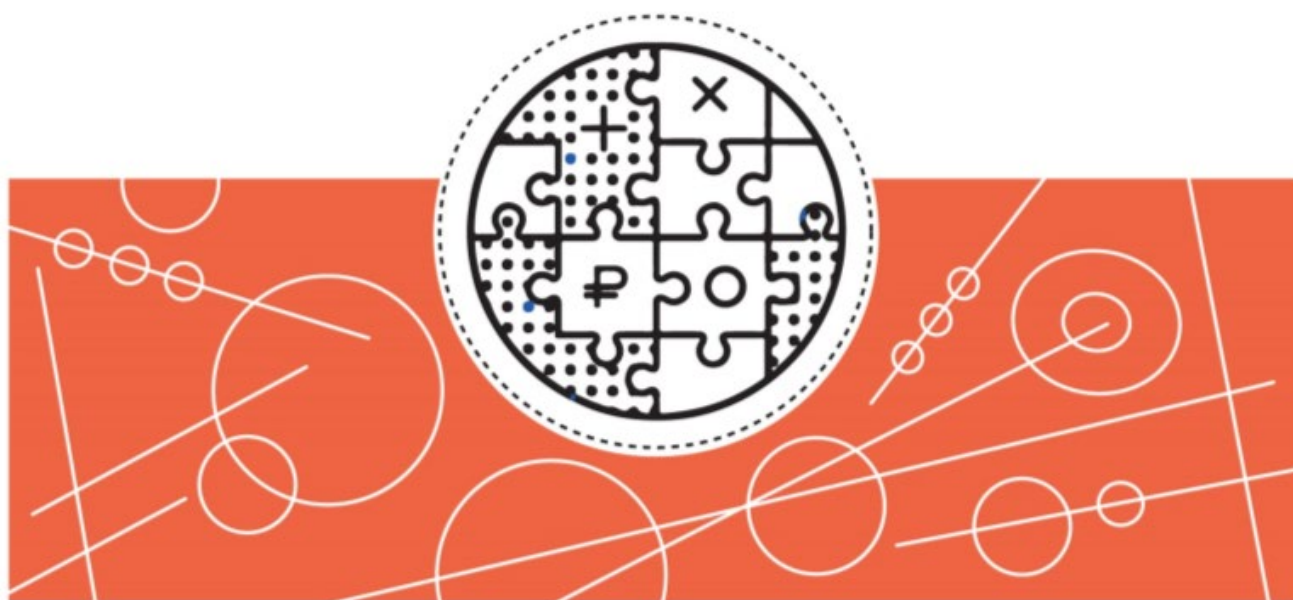


ІІТМО

**А.И. ПОПОВ, И.Ю. ПОПОВ,
И.В. БЛИНОВА**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ЧАСТЬ 3. РЯДЫ**



**Санкт-Петербург
2026**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов, И.В. Блинова
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ЧАСТЬ 3. РЯДЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 02.03.03, 03.03.02, 04.03.01, 05.03.06,
09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01,
12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 15.03.04, 15.03.06,
16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05,
38.03.01, 38.03.05

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

Попов А.И., Попов И.Ю., Блинова И.В. Математический анализ. Часть 3.
Ряды. СПб: Университет ИТМО, 2026. – 136 с.

Рецензент:

Уздин Валерий Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор") физического факультета, Университет ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. В пособии рассмотрены следующие темы: «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Ряды Фурье»

ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2026

© Попов А.И., Попов И.Ю., Блинова И.В., 2026

Содержание

1 Введение	5
2 Числовые ряды	7
2.1 Основные понятия	7
2.2 Признаки сходимости положительных рядов	16
2.3 Сходимость произвольных рядов	28
2.4 Свойства сходящихся рядов	39
3 Функциональные ряды	49
3.1 Основные понятия	49
3.2 Равномерная сходимость	50
3.3 Признаки равномерной сходимости	55
3.4 Функциональные свойства суммы ряда	58
3.5 Степенные ряды	66
3.6 Ряд Тейлора	80
3.7 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена	82
4 Ряды Фурье	94
4.1 Введение	94
4.2 Ортонормированные системы функций	95
4.3 Ряды Фурье в евклидовом пространстве	99
4.4 Тригонометрические ряды Фурье	107
4.5 Сходимость рядов Фурье. Теорема Дирихле	109
4.6 Изменение сегмента разложения	110
4.7 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	113
4.8 Разложение в ряд Фурье функций на отрезке $[0, \pi]$	117
4.9 Разложение функции в показательный ряд Фурье	122
4.10 Интеграл Фурье	123
4.11 Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье	126

4

5 Заключение 129

6 Контрольные вопросы 132

1 Введение

Тихо, тихо ползи,
Улитка, по склону Фудзи,
Вверх, до самых высот!
Кобаяси Исса

У многих в детстве возникает желание дойти до горизонта, а у некоторых оно не пропадает всю жизнь. Но это никак не получается. Горизонт всё отодвигается и отодвигается. Древнегреческие философы рассуждали о том, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, ибо, когда он добежит до места, где она была в момент его старта, черепаха уже переползет в другое место. И так далее до бесконечности. Получается, что не догнать, но ведь догоняет! Как же разрешить этот парадокс? Ко времени бега Ахиллеса добавляются всё новые и новые временные интервалы, и этих слагаемых оказывается бесконечно много. Поэтому для вычисления времени, за которое Ахиллес догонит черепаху, нужно найти сумму бесконечного числа слагаемых. Это и есть ряд. Правда, надо ещё определить, а как же эту сумму находить. Тут мы наблюдаем редчайший в математике случай, когда понятие (ряд) появляется раньше, чем его определение. Поэтому и терминология в данном разделе математики несколько необычная: если эту сумму можно вычислить, то говорят, что ряд сходится, а если нельзя, то не говорят, что ряд не существует, а говорят, что ряд расходится. Понимание того, как следует определить сходимость ряда, пришло к математикам не сразу. Даже великий Леонард Эйлер считал, что ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ следует считать сходящимся, и только позже поняли, что так не стоит поступать. А когда, наконец, теория рядов превратилась в стройную математическую науку, она нашла применение не только в различных областях математики, но и во многих других науках. Эту теорию мы и изучим в данном курсе. Рассмотрим, конечно, и свойства рядов, которые

иногда весьма необычны. Мы, например, с детства знаем, что от перестановки слагаемых сумма не меняется. Но это для конечной суммы. А вот с рядами уже не так. Может встретиться такой ряд, что если задать произвольное число, то можно так переставить слагаемые в ряде, что его сумма будет равна в точности этому числу. И это не фокус, а строгая математическая теорема. А сколько интересного возникает, если искать суммы не чисел, а функций! Тут появляются функциональные ряды, самые известные из которых – это ряды Тейлора и Фурье. И применений у них ещё больше, чем у числовых. Ньютон, например, решая дифференциальные уравнения, использовал именно ряды, представляющие функции, а не сами логарифмы или экспоненты. Да и любой из вас, если задаст компьютеру, или даже простому калькулятору, задание вычислить $\sin 1$, то столкнется с рядами, ибо компьютер не будет строить прямоугольный треугольник и находить отношение катета к гипотенузе, а сосчитает сумму ряда. И чтобы понимать, как это работает и где можно применить, нужна теория рядов, которой и посвящен данный курс.

2 Числовые ряды

2.1 Основные понятия

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел (вещественных или комплексных):

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (2.1)$$

Составленный из этих чисел символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.2)$$

называется рядом, а сами числа (2.1) – членами ряда. Число a_n называют общим членом ряда.

Замечание

Напомним, что последовательностью называют пронумерованное множество чисел.

Понятие ряда вводится для того, чтобы определить сумму бесконечного числа слагаемых. Для этого составим суммы, последовательно складывая члены ряда:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \\ A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти суммы называются частичными суммами ряда.

Определение

Ряд (2.2) называется сходящимся, если существует конечный предел по-

следовательности частичных сумм (2.3):

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (2.4)$$

Число A называют суммой ряда и пишут:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.5)$$

Если ряд не является сходящимся, то он расходится. Расходимость ряда означает, что предел последовательности частичных сумм либо не существует, либо равен бесконечности.

Определение

Если в ряде отбросить первые m членов, то выражение $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ называется остатком ряда после m -го члена.

Примеры

1) Простейший пример ряда – сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots, \quad \text{где } a > 0. \quad (2.6)$$

Её частичная сумма известна:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1. \quad (2.7)$$

Если $|q| < 1$, то:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{то есть ряд сходится.} \quad (2.8)$$

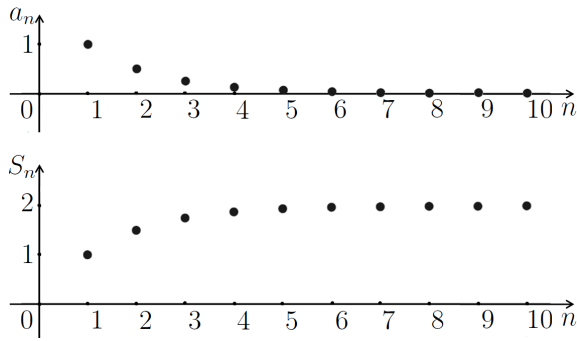


Рис. 1: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = 1/2$

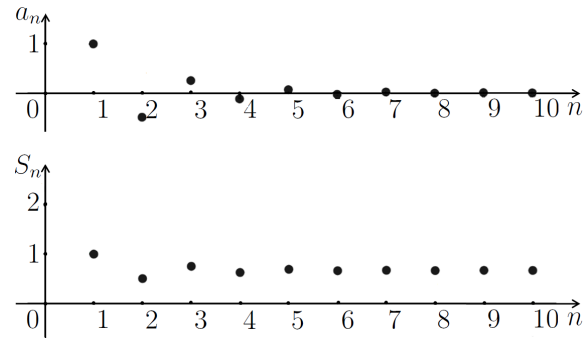


Рис. 2: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = -1/2$

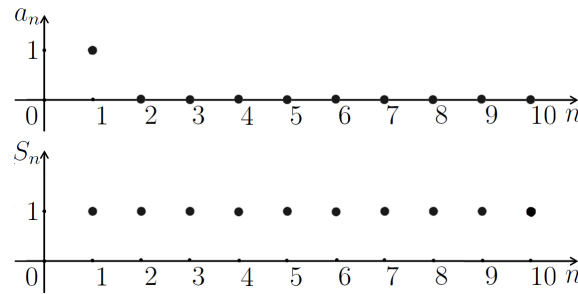


Рис. 3: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = 0$

При $q > 1$ получим:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

При $q = 1$ частичная сумма S_n будет представлять собой следующую сумму:

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ штук}} = na.$$

Соответственно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty.$$

При $q < -1$ подпоследовательность четных и нечетных частичных сумм имеют разные пределы:

$$\begin{cases} S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \\ S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

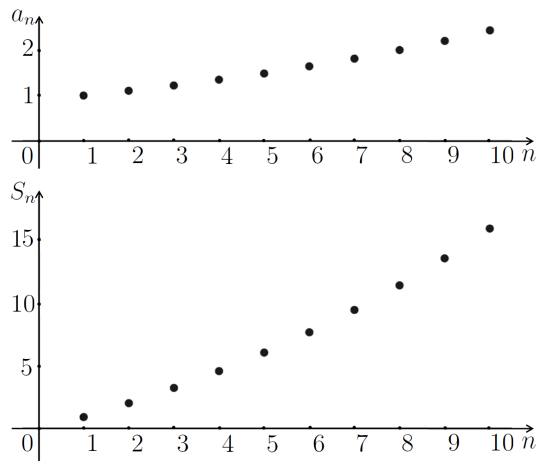


Рис. 4: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = 1.1$

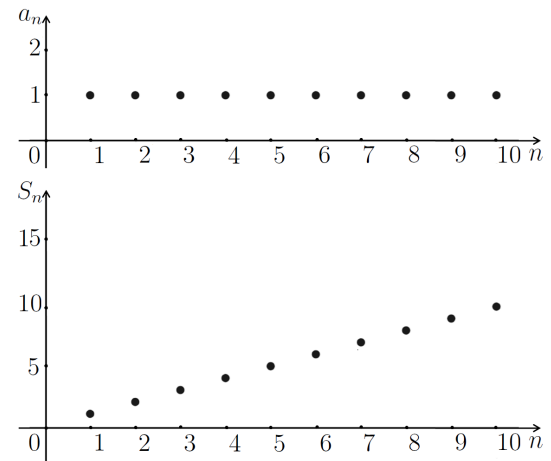


Рис. 5: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = 1$

Аналогично для $q = -1$:

$$\begin{cases} S_{2n} = 0, \\ S_{2n+1} = a. \end{cases}$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ также не существует.

Итак, мы получили эталонный ряд, сходимость которого известна при всех значениях параметра q :

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} : \begin{cases} |q| < 1 & \text{— ряд сходится, } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \\ |q| \geq 1 & \text{— ряд расходится.} \end{cases} \quad (2.9)$$

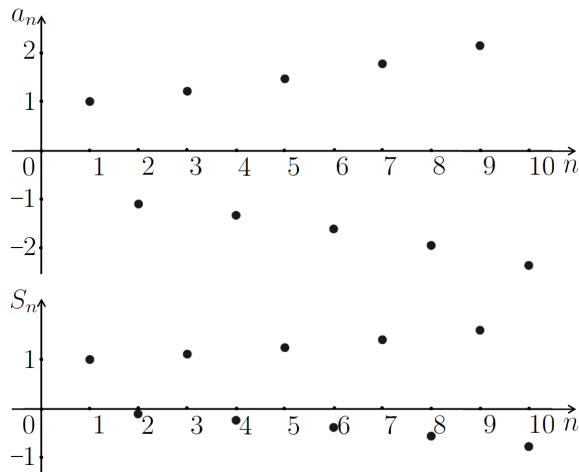


Рис. 6: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = -1.1$

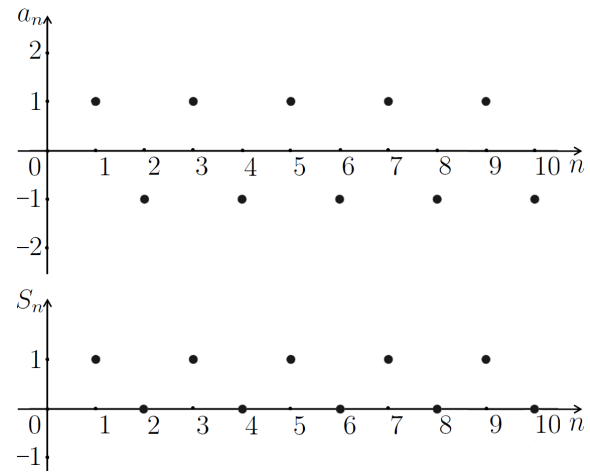


Рис. 7: Поведение общего члена a_n и частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $a = 1$ и $q = -1$

2) Рассмотрим мяч, падающий с высоты 5 метров. При каждом ударе о землю он теряет $\frac{3}{4}$ своей энергии. Сколько времени мяч будет прыгать?

Потенциальная энергия мяча:

$$E = mgh,$$

где m – масса мяча, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, h – высота.

После каждого удара о землю у мяча остается только четверть энергии. Следовательно, каждый следующий раз мяч будет подпрыгивать на четверть высоты от высоты предыдущего подскока. Согласно закону равноускоренного движения:

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, время падения мяча с высоты h :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Время между двумя ударами мяча о землю равно удвоенному времени падения, так как при каждом подскоке время движения вверх равно

времени движения вниз. Найдем общее время движения мяча:

$$\begin{aligned}
 T &= \underbrace{\sqrt{\frac{2h}{g}}}_{\text{нач. падение}} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4}}{g}}}_{\text{1-й подскок}} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4^2}}{g}}}_{\text{2-й подскок}} + \dots + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4^n}}{g}}}_{\text{n-й подскок}} + \dots = \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots = \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_S \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\sqrt{\frac{2h}{g}}.
 \end{aligned}$$

$$T = 3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = 3 \text{ секунды.}$$

3) Проверим на сходимость следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n).$$

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n.$$

$$S_n = -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1).$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

То есть ряд расходится.

На практике частичную сумму часто принимают за приближенное значение суммы ряда. Однако такое приближение возможно только для сходящихся рядов. Поэтому большой интерес представляет вопрос о сходимости или расходимости числовых рядов.

Теорема 1 (Необходимое условие сходимости)

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(2.10)

Доказательство:

$$a_n = A_n - A_{n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

■

Замечание

Если необходимое условие сходимости нарушено, то ряд расходится. Таким образом, нарушение условия (2.10) является достаточным условием расходимости ряда.

Отметим, что следствие в теореме 1 есть только в одну сторону. Если общий член ряда стремится к нулю, то отсюда не следует, что ряд сходится.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ расходится несмотря на то, что предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Простейшие свойства сходящихся рядов

1) Если ряд сходится, то сходится и любой из его остатков. Обратно, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.

Доказательство:

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.11)$$

Частичные суммы этого ряда:

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (2.12)$$

Остаток ряда (2.11) после m -го члена имеет вид:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (2.13)$$

Зафиксируем m и обозначим k -ю частичную сумму ряда (2.13) через $\tilde{A}_k$:

$$\tilde{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}. \quad (2.14)$$

Тогда, очевидно, k -ая частичная сумма остатка примет вид:

$$\tilde{A}_k = A_{m+k} - A_m. \quad (2.15)$$

Остаток ряда сходится, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\tilde{A}_k$. Найдем его.

$$\tilde{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{A}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_{m+k} - A_m) = A - A_m, \quad (2.16)$$

то есть сходится ряд (2.13).

Докажем в обратную сторону.

$$A_{m+k} = A_m + \tilde{A}_k. \quad (2.17)$$

A_m – конечное число, так как m фиксировано. Следовательно, если существует конечный предел $\tilde{A}_k$, то будет существовать и конечный предел A_{m+k} :

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{m+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_m + \tilde{A}_k) = A_m + \tilde{A}, \quad (2.18)$$

то есть сходится ряд (2.11).

■

Сумму ряда (2.13), если он сходится, обозначим вместо $\tilde{A}$ символом α_m , указывая индексом m , после какого члена берётся остаток.

Тогда формулы (2.16) и (2.18) перепишутся следующим образом:

$$\alpha_m = A - A_m, \quad A = A_m + \alpha_m. \quad (2.19)$$

Если увеличивать m до бесконечности, то $A_m \rightarrow A$, а $\alpha_m \rightarrow 0$. Итак, мы приходим к следующему свойству:

2) Если ряд сходится, то сумма α_m его остатка после m -го члена с возрастанием m стремится к нулю.

3) Если члены сходящегося ряда (2.2) умножить на одно и то же число c , то его сходимости не нарушится (а сумма лишь умножится на c).

Доказательство:

Частичная сумма A'_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$ равна:

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n.$$

Так как ряд сходится, то выполнено:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cA_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cA.$$

■

4) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ также сходится.

Доказательство:

Из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что существуют конечные пределы их частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B,$$

что означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

■

Замечание

1) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то это не означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ расходится. В качестве примера можно рассмотреть 2 расходящихся ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 - 1 - 1 - \dots$$

Их сумма равна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0,$$

то есть ряд сходится.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ будет расходящимся.

2.2 Признаки сходимости положительных рядов

Определение

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.20)$$

называется положительным, если все его члены $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Теорема 2 (о сумме положительного ряда)

Положительный ряд всегда имеет сумму (конечную или бесконечную).

Доказательство:

Сравним частичные суммы A_{N+1} и A_N ряда (2.20):

$$A_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + a_{N+1} \geq A_N,$$

то есть $\{A_N\}$ – возрастающая последовательность. Согласно свойствам монотонных последовательностей, последовательность частичных сумм $\{A_N\}$ имеет предел: конечный, если она ограничена сверху, и бесконечный в противном случае.

Но $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N$ и есть сумма ряда.



Замечание

Таким образом, для проверки сходимости положительного ряда достаточно доказать ограниченность сверху его частичных сумм.

Теорема 3 (Признак сравнения рядов)

Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (\text{ряд } A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (\text{ряд } B)$$

Пусть для всех n , начиная с некоторого номера N , выполняется неравенство: $a_n \leq b_n$.

Тогда:

- 1) Из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) .
- 2) Из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B) .

Доказательство:

Поскольку отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (смотри свойство 1 сходящихся рядов), мы можем считать, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для частичных сумм A_n и B_n рядов (A) и (B) соответственно будет выполнено:

$$A_n \leq B_n. \quad (2.21)$$

Пусть ряд (B) сходится. Тогда последовательность частичных сумм B_n ограничена:

$$B_n \leq L, \quad \text{где } L = \text{const}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Сравниваем формулы (2.21) и (2.22), получаем:

$$A_n \leq L, \quad (2.23)$$

то есть монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность A_n имеет конечный предел. Следовательно, ряд (A) сходится.

Докажем второе утверждение.

Пусть ряд (A) расходится. Тогда его частичные суммы неограниченно возрастают. Следовательно, согласно формуле (2.21), будут неограниченно возрастать частичные суммы ряда (B) , что влечет за собой его расходимость.

■

Иногда на практике удобнее использовать другую теорему:

Теорема 4 (Предельный признак сравнения)

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, то:

- 1) При $K < \infty$ из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) ;
- 2) При $K > 0$ из расходимости ряда (B) следует расходимость ряда (A) ;
- 3) При $0 < K < \infty$ ряды (A) и (B) либо оба сходятся, либо оба расходятся (то есть ведут себя одинаково).

Доказательство:

Согласно определению предела:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : \left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Leftrightarrow b_n(K - \varepsilon) < a_n < b_n(K + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.24)$$

- 1) Пусть ряд (B) сходится и $K < \infty$. Тогда будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon)b_n$, полученный умножением членов ряда (B) на постоянное число $K + \varepsilon$. По теореме 3 в силу правой части неравенства (2.24) мы получим, что сходится ряд (A) .

- 2) Пусть ряд (B) расходится и $K > 0$. Возьмем такое ε , что $K - \varepsilon > 0$.

Из расходимости ряда (B) следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (K - \varepsilon) b_n$.

Тогда по теореме 3 и левой части неравенства (2.24): $b_n(K - \varepsilon) < a_n$ мы получим, что ряд (A) также расходится.

3) Третье утверждение теоремы представляет собой комбинацию утверждений 1 и 2, то есть его мы доказали автоматически. ■

Примеры

Исследуем ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$.

По признаку сравнения: $\frac{1}{2^n n} < \frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ тоже сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Воспользуемся предельным признаком сравнения.

Сравним ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$. Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ сходится (смотри пример 3, стр. 12). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$ (так как это замечательный предел). В пределе мы получили конечное ненулевое число. Следовательно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ ведут себя одинаково, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Замечание

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим рядом.

Замечание

Для использования предельного признака сравнения полезно знать эквивалентные бесконечно малые величины, предел отношения которых равен единице.

Эквивалентные бесконечно малые величины при $x \rightarrow 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad (2.25)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (2.26)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \text{где } a > 0, \ a \neq 1, \quad (2.27)$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x. \quad (2.28)$$

Теорема 5 (Признак Даламбера)

Если отношение последующего члена ряда к предыдущему $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, начиная с некоторого номера n , удовлетворяет неравенству:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad (2.29)$$

где число q не зависит от n , то ряд (2.20) сходится.

Если же, начиная с некоторого номера n , имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad (2.30)$$

то ряд расходится.

Доказательство:

Поскольку отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, можно считать, что неравенства (2.29) или (2.30) выполняются при всех значениях n .

Применяя последовательно неравенство (2.29) к членам ряда, получим:

$$a_n \leq a_{n-1} \cdot q \leq a_{n-2} \cdot q^2 \leq \dots \leq a_1 q^{n-1}, \quad (2.31)$$

то есть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \quad \text{где } 0 < q < 1.$$

По признаку сравнения из сходимости прогрессии получаем сходимость ряда (2.20).

Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то $a_{n+1} \geq a_n \forall n$, то есть члены положительного ряда не убывают, а значит, нарушено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

■

Теорема 6 (Предельный признак Даламбера)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (2.32)$$

тогда:

- 1) При $q < 1$ ряд сходится.
- 2) При $q > 1$ ряд расходится.
- 3) При $q = 1$ нет информации о сходимости (признак Даламбера ничего не дает).

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_n(q - \varepsilon) < a_{n+1} < a_n(q + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.33)$$

- 1) Пусть $q < 1$. Выберем $\varepsilon < 1 - q$. Воспользуемся правой частью неравенства (2.33):

$$a_{n+1} < a_n(q + \varepsilon) \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \quad (\text{в силу выбора } \varepsilon).$$

Тогда выполнены условия признака Даламбера (формула (2.29)), то есть ряд сходится.

- 2) Пусть $q > 1$. Выберем $\varepsilon = q - 1$. Воспользуемся левой частью неравенства (2.33):

$$a_n(q - \varepsilon) < a_{n+1} \Rightarrow / \varepsilon = q - 1 / \Rightarrow a_n < a_{n+1},$$

то есть члены положительного ряда неограниченно возрастают, а значит, нарушено необходимое условие сходимости. Следовательно, ряд расходится.

■

Примеры

Исследуем на сходимость следующие ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

По признаку Даламбера (предельному):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Можно доказать проще:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} > 1 \neq 0,$$

следовательно, нарушено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

Теорема 7 (Радикальный признак Коши)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$,

то ряд сходится. Если же, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство:

Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость. Рассмотрим остаток ряда, начиная с номера n_0 , для которого выполнено неравенство:

$$\forall n > n_0 : \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq q^n < 1.$$

По признаку сравнения (теорема 3) из сходимости $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ при $q < 1$ следует сходимость $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, а значит, и сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если же $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то $a_n \geq 1$, то есть $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости.

■

Теорема 8 (Предельная форма радикального признака Коши)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{2.34}$$

тогда:

- 1) При $q < 1$ ряд сходится;
- 2) При $q > 1$ ряд расходится;
- 3) При $q = 1$ нет информации о сходимости (признак Коши не работает).

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N : \quad |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon. \tag{2.35}$$

1) Пусть $q < 1$. Выбираем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Воспользуемся правой частью неравенства (2.35):

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \Leftrightarrow a_n < (q + \varepsilon)^n < 1 \quad (\text{в силу выбора } \varepsilon).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (q + \varepsilon)^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Тогда по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

2) Пусть $q > 1$. Выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$. Воспользуемся левой частью неравенства (2.35):

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \Leftrightarrow a_n > (q - \varepsilon)^n > 1 \quad (\text{в силу выбора } \varepsilon).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (q - \varepsilon)^n$ расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости. Тогда по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.

■

Пример

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Воспользуемся предельной формой радикального признака Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Теорема 9 (Интегральный признак Коши)

Пусть ряд имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad (2.36)$$

где $f(n)$ – значение функции $f(x)$ при $x = n$, определенной при $x \geq 1$, непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Тогда ряд сходится, если сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Доказательство:

$f(x)$ – монотонно убывающая функция, следовательно, при $k \leq x \leq k+1$ будет выполнено:

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = a_k. \quad (2.37)$$

Проинтегрируем по x неравенство (2.37) в пределах от k до $k+1$:

$$\underbrace{\int_k^{k+1} a_{k+1} dx}_{\parallel a_{k+1}} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \underbrace{\int_k^{k+1} a_k dx}_{\parallel a_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Просуммируем все неравенства (2.38) по k от 1 до n :

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n a_k. \quad (2.39)$$

Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_1^n f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Тогда по левой части неравенства (2.39) получим:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty,$$

то есть частичные суммы ряда ограничены. Следовательно, ряд сходится (смотри замечание к теореме 2).

Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_1^n f(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Тогда по правой части неравенства (2.39) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^n a_k$ не ограничены. Последовательность частичных сумм не имеет конечного предела. Следовательно, ряд расходится.



Геометрическая интерпретация интегрального признака Коши

Рассмотрим график положительной монотонно убывающей функции $f(x)$ на $[1, \infty)$. Геометрический смысл интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ – это площадь области под кривой $f(x)$.

Разобьем $[1, \infty)$ на отрезки длины 1. На отрезке $[1, 2]$ построим два прямоугольника:

первый – высотой $f(1)$ (назовем его “выходящим”),

второй – высотой $f(2)$ (назовем его “входящим”).

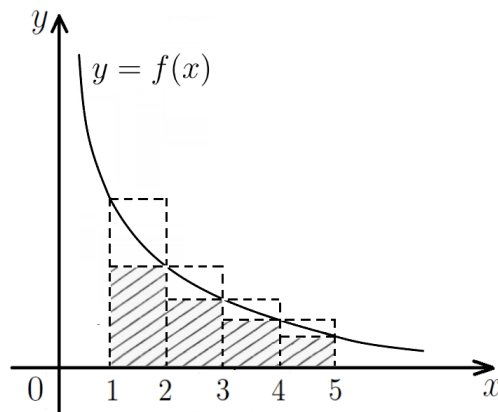


Рис. 8: Геометрическая интерпретация интегрального признака Коши

Площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[1, 2]$ заключена между площадями входящего и исходящего прямоугольников. То же самое сделаем для всех отрезков. На отрезке $[k, k + 1]$ входящий прямоугольник имеет площадь, равную $a_{k+1} = f(k + 1)$, а исходящий – площадь $a_k = f(k)$. Площадь под кривой $y = f(x)$ на $[1, \infty)$ заключена между суммой площадей входящих прямоугольников и суммой площадей исходящих прямоугольников:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (2.40)$$

что и позволяет сравнивать сходимости ряда и интеграла.

Примеры

Исследуем на сходимость следующие ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

По интегральному признаку Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |b| - \ln 1) = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, ряд расходится.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \neq 1.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1, \\ \infty, & s < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s < 1$.

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, ряд тоже сходится.

Замечание

В примерах 1 и 2 мы изучили сходимость обобщенного гармонического ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} \text{сходится при } s > 1, \\ \text{расходится при } s \leq 1. \end{cases}$$

Этот ряд можно использовать как эталонный в признаках сравнения.

2.3 Сходимость произвольных рядов

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с произвольными членами (не обязательно положительными). Так как сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, то можно сформулировать критерий сходимости ряда на основании принципа сходимости последовательности.

Теорема 10 (Принцип сходимости Больцано-Коши)

Для того чтобы ряд (2.2) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : |A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon, \\ m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

Доказательство:

Здесь мы воспользуемся критерием Коши для сходимости числовой последовательности. Напомним его. Последовательность $\{b_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : |b_{n+m} - b_n| < \varepsilon \quad \forall m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

Применим критерий Коши к последовательности частичных сумм $\{A_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : |A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon, \\ m = 1, 2, 3, \dots$$

Мы получили формулу (2.41), что и доказывает теорему.

■

Замечание

Если в формуле (2.41) взять $m = 1$, то мы получим необходимое условие сходимости.

Определение

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей членов этого ряда:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2.43)$$

Теорема 11 (о сходимости абсолютно сходящегося ряда)

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство:

Согласно принципу Больцано-Коши, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то будет выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \forall n > N :$$

$$|A_{n+m} - A_n| = \left| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| \right| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.44)$$

Так как $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$, то для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет выполнено неравенство:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.45)$$

что по принципу Больцано-Коши означает сходимость ряда.

**Определение**

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно (неабсолютно) сходящимся.

Пример

Исследуем на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{16}}{n^2}$.

Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2}$.

$\frac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2}$ тоже сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{16}}{n^2}$ сходится абсолютно, то есть сходится.

Определение

Знакопередающимися называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

Знакопередающийся ряд обычно записывают так, чтобы знаки членов были выявлены:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad \text{где } a_n > 0. \quad (2.46)$$

Теорема 12 (Признак Лейбница)

Пусть члены знакопередающегося ряда (2.46) монотонно убывают по модулю:

$$a_{n+1} < a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47)$$

и стремятся к нулю (выполнено необходимое условие сходимости):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (2.48)$$

Тогда ряд (2.46) сходится, причем его сумма положительна и не превосходит первого члена:

$$0 < S < a_1. \quad (2.49)$$

Доказательство:

Частичную сумму четного порядка S_{2n} можно записать в виде:

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\underset{\vee}{0}} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\underset{\vee}{0}} + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\underset{\vee}{0}} > a_1 - a_2 > 0. \quad (2.50)$$

Так как каждая скобка есть положительное число, то сумма S_{2n} монотонно возрастает с ростом n . С другой стороны:

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\underset{\vee}{0}} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\underset{\vee}{0}} - a_{2n} < a_1 - (a_2 - a_3) < a_1, \quad (2.51)$$

то есть сумма S_{2n} ограничена сверху. Но монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность S_{2n} имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S. \quad (2.52)$$

Рассмотрим частичную сумму нечетного порядка S_{2n+1} . Очевидно, что для нее выполнено:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}. \quad (2.53)$$

Сделаем предельный переход в уравнении (2.53) при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S. \quad (2.54)$$

Из формул (2.52) и (2.54) получаем, что S является суммой ряда и ряд сходится.

Теперь докажем, что $0 < S < a_1$. Сделаем предельный переход в формуле (2.50) при $n \rightarrow \infty$:

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}}_{\parallel S} \geq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_2)}_{\parallel a_1 - a_2} \Rightarrow S \geq a_1 - a_2 > 0. \quad (2.55)$$

Сделаем предельный переход в формуле (2.51) при $n \rightarrow \infty$:

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}}_{\parallel S} \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - (a_2 - a_3))}_{\parallel a_1 - (a_2 - a_3)} \Rightarrow S \leq a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\check{0}} < a_1. \quad (2.56)$$

Из формул (2.55) и (2.56) получается, что $0 < S < a_1$.

■

Следствие

Признак Лейбница позволяет дать весьма простую и удобную оценку для остатка знакопередающегося ряда (который и сам является знакопередающимся рядом). А именно, остаток ряда лейбницевого типа имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Это следствие часто используют при приближенных вычислениях с помощью рядов.

Пример

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Ряд из модулей представляет собой расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, следовательно, ряд сходится условно.

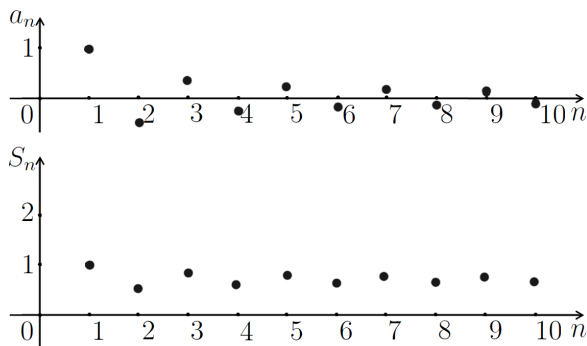


Рис. 9: Общий член и частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

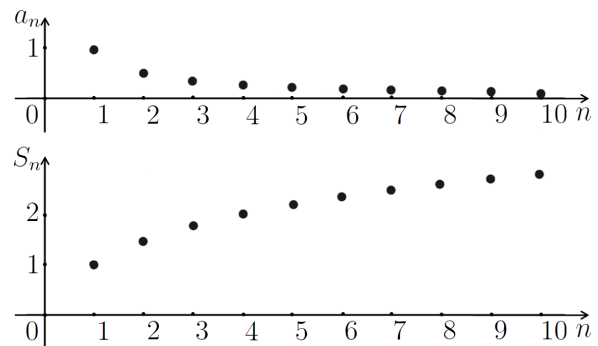


Рис. 10: Общий член и частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $a_n = \frac{1}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Преобразование Абеля

Часто приходится иметь дело с суммами парных произведений вида

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m. \quad (2.57)$$

Во многих случаях оказывается полезным следующее элементарное преобразование, указанное Абелем. Рассмотрим суммы:

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \dots, \quad B_m = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m.$$

Тогда, выражая множители β_i через эти суммы,

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \quad \dots, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

сумму S можно написать в виде:

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \dots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Если раскрыть скобки и иначе сгруппировать члены, то получим окончательную формулу:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Замечание

Если переписать эту сумму в виде

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i, \quad (2.59)$$

то станет ясно, что эта формула для конечных сумм является аналогом формулы интегрирования по частям для интегралов: дифференциал здесь заменен разностью, а интеграл – суммой.

Основываясь на формуле (2.58), выведем теперь следующую оценку для сумм указанного вида:

Лемма об оценке суммы с помощью преобразования Абеля

Если множители α_i не возрастают (или не убывают), а суммы B_i все ограничены по абсолютной величине числом L :

$$|B_i| \leq L \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (2.60)$$

то

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \quad (2.61)$$

Доказательство:

Действительно, так как все разности в (2.58) одного знака (пусть для

определенности $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$), то $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ и выполнено:

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L + |\alpha_m| \cdot L = \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + \alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot L + |\alpha_m| \cdot L = \\ &= L((\alpha_1 - \alpha_m) + |\alpha_m|) \leq L(|\alpha_1| + |\alpha_m|) + L|\alpha_m| = L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \end{aligned}$$

■

Замечание

Нетрудно увидеть, что если множители α_i не возрастают и положительны, то оценку можно упростить:

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot \alpha_1. \quad (2.62)$$

Воспользуемся полученными оценками для вывода критериев сходимости, более общих, чем установленный выше признак Лейбница.

Признаки Абеля и Дирихле

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots, \quad (2.63)$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две последовательности вещественных чисел. Следующие предположения относительно каждой из этих последовательностей обеспечивают сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Теорема 13 (Признак Абеля)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2.64)$$

сходится, а числа a_n образуют монотонную и ограниченную последовательность:

$$|a_k| \leq K \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.65)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Теорема 14 (Признак Дирихле)

Если частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ в совокупности ограничены:

$$|B_m| \leq M \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.66)$$

а числа a_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (2.67)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство признаков Абеля и Дирихле:

В обоих случаях для установления сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ мы воспользуемся принципом сходимости Больцано-Коши (теорема 10). Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^m a_{n+i} b_{n+i}.$$

Эта сумма будет иметь вид (2.57), если положить $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$.

Оценим эту сумму с помощью леммы об оценке суммы.

Согласно условию признака Абеля, ряд (2.64) сходится. Значит, по принципу сходимости Больцано-Коши, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что при $n > N$ неравенство

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

будет выполняться для любого числа $p \in \mathbb{N}$. Следовательно, за число L , упоминавшееся в лемме, можно принять ε . Тогда, согласно лемме об

оценке суммы, при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ будет выполнено:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq \text{формула (2.65)} \leq 3K \cdot \varepsilon,$$

что и доказывает сходимость ряда (2.63).

Теперь докажем признак Дирихле. По условию (2.67):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |a_n| < \varepsilon. \quad (2.68)$$

Кроме того, очевидно,

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq \text{формула (2.66)} \leq 2M,$$

и можно в лемме положить $L = 2M$.

Тогда, при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2M \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq \text{формула (2.68)} \leq 6M \cdot \varepsilon,$$

что и доказывает сходимость ряда (2.63).

■

Замечание

Признак Абеля вытекает из признака Дирихле. В предположении признака Абеля последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена. Значит она имеет некоторый конечный предел a . Если переписать ряд (2.63) в виде суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то второй из них сходится по предположению признака Абеля, а к первому применим признак Дирихле (выполнены оба условия: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$, частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, так как он сходится).

Пример

Выясним, при каких значениях параметра x сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

При $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, для каждого n выполняется $\sin nx = 0$. Следовательно, данный ряд является рядом из нулей и сходится.

Пусть теперь $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для применения признака Дирихле докажем ограниченность частичных сумм последовательности $\sin nx$:

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N e^{inx} \right|.$$

Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \left(e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right) \right|.$$

Преобразуем знаменатель, умножив числитель и знаменатель дроби на $e^{-\frac{ix}{2}}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \right|.$$

Так как

$$e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}} = -2i \sin \frac{x}{2},$$

получаем

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \right|.$$

Представим комплексные экспоненты в тригонометрической форме:

$$e^{\frac{ix}{2}} = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}, \quad e^{i(N+\frac{1}{2})x} = \cos \left(N + \frac{1}{2} \right) x + i \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) x.$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \frac{\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} - \cos \left(N + \frac{1}{2}\right) x - i \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) x}{-2i \sin \frac{x}{2}} \right|.$$

Домножим числитель и знаменатель на i :

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \operatorname{Im} \frac{i \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - i \cos \left(N + \frac{1}{2}\right) x + \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right|.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(N + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right|.$$

Так как $x \neq \pi k$, то $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Кроме того, числитель ограничен, поскольку значения косинуса принадлежат отрезку $[-1; 1]$. Поэтому существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| \leq M, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим последовательность

$$b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}.$$

Последовательность b_n положительна, монотонно убывает, так как $n^2 + 1$ возрастает при увеличении n , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}} = 0.$$

Следовательно, по признаку Дирихле ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2 + 1}} \text{ сходится при всех } x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: ряд сходится на всей вещественной оси.

2.4 Свойства сходящихся рядов

1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Объединим члены ряда в группы, не меняя положения. Тогда ряд примет следующий вид:

$$\underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}_{b_2} + \underbrace{(a_6 + a_7 + a_8)}_{b_3} + \underbrace{a_9}_{b_4} + \dots = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (2.69)$$

Получившийся ряд (2.69) назовем сгруппированным рядом.

Теорема 15 (Сочетательное свойство ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сгруппированный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство:

Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда есть подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, которая сходится. Следовательно, она сходится, причем к тому же пределу.

■

Замечание

В обратную сторону следствия нет. Если сгруппированный ряд сходится, то исходный ряд может и не сходиться. Например, ряд $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$ сходится, но ряд $1-1+1-1+1-1+\dots$ расходится.

2) Перестановка членов ряда

Из положительных членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (обозначим этот ряд за (A)), перенумеровав их по порядку, составим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots \quad (2.70)$$

Также поступим с отрицательными членами и составим ряд из их модулей.

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \dots + q_m + \dots \quad (2.71)$$

Пусть ряд (A) сходится абсолютно, то есть сходится ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (обозначим его через (A^*)).

Сколько бы членов рядов (2.70) и (2.71) ни взять, все они содержатся среди членов сходящегося ряда (A^*) , и для всех частичных сумм P_k и Q_m выполняются неравенства:

$$P_k \leq A^*, \quad Q_m \leq A^*, \quad (2.72)$$

так что оба ряда (P) и (Q) сходятся. Обозначим их суммы через P и Q соответственно.

Если взять n членов ряда (A) , то в их составе окажется k положительных и m отрицательных, так что

$$A_n = P_k - Q_m. \quad (2.73)$$

Здесь номера k и m зависят от n . Если в ряде (A) как положительных, так и отрицательных членов бесконечно много, то при $n \rightarrow \infty$ одновременно $k \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$.

Переходя в равенстве (2.73) к пределу, приходим снова к заключению о сходимости ряда (A) , причем его сумма оказывается равной

$$A = P - Q. \quad (2.74)$$

Можно сказать, что при сделанном предположении об абсолютной сходимости ряда (A) , его сумма равна разности между суммой ряда, составленного из одних положительных его членов, и суммой ряда, составленного из модулей отрицательных членов. Этим мы в последующем будем пользоваться.

3) Перестановочное свойство абсолютно сходящихся рядов

Пусть дан сходящийся ряд (A) , имеющий сумму A . Переставив в нем члены произвольным образом, мы получим новый ряд (A') :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k + \dots \quad (2.75)$$

Каждый член a'_k этого ряда отождествляется с определенным членом a_{n_k} исходного ряда (A) , причем последовательность номеров n_k без пропусков и повторений, с точностью до порядка воспроизводит натуральный ряд.

Возникает вопрос, сходится ли ряд A' и, если сходится, то будет ли его сумма равна сумме A исходного ряда. Ответ будет разным в зависимости от того, сходится ли ряд (A) абсолютно или условно.

Теорема 16 (Теорема Дирихле о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда)

Если ряд (A) абсолютно сходится, то ряд (A') , полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму A , что и исходный ряд.

Замечание

Иными словами, абсолютно сходящийся ряд обладает перестановочным свойством.

Доказательство:

Проведем доказательство в два этапа.

1. Пусть ряд (A) – положительный. Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда (A') . Так как

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad \dots, \quad a'_k = a_{n_k},$$

то взяв n' больше, чем любой из номеров $n_1, n_2, \dots, n_k$, мы получим для частичных сумм:

$$A'_k \leq A_{n'}. \quad (2.76)$$

Следовательно,

$$A'_k \leq A. \quad (2.77)$$

Мы получили, что монотонно возрастающая последовательность частичных сумм $\{A'_k\}$ ограничена сверху. Следовательно, ряд (A') сходится и его сумма не превышает A :

$$A' \leq A. \quad (2.78)$$

Посмотрим на задачу с другой стороны. Исходный ряд (A) можно получить из ряда (A') перестановкой членов. Поэтому, следуя приведенной выше логике, получим:

$$A \leq A'. \quad (2.79)$$

Сравнивая соотношения (2.78) и (2.79), приходим к требуемому равенству:

$$A' = A.$$

2. Пусть теперь (A) – произвольный абсолютно сходящийся ряд, то есть ряд из модулей (A^*) сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (2.80)$$

Тогда, по доказанному в пункте 1, будет сходиться и переставленный ряд (A'^*) .

А значит, сходится и ряд (A') (так как из абсолютной сходимости следует сходимость), причем абсолютно.

Как мы показали в свойстве 2 (формула (2.74)), в случае абсолютной сходимости ряда (A) , его сумма выражается так:

$$A = P - Q, \quad (2.81)$$

где P и Q есть суммы положительных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_m$, составленных, соответственно, из положительных и абсолютных величин отрицательных членов ряда (A) .

Перестановка членов в ряде (A) вызовет перестановку членов в рядах (P) и (Q) , но не отразится (по доказанному) на их суммах P и Q . Как было доказано, переставленный ряд (A') сходится абсолютно. Значит, его сумма представима в виде:

$$A' = P' - Q', \quad (2.82)$$

где (P') и (Q') – это переставленные ряды (P) и (Q) соответственно. Но $P' = P$, а $Q' = Q$. Поэтому и сумма A' переставленного ряда совпадает с A .

4) Случай неабсолютно сходящихся рядов

Рассмотрим случай неабсолютно (условно) сходящихся рядов и установим, что они перестановочным свойством не обладают: в каждом таком ряде с помощью перестановки членов можно изменить его сумму или вовсе нарушить сходимость.

Пусть ряд (A) сходится условно. Из сходимости следует, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (2.83)$$

Что касается рядов (P) и (Q) , о которых мы упоминали в свойствах 2 и 3, то, хотя и очевидно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0, \quad (2.84)$$

но в данном случае они оба расходятся. Действительно, имеют место равенства:

$$A_n = P_k - Q_m, \quad A_n^* = P_k + Q_m, \quad (2.85)$$

где k и m означают число положительных и отрицательных членов в составе первых n членов ряда (A) . Если оба ряда (P) и (Q) сходятся,

то будут сходиться ряды (A) и (A^*) , то есть имеет место абсолютная сходимость (не соответствует предположению). Если один из рядов $((P)$ или $(Q))$ сходится, а другой расходится, то будет расходиться и ряд (A) , и ряд (A^*) (согласно формуле 2.85).

Таким образом, интересующая нас ситуация, когда ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, может иметь место лишь тогда, когда оба ряда (P) и (Q) расходятся.

Теорема 17 (Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда)

Если ряд (A) неабсолютно (условно) сходится, то какое бы ни взять наперед число B (конечное или равное $\pm\infty$), можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно B .

Доказательство:

Рассмотрим случай конечного B . Из расходимости рядов (P) и (Q) следует, что и все их остатки также будут расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места, можно набрать столько членов, чтобы их сумма превзошла любое число.

Пользуясь этим замечанием, мы следующим образом произведем перестановку членов ряда (A) .

Сначала возьмем столько положительных членов нашего ряда (в том порядке, в каком они в нем расположены), чтобы их сумма превзошла число B :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > B. \quad (2.86)$$

Вслед за ними выпишем отрицательные члены (в том порядке, в каком они расположены в данном ряде), взяв их столько, чтобы общая

сумма стала меньше B :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1} < B. \quad (2.87)$$

После этого снова поместим положительные члены (из числа оставшихся) так, чтобы было:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > B. \quad (2.88)$$

Затем наберем столько отрицательных членов (из числа оставшихся), чтобы было:

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - \dots - q_{m_2} < B. \quad (2.89)$$

И так далее до бесконечности.

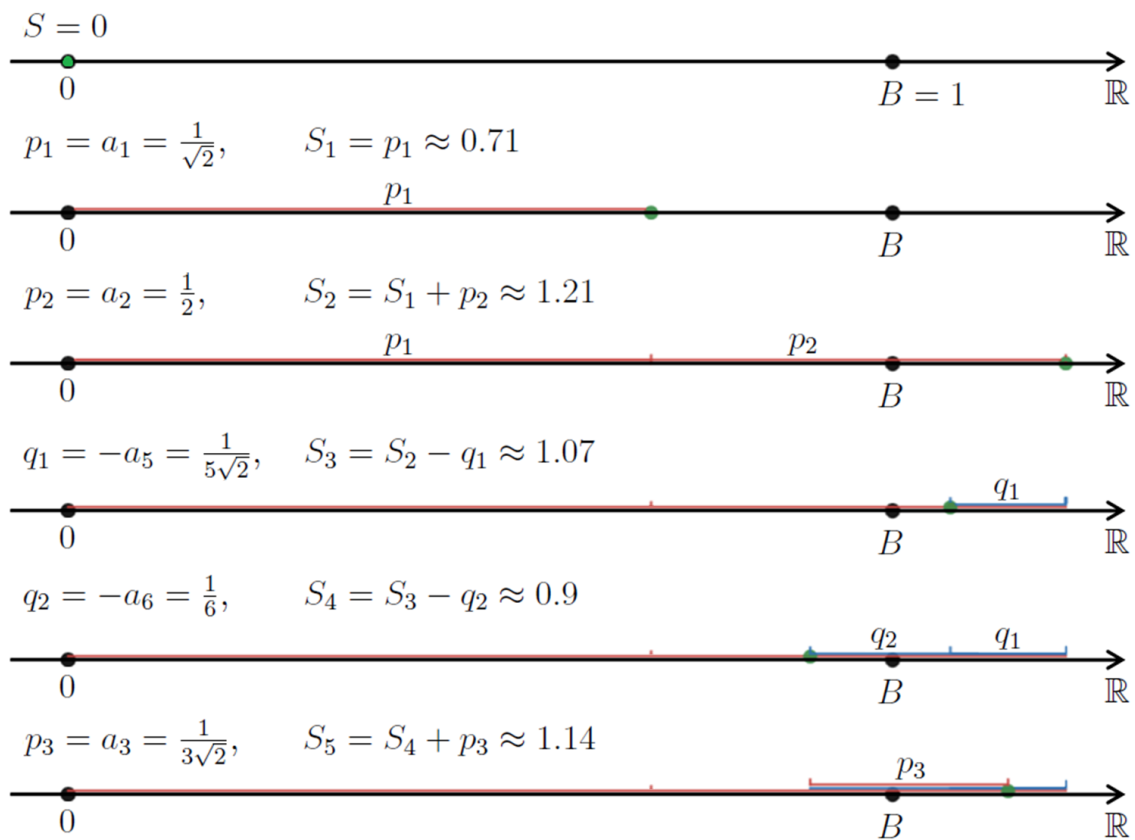


Рис. 11: Пример перестановки членов в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n}$. Сумма преобразованного ряда: $B = 1$

Если всякий раз, выписывая члены p или q , набирать их не больше, чем необходимо для выполнения требуемого неравенства, то отклонение от числа B в ту или другую сторону не превзойдет по модулю последнего написанного члена.

Поскольку общий член ряда стремится к нулю (в силу формулы (2.84)), то отклонение частичной суммы ряда от числа B стремится к нулю, то есть частичные суммы сходятся к B . Следовательно, ряд

$$\begin{aligned} & (p_1 + \dots + p_{k_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) + \dots + \\ & + (p_{k_{j-1}+1} + \dots + p_{k_i}) - (q_{m_{j-1}+1} + \dots + q_{m_j}) + \dots \end{aligned} \quad (2.90)$$

имеет своей суммой B .

Если $B = +\infty$, то взяв последовательность возрастающих до бесконечности чисел B_j можно было бы набор положительных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше B_1, B_2, B_3 и так далее, а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем мы можем составить ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$.

■

Установленный результат подчеркивает тот факт, что неабсолютная (условная) сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем, как абсолютная сходимость основана на быстроте убывания этих членов и от порядка их не зависит.

Полученные свойства рядов важно учитывать при приближенных вычислениях. Вычислительные алгоритмы при суммировании ряда считают конечную сумму, в которой свойство перестановочности всегда есть. Но если при выделении конечной суммы переставить местами слагаемые

ряда, то вычисленная сумма конечного числа членов может не иметь к сумме ряда никакого отношения. Такая ситуация возможна, когда указанный ряд сходится неабсолютно.

Замечание

Перестановку членов ряда удобно использовать при приближенных вычислениях. В качестве примера можно рассмотреть вычисление числа π по способу, предложенному Джоном Мэчином в 1706 году. Он основан на формуле:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}, \quad (2.91)$$

в которой каждый из арктангенсов представляется в виде ряда:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (2.92)$$

Тогда формула (2.91) примет вид:

$$\frac{\pi}{4} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{2n+1}}_{\text{ряд (A)}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}}{2n+1}}_{\text{ряд (B)}}. \quad (2.93)$$

Несложно увидеть, что каждый из этих двух рядов сходится абсолютно.

Применим признак Даламбера к ряду $|A|$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3} (2n+3)}{(2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 (2n+3)}{(2n+1)} = \frac{1}{25} < 1, \quad (2.94)$$

то есть ряд $|A|$ сходится, следовательно, ряд (A) сходится абсолютно.

Аналогично доказывается абсолютная сходимость ряда (B). Следовательно, и сумма этих рядов сходится абсолютно:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(4 \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \right). \quad (2.95)$$

Допустим, нам требуется вычислить число π с определенной точностью, например, 40 знаков после запятой. Считать сумму ряда, вычисляя

частичные суммы ряда (2.95), неэффективно, так как при каждой итерации сложения нужно будет производить действия в большом количестве разрядов. Но если учесть представление (2.93), ситуация существенно улучшится. Каждый из рядов (А) и (В) в формуле (2.93) является рядом лейбницевского типа, у которого остаток не превосходит по модулю первого члена этого остатка. Поэтому погрешность от замены суммы ряда на его частичную сумму дается первым отброшенным членом. Значит, при добавлении каждого нового члена к сумме нужно производить действия только в разрядах, определяемых добавляемым членом, а остальные разряды остаются неизменными.

Заметим, что в формуле (2.93) члены рядов (А) и (В) с одинаковыми номерами отличаются на порядки. В связи с этим, будет эффективно проводить сложение следующим образом: сначала складываем члены ряда (А), пока не дойдем до члена того же порядка, что и первый член ряда (В). После этого прибавляем первый член ряда (В) и затем снова прибавляем члены ряда (А) до тех пор, пока не дойдем до члена того же порядка, что и второй член ряда (В). Прибавляем второй член ряда (В). И так далее.

При таком способе на каждом шаге вычисления проводятся только в нескольких разрядах, а основа уже вычислена на предыдущих шагах. Фактически, в данном методе происходит суммирование переставленного ряда. Но поскольку этот ряд сходится абсолютно, его сумма от перестановки членов не изменится.

3 Функциональные ряды

3.1 Основные понятия

Пусть дана последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, зависящих от переменной x (вещественной или комплексной). Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ определены в точке x_0 .

Будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots, \quad (3.1)$$

сходится в точке x_0 , если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Пусть теперь функции $f_n(x)$ определены в некоторой области X . Ряд называется сходящимся в области X , если он сходится в каждой точке этой области. Из принципа сходимости Больцано-Коши (теорема 10) сразу же вытекает критерий сходимости функциональных рядов.

Теорема 18 (Критерий Коши)

Для того чтобы функциональный ряд сходиллся в области X , необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x \in X$ можно было указать, вообще говоря, зависящее от ε и от x число $N(\varepsilon, x)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon, x)$ и всех $p = 1, 2, \dots$ выполнялось неравенство:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Доказательство:

При фиксированном x функциональный ряд превращается в числовой и для него будет выполнен принцип сходимости Больцано-Коши (Теорема 10).



В частности, при $p \rightarrow \infty$ мы получим оценку остатка ряда:

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon, x), \quad x \in X.$$

Функциональный ряд, вообще говоря, является знакопеременным, поэтому признаки сходимости положительных рядов для него неприменимы. Однако, можно исследовать его абсолютную сходимость, из которой обычная сходимость следует. Область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ может быть найдена с использованием признаков Даламбера и Коши. Для этого можно найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = d(x) \quad (3.3)$$

$$\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = c(x), \quad (3.4)$$

и из неравенств $d(x) < 1$ или $c(x) < 1$ определить область X абсолютной сходимости функционального ряда.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в области X и его сумма равна некоторой функции $f(x)$. Тогда возникает вопрос о свойствах этой функции в зависимости от свойств функций $f_n(x)$.

Из теории пределов известно, что последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции. А так как сходимость ряда есть сходимость последовательности его частичных сумм, то аналогичное утверждение справедливо и для функциональных рядов: ряд из непрерывных функций не обязан сходиться к непрерывной функции.

Для прояснения этого вопроса необходимо более детально изучить сходимость.

3.2 Равномерная сходимость

Сумма ряда есть предел последовательности его частичных сумм. Поэтому рассмотрим подробно предел последовательности функций:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (3.5)$$

Для того чтобы иметь дело с определенной числовой последовательностью, зафиксируем значение $x \in X$. Тогда, согласно определению предела, равенство (3.5) означает следующее: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) : \forall n > N$ выполнено: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, где под x подразумевается именно то значение, которое было заранее зафиксировано.

Если взять другое значение x , то получится другая числовая последовательность, и при том же ε найденный номер N может оказаться уже непригодным. Тогда его придется заменить на бóльший номер. Но так как значений x бесконечно много, то перед нами бесконечное множество различных числовых последовательностей, сходящихся к пределу. Для каждой из них в отдельности найдется свое N . Возникает вопрос: существует ли такой номер N , который (при заданном ε) подойдет для всех этих последовательностей?

Покажем на примерах, что в одних случаях такой номер N существует, а в других – его нет.

Примеры

1) Пусть

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.6)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

то есть:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) : \forall n > N : |f_n(x) - 0| < \varepsilon &\Leftrightarrow f_n(x) < \varepsilon \\ / \text{Модуль можно не писать, так как } f_n(x) \geq 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 1. / \\ f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \underbrace{\frac{2nx}{1 + n^2 x^2}}_{\leq 1} &\leq \frac{1}{2n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$/ (1 - nx)^2 = 1 - 2nx + n^2 x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + n^2 x^2 \geq 2nx \Leftrightarrow \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \leq 1 /$$

В силу формулы (3.7) ясно, что для осуществления неравенства $f_n < \varepsilon$ достаточно взять $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Таким образом, число $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$ (целая часть числа $\frac{1}{2\varepsilon}$) подходит одновременно для всех x .

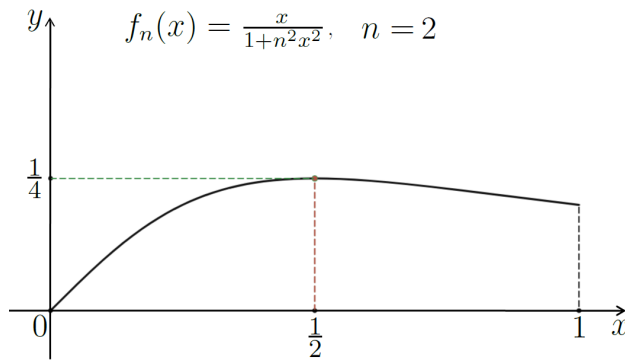


Рис. 12: График функции $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ при $n = 2$

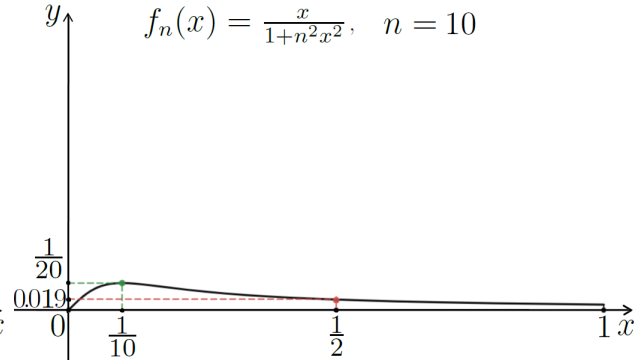


Рис. 13: График функции $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ при $n = 10$

2) Пусть теперь

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.8)$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) : \quad \forall n > N : \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow f_n(x) < \varepsilon \\ / f_n(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1 /$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}. \quad (3.9)$$

Для любого фиксированного $x > 0$ достаточно взять $n > \frac{1}{x\varepsilon}$ чтобы было выполнено:

$$f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon.$$

С другой стороны, каким бы большим мы ни взяли число n , для функции $f_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$ найдется точка $x = \frac{1}{n}$, в которой значение функции $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, то есть за счёт увеличения n сделать $f_n(x) < \frac{1}{2}$ сразу для всех x от 0 до 1 нельзя. Иными словами, уже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не существует номера N , который годился бы для всех x одновременно.

Изобразим на рисунке графики функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ при $n = 3$ и $n = 50$.

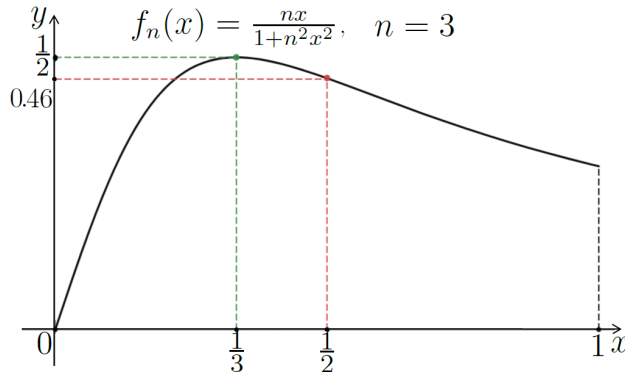


Рис. 14: График функции $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ при $n = 3$

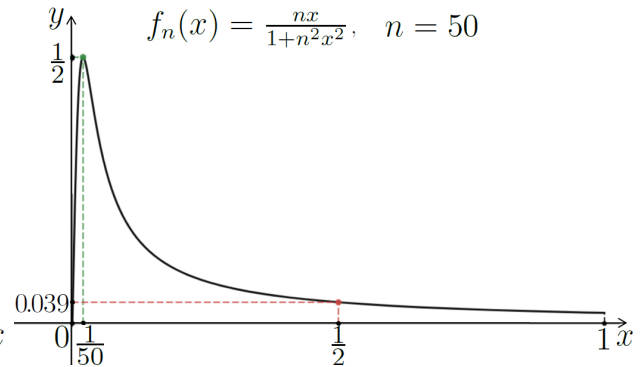


Рис. 15: График функции $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ при $n = 50$

Для графиков функций характерен горб высоты $\frac{1}{2}$, передвигающийся с возрастанием n справа налево. Для каждого фиксированного x (то есть на каждой вертикальной прямой) точки графиков функций $y = f_n(x)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Однако горбы графиков $y = f_n(x)$ с ростом n не уменьшаются по высоте, а только сдвигаются влево и сжимаются. Поэтому при любом n на графике остаются точки, удаленные от оси OX на расстояние $\frac{1}{2}$, то есть графики не становятся с ростом n ближе прилегающими к оси OX .

Дадим теперь определение равномерной сходимости последовательности.

Определение

Говорят, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X к функции $f(x)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n > N, \quad \forall x \in X : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Рассмотрим теперь сходимость функциональных рядов. Для согласования обозначений будем далее обозначать общий член ряда через

$u_n(x)$, его частичную сумму как: $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, а сумму ряда через $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Определение

Множество значений x , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости ряда.

Определение

Если частичные суммы $f_n(x)$ сходятся равномерно на множестве X к функции $f(x)$, то говорят, что ряд равномерно сходится в этой области.

Замечание

Можно говорить в определении, что остаток ряда равномерно стремится к нулю.

Таким образом, в первом из приведенных примеров функция $f_n(x)$ стремится к нулю равномерно относительно x на отрезке $[0, 1]$, а во втором – нет.

Пример

Исследуем на равномерную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1). \quad (3.11)$$

Остаток ряда после n -го члена:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{x^n}{1-x}. \quad (3.12)$$

При фиксированном $x \in (-1, 1)$: $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Однако при заданном n : $\lim_{x \rightarrow 1-0} r_n(x) = \infty$, что говорит о том, что нельзя выбрать такое N , что при $n > N$ для всех $x \in (-1, 1)$ будет выполнено: $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Следовательно, равномерной сходимости у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ на промежутке

$(-1, 1)$ нет. Но если взять, например, промежуток $[0, \frac{1}{2}]$, то:

$$\begin{aligned} |r_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| &< \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \quad \text{при} \quad 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{n-1} > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} \Leftrightarrow n > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

что выполнено для всех $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Следовательно, на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ сходимость ряда равномерная.

Замечание

Данный пример показывает, что равномерная сходимость обусловлена не только видом общего члена функционального ряда, но и промежутком, на котором рассматривается сходимость.

3.3 Признаки равномерной сходимости

Теорема 19а (Условие равномерной сходимости)

Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ имела предельную функцию и сходилась к этой функции равномерно относительно x в области X , необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой не зависящий от x номер N , чтобы при $n > N$ и любого $m = 1, 2, 3, \dots$ неравенство

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{3.13}$$

имело место для всех $x \in X$ одновременно.

Замечание

Требование теоремы можно кратко сформулировать так: принцип сходимости Больцано-Коши для последовательности $\{f_n(x)\}$ должен осуществляться равномерно для всех x из X .

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ равномерно в X . Тогда, согласно определению предела:

$\forall \varepsilon > 0$ найдется не зависящий от x номер N , такой, что при $n > N$ будет выполнено:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall x \in X. \quad (3.14)$$

Аналогично получим:

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Сравнивая формулы (3.14) и (3.15), получаем:

$$\begin{aligned} |f_{n+m}(x) - f_n(x)| &= |(f_{n+m}(x) - f(x)) - (f_n(x) - f(x))| \leq \\ &\leq |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.16)$$

что и доказывает формулу (3.13).

Достаточность.

Пусть условие (3.13) выполнено. Тогда для любого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ будет удовлетворять условиям Больцано-Коши. Следовательно, для этой последовательности существует конечный предел $f(x)$. Теперь сделаем в неравенстве (3.13) предельный переход при $m \rightarrow \infty$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N, \quad \forall x \in X. \quad (3.17)$$

Но это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X .

■

Замечание

Условие равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ аналогично с заменой неравенства на следующее:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N, \quad \forall x \in X. \quad (3.18)$$

Следствие

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, равномерно сходящегося в области X , умножить на одну и ту же функцию $v(x)$, ограниченную в X :

$$|v(x)| \leq M, \quad (3.19)$$

то равномерная сходимость сохранится.

Замечание

На практике проверка условия равномерной сходимости (критерия Коши) затруднительна даже для числовых рядов, поэтому встает вопрос об эффективных признаках равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 196 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяют в области X неравенствам

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.20)$$

где c_n — члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в X равномерно.

Доказательство:

В силу неравенства (3.20) получаем:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}. \quad (3.21)$$

Это неравенство справедливо одновременно для всех $x \in X$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то, согласно принципу сходимости Больцано-Коши (теорема 10), будет выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N : \quad |c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| < \varepsilon. \quad (3.22)$$

Тогда по неравенству (3.21) получим:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in X$ одновременно. Тогда по условию равномерной сходимости (теорема 19а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в X равномерно. ■

Замечание

При наличии неравенства (3.20) говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (или ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ служит мажорантным рядом для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$).

Например, в любом промежутке равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ играет роль мажорантного ряда:

$$|a_n \sin nx| \leq |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|.$$

Замечание

Условие мажорируемости $|u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in X$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является достаточным для равномерной сходимости, однако не является необходимым.

3.4 Функциональные свойства суммы ряда

Функциональные ряды, равномерно сходящиеся в некоторой области X , обладают в этой области свойствами обычных конечных сумм. Мы сформулируем и докажем несколько теорем о рядах, членами которых являются функции вещественной переменной x . Впрочем, эти теоремы будут справедливы и в случае функции комплексной переменной z .

Теорема 20 (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)

Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определены в промежутке $X = [a, b]$ и все непрерывны в некоторой точке $x = x_0$ этого промежутка. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ в промежутке X сходится равномерно к функции $f(x)$, то и сумма ряда $f(x)$ в точке $x = x_0$ также будет непрерывна.

Замечание

Впервые подобное утверждение было сформулировано Коши. Однако он придал ему слишком общую форму, не выдвинув требования равномерности, без которого оно перестает быть верным.

Доказательство:

Сумму ряда $f(x)$ можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f_n(x) + r_n(x), \quad (3.23)$$

где $f_n(x)$ есть частичная сумма ряда, $r_n(x)$ – остаток ряда после n -го члена. В частности, при $x = x_0$ получим:

$$f(x_0) = f_n(x_0) + r_n(x_0). \quad (3.24)$$

Следовательно,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|. \quad (3.25)$$

Так как частичные суммы $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ сходятся к $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно на промежутке X , то:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N, \forall x \in X : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.26)$$

то есть выполнено:

$$|r_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.27)$$

$$|r_n(x_0)| = |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.28)$$

При фиксированном n функция $f_n(x)$ есть сумма конечного числа непрерывных функций $u_k(x)$, а значит, она сама является непрерывной в точке x_0 , то есть выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.29)$$

Тогда при $|x - x_0| < \delta$ из неравенств (3.27) – (3.29) получим:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (3.30)$$

■

Следствие

Если функции $u_n(x)$ непрерывны на всем промежутке $X = [a, b]$, то при наличии равномерной сходимости и сумма ряда $f(x)$ будет непрерывна на всем промежутке.

Теорема 21 (Почленный переход к пределу)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на промежутке X . Пусть каждая из функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определена в области X и имеет, при стремлении x к x_0 , конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = c_n. \quad (3.31)$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$ сходится, и выполнено:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x). \quad (3.32)$$

Доказательство:

Введем обозначения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x). \quad (3.33)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X , то по формуле (3.18) имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N, \forall x \in X : |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon. \quad (3.34)$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \rightarrow x_0$, получим:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| \leq \varepsilon, \quad (3.35)$$

то есть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ выполняется условие сходимости Больцано-Коши.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Представим суммы рядов через частичные суммы и остаток:

$$f(x) = f_n(x) + r_n(x), \quad (3.36)$$

$$C = C_n + \gamma_n. \quad (3.37)$$

Тогда:

$$f(x) - C = f_n(x) - C_n + r_n(x) - \gamma_n. \quad (3.38)$$

Следовательно,

$$|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |r_n(x)| + |\gamma_n|. \quad (3.39)$$

Так как частичные суммы $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ сходятся к $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно на X , а частичные суммы $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$ сходятся к $C = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$, то выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in X \quad \forall n > N : \begin{cases} |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = / \text{см. (3.31)} / = \sum_{k=1}^n c_k = C_n, \quad (3.41)$$

то найдется такой номер n , что при $|x - x_0| < \delta$ будет выполнено:

$$|f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.42)$$

Тогда, при указанных значениях x , в силу неравенств (3.39), (3.40), (3.42) будет выполняться неравенство:

$$|f(x) - C| < \varepsilon, \quad (3.43)$$

то есть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x), \quad (3.44)$$

что и доказывает теорему. ■

Теорема 22 (Почленное интегрирование рядов)

Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) непрерывны на промежутке $X = [a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в этом промежутке равномерно, то интеграл от суммы $f(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ представим в виде:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \\ &= \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

Доказательство:

Ввиду непрерывности функций $u_n(x)$ и $f(x)$, все интегралы в формуле (3.45) существуют. Проинтегрируем тождество на промежутке $[a, b]$:

$$f(x) = \underbrace{u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)}_{\text{частичная сумма ряда}} + r_n(x), \quad (3.46)$$

где $r_n(x)$ – остаток ряда. Мы получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx.$$

Таким образом, сумма n членов ряда (3.45) отличается от интеграла $\int_a^b f(x)dx$ лишь дополнительным членом $\int_a^b r_n(x)dx$. Докажем, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n(x)dx = 0. \quad (3.47)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, то:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N : \quad |r_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X. \quad (3.48)$$

Тогда для тех же значений n будет:

$$\left| \int_a^b r_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)|dx < (b-a) \cdot \varepsilon, \quad (3.49)$$

что и доказывает предельное соотношение (3.47).

■

Замечание

Равенство (3.45) может быть записано в виде:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right), \quad (3.50)$$

то есть в случае равномерно сходящегося ряда интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов его членов. Иными словами, допустимо почленное интегрирование ряда.

Замечание

Условие равномерной сходимости является существенным, но не является необходимым.

Теорема 23 (Почленное дифференцирование рядов)

Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определены на промежутке $X = [a, b]$ и имеют в нем непрерывные производные $u'_n(x)$. Если в этом промежутке сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, а также равномерно сходится ряд, составленный из производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots, \quad (3.51)$$

то сумма $f(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема в X и выполнено:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (3.52)$$

Доказательство:

Обозначим через $f^*(x)$ сумму ряда (3.51). Функция $f^*(x)$ будет непрерывной, так как равномерно сходящийся ряд непрерывных функций $u'_n(x)$ сам является непрерывной функцией (смотри теорему 20 о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Согласно теореме 22, равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ можно почленно интегрировать. Проинтегрируем его на промежутке от a до x , где $x \in X$:

$$\int_a^x f^*(t) dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt \Leftrightarrow \quad (3.53)$$

$$\int_a^x u'_n(t) dt = u_n(x) - u_n(a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)). \quad (3.54)$$

Ввиду сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, ряд (3.54) можно разбить на разность двух рядов:

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a). \quad (3.55)$$

Поскольку функция $f^*(x)$ непрерывна, то по теореме Барроу $\int_a^x f^*(t)dt$ дифференцируем по верхнему пределу, и производная от него равна значению подынтегральной функции в точке верхнего предела:

$$\left(\int_a^x f^*(t)dt \right)' = f^*(x). \quad (3.56)$$

Таким образом, в левой части равенства (3.55) стоит дифференцируемая функция. Значит, и правая часть (3.55) дифференцируема. Тогда, продифференцировав формулу (3.55), получим:

$$f^*(x) = f'(x). \quad (3.57)$$

Учитывая, что: $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, приходим к требуемому соотношению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = f'(x). \quad (3.58)$$

■

Замечание

Равенство (3.52) может быть записано в виде:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (3.59)$$

Теорему 23 кратко можно сформулировать так: ряд можно почленно дифференцировать, если ряд из производных сходится равномерно.

3.5 Степенные ряды

Определение

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots, \quad (3.60)$$

где a_n – постоянные числа, называется степенным рядом по степеням $(x - x_0)$.

В частности, при $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3.61)$$

Для выяснения характера области сходимости степенного ряда сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 24 (Теорема Абеля)

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится в некоторой точке x_1 , то он сходится, причем абсолютно, на целом интервале, симметричном относительно точки x_0 (то есть для любого x , удовлетворяющего неравенству: $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$).

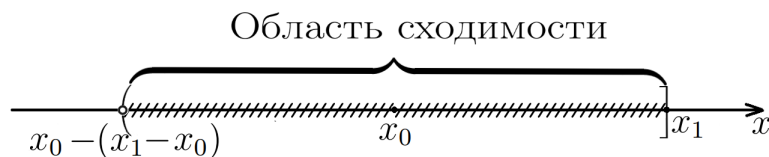


Рис. 16: Иллюстрация к теореме Абеля

Замечание

Область абсолютной сходимости – это область сходимости без точки x_1 (про точку x_1 нет информации).

Доказательство:

Введем следующие обозначения:

$$x - x_0 = y, \quad x_1 - x_0 = y_1. \quad (3.62)$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ примет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y_1^n.$$

По условию теоремы исходный ряд сходится в точке x_1 . В наших обозначениях это означает сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y_1^n$. Согласно необходимому условию сходимости для ряда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n y_1^n = 0, \quad (3.63)$$

следовательно, последовательность $\{a_n y_1^n\}$ сходится, а значит, ограничена некоторым числом M :

$$|a_n y_1^n| \leq M \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.64)$$

Рассмотрим значения x , удовлетворяющее неравенству:

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0| \Leftrightarrow |y| < |y_1| \Leftrightarrow \left| \frac{y}{y_1} \right| < 1. \quad (3.65)$$

Тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n y_1^n| \cdot \left| \frac{y}{y_1} \right|^n \leq \left/ \text{формула (3.64)} \right/ \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{y}{y_1} \right|^n. \quad (3.66)$$

Так как $\left| \frac{y}{y_1} \right| < 1$, то члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$ меньше членов сходящейся геометрической прогрессии. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$ сходится при $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, а значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно.

■

Область сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля можно сделать заключение о характере области сходимости степенного ряда.

При $x = x_0$ степенной ряд сходится, то есть его область сходимости всегда не пуста. Но есть степенные ряды, которые помимо точки x_0 не сходятся ни при одном значении x . Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ расходится при любом $x \neq 0$, в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись признаком Даламбера.

Пусть для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ существуют такие отличные от 0 значения $y = y_1$, при которых он сходится. Рассмотрим множество $\{|y_1|\}$. Это множество либо ограничено сверху, либо нет.

Если не ограничено, то для любого y найдется y_1 такое, что $|y| < |y_1|$. Так как в точке y_1 ряд сходится, то по теореме Абеля он сходится абсолютно при $|y| < |y_1|$.

Пусть теперь множество $\{|y_1|\}$ ограничено сверху. Обозначим за R его точную верхнюю границу ($0 < R < \infty$). Если $|y| > R$, то ряд расходится, ибо это y заведомо отличается от всех y_1 , при которых ряд сходится. Возьмем y , для которого $|y| < R$. По определению точной верхней границы существует y_1 такое, что: $|y| < |y_1| \leq R$ и в точке y_1 ряд сходится. Следовательно, по теореме Абеля ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно при $|y| < R$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 25 (о виде области сходимости степенного ряда)

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, если он не является всюду расходящимся, существует такое положительное число R (конечное или бесконечное), что в открытом промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится абсолютно, при $|x - x_0| > R$ ряд расходится. На концах промежутка, при $x = x_0 + R$ и $x_0 - R$, общего утверждения о сходимости сделать нельзя: может иметь место как сходимость, так и расходимость.

Замечание

Поскольку степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ всегда сходится при $x = x_0$, то

под “расходимостью всюду” подразумевается расходимость при всех x , отличных от x_0 .

Примеры

Найдем области сходимости следующих степенных рядов:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Проверим по признаку Даламбера абсолютную сходимость этого ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно, то есть сходится для любых $x \in (-\infty, \infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, \infty)$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Проверим абсолютную сходимость по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

$|x| < 1$: ряд сходится абсолютно, то есть сходится.

$|x| > 1$: ряд расходится абсолютно, то есть расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

При $x = -1$ получаем знакочередующийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

Ответ: $x \in [-1, 1)$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}.$$

Проверим абсолютную сходимость по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x-1|^n} = |x-1| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x-1|.$$

$|x-1| < 1$: ряд сходится абсолютно, то есть сходится.

$$|x-1| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases} : \text{ ряд расходится абсолютно, то есть расходится}$$

(так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

Рассмотрим крайние точки.

При $x = 2$ имеем: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходящийся обобщенный гармонический ряд.

При $x = 0$ получаем: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ – этот ряд сходится абсолютно, то есть сходится.

Ответ: $x \in [0, 2]$.

Теорема 26 (Формула для радиуса сходимости)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Пусть все $a_n \neq 0$, и существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (3.67)$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ имеет радиус сходимости

$$R = \frac{1}{K}. \quad (3.68)$$

Доказательство:

Проверим абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x-x_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x-x_0|^n} = K \cdot |x-x_0|.$$

Если $K \cdot |x - x_0| < 1$, то ряд сходится абсолютно, то есть сходится.

Если $K \cdot |x - x_0| > 1$, то $a_{n+1} > a_n$, то есть общий член ряда не стремится к нулю (нарушено необходимое условие сходимости). Следовательно, ряд расходится.

Таким образом, мы получим радиус сходимости ряда:

$$R = \frac{1}{K}.$$

■

Замечание

Формула для радиуса сходимости применима, только если ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ содержит все степени x .

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$ формула $R = \frac{1}{K}$ неприменима. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4}.$$

Теперь применим непосредственно признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2} \cdot 2^{2n}}{2^{2n+2} \cdot |x|^{2n}} = \frac{x^2}{2^2}.$$

Ряд сходится при $\frac{x^2}{2^2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, то есть радиус сходимости равен:

$$R = 2 \neq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = 4.$$

Обозначение

До конца данного параграфа будем обозначать через R радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Теорема 27 (о равномерной сходимости степенного ряда внутри его области сходимости)

Для любого $r < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Доказательство:

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса. Для этого требуется найти для данного функционального ряда мажорантный числовой ряд, который сходится. Построим его.

$$\begin{aligned} x \in [x_0 - r, x_0 + r] &\Rightarrow |x - x_0| \leq r \Rightarrow |x - x_0|^n \leq r^n \Rightarrow \\ &\quad / \text{Домножим обе части неравенства на } |a_n| / \\ &\Rightarrow |a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n|r^n. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ мажорирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

По условию теоремы $r < R$. Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ сходится (так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно). Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Следствие

Сумма $f(x)$ степенного ряда для всех значений x между $(x_0 - R)$ и $(x_0 + R)$ представляет собой непрерывную функцию от x .

Доказательство:

Какое бы значение x внутри интервала сходимости ни взять, можно выбрать число $r < R$ так, чтобы было выполнено: $|x - x_0| < r$. Тогда по только что доказанной теореме 27 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. Учитывая непрерывность полинома $(x - x_0)^n$, по теореме 20 о непрерывности суммы ряда получим непрерывность суммы $f(x)$ степенного ряда в точке x .

■

Теорема 28 (Теорема о тождестве степенных рядов)

Если два степенных ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3.69)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (3.70)$$

в окрестности точки $x = 0$ имеют одну и ту же сумму, то эти ряды тождественны, то есть соответствующие коэффициенты попарно равны:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n, \quad \dots \quad (3.71)$$

Доказательство:

Полагая $x = 0$ в тождестве

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad (3.72)$$

получаем равенство: $a_0 = b_0$. Отбросив a_0 и b_0 , разделим обе части равенства (3.72) на x (в этом случае мы вынуждены считать $x \neq 0$). Мы получим новое тождество:

$$a_1 + a_2 x + \dots = b_1 + b_2 x + \dots, \quad (3.73)$$

которое также имеет место в окрестности точки $x = 0$, но исключая саму эту точку. Не имея права положить здесь $x = 0$, мы можем устремить x к 0. Тогда, воспользовавшись непрерывностью обоих рядов, в пределе получим, что $a_1 = b_1$. Отбросив эти члены и снова разделив на $x \neq 0$, при $x \rightarrow 0$ получим, что $a_2 = b_2$. И так далее. По индукции получим, что $a_n = b_n$.

■

Замечание

Для рядов общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ утверждение теоремы 28 тоже будет верным, ибо можно сделать замену $x - x_0 = y$ и одно утверждение сведется к другому.

Теорема 28 устанавливает единственность разложения функции в степенной ряд.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x). \quad (3.74)$$

Теорема 29 (Интегрирование степенных рядов)

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в промежутке $[0, x]$, где $|x| < R$, можно почленно интегрировать:

$$\int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots \quad (3.75)$$

Значение x здесь может совпадать с одним из концов промежутка сходимости, если на этом конце ряд сходится.

Доказательство:

Выберем r такое, что: $|x| < r < R$.

Тогда по теореме 27 ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$. Применяя теорему 22 о почленном интегрировании рядов, получим, что на отрезке $[0, x]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать.

■

Интегрирование рядов можно использовать для разложения функции в ряд.

Пример

Разложим в степенной ряд функцию $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}. \quad (3.76)$$

С другой стороны, функция $\frac{1}{1+x}$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots \quad \text{при } |x| < 1. \quad (3.77)$$

Сравнивая формулы (3.76) и (3.77), получим:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots \quad (3.78)$$

Разложение верно при $|x| < 1$. Позже, при рассмотрении ряда Тейлора мы докажем, что при $x = 1$ это разложение также верно.

Теорема 30 (Дифференцирование степенных рядов)

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad (3.79)$$

Утверждение сохраняет силу и для конца промежутка сходимости, если на этом конце ряд сходится.

Доказательство:

Возьмем любое x внутри промежутка сходимости исходного ряда так, что $|x| < R$, и вставим два числа r_0 и r между $|x|$ и R :

$$|x| < r_0 < r < R. \quad (3.80)$$

Так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Тогда по необходимому условию сходимости общий член ряда стремится к нулю, а значит, последовательность $\{|a_n| r^n\}$ ограничена:

$$|a_n| r^n \leq L \quad \forall n. \quad (3.81)$$

Тогда при $|x| < r_0$ имеем:

$$\begin{aligned} n|a_n| \cdot |x|^{n-1} &< n|a_n|r_0^{n-1} = n|a_n|r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leq \left/ \text{формула (3.81)} \right/ \leq \\ &\leq n \cdot \underbrace{\frac{L}{r}}_{=L_0 \text{ (обозначение)}} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} = nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Значит, члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ не превосходят по модулю членов мажорантного ряда

$$L_0 + 2L_0 \cdot \frac{r_0}{r} + 3L_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \dots + nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} + \dots \quad (3.83)$$

Сходимость числового ряда (3.83) проверим по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)L_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n}{nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}} = \frac{r_0}{r} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{r_0}{r} < 1. \quad (3.84)$$

Следовательно, ряд сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса (теорема 19) при $x \in [-r_0, r_0]$ ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ сходится равномерно. Тогда, по теореме 23 о почленном дифференцировании рядов, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать на отрезке $[-r_0, r_0]$, в частности в точке x .

■

Замечание

Доказано, что ряды из производных и интегралов сходятся на интервале $(-R, R)$. Значит, их радиусы сходимости $R' \geq R$.

С другой стороны, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно получить дифференцированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n$ и интегрированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Следовательно, радиус R сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не меньше, чем R' , то есть $R \geq R'$. Таким образом, радиусы сходимости всех трех рядов равны: $R = R'$.

Замечание

Интегрирование и дифференцирование рядов можно использовать для вычисления сумм рядов.

Пример

Найдем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{=S(x) \text{ (обозначение)}} = x \cdot S(x).$$

Проинтегрируем ряд $S(x)$:

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии /
Продифференцируем полученный результат:

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно,

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}.$$

Применение рядов к решению уравнений

Продemonстрируем на примерах метод последовательных дифференцирований и метод неопределенных коэффициентов для решения дифференциальных уравнений.

Пример 1

Применяя метод последовательных дифференцирований, найдем 4 пер-

вых члена разложения в степенной ряд решения следующего дифференциального уравнения:

$$2y' - (x + y)y - e^x = 0, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 2. \quad (3.85)$$

Решение уравнения будем искать в следующем виде:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad (3.86)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – некоторые коэффициенты.

$$y(0) = 2 \Rightarrow a_0 = 2.$$

Перепишем уравнение (3.85) в виде:

$$y' = \frac{1}{2}e^x - (x + y)y. \quad (3.87)$$

Подставим сюда $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} y'(0) &= \frac{1}{2}e^0 - (0 + y(0)) \cdot y(0) = \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 = -\frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = -\frac{7}{2}.$$

Из (3.86) получаем: $y'(0) = a_1$

Продифференцируем уравнение (3.87):

$$y'' = \frac{1}{2}e^x - (1 + y')y - (x + y)y' = \frac{1}{2}e^x - y - 2yy' - xy'. \quad (3.88)$$

$$\left. \begin{aligned} y''(0) &= \frac{1}{2}e^0 - y(0) - 2y(0) \cdot y'(0) - 0 = \frac{1}{2} - 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{25}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Из (3.86) получаем: $y''(0) = 2a_2$

$$\Rightarrow 2a_2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow a_2 = \frac{25}{4}.$$

Продифференцируем формулу (3.88):

$$y''' = \frac{1}{2}e^x - y' - 2yy'' - 2(y')^2 - y' - xy''. \quad (3.89)$$

$$y'''(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) - 2 \cdot 2 \cdot \frac{25}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(-\frac{7}{2}\right) - 0 = -67 \quad \left. \vphantom{y'''(0)} \right\} \Rightarrow$$

Из (3.86) получаем: $y'''(0) = 6a_3$

$$\Rightarrow 6a_3 = -67 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{67}{6}.$$

Ответ: $y = 2 - \frac{7}{2}x + \frac{25}{4}x^2 - \frac{67}{6}x^3 + \dots$

Пример 2

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найдем решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, в виде степенного ряда с центром в нуле:

$$y'' - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.90)$$

Решение уравнения будем искать в виде: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$y(0) = a_0 = 1, \quad y'(0) = a_1 = 0.$$

Посчитаем вторую производную:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)x^{n-2}.$$

Подставим ряд в уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^0: \quad a_2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

$$x^1: \quad a_3 \cdot 6 - a_0 = 0 \Leftrightarrow 6a_3 = a_0 = 1 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{6}$$

.....

$$x^{k+1}, \quad k \geq 0: \quad a_{k+3} \cdot (k+2)(k+3) - a_k = 0 \Leftrightarrow a_{k+3} = \frac{1}{(k+2)(k+3)} a_k.$$

Мы нашли общую формулу для коэффициентов, согласно которой отличным от нуля будет каждое третье слагаемое:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad \dots$$

Итак,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} \cdot x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot (3n \cdot (3n - 1))} \cdot x^{3n}.$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n - 2)!!}{(3n)!} \cdot x^{3n}.$$

3.6 Ряд Тейлора

Связь коэффициентов степенного ряда с его суммой

Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (3.91)$$

сходится на интервале $|x - x_0| < R$. Обозначим через $f(x)$ его сумму.

По теореме 30 о дифференцировании степенных рядов, на интервале $|x - x_0| < R$ ряд (3.91) можно почленно дифференцировать любое число раз, то есть:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_n (x - x_0)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.92)$$

При $x = x_0$ получим:

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n, \quad \dots \quad (3.93)$$

Таким образом, если $f(x)$ есть сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то коэффициенты этого ряда не могут быть ничем иным, как $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Такие

коэффициенты называются коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 .

Теперь рассмотрим обратный переход. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 задана бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$. Составим степенной ряд с коэффициентами $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3.94)$$

Будет ли этот ряд сходиться к $f(x)$? Исследования сходимости ряда недостаточно для ответа на этот вопрос, ибо ряд может сходиться и к другой функции. Для выяснения сходимости именно к $f(x)$ заметим, что в окрестности точки x_0 всегда можно написать формулу Тейлора:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{S_n} + r_n(x), \quad (3.95)$$

которая связывает значения функции с частичной суммой S_n ряда Тейлора.

Здесь $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Поскольку левая часть ($f(x)$) в формуле (3.95) от n не зависит, то необходимое и достаточное условие того, что частичные суммы S_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ сходятся к $f(x)$ – это условие $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 31 (о представимости функции рядом Тейлора)

Для того чтобы ряд Тейлора сходил к функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (3.96)$$

необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора при этом значении x стремился к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (3.97)$$

Формы остаточного члена в формуле Тейлора

Форма Пеано:

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (3.98)$$

Форма Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (3.99)$$

Форма Коши:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} \cdot (1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (3.100)$$

Замечание

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 . При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена.

3.7 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

В данном параграфе будем раскладывать функции в ряд Маклорена, то есть в окрестности точки $x_0 = 0$.

Теорема 32 (о представимости рядом Маклорена для функции с ограниченными производными)

Если функция $f(x)$ в промежутке $[0, H]$ или $[-H, 0]$ ($H > 0$) имеет производные всех порядков и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются ограниченными по модулю одним и тем же числом:

$$|f^{(n)}(x)| \leq L, \quad (3.101)$$

то во всем промежутке имеет место разложение в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3.102)$$

Доказательство:

В силу теоремы 31 нам достаточно доказать, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (3.103)$$

Рассмотрим остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \left/ 0 \leq x \leq H \right/ \leq L \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (3.104)$$

Докажем, что $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Для этого рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ и выясним его сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!H^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n+2} = 0 < 1, \quad (3.105)$$

то есть ряд сходится. Тогда, согласно необходимому условию сходимости, общий член ряда стремится к нулю:

$$\frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.106)$$

Следовательно, согласно неравенству (3.104), получаем, что $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а это и означает, что ряд Маклорена $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ сходится к функции $f(x)$.

■

Воспользуемся теоремой 32 для разложения функций e^x , $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена.

1) $f(x) = e^x$.

Поскольку $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.107)$$

Так как для любого $H > 0$ выполнено:

$$|f^{(k)}(x)| = e^x \leq e^H, \quad x \in [-H, H] \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.108)$$

то согласно теореме 32 остаточный член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что функцию e^x на отрезке $[-H, H]$ можно разложить в сходящийся к ней ряд Маклорена по степеням x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.109)$$

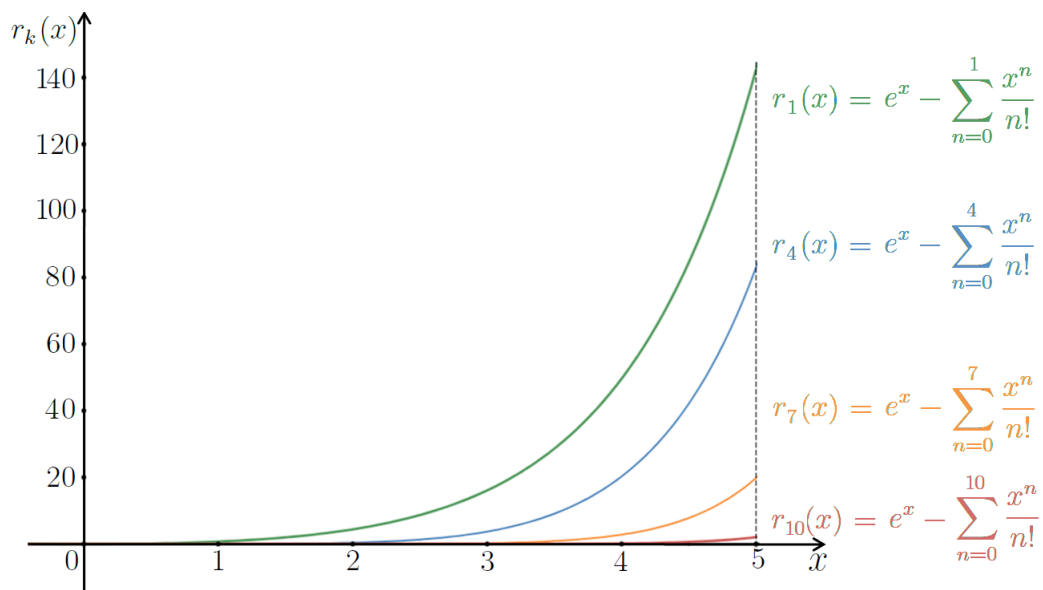


Рис. 17: Графики остаточных членов рядов Маклорена при различных k

2) $f(x) = \sin x$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{\pi n}{2} \right) \quad \forall n, \quad (3.110)$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\sin x$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ (-1)^k & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases} \quad (3.111)$$

Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то по теореме 32 функцию $\sin x$ можно разложить в сходящийся к ней на интервале $(-\infty, \infty)$ ряд Маклорена по степеням x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.112)$$

3) $f(x) = \cos x$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right) \quad \forall n, \quad (3.113)$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\cos x$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k & \text{при } n = 2k, \\ 0 & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases} \quad (3.114)$$

Поскольку $|\cos x| \leq 1$, то по теореме 32 функцию $\cos x$ можно разложить в сходящийся к ней на интервале $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена по степени x :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.115)$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall n, \quad (3.116)$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\ln(1+x)$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \quad (3.117)$$

Напишем ряд Маклорена для функции $\ln(1+x)$ по степеням x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}. \quad (3.118)$$

Найдем его область сходимости. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^n \cdot x^{n+1}|n}{(n+1) \cdot |(-1)^{n-1} \cdot x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x|. \quad (3.119)$$

При $|x| < 1$ ряд (3.118) сходится абсолютно, то есть сходится.

При $|x| > 1$ ряд (3.118) расходится абсолютно, следовательно расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

Проверим крайние точки.

При $x = -1$ имеем: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Это расходящийся отрицательный гармонический ряд.

При $x = 1$ получаем: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$.

Поскольку этот ряд знакочередующийся, члены ряда монотонно убывают и

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то он сходится по признаку Лейбница. Итак, область сходимости ряда (3.118) – это полуинтервал $(-1, 1]$. Только в этом промежутке имеет смысл говорить о разложении функции в ряд и исследовать поведение остаточного члена $r_n(x)$.

Возьмем сначала $r_n(x)$ в форме Лагранжа (3.99).

Так как $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, то:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.120)$$

При $0 \leq x \leq 1$ последний множитель не превосходит единицы. Следовательно,

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \text{то есть} \quad r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.121)$$

Однако при $x < 0$ поведение этого множителя становится неясным, и приходится прибегнуть к форме Коши (3.100) остаточного члена $r_n(x)$.

Оценим $|r_n(x)|$ при $-1 < x < 0$:

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (1-\theta)^n \cdot x^{n+1} \right| =$$

$$= \frac{|x|^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} = \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n.$$

Так как $0 < \theta < 1$ и $x < 0$, то $1 + \theta x \geq 1 + x = 1 - |x|$.

Кроме того, $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, поскольку при $x > -1$ и $0 < \theta < 1$ имеем $1 + \theta x > 0$, а значит

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \Leftrightarrow 1-\theta < 1+\theta x \Leftrightarrow -\theta < \theta x \Leftrightarrow -1 < x.$$

Следовательно,

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n}_{<1}. \quad (3.122)$$

$|x|^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ при $-1 < x < 0$.

Следовательно, согласно формуле (3.122), $r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Итак, мы доказали, что при $-1 < x \leq 1$ ряд (3.118) сходится к функции $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Замечание

В частности, при $x = 1$ мы получим уже известный нам знакочередующийся гармонический ряд:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots \quad (3.124)$$

5) Биномиальный ряд. $f(x) = (1+x)^a$.

Если степень a – целое неотрицательное число, то функция $f(x)$ представляет собой полином, который можно получить по формуле бинома Ньютона:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^a \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^a C_a^n x^n. \quad (3.125)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \neq 0, 1, 2, 3, \dots$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)(1+x)^{a-n} \quad \forall n, \quad (3.126)$$

то

$$f^{(n)}(0) = a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1). \quad (3.127)$$

Напишем ряд Маклорена для функции $(1+x)^a$ по степеням x :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n. \quad (3.128)$$

Установим, что биномиальный ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

По признаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+2)| \cdot |x|^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{|a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)| \cdot |x|^n} = \\ = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a-n+2|}{n+1} = |x|. \end{aligned} \quad (3.129)$$

При $|x| < 1$ ряд (3.128) сходится абсолютно, то есть сходится.

При $|x| > 1$ ряд (3.128) расходится абсолютно, следовательно расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость). Сходимость при $x = \pm 1$ зависит от величины a . Мы будем рассматривать разложение биномиальной функции в ряд Маклорена только при $-1 < x < 1$.

Рассмотрим остаточный член в форме Коши:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot (1+\theta x)^{a-n-1} \cdot (1-\theta)^n \cdot x^{n+1}. \\ r_n(x) &= \underbrace{\frac{(a-1)((a-1)-1) \cdot \dots \cdot ((a-1)-n+1)}{n!} x^n}_{(I)} \cdot \underbrace{ax(1+\theta x)^{a-1}}_{(II)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{(III)} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Сомножитель (I) – это общий член биномиального ряда для функции $(1+x)^{a-1}$, который сходится при $|x| < 1$. В силу необходимого условия сходимости общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Так как $0 < \theta < 1$ и $-1 < x < 1$, то сомножитель (II) можно оценивать с двух сторон:

$$|ax| \cdot (1 - |x|)^{a-1} \leq |ax(1 + \theta x)^{a-1}| \leq |ax| \cdot (1 + |x|)^{a-1}, \quad (3.131)$$

то есть сомножитель (II) ограничен. Сомножитель (III) также ограничен (доказывали в формуле (3.122)).

Таким образом, $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ как произведение бесконечно малой величины на ограниченную. Итак, мы доказали, что при $|x| < 1$ ряд (3.128) сходится к функции $(1+x)^a$:

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \cdot x^n, \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Формула (3.132) справедлива для любых значений a . При целых неотрицательных a ряд (3.132) будет представлять собой полином (конечную сумму).

Замечание

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии является частным случаем формулы (3.132):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1. \quad (3.133)$$

Определение

Множество значений x , при которых ряд Тейлора (Маклорена) для функции $f(x)$ сходится к значению функции $f(x)$, называется областью представимости функции рядом Тейлора (Маклорена).

Замечание

В приведенных выше разложениях область сходимости функции всегда совпадала с областью ее представимости рядом Маклорена. Однако это не всегда так.

Пример 1

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (3.134)$$

Покажем, что эта функция бесконечно дифференцируема при $x = 0$, и построим для неё ряд Маклорена. Мы вынуждены искать производную по определению, так как функция $f(x)$ “сшита” из двух функций, то есть не является элементарной.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \\ &\quad \Big/ \text{Замена: } y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{y} \Big/ \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = \Big/ \text{правило Лопиталя} \Big/ = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{y}e^y} = 0. \end{aligned}$$

Этот результат является естественным, так как экспонента растет быстрее любой степени.

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(0)}^{=0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2}{x \cdot x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

так как экспонента растет быстрее любой степени. Все следующие производные имеют вид:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0, \quad \text{где } P\left(\frac{1}{x}\right) - \text{полином от } \frac{1}{x}.$$

Итак, $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$, то есть ряд Маклорена состоит из нулей:

$$0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

Разумеется, этот ряд сходится на $(-\infty, +\infty)$. Однако ни в одной точке, кроме $x = 0$, ряд не представляет функцию $f(x)$ (ибо $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$). Таким образом, здесь область сходимости больше области представимости функции рядом Маклорена.

Замечание

Разложение в ряд Маклорена можно использовать для вычисления значений старших производных при $x = 0$.

Пример 2

Найдем n -ую производную для функции $\operatorname{arctg} x$ при $x = 0$. Для этого построим ряд Маклорена для $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots) dt =$$

$$\begin{aligned} & \left/ \text{теорема 29 об интегрировании степенных рядов} \right/ \\ & = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда Маклорена имеют вид: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)^{(2n)} \Big|_{x=0} = 0, \quad (\operatorname{arctg} x)^{(2n+1)} \Big|_{x=0} = (2n+1)! \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n (2n)!.$$

Пример 3

Разложим в ряд по степеням $(x-3)$ функцию $\ln(5+2x)$.

$$\ln(5+2x) = \ln(5 + 2(x-3) + 6) = \ln \left(11 \left(1 + \frac{2}{11}(x-3) \right) \right).$$

$$\ln(5+2x) = \ln 11 + \ln \left(1 + \frac{2}{11}(x-3) \right).$$

Воспользуемся формулой (3.123) для разложения $\ln(1+z)$.

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}.$$

Область сходимости: $-1 < z \leq 1$.

В нашем случае роль z играет выражение $\frac{2}{11}(x-3)$.

Следовательно,

$$\ln(5+2x) = \ln 11 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{11}\right)^n \cdot \frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{n}.$$

Область сходимости: $-1 < \frac{2}{11}(x-3) \leq 1$.

$$-\frac{11}{2} < x-3 \leq \frac{11}{2}.$$

$$-\frac{5}{2} < x \leq \frac{17}{2}.$$

Пример 4

Разложим в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 19}{(x-3)^2(2x+5)}.$$

Разложим $f(x)$ на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 2x + 19}{(x-3)^2(2x+5)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x-3)^2 + B(2x+5)(x-3) + C(2x+5) = x^2 - 2x + 19 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x^2 - 6x + 9) + B(2x^2 - 6x + 5x - 15) + C(2x+5) = x^2 - 2x + 19. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : \quad A + 2B = 1 \\ x^1 : \quad -6A - B + 2C = -2 \\ x^0 : \quad 9A - 15B + 5C = 19 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - 2B \\ -6 + 12B - B + 2C = -2 \\ 9 - 18B - 15B + 5C = 19 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 2B & (I) \\ 11B + 2C = 4 & (II) \\ -33B + 5C = 10 & (III) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} / \\ (II) \cdot 3 + (III) \longrightarrow (III) \end{matrix} /$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 2B \\ 11B + 2C = 4 \\ 11C = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2, \\ B = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{1}{2x+5} + \frac{2}{(x-3)^2}. \quad (3.135)$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии $\left(\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \right)$ разложим $\frac{1}{2x+5}$ в ряд:

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2x}{5} \right)^n, \quad |x| < \frac{5}{2}. \quad (3.136)$$

Заметим, что:

$$\frac{2}{(x-3)^2} = \left(-\frac{2}{x-3} \right)'. \quad (3.137)$$

Дробь $\frac{2}{x-3}$ можно разложить в ряд как геометрическую прогрессию:

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n, \quad |x| < 3. \quad (3.138)$$

Тогда, учитывая формулу (3.137), получим:

$$\frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}, \quad |x| < 3. \quad (3.139)$$

Складывая ряды (3.136) и (3.139), получаем итоговое разложение в ряд для функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2x}{5} \right)^n + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} x^n \right), \quad |x| < \frac{5}{2}. \quad (3.140)$$

4 Ряды Фурье

4.1 Введение

Ряды, как правило, используются для аппроксимации функций. Для приближенного вычисления значения некоторой функции в окрестности заданной точки x_0 хорошо подойдет ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$. Однако если нас интересуют значения функций на большом интервале, то это приближение работает плохо (даже в случае хорошо сходящегося ряда). Например, ряд Маклорена для $\sin x$ сходится к значению функции на всей вещественной оси. Посмотрим, легко ли будет с помощью этого ряда вычислить значение $\sin x$ при $x = 10$.

Ряд Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (4.1)$$

Для вычисления $\sin 10$ будем последовательно выписывать частичные суммы S_n :

$$\begin{aligned} S_1 &= 10, \\ S_2 &= 10 - \frac{10^3}{6} \approx 10 - 167 = -157, \\ S_3 &= 10 - \frac{10^3}{6} + \frac{10^5}{120} \approx -157 + \frac{100000}{120} \approx -157 + 833 = 676, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

что наводит на мысль о расходимости ряда для $\sin x$ при $x = 10$. На самом деле, это не так. В теории рядов Тейлора было доказано, что остаточный член ряда

$r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x$. Это означает, что при достаточно большом n слагаемые с разными знаками сложатся и скомпенсируют друг друга, в результате чего сумма ряда даст правильное значение функции $\sin x$ при $x = 10$. Проблема в том, что для этого придется взять очень большое число слагаемых. Это связано с удаленностью точки $x = 10$ от точки 0, в окрестности которой пишется разложение.

Приблизить функцию во всех точках на большом промежутке помогает другая идея: нужно приближать функцию не в окрестности точки, а в среднем на некотором интервале. На этой идее основано разложение функции в ряд Фурье. Оно родственно хорошо известному разложению вектора по базису в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по этому базису:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (4.3)$$

причем координаты вектора a_x, a_y, a_z можно найти с помощью скалярного произведения:

$$a_x = (\vec{a}, \vec{i}), \quad a_y = (\vec{a}, \vec{j}), \quad a_z = (\vec{a}, \vec{k}). \quad (4.4)$$

Следовательно, разложение вектора по базису имеет вид:

$$\vec{a} = (\vec{a}, \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{a}, \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{a}, \vec{k}) \cdot \vec{k}. \quad (4.5)$$

Подобное разложение можно написать в любом конечномерном евклидовом пространстве. А вот если перейти к бесконечномерному евклидову пространству, то появятся бесконечные суммы (ряды), которые называются рядами Фурье.

4.2 Ортонормированные системы функций

Рассмотрим бесконечномерное евклидово пространство. Нашей целью является разложение векторов пространства в ряды по некоторой заданной системе векторов. Наличие в пространстве скалярного произведения позволяет выбрать наиболее удобные системы для таких разложений. Это ортонормированные системы.

Определение

Система векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной, если $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ при $n \neq m$, и ортонормированной, если:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (4.6)$$

Основная наша задача – это разложение функций в ряды Фурье. Поэтому функции мы будем рассматривать как элементы евклидова пространства. Попробуем выбрать подходящее пространство.

Поскольку мы хотим приближать функции “в среднем”, то для введения нормы требуется интеграл, ибо интегрирование – это операция, суммирующая отклонения по всему промежутку. Самый естественный способ ввести скалярное произведение, приводящее к интегральной норме, – это рассмотрение интеграла от произведения функций. Таким путем мы приходим к одному из возможных евклидовых пространств – пространству $L_2(a, b)$.

Определение

$L_2(a, b)$ – это пространство функций, для которых существует $\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx < \infty$.

Скалярное произведение в $L_2(a, b)$ вводится следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx. \quad (4.7)$$

Замечание

Если рассматриваются комплекснозначные функции, то определение немного меняется:

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \quad (4.8)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Определение

Норма в пространстве $L_2(a, b)$ вводится следующим образом:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx}. \quad (4.9)$$

Определение

Ортогональность двух функций φ и ψ означает, что:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0. \quad (4.10)$$

Определение

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2(a, b)$, если:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (4.11)$$

Тригонометрическая система функций

Рассмотрим систему функций:

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad (4.12)$$

в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$.

Проверим ортогональность системы.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin((n-m)x) - \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)) dx = \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n+m} \cos((n+m)x) - \frac{1}{m-n} \cos((m-n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) dx = \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin((n-m)x) - \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin(2nx) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \quad (4.16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin(2nx) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \quad (4.17)$$

Таким образом, система тригонометрических функций (4.12) ортогональна, но не нормирована в $L_2(-\pi, \pi)$.

Для того чтобы превратить систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированную, разделим каждый вектор на его норму. Полученная система $\left\{ \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ будет нормированной.

В нашем случае:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad (4.18)$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad (4.19)$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi. \quad (4.20)$$

Следовательно, ортонормированная тригонометрическая система функций выглядит так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \quad (4.21)$$

4.3 Ряды Фурье в евклидовом пространстве

Определение

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве E . Пусть $f \in E$. Рядом Фурье вектора f по системе векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (4.22)$$

Числа (f, φ_n) называются коэффициентами Фурье.

Теорема 33 (Единственность разложения в ряд Фурье)

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в E . Пусть $f \in E$. Если вектор f представим в виде:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, \quad (4.23)$$

то выполнено:

$$C_n = (f, \varphi_n). \quad (4.24)$$

Доказательство:

Домножим равенство (4.23) скалярно на вектор φ_k :

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \underbrace{(\varphi_n, \varphi_k)}_{=\delta_{nk}} = C_k. \quad (4.25)$$

Здесь δ_{nk} – это символ Кронекера:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k. \end{cases} \quad (4.26)$$

■

Таким образом, разложение вектора по ортонормированной системе единственно, причем коэффициенты в этом разложении – это коэффициенты Фурье.

Теорема 34 (Ряд Фурье наилучшим образом приближает функцию)

Для каждого вектора $f \in E$, и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, и для любой последовательности чисел $\{\alpha_n\}$, и любого m выполнено:

$$\|f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n) \varphi_n\|. \quad (4.27)$$

Доказательство:

Найдем коэффициенты α_n , при которых сумма $\sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n$ наилучшим образом приближает функцию f . Рассмотрим квадрат нормы их разности.

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n\|^2 &= \left(f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n \right) = (f, f) - \sum_{n=1}^m \alpha_n (\varphi_n, f) - \\ &- \sum_{n=1}^m \alpha_n (f, \varphi_n) + \sum_{n,k=1}^m \alpha_n \alpha_k (\varphi_n, \varphi_k) = \left/ \begin{array}{l} (f, \varphi_n) = C_n \text{ —коэфф. Фурье} \\ (\varphi_n, f) = C_n, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{nk} \end{array} \right/ \\ &= (f, f) - \sum_{n=1}^m \alpha_n C_n - \sum_{n=1}^m \alpha_n C_n + \sum_{n=1}^m C_n C_n + \sum_{n=1}^m \alpha_n \alpha_n - \sum_{n=1}^m C_n C_n = \\ &= (f, f) + \sum_{n=1}^m (\alpha_n - C_n)(\alpha_n - C_n) - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 = \\ &= (f, f) - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 + \sum_{n=1}^m |\alpha_n - C_n|^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Первые два слагаемых не зависят от выбора α_n . Последнее слагаемое неотрицательно. Мы хотим добиться минимального значения всей суммы, которое будет достигнуто, если третье слагаемое равно нулю, то есть $\alpha_n = C_n = (f, \varphi_n)$. Полученное равенство верно для любого $m \in \mathbb{N}$. Выбрав $\alpha_n = C_n$ для каждого n , получим:

$$\|f - \sum_{n=1}^m C_n \varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^m |C_n|^2, \quad (4.29)$$

верное для всех m . Таким образом, минимум нормы достигается на коэффициентах Фурье $C_n = (f, \varphi_n)$.

■

Теорема 35 (Неравенство Бесселя)

Для каждого вектора $f \in E$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \quad (4.30)$$

что означает, в частности, сходимость ряда Фурье (не обязательно к функции f).

Доказательство:

В левой части (4.29) стоит квадрат нормы, то есть неотрицательное число, поэтому $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^m |C_n|^2 \geq 0 \quad \forall m$, то есть частичные суммы положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ ограничены: $\sum_{n=1}^m |C_n|^2 \leq \|f\|^2$. Значит, ряд сходится, и верно неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.31)$$

■

Теорема 36 (Уравнение замкнутости или равенство Парсеваля)

Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве E и для любого вектора $f \in E$ имеет место представление:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n, \quad (4.32)$$

то ряд Фурье для f сходится к вектору f , и выполнено равенство Парсеваля (уравнение замкнутости):

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \quad (4.33)$$

Доказательство:

Домножим скалярно равенство (4.32) на φ_k :

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \underbrace{(\varphi_n, \varphi_k)}_{=\delta_{nk}} = \beta_k, \quad (4.34)$$

то есть коэффициенты в разложении f по базису φ_n есть коэффициенты Фурье

($\beta_k = C_k = (f, \varphi_k)$). Тогда $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n$, следовательно, левая часть в равенстве (4.29) стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Получаем равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \quad (4.35)$$

■

Определение

Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E называется замкнутой, если для любого $f \in E$ выполнено уравнение замкнутости (4.33):

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \quad (4.36)$$

Пусть ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в E . Означает ли это, что любой элемент из E можно представить в виде ряда Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$? В общем случае, нет. Возможность представимости функции рядом Фурье связана с другим свойством системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полнотой.

Определение

Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E называется полной, если в E не существует ненулевых векторов, ортогональных всем векторам

системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то есть из условия

$$\begin{cases} (f, \varphi_n) = 0 & \forall n, \\ f \in E, \end{cases}$$

следует, что $f = 0$.

Утверждение

Если ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в евклидовом пространстве E , то любой вектор $f \in E$ можно представить в виде ряда Фурье

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n. \quad (4.37)$$

Доказательство:

От противного. Пусть существует ненулевой вектор $f \in E$, который нельзя представить в виде (4.37). Значит множество линейных комбинаций φ_n образует подпространство $\mathcal{L}$, не совпадающее с E , а $f \in E$ и $f \notin \mathcal{L}$. Пусть $f_{\mathcal{L}}$ – проекция f на подпространство $\mathcal{L}$ (см. рисунок (18)).

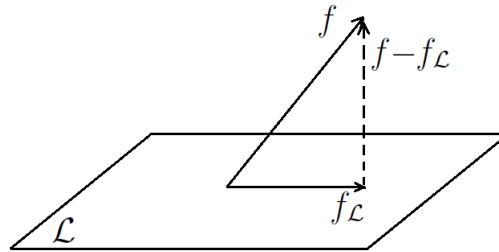


Рис. 18: Построение ортогонального вектора

Тогда $f - f_{\mathcal{L}}$ ортогонален $\mathcal{L}$, то есть $(f - f_{\mathcal{L}}, \varphi_n) = 0, \quad \forall n$. При этом $f - f_{\mathcal{L}} \neq 0$, так как $f \notin \mathcal{L}$, $f_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$. Получили противоречие с полнотой системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$: нашелся ненулевой вектор $f - f_{\mathcal{L}}$, который ортогонален всем $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Следующее свойство рядов Фурье будет выполнено только если мы наложим некоторые ограничения на евклидово пространство, в котором

рассматривается ряд. Пространство должно быть полным. Дадим соответствующие определения.

Определение

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства называется фундаментальной (сходящейся в себе), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n, m > N : \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \quad (4.38)$$

Замечание

Подобное условие встречалось в принципе Больцано-Коши сходимости числовых последовательностей. Однако если на числовой прямой данное условие было необходимым и достаточным условием сходимости, то в произвольном евклидовом пространстве это не обязательно так. Необходимость есть всегда (если последовательность сходится, то она фундаментальная), а достаточность не всегда. Это зависит от свойств пространства.

Определение

Евклидово пространство E называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Определение

Гильбертовым пространством H называется евклидово пространство, полное по норме $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Полнота пространства связана со сходимостью фундаментальных последовательностей. Сходимость последовательности определяется через норму, поэтому изменение определения нормы может повлиять на полноту пространства (например, сделать его полным). Поэтому при определении гильбертова пространства важно указывать способ введения нормы.

Вернемся к изучению свойств рядов Фурье. В теореме 34 речь шла о построении по заданному элементу $f \in E$ последовательности чисел (коэффициентов) таких, что ряд Фурье с этими коэффициентами сходится к f . Теперь зададимся обратным вопросом: можно ли по заданной последовательности чисел построить функцию f , для которой эти числа будут коэффициентами Фурье, а соответствующий ряд Фурье будет сходиться к f ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 37 (Теорема Рисса-Фишера)

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H .

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – любая заданная последовательность вещественных чисел, квадраты которых образуют сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty. \quad (4.39)$$

Тогда существует единственный вектор $f \in H$, для которого числа α_n являются коэффициентами Фурье относительно системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, и для которого имеет место уравнение замкнутости (4.33).

Доказательство:

Составим частичные суммы будущего ряда для вектора f :

$$S_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n. \quad (4.40)$$

Докажем, что последовательность $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальная.

$$\begin{aligned} \|S_m - S_k\|^2 &= \left\| \sum_{n=k+1}^m \alpha_n \varphi_n \right\|^2 = \left(\sum_{n=k+1}^m \alpha_n \varphi_n, \sum_{n=k+1}^m \alpha_n \varphi_n \right) = \\ &= \left/ \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ – ортонормированная система} \right/ = \\ &= \sum_{n=k+1}^m \alpha_n^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{из-за сходимости ряда (4.39)}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Формула (4.41) выполнена для любых достаточно больших m и k . Следовательно, последовательность $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальная. В силу полноты гильбертова пространства она сходится к некоторому элементу f этого пространства:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n \right\|^2 = 0. \quad (4.42)$$

Теперь воспользуемся формулой (4.28). Левая часть в ней стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^m C_n^2 \geq 0$ в силу неравенства Бесселя (4.31).

Значит, $\alpha_k = C_k$,

$k = 1, 2, 3, \dots$, то есть α_k — это коэффициенты Фурье вектора f .

Согласно формуле (4.42)

$$f = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n. \quad (4.43)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n \right\|^2 = \left/ \text{аналогично формуле (4.41)} \right/ = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{(по доказанному)}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Таким образом, для вектора f имеет место уравнение замкнутости (4.33). Осталось доказать единственность такого f . От противного. Пусть существует еще вектор g с теми же свойствами. Тогда частичная сумма S_m из формулы (4.40) есть отрезок ряда Фурье как для f , так и для g , и последовательность S_m сходится как и к f , так и к g . Следовательно, $f = g$, ибо у последовательности двух пределов быть не может.

■

Подведем итог. Мы научились в произвольном гильбертовом пространстве строить ряды Фурье по ортонормированным системам функций и

установили условие, обеспечивающее представимость функции ее рядом Фурье (равенство Парсеваля). Это обосновано в теоремах 36 и 37. Теорема 36 показывает как по заданному вектору f построить коэффициенты Фурье C_n . Теорема 37 объясняет переход в обратную сторону: как по заданной последовательности чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ построить вектор f , для которого они будут коэффициентами Фурье.

Далее мы рассмотрим практическое приложение полученных результатов – ряд Фурье по тригонометрической системе функций.

4.4 Тригонометрические ряды Фурье

Общий ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E имеет вид (4.22):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, \quad \text{где } C_n = (f, \varphi_n). \quad (4.45)$$

Рассмотрим пространство $L_2(-\pi, \pi)$ со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \psi(x) dx. \quad (4.46)$$

Возьмем тригонометрическую систему функций

$$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\},$$

которая является ортонормированной в $L_2(-\pi, \pi)$ (ортонормированность ранее уже проверялась, формула (4.21)).

Теорема 38 (Теорема о полноте системы тригонометрических функций)

Система тригонометрических функций

$$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\} \quad (4.47)$$

полна в $L_2(-\pi, \pi)$.

Без доказательства.

Напишем ряд Фурье для функции $f \in L_2(-\pi, \pi)$ по ортонормированной системе функций (4.47):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (4.48)$$

Рассмотрим один из членов ряда Фурье, содержащий функцию $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$. Соответствующий коэффициент Фурье имеет вид:

$$C_n = (f, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx. \quad (4.49)$$

Следовательно, слагаемое ряда Фурье таково:

$$\begin{aligned} (f, \varphi_n) \varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right) \cos nx. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Проводя аналогичные преобразования с другими членами ряда, получаем **тригонометрический ряд Фурье**:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.51)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (4.52)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.53)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.54)$$

4.5 Сходимость рядов Фурье. Теорема Дирихле

Если функция $f(x)$ непрерывна (или хотя бы кусочно-непрерывна) на отрезке $[-\pi, \pi]$, то можно говорить о ряде Фурье для этой функции и его сходимости. Обычно сумма ряда Фурье функции $f(x)$ существует и равна самой функции $f(x)$, но может оказаться, что ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ не сходится вовсе или же сходится, но к какой-нибудь другой функции.

На вопросы сходимости отвечает теорема Дирихле. Но перед этим введем некоторые понятия.

Определение

Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок разбивается на конечное число отрезков

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_n, b],$$

в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

В теории пределов было доказано, что монотонная функция всегда имеет предел: конечный или бесконечный. Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[a, b]$, то в любой внутренней точке этого отрезка существуют левый и правый пределы её значений:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) &= f(c-0), \\ \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) &= f(c+0).\end{aligned}$$

Теорема 39 (Теорема Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье)

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной. Тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$, причем

сумма ряда $S(x)$ такова:

во всех точках непрерывности этой функции

$$S(x) = f(x), \quad (4.55)$$

а во всех точках разрыва

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)). \quad (4.56)$$

На краях отрезка сумма ряда равна:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi-0) + f(-\pi+0)). \quad (4.57)$$

Без доказательства.

4.6 Изменение сегмента разложения

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье на произвольном отрезке $[a, b]$.
Сделаем это в 2 этапа.

1. Сдвиг сегмента разложения

Лемма

Для любой периодической функции φ с периодом T будет выполнено:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x) dx = \int_a^{a+T} \varphi(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4.58)$$

Доказательство:

$$\int_a^{a+T} \varphi(x) dx = \int_a^{-\frac{T}{2}} \varphi(x) dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x) dx + \int_{\frac{T}{2}}^{a+T} \varphi(x) dx.$$

Сделаем замену: $y = x - T \Leftrightarrow x = y + T$.

Тогда:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{a+T} \varphi(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^a \varphi(y+T) dy = \int_{-\frac{T}{2}}^a \varphi(y) dy = - \int_a^{-\frac{T}{2}} \varphi(y) dy.$$

Следовательно,

$$\int_a^{a+T} \varphi(x) dx = \int_a^{-\frac{T}{2}} \varphi(x) dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x) dx - \int_a^{-\frac{T}{2}} \varphi(y) dy = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x) dx.$$

■

Лемма показывает, что система функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной не только на отрезке $[-\pi, \pi]$, но и на любом отрезке вида $[a, a + 2\pi]$, так как понятие ортонормированности определялось с помощью интегралов, которые не изменяют своего значения при сдвиге сегмента.

Таким образом, при вычислении коэффициентов Фурье 2π -периодической функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно интегрировать по любому другому отрезку вида $[a, a + 2\pi]$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (4.59)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (4.60)$$

2. Изменение длины сегмента разложения

Разложим функцию $f(x)$ на произвольном отрезке вида $[a, a + 2l]$. Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{l}{\pi} t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{l} x. \quad (4.61)$$

Тогда функция $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ будет как функция от t задана на отрезке $\left[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi\right]$, длина которого 2π . Для этой функции будет справедливо разложение в ряд Фурье (4.51):

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nt + b_n \cdot \sin nt), \quad (4.62)$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам (4.59), (4.60):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cdot \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.63)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cdot \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.64)$$

Так как $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ – это 2π -периодическая функция, то можно сдвинуть промежуток интегрирования:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cdot \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cdot \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

Сделаем обратную замену $t = \frac{\pi}{l}x$ в формулах (4.62), (4.65), (4.66) и получим разложение функции $f(x)$ на произвольном отрезке $[a, a + 2l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l}x + b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l}x \right), \quad (4.67)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{\pi n}{l}x \, dx, \quad (4.68)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l}x \, dx. \quad (4.69)$$

4.7 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Четные и нечетные функции

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то есть является на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной. Условие кусочной непрерывности и ограниченности означает, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция может иметь лишь конечное число разрывов типа скачка.

Рассмотрим 2 частных случая функции $f(x)$:

1) Если функция четная, то $f(-x) = f(x)$ и выполнено:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx. \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx \Big/ \text{Замена: } \begin{matrix} x=-y \\ dx=-dy \end{matrix} \Big/ = \\ &= \int_{\pi}^0 f(-y) d(-y) + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^0 f(-y) d(-y) \Big/ f(-y) = f(y) \Big/ = \\ &= - \int_{\pi}^0 f(y) dy + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(y) dy + \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

2) Если функция нечетная, то $f(-x) = -f(x)$ и выполнено:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0. \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
& \left/ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \right/ \text{Замена: } \begin{matrix} x=-y \\ dx=-dy \end{matrix} \left/ = \right. \\
& = \int_{\pi}^0 f(-y) d(-y) + \int_0^{\pi} f(x) dx = \left/ f(-y) = -f(y) \right/ = \\
& = \int_{\pi}^0 f(y) dy + \int_0^{\pi} f(x) dx = - \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = 0 \left/
\end{aligned}$$

Замечание

Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании.

Разложение четной функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является четной. Тогда $f(x) \cdot \sin nx$ – нечетная функция и выполнено:

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = 0. \quad (4.72)$$

$f(x) \cdot \cos nx$ будет четной функцией. Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx, \quad (4.73)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.74)$$

Такое разложение в ряд Фурье называется разложением функции $f(x)$ в ряд “по косинусам”.

Разложение нечетной функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет услови-

ям Дирихле и является нечетной. Тогда $f(x) \cdot \cos nx$ – тоже нечетная функция и выполнено:

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = 0. \quad (4.75)$$

$f(x) \cdot \sin nx$ будет четной функцией. Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx, \quad (4.76)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.77)$$

Такое разложение в ряд Фурье называется разложением функции $f(x)$ в ряд “по синусам”.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

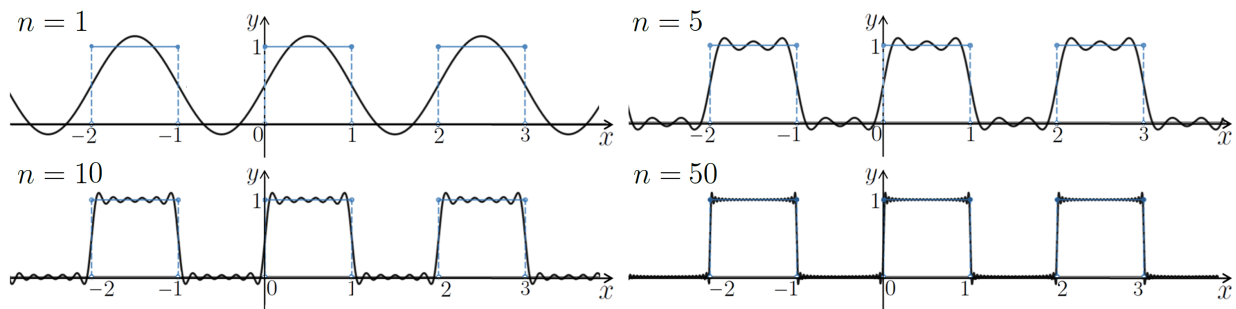


Рис. 19: Ряд Фурье периодически продолженной функции $f(x)$ при различных n

Ряды Фурье используются, например, при описании прохождения сигналов через электрические цепи, содержащие ёмкости и индуктивности. Прохождение через такую схему синусоидального сигнала описывается очень просто по закону Ома, но если сигнал отличается от синусоидального, задача усложняется (требуется решать дифференциальные

уравнения). Однако если разложить произвольный периодический сигнал в тригонометрический ряд Фурье, то для каждого слагаемого легко найти результат прохождения через заданную цепь. Поэтому если цепь линейна, то надо исходный сигнал разложить в тригонометрический ряд Фурье, найти для каждого слагаемого результат прохождения через цепь и сложить ряд Фурье этих результатов на выходе. Сумма ряда даст сигнал на выходе.

При суммировании рядов Фурье для функций, имеющих разрывы типа скачков, наблюдается так называемое явление Гиббса. Оно связано с неравномерной сходимостью ряда Фурье. Члены ряда (синусоиды) – непрерывные функции. По теореме о непрерывности суммы ряда, равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций сходится к непрерывной функции. Поэтому ряд Фурье для разрывной функции не может сходиться равномерно.

Если рассматривать последовательность частичных сумм, то в окрестности точки разрыва будут наблюдаться пики частичных сумм, которые с ростом числа слагаемых в сумме не уменьшаются по высоте, а лишь сужаются (подробно это явление рассматривалось в параграфе 2.2 “Равномерная сходимость”, пример 2 на стр. 34). А именно, высота такого пика в пределе составляет 0.17 от величины скачка функции. Эти пики используют в электротехнике для определения крутизны фронта импульса.

На практике явление Гиббса используют в радиолокации. Радиолокационная станция излучает прямоугольные импульсы и принимает отраженные от объекта импульсы. По времени между излучением импульса и приемом отраженного находится расстояние до объекта.

Для точного определения расстояния требуется, чтобы сигнал был прямоугольным с вертикальным передним фронтом, то есть функция, описывающая форму импульса, должна иметь разрыв-скачок.

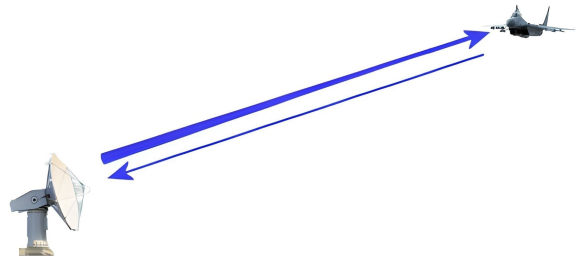


Рис. 20: Принцип радиолокации

К сожалению, реальные электрические цепи имеют конечную полосу пропускания, то есть не пропускают частоты выше определенного предела. С точки зрения рядов Фурье это означает, что на выходе цепи будет не сумма ряда, а лишь его частичная сумма.

Члены ряда Фурье с большими номерами будут потеряны, так как соответствующие им частоты выходят за границу полосы пропускания. Ряд Фурье для функции, имеющей скачок, сходится неравномерно, поэтому должно наблюдаться явление Гиббса, то есть пик в окрестности скачка функции (фронта импульса). Замеряя этот пик и сравнивая его высоту с известным значением 0.17 для идеального вертикального фронта импульса, определяют, достаточно ли крутизна фронта реального импульса (чем ближе к 0.17, тем круче фронт импульса).

4.8 Разложение в ряд Фурье функций на отрезке $[0, \pi]$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \pi]$. Разложим её в ряд Фурье на этом отрезке. Для этого нужно доопределить $f(x)$ на $[-\pi, 0]$. Мы получим функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$. Так как функция $f(x)$ в реальности задана только на отрезке $[0, \pi]$, то и полученный ряд Фурье нужно рассматривать только для тех значений x , которые расположены на отрезке $[0, \pi]$.

Очевидно, что получившийся ряд будет зависеть от того, как именно мы произведем доопределение на $[-\pi, 0]$. Рассмотрим 2 варианта.

1) Продолжим функцию $f(x)$ четным образом:

$$f(-x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Тогда мы получим четную функцию, которая раскладывается в ряд по косинусам.

2) Продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на $(-\pi, 0)$:

$$f(-x) = -f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Возьмем $f(-\pi) = -f(\pi)$. Полученная функция будет нечетной или, возможно, отличается от нечетной в точке $x = 0$ (если $f(0) \neq -\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$).

Однако изменение значения функции в одной точке не влияет на значение интеграла от неё. Таким образом, мы получим нечетную функцию, которая раскладывается в ряд по синусам.

Два различных ряда Фурье получились, так как мы раскладывали в ряды различные функции на $[-\pi, \pi]$. Однако на отрезке $[0, \pi]$ эти функции совпадают. Если не рассматривать значения аргумента из промежутка $[-\pi, 0)$, то мы получили два различных разложения для функции $f(x)$ на промежутке $[0, \pi]$.

Пример 1

Пусть функция $f(x) = x$ задана на отрезке $[0, \pi]$. Разложим её в ряд Фурье по косинусам. Для этого продолжим функцию $f(x)$ четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$:

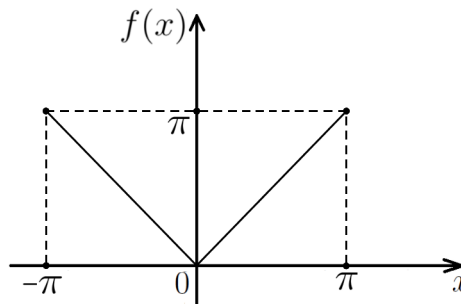


Рис. 21: Функция $f(x)$ продолжена четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$

Полученную функцию продолжим периодически:

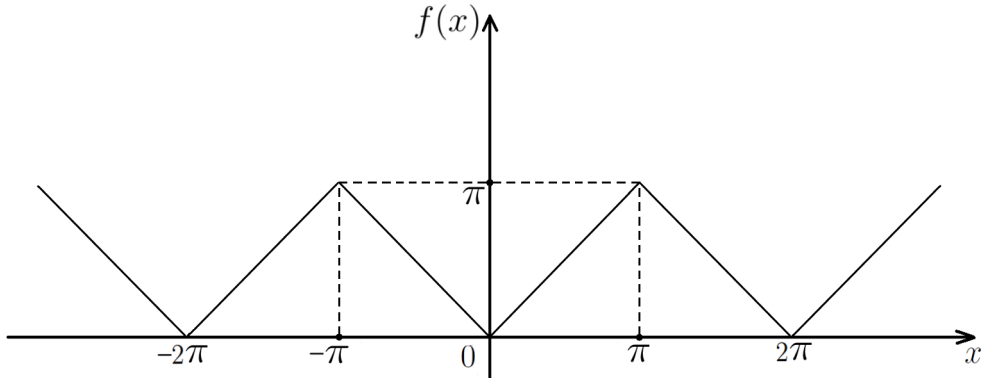


Рис. 22: Периодически продолженная функция

Обозначим за $S(x)$ сумму ряда. Тогда ряд Фурье для продолженной функции будет иметь следующий вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx,$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \underbrace{\frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &\quad \Big/ \begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \quad du = dx \quad dv = \cos nx \, dx \Big/ \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \quad - \text{ верно при } n \neq 0. \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим случай $n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cdot \cos nx. \quad (4.78)$$

График суммы ряда $S(x)$ совпадает с графиком продолженной функции $f(x)$. Это следует из теоремы Дирихле, так как функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 2

Разложим функции $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам.

Для этого продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на интервал $(-\pi, 0)$.

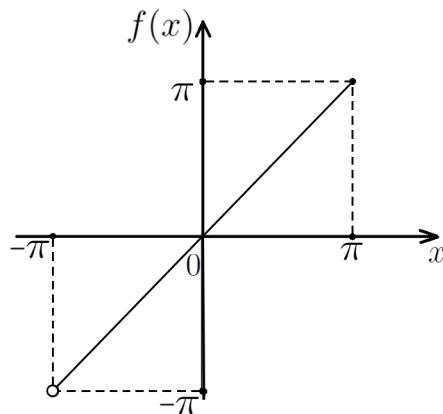


Рис. 23: Функция $f(x)$ продолжена нечетным образом на интервал $(-\pi, 0)$

Полученную функцию продолжим периодически:

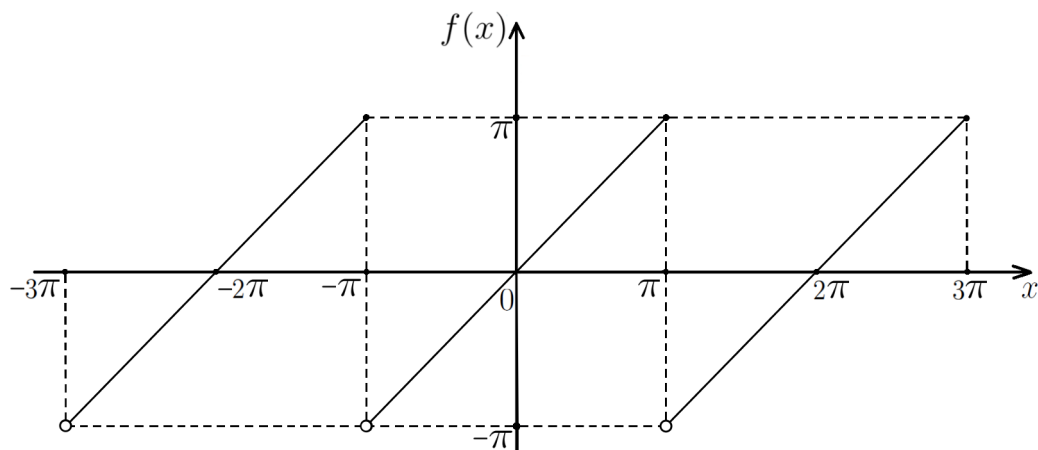


Рис. 24: Периодическая функция

4.9 Разложение функции в показательный ряд Фурье

Запишем тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.80)$$

Формулы Эйлера позволяют перейти от тригонометрических функций к экспонентам с комплексными показателями:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}. \quad (4.81)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot i \cdot \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2} \right). \quad (4.82)$$

Приведем подобные члены, объединив степени с одинаковыми показателями:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right). \quad (4.83)$$

Введем обозначения:

$$\frac{a_0}{2} = C_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = C_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = C_{-n}. \quad (4.84)$$

Тогда получим:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \cdot e^{-inx} \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx}. \quad (4.85)$$

Мы получили разложение функции в **показательный ряд Фурье** (ряд Фурье в комплексной форме). Коэффициенты этого ряда:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos nx - i \sin nx) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos(-nx) + i \sin(-nx)) dx = \int e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \int \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 C_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \underbrace{(\cos nx + i \sin nx)}_{e^{inx}} dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i(-n)x} dx.
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Формулы (4.86) и (4.87) можно объединить в одну:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \tag{4.88}$$

– коэффициенты ряда Фурье (4.85), записанного в комплексной форме.

4.10 Интеграл Фурье

Изложение теории рядов Фурье мы закончим исследованием предельного случая, когда промежуток $(-l, l)$, в котором изучается ряд Фурье, стремится к $(-\infty, +\infty)$, то есть $l \rightarrow +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна во всяком конечном промежутке. Предположим также, что $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то есть существует инте-

грал

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = M < +\infty. \quad (4.89)$$

По теореме Дирихле внутри $(-l, l)$ мы имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (4.90)$$

Учитывая выражения для коэффициентов Фурье (4.68), (4.69):

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad (4.91)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt, \quad (4.92)$$

формулу (4.90) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{\pi n t}{l} dt \right) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + \\ &\quad + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cdot \sin \frac{\pi n t}{l} dt \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \Leftrightarrow \\ f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \left(\cos \frac{\pi n}{l} t \cos \frac{\pi n}{l} x + \sin \frac{\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x \right) dt \\ &\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{\pi n}{l} (t - x) dt. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Посмотрим, что произойдет с формулой (4.93) при $l \rightarrow +\infty$. Нетрудно убедиться в том, что первое слагаемое стремится к нулю:

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{M}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.94)$$

Введем новую переменную α , которая принимает равноотстоящие значения в промежутке $(0, \infty)$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \dots \quad (4.95)$$

Тогда приращения $\Delta\alpha_n$ примут вид:

$$\Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha, \quad (4.96)$$

то есть $\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi} \cdot \Delta\alpha$. Тогда второе слагаемое в формуле (4.93) можно записать в виде:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt. \quad (4.97)$$

При больших l интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha_n(t-x) dt. \quad (4.98)$$

Нетрудно увидеть, что выражение (4.97) представляет собой интегральную сумму и при $l \rightarrow +\infty$ будет стремиться к пределу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt. \quad (4.99)$$

Итак, получаем окончательный результат для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt. \quad (4.100)$$

В точках разрыва непрерывности (если такие есть) нужно заменить $f(x)$ на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Формула (4.100), которую мы получили из ряда Фурье при $l \rightarrow +\infty$, называется **формулой Фурье**. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 40 (Теорема Фурье)

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном промежутке и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то при всех x имеет место равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (4.101)$$

Интеграл, стоящий в левой части формулы, называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Замечание

Приведенные выше рассуждения по доказательству теоремы Фурье не являются строгими, но объясняют способ перехода от ряда Фурье к интегралу Фурье. В обосновании нуждается переход от “интегральной” суммы к несобственному интегралу $\int_0^{\infty} d\alpha \dots$.

4.11 Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

Воспользуемся формулами Эйлера и преобразуем интеграл Фурье (4.101) к комплексной форме:

$$\begin{aligned} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \\ &\quad / \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \cos \alpha(t-x) = \frac{e^{i\alpha(t-x)} + e^{-i\alpha(t-x)}}{2} / \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha = \\ &\quad / \text{Заменим переменную в первом интеграле: } \tilde{\alpha} = -\alpha, \quad d\tilde{\alpha} = -d\alpha / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\tilde{\alpha}(t-x)} dt \right) d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\tilde{\alpha}(t-x)} dt \right) d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha = \\
&= \text{ / аддитивность интеграла / } = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Полученная формула называется разложением функции $f(x)$ в **интеграл Фурье в комплексной форме**.

Преобразование Фурье

Интеграл Фурье в комплексной форме (4.102) может быть истолкован на языке операторов (преобразований).

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда формулу (4.102) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right)}_{F(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Функция $F(\alpha)$ называется **преобразованием Фурье** функции $f(t)$:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt. \tag{4.104}$$

Тогда формула (4.103) примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \tag{4.105}$$

Формула (4.105) определяет **обратное преобразование Фурье**.

Основное применение преобразования Фурье – это решение дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных.

5 Заключение

В данном пособии мы последовательно изучили основные понятия, методы исследования и фундаментальные теоремы, связанные с числовыми и функциональными рядами. Появившись как естественное обобщение понятия конечной суммы на случай бесконечного числа слагаемых, ряды очень быстро заняли центральное место в математическом анализе и вышли далеко за его пределы. Сегодня без них невозможно представить ни один серьёзный раздел математики, физики, инженерных наук и теории данных.

Ряды в вычислительной математике

Прежде всего, ряды лежат в основе приближённых вычислений. Значения подавляющего большинства функций – даже таких привычных, как e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$ – на практике вычисляются именно через их разложения в степенные ряды. Например,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

и аналогичные формулы позволяют с любой наперёд заданной точностью находить значения этих функций, причём погрешность легко контролируется с помощью остаточного члена. Современные вычислительные библиотеки, встроенные в процессоры и микроконтроллеры, в значительной степени опираются именно на такие разложения.

Локальное и глобальное приближение функций

Если наша цель состоит не просто в вычислении значения функции в точке, а в построении её приближения в окрестности некоторой точки x_0 , на первый план выходит ряд Тейлора (а в частном случае $x_0 = 0$, ряд Маклорена):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Он даёт наилучшее полиномиальное приближение в смысле совпаде-

ния производных и незаменим при локальном анализе поведения функций. Если же требуется приближение не в одной точке, а “в среднем” на целом интервале, то есть минимизация среднеквадратичной ошибки $\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx$, то понадобятся ряды Фурье по ортогональным системам функций. Именно они обеспечивают оптимальную аппроксимацию периодических и кусочно-гладких функций на заданном отрезке и составляют теоретическую основу спектрального анализа сигналов, сжатия данных (форматы JPEG, MP3) и цифровой обработки изображений.

Ряды и дифференциальные уравнения

Ряды являются одним из ключевых инструментов решения дифференциальных уравнений. Методы разложения решения в степенной ряд, метод последовательных приближений Пикара – всё это опирается на теорию рядов. Примечательно, что основоположник математического анализа Исаак Ньютон решал дифференциальные уравнения исключительно с помощью рядов: в своих работах 1660-1670-х годов он искал решения в виде бесконечных степенных разложений и последовательно определял коэффициенты. Когда же мы переходим от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям математической физики – уравнениям в частных производных (волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа, уравнение Шрёдингера), – метод разделения переменных неизбежно приводит к задачам Штурма-Лиувилля и, как следствие, к рядам Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора. Без этого аппарата невозможно решить ни одну краевую задачу для уравнений теплопроводности, колебаний струны или распространения электромагнитных волн.

Ряды и квантовая физика

Особую роль ряды и связанные с ними интегральные преобразования играют в теоретической физике. Преобразование Фурье в квантовой механике – это не просто математическая операция, а переход от коор-

динатного представления волновой функции $\psi(x)$ к импульсному представлению $\tilde{\psi}(p)$, то есть смена базиса, в котором описывается состояние частицы. Само рождение квантовой теории неразрывно связано с рядами. В 1900 году Макс Планк, решая задачу об излучении абсолютно чёрного тела, заменил непрерывный интеграл по энергиям осцилляторов на дискретную сумму – ряд по целочисленным энергетическим уровням $E_n = nh\nu$. Именно этот, на первый взгляд технический, шаг привёл к появлению кванта действия h и открыл эпоху квантовой механики.

Ряды в теории вероятностей и статистике

Не обходятся без рядов и теория вероятностей с математической статистикой. Производящие функции вероятностей, характеристические функции, разложения плотности распределения по ортогональным полиномам (Эрмита, Лагерра, Лежандра), метод моментов, асимптотические разложения в центральной предельной теореме – всё это непосредственно опирается на аппарат рядов. В математической статистике ряды Фурье используются при оценке спектральной плотности временных рядов.

Будущее грядёт

Перечисленные приложения далеко не исчерпывают возможностей теории рядов. С ними вы встретитесь в курсах функционального анализа (ряды в банаховых и гильбертовых пространствах), комплексного анализа (ряды Лорана и вычеты), теории чисел (ряды Дирихле и дзета-функция Римана), теории управления, машинном обучении (ядерные методы и разложения по базисным функциям) и во множестве других дисциплин. Таким образом, теория рядов – это не изолированный раздел анализа, а универсальный язык, на котором говорит практически вся современная наука. Уверенное владение этим аппаратом станет для вас надёжной основой при изучении специальных курсов и решении прикладных задач.

6 Контрольные вопросы

Контрольные вопросы для самопроверки. Вопросы сгруппированы по главам.

Глава 2. Числовые ряды

1. Верно ли, что если ряд сходится, то и любой из его остатков сходится? А если сходится какой-то из остатков, то сходится ли весь ряд?
2. Если общий член ряда стремится к нулю, то следует ли отсюда, что ряд сходится? А если общий член ряда не стремится к нулю, то следует ли отсюда, что ряд расходится?
3. Утверждения: “Ряд имеет сумму” и: “Ряд сходится” эквивалентны или нет?
4. Применим ли признак сравнения к знакопеременным рядам?
5. Если мы нашли предел отношения $n + 1$ члена ряда к n -ому, всегда ли мы сможем сделать вывод о сходимости положительного ряда?
6. Как использовать несобственные интегралы для выяснения сходимости положительных числовых рядов?
7. Сформулируйте принцип сходимости Больцано-Коши (критерий Коши) для сходимости ряда.
8. Верно ли, что если ряд расходится абсолютно, то он расходится?
9. Для знакочередующегося ряда: какое условие нужно добавить к необходимому условию сходимости, чтобы получился достаточный признак сходимости ряда?
10. Что такое преобразование Абеля для рядов?

11. Меняется ли сумма абсолютно сходящегося ряда от перестановки его членов? А что будет в случае условно сходящегося ряда?

Глава 3. Функциональные ряды

1. Что такое область сходимости ряда?
2. Чем отличается обычная сходимость последовательности функций от равномерной сходимости на некотором множестве?
3. Как определяется равномерная сходимость ряда?
4. Назовите достаточные условия для того, чтобы ряд можно было почленно интегрировать.
5. Назовите достаточные условия для того, чтобы ряд можно было почленно дифференцировать.
6. Какой вид может иметь область сходимости степенного ряда? Укажите все известные вам варианты.
7. Можно ли степенной ряд почленно интегрировать и дифференцировать внутри его области сходимости?
8. Как меняется при интегрировании и дифференцировании радиус сходимости ряда?
9. Какой вид имеет ряд Тейлора?
10. Может ли ряд Тейлора сходиться в какой-то точке к числу, отличному от значения функции, для которой он построен?
11. Как выглядят ряды Маклорена основных элементарных функций?

Глава 4. Ряды Фурье

1. Что такое евклидово пространство?

2. Какая система называется ортонормированной?
3. Как определяется скалярное произведение в $L_2(a, b)$?
4. Как определяется ряд Фурье?
5. Является ли ряд Фурье наилучшим приближением функции?
6. Что такое неравенство Бесселя и равенство Парсеваля?
7. Какое евклидово пространство называется полным?
8. Какой вид имеет тригонометрический ряд Фурье?
9. Что говорит теорема Дирихле о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье?
10. Как представить на отрезке функцию тригонометрическим рядом Фурье, содержащим только синусы или только косинусы?
11. Как строится показательный ряд Фурье?
12. Как задаются прямое и обратное преобразования Фурье?

Список литературы

- [1] Воробьев Н. Н. Теория рядов. 6-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2002, 407 с.
- [2] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2. Москва: “Альянс”, 2021, 544 с.
- [3] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 624 с.
- [4] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 2. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 848 с.
- [5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 19-е изд., стер. Санкт-Петербург: “Лань”, 2026, 800 с.
- [6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. 16-е изд., стер. Санкт-Петербург: “Лань”, 2026, 672 с.

Попов Антон Игоревич
Попов Игорь Юрьевич
Блинова Ирина Владимировна

Математический анализ. Часть 3. Ряды

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А