмотренному выше приближению медленно меняющегося профиля поля излучения. Их суть – в рассмотрении только однонаправленной волны. Но теперь мало меняющейся на расстоянии порядка центральной длины волны излучения считается огибающая квазимонохроматического импульса.

Исторически уравнения динамики огибающих импульсов излучения, подобные (4.28), были обоснованы раньше уравнений динамики непосредственно его поля. На их основе рассмотрены очень многие явления нелинейной оптики [3, 28, 29]. Но уравнения динамики непосредственно поля излучения имеют обычно большую общность. Именно на их основе развивалась в последние годы нелинейная оптика волн из малого числа колебаний [20, 26, 27], что в значительной степени было связано с развитием техники импульсного терагерцового излучения, которое и представляет собой волны из малого числа колебаний [30].

Эти эффекты мы обсудим во второй части настоящего учебного пособия.

Упражнение 1: преобразовать уравнение (4.11) в переменных (4.14) к виду (4.15).

Упражнение 2: показать, что выражение (4.23) является решением полевого уравнения (4.22) при зависимости волнового числа от частоты излучения вида (4.24).

Вопросы для самоконтроля

1. Какое излучение называют параксиальным?
2. Какие приближения сделаны при выводе волнового уравнения
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$$
 из уравнений Максвелла?
3. Что такое «запаздывающее» время?
4. Сформулировать приближение медленно меняющегося профиля поля волны.
5. Сформулировать приближение медленно меняющейся огибающей импульса.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Дроздов, С.А. Козлов. Основы нелинейной оптики. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 69 с.
2. R.W. Boyd. Nonlinear optics. – Rochester: ELSEVIER, 2010. – 613 p.
3. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. – М: Наука, 1979. – 384 с.
4. А.М. Камчатнов. Теория нелинейных волн. – М.: Изд. дом ВШЭ, 2024. – 792 с.
5. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Учеб. пособие: для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. – 3-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. – 792 с.
6. С.И. Вавилов. Микроструктура света. – М.: Издательство АН СССР, 1950. – 190 с.
7. А.Н. Азаренков, Г.Б. Альтшулер, Н.Р. Белашенков, С.А. Козлов. Нелинейность показателя преломления лазерных твердотельных диэлектрических сред // Квантовая электроника. 1993. Т.20. N.8. С. 733-757.
8. A.N. Berkovsky, S.A. Kozlov, Y.A. Shpolyanskiy. Self-focusing of few-cycle light pulses in dielectric media // Phys. Rev. A. 2005. V.72. N.4. P. 043821-9.
9. С.Н. Власов, В.И. Таланов. Самофокусировка волн. – НН: ИПФ РАН, 1997. – 220 с.
10. L.F. Mollenauer, K. Smith. Demonstration of soliton transmission over more than 4000 km in fiber with loss periodically compensated by Raman gain // Opt. Lett. 1988. V.13. N.8. P. 675-677.
11. Х. Гиббс. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. – М.: Мир, 1988. – 520 с.
12. М.О. Скалли, М.С. Зубайри. Квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
13. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
14. K. Dolgaleva, D.V. Materikina, R.W. Boyd, S.A. Kozlov. Prediction of an extremely large nonlinear refractive index for crystals at terahertz frequencies // Phys. Rev. A. 2015. V. 92. № 2. P. 023809-1–023809-8.
15. М.С. Гусельников, М.О. Жукова, С.А. Козлов. Инерционность колебательного механизма гигантской нелинейности оптических материалов в терагерцовом спектральном диапазоне // Оптический журнал. 2022. Т. 89. № 7. С. 3-12.
16. A.N. Tsypkin, M.V. Melnik, M.O. Zhukova, et al. High Kerr nonlinearity

- of water in the THz spectral range // Opt. Exp. 2019. V. 27. № 8. P. 10419–10425.
17. A.N. Tsyupkin, M.V. Melnik, M.O. Zhukova, et al. Giant third-order nonlinear response of liquids at Terahertz frequencies // Phys. Rev. Appl. 2021. V. 15. № 5. P. 054009.
 18. С.А. Козлов. О классической теории дисперсии высокоинтенсивного света // Оптика и спектроскопия. 1995. Т. 79. № 2. С. 290-292.
 19. С.А. Козлов. Оптическая физика. Часть 2. Полуклассический подход к описанию явлений оптической физики. – СПб.: Университет ИТМО, 2024. – 55 с.
 20. С.А. Козлов, В.В. Самарцев. Основы фемтосекундной оптики. – М.: Физматлит, 2009. – 292 с.
 21. Д.Н. Клышко. Физические основы квантовой электроники. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
 22. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Пер. с нем. – 4-е изд., испр. – М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.
 23. И.Р. Арцер, А.А. Дроздов, С.А. Козлов. Оптическая физика. Часть 1. Классический подход к описанию явлений оптической физики. – СПб.: Университет ИТМО, 2024. – 59 с.
 24. Г. Агравал. Применение нелинейной волоконной оптики. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 592 с.
 25. Э.М. Беленов, Назаркин А.В. О некоторых решениях уравнений нелинейной оптики без приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. № 5. С. 252-255.
 26. А.И. Маймистов. Некоторые модели распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в нелинейной среде // Квантовая электроника. 2000. Т.30. № 4. С. 287-304.
 27. С.В. Сазонов. К нелинейной оптике предельно коротких импульсов // Оптика и спектроскопия. 2022. Т.130. №12. С. 1846-1855.
 28. С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
 29. Г.Агравал. Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
 30. Си-Чен Чжан, Джингджю Шю. Терагерцовая фотоника. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. – 334 с.

Дроздов Аркадий Анатольевич
Козлов Сергей Аркадьевич

**НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 1.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ И МАТЕРИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А