

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



**ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ**

**А.Н. Коровьяков, С.А. Сударчиков,  
А.В. Ушаков**

**СЛЕДЯЩИЙ ОПТО-ЭЛЕКТРОННЫЙ МОНИТОРИНГ  
ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЮСТИРОВКИ  
УСТРОЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАБЛЮДЕНИЯ**



**Санкт-Петербург**

**2008**

УДК 621.396:62.50:681.3

Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2008.

Рецензенты: д.т.н. И.А. Коняхин, д.т.н. В.Т. Шароватов,.

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие рассчитано на круг студентов, получающих подготовку специалиста – инженера, бакалавров, получающих подготовку магистра, по специальностям и направлениям, которые по окончании университета могли бы образовать творческий коллектив для решения *комплексной задачи «организации автоматизированного следящего опто-электронного мониторинга деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения»*. По мнению авторов такой творческий коллектив могли бы составить выпускники университета, обучающиеся по специальностям подготовки специалистов – инженеров 200203 – *«оптико-электронные приборы и системы»* и 220201 – *«управление и информатика в технических системах»*, а также по направлениям подготовки магистров 200100 – *«приборостроение»*, 200200 – *«оптотехника»* и 220200 – *«автоматизация и управление»*.

При написании учебного пособия авторы опирались на опыт, накопленный ими при решении заявленной комплексной проблемы, вынесенный в название книги, применительно к *устройству пространственного наблюдения*, представляющему собой *большой полноповоротный радиотелескоп* с диаметром раскрыва главного рефлектора 32 и 64 метров, функционирующий в условиях деформации элементов его металлоконструкций.

Пособие может быть рекомендовано аспирантам, обучающимся по специальностям: 05.11.07. – *«Оптические и оптико-электронные приборы и комплексы»*, 05.13.01.- *«Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)»*, а также молодым специалистам, имеющим дело с автоматическим следящим опто-электронным мониторингом деформаций.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.



ISBN 5-7577-0316-4(978-5-7577-0316-9)

© Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. 2008

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики. 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....	10
ВВЕДЕНИЕ .....	13
1. ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫМ РАДИОТЕЛЕСКОПОМ.....	19
1.1. Радиотелескоп как радиоастрономический инструмент.....	19
1.2. Проблемы управления радиотелескопом в условиях деформаций его металлоконструкций .....	25
1.3. Алгоритмы фокусно-угловой компенсации деформаций компонентов радио-оптической системы радиотелескопа.....	28
1.4. Информационное обеспечение алгоритмов фокусно-угловой компенсации .....	32
2. ФАКТОР ИНТЕРВАЛЬНОСТИ В МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМЫМ РАДИОТЕЛЕСКОПОМ.....	38
2.1. Элементы интервальных вычислений и линейной алгебры.....	38
2.2. Интервальные модельные представления процессов деформации элементов металлоконструкции радиотелескопа .....	45
2.3. Интервальные модельные представления измерительных следающих систем .....	
2.4. Интервальная линеаризация нелинейных динамических систем.....	62
3. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА В.Л. ХАРИТОНОВА В ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ НЕОБХОДИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ .....	67
3.1. Основной результат В.Л. Харитонова в исследовании робастной устойчивости интервальных характеристических полиномов.....	67
3.2. Конструирование интервальных показателей качества с оценками их интервальности с помощью основной теоремы В.Л. Харитонова .....	71
3.3. Анализ робастной устойчивости нелинейных систем на основе интервально линеаризованных представлений.....	76
3.4. Анализ динамических свойств интервальных систем при конечномерном задающем воздействии.....	80
4. МЕДИАННОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С КОНТРОЛЕМ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА .....	90
4.1. Базовый алгоритм синтеза модального управления объектами с полной параметрической определенностью как алгоритм синтеза медианного модального управления на основе решения уравнения Сильвестра .....	90

4.2. Алгоритм синтеза медианного модального управления с контролем оценки относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы .....	93
4.3. Управление интервальностью матрицы состояния системы с одновременным решением задачи слежения с нулевой ошибкой за конечномерным задающим воздействием, на основе принципа внутренней модели .....	97
4.4. Аппарат теории чувствительности в задаче оценки показателей качества интервальных систем с гарантированной относительной интервальностью матричных компонентов модельного представления .....	102
5. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ КОНТРОЛЯ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ВЕРХНЕГО ОПОРНОГО УЗЛА БОЛЬШОГО ПОЛНОПОВОРОТНОГО РАДИОТЕЛЕСКОПА НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ.....	109
5.1. Схема измерений деформаций верхнего опорного узла. Функциональный состав системы контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла.....	109
5.2. Формирование требований к динамическим свойствам ФЭСС системы контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла полноповоротного радиотелескопа типа ТНА-1500...	115
5.3. Интервальное модельное представление исходных функциональных компонентов ФЭСС СКУЛД.....	121
5.4. Синтез алгоритмов управления фотоэлектрическими следящими системами контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла .....	134
5.5. Оценка показателей качества системы контроля угловых и линейных деформаций ВОУ радиотелескопа .....	148
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	166
Приложение 1. Конструкция и характеристики РТФ-64.....	168
Приложение 2. Угловые и линейные перемещения контррефлектора .....	170
Приложение 3. Матрицы преобразования лучевых векторов.....	171
Приложение 4. Матричное описание разъюстировки и децентрировки оптической системы .....	174
Приложение 5. Оптико-механические компенсаторы.....	176
Приложение 6. Полиномиальные динамические модальные модели .....	181
Приложение 7. М – файл _1.....	187
Приложение 8. М – файл _2.....	188
Приложение 9. М – файл _3.....	189

ПРИЛОЖЕНИЕ 10. М – ФАЙЛ_4 .....	190
ПРИЛОЖЕНИЕ 11. М – ФАЙЛ_5 .....	191
ПРИЛОЖЕНИЕ 12. М – ФАЙЛ_6 .....	194
ПРИЛОЖЕНИЕ 13. М – ФАЙЛ_7 .....	197
ЛИТЕРАТУРА .....	200
НАУЧНАЯ ШКОЛА КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ДИНАМИКИ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ ОПИСАНИЯМИ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ И КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ .....	205
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....	210
ОБ АВТОРАХ.....	212

*Посвящается памяти  
Павла Викторовича Николаева и  
Юрия Алексеевича Сабинина*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Появление книги «Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения» вызвано потребностью хотя бы частично обобщить результаты работ, проводившихся в стенах Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (СПбГУИТМО) в течение последних двадцати лет по разработке теории и созданию аппаратуры автоматизированного опто-электронного контроля деформаций элементов металлоконструкций больших полноповоротных радиотелескопов (РТ) типа ТНА-400 (РТФ-32) и ТНА-1500 (РТФ-64) с диаметром раскрыва главного рефлектора соответственно 32 и 64 метра. Это делается с целью адаптации полученных научно-технического опыта и практических результатов к задачам учебного процесса по подготовке студентов старших курсов к решению комплексной задачи *«организации автоматического следящего опто-электронного мониторинга деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения»* в составе творческого коллектива, образованного из специалистов различных специальностей. По мнению авторов, такой творческий коллектив могли бы составить выпускники университета, обучающиеся по специальностям подготовки специалистов – инженеров 200203 – *«оптико – электронные приборы и системы»* и 220201 – *«управление и информатика в технических системах»*, а также по направлениям подготовки магистров 200100 – *«приборостроение»*, 200200 – *«оптотехника»* и 220200 – *«автоматизация и управление»*.

При написании учебного пособия авторы опирались на опыт, накопленный ими при решения заявленной комплексной проблемы, вынесенный в название книги, применительно к *устройству пространственного наблюдения*, представляющему собой большой полноповоротный радиотелескоп с диаметром раскрыва главного рефлектора 32 и 64 метров, функционирующий в условиях деформации элементов его металлоконструкций, вызванных гравитационными (весовыми), ветровыми, от ускорений, от солнечного нагрева и остужающего действия ветра воздействиями.

Крупные устройства пространственного наблюдения в основном представлены классом больших полноповоротных радиотелескопов (РТ), они являются проблемным предметом рассмотрения в предлагаемой вниманию читателей книге. В книге на основе анализа проблемы наведения устройства пространственного наблюдения, реализованного конструктивно в форме РТ, на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН) с требуемой точностью, в условиях действия деформирующих факторов на элементы

металлоконструкций (МК) РТ, приводящих к разъюстировке радио-оптической системы (РОС) РТ, показывается необходимость ее динамической юстировки (ДЮ). Динамическая юстировка РОС осуществляется системой фокусно-угловой компенсации деформаций элементов МК РТ, задающие воздействия следящим приводам которой формируются на основе алгоритмов ДЮ РОС РТ и измерительной информации, формируемой средствами опто-электронной системы мониторинга деформаций узловых элементов МК РТ. Рассматриваются проблемы построения опто-электронной системы мониторинга деформаций узловых элементов МК РТ, использующей принцип фотоэлектрического следящего преобразования, математически описываемого с привлечением возможностей метода пространства состояния. При этом характер априорной информации в задаче диктует необходимость использования интервальных модельных представлений при построении фотоэлектрических следящих измерительных систем.

В организационно-технологическом плане поставленная задача опто-электронного мониторинга деформаций устройства пространственного наблюдения решается в два этапа. Первый этап обычно состоит в создании аппаратуры автоматизированного опто-электронного контроля (АОЭК) поверхности главного рефлектора большого радиотелескопа после его сборки на несущей конструкции ГР из профилированных листов (ПЛ) в процессе *предъэксплуатационной юстировки* РТ перед вводом его в рабочую эксплуатацию. Второй этап состоит в создании аппаратуры АОЭК деформаций элементов металлоконструкций РТ, образующих его радиооптическую систему (РОС), в процессе *рабочей эксплуатации* радиотелескопа с целью информационного обеспечения динамической юстировки РОС, осуществляемой средствами системы фокусно-угловой компенсации (СФУК) деформаций. Система эксплуатационного автоматизированного опто-электронного контроля должна также решать задачу измерения деформаций элементов опорно-поворотного устройства (ОПУ) РТ с целью информационного обеспечения введения поправок при наведении деформированного радиотелескопа на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН).

Пользовательски аппаратура автоматизированного опто-электронного мониторинга поверхности главного рефлектора по дискретно размещаемым на каждом ПЛ по четыре контрольным точкам (КТ) для *предъэксплуатационной юстировки* ГР РТ ведется с целью оценки параметров ГР при его модельном представлении в классе *аппроксимирующих параболоидов вращения* (АПВ) с фиксированным фокусным расстоянием, а также сопровождающее ее алгоритмическое и программное обеспечение, позволяющее по результатам измерения сформировать набор пользовательских параметров ГР в виде – трех декартовых координат вершины *аппроксимирующего ГР параболоида*, двух угловых координат радиооси ГР и достигнутое в результате *предъэксплуатационной юстировки* значение среднеквадратического отклонения реальной поверхности ГР от поверхности АПВ, определяющее

реальное значение коэффициента направленного действия (коэффициента усиления) радиотелескопа.

На втором этапе, содержащем основное решение задачи оценки степени разъюстировки радиооптической системы РТ в режиме его рабочей эксплуатации необходимо осуществлять сжатие информации для целей формирования сигналов управления корректирующими следящими приводами СФУК, для чего целесообразно использовать *концепцию эквивалентной радиолинзы (ЭРЛ)*. Задача формирования пользовательских параметров ГР РТ по результатам оптико-электронного мониторинга деформации его поверхности в конечном числе контрольных точек в режиме рабочей эксплуатации может быть сформулирована как *«рекуррентная процедура оптимальной аппроксимации»*, позволяющая заметным образом сократить временные затраты. Такой же подход может быть реализован применительно к обработке видеосигнала при его формировании средствами линейных ППЗ-структур.

При организации автоматизированного опто-электронного мониторинга деформаций элементов металлоконструкций устройств пространственного наблюдения таких как большие полноповоротные радиотелескопы могут использоваться как принцип непосредственного преобразования деформаций в электрический аналог, так и принцип прецизионного фотоэлектрического следящего преобразования. В некоторых случаях целесообразно использовать комбинацию указанных принципов. Предлагаемая вниманию читателей книга в основном сориентирована на проблемы организации информационного обеспечения динамической юстировки устройств пространственного наблюдения типа большие РТ, первичные измерения деформаций элементов которой осуществляются на основе прецизионного фотоэлектрического следящего преобразования (ФЭСП) влечет за собой необходимость разработки динамических проблем функционирования систем ФЭСП в условиях действия стохастических экзогенных воздействий ветровой и оптической природы и параметрической неопределенности элементов модельного представления функциональных компонентов этих систем, задаваемых в интервальной форме.

Для конструктивного погружения в проблематику и в возможности используемого аналитического инструментария книги от студента требуется знакомство с базовыми концепциями метода пространства состояния современной теории управления и элементов матричной оптики, сориентированный на описание оптических компонентов автоматизированной системы опто-электронного мониторинга в базе Х.Когельника.

Тем не менее пособие обладает почти полной замкнутостью за счет достаточно большого приложения, содержащего большого числа m-файлов с хорошим комментарием, позволяющих погрузиться в язык программирования оболочки Matlab, а также таблицы матриц преобразования лучевых векторов, дающих возможность построить матричное описание оптических систем.

Книга представит интерес для студентов, аспирантов и специалистов, которые по роду своих образования и деятельности погружены в проблематику разработки автоматических опто-электронных измерительных систем и систем

управления динамическими объектами. Ее место по мнению авторов в образовательном процессе – этап подготовки выпускной квалификационной работы по специальности или магистерской диссертации.

Пособие может быть рекомендовано также аспирантам, обучающимся по специальностям: 05.11.07. – «Оптические и оптико – электронные приборы и комплексы», 05.13.01.- «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)» и молодым специалистам, имеющим дело с автоматическим следящим опто–электронным мониторингом деформаций.

Замысел учебного пособия вызревал у авторов в течение длительного периода, начиная со времен выполнения научно-исследовательской работы и проведения диссертационных исследований по проблемам автоматического опто-электронного мониторинга устройств пространственного наблюдения, реализованных в форме больших полноповоротных радиотелескопов с диаметром раскрыва главных рефлекторов 32 и 64 метра. Вклад в написания пособия всех членов авторского коллектива равноценный. В написании параграфа 5.3 принял участие аспирант Цвентарный Артем Юрьевич.

Особую благодарность авторы хотели бы выразить рецензентам докторам технических наук, профессорам Коняхину Игорю Алексеевичу и Шароватову Валерию Тимофеевичу, чьи указания и советы заметно улучшили качество учебного пособия.

Конструктивную критику по существу содержания предлагаемой читателям книги следует направлять авторам по контактными телефонам 3157636, 5954128 и электронной почте [s\\_sudarchikov@grv.ifmo.ru](mailto:s_sudarchikov@grv.ifmo.ru), [ushakov-AVG@yandex.ru](mailto:ushakov-AVG@yandex.ru).

## ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $S, X$  – множество элементов произвольной природы;  
 $\{X, d\}, X_d$  – метрическое пространство с метрикой  $d = d(x, y)$ ;  
 $X^n$  –  $n$  – мерное линейное пространство над полем  $F$ ;  
 $R^n$  – линейное вещественное пространство;  
 $I$  – единичная матрица;  
 $0$  – нулевой скаляр, вектор, матрица;  
 $A, A^j, A_k$  – матрица,  $j$ -ая строка,  $k$ -ый столбец матрицы  $A$ ;  
 $A^T$  – матрица, транспонированная к матрице  $A$ ;  $A^*$  – матрица, сопряженная к матрице  $A$ ;  
 $A^{-1}$  – матрица, обратная к матрице  $A$ ;  $A^+$  – матрица, псевдообратная к матрице  $A$ ;  
 $L = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$  – диагональная матрица с элементами  $\lambda_i$  на диагонали;  
 $\text{row}\{\beta_i, i = \overline{1, n}\}$  – строчная матричная структура с элементами  $\beta_i$  в строке;  
 $\text{col}\{\beta_i, i = \overline{1, n}\}$  – матричная структура с элементами  $\beta_i$  в столбце;  
 $\|(\circ)\|$  – норма элемента  $(\circ)$ ;  
 $\|(\circ)\|_P$  – норма элемента  $(\circ)$  с весом  $P$ ;  
 $\Delta$   
 $=$  – равно по определению;  
 $\forall$  – для всех;  
 $\exists$  – существует;  
 $\in$  – принадлежит;  
 $\notin$  – не принадлежит;  
 $\max_i$  – максимум на множестве элементов с индексом  $i$ ;  
 $\cup, \cap$  – символы объединения и пересечения множеств;  
 $\gamma = \arg\{\beta(\gamma)\}$  – значения, удовлетворяющие условию  $\beta(\gamma)$ ;  
 $\det$  – определитель матрицы;  $\text{tr}$  – след матрицы;  $\text{rank}$  – ранг матрицы;  
 $\text{expm}(\circ)$  – матричная экспонента;  
 $C\{(\circ)\}$  – число обусловленности матрицы  $(\circ)$ ;  
 $\text{dim}(\circ)$  – размерность элемента  $(\circ)$ ;  
 $\text{deg}(\circ)$  – степень полинома  $(\circ)$ ;  
 $\text{Im}(\circ)$  – образ  $(\circ)$ ;  $\text{Ker}(\circ)$  – ядро  $(\circ)$ ;  
 $\gamma\{(\circ)\}$  – спектр собственных значений матрицы;  
 $\sigma_\alpha\{(\circ)\}$  – спектр сингулярных чисел матрицы;  
 $\otimes$  – символ кронекеровского произведения матриц;  
 $\text{contr}\{(A, B)\}$  – предикат наличия свойства управляемости пары матриц  $(A, B)$ ;  
 $\text{observ}\{(A, C)\}$  – предикат наличия свойства наблюдаемости пары матриц  $(A, C)$ ;

$\vee$  – логическое "или";  
 $\&$  – логическое "и";  
 $(\circ)|\eta$  – предикат наличия характеристического свойства  $\eta$  у элемента  $(\circ)$ ;  
 $(\Delta(*))_C$  – угловая реализация интервального компонента  $[\Delta(*)]$  интервального элемента  $[(*)]$ ;  
А – азимут;  
АВ – азимутальное вращение;  
АУ – алгоритм управления;  
АФСУ – алгоритм формирования сигнала управления;  
ВВ – вход-выход;  
ВМ – верхний модуль;  
ВОУ – верхний опорный узел;  
ВСВ – вход-состояние-выход;  
ГР – главный рефлектор;  
ДЗУ – динамический закон управления;  
ДН – диаграмма направленности;  
ДНУ – динамическое наблюдающее устройство;  
ДОУ – дискретный объект управления;  
ДР – динамический регулятор;  
ЗУ – закон управления;  
ИВВ – источник внешнего воздействия;  
ИКВВ – источник конечномерного внешнего воздействия;  
ИСЗ – искусственный спутник земли;  
ИХП – интервальный характеристический полином;  
КО – космический объект;  
КП – коллимационная плоскость;  
КР – контррефлектор;  
КС – канал связи;  
КСД – кубик светоделительный;  
ЛАОР – лаборатория адаптивной оптики и радиооптики;  
ЛГ – лазер газовый;  
ЛОУ – линейный объект управления;  
ЛФД – лазерный фазовый дальномер;  
ММ, МУ – соответственно модальная модель и модальное управление;  
МВВВ – модель ветрового внешнего воздействия  
МВМВ – многомерный вход – многомерный выход;  
ММУ – медианное модальное управление;  
НМ – нижний модуль;  
НОУ – непрерывный объект управления;  
НЛОУ – нелинейный объект управления;  
НУ – наблюдающее устройство;  
ОДН – ось диаграммы направленности;  
ОВОВ – одномерный вход – одномерный выход;  
ОК – оптико – механический компенсатор;

ОП – облучатель-приемник;  
ОПУ – опорно-поворотное устройство;  
ОРАН – объект радиоастрономического наблюдения;  
ОС – обратная связь;  
ОУ – объект управления;  
ПВК – преобразователь “вал-код”;  
ПДМ – полудисковый модулятор;  
ПДММ – полиномиальная динамическая модальная модель;  
ПП – пентапризма;  
ППП – полупрозрачная пластина;  
ПС – прямая связь;  
Р – регулятор;  
РОС – радиооптическая система;  
РТ – радиотелескоп;  
САУ – система автоматического управления;  
СКУЛД – система контроля угловых и линейных деформаций;  
СФУК – система фокусно-угловой компенсации;  
СЭКД – система эксплуатационного контроля деформаций;  
УЛ – матричное уравнение Ляпунова;  
УЗ – угловое значение;  
УМ – угол места;  
УМВ – угломестное вращение;  
УМИ – угломестный индуктосин;  
УМП – угломестная плоскость;  
УПН – устройство пространственного наблюдения;  
УР – угловая реализация;  
УС – матричное уравнение Сильвестра;  
УФСУ – устройство формирования сигнала управления;  
УУ – устройство управления;  
ФЛ – функция Ляпунова;  
ФСУ – формирователь сигнала управления;  
ФЭС – фотоэлектрическая система;  
ФЭСП – фотоэлектрическое следящее преобразование;  
ФЭСС – фотоэлектрическая следящая система;  
ФЭССЛД – ФЭСС контроля линейных деформаций;  
ФЭССОДН – ФЭСС стабилизации оси диаграммы направленности ЛГ;  
ФЭССП – фотоэлектрическая система следящего преобразования;  
ФЭССУД – ФЭСС контроля угловых деформаций;  
ФФ – формирующий фильтр;  
ХДС – харитоновская динамическая система;  
ХП – характеристический полином;  
ЦНИИПСК – Центральный научно – исследовательский институт  
промышленных стальных конструкций (г.Москва) ;  
SVD – сингулярное разложение матриц.

## ВВЕДЕНИЕ

Управление устройствами пространственного наблюдения (УПН) такими, как большие полноповоротные радиотелескопы (РТ) с диаметрами раскрытия их главных рефлекторов 32, 64 и более метров в условиях деформаций элементов их металлоконструкций концептуально с учетом того, что РТ является радиооптическим измерительным устройством, распадается на две основные задачи:

1. динамической юстировки радиооптической системы (РОС) радиотелескопа, включающей в свой состав главный рефлектор (ГР), контррефлектор (КР) и облучатель – приемник (ОП);
2. наведение РТ по углу места (УМ) и азимуту (А) на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН) средствами опорно-поворотного устройства (ОПУ), управляемыми силовыми приводами.

В предлагаемой вниманию читателей книге в основном затрагиваются проблемы, связанные с информационным обеспечением динамической юстировки РОС РТ, причем активным компонентом этой процедуры является контррефлектор, управлением углового и линейного положения которого в основном решается юстировочная задача РОС в процессе эксплуатации РТ. Для этой цели в структуру системы управления современных РТ, апертура которых формируется средствами геометрической радиооптики, вводится система фокусно-угловой компенсации (СФУК) деформаций элементов, образующих РОС. Информационное обеспечение СФУК осуществляется средствами аппаратуры системы опто-электронного мониторинга деформаций, именуемой также системой эксплуатационного контроля деформаций (СЭКД) функциональных металлоконструкций РТ. В рассматриваемом в книге варианте СЭКД система контроля угловых и линейных деформаций (СКУЛД) верхнего опорного узла (ВОУ) строится по принципу фотоэлектрического следящего преобразования. В предположении, что КР как элемент РОС РТ связан с ВОУ, контроль деформаций ВОУ позволяет однозначно судить о перемещениях КР относительно зондирующего оптического луча, формируемого газовым лазером (ЛГ), входящим в состав лазерного фазового дальномера (ЛФД), дополненного системой стабилизации оси диаграммы направленности (ОДН) ЛГ и привязанного к геометрическому центру ГР РТ. Конструктивно СКУЛД реализована в виде верхнего и нижнего модулей.

Нижний модуль устанавливается на оптической скамье в окрестности геометрического центра ГР в надзеркальной кабине с эксцентриситетом в коллимационной плоскости радиотелескопа, превышающим радиус раскрытия КР. Модуль содержит формирователь лазерного излучения, приемник и передатчик лазерного фазового дальномера, систему стабилизации ОДН ЛГ, а также призменные компенсаторы линейных смещений ВОУ относительно его положения, заданного параметрами параболоида вращения, аппроксимирующего ГР по результатам предэксплуатационной юстировкой радиотелескопа.

Верхний модуль (ВМ) размещается с эксцентриситетом в коллимационной плоскости в половину диаметра КР на ВОУ, в его состав входит оптическая система разделения угловых и линейных деформаций ВОУ и оптические анализаторы изображения измерительных локальных следящих систем СКУЛД, построенных на базе полудисковых модуляторов (ПДМ) светового потока. Для канала измерений линейных смещений ВОУ в угломестной и коллимационной плоскостях ВМ выполняет функцию формирователя задающего воздействия, отрабатываемого оптическими компенсаторами (ОК) нижнего модуля, сопряженными с преобразователями “вал-код” (ПВК) для измерения совершаемых ОК перемещений. Канал измерения угловых перемещений ВОУ относительно стабилизированного в пространстве зондирующего луча в своей аппаратурной реализации полностью размещаются в верхнем модуле. Измерения угловых перемещений ВОУ, относительно зондирующего лазерного луча осуществляется с помощью ПВК, механически сопряженными с ОК линзового типа. Таким образом, аппаратура системы контроля угловых деформаций ВОУ полностью размещена в ВМ и имеет связь с СФУК и источниками питания с помощью соединительных кабелей.

Аппаратура системы контроля линейных деформаций (СКЛД) ВОУ размещена как в верхнем так и в нижнем модулях. В ВМ размещается оптоэлектронный датчик смещения, в нижнем – компоненты отработки и ПВК.

Размещение модулей в надзеркальной кабине и на ВОУ с эксцентриситетом в коллимационной плоскости гарантирует всесезонность и многорежимность эксплуатации аппаратуры СКУЛД. Последнее означает, что аппаратура СКУЛД может быть использована в режиме информационного обеспечения процедуры предэксплуатационной юстировки РОС РТ, а также в режиме рабочей эксплуатации РТ.

Системная специфика функционирования фотоэлектрических следящих систем (ФЭСС), в составе СКУЛД, характеризуются высоким уровнем неопределенности модельного представления параметров внешней среды, многофакторного процесса деформаций МК, а также функциональных компонентов самих ФЭСС, подверженных в силу всесезонности эксплуатации воздействию всех климатических и погодных факторов.

Авторы сочли необходимым при модельных представлениях динамических измерений, основанных на принципе следящего преобразования, принять в качестве базового математического аппарата метод пространства состояний, который по своим синтетическим возможностям оказывается инвариантным относительно размерности отношения «вход – выход». Этот метод хорошо адаптируется к интервальным модельным представлениям, к методу В.Л. Харитонова анализа робастной устойчивости интервальных характеристических полиномов, к использованию элементов теории чувствительности, теории стохастических систем, медианному модальному управлению, дополненному процедурой контроля оценки относительной интервальности интервальной матрицы состояния и к задачам конструирования показателей качества спроектированной системы, опирающихся на процедуру

сингулярного разложения матриц, а также к использованию возможностей матричного формализма матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова. При этом математический аппарат основательно поддержан программной и модельной оболочкой MATLAB.

Книга структурно состоит из предисловия перечня прилагаемых сокращений и обозначений, введения, пяти разделов, заключения, списка литературы и приложений.

В первом разделе осуществляется введение в проблему управления устройствами пространственного наблюдения типа большие полноповоротные РТ в условиях деформаций элементов их базовых металлоконструкций. Погружение в указанную проблему сориентировано на большой полноповоротный РТ с азимутально-угломестной монтировкой с диаметром раскрыва главного рефлектора 64 метра типа ТНА – 1500(РТФ -64). В задаче управления деформируемым большим полноповоротным РТ выделяется задача стабилизации параметров радиооптической системы РОС РТ как радиоастрономического инструмента.

Для формирования возможных алгоритмов функционирования системы фокусно-угловой компенсаций влияния деформаций МК РТ на параметры его РОС в процессе рабочей эксплуатации радиотелескопа использована концепция эквивалентной радиолинзы (ЭРЛ). Таким образом, достигается сжатие информации о деформациях компонентов РОС, в которую входит главный рефлектор, контррефлектор и облучатель-приемник, до трех параметров в виде изменения двух углов положения оптической оси РОС относительно опорно-поворотного устройства РТ и возмущения фокуса ЭРЛ. Конструирование ЭРЛ осуществляется с использованием аппарата матричной оптики в базисе, предложенным Х. Когельником

На основе анализа возможных алгоритмов функционирования СФУК в рамках одной из их версий, приводящей к пятиприводной реализации компенсирующего перемещения контррефлектора, ставится задача информационного обеспечения процесса фокусно-угловой компенсации влияния деформаций главного рефлектора, контррефлектора и облучателя-приемника на параметры РОС.

Показывается целесообразность решения задачи информационного обеспечения линейных и угловых перемещений ВОУ в угломестной и коллимационной плоскостях ГР с помощью принципа следящего преобразования, реализуемого средствами двух двухканальных ФЭСС, использующих единый зондирующий лазерный луч, формирующий относительно физического центра ГР угловое положение оптической оси РОС РТ.

С учетом требований всепогодной и всепогодной использования РТ, а также удовлетворению потребностей тенденции к существенному уменьшению длины волны излучения, формируется проблемный предмет задачи динамической юстировки РОС в процессе рабочей эксплуатации радиотелескопа.

Во втором разделе рассматривается фактор интервальности в модельных представлениях процессов при управлении деформируемым радиотелескопом. Интервальность в данном случае рассматривается как форма представления системной неопределенности, порождаемой такими факторами как неопределенность первичных физических параметров, неопределенность экспертных оценок многофакторного процесса деформации МК, а также функциональных компонентов самих ФЭСС, подверженных воздействию всех климатических факторов и технических требований к допустимым ошибкам наведения РТ на объект радиоастрономического наблюдения. Показывается, что в системной постановке проблема опирается на элементы интервальных вычислений и линейной алгебры, а также формулируется проблема оценки ожидаемого объема вычислений при конструировании интервальных характеристических полиномов в функции используемого базиса представления матриц состояния системы.

Показывается, что достаточно удачной версией модельных представлений процессов, характеризующихся интервальностью их системных компонентов, является версия, опирающаяся на аддитивную композицию их медианной и интервальной составляющих. Причем эта версия характеризуется фиксированным значением нормы интервальной составляющей матрицы, вычисляемой на всех возможных угловых реализациях.

Обнаруживается, что интервальные модельные представления обладают заметной универсальностью. Так для нелинейных динамических систем могут быть сконструированы линейные векторно-матричные модели с интервальными матричными компонентами (интервально линеаризованными) исходного объекта управления, используемых в дальнейшем для решения задачи синтеза ФЭСС. Таким образом, аппарат интервальных представлений обнаруживает возможность “интервальной линеаризации” нелинейных процессов.

Третий раздел посвящен анализу возможностей метода В.Л. Харитонова в задаче обеспечения интервальным системам требуемых динамических свойств. В этой связи исследуется робастная устойчивость интервальных характеристических полиномов методом В.Л. Харитонова. На семействе полиномов В.Л. Харитонова конструируются интервальные показатели качества с оценками их интервальности.

Выполняется анализ возможностей метода В.Л. Харитонова для синтеза законов управления, доставляющих системам заданные динамические свойства путем сведения этой задачи к анализу робастной устойчивости модифицированных интервальных характеристических полиномов. На основе интервально линеаризованных модельных представлений нелинейных систем проводится анализ их робастной устойчивости методом В.Л. Харитонова.

Решается задача анализа динамических свойств интервальных систем, спроектированных с использованием метода В.Л. Харитонова, при конечномерном задающем воздействии с привлечением возможностей аппарата эллипсоидных мажорант и минорант, позволяющих во временной и частотной

областях контролировать степень влияния интервальности матричных компонентов исходной системы на качество процессов.

В четвертом разделе авторами рассматривается медианное модальное управление с контролем оценки относительной интервальности интервальной матрицы состояния проектируемой системы и как следствие оценки относительной интервальности ее показателей качества.

Конструируется базовый алгоритм синтеза модального управления объектами с номинальными параметрами, за которые приняты их медианные значения, опирающиеся на решение матричного уравнения Сильвестра.

В предположении, что интервальным компонентом модельного представления исходного объекта управления является только его матрица состояния, формулируется утверждение об инвариантности оценки абсолютной интервальности интервальной матрицы состояния спроектированной системы относительно матрицы вводимой отрицательной обратной связи по состоянию объекта и неинвариантности относительно этой матрицы оценки ее относительной интервальности. Положение этого утверждения позволяет модифицировать базовый алгоритм синтеза модального управления, дополнив его контролем оценки относительной интервальности матрицы состояния проектируемой системы и как следствие контролем оценки относительной интервальности ее показателей качества. Показывается, что контроль оценки относительной интервальности матрицы состояния системы позволяет контролировать степень корректности использования аппарата теории чувствительности, в рамках функций чувствительности первого порядка, с последующим применением этого аппарата для оценки мажорант и минорант показателей качества спроектированной системы. При этом авторы в основном сосредоточили внимание на использовании метода траекторной чувствительности как наиболее наглядного в трактовке полученных результатов, а также метода чувствительности сингулярных чисел критериальных матриц для оценки чувствительности показателей качества спроектированной системы.

Показывается, что в случае, когда структурные и базисные возможности объекта управления с интервальными параметрами таковы, что его векторно-матричное описание обладает интервальными матрицами управления и состояния, тогда структурной модификацией данная модельная ситуация может быть приведена к ситуации рассмотренной выше. Предлагается осуществлять отмеченную структурную модификацию путем включения на входе объекта линейной буферной системы (БФ) минимальной размерности. Обнаруживается, что предложенным модификационным приемом может быть реализован принцип внутренней модели, приводящей к решению задачи обобщенного изодромного управления. Этот же прием может быть использован в случае, если интервальной линеаризации подверглись нелинейные элементы в канале управления.

Пятый раздел книги авторы посвятили разработке алгоритмов управления системой контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла

большого полноповоротного радиотелескопа на основе интервальных модельных представлений.

Раздел содержит как теоретические, так и прикладные технические решения. Теоретические решения связаны с особенностью построения ФЭСС, вызванных ограниченностью апертур их фотодатчиков, наличием трактов трансформации спектров сигналов по оси частот с возможным появлением межканальных перекрестных связей, а так же ограниченной коммутативностью структурных элементов модельного представления ФЭСС, сужающих возможности использования структурной модификации системы, и недоступностью непосредственного измерения сигнала ошибки рассогласования в ней.

Прикладные технические решения представлены разработкой на основе использования аппарата матричной оптики, компоновки оптического тракта системы контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла, обеспечивающей независимость функционирования этих трактов путем использования в оптической схеме системы оптических инвариантов, поиском оптимального функционального состава измерительного комплекса в условиях учета реального дрейфа оси диаграммы направленности (ОДН) газового лазера формирующего зондирующий луч СКУЛД.

В разделе на основе концепции ЭРЛ формируются требования к законам управления ФЭСС СКУЛД, которые обеспечивают значения динамических и точностных показателей этим системам, что в итоге средствами динамической юстировки РОС доставляет деформируемому РТ его всепогодную и широкополосную эксплуатацию.

Выражается убеждение, что предлагаемый вариант СКУЛД с алгоритмами управления, синтезированными на основе интервальных модельных представлений может стать теоретической основой для построения одного из альтернативных вариантов системы контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла большого полноповоротного радиотелескопа как типового примера решения задач информационного обеспечения предъэксплуатационной юстировки РТ и динамической юстировки в процессе эксплуатации средствами системы фокусно-угловой компенсации.

Авторы полагают, что читатель даже на частном примере автоматизированного опто-электронного мониторинга деформаций верхнего опорного узла, несущего на себе важный компонент РОС контррефлектор, с использованием фотоэлектрического принципа измерительного преобразования погрузится в комплексную проблематику формирования информационного обеспечения динамической юстировки больших полноповоротных радиотелескопов и ощутит научную и техническую перспективность агрегирования методов современной теории управления с возможностями оптической информационной среды.

# 1. ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫМ РАДИОТЕЛЕСКОПОМ

## 1.1. Радиотелескоп как радиоастрономический инструмент

Современные радиотелескопы (РТ) представляют собой уникальные радиоастрономические инструменты, позволяющие решать задачи наблюдения за радиоастрономическими объектами такими, как космические объекты, искусственные спутники земли (ИСЗ) и обеспечение связи между наземными пунктами через ИСЗ, а также наведения антенных установок (АУ) на ИСЗ и практически круглосуточного их сопровождения независимо от метеорологических условий. Решение таких задач представляет сравнительно сложную техническую проблему.

Следует отметить, что большие полноповоротные радиотелескопы широко использовались радиоастрономами для исследования естественных источников радиоизлучения. Например, в Англии в Джорделл Бенк еще в 1959 г. был введен в действие радиотелескоп (РТ) диаметром 76 м, в Парксе (Австралия) и Голдстоуне (США) успешно эксплуатируются РТ диаметром 64 м, в Эффельсберге (Германия) эксплуатируется РТ диаметром 100 м.

Несмотря на многообразие типов АУ, применяемых в дальней космической связи и радиоастрономии, можно установить несколько общих факторов, влияющих на принцип построения системы управления (СУ) и выбор параметров ее функциональных компонентов.

**Во-первых**, допустимая погрешность наведения РТ средствами СУ на ОРАН есть *функция длин рабочих волн АУ и геометрических размеров ее ГР* так, что с уменьшением длин рабочих волн соответственно должна уменьшаться допустимая погрешность наведения.

**Во-вторых**, проектирование СУ наземными АУ существенно зависит от динамических свойств АУ как объекта управления, метеорологических и климатических условий на месте ее расположения.

**В-третьих**, проектирование СУ наземными АУ определяется назначением конкретной АУ, т. е. классом орбит и траекторий движения КО, для слежения за которыми она предназначается, заданным диапазоном обзора небесной полусферы, требованиями обеспечить работу в различных режимах (программное наведение, автосопровождение, поиск и т. п.), а также степенью автономности, оперативности, надежности и автоматизации проведения работ по управлению РТ.

Создание СУ современными наземными АУ для космической связи и радиоастрономии представляет сложную техническую задачу, решение которой связано с использованием новейших достижений науки и техники в различных областях.

Функционально РТ представляет собой радиооптическую систему (РОС) закрепленную в двухосном кардановом подвесе. РОС образуется главным рефлектором РТ, контррефлектором (КР) и облучателем/приемником (ОП).

Карданов подвес технически реализуется средствами опорно-поворотного устройства (ОПУ).

Для наведения РОС на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН) ОПУ снабжены механизмами для вращения относительно выбранных осей. Направление на ОРАН в трехмерном пространстве может быть задано вектором, который в полярной системе координат, привязанной к точке установки РТ, характеризуется двумя углами и свободным модулем. Наведение оптической оси РОС в заданном направлении обеспечивается наличием двух степеней свободы доставляемых вращением ОПУ относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Одна из осей вращения (именуемая первой) неподвижна относительно места установки РТ, она ориентирована в пространстве определенным образом. Другая ось (именуемая второй) является подвижной и приводится в движение вместе с конструкцией ОПУ разворотом вокруг первой.

Двухосные ОПУ, нашли преимущественное распространение в практике построения РТ в виду их простоты. Однако в некоторых случаях возникает необходимость в применении более сложных – трехосных ОПУ. Двухосные ОПУ наземных АУ строятся по одной из следующих кинематических схем (монтажек): *экваториальной* (полярной), *азимутально-угломестной* и *карданной* (двухугломестной). Все перечисленные радиотелескопы именуется полноповоротными.

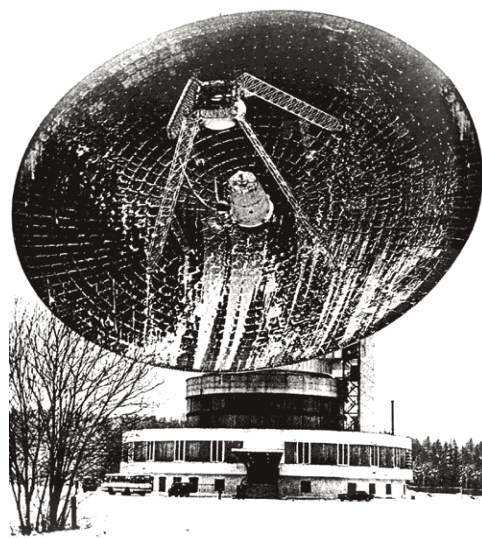


Рисунок 1.1. Радиотелескоп ТНА –400      Рисунок 1.2. Радиотелескоп ТНА – 1500

Радиотелескопы с диаметром главного рефлектора (ГР) (32, 64) метра типа ТНА – 400, ТНА – 1500 соответственно, имеют двухосные ОПУ построенные по *азимутально-угломестной* кинематической схеме. Первая ось устанавливается вертикально (*локально вертикально*). Угол поворота РОС РТ совместно с ОПУ относительно этой оси в условиях отсутствия погрешности предъэксплуатационной юстировки РТ, равен азимуту ОРАН. Вторая ось – перпендикулярна первой, при изменении азимута вращается в плоскости

горизонта (*локального горизонта*). Поворот РОС РТ относительно второй оси с помощью ОПУ соответствует аппликате ОРАН, угловая мера которой, отсчитываемая от плоскости горизонта, является его *углом места*. Фотография РТ типа ТНА - 400 и ТНА – 1500 приведены на рисунках 1.1, 1.2. Параметры основных конструктивных элементов РТ ТНА – 1500, РОС и ОПУ, которые обеспечивают описанную выше схему наведения на ОРАН, приведены в приложении 1.

Задача наведения РТ на ОРАН заключается в формировании управляющих сигналов, способных обеспечить наведение в реальном масштабе времени РТ с допустимой динамической ошибкой в соответствии с законом его движения в пределах небесной полусферы. Закон управления и способ формирования управляющих сигналов являются основными факторами, которые задают алгоритм работы управляющего устройства, существенным образом определяют структуру и динамику СУ РТ в целом.

Отличительной особенностью СУ РТ, в значительной степени облегчающей задачу их реализации, является то, что орбиты ОРАН в большинстве случаев являются априори известными, что позволяет заранее вычислить траекторию слежения за ними, т.е. прогнозировать (интерполировать) закон изменения углового положения РОС РТ во времени. Однако в процессе вывода таких ОРАН как антропогенные космические объекты (КО) на расчетные орбиты или в результате проведения активных динамических космических операций (маневр, коррекция, торможение) возможно отклонение реальной траектории от расчетной. В этой связи в СУ РТ предусматривается несколько различных режимов работы.

В зависимости от способа формирования управляющих сигналов в современных СУ РТ различают три основных режима:

- режим программного управления;
- режим автосопровождения;
- режим комбинированного наведения.

**Режим программного управления** заключается в осуществлении процесса наведения РТ на ОРАН, путем *перемещения оптической оси РОС РТ*, в соответствии с законом *перемещения объекта наблюдения*. Перемещение оптической оси РОС РТ, осуществляется с помощью силовых приводов ОПУ управляемых сигналами, которые вычисляются или формируются, в реальном масштабе времени, в программном устройстве, на основании априорных данных о движении ОРАН. Этот режим является основным для РТ и АУ радиолиний дальней космической связи и в задаче радиоастрономии с ОРАН, на расстояниях от 30 000 и более километров. К числу РТ, используемых в программном режиме, относятся и радиотелескопы типа ТНА-400 и ТНА-1500.

**Режим автосопровождения** заключается в *следящем движении РОС за линией визирования* на ОРАН. В этом режиме формирование сигнала управления осуществляется с использованием принципа равносигнальной зоны, чем обеспечивается реализация *принципа управления с единичной обратной связью*.

**Режим комбинированного** наведения сочетает режимы программного управления и автосопровождения.

Система управления РТ должна обеспечивать возможность:

- ручного наведения;
- поиска объекта радиоастрономического наблюдения;
- полуавтоматического наведения, при котором требуемые угловые координаты, скорости и ускорения оси РОС РТ, задаются оператором;
- синхронной связи с другими РТ, в случае если РТ используется в составе радиointерферометра.

Независимо от используемого режима наведения РОС РТ на ОРАН, процесс управления наведением обеспечивается СУ, *азимутальным и угломестным силовыми приводами ОПУ и азимутальным и угломестным индуктосином. Статор азимутального индуктосина жестко связывается с неподвижным основанием конструкции, а статоры угломестных индуктосинов жестко связываются с боковыми опорами РТ.*

Для качественного наблюдения за ОРАН *допустимая ошибка совмещения оптической оси РОС с линией визирования на ОРАН* не должна превышать величины  $\Delta$ , задаваемой соотношением

$$\Delta = (0.1 - 0.25)\Theta_{0,5}, \quad (1.1)$$

где  $\Theta_{0,5}$  – ширина главного лепестка диаграммы направленности по уровню половинной мощности излучения-приема. Этот показатель РТ главным образом зависит от диаметра главного рефлектора (ДГР) и длины волны  $\lambda$  излучаемого (принимаемого) электромагнитного сигнала в силу следующего соотношения

$$\Theta_{0,5} = 4.2 * 10^3 \lambda / D_{ГР} \text{ угл. мин} = 1.22\lambda / D_{ГР} \text{ рад}. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.1), и (1.2) могут быть положены в основу предъявления требований к *факторам, определяющим достижимость условия (1.1) при наведении РОС РТ на ОРАН.* В оптике формула (1.2) определяет угловой размер диска Эри, позволяющий оценить минимальный разрешаемый угол между двумя точечными объектами наблюдения.

В предположении полного отсутствия деформаций МК РТ в процессе его эксплуатации *такими факторами* являются:

- качество предэксплуатационной юстировки функциональных элементов РТ; определяемое качеством юстировки ГР; качеством юстировки РОС в целом; качеством юстировки ОПУ, которое в основном сводится к обеспечению *принадлежности угломестной оси плоскости локального горизонта*; качеством установки РОС РТ на его ОПУ, которое в основном определяется требованием к ортогональности оптической оси РОС к угломестной оси;
- погрешность интерполяторов при формировании программных траекторий азимутального и угломестного движений РТ;
- погрешность датчиков (индуктосинов) углового положения оптической оси РОС по углу места и азимуту;

- совокупная погрешность силовых следящих приводов РТ воспроизводящих движение по азимуту и углу места;
- неучтенные факторы.

В случае использования гипотезы о равновесности и стохастической независимости факторов допустимое значение составляющей ошибки (1.1), может быть оценено в силу соотношения

$$\Delta_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{n_{\phi}}} \Delta, \quad (1.3)$$

где  $n_{\phi}$  – число факторов, которое для случая справедливости гипотезы полной недеформируемости МК составляет величину  $n_{\phi} = 5$ .

С тем, чтобы оценить уровень достижимости *всего* эксплуатационной антенной техники, в условиях тенденции на настоящем этапе развития в сторону увеличения диаметра ГР, на основе соотношения (1.1), (1.2) для длин волн  $\lambda = 5-100$  мм и двух типов отечественных РТ ТНА-400, ТНА-1500 с диаметрами 32 и 64 метра раскрыва главного рефлектора соответственно, в таблице 1.1 приведены значения допустимых ошибок наведения.

Таблица 1.1

### Допустимая ошибка наведения РТ на ОРАН

$\lambda$ (мм)	ТНА – 400 D <sub>ГР</sub> – 32 метра				ТНА – 1500 D <sub>ГР</sub> – 64 метра			
	$\Theta_{0,5}$ (угл. мин)	$[\Delta] = [0.1, 0.25]$ (угл. мин)	$\Delta_0$ (угл. мин)	$\Delta_{\Delta}$ (угл. мин)	$\Theta_{0,5}$ (угл. мин)	$[\Delta] = [0.1, 0.25]$ (угл. мин)	$\Delta_0$ (угл. мин)	$\Delta_{\Delta}$ (угл. мин)
100	13.125	[1.313, 3.281]	2.297	0.984	6.563	[0.656, 1.641]	1.1485	0.4925
75	9.844	[0.984, 2.461]	1.7225	0.7385	4.922	[0.492, 1.23]	0.861	0.369
50	6.563	[0.656, 1.641]	1.1485	0.4925	3.281	[0.328, 0.82]	0.574	0.246
30	3.938	[0.394, 0.985]	0.6895	0.2955	1.969	[0.197, 0.492]	0.3445	0.1475
20	2.625	[0.263, 0.656]	0.4595	0.1965	1.313	[0.131, 0.328]	0.2295	0.0985
10	1.313	[0.131, 0.328]	0.3205	0.1895	0.656	[0.066, 0.164]	0.115	0.049
5	0.656	[0.066, 0.164]	0.115	0.049	0.328	[0.033, 0.082]	0.0575	0.0245

Для целей формирования корректных требований к техническим средствам предэксплуатационной подготовки РТ в таблице 1.2 приведены значения составляющей погрешности (1.3) каждого из разновесных факторов. Обработка этих погрешностей позволила выделить *медианную составляющую* и оценить их *абсолютную интервальность*.

Таблица 1.2

### Допустимое значение составляющей погрешности

$\lambda$ (мм)	ТНА – 400 D <sub>ГР</sub> – 32 метра			ТНА – 1500 D <sub>ГР</sub> – 64 метра		
	$[\Delta_{\phi}]$ (угл. мин)	$\Delta_{\phi 0}$ (угл. мин)	$\Delta_{\Delta \phi}$ (угл. мин)	$[\Delta_{\phi}]$ (угл. мин)	$\Delta_{\phi 0}$ (угл. мин)	$\Delta_{\Delta \phi}$ (угл. мин)
100	[0.505, 1.467]	0.986	0.481	[0.293, 0.734]	0.513	0.221
75	[0.44, 1.101]	0.771	0.33	[0.22, 0.55]	0.385	0.165

50	[0.293, 0.734]	0.513	0.221	[0.147, 0.367]	0.257	0.11
30	[0.176, 0.441]	0.308	0.133	[0.088, 0.22]	0.154	0.066
20	[0.118, 0.293]	0.205	0.088	[0.059, 0.147]	0.103	0.044
10	[0.059, 0.147]	0.103	0.044	[0.03, 0.073]	0.052	0.021
5	[0.03, 0.073]	0.052	0.021	[0.015, 0.037]	0.026	0.011

В связи с предпринятыми исследованиями авторы считают необходимым особо остановиться на факторе, определяющем оценку уровня достижимости *всеволновости* эксплуатации больших полноповоротных РТ, связанным с качеством предъэксплуатационной юстировки ГР РТ. Это вызвано тем, что система контроля угловых и линейных деформаций ВОУ РТ может быть использована как в задачах *предъэксплуатационной юстировки*, так и в задаче *ее юстировки в процессе эксплуатации*.

В соответствии с законами геометрической оптики излучение исходящее от облучателя/приемника, размещаемого в сопряженном фокусе КР и ГР, отражаясь от поверхности в форме параллельного пучка, должно быть синфазным в любой ортогональной ему плоскости. Условием сохранения синфазности излучения является наличие идеальной параболической отражающей поверхности главного рефлектора при условии таких же свойств эллипсоидальной поверхности КР. Однако идеальную параболическую поверхность ГР получить трудно. Поверхность ГР больших полноповоротных РТ *образуется отдельными перемещаемыми панелями*, которые крепятся к несущей конструкции РТ. Несущая конструкция и панели имеют *ошибки изготовления*, усугубляемые используемым способом формирования отражающей поверхности ГР так, что реальная поверхность аппроксимирует идеальную со среднеквадратической погрешностью  $\sigma$ . Вследствие отклонений реальной поверхности ГР от идеальной, синфазность излучения нарушается, что приводит к уменьшению реального усиления РТ. Усиление  $G$  в функции длины волны излучения  $\lambda$  и среднеквадратической погрешности  $\sigma$  отклонения *реальной поверхности* от идеальной, определяется соотношением

$$G/G_0 = \exp[-4\pi\sigma/\lambda]^2, \quad (1.4)$$

где  $G_0$  – усиление “идеальной” антенны задается выражением

$$G_0 = 4\pi S_e / \lambda^2. \quad (1.5)$$

В выражение (1.5)  $S_e$  – эффективная площадь ГР РТ. Выражение (1.4) может быть положено в основу формирования требований качества предъэксплуатационной юстировки ГР, в функции от допустимых ослаблений реального усиления РТ, в диапазоне (5 – 10) % от идеального усиления. Полученные значения  $\sigma$  профиля отражающей поверхности при заданных значениях ослабления усиления приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3.

### Величина $\sigma$ при заданном значении $G/G_0$

$\lambda$ (мм)	$G/G_0=0.95$	$G/G_0=0.9$	$[G/G_0]=[0.9, 0.95]$
	$\sigma$ (мм)	$\sigma$ (мм)	$[\sigma]$ (мм)
100	1.808	2.582	[1.808, 2.582]
75	1.356	1.936	[1.356, 1.936]

50	0.904	1.291	[0.904, 1.291]
30	0.546	0.775	[0.546, 0.775]
20	0.361	0.516	[0.361, 0.516]
10	0.181	0.258	[0.181, 0.258]
5	0.09	0.129	[0.09, 0.129]

Из приведенных данных в таблице 1.3. видно, что чем меньше длина волны излучения, тем *ближе должна быть реальная поверхность к идеальной*, тем следовательно, жестче требования к изготовлению элементов отражающей поверхности, аппаратуре и процессу предэксплуатационной юстировки.

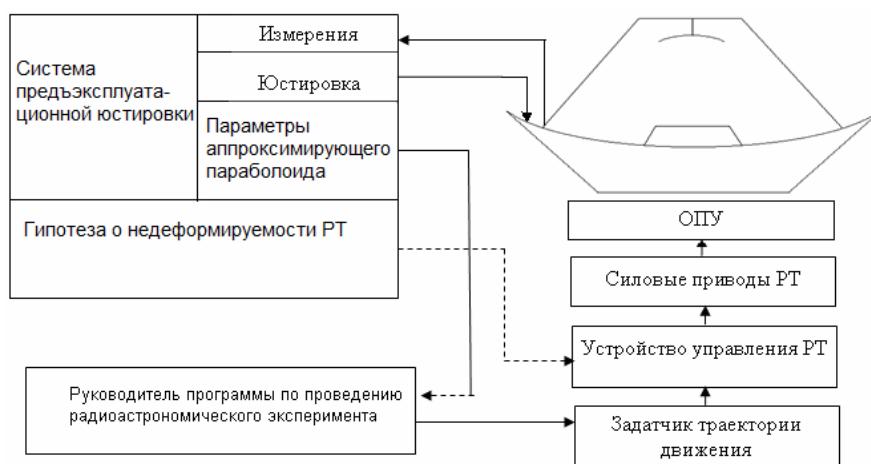
## 1.2. Проблемы управления большим полноповоротным радиотелескопом в условиях деформаций его металлоконструкций

Система управления *недеформируемого РТ*, при оговоренной гипотезе, для режима программного наведения на ОРАН, представлена на рисунке 1.2.

По существу в систему входит штатный состав аппаратуры РТ, дополненный системой предэксплуатационной юстировки (СПЮ).

Система *предэксплуатационной юстировки* имеет три канала связи с функциональными компонентами РТ. По *первому каналу* в систему подаются *результаты измерений* положений контрольных точек (КТ) на подвижных элементах, образующих *поверхность ГР*, в виде двух углов и наклонной дальности в системе координат связанной с верхним опорным узлом, а также измерений положения ВОУ, относительно системы координат связанной с физическим центром ГР, в виде двух координат углового положения ВОУ в угломестной и коллимационной плоскостях и трех декартовых координат в тех же плоскостях и вдоль оси аппликат ГР. Информация о положении КТ формируется с помощью *лазерного профилометра (ЛП)*. Информация о положении ВОУ формируется с помощью СКУЛД. *Второй канал СПЮ является исполнительным*, по которому бригаде юстировщиков выдается информация о выполнении юстировочной работы в форме требуемого перемещения точек крепления элементов ГР на шпильках с калиброванным шагом. *Цикл предэксплуатационной юстировки завершается* по достижении минимального значения  $\sigma$  нормального отклонения реальной поверхности ГР от поверхности аппроксимирующего параболоида (АП) с фиксированным фокусом.

*Финальным актом юстировочного цикла является паспортизация главного рефлектора*, которая состоит в формировании *шести его параметров* в виде трех декартовых координат начального положения центра АП относительно системы координат связанной с физическим центром ГР, двух углов начального положения оси АП, измеренных в угломестной (УМ) и коллимационной плоскостях (КП) и значения  $\sigma$  нормального отклонения реальной поверхности ГР от поверхности АП с фиксированным фокусом. Эта информация с выхода СПЮ *передается по третьему каналу*. Информация о достигнутой величине  $\sigma$  направляется руководителю программы по проведению радиоастрономического эксперимента с целью *корректного выбора длин волн излучения РТ*. Информация о декартовых координатах АП направляется службе предэксплуатационной юстировки РТ с целью коррекции положения КР в *зенитном положении* радиотелескопа. Информация об *угловом положении АП* должна быть направлена в *устройство управления РТ* с целью учета ее при наведении РТ на ОРАН.



**Рисунок 1.3.** Система управления недеформируемого РТ

Ситуация заметно изменяется, если учесть, что в реальных условиях эксплуатации РТ, который должен функционировать всесезонно, всепогодно, при скоростях ветра до 25 м/с, а также в условиях, когда невозможно прикрыть большой полноповоротный РТ защитным куполом, как это делается при эксплуатации оптических телескопов, *гипотеза о недеформируемости не выполняется.*

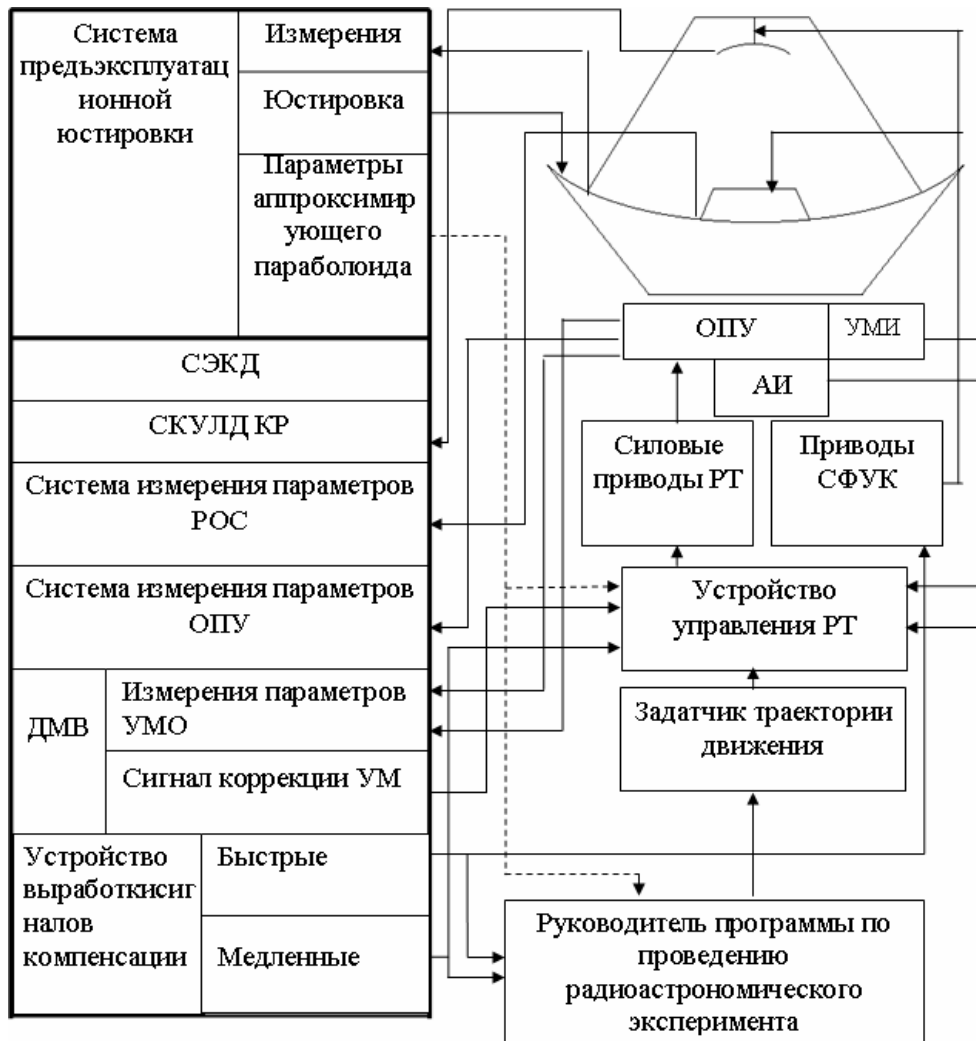
Основными источниками возмущений, приводящих к деформациям МК РТ являются:

- изменение весовых нагрузок при угломестном вращении РТ;
- влияние ускорений при азимутальном и угломестном вращении РТ;
- градиенты температур на элементах МК РТ от солнечного нагрева и охлаждающего действия ветра;
- ветровые воздействия на конструкцию РТ;
- вибрация от работающих механизмов радиотелескопа.

*Первые три* возмущающих фактора порождают *медленно изменяющиеся деформации* МК РТ, причем они достаточно детерминированы и как следствие в значительной степени могут быть экстраполированными при управлении РТ. *Ветровой возмущающий фактор* по своей природе является *стохастическим* и в основном порождает *быстро изменяющиеся компоненты* деформации МК РТ. Под действием перечисленных возмущающих факторов деформируются практически все элементы, образующие РОС. Так ГР при развороте по углу места характеризуется “отвисанием” нижнего края и “провисанием” верхнего края, как следствие АП вращения характеризуется заметным *изменением углового положения оси* в основном в *угломестной плоскости* и значительным *увеличением величины  $\sigma$* . Приобретает линейные перемещения в угломестной плоскости ОП. ВОУ претерпевает линейные деформации в угломестной плоскости, вдоль оси аппликат в системе координат связанной с физическим центром ГР, а также угловой разворот в угломестной плоскости ВОУ и установленного на нем КР. *РОС РТ становится разъюстированной.* Фактор ветрового воздействия усугубляет разъюстировочные процессы РОС как в угломестной, так и в коллимационной плоскостях.

Возмущающие факторы, воздействуя на ОПУ, в основном проявляются, в *неконтролируемом скручивании статоров* азимутального и особенно угломестного индуктосинов, средствами которых осуществляется наведение РТ. В этой связи нормальная эксплуатация РТ, в условиях действия деформирующих факторов,

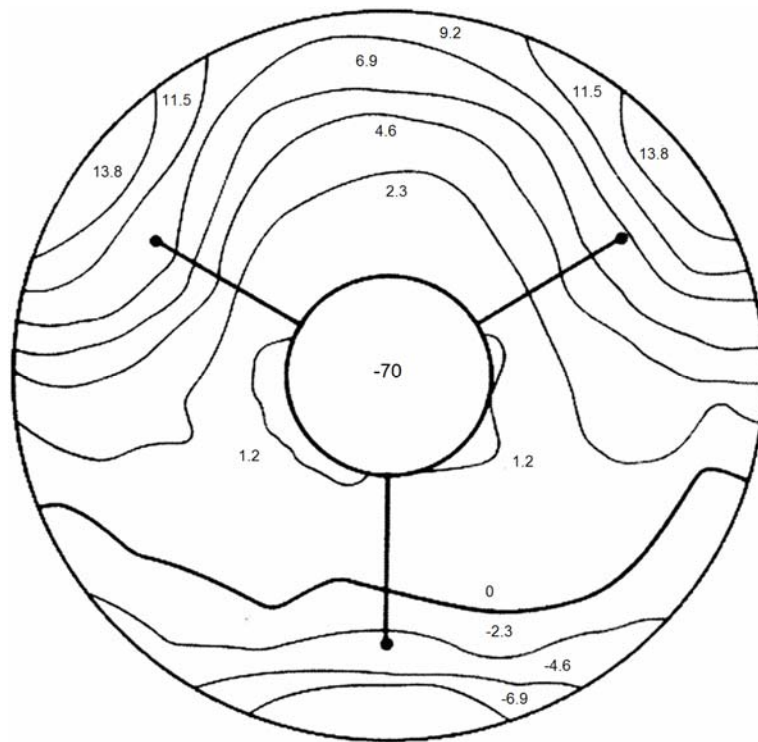
невозможна без организации его динамической юстировки средствами специально вводимых СЭКД и СФУК деформаций, на основе информации вырабатываемой СЭКД.



**Рисунок 1.4.** Система управления РТ в условиях деформаций его МК

С учетом вышесказанного на рисунке 1.4 приводится версия системы управления РТ в условиях деформаций его металлоконструкций, которую следует рассматривать в качестве альтернативного варианта.

В качестве иллюстрации деформационных процессов конструкций больших радиотелескопов на рисунке 1.5 приведена картина нормальных деформаций в миллиметрах главного рефлектора 64-метрового радиотелескопа в Парксе с кривыми величин нормальных отклонений его поверхности от расчетной при повороте на 90 градусов от вертикали и тангенциальной составляющей ВОУ.



**Рисунок 1.5.** Картина весовых деформаций главного рефлектора и верхнего опорного узла 64 метрового радиотелескопа

### 1.3. Алгоритмы фокусно-угловой компенсации деформаций компонентов радио-оптической системы радиотелескопа

Рисунок 1.4. иллюстрирует концепцию управления РТ в условиях деформаций его МК. Устройство управления РТ в условиях его деформаций дополняется системой фокусно-угловой компенсации РОС РТ, а также датчиком местной вертикали, позволяющим вводить поправки на девиацию “нуля” статора угломестных индуктосинов, вызванных угловыми деформациями ОПУ. С тем, чтобы предметно погрузиться в проблемную среду, рассмотрим возможные алгоритмы фокусно-угловой компенсации деформации РОС. Исследование этих алгоритмов позволят корректно сформулировать требования к составу измерений, для информационного обеспечения этих алгоритмов, а также требования к погрешностям измерительных устройств.

В основу формирования алгоритмов ФУК положена гипотеза *ненарушения параксиальных свойств РОС*, что позволяет, для описания разъюстированной РОС, использовать аппарат матричной оптики с расширенными матрицами преобразования лучевых векторов. Вторым положением при формировании алгоритмов является концепция эквивалентной радиолинзы (ЭРЛ), позволяющая сжать информацию о РОС РТ до трех параметров. Такими параметрами являются углы  $\phi_3$  и  $\alpha_3$  – положения оптической оси ЭРЛ, совпадающей с оптической осью РОС, и  $f_3$  – фокусом ЭРЛ. Если МК РТ, образующая РОС, деформируются, то ЭРЛ приобретает возмущения  $\Delta_{ЭРЛ}$ , характеризуемое возмущениями  $\Delta\phi_3$  и  $\Delta\alpha_3$  углового положения оптической оси, и  $\Delta f_3$  ее фокусного расстояния. Очевидно, все алгоритмы ФУК разъюстировки РОС должны юстировочными перемещениями ее элементов обеспечить выполнение условий

$$\Delta\phi_3 = 0, \Delta\alpha_3 = 0, \Delta f_3 = 0. \quad (1.6)$$

Несомненно, в силу инерционности приводов юстировочных элементов, условие (1.5) технически реализуется в асимптотической постановке, которая принимает вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \phi_3(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \alpha_3(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f_3(t) = 0. \quad (1.7)$$

Конструктивные особенности современных РТ таковы, что юстировочные перемещения элементов РОС, составленной из ГР, КР и облучателя/приемника, организуются с помощью трех приводов линейных перемещений КР, двух приводов его угловых перемещений (в угломестной и коллимационной плоскостях), а также линейного перемещения в угломестной плоскости облучателя/приемника. Таким образом, алгоритмы фокусно-угловой компенсации будут сформированы, если по результатам измерений деформаций элементов МК, образующих РОС РТ, будут сформированы задающие входные воздействия для указанных выше следящих приводов. Напомним, что возмущение  $\Delta_{ГР}$  главного рефлектора, как элемента РОС, может быть представлено макровектором

$$\Delta_{ГР} = [\Delta x_{ГР}, \Delta y_{ГР}, \Delta z_{ГР}, \Delta \phi_{ГР}, \Delta \alpha_{ГР}, \Delta f_{ГР}]^T. \quad (1.8)$$

Возмущения  $\Delta_{КР}$  контррефлектора, в предположении достаточной жесткости его конструкции, при которой его фокальный параметр  $f_{КР}$  не меняется, также задается макровектором

$$\Delta_{КР} = [\Delta x_{КР}, \Delta y_{КР}, \Delta z_{КР}, \Delta \phi_{КР}, \Delta \alpha_{КР}]^T. \quad (1.9)$$

Возмущения  $\Delta_{ОБ}$  облучателя/приемника является скалярным и задается соотношением

$$\Delta_{ОБ} = [\Delta x_{ОБ}]. \quad (1.10)$$

В (1.8) – (1.10)  $\Delta x_*$ ,  $\Delta y_*$ ,  $\Delta z_*$ ,  $\Delta \phi_{*P}$ ,  $\Delta \alpha_{*P}$ ,  $\Delta f_*$  – соответственно линейные перемещения вдоль осей абсцисс, ординат и аппликат измерительной системы координат, связанной с геометрическим центром ГР, а также угловые перемещения в угломестной и коллимационной плоскостях элемента (\*), где (\*) принимает смысл ГР, КР и ОБ.

Для установления связи вектора

$$\Delta_{ЭРЛ} = [\Delta \phi_3, \Delta \alpha_3, \Delta f_3]^T \quad (1.11)$$

возмущения ЭРЛ с возмущениями элементов РОС ГР, КР и ОБ воспользуемся гипотезой ненарушения парааксильности РОС, что позволяет представить связь между указанными возмущениями в линейной векторно-матричной форме

$$\Delta_{ЭРЛ} = S_{ГР} \Delta_{ГР} + S_{КР} \Delta_{КР} + S_{ОБ} \Delta_{ОБ}, \quad (1.12)$$

где  $S_{ГР}$ ,  $S_{КР}$ ,  $S_{ОБ}$  – матрицы чувствительности ЭРЛ к вариациям (деформациям) элементов РОС: ГР, КР и ОБ. Для матриц чувствительности в силу (1.11), (1.8) – (1.10) можно записать

$$S_{ГР} = \begin{bmatrix} S_{ГРx} & 0 & 0 & S_{ГР\phi} & 0 & 0 \\ 0 & S_{ГРy} & 0 & 0 & S_{ГР\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ГРz} & 0 & 0 & S_{ГРf} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$S_{KP} = \begin{bmatrix} S_{KP_x} & 0 & 0 & S_{KP_\phi} & 0 \\ 0 & S_{KP_y} & 0 & 0 & S_{KP_\alpha} \\ 0 & 0 & S_{KP_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$S_{OB} = \begin{bmatrix} S_{OB_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

В матрицах чувствительности (1.13) – (1.15) элементы  $S_{* \#}$  представляют собой функции чувствительности компонентов вектора  $\Delta_{ЭРЛ}$  к вариациям ( $\#$ ) элемента РОС ( $*$ ), при этом ( $\#$ ) принимает смысл линейных, угловых и фокальных вариаций элемента ( $*$ ). Если в (1.12) подставить представления (1.13) – (1.15) матриц чувствительности, то для компонентов вектора  $\Delta_{ЭРЛ}$  становится справедливой запись

$$\Delta\phi_{Э} = S_{ГР_x} \Delta x_{ГР} + S_{ГР_\phi} \Delta\phi_{ГР} + S_{KP_x} \Delta x_{KP} + S_{KP_\phi} \Delta\phi_{KP} + S_{OB_x} \Delta x_{OB}, \quad (1.16)$$

$$\Delta\alpha_{Э} = S_{ГР_y} \Delta y_{ГР} + S_{ГР_\alpha} \Delta\alpha_{ГР} + S_{KP_y} \Delta y_{KP} + S_{KP_\alpha} \Delta\alpha_{KP}, \quad (1.17)$$

$$\Delta f_{Э} = S_{ГР_z} \Delta z_{ГР} + S_{KP_z} \Delta z_{KP} + S_{ГР_f} \Delta f_{ГР}, \quad (1.18)$$

Нетрудно видеть, что требование отъюстированности РОС, в асимптотической форме (1.7), в условиях эксплуатации может быть удовлетворено двумя способами. Первый способ состоит в использовании сильной гипотезы о недеформируемости МК РТ, второй способ состоит во введении в структуру системы управления РТ системы ФУК.

Для целей формирования задающих воздействий следящих приводов СФУК сгруппируем компоненты правой части соотношений (1.16) – (1.18) по типу компенсирующих юстировочных перемещений (линейных и угловых). Дополнительно к этому учтем, что перемещения юстировочных элементов имеют *две составляющие*. Первая составляющая является *измеримой деформацией* этого элемента, а вторая составляющая является *компенсационным (юстировочным) перемещением*. Для элементов РОС, неперемещаемых средствами СФУК, предполагается полная измеримость их линейных и угловых перемещений. В соответствии со сказанным, для задающих воздействий следящих приводов СФУК можно записать

$$S_{ГР_x} \Delta x_{ГР} + S_{KP_x} \Delta x_{KP} = 0, \quad (1.19)$$

$$S_{ГР_\phi} \Delta\phi_{ГР} + S_{KP_\phi} \Delta\phi_{KP} = 0, \quad (1.20)$$

$$S_{OB_x} \Delta x_{OB} = 0, \quad (1.21)$$

$$\Delta x_{ГР} = \Delta x_{ГРИ}, \quad (1.22)$$

$$\Delta x_{KP} = \Delta x_{КРИ} - \Delta x_{КРК}, \quad (1.23)$$

$$\Delta\phi_{ГР} = \Delta\phi_{ГРИ}, \quad (1.24)$$

$$\Delta\phi_{KP} = \Delta\phi_{КРИ} - \Delta\phi_{КРК}, \quad (1.25)$$

$$\Delta x_{OB} = \Delta x_{ОБИ} - \Delta x_{ОБК}, \quad (1.26)$$

$$g_{KP_x}(t) = \Delta x_{КРИ}(t) + \frac{S_{ГР_x}}{S_{KP_x}} \Delta x_{ГРИ}(t), \quad (1.27)$$

$$g_{OB_x}(t) = \Delta x_{ОБИ}(t), \quad (1.28)$$

$$g_{KP_y}(t) = \Delta y_{KPI}(t) + \frac{S_{GP_y}}{S_{KP_y}} \Delta y_{GPI}(t), \quad (1.29)$$

$$g_{KP_z}(t) = \Delta z_{KPI}(t) + \frac{S_{GP_z}}{S_{KP_z}} \Delta z_{GPI}(t) + \frac{S_{GP_f}}{S_{KP_z}} \Delta f_{GPI}(t), \quad (1.30)$$

$$g_{KP_\phi}(t) = \Delta \phi_{KPI}(t) + \frac{S_{GP_\phi}}{S_{KP_\phi}} \Delta \phi_{GPI}(t), \quad (1.31)$$

$$g_{KP_\alpha}(t) = \Delta \alpha_{KPI}(t) + \frac{S_{GP_\alpha}}{S_{KP_\alpha}} \Delta \alpha_{GPI}(t). \quad (1.32)$$

Для получения аналитических представлений компонентов матриц чувствительности (1.13) – (1.15), воспользуемся аппаратом матричной геометрической оптики в базисе X. Когельника применительно к РОС РТ, элементы которой приведены в приложении 4. Радиооптическая схема РТ приведена на рисунке 1.6., на этом рисунке кроме элементов РОС показаны положения опорных плоскостей ОП1 – ОП4.

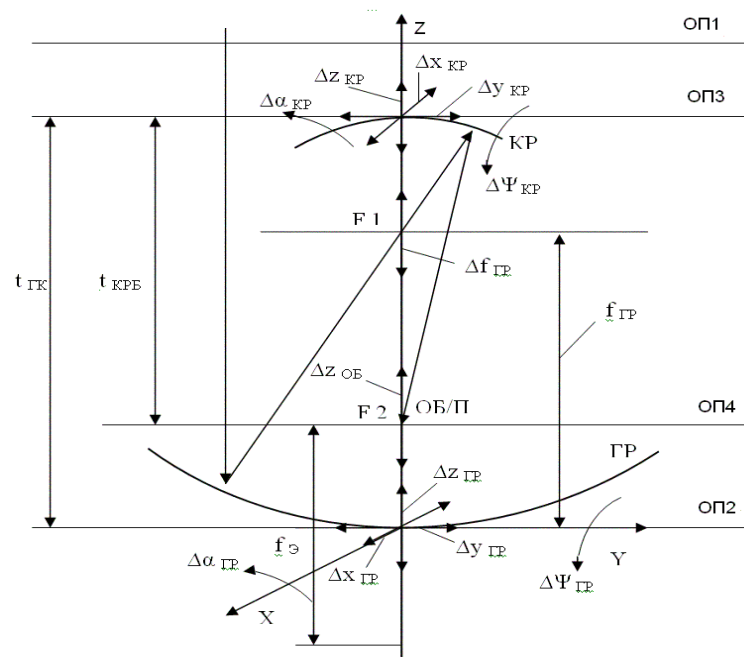


Рисунок 1.6. Радиооптическая схема РТ типа ТНА-1500

Плоскость ОП 1 принята за начальную, она вынесена за пределы РОС, плоскость ОП 2 сопряжена с вершиной ГР, плоскость ОП 3 сопряжена с вершиной контррефлектора, плоскость ОП 4 является финальной, она сопряжена с облучателем/приемником. В основу матричного метода, в его расширенной версии, положен контроль линейного смещения лучевого вектора (ЛВ) в финальной плоскости, при условии, что ЛВ, сформированный в начальной плоскости, совпадает с оптической осью РОС. Тогда линейное смещение ЛВ в финальной плоскости будет вызвано совокупной разъюстировкой элементов РОС. В результате коэффициенты чувствительности

матриц чувствительности  $S_{ГР}, S_{КР}$  и  $S_{ОП}$ , с использованием аппарата матричной оптики в базисе Х. Когельника, в расширенной версии, в функции параметров невозмущенной РОС РТ, определяются выражениями

$$S_{КРх} = S_{КРy} = \frac{2}{f_{\mathcal{E}}}, \quad (1.33)$$

$$S_{КР\phi} = S_{КР\alpha} = \frac{2}{f_{\mathcal{E}}} t_{КОБ}, \quad (1.34)$$

$$S_{КРz} = -S_{ГРz}, \quad (1.35)$$

$$S_{ГРх} = S_{ГРy} = -\frac{2t_{КОБ}}{f_{\mathcal{E}}f_{КР}}, \quad (1.36)$$

$$S_{ГР\phi} = S_{ГР\alpha} = 1, \quad (1.37)$$

$$S_{КРz} = \frac{2f_{\mathcal{E}}}{f_{ГР}}, \quad (1.38)$$

$$S_{ГРf} = \frac{f_{\mathcal{E}}}{f_{ГР}}, \quad (1.39)$$

где  $f_{\mathcal{E}}$  – фокусное расстояние ЭРЛ определяемое соотношениями

$$f_{\mathcal{E}} = \frac{f_{ГР}}{2} \left( 1 - \frac{2t_{КОБ}}{f_{КР}} \right) = 1 - \frac{2t_{КОБ}}{f_{КР}} t_{ГК} + t_{КОБ}. \quad (1.40)$$

Для большого полноповоротного РТ ТНА – 1500 параметры РОС, входящие в приведенные выражения принимают значения  $t_{ГК} = 26.9$  м,  $t_{КОБ} = 17.24$  м,  $f_{ГР} = 23.6$  м,  $f_{КР} = 15.1$  м. Коэффициенты чувствительности, входящие в матрицы чувствительности характеризуются значениями  $S_{КРх} = S_{КРy} = -0.132$  рад/м,  $S_{КР\phi} = S_{КР\alpha} = -2.2757$ ,  $S_{ГРх} = S_{ГРy} = 0.1507$  рад/м,  $S_{ГР\phi} = S_{ГР\alpha} = 1$ ,  $S_{КРz} = -S_{ГРz} = -1$ ,  $S_{ГРf} = -0.5$ .

В заключении следует сказать, что успех динамической юстировки РОС деформируемых РТ средствами СФУК, следящие приводы которых обрабатывают задающие воздействия, формируемые в силу соотношений (1.19) – (1.32) в значительной степени определяется качеством информационного обеспечения формирования этих воздействий.

#### 1.4. Информационное обеспечение алгоритмов фокусно-угловой компенсации

Соотношения (1.27)–(1.32), позволяют, сформировать задающие воздействия для следящих приводов СФУК. Если воспользоваться этими соотношениями, то в силу (1.21) – (1.26), для *компенсационных перемещений юстировочных элементов* в функции от динамических свойств передаточных функций  $\Phi_{(*)}(s)$  приводов (\*), можно записать

$$\Delta x_{КРК}(t) = \Delta x_{КРК} \{ \Phi_{КРх}(s), g_{КРх}(t), t \}, \quad (1.41)$$

$$\Delta y_{КРК}(t) = \Delta y_{КРК} \{ \Phi_{КРy}(s), g_{КРy}(t), t \}, \quad (1.42)$$

$$\Delta z_{KPK}(t) = \Delta z_{KPK} \{ \Phi_{KPz}(s), g_{KPz}(t), t \}, \quad (1.43)$$

$$\Delta \phi_{KPK}(t) = \Delta \phi_{KPK} \{ \Phi_{KP\phi}(s), g_{KP\phi}(t), t \}, \quad (1.44)$$

$$\Delta \alpha_{KPK}(t) = \Delta \alpha_{KPK} \{ \Phi_{KP\alpha}(s), g_{KP\alpha}(t), t \}, \quad (1.45)$$

$$\Delta x_{OBK}(t) = \Delta x_{OBK} \{ \Phi_{OBx}(s), g_{OBx}(t), t \}. \quad (1.46)$$

Нетрудно видеть, что передаточные функции всех шести следящих приводов компенсации должны быть просинтезированы так, чтобы они по точности функционирования удовлетворяли следующим требованиям

$$\Phi_{KPx}(s) = \arg \left\{ \| g_{KPx}(t) - \Delta x_{KPK}(t) \| \leq \Delta x_{KP} \right\}, \quad (1.47)$$

$$\Phi_{KPy}(s) = \arg \left\{ \| g_{KPy}(t) - \Delta y_{KPK}(t) \| \leq \Delta y_{KP} \right\}, \quad (1.48)$$

$$\Phi_{KPz}(s) = \arg \left\{ \| g_{KPz}(t) - \Delta z_{KPK}(t) \| \leq \Delta z_{KP} \right\}, \quad (1.49)$$

$$\Phi_{KP\phi}(s) = \arg \left\{ \| g_{KP\phi}(t) - \Delta \phi_{KPK}(t) \| \leq \Delta \phi_{KP} \right\}, \quad (1.50)$$

$$\Phi_{KP\alpha}(s) = \arg \left\{ \| g_{KP\alpha}(t) - \Delta \alpha_{KPK}(t) \| \leq \Delta \alpha_{KP} \right\}, \quad (1.51)$$

$$\Phi_{OBx}(s) = \arg \left\{ \| g_{OBx}(t) - \Delta x_{OBK}(t) \| \leq \Delta x_{OB} \right\}. \quad (1.52)$$

В выражениях (1.47) – (1.52) погрешность  $\Delta_{(*)}$  привода  $(*)$  формируется на основе декомпозиции допустимой совокупной погрешности наведения РТ на ОРАН, для данной волны излучения  $\lambda$  по факторам, ее формирующим. Следует заметить, что в условиях деформаций МК РТ, с введенной в состав системы управления системой фокусно-угловой компенсации, количество этих факторов резко увеличивается. Причем, если воспользоваться планарным подходом, разбив погрешность на угломестную и коллимационную планарные компоненты, то становится ясным, что число факторов планарной составляющей допустимой погрешности в угломестной плоскости несколько больше, чем планарной составляющей в коллимационной плоскости. Применительно к угломестной плоскости, факторами, определяющими погрешность наведения деформированного РТ, снабженного СФУК деформаций, а также СЭКД элементов МК, которая решает задачу информационного обеспечения функционирования СФУК, являются:

- погрешность интерполяторов программного управления;
- погрешность датчиков (УМ индуктосинов) наведения РТ на ОРАН;
- погрешность силовых приводов;
- погрешность процесса предъэксплуатационной юстировки;
- погрешность контроля смещения центра аппроксимирующего параболоида ГР по оси абсцисс;
- погрешность контроля смещения центра аппроксимирующего параболоида ГР по оси аппликат;
- погрешность измерения углового смещения оси аппроксимирующего параболоида;
- погрешность оценки изменения фокуса ГР в рамках аппроксимации деформируемого ГР параболоидом вращения;
- погрешность измерения смещения ОП вместе с надзеркальной кабиной по оси абсцисс;

- погрешность измерения линейного перемещения КР по оси абсцисс;
- погрешность измерения углового положения КР в угломестной плоскости;
- погрешность измерения линейного смещения КР вдоль оси аппликат;
- погрешность устройства компенсации разворота статоров УМ индуктосинов при угловой деформации боковых стоек ОПУ;
- ошибка следящего привода компенсации смещения облучателя;
- ошибка следящего привода компенсации смещения КР вдоль оси абсцисс;
- ошибка следящего привода компенсации смещения КР по оси ординат;
- ошибка следящего привода компенсации смещения КР по УМ;
- неучтенные факторы.

Следуя гипотезе равновесности факторов и их стохастической независимости, воспользуемся соотношением (1.4) в котором для случая управления деформируемым РТ снабженным СФУК и СЭКД следует положить  $n_{\phi} = 18$  так, что получим

$$\Delta_{\phi} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Delta. \quad (1.53)$$

Значения факторной составляющей  $\Delta_{\phi}$  погрешности в функции от используемой длины волны излучения для двух типов отечественных полноповоротных РТ ТНА–400 (РТФ–32) и ТНА–1500 (РТФ–64) приведены в таблице 1.4

Таблица 1.4

#### Значения факторных составляющих погрешности наведения РТ на ОРАН

$\lambda$ (мм)	ТНА – 400 D <sub>ГР</sub> – 32 метра			ТНА – 1500 D <sub>ГР</sub> – 64 метра		
	[ $\Delta_{\phi}$ ] (углмин)	$\Delta_{\phi 0}$ (углмин)	$\Delta_{\Delta\phi}$ (углмин)	[ $\Delta_{\phi}$ ] (углмин)	$\Delta_{\phi 0}$ (углмин)	$\Delta_{\Delta\phi}$ (углмин)
100	[0.309, 0.773]	0.541	0.232	[0.155, 0.387]	0.271	0.116
75	[0.232, 0.58]	0.406	0.174	[0.116, 0.29]	0.203	0.087
50	[0.155, 0.384]	0.27	0.114	[0.077, 0.193]	0.135	0.058
30	[0.093, 0.232]	0.163	0.069	[0.046, 0.116]	0.081	0.035
20	[0.062, 0.155]	0.108	0.047	[0.031, 0.077]	0.054	0.023
10	[0.031, 0.077]	0.054	0.023	[0.016, 0.039]	0.028	0.011
5	[0.016, 0.039]	0.028	0.011	[0.00778, 0.019]	0.013	0.006

Оценка (1.53) построена на основе гипотезы о равновесности факторов. Это может привести к завышению требований к измерительным устройствам деформаций одних элементов МК и к ослаблению их к другим. Нетрудно видеть, что в соотношениях (1.27) – (1.34) результаты измерений элементов МК, которые используются при формировании задающих внешних воздействий для следящих приводов СФУК, входят с различными весовыми коэффициентами. Значения этих весовых коэффициентов  $P_*$  приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5.

### Значения весовых коэффициентов

$P_{ГРх}$	$P_{ГРy}$	$P_{ГРz}$	$P_{ГРψ}$	$P_{ГРα}$	$P_{ГРf}$	$P_{КРх}$	$P_{КРy}$	$P_{КРz}$	$P_{КРψ}$	$P_{КРα}$	$P_{ОБх}$
1.142	1.142	1	0.44	0.44	0.5	1	1	1	1	1	1

В табл. 1.5 весовые коэффициенты в силу соотношений (1.26) – (1.31) определяются соотношениями  $P_{ГРх} = S_{ГРх} / S_{КРх}$ ,  $P_{ГРy} = S_{ГРy} / S_{КРy}$ ,  $P_{ГРz} = S_{ГРz} / S_{КРz}$ ,  $P_{ГРφ} = S_{ГРφ} / S_{КРφ}$ ,  $P_{ГРα} = S_{ГРα} / S_{КРα}$ ,  $P_{ГРf} = S_{ГРf} / S_{КРz}$ .

Используя значения весовых коэффициентов, можно корректно перераспределить требования к факторным компонентам погрешности измерений при решении задач информационного обеспечения СФУК средствами СЭКД, в состав которой входит система контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла.

Информационное обеспечение алгоритмов СФУК опирается на организацию динамических измерений деформаций элементов МК так, что задающие воздействия

(1.26) – (1.31) при их реализации вместо  $\Delta^{(*)}_И$  использует ее оценку  $\hat{\Delta}^{(*)}_И$ , формируемую аппаратурой и алгоритмической средой СЭКД. Причем требования к погрешности оценки должно удовлетворять условию

$$\left\| \Delta^{(*)}_И - \hat{\Delta}^{(*)}_И \right\| \leq \Delta_\Phi, \quad (1.54)$$

где  $(*)$  принимает смысл следующих переменных  $x_{КР}, y_{КР}, z_{КР}, \varphi_{КР}, \alpha_{КР}, x_{ОБ}, x_{ГР}, y_{ГР}, z_{ГР}, \varphi_{ГР}, \alpha_{ГР}, f_{ГР}$ . Неравенство (1.54) кладется в основу формирования требований к ошибкам измерительных следящих систем, к погрешностям используемых в их составе преобразователей вал-код (ПВК), а также к погрешностям оценивания в алгоритмической среде СЭКД, в той ее аппаратуре, которая для целей первичных измерений использует регулярные структуры, построенные на приборах с переносом заряда (ППЗ). Если измерительные системы характеризовать передаточными функциями, то синтезом закона управления этим передаточным функциям должны быть доставлены свойства, которые удовлетворяют соотношению

$$\Phi_{(*)_И}(o) = \arg \left\{ \left\| \Delta^{(*)}_И - \hat{\Delta}^{(*)}_И \right\| \leq \Delta \right\}, \quad (1.55)$$

где  $(o)$  принимает смысл комплексной переменной  $S$  преобразования Лапласа для измерительных ФЭСС и смысл комплексной переменной  $z$  для цифровых алгоритмов обработки видеосигнала, формируемого средствами ППЗ-структуры.

При организации динамических измерений, с целью минимизации их погрешностей необходимо использование априорных динамических моделей деформационных процессов МК РТ при построении которых, наибольшей модельной неопределенностью обладает ветровая составляющая. Спецификой ветровой составляющей деформации конкретного элемента МК, является то, что в качестве основного приемника ветрового воздействия выступает ГР, обладающий высокой парусностью, деформация которого по жестким кинематическим цепям с априорно оцениваемыми коэффициентами передается конкретному элементу МК. Таким образом, при построении математической модели динамической составляющей ветровой

деформации возникает фактор интервальности в оценке параметров модели ветрового воздействия, в оценке параметров планарной модели ГР и в оценке ожидаемых величин деформации на этапе конструирования РТ, а также по результатам обработки измерений деформаций масштабной макетной модели РТ в аэродинамической трубе. Полученные значения факторной составляющей погрешности наведения вычисленной в силу выражения (1.53) авторами рассматриваются как медианные. Интервальные составляющие погрешностей, порождаемых как цепями измерения в среде СЭКД, так и цепями компенсации в среде СФУК являются предметом поиска путей управления ими.

### **Контрольные вопросы**

- 1.1. Назовите основные режимы управления радиотелескопом как радиоастрономическим инструментом (РАИ).
- 1.2. В чем состоит задача предэксплуатационной юстировки радиотелескопа как РАИ?
- 1.3. Назовите основные источники внешних возмущений, воздействия которых приводят к деформациям металлоконструкций РТ, порождающих разъюстировку РТ как радиооптического инструмента (РОИ)?
- 1.4. Перечислите основные функциональные компоненты РТ, деформация которых определяет погрешность совмещения радиооси РТ с линией визирования на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН). совмещения радиооси РТ с линией визирования на объект радиоастрономического наблюдения (ОРАН).
- 1.5. В чем состоит задача эксплуатационной динамической юстировки радиотелескопа как РАИ?
- 1.6. Перечислите все сервисные системы, задействованные в эксплуатационной динамической юстировке (ЭДЮ) РТ.
- 1.7. Перечислите все сервисные системы, задействованные в ЭДЮ радиооптической системы (РОС) РТ.
- 1.8. Как связана длина волны электромагнитного излучения, на которой работает РТ, с допустимой погрешностью наведения РТ на ОРАН?
- 1.9. Перечислите все факторы, которые формируют погрешность совмещения радиооси РТ с линией визирования на ОРАН.
- 1.10. Как оценить допустимое значение составляющей ошибки, вносимой каждым фактором в случае справедливости гипотезы их равновесности и стохастической независимости?
- 1.11. Какие задачи решает система эксплуатационного контроля деформаций (СЭКД)?
- 1.12. Какие задачи решает система фокусно – угловой компенсации?
- 1.13. В чем состоит концепция эквивалентной радиолнзы(ЭРЛ)?
- 1.14. Как описывается преобразование лучевого вектора в базисе Х.Когельника?
- 1.15. Как учитывается разъюстировка компонентов РОС в базисе Х.Когельника?
- 1.16. Какими компонентами РОС РТ осуществляется ЭДЮ?

1.17. Каким числом следящих приводов и по каким координатам осуществляется перемещение контррефлектора (КР) относительно верхнего опорного узла (ВОУ) РТ при ЭДЮ РОС средствами СЭКД?

1.18. Как формируются задающие воздействия следящим приводам СЭКД для осуществления ЭДЮ РОС РТ?

1.19. Сколько систем фотоэлектрического следящего преобразования используется для опто-электронного мониторинга деформаций ВОУ?.

1.20. Какими функциональными компонентами отличаются системы управления недеформируемого РТ и РТ в условиях деформаций его МК?

## 2. ФАКТОР ИНТЕРВАЛЬНОСТИ В МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РАДИОТЕЛЕСКОПОМ

### 2.1. Элементы интервальных вычислений и линейной алгебры

Для целей погружения в интервальную проблематику и технологию интервальных модельных представлений, которые авторами выбраны в качестве основного инструмента описания динамики процессов деформации МК РТ и их измерения средствами следящего оптоэлектронного мониторинга, технически реализуемого с помощью ФЭСС, необходимо проанализировать базовые возможности элементов интервальных вычислений и интервальной линейной алгебры

**Определение 2.1.** Пусть числа  $\underline{\rho}, \bar{\rho}$  такие, что  $\underline{\rho}, \bar{\rho} \in R, \underline{\rho} \leq \bar{\rho}$ , и при этом задают вещественное число  $\rho$  в параметризованной относительно параметром  $q \in [0, 1]$  форме

$$\rho(q) = (1 - q)\underline{\rho} + q\bar{\rho}. \quad (2.1)$$

Тогда вещественное интервальное число  $[\rho]$  образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q \{\rho(q); q \in [0, 1]\}, \bar{\rho} = \max_q \{\rho(q); q \in [0, 1]\} \quad (2.2)$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]. \quad (2.3)$$

**Определение 2.2.** Интервальным комплексным числом  $[\gamma = \rho + j\delta]$  называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественные и мнимые части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta], \quad (2.4)$$

где  $[\rho] = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ ,  $[\delta] = [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ .

**Определение 2.3.** Интервальным вектором  $[x]$  размерности  $n$  называется вектор с интервальными компонентами  $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$  так, что становится справедливой запись

$$[x] = \text{col}\{[x_i]; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.5)$$

**Определение 2.4.** Интервальной  $(n \times m)$  – матрицей  $[A]$  называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}], [A] = \text{row}\{\text{col}([A_{ij}]; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, m}\} \quad (2.6)$$

при этом справедливым оказывается представление

$$[A] = [\underline{A}, \bar{A}], \quad (2.7)$$

где  $[\underline{A}] = \text{row}\{\text{col}([\underline{A}_{ij}]; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, m}\}, \quad (2.8)$

$$[\bar{A}] = \text{row}\{\text{col}([\bar{A}_{ij}]; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, m}\}. \quad (2.9)$$

**Определение 2.5.** Произведением

$$[a] \cdot [b] = [c] \quad (2.10)$$

интервальных чисел  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  и  $[b] = [\underline{b}, \bar{b}]$  называется интервальное число  $[c] = [\underline{c}, \bar{c}]$ , граничные значения которого  $\underline{c}$  и  $\bar{c}$  вычисляются в силу

$$\underline{c} = \min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \quad (2.11)$$

$$\bar{c} = \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}. \quad (2.12)$$

**Определение 2.6.** Суммой

$$[a] + [b] = [d] \quad (2.13)$$

интервальных чисел  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  и  $[b] = [\underline{b}, \bar{b}]$  называется интервальное число  $[d] = [\underline{d}, \bar{d}]$ , граничные значения которого  $\underline{d}$  и  $\bar{d}$  вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{d} = \min\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \bar{b}, \bar{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}\} = \underline{a} + \underline{b}, \quad (2.14)$$

$$\bar{d} = \max\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \bar{b}, \bar{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}\} = \bar{a} + \bar{b}. \quad (2.15)$$

**Определение 2.7.** Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]} = [f] \quad (2.16)$$

интервальных чисел  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  и  $[b] = [\underline{b}, \bar{b}]$  называется интервальное число  $[f] = [\underline{f}, \bar{f}]$ , граничные значения которого  $\underline{f}$  и  $\bar{f}$  вычисляются в силу выражений

$$\underline{f} = \min\left\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, \quad \bar{f} = \max\left\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}. \quad (2.17)$$

**Определение 2.8.** Разностью

$$[a] - [b] = [d] \quad (2.18)$$

интервальных чисел  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  и  $[b] = [\underline{b}, \bar{b}]$  называется интервальное число  $[h] = [\underline{h}, \bar{h}]$ , граничные значения которого  $\underline{h}$  и  $\bar{h}$  определяются с помощью выражений

$$\underline{h} = \min\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}, \quad (2.19)$$

$$\bar{h} = \max\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}. \quad (2.20)$$

**Определение 2.9.** Фиксированное число  $g$  имеет интервальное представление  $[g] = [\underline{g}, \bar{g}]$ , которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g} = \bar{g}. \quad (2.21)$$

**Утверждение 2.1.** Частное от деления интервального числа  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  на самое себя является интервальное число  $[1_a] = [\underline{1}_a, \bar{1}_a]$

$$\frac{[a]}{[a]} = [1_a], \quad (2.22)$$

границные значения которого  $\underline{1}_a$  и  $\bar{1}_a$  в силу (2.17) вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{1}_a = \min \left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\underline{a}} \right\}, \quad (2.23)$$

$$\bar{1}_a = \max \left\{ \frac{\underline{a}}{\bar{a}}, \frac{\underline{a}}{\bar{a}}, \frac{\bar{a}}{\bar{a}}, \frac{\bar{a}}{\bar{a}} \right\}. \quad (2.24)$$

**Утверждение 2.2.** Разностью интервальных чисел  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  и  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$

$$[a] - [a] = [0_a] \quad (2.25)$$

является интервальное число  $[0_a] = [\underline{0}_a, \bar{0}_a]$ , граничные значения которого  $\underline{0}_a$ ,  $\bar{0}_a$  в силу (2.14), (2.15) задаются соотношениями

$$\underline{0}_a = \min \{ \underline{a} - \underline{a}, \underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}, \bar{a} - \bar{a} \}, \quad (2.26)$$

$$\bar{0}_a = \max \{ \underline{a} - \underline{a}, \underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}, \bar{a} - \bar{a} \}. \quad (2.27)$$

**Определение 2.10.** Медианой  $mid [a]$  интервального числа  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  называется фиксированное число  $a_0$ , задаваемое соотношением

$$mid [a] = a_0 = 0.5(\underline{a} + \bar{a}). \quad (2.28)$$

**Определение 2.11.** Интервальным компонентом  $wid [a]$  интервального числа  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  называется интервальное число  $[\Delta a] = [\underline{\Delta a}, \bar{\Delta a}]$ , граничные значения которого  $\underline{\Delta a}$  и  $\bar{\Delta a}$  задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a} = \underline{a} - a_0, \quad \bar{\Delta a} = \bar{a} - a_0, \quad (2.29)$$

**Утверждение 2.3.** Интервальное число  $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$  в силу (2.28), (2.29), а также (2.14), (2.15), (2.21) представимо в виде аддитивной композиции

$$[a] = a_0 + [\Delta a], \quad (2.30)$$

**Определение 2.12.** Медианой  $mid [A]$  интервальной  $(n \times m)$  – матрицы  $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$ , называется матрица  $A_0$  с фиксированными скалярными компонентами  $A_{0ij}$

$$A_0 = row \{ col (A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m} \} \quad (2.31)$$

где элементы  $A_{0ij}$  матрицы  $A_0$  задаются соотношением

$$A_{0ij} = mid \{ [A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}] \} = 0.5(\underline{A}_{ij} + \bar{A}_{ij}). \quad (2.32)$$

**Определение 2.13.** Интервальным матричным компонентом  $wid [A]$  интервальной матрицы  $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$  называется интервальная матрица  $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \bar{\Delta A}]$ , граничные реализации которой  $\underline{\Delta A}$  и  $\bar{\Delta A}$  задаются соотношениями

$$[\underline{\Delta A}] = \underline{A} - A_0 = col \{ row ([\underline{\Delta A}_{ij}] = \underline{A}_{ij} - A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m} \}, \quad (2.33)$$

$$[\bar{\Delta A}] = \bar{A} - A_0 = col \{ row ([\bar{\Delta A}_{ij}] = \bar{A}_{ij} - A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m} \} \quad (2.34)$$

**Утверждение 2.4.** Интервальная  $(n \times m)$  – матрица  $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$  в силу (2.31), (2.33), (2.34), а также (2.32), (2.9) представима в аддитивной форме

$$[A] = A_0 + [\Delta A], \quad (2.35)$$

где  $A_0 = \text{mid}[A]$ ,  $[\Delta A] = \text{wid}[A]$ .

**Определение 2.14.** Произведением интервальных  $(n \times m)$  – матрицы  $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$  и  $(m \times k)$  – матрицы  $[B] = [\underline{B}, \overline{B}]$

$$[A] \times [B] = [C] \quad (2.36)$$

называется интервальной  $(n \times k)$  – матрица  $[C] = [\underline{C}, \overline{C}]$  с интервальными скалярными элементами  $[C_{il}] = [\underline{C}_{il}, \overline{C}_{il}]$ , вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}] = \sum_{j=i}^m [A_{ij}] [B_{ij}], \quad i = \overline{1, n}; l = \overline{1, k}, \quad (2.37)$$

где произведение  $[A_{ij}] [B_{ij}]$  интервальных чисел определяется в соответствии с (2.10), (2.11), (2.12) а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (2.13), (2.14), (2.15).

**Определение 2.15.** Угловой реализацией  $(A_c)_v$   $(n \times m)$  – интервальной матрицы  $[A] = [\underline{A}, \overline{A}] = A_0 + [\Delta A]$ , получаемой в результате  $v$ -й выборки  $v = \overline{1, 2^{mn}}$  из множества мощностью, равной  $(n \times m)$  пар  $\{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$  граничных значений интервальных скалярных компонентов  $[A_{ij}]$  матрицы  $[A]$ , называется матрица

$$(A_c)_v = \text{row}\{\text{col}((A_{cij})_v \in \{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})\} \quad (2.38)$$

с фиксированными на этой реализации компонентами.

**Утверждение 2.5.** Пусть  $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$  интервальный матричный компонент матрицы  $[A]$ , определенной в силу факторизации в форме (2.35), тогда интервальные компоненты  $[\Delta A_{ij}] = [\underline{\Delta A}_{ij}, \overline{\Delta A}_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$  обладают тем свойством, что

$$|\underline{\Delta A}_{ij}| = |\overline{\Delta A}_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}, \quad (2.39)$$

которое выполняется в силу (2.31), (2.32).

**Утверждение 2.6.** Угловые реализации  $(\Delta A_c)_v$  и  $(\Delta A_c)_\mu$   $(n \times m)$  – интервальной матрицы  $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$  с граничными компонентами  $\underline{\Delta A}$  и  $\overline{\Delta A}$  (2.33), (2.34), полученных в результате  $v$ -й и  $\mu$ -й выборок  $v, \mu = \overline{1, 2^{mn}}$  в силу (2.38) и свойства (2.39) обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\|(\Delta A_c)_v\| = \|(\Delta A_c)_\mu\|; \quad v, \mu = \overline{1, 2^{mn}}. \quad (2.40)$$

**Определение 2.16.** Интервальным полиномом  $[D(z)]$  степени  $n$  называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)] = [a_0]z^n + [a_1]z^{n-1} + [a_2]z^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]z + [a_n] \quad (2.41)$$

где  $[a_i] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ ;  $i = \overline{0, n}$

**Определение 2.17.** Интервальным характеристическим полиномом ИХП  $[D(\lambda)]$  интервальной  $(n \times n)$  – матрицы  $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$  называется интервальный полином степени  $n$ , получаемый в силу определения характеристического полинома  $(n \times n)$  - квадратной матрицы

$$\det(\lambda I - [A]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] \quad (2.42)$$

так, что  $[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [A])$ .

При формировании ИХП  $[D(\lambda)]$  интервальной матрицы  $[A]$  системы необходимо отметить проблему объема вычислений. Очевидно, если размерность матрицы  $[A]$  составляет  $(n \times n)$ , тогда максимальная мощность множества  $\{(A)_c\}$  угловых реализаций матрицы  $[A]$  составляет  $2^{n \times n}$ , минимальная мощность этого множества составляет  $2^n$ , что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как *диагональное* и *фробениусово*. Однако независимо от базиса мощность множества  $\{(A)_c\}$  угловых реализаций может быть зафиксировано на уровне  $2^p$ , где  $p$  – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров. Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий *рост ширины*  $wid [a_\ell]$  *системных интервальных параметров*  $[a_\ell]$ . *Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности  $[a_\ell] - [a_\ell]$  и частного от деления  $[a_\ell]/[a_\ell]$* . Очевидно, в силу параметризованных представлений  $a_\ell(q) - a_\ell(q) = 0$  и  $=1$  в том числе и при  $q = 0$  и  $q = 1$ . Таким образом без нарушения существования интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением  $[a_\ell] - [a_\ell] = 0, [a_\ell]/[a_\ell] = 1$ .

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной  $(n \times n)$  матрицы  $[A]$ .

**Способ 1.** Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы  $[A]$

$$\sigma\{[A]\} = \{[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i] : \det(\lambda I - [A]) = 0; i = \overline{1, n}\} \quad (2.43)$$

известен, тогда ИХП (2.42) представим в форме

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] = \prod_{i=1}^n (\lambda - [\lambda_i]), \quad (2.44)$$

где  $[a_0] = [1, 1] = 1$

Обобщенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений  $[\lambda_i]$  с коэффициентами  $[a_i]; i = \overline{1, n}$  в форме

$$[a_1] = -\sum_{i=1}^n \lambda_i = -tR[A], \quad (2.45)$$

$$[a_2] = \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i3=3}}^n [\lambda_{i1}] [\lambda_{i2}], \quad (2.46)$$

$$[a_3] = - \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i3=3 \\ i1 < i2 < i3}}^n [\lambda_{i1}] [\lambda_{i2}] [\lambda_{i3}]; \quad (2.47)$$

$$[a_{n-1}] = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ \vdots \\ i(n-1)=n-1 \\ i1 < i2 < \dots < i(n-1)}}^n [\lambda_{i1}] [\lambda_{i2}] \dots [\lambda_{i(n-1)}]; \quad (2.48)$$

$$[a_n] = (-1)^n \prod_{i=1}^n [\lambda_i]. \quad (2.49)$$

**Способ 2.** Способ Г. Крамера главных миноров:

$$[a_1] = -tR[A] = - \left[ \sum_{i=1}^n A_{ij}, \sum_{i=1}^n \overline{A_{ij}} \right], \quad (2.50)$$

$$[a_k] = (-1)^k \sum_{i=1}^k [M_{ii}], \quad (2.51)$$

где  $[M_{ii}]$  алгебраическое дополнение  $(ii)$ -го элемента  $[A_{ii}]$  матрицы  $[A]$ ;

$$[a_n] = (-1)^n \det[A]. \quad (2.52)$$

**Способ 3.** Способ У.Ж.Ж. Леверье:

$$[a_k] = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [a_{i-1}] t_2 [A^{k-i+1}], \quad k = \overline{1, n}; \quad [a_0] = 1 \quad (2.53)$$

**Способ 4.** Способ Д.К. Фадеева:

$$[a_k] = -\frac{1}{k} tR\{[A][H_{k-1}]\}; \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.54)$$

где

$$[H_k] = [A][H_{k-1}] + [a_k]I; \quad [H_0] = I \quad (2.55)$$

В силу выше изложенного (2.32), (2.33), (2.34) допустимо следующее определение

**Определение 2.18.** Интервальный матричный компонент  $[(*)]$

$$[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)] = (*)_0 + [\underline{\Delta}(*), \overline{\Delta}(*)], \quad (2.56)$$

может быть охарактеризован показателем абсолютной интервальности,

$$\Delta_I(*) = \|\Delta(*)\|. \quad (2.57)$$

Нетрудно видеть, что в силу структуры интервального матричного компонента  $[\Delta(*)]$  Фробениусова, а также индуцированные с индексами  $p=1$  и  $p=\infty$  нормы всех угловых реализаций этого компонента оказываются фиксированными так, что становится справедливым равенство

$$\Delta_I(*) = \|\Delta(*)\| = \|\underline{\Delta}(*)\| = \|\overline{\Delta}(*)\|. \quad (2.58)$$

Это же положение оказывается справедливым для индуцированной нормы с индексом  $p=2$  (спектральной нормы) в силу справедливости соотношения  $\|(\circ)\|_2 \leq \{\|(\circ)\|_1 \|(\circ)\|_\infty\}^{1/2}$  для ее оценки через нормы с индексами  $p=1$  и  $p=\infty$ .

**Определение 2.19.** Интервальный матричный компонент  $[(*)]$  представленный в форме (2.56) может быть охарактеризован показателем  $\delta_I(*)$  относительной интервальности, задаваемым соотношением

$$\delta_I(*) = \frac{\Delta_I(*)}{\|(*)_0\|}. \quad (2.59)$$

Последние два определения по существу содержат доказательства следующего утверждения

**Утверждение 2.7.** *Оценки абсолютной и относительной интервальности интервальных компонентов исходного интервального объекта (числа, вектора, матрицы) не являются интервальными числами.* ■

В заключении необходимо отметить, что формализм правил интервальной арифметики в процессе приведенных выше преобразований математических выражений содержащих интервальные числа, векторы и матрицы, может наблюдаться заметный рост нормы интервальной части интервального компонента. Этот рост в основном определяется операциями вычитания и деления скалярного интервального элемента соответственного *самого из себя* и *самого на себя*, не приводящими соответственно к нулевому и единичному результатам. Тем не менее, параметризованная параметром  $q$  форма (2.2) интервального скалярного элемента при любых значениях  $q$  в перечисленных выше операциях *дает нулевой и единичный результаты*, в том числе и при граничных значениях  $q=0$  и  $q=1$ . В этой связи при построении интервальных модельных представлений авторы использовали *модифицированную версию интервальных вычислений* в которых сделаны допущения о справедливости выполнения равенств  $[a] - [a] = 0$  и  $\frac{[a]}{[a]} = 1$ , что не

нарушает существа интервальных вычислений.

Необходимо отметить также проблемы объема вычислений при формировании ИХП  $[D(\lambda)]$  интервальной матрицы  $[F]$  системы. Если размерность матрицы  $[F]$  составляет  $(n \times n)$ , тогда максимальная мощность множества  $\{(F)_c\}$  угловых реализаций матрицы  $[F]$  составляет  $2^{n \times n}$ , минимальная мощность этого множества составляет  $2^n$ , что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как диагональное и фробениусово. Независимо от базиса представления мощность множества  $\{(F)_c\}$  угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне  $2^p$ , где  $p$  – число исходных интервальных физических параметров. Таким образом, целесообразно интервальные вычисления производить не на угловых

системных реализациях с накопленной интервальностью, а на угловых реализациях исходных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть, кроме того, заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров.

## **2.2. Интервальные модельные представления процессов деформации элементов металлоконструкции радиотелескопа**

Как отмечалось в параграфе 1.2 основными факторами возмущений, приводящих к деформациям МК РТ являются:

- изменение весовых нагрузок при угломестном вращении РТ;
- влияние ускорений при азимутальном и угломестном вращении РТ;
- градиенты температур на элементах МК РТ от солнечного нагрева и остужающего действия ветра;
- ветровые воздействия на конструкцию РТ, основным приемником которого является ГР.

**Под процессом деформации элементов металлоконструкции (ЭМК) в контексте с проектированием системы для ее измерения в задаче мониторинга деформаций понимаются линейные и угловые перемещения ЭМК, вызванные перечисленными выше факторами, приводящими к разъюстировке РОС РТ. При построении модельного представления процесса деформации используется то обстоятельство, что факторные составляющие обладают аддитивным свойством. Функционально эти перемещения представляют собой задающие воздействия для измерительных динамических систем, поэтому качество модельного представления перемещений ЭМК во многом определит ошибку следящего преобразования в процессе мониторинга деформаций.**

При построении модельного представления процесса деформации, с учетом фактора интервальности априорной информации, будем опираться на следующие концепции.

**Концепция 2.1. Допустимость и корректность планарной декомпозиции полных угловых и линейных деформаций ЭМК.**

**Концепция 2.2. Параметрическая интервальность в модельном представлении минимальна, если в нем максимально использована возможность конечномерного представления деформаций в базисе степенных функций, параметризованных временем.**

**Концепция 2.3. Для целей использования накопленных технологий достижения минимальной, а возможно и нулевой, установившейся ошибки слежения за задающим воздействием таких как: *комбинированное управление, принцип внутренней модели и изодромное управление* целесообразно модельное представление источника задающего воздействия построить в форме *конечномерной автономной системы*.**

Концепция 2.4. **Весовая деформация элемента МК РТ в угломестной плоскости** происходит в темпе угломестного поворота РТ.

Концепция 2.5. **Интервальное модельное представление процессов деформации МК РТ** конструируется как **медианное модельное представление, принимаемое** в проводимых расчетах за **номинальное, дополненное** оценкой относительной интервальности матричных компонентов и количественных показателей процесса деформации.

В связи со сказанным обнаруживается возможность представления деформаций, вызванных первыми тремя факторами, в базисе степенных функций третьего порядка, с допустимой точностью описывающих процесс деформаций МК РТ.

**При построении модели деформаций обусловленной влиянием четвертого фактора, учитывающей псевдопостоянные порывы и непрерывный стохастический компонент ветрового напора, используются следующие предположения:**

1. *Стохастическая составляющая ветрового воздействия* представляет собой стационарный в широком смысле процесс типа экспоненциально коррелированный шум, моделируемый выходом формирующего фильтра (ФФ) первого порядка, с эффективной полосой  $\Omega$ , зависящей от скорости ветра, возбуждаемого стационарным в широком смысле стохастическим сигналом типа "белым шумом" интенсивности  $N$ . Указанная зависимость по данным библиографических источников представлена на рисунке 2.1.

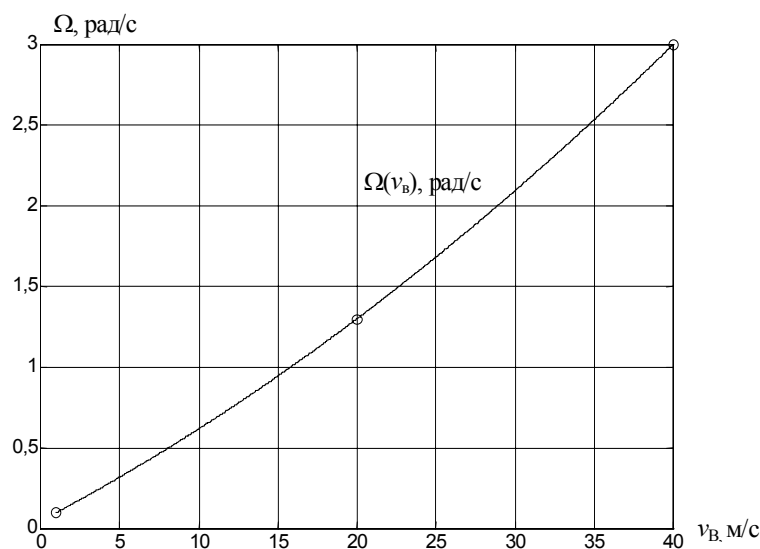


Рисунок 2.1. **Зависимость эффективной полосы пропускания ФФ как функции скорости ветра**

Из кривой рисунке 2.1 видно, что при эксплуатации РТ типа ТНА-1500 при максимальной скорости ветра  $v_B = 25 \text{ мС}^{-1}$  эффективная полоса

пропускания ФФ составляет величину  $\Omega=1.7C^{-1}$ , а для случая скорости ветра  $v_B=5$  м/с, при которой допустимо проведение предъэксплуатационной юстировки РТ она составляет величину  $\Omega=0.3C^{-1}$ . Таким образом, основным параметр ФФ – эффективная полоса его пропускания является интервальным так, что справедливо представление  $[\Omega_\phi]=\Omega_{\phi 0}+[\Delta\Omega_\phi]$ , характеризующееся медианным значением полосы пропускания  $\Omega_{\phi 0}=1C^{-1}$  и угловыми (граничными) значениями ее интервального компонента равными  $\overline{\Delta\Omega} = -\underline{\Delta\Omega} = 0.7C^{-1}$ .

Квазистационарная составляющая ветрового воздействия может быть промоделирована выходом интегратора, при этом квазистационарный напор ветра представим соответствующим значением начального состояния интегратора.

2. *Стохастическая составляющая ветровых деформаций* любого элемента МК РТ *полагается нормально распределённой*.

3. *Деформация* любого элемента МК *под действием ветра*, представима *планарной деформацией слабодемпфированного главного рефлектора* и жесткой кинематической связью ГР – ЭМК со своим коэффициентом передачи так, что становится справедливым использование унифицированной планарной модели ветровой деформацией, представляющей собой *последовательное соединение формирующего фильтра первого порядка и слабодемпфированного колебательного звена второго порядка, возбуждаемого белым шумом интенсивности N*, значение которой вычисляется по значению стохастической составляющей деформации конкретного ЭМК.

4. Слабодемпфированное колебательное звено второго порядка, моделирующее планарную деформацию ГР, характеризуется интервальными параметрами, причем их экспертная оценка обычно задается с использованием интервального представления  $[M_{max}]=M_{max0}+[\Delta M_{max}]$  его показателя колебательности и  $[\omega_p]=\omega_{p0}+[\Delta\omega_p]$  его резонансной частоты. Для РТ типа ТНА – 1500 медианная составляющая показателя колебательности характеризуется значением  $M_{max0}=35$ , а угловые реализации интервальной составляющей характеризуются значениями  $-\underline{\Delta M_{max}} = \overline{\Delta M_{max}} = 5$ ; медианная составляющая его резонансной частоты характеризуется значением  $\omega_{p0}=5.027C^{-1}$ , а угловые реализации ее интервального компонента принимают значения  $-\underline{\Delta\omega_p} = \overline{\Delta\omega_p} = 0.628C^{-1}$ .

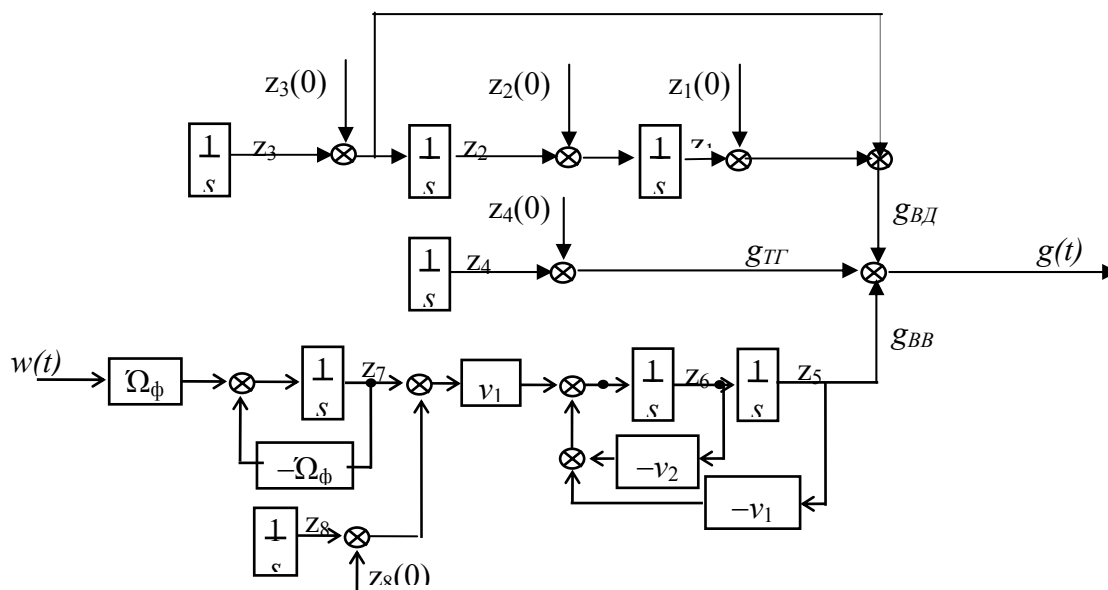
5. Планарное модельное представление процесса деформации ЭМК, образующих РОС РТ привязано к размещению аппаратуры контроля деформаций средствами СКУЛД и следящих приводов СФУК так, что понятие “планарное” принимает смысл “в угломестной плоскости” и “коллимационной плоскости”. При этом планарное модельное представление процессов деформации ЭМК в угломестной и коллимационной плоскостях совпадают с точностью до матриц выхода этих моделей, различие которых состоит в том, что планарная модель в коллимационной плоскости не учитывает весовую

деформацию ЭМК. В этой связи ниже *используется унифицированная планарная модель деформации произвольного ЭМК РТ.*

С учетом выше сказанного векторно-матричное описание планарного процесса деформации произвольного элемента МК РТ входящего в состав его РОС, при медианных значениях параметров, принимает вид

$$\dot{z}(t) = \Gamma_0 z(t) + G_0 w(t); z(0); g(t) = Cz(t), \quad (2.60)$$

где  $\Gamma_0, G_0, P$  – матрица состояния, входа и выхода модели деформаций МК РТ соответственно с фиксированными параметрами,  $z \in R^{l/2}$ ,  $g, w \in R^{m/2}$  – векторы состояния, выхода и входа,  $l=16, m=2$ . Структурное представление процесса деформации (2.60) в развернутом виде приведено на рисунке 2.2.



**Рисунок 2.2.** Структурное представление процесса деформаций элемента МК РТ

Переменные состояния модели (2.60) и рис.2.2 по факторам, вызывающим деформации ЭМК, распределены следующим образом:  $z_1, z_2, z_3$  – переменные, описывающие деформации при вращательном движении РТ по углу места для *угломестной планарной модели* и вращательном движении по азимуту для *коллимационной планарной модели*, причем в последнем случае фактор угломестного положения коллимационной плоскости учитывается заданием начальных значений этих переменных;  $z_4$  – переменная учитывающая квазистационарный компонент деформаций от фактора температурных градиентов и остужающего действия ветра;  $z_5, z_6, z_7, z_8$  – переменные описывающие деформацию ЭМК при ветровом воздействии, причем если интерес представляет только стохастическая составляющая, то модель может быть редуцирована путем исключения из нее переменной  $z_8$ .

По факторно модельные компоненты полной модели (2.60) принимают вид

$$\dot{z}_{ВД}(t) = \Gamma_{ВД0} z_{ВД}(t) + G_{ВД0} w(t); z_{ВД}(0); g_{ВД}(t) = P_{ВД0} z_{ВД}(t), \quad (2.61)$$

где  $z_{BD} = col\{z_1, z_2, z_3\}$ ,

$$\Gamma_{BD0} = col\{[0 \ 1 \ 0]; [0 \ 0 \ 1]; [0 \ 0 \ 0]\}, \quad (2.62)$$

$$G_{BD0} = [0 \ 0 \ 0]^T, P_{BD} = [1 \ 0 \ 1], \quad (2.63)$$

$$\dot{z}_{TG}(t) = \Gamma_{TG0} z_{TG}(t) + G_{TG0} w(t); z_{TG}(0); g_{TG}(t) = P_{TG0} z_{TG}(t), \quad (2.64)$$

где  $z_{TG} = z_4$ ,

$$\Gamma_{TG0} = [0], G_{TG0} = [0], P_{TG} = [1], \quad (2.65)$$

$$\dot{z}_{BB}(t) = \Gamma_{BB0} z_{BB}(t) + G_{BB0} w(t); z_{BB}(0); g_{BB}(t) = P_{BB0} z_{BB}(t), \quad (2.66)$$

где  $z_{BB} = col\{z_5, z_6, z_7, z_8\}$ ,

$$\Gamma_{BB0} = col\{[0 \ 1 \ 0 \ 0], [-v_1 \ v_2 \ v_1 \ v_1], [0 \ 0 \ -\Omega_\phi \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 0]\}, \quad (2.67)$$

$$G_{BB0} = [0 \ 0 \ \Omega_\phi \ 0]^T, P_{BB} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (2.68)$$

Очевидно, векторные и матричные компоненты модели (2.60) задаются соотношениями

$$z = col\{z_{BD}, z_{TG}, z_{BB}\}, g = g_{BD} + g_{TG} + g_{BB}; \quad (2.69)$$

$$\Gamma_0 = diag\{\Gamma_{BD}, \Gamma_{TG}, \Gamma_{BB}\}, G_0 = col\{G_{BD0}, G_{TG0}, G_{BB0}\},$$

$$P_0 = row\{P_{BD0}, P_{TG0}, P_{BB0}\}. \quad (2.70)$$

В выражении (2.60) в силу (2.70), (2.62), (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.67), (2.68) матричные компоненты имеют следующие реализации

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v_1 & -v_2 & v_1 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$G_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Omega_\phi \ 0]^T, \quad (2.72)$$

$$P_0 = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (2.73)$$

Для *коллимационной плоскости*, медианная версия планарной модели (2.60) характеризуется матрицами состояния и входа вида (2.71), (2.72), а матрица выхода получает представление

$$P_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (2.74)$$

Прежде, чем осуществить конструирование *оценок абсолютной и относительной интервальности матричных компонентов* модели деформаций с интервальными параметрами, решим *три задачи с использованием медианных представлений*. **Первая** задача состоит в конструировании выражения,

связывающего стохастическую составляющую деформации произвольного ЭМК, с интенсивностью  $N$  белого шума, при ее модельном представлении. **Вторая** задача состоит в оценке возможности автономизации модельного представления стохастической составляющей деформации, достижимость которой заложена в слабой демпфированности планарной модели ГР, характеризующегося высоким значением показателя колебательности. **Третья задача** состоит в формировании априорной оценки интервала корреляции стохастической составляющей с целью определения *возможного темпа съема информации с ПВК на осях ФЭСС СКУЛД*. В этой связи сформулируем следующие утверждения.

**Утверждение 2.1.** Пусть ветровая деформация  $g_{BB}$  ЭМК, представимая в виде аддитивной смеси

$$g_{BB} = g_{BBCT} + g_{BBKC}, \quad (2.75)$$

где  $g_{BBCT}$  – стохастическая составляющая деформации,  $g_{BBKC}$  – квазистационарная составляющая порыва ветра, которая является таковой, что для стохастической составляющей выполняется гипотеза нормальности распределения ее значений и при этом установлена связь максимального значения стохастической составляющей  $3\sigma_{g_{BBCT}}$  с максимальным значением полной ветровой деформации  $g_{BB\max}$  в форме

$$3\sigma_{g_{BBCT}} = \gamma g_{BB\max}, g_{BB\max} = \max_t g_{BB}(t), \quad (2.76)$$

где  $\sigma_{g_{BBCT}}$  – среднеквадратическое отклонение стохастической составляющей ветровой деформации,  $\gamma$  – весовой коэффициент, тогда для интенсивности белого шума  $N$  на входе модели деформаций (2.60) справедливо соотношение

$$N = \frac{2\left(\frac{\gamma}{3}\right)^2 g_{BB\max}^2 (v_1 + v_2 \Omega_\phi + \Omega_\phi^2)}{v_1 \Omega_\phi \left(1 + \frac{\Omega_\phi}{v_2}\right)}, \quad \square (2.77)$$

где

$$v_1 = \omega_p^2 / (1 - 2\xi^2) = \left(\sqrt{1 - (M_{\max}^2)^{-1}}\right)^{-1} \omega_p^2 \quad (2.78)$$

$$v_2 = 2\xi\sqrt{v_1} = \sqrt{2}\omega_p \left(\left(\sqrt{1 - (M_{\max}^2)^{-1}}\right)^{-1} - 1\right)^{1/2}; \quad (2.79)$$

$$\xi = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - (M_{\max}^2)^{-1}}\right)^{1/2}}{\sqrt{2}} \quad (2.80)$$

$\omega_p$  — резонансная частота планарной модели ГР;  $\xi$  — коэффициент затухания планарной модели ГР,  $M_{\max}$  — показатель колебательности планарной модели,  $\Omega_\phi$  - эффективная полоса пропускания ФФ. По данным ЦНИИ ПСК для РТ типа ТНА –1500  $\gamma$  составляет 0.2 (20 %).

**Доказательство.** Для матрицы дисперсии  $D_z \stackrel{\Delta}{=} M[z(t)z^T(t)]$ , где  $M\{*\}$  - математическое ожидание переменной  $\{*\}$ , вектора состояния  $z(t)$  медианной версии линейной системы (2.66), возбуждаемой стационарным в широком смысле стохастическим воздействием типа "белый шум" с матрицей интенсивности  $N$  справедливо (см.доказательство в п.5.4) уравнение типа уравнения Ляпунова

$$\Gamma_{BB0} D_{BB0z} + D_{BB0z} \Gamma_{BB0}^T = -G_{BB0} N G_{BB0}^T \quad (2.81)$$

Подставив в уравнение (2.81) матричные компоненты редуцированной версии (2.66), и разрешив его относительно матрицы  $D_{BB0z}$ , получим:

$$D_{BB0z} = \frac{N\Omega_\phi}{2} \begin{bmatrix} \frac{v_1(1+\Omega_\phi/v_2)}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} & 0 & \frac{v_1}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} \\ 0 & \frac{v_1^2\Omega_\phi/v_2}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} & \frac{v_1\Omega_\phi}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} \\ \frac{v_1}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} & \frac{v_1v_3}{v_1+v_2\Omega_\phi+\Omega_\phi^2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

В свою очередь, для матрицы  $D_{g_{BBCT}} \stackrel{\Delta}{=} M[g_{BB}(t)g_{BB}^T(t)]$  дисперсии выхода  $g_{BBCT}(t) = P_{BB0}z(t)$  получим

$$D_{g_{BBCT}} \stackrel{\Delta}{=} M[g_{BBCT}(t)g_{BBCT}^T(t)] = M[P_{BB0}z(t)z^T(t)P_{BB0}^T(t)],$$

$$D_{g_{BBCT}} = P_{BB0} D_{BB0z} P_{BB0}^T. \quad (2.83)$$

Подстановка в (2.83) (2.82), с учетом редуцирования (2.66), позволяет записать

$$D_{g_{BBCT}} = \frac{\Omega_\phi N v_1 (1 + \Omega_\phi / v_2)}{2(v_1 + v_2 \Omega_\phi + \Omega_\phi^2)} \quad (2.84)$$

В силу (2.76) справедлива цепочка равенств

$$D_{g_{BBCT}} = \sigma_{g_{BBCT}}^2 = \left( \frac{\gamma g_{BB\max}}{3} \right)^2. \quad (2.85)$$

Разрешение (2.82) с учетом (2.85) позволяет для  $N$  записать в виде

$$N = \frac{2 \left( \frac{\gamma}{3} \right)^2 g_{BB\max}^2 (v_1 + v_2 \Omega_\phi + \Omega_\phi^2)}{v_1 \Omega_\phi \left( 1 + \frac{\Omega_\phi}{v_2} \right)}. \quad \blacksquare \quad (2.86)$$

**Утверждение 2.2.** Корреляционная функция  $Rg_{BBCT}(\tau)$  централизованного стохастического процесса деформации ЭМК с выходной переменной  $g_{BBCT}(t)$ , при медианных значениях параметров может быть вычислена в силу соотношений:

$$Rg_{BBCT}(\tau) = P_{BB0z} \exp(\Gamma_{BB0}\tau) D_{BB0z} P_{BB0}^T, \tau \geq 0 \quad (2.87)$$

или

$$R_{g_{BBCT}}(\tau) = P_{BB0z} \exp(-\Gamma_{BB0}\tau) D_{BB0z} P_{BB0}^T, \tau \leq 0. \quad \square (2.88)$$

**Доказательство.** По определению, ковариационная (корреляционная) матрица  $R_y(\tau)$  стохастического центрированного процесса  $\chi(t)$  может быть задана в формах

$$R_y(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M[\chi(t+\tau)\chi^T(t)], \quad R_y(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M[\chi(t-\tau)\chi^T(t)]. \quad (2.89)$$

Если  $\chi(t)$  принимает смысл вектора  $z(t)$  состояния редуцированной модели (2.66), то для его корреляционной функции  $R_{z_{BBCT}}(\tau)$ , пользуясь разделительным свойством состояния и определением матрицы дисперсий, в силу первого выражения (2.87) запишем:

$$R_{z_{BBCT}}(\tau) = M[\exp(\Gamma_{BB0}\tau)z(t)z^T(t)] = \exp(\Gamma_{BB0}\tau)M[z(t)z^T(t)], \\ R_{z_{BBCT}} = \exp(\Gamma_{BB0}\tau)D_{BB0z}, \tau > 0. \quad (2.90)$$

На основании тех же свойств, при  $\tau < 0$  запишем в силу второго из выражений (2.89):

$$R_{z_{BBCT}}(\phi\phi M[\exp(-\Gamma_{BB}\phi)z(t)z^T(t)] = \exp(-\Gamma_{BB}\phi)M[z(t)z^T(t)], \\ R_{z_{BBCT}}(\tau) = \exp(-\Gamma_{BB0}\tau)D_{BB0z}, \tau < 0. \quad (2.91)$$

Для корреляционной функции  $R_{g_{BBCT}}(\tau)$  процесса деформации ЭМК с использованием (2.90) и (2.91) запишем:

$$R_{g_{BBCT}}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M[g_{BBCT}(t+\tau)g_{BBCT}^T(t)] = P_{BB0}M[z(t+\tau)z^T(t)]P_{BB}^T \\ R_{g_{BBCT}}(\tau) = P_{BB0}R_{z_{BBCT}}(\tau)P_{BB}^T = P_{BB0}\exp(\Gamma_{BB0}\tau)D_{BB0z}P_{BB}^T, \tau > 0. \quad (2.92) \\ R_{g_{BBCT}}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M[P_{BB0}(t-\tau)P_{BB0}^T(t)] = P_{BB0}M[z(t-\tau)z^T(t)]P_{BB0}^T \\ R_{g_{BBCT}}(\tau) = P_{BB0}R_{z_{BBCT}}(\tau)P_{BB0}^T = P_{BB0}\exp(-\Gamma_{BB0}\tau)D_{BB0z}P_{BB0}^T, \tau < 0. \quad \blacksquare (2.93)$$

**Утверждение 2.3.** Матрицы  $S_{z_{BB}}(\omega)$ ,  $S_{\xi}(\omega)$  и  $S_{g_{BB}}(\omega)$  спектральных плотностей векторов соответственно состояния  $z_{BB}$ , выхода формирующего фильтра  $\xi = z_7$  и выхода  $g_{BB}$  модели ветровой деформации (2.66), (2.67), (2.68) элемента МК РТ могут быть вычислены при медианных значениях параметров с помощью выражений

$$S_{z_{BB}}(\omega) = -2\Gamma_{BB0}(\Gamma_{BB0}^2 + \omega^2 I)^{-1} D_{z_{BB0}}, \\ S_{\xi}(\omega) = P_{\xi 0} S_{z_{BB}}(\omega) P_{\xi 0}^T; \quad S_{g_{BB}}(\omega) = P_{BB0} S_{z_{BB}}(\omega) P_{BB0}^T, \quad \square (2.94)$$

где  $P_{\xi 0}$  имеет вид  $P_{\xi 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Доказательство** утверждения строится на определении функций (матриц) спектральных плотностей как преобразований Фурье от корреляционной функции (матрицы). ■

Необходимо отметить, что в случае векторной природы переменных для которых сформированы матрицы дисперсии в форме (2.83) и матрицы спектральных плотностей в форме (2.94) скаляризация полученного результата может быть произведена с помощью эллипсоидных мажорант и минорант матриц дисперсии и спектральных плотностей с

помощью SVD – процедуры этих матриц путем вычисления их экстремальных сингулярных чисел.

Полученные аналитические выражения, введенные гипотезы о темпе процесса деформации, а также численные значения компонентов деформаций ВОУ, вызванных всеми факторами указанными ранее в угломестной и коллимационной плоскостях, значения скоростей и ускорений, развиваемые приводами (см. прил. 1), позволяют свести в единую таблицу 2.1 значения начальных состояний и параметров медианной версии модели деформации (2.60), а также значения интенсивности белого шума, возмущающего планарные модели процессов деформаций в угломестной и коллимационной плоскостях применительно к линейным и угловым составляющим верхнего опорного узла несущим на себе КР.

Таблица 2.1.

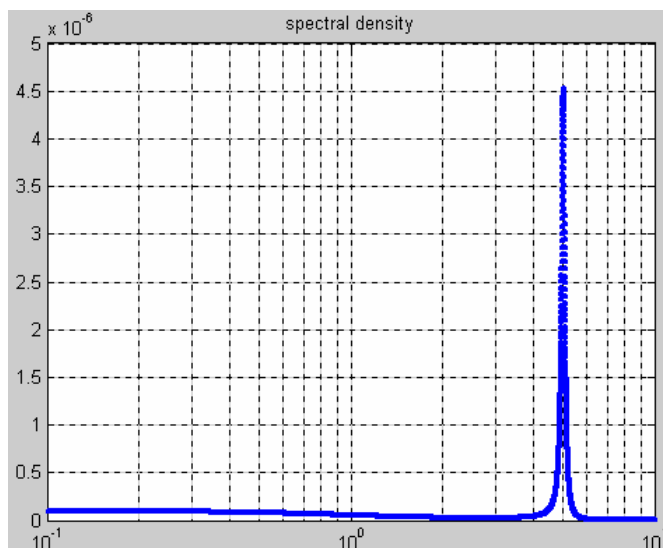
**Значения фиксированных и интервальных параметров модели деформаций**

	Параметры	Угломестная плоскость	Коллимационная плоскость
Линейные деформации	$[z_1(0)]$ (мм)	$[-70; 0]+[-1,05; 1,05]$	0
	$[z_2(0)]$ (мм/С)	$[-7/9; 0]$	0
	$[z_3(0)]$ (мм/С <sup>2</sup> )	$[0; 14/45]$	$[-1.05; 1,05]$
	$[z_4(0)]$ (мм)	$[-10; 10]$	$[-10; 10]$
	$[z_8(0)]$ (мм)	$[-32; 32]$	$[-28; 28]$
	$[v_1] C^{-2}$	$[18.833; 31.797]$	$[18.833; 31.797]$
	$[v_2] C^{-1}$	$[0.113; 0.197]$	$[0.113; 0.197]$
	$[\Omega_\phi] C^{-1}$	$[0.3; 1.7]$	$[0.3; 1.7]$
	$\gamma$	0.2	0.2
	$g_{bb \max}$ (мм)	40	35
	$N [(*)]^2 C$	28.069	21.49
Угловые деформации	$[z_1(0)]$ (угл.сек)	$[-630; 0]+[-9.45; 9.45]$	0
	$[z_2(0)]$ (угл.сек/С)	$[0; 7]$	0
	$[z_3(0)]$ (угл.сек/С <sup>2</sup> )	$[-28; 28]$	$[-9.45; 9.45]$
	$[z_4(0)]$ (угл.сек)	$[-79.2; 79.2]$	$[-79.2; 79.2]$
	$[z_8(0)]$ (угл.сек)	$[-27.2; 27.2]$	$[-240; 240]$
	$[v_1] C^{-2}$	$[18.833; 31.797]$	$[18.833; 31.797]$
	$[v_2] C^{-1}$	$[0.113; 0.197]$	$[0.113; 0.197]$
	$[\Omega_\phi] C^{-1}$	$[0.3; 1.7]$	$[0.3; 1.7]$
	$\gamma$	0.2	0.2
	$g_{BB \max}$ УГЛ.сек	340	300
	$N [(*)]^2 C$	2028	1579

(\*) принимает смысл (мм) – для линейных деформаций и (угл. сек) – для угловых деформаций.

**Примечание:** В силу того, что силовые приводы РТ типа ГНА – 1500 осуществляют оптимальный разгон и торможение на участках протяженностью не более в 1.25 град. перемещения РТ по углу места и по азимуту, а за пределами этих участков перемещение осуществляется с постоянной скоростью, начальные состояния  $z_3(0)$  отличны от нуля только на участках разгона и торможения, длительностью не более 2.5с, порожденных начальными скоростями и ускорениями приводов соответственно 1 град $C^{-1}$  и 0.4 град $C^{-2}$ .

Для целей решения задачи *оценки возможности автономизации стохастического процесса деформации МК РТ*, рассмотрим спектральную плотность стохастической составляющей процесса деформации, вычисленную в соответствии с выражением (2.94). На рисунке 2.3. приведена кривая спектральной плотности линейных стохастических деформаций ВОУ в угломестной плоскости, порожденной ветровым воздействием.



**Рисунок 2.3.** Кривая спектральной плотности линейных стохастических деформаций ВОУ, порожденных ветровым воздействием

Кривая обнаруживает явное доминирование спектральной части, локализованной в окрестности резонансной частоты планарной модели ГР, что позволяет надеяться на удачный исход процедуры автономизации модели(см. рисунок 5.11). Однако эта оценка является качественной, для формирования количественных критериев возможностей автономизации выделим эквивалентную гармоническую составляющую  $g_{ЭГ}(t) = g_{ЭГm} \sin(\omega_p t + \varphi_{ЭГ})$  с дисперсией стохастической деформации, приходящуюся на указанную частотную полосу, охарактеризовав его значением  $D_{ЭГ} = 0.5 g_{ЭГm}^2$  с оценкой

$$\mathcal{B}_{ЭГ} = D11 - D31. \quad (2.95)$$

Задачу решим в *относительной постановке*, причем учтем фактор интервальности параметров, как модели ветрового воздействия, так и модели деформации, осуществив вычисления оценки  $\mathcal{E}_{\text{ЭГ}} = \mathcal{D}_{\text{ЭГ}} / D_{11}$

$$\mathcal{E}_{\text{ЭГ}} = 1 - D_{31} / D_{11},$$

где

$$D_{11} = \frac{M\Omega_{\phi}}{2} \frac{v_1(1+\Omega_{\phi}/v_2)}{v_1+v_2\Omega_{\phi}+\Omega_{\phi}^2}, D_{31} = \frac{M\Omega_{\phi}}{2} \frac{v_1}{v_1+v_2\Omega_{\phi}+\Omega_{\phi}^2}, \mathcal{E}_{\text{ЭГ}} = \frac{\Omega_{\phi}/v_2}{1+\Omega_{\phi}/v_2} \quad (2.96)$$

Значения  $\mathcal{E}_{\text{ЭГ}}$  на восьми угловых реализациях параметров приведены применительно к ТНА – 1500 в таблице 2.2.

Таблица 2.2

### Оценки дисперсии гармонической составляющей деформации

Угловые значения параметров	$(M_{max})_c$	30	30	30	30	40	40	40	40
	$(\omega_P)_c$	1.4π	1.4π	1.8π	1.8π	1.4π	1.4π	1.8π	1.8π
	$(\Omega_{\phi})_c$	0.3	1.7	0.3	1.7	0.3	1.7	0.3	1.7
	$\mathcal{E}_{\text{ЭГ}}$	0.669	0.908	0.612	0.89	0.73	0.93	0.678	0.916

Приведенные в таблица 2.2. значения дисперсии позволяют в соответствии с (2.56) и (2.59) записать  $[\mathcal{E}_{\text{ЭГ}}] = [0.612; 0.93]$ ,  $\mathcal{E}_{\text{ЭГ}} = 0.771 + [-0.159; 0.159]$ ,  $\mathcal{E}_{\text{ЭГ}\sigma} = 0.159/0.771 = 0.206$ .

Нетрудно видеть, что для цели формирования требований к погрешности измерительных систем СКУЛД, осуществляющих принцип фотоэлектрического следящего преобразования от отношения дисперсий следует перейти к отношению среднеквадратических отклонений, введя оценку  $[\mathcal{E}_{\text{ЭГ}\sigma}]$  определяемую соотношением

$$[\mathcal{E}_{\text{ЭГ}\sigma}] = \sqrt{[\mathcal{E}_{\text{ЭГ}}]} \quad (2.97)$$

Полученные значения также на восьми угловых реализациях приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

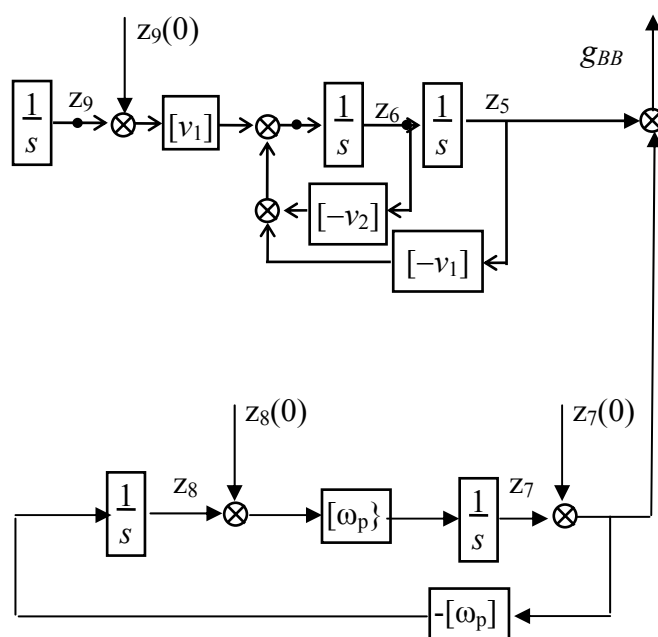
### Среднеквадратическое отклонение гармонической составляющей деформации

Угловые значения параметров	$M_{maxc}$	30	30	30	30	40	40	40	40
	$\omega_{Pc}$	1.4π	1.4π	1.8π	1.8π	1.4π	1.4π	1.8π	1.8π

	$\Omega_{\phi c}$	0.3	1.7	0.3	1.7	0.3	1.7	0.3	1.7
	$\xi_{\Delta\Gamma\sigma}$	0.818	0.953	0.782	0.943	0.854	0.964	0.823	0.957

Приведенные в табл. 2.3. среднеквадратические отклонения позволяют также в соответствии с (2.56) и (2.59) записать  $[\xi_{\Delta\Gamma\sigma}] = [0.782; 0.964]$ ,  $[\xi_{\Delta\Gamma\sigma}] = 0.873 + [-0.091; 0.091]$ ,  $\delta_I \xi_{\Delta\Gamma\sigma} = 0.091/0.873 = 0.104(10.4\%)$ .

Эти значения обладают еще большей *убедительностью корректности осуществления перехода* от исходного модельного описания ветровой составляющей деформации, к представлению ее эквивалентным гармоническим сигналом частоты  $\omega = \omega_p$  со случайной амплитудой и фазой. Так как, амплитуда одночастотного гармонического сигнала однозначно определяется начальным состоянием интеграторов его модели, то эквивалентное автономное представление стохастической ветровой деформации имеет фиксированные параметры в виде медианного значения частоты и случайный вектор начального состояния с вычисляемыми стохастическими свойствами. Автономная версия модели стохастического воздействия приведена на рисунке 2.4.



**Рисунок 2.4.** Автономная версия модели стохастического воздействия

Автономная версия модели стохастического воздействия обнаруживает свое модельное преимущество, при использовании *принципа внутренней модели* с целью минимизации ошибки следящего преобразования, при измерении деформаций.

Вычисление вектора  $z_{\Delta\Gamma}(0) = [z_7(0)z_8(0)]^T$  начального состояния автономной версии модели стохастического опирается на следующие

соображения. Амплитуда  $g_{\text{ЭГ}m}$  гармонического эквивалентного воздействия  $g_{\text{ЭГ}}(t) = g_{\text{ЭГ}m} \sin(\omega_p t + \varphi_{\text{ЭГ}})$  с одной стороны совпадает с евклидовой нормой  $\|z_{\text{ЭГ}}(0)\| = (z_7^2(0) + z_8^2(0))^{1/2}$  вектора начального состояния, с другой в силу определения дисперсии гармонического сигнала  $D_{\text{ЭГ}} = 0.5 g_{\text{ЭГ}m}^2$  задается выражением  $g_{\text{ЭГ}m} = (2D_{\text{ЭГ}})^{1/2}$ . Если теперь воспользоваться соотношениями (2.96), то получим, что эквивалентное гармоническое воздействие будет формироваться его генератором при условии принадлежности вектора начального состояния  $z_{\text{ЭГ}}(0) = [z_7(0) z_8(0)]^T$  сфере

$$\|z_{\text{ЭГ}}(0)\| = \left\{ \frac{2\nu_1 \Omega_\phi / \nu_2}{\nu_1 + \nu_2 \Omega_\phi + \Omega_\phi^2} \right\}^{1/2}.$$

В заключении дадим сравнительную характеристику интервальности матричных компонентов модели деформаций, построенной как *в исходном виде, так и в автономном*, для целей контроля корректности декомпозиции допустимой погрешности наведения РТ на ОРАН по факторным компонентам, одним из которых является погрешность СКУЛВОУ. Полученные результаты сведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4.

### Оценки относительной интервальности матричных компонентов моделей деформаций

Исходная модель деформаций			Автономная модель деформаций		
$\ \Gamma_0\ $	$\ [\Delta\Gamma]\ $	$\delta_{I_\Gamma}$	$\ \Gamma_{\text{ЭГ}0}\ $	$\ [\Delta\Gamma_{\text{ЭГ}}]\ $	$\delta_{I_{\text{ЭГ}}}$
25.669	6.327	0.246	5.024	0.628	0.125

В таблице 2.4. При формировании оценок относительной интервальности матриц состояния полной унифицированной планарной модели деформации использованы спектральные нормы матриц в версии ее оценки задаваемой в форме

$$\|(\ast)\|_2 = \sqrt{\|(\ast)\|_1 \|(\ast)\|_\infty}, \quad (2.98)$$

где индексация индуцированных норм произведена в соответствии с принятой в оболочке MATLAB.

### 2.3. Интервальные модельные представления измерительных следящих систем

Измерительные следящие системы, используемые в решении задачи информационного обеспечения *динамической юстировки РТ средствами фокусно-угловой компенсации*, включают в свой состав оптический тракт, а потому являются фотоэлектрическими следящими системами (ФЭСС). Функциональные компоненты ФЭСС размещаются на конструкциях РТ, в силу режима эксплуатации они являются всесезонными и всепогодными. В связи с

этим ФЭСС подвержены всем внешним факторам, приводящим к изменению параметров функциональных компонентов системы.

При использовании векторно-матричного описания универсальным способом учета вариации физических параметров является представление системных параметров в интервальной форме, которая в итоге приводит к интервальной реализации матричных компонентов. При стандартном использовании  $(A, B, C)$  – матричного описания систем, всегда можно найти такой базис представления, когда матрица  $C$  не является интервальной. В большом количестве частных случаев можно найти базисы представления, в которых интервальной является только матрица  $A$  и наконец существуют ситуации, когда интервальной является и матрица состояния  $A$  и матрица управления  $B$ . Заметным преимуществом модельного представления измерительных систем по сравнению с модельным представлением процесса деформации является то, что при разработке системы *средствами алгоритмов управления интервальность матричных компонентов в их относительной постановке может быть значительно снижена*, что нельзя сделать в моделях деформации, интервальность которых является заданной, при данных конструкции РТ, условиях и режимах эксплуатации.

Ниже рассматриваются вопросы построения интервальных модельных представлений и анализа возможности достижения требуемого значения оценки относительной интервальности матричных компонентов векторно-матричного описания измерительных систем, средствами синтезируемых законов управления для случая, когда интервальной является *только матрица состояния системы* и для случая, когда интервальными являются *матрица состояния и матрица управления*.

В первом случае векторно-матричное описание исходной части системы (т.е. системы без введенного в ее состав регулятора, реализующего синтезированный закон управления) которая, в силу общей практики системных представлений, обычно называется объектом управления (ОУ) имеет вид

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (2.99)$$

где  $x, u, y$  – соответственно вектор состояния, управления и выхода такие, что  $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ ;  $[A], B, C$  – интервальная матрица состояния, матрицы управления и выхода с фиксированными параметрами соответственно, согласованные по размерности с переменными модели (2.99).

Для интервальной матрицы состояния  $[A]$  ОУ будем использовать, в зависимости от решаемой задачи, все возможные представления, приведенные в параграфе 2.1.

Введем в ОУ (2.99) закон управления (ЗУ), который проектируемой системе должен доставлять по ее медианным компонентам необходимые динамические свойства в переходном и установившемся режимах, при задающем воздействии  $g(t)$ . Закон управления реализуется в форме,

использующей всю информацию о задающем воздействии  $g(t)$  и состоянии объекта  $x(t)$  так, что он записывается

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (2.100)$$

В выражении (2.100)  $K_g$  – матрица прямых связей по задающему воздействию  $g(t)$ ,  $K$  – матрица отрицательной обратной связи по состоянию ОУ, причем при формировании ЗУ используется гипотеза о полной измеримости  $g(t)$  и  $x(t)$ . Закон управления (2.100) строится в классе неадаптивных так, что  $K_g, K$  являются матрицами с фиксированными параметрами.

Рассмотрим вводимый ЗУ (2.100) на предмет анализа его возможностей *воздействия на интервальность* матричных компонентов полученной при этом системы. Векторно-матричное описание системы, образованное агрегированием (2.99) и (2.100) примет вид

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (2.101)$$

где

$$[F] = [A] - BK = F_0 + [\Delta F]; G = BK_g; F_0 = A_0 - BK; [\Delta F] = [\Delta A]. \quad (2.102)$$

Соотношение (2.102) по существу содержат доказательства утверждения

**Утверждение 2.4.** Закон управления вида (2.100) изменяет лишь медианную составляющую  $F_0$  интервальной матрицы  $[F]$  состояния системы (2.101) в силу соотношения

$$F_0 = A_0 - BK, \quad (2.103)$$

оставляя неизменной ее интервальную составляющую так, что выполняется равенство

$$[\Delta F] = [\Delta A] \quad \blacksquare \quad (2.104)$$

Соотношения (2.102) и (2.104) делают справедливыми положения очень важного утверждения.

**Утверждение 2.5.** Закон управления (2.100) не изменяет значения оценки абсолютной интервальности матрицы состояния так, что выполняется равенство

$$\Delta_I F = \Delta_I A, \quad (2.105)$$

но при этом изменяется значение оценки относительной интервальности интервальной матрицы  $[F]$  состояния системы (2.101) в силу соотношения

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - BK\|}. \quad \blacksquare \quad (2.106)$$

Таким образом, появляется возможность управлять относительной интервальностью интервальной матрицы состояния системы (2.101) с оценкой (2.106) ее относительной интервальности, использующую в своем составе регулятор, реализующий ЗУ (2.100), путем соответствующего выбора матрицы обратной связи  $K$ . Нетрудно видеть, что в силу фиксированности на всех возможных реализациях матрицы  $K$  нормы  $\|[\Delta F]\| = \|[\Delta A]\|$  можно обеспечить медианной версии проектируемой системы требуемые динамические свойства с

одновременным достижением необходимого значения оценки относительной интервальности ее матрицы состояния.

Во втором случае, когда интервальными являются матрицы состояния и управления, модельное представление ОУ принимает вид

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (2.107)$$

Для интервальных матричных компонентов (2.107) в дальнейшем использованы представления

$$\underline{\Delta A} = \underline{A} - A_0, \overline{\Delta A} = \overline{A} - A_0, \underline{\Delta B} = \underline{B} - B_0, \overline{\Delta B} = \overline{B} - B_0. \quad (2.108)$$

Введем в ОУ (2.107) закон управления в форме (2.100), от которого потребуем тех же свойств, применительно к медианной версии системы, дополнив требования к нему анализом его возможностей воздействия на интервальность матричных компонентов, полученной при этом системы. Векторно-матричное описание системы, образованное агрегированием (2.107) и (2.100) примет вид

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + [G]g(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (2.109)$$

где  $[F] = [A] - [B]K = F_0 + [\Delta F]$ ;  $[G] = [B]K_g = G_0 + [\Delta G]$ ;

$$F_0 = A_0 - B_0K; [\Delta F] = [\Delta A] - [\Delta B]K; G_0 = B_0K_g; [\Delta G] = [\Delta B]K_g.$$

Оценим относительную интервальность матричных компонентов системы (2.109), использующую в своем составе регулятор, реализующий ЗУ (2.100). Тем самым оценим эффект введения последнего. Используя (2.59) и (2.118) получим

$$\delta_I(F) = \frac{\Delta \|[\Delta F]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A] - [\Delta B]K\|}{\|A_0 - B_0K\|}, \quad (2.110)$$

$$\delta_I(G) = \frac{\Delta \|[\Delta G]\|}{\|G_0\|} = \frac{\|[\Delta B]K_g\|}{\|B_0K_g\|}. \quad (2.111)$$

Выражения (2.110), (2.111) не позволяют очевидным образом судить о тенденциях в изменении значений оценок  $\delta_I(F)$ ,  $\delta_I(G)$  в функции от выбора матриц  $K$  и  $K_g$  при фиксированных нормах интервальных компонентов интервальных матриц состояния и управления в общем случае. Однако такая возможность появляется при исследовании (2.110) и (2.111) при следующих допущениях.

**Допущение 1.**  $[\Delta A] \neq 0, [\Delta B] = 0$ . Второй случай интервального представления ОУ при допущении 1 сводится к случаю 1, для которого выбором матрицы обратной связи  $K$  может быть обеспечена сколь угодно малое значение оценки относительной интервальности матрицы состояния системы. Вторым условием допущения гарантируется фиксированность параметров матрицы входа системы.

**Допущение 2.**  $[\Delta A] = 0, [\Delta B] \neq 0$ . Те же оценки при этом допущении получают представления

$$\delta_I(F) = \frac{\|[\Delta B]K\|}{\|A_0 - B_0K\|}; \quad \delta_I(G) = \frac{\|\Delta BK_g\|}{\|B_0K_g\|}. \quad (2.112)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении допущения 2, как и в общем случае интервального модельного представления (2.109) сохраняется неочевидность тенденции в изменении значений оценок  $\delta_I(F)$ ,  $\delta_I(G)$  в функции от выбора матриц  $K$  и  $K_g$ .

Таким образом, ставится задача поиска структурных возможностей обеспечения выполнения условий допущения 1. Очевидно, если это не возможно сделать путем выбора соответствующего базиса представления исходного объекта, в котором бы интервальной была только его матрица состояния, то это может быть сделано расширением размерности исходного объекта путем включения на его входе буферной системы с фиксированными параметрами.

Дополним исходный ОУ (2.99) *буферной системой*

$$\dot{x}_B(t) = A_B x_B(t) + B_B u_B(t); \quad x(0); \quad y_B(t) = C_B x_B(t), \quad (2.113)$$

где  $x_B - \ell$  – мерный вектор состояния буферной системы (БС),  $u_B - r$  – мерный вектор входа,  $y_B - r$  – мерный вектор выхода,  $A_B - (n_B \times n_B)$  – матрица состояния (БС),  $B_B - (n_B \times r)$  – матрица входа,  $C_B - (r \times \ell)$  – матрица выхода.

Агрегирование ОУ (2.99) и БС (2.113) осуществляется путем наложения условия

$$u(t) = y_B(t). \quad (2.114)$$

Введем в рассмотрение вектор состояния размерности  $\tilde{n} = n + n_B$   $\tilde{x} = \text{col}\{x, x_B\}$

агрегированного объекта управления. Тогда векторно-матричное описание агрегированного объекта примет вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{A}]\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad (2.115)$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t); \quad y_B = \tilde{C}_B \tilde{x}(t); \quad y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t), \quad (2.116)$$

где в силу (2.99) и (2.113) с учетом (2.114) матричные компоненты принимают вид

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} [A] & [B]C_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_B \end{bmatrix}. \quad (2.117)$$

$$\tilde{C}_x = [I_{n \times n} \quad 0_{n_B \times n_B}], \quad \tilde{C}_B = [0_{n \times n} \quad I_{n_B \times n_B}], \quad \tilde{C}_y = [C \quad 0_{n_B \times n_B}]. \quad (2.118)$$

Нетрудно видеть из (2.117), что условие интервальности сохранилось только в матрице состояния, для которой можно записать

$$[\tilde{A}] = \tilde{A}_0 + [\Delta \tilde{A}], \quad (2.119)$$

где  $\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 C_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}$ ,  $\Delta \tilde{A} = \begin{bmatrix} \Delta A & [\Delta B] C_B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

В случае обеспечения управляемости пары  $(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)$  путем выбора матрицы  $B_B = \arg\{control(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)\}$  просинтезируем ЗУ в форме композиции прямой и обратной связи путем выбора матрицы

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K}_g g(t) - \tilde{K} \tilde{x}(t). \quad (2.120)$$

Объединение агрегированного ОУ (2.115), (2.116) с ЗУ (2.120) позволяет сформировать агрегированную систему, векторно-матричное описание которой имеет вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{F}] \tilde{x}(t) + \tilde{G} g(t), \quad (2.121)$$

$$\dot{x}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t); y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t). \quad (2.122)$$

В (2.121) матричные компоненты имеют вид представления

$$[\tilde{F}] = [\tilde{A}] - \tilde{B} \tilde{K}; \tilde{G} = \tilde{B} \tilde{K}_g. \quad (2.123)$$

Причем интервальная матрица состояния в дальнейших исследованиях используется в представлении

$$[\tilde{F}] = \tilde{F}_0 + [\Delta \tilde{F}]; \tilde{F}_0 = \tilde{A}_0 - \tilde{B}_0 \tilde{K}; [\Delta \tilde{F}] = [\Delta \tilde{A}]. \quad (2.124)$$

Соотношение (2.124) позволяет ввести оценки относительной интервальности матричных компонентов агрегированной системы (2.121), (2.122), для которой справедлива оценка

$$\delta_I \tilde{F} = \frac{\|[\Delta \tilde{F}]\|}{\|\tilde{F}_0\|} = \frac{\|[\Delta \tilde{A}]\|}{\|\tilde{A}_0 - \tilde{B}_0 \tilde{K}\|}, \quad (2.125)$$

причем компонент  $\|[\Delta \tilde{A}]\|$  представим в форме

$$\|[\Delta \tilde{A}]\| = \|[\Delta A] \quad [\Delta B] C_B\|. \quad (2.126)$$

Нетрудно видеть, что выражение (2.125) в силу фиксированности  $\|[\Delta F]\| = \|[\Delta A]\|$  на всех реализациях матрицы обратной связи делает корректной постановку и реализуемым решение задачи поиска матрицы обратной связи по состоянию  $\tilde{K}$ , доставляющей агрегированной системе интервальность матричных компонентов, характеризуемую требуемым значением оценки ее относительной интервальности.

## 2.4. Интервальная линеаризация нелинейных динамических систем

Рассматривается возможность построения унифицированного модельного представления объекта с интервальными матричными компонентами, исходное описание которого содержит нелинейные зависимости. По существу ставится задача поиска *методов интервальной линеаризации* указанных нелинейных зависимостей. Как и в предыдущем параграфе рассмотрим две возможные ситуации, первая из которых характеризуется нелинейной зависимостью вектора производных только от вектора состояний, вторая – только от вектора управления.

В первой ситуации модельное векторно-матричное описание имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.127)$$

где  $x, y, u$  – векторы состояния, выхода и управления,  $f(x)$  – нелинейная векторная функция от вектора,  $f(0) = 0$ ;  $B, C$  – матрицы входа и выхода;  $x, f(x) \in R^n$ ;  $u \in R^r$ ;  $y \in R^m$  размерности матриц  $B, C$  согласованы с размерностями векторных переменных. Ставится задача построения интервального представления нелинейного объекта управления (2.127) в форме (2.128)

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (2.128)$$

где  $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$  – интервальная  $(n \times n)$  матрица состояния интервального непрерывного объекта управления. Объект управления (2.128) с интервальной матрицей  $[A]$  строится для области  $S_x$  пространства состояния

$$S_x : \|x\| \leq d_s, \forall t \quad (2.129)$$

так чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=1}^n \underline{A}_{ij} x_j \leq f_i(x) \leq \sum_{j=1}^n \bar{A}_{ij} x_j \quad (2.130)$$

Граничные значения  $\underline{A}_{ij}$  и  $\bar{A}_{ij}$  ( $i, j$ ) – компонента интервальной матрицы  $[A]$  строится с помощью алгоритма, на первом шаге которого осуществляется переход от представления (2.127) к представлению вида  $A(x)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (2.131)$$

На втором шаге этого алгоритма конструируются элементы  $\underline{A}_{ij}$  и  $\bar{A}_{ij}$  в силу соотношения

$$\underline{A}_{ij} = \min_{x \in S_x} (A(x))_{ij}, \bar{A}_{ij} = \max_{x \in S_x} (A(x))_{ij}. \quad (2.132)$$

Ключевым моментом в этом алгоритме является конструирование матрицы  $A(x)$ , элементы которой зависят от вектора  $x$ . Для этих целей можно воспользоваться положением следующего утверждения.

**Утверждение 2.1.** Соотношение  $f(x) = A(x)x$  выполняется, если  $A(x)$  сконструировать в форме

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x)}{nx_1} & \frac{f_1(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_1(x)}{nx_n} \\ \frac{f_2(x)}{nx_1} & \frac{f_2(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_2(x)}{nx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x)}{nx_1} & \frac{f_n(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_n(x)}{nx_n} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Доказательство утверждения строится на непосредственном конструировании мультипликативной структуры  $A(x)x$ , где  $A(x)$  имеет вид (2.133). Действительно

$$A(x)x = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x)}{nx_1} & \frac{f_1(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_1(x)}{nx_n} \\ \frac{f_2(x)}{nx_1} & \frac{f_2(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_2(x)}{nx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x)}{nx_1} & \frac{f_n(x)}{nx_2} & \dots & \frac{f_n(x)}{nx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = f(x). \quad \blacksquare \quad (2.134)$$

Нетрудно видеть, что предложенная конструкция матрицы  $A(x)$  может содержать деление на ноль, поэтому основная область применения формы (2.133), (2.134) ограничивается нелинейными функциями  $f(x)$ , компоненты которых представляют собой мультипликативные структуры, содержащие все переменные вектора  $x$ . Так, например, для случая системы (2.127) второго порядка, где  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 x_2 \\ 5x_1 x_2 - x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$ , матрица  $A(x)$  имеет вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 & x_1^2 \\ \frac{5}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 & \frac{5}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1 x_2 \end{bmatrix},$$

в которой отсутствует опасность деления на

ноль. Указанным недостатком не обладают матрицы  $A(x)$ , конструируемые в силу следующего утверждения.

**Утверждение 2.2.** Представление  $f(x) = A(x)x$  выполняется, если  $A(x)$  сконструировано в следующей форме

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_2 & \dots & \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_n \\ \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_2 & \dots & \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_n & \dots & \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_n \end{bmatrix}, \quad (2.135)$$

где  $\|x\|$  – евклидова норма вектора  $x$ .

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении произведения  $A(x)x$

$$A(x)x = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_2 & \dots & \frac{f_1(x)}{\|x\|^2} x_n \\ \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_2 & \dots & \frac{f_2(x)}{\|x\|^2} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_1 & \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_n & \dots & \frac{f_n(x)}{\|x\|^2} x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = f(x). \quad \blacksquare \quad (2.136)$$

**Утверждение 2.3.** Пусть  $\|x\|_p$   $p$  – ная норма вектора, записываемая в форме  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}$  при  $p = 2\rho$ , где  $\rho$  – целое положительное число.

Тогда

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x)}{\|x\|_p^p} x_1^{p-1} & \frac{f_1(x)}{\|x\|_p^p} x_2^{p-1} & \dots & \frac{f_1(x)}{\|x\|_p^p} x_n^{p-1} \\ \frac{f_2(x)}{\|x\|_p^p} x_1^{p-1} & \frac{f_2(x)}{\|x\|_p^p} x_2^{p-1} & \dots & \frac{f_2(x)}{\|x\|_p^p} x_n^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x)}{\|x\|_p^p} x_1^{p-1} & \frac{f_n(x)}{\|x\|_p^p} x_n^{p-1} & \dots & \frac{f_n(x)}{\|x\|_p^p} x_n^{p-1} \end{bmatrix} \quad \square \quad (2.137)$$

Доказательство этого утверждения строится по той же схеме, что и доказательство утверждения 2. ■

Нетрудно заметить, что возможность выбора формы представления матрицы  $A(x)$  позволяет уменьшить априорную интервальность модельного представления (2.128), возникающую при использовании соотношения (2.132). Процесс формирования матриц  $A(x)$  вида (2.135) и (2.137) оказывается вычислительно устойчивым, если при конструировании матриц фиксировать норму  $\|x\|$  на вложенных в  $S_x$  (2.129) сферах. При этом снятые значения переменных входят в силу (2.135) и (2.137), мультипликативными элементами числителей компонентов матрицы  $A(x)$ .

Во второй ситуации векторно-матричное описание объекта управления задается в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t)); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.138)$$

где  $\varphi(u)$  – нелинейная векторная функция от вектора,  $f(0) = 0$ ;  $A, C$  – матрицы состояния и выхода;  $x, \in R^n$ ;  $\varphi(u) \in R^n$ ;  $y \in R^m$  размерности матриц  $A, C$  согласованы с размерностями векторных переменных. Ставится задача построения интервального линейного представления объекта управления (2.138) в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + [B]u(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.139)$$

где  $[B] = [\underline{B}, \overline{B}]$  – интервальная  $(n \times r)$  матрица управления интервально-линеаризованного объекта. Процедура перехода от исходного нелинейного описания ОУ (2.138) к интервально линеаризованному векторно-матричному представлению (2.139) алгоритмически идентична процедуре перехода от описания (2.127) к (2.128) с точностью до замены переменной  $x$  на переменную  $u$  и нелинейной зависимости  $f(x)$  на нелинейную зависимость  $\varphi(u)$ .

Однако представления (2.128) и (2.139) не идентичны в смысле возможностей управления относительной интервальностью интервальных матричных компонентов средствами закона управления вида (2.100). Для обеспечения управляемости

представление (2.139) следует модифицировать путем включения на его входе буферной системы минимальной размерности с фиксированными параметрами.

### Контрольные вопросы

- 2.1. В каких формах может задаваться интервальное число?
- 2.2. Как осуществляются арифметические действия над интервальными числами, проиллюстрируйте это на примере интервальных чисел  $[a] = [0;1]$ ,  $\cdot [b] = [2;4]$ ?
- 2.3. В каких формах может задаваться интервальный вектор?
- 2.4. В каких формах может задаваться интервальная матрица, проиллюстрируйте это на примере матрицы  $[A] = \begin{bmatrix} [1;0] & [1;3] \\ [1;4] & [0;1] \end{bmatrix}$ ?
- 2.5. Как вычисляется оценка абсолютной интервальности интервальных скалярной и векторной переменной?
- 2.7. Как вычисляется оценка абсолютной интервальности интервальной матрицы?
- 2.8. Как вычисляется оценка относительной интервальности интервальных скалярной и векторной переменной?
- 2.9. Как вычисляется оценка относительной интервальности интервальной матрицы, проиллюстрируйте это на примере интервальной матрицы  $[A] = \begin{bmatrix} [1;0] & [1;3] \\ [1;4] & [0;1] \end{bmatrix}$ ?
- 2.10. Как вычисляется норма интервальной матрицы?
- 2.11. Являются ли интервальными нормы интервальных векторов и матриц?
- 2.12. Как вычисляются нормы интервальных компонентов интервальных векторов и матриц?
- 2.13. Являются ли интервальными нормы интервальных компонентов интервальных векторов и матриц?
- 2.14. Как вычисляется интервальный характеристический полином интервальной квадратной матрицы?
- 2.15. Изменяется ли значение оценки абсолютной интервальности матрицы состояния системы под действием закона управления в виде прямой связи по задающему воздействию и обратной связи по состоянию?
- 2.16. Как можно изменить значение оценки относительной интервальности матрицы состояния системы под действием закона управления в виде прямой связи по задающему воздействию и обратной связи по состоянию?
- 2.17. Как можно преобразовать случай модельного представления объекта управления с интервальными матрицами состояния и управления к случаю, когда интервальной становится только матрица состояния?
- 2.18. Как может быть построена интервально линеаризованная модель объекта, если нелинейной является зависимость скорости вектора состояния от вектора состояния?

2.19. Как может быть построена интервально линейризованная модель объекта, если нелинейной является зависимость скорости вектора состояния от вектора управления?

### 3. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА В.Л. ХАРИТОНОВА В ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ НЕОБХОДИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

#### 3.1. Основной результат В.Л. Харитонова в исследовании робастной устойчивости интервальных характеристических полиномов

Первейшим требованием, предъявляемым к любой технической системе, является требование *обеспечения ее работоспособности*, более того ее работоспособность должна сохраняться при вариациях или неопределенности реализации параметров, задаваемых интервальным способом. Применительно к динамическим системам первым условием работоспособности является свойство устойчивости этой системы, причем если это свойство сохраняется при оговоренной выше неопределенности параметров, то оно становится свойством робастной устойчивости. Одним из эффективных способов анализа устойчивости динамических систем является изучение свойств локализации собственных значений на комплексной плоскости матрицы состояния системы или что, то же самое корней ее характеристического полинома. Очевидно, если матрица состояния динамической системы является интервальной, то интервальным становится и характеристический полином (ХП) в смысле интервальности его коэффициентов, при этом каждая угловая (граничная) реализация ХП уже не является интервальной.

В проблеме исследования робастной устойчивости интервальных характеристических полиномов (ИХП) конструктивный прорыв совершил профессор Санкт-Петербургского государственного университета В.Л. Харитонов, опубликовавший в 1978 году работу, которая составляет суть его метода. Этот метод позволил вместо контроля устойчивости  $2^n$  реализаций ИХП ограничиться *выборкой из четырех полиномов*.

Для иллюстрации основных положений метода В.Л. Харитонова рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (3.1)$$

матрица состояния  $[F]$  которой является интервальной. Характеристический полином этой матрицы также является интервальным  $[D(\lambda)]$  и записывается в форме

$$[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n], \quad (3.2)$$

где  $[a_0], [a_1] \dots [a_n]$  интервальные коэффициенты ИХП, имеющие реализации  $[a_i] = [\underline{a}_i; \bar{a}_i]$ ,  $\underline{a}_i; \bar{a}_i$  – граничные (угловые) значения системного параметра. Нетрудно видеть, что в пространстве системных параметров  $a = \text{col}\{a_i; i = \overline{1, n}\}$  полная совокупность из  $n$  параметров образует выпуклый многогранник типа прямоугольный параллелепипед  $Q$ . Под задачей робастной устойчивости системы в этом случае, понимается задача отыскания условий, при выполнении которых оказываются  $H$  – устойчивыми все полиномы  $D(\lambda)$ , принадлежащие континууму полиномов с коэффициентами из многогранника  $Q$ . Для решения

задачи робастной устойчивости заметим, что многогранник  $Q$ , представляющий собой прямоугольный параллелепипед в  $n$ -мерном параметрическом пространстве, обладает целочисленными характеристиками в виде  $N_e = 2^n$  числа углов и  $N_R = n 2^{n-1}$  числа ребер.

Таким образом, в задаче робастной устойчивости встает важная технологическая проблема поиска возможности перехода от континуума полиномов к выборке конечной мощности из этого континуума. *Первый результат* в этой области получен Л. Заде и Ч. Дезоером, работавшими над проблемой робастной устойчивости полиномов в частотной области. Позже результат Л. Заде и Ч. Дезоера был подкреплён так называемой реберной теоремой Бартлетта А.С.

С целью рассмотрения метода В.Л. Харитоновы рассмотрим полином с вещественными фиксированными коэффициентами

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0). \quad (3.3)$$

Представим полином (3.3) в факторизованной форме

$$D(z) = h(z^2) + z g(z^2). \quad (3.4)$$

Поставим задачу, выяснить каким требованиям должны удовлетворять полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  с тем, чтобы полином  $D(z)$  (3.3) был бы гурвицевым. Заметим, что полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  имеют степень  $\nu$ , если  $n = 2\nu + 1$ , а в случае  $n = 2\nu$   $h(\zeta)$  имеет степень  $\nu$ , а полином  $g(\zeta)$  - степень  $(\nu - 1)$ . Ответ на поставленный вопрос содержится в теореме Эрмита-Билера.

**Теорема Эрмита-Билера.** Для того чтобы полином  $D(z) = h(z^2) + z g(z^2)$  был бы гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  составляли *положительную пару*, то есть, чтобы корни этих полиномов соответственно  $h_i$  и  $g_j$  при  $i = \overline{1, \nu}; j = \overline{1, \nu}$  в случае  $n = 2\nu + 1$  и при  $i = \overline{1, \nu}; j = \overline{1, \nu - 1}$  в случае  $n = 2\nu$  были простыми, вещественными, отрицательными и перемежались следующим образом

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \dots \langle g_\nu \langle h_\nu \langle 0 \quad \text{при } n = 2\nu + 1, \quad (3.5)$$

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \dots \langle g_{\nu-1} \langle h_{\nu-1} \langle 0 \quad \text{при } n = 2\nu. \quad \square (3.6)$$

**Доказательство** теоремы Эрмита-Билера в терминах вещественнозначных представлений можно найти в литературе, тем не менее, представляется полезным дать следующий комментарий.

Нетрудно видеть, что теорема Эрмита-Билера содержит вещественнозначную версию критерия устойчивости А.В. Михайлова, сформулированного в *форме требования чередования корней* ( $\omega \in [0, \infty)$ ) *вещественной*  $\text{Re } D(j\omega)$  *и мнимой*  $\text{Im } D(j\omega)$  *частей характеристического полинома*  $D(j\omega)$ . Действительно, если в (3.4) положить  $z = j\omega$ , то получим для  $D(j\omega)$  представление

$$D(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2) = \text{Re } D(j\omega) + j \text{Im } D(j\omega), \quad (3.7)$$

Если в (3.7) придавать значения  $\omega \in [0, \infty)$ , то в случае гурвицевости полинома  $D(z)$  корни уравнений

$$\text{Im}D(j\omega) = \omega g(-\omega^2) = 0, \text{ и} \quad (3.8)$$

$$\text{Re}D(j\omega) = h(-\omega^2) = 0, \quad (3.9)$$

начиная с корня  $\omega = 0$  уравнение (3.8) будут чередоваться. Исключим из рассмотрения нулевой корень (3.9) и произведем в (3.8) и (3.9) замену  $-\omega^2 = \zeta$ , тогда получим условие теоремы Эрмита-Билера. При этом в полном соответствии с критерием устойчивости А.В.Михайлова ближайший слева к нулю корень будет корень  $\zeta = h_v$  уравнения  $h(\zeta) = 0$ , что представлено условиями (3.5) и (3.6).

Сформулируем основной результат исследования робастной устойчивости системы (3.1), сведенный к обеспечению гурвицевости интервального характеристического полинома (3.2), влекущей за собой гурвицевость континуума характеристических полиномов  $D(\lambda)$  в форме теоремы В.Л. Харитонова.

**Теорема В.Л. Харитонова.** Для того, чтобы интервальный характеристический полином (3.2) был бы гурвицевым необходимо и достаточно чтобы были гурвицевыми четыре его угловые версии, имеющие представления

$$D_1(\lambda) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_{n-2}\lambda^2 + \bar{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + \dots, \quad (3.10)$$

$$D_2(\lambda) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \bar{a}_{n-3}\lambda^3 + \bar{a}_{n-4}\lambda^4 + \dots, \quad (3.11)$$

$$D_3(\lambda) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \bar{a}_{n-4}\lambda^4 + \dots, \quad (3.12)$$

$$D_4(\lambda) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + \dots. \quad (3.13)$$

Таким образом, метод В.Л. Харитонова позволяет свести задачу исследования робастной устойчивости системы (3.1) с интервальной матрицей  $[F]$  состояния системы к обеспечению гурвицевости четырех характеристических полиномов (3.10) – (3.13), с коэффициентами представляющими собой специальным образом организованную выборку из всех возможных их угловых реализаций, конструируемых на основе ИХП (3.2).

### Пример 3.1.

В качестве примера рассматривается задача оценки методом В.Л. Харитонова робастной устойчивости системы, построенной на объединении ОУ (2.99) и закона управления (2.100). Объект управления характеризуется интервальной матрицей состояния

$$[A] = A_0 + [\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-20; 20] & [-10; 10] & [-7; 7] \end{bmatrix} \text{ и матрицей управления с}$$

фиксированными параметрами  $B = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Закон управления (2.100) должен обеспечивать медианной составляющей матрицы состояния системы  $F_0$  распределение мод Баттерворта третьего

порядка с характеристической частотой  $\omega_0$ . Ставится задача установления значения  $\omega_0$  при заданной интервальной составляющей  $[\Delta A]$  матрицы

состояния исходного объекта  $[\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [-20;20] & [-10;10] & [-7;7] \end{bmatrix}$ ,

характеризующегося нормой  $\|[\Delta A]\| = 23.4$ , начиная с которого спроектированная система с интервальной матрицей состояния  $[F] = F_0 + [\Delta F] = (A_0 - BK) + [\Delta A]$  была бы робастно устойчивой в смысле В.Л. Харитонов. Решение задачи сопровождается контролем значения оценки (2.106) относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы как функции характеристической частоты  $\omega_0$ .

Решаемая задача в силу выбора базиса представления исходного объекта во Фробениусовой форме, а также вида матрицы управления  $B$  упрощается тем, что ИХП может быть “*стисан*” с последней строчки интервальной матрицы  $[F]$  состояния системы. В итоге интервальные коэффициенты ИХП (3.2) получают представления для распределения мод Баттерворта третьего порядка в параметризованной  $\omega_0$  форме

$$[a_0] = [1;1], [a_1] = [-7 + 2\omega_0; 7 + 2\omega_0], [a_2] = [-10 + 2\omega_0^2; 10 + 2\omega_0^2] \quad (3.14)$$

$$[a_3] = [-20 + \omega_0^3; 20 + \omega_0^3] \quad (3.15)$$

Полученные результаты сведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

$\omega_0$	$\ [\Delta F] = [\Delta A]\ $	$\ F_0\ $	$\delta_I F$	Свойство системы
3	23.4	31.4516	0.744	неустойчива
5	23.4	135.26	0.173	неустойчива
5.2	23.4	151.01	0.155	неустойчива
5.3305	23.4	162.12	0.1443	на границе устойчивости
5.375	23.4	166.04	0.1409	устойчива
5.75	23.4	204.1504	0.1149	устойчива
6	23.4	228.0	0.1029	устойчива
6.5	23.4	287.62	0.0814	устойчива
8	23.4	528.0	0.0443	устойчива
10	23.4	1021.8	0.02.29	устойчива

Из таблицы 3.1. видно, что при значениях характеристической частоты меньших 5.3305 спроектированная система неустойчива, при значениях больших 5.3305 система становится устойчивой, при  $\omega_0 = 5.3305$  система оказывается на границе устойчивости. Следует заметить, что переход из зоны неустойчивости в зону устойчивости системы на множестве значений  $\omega_0$ , сопровождается уменьшением относительной интервальности ее матрицы состояния. При этом гарантированная устойчивость наблюдается, начиная со

значения оценки относительной интервальности  $\delta_1 F = 0.1026$ , с этого значения, наблюдаемого при  $\omega_0 = 6 c^{-1}$ , следует рекомендовать выбор характеристической частоты, обеспечивающей медианной версии системы требуемые динамические свойства.

Из приведенного примера, который обнаруживает содержательную связь, оцененную количественно, между фактом устойчивости и значением оценки относительной интервальности интервальной матрицы состояния исследуемой системы, можно сделать вывод, что уже при синтезе закона управления вида (2.100), который доставляет матрице состояния проектируемой системы определенную оценку относительной интервальности, с некоторой долей осторожности можно дать априорную оценку достигнутой робастной устойчивости, которая апостериорно подтверждается методом В.Л. Харитонова.

### 3.2. Конструирование интервальных показателей качества с оценками их интервальности с помощью основной теоремы В.Л. Харитонова

На основе теоремы В.Л. Харитонова рассматриваются проблемы оценки показателей качества процессов в системе (3.1), сводящихся к проблемам устойчивости. Первоочередным показателем качества процессов динамической системы вида (3.1) является темп, с которым процессы сходятся к равновесному состоянию. Этот темп в основном определяется степенью устойчивости  $\eta$ . Для обеспечения системе (3.1) степени устойчивости  $\eta$  достаточно обеспечить эту степень устойчивости интервальной матрице  $[F]$ . Для этой цели воспользуемся свойством спектра собственных значений матричных функций  $f(N)$  от квадратной матрицы  $N$ . В соответствии с этим свойством, если  $(n \times n)$  - матрица  $N$  обладает спектром собственных значений  $\sigma \{N\} = \{\lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$ , то спектр собственных значений матрицы  $f(N)$  принимает вид  $\sigma \{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}); i = \overline{1, n}\}$ .

Сконструируем матричную функцию  $f(N)$  от матрицы  $N$  вида

$$f(N) = \eta I + N, \quad (3.16)$$

порожденную скалярной функцией  $f(\alpha) = \eta + \alpha$ . Алгебраический спектр  $\sigma \{f(N)\}$  собственных значений матрицы  $f(N) = \eta I + N$  принимает вид  $\sigma \{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \eta + \lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$ . Таким образом доказана справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3.1.** Для того, чтобы система (3.1) обладала степенью устойчивости  $\eta$  достаточно, чтобы интервальная матрица  $[F] + \eta I$  была гурвицевой или чтобы гурвицевым был ИХП этой матрицы

$$\det\{(\lambda - \eta)I - [F]\} = [a_0](\lambda - \eta)^n + [a_1](\lambda - \eta)^{n-1} + \dots + [a_n] \quad (3.17)$$

Нетрудно видеть, что после приведения ИХП (3.17) к каноническому виду  $[\tilde{D}(\lambda)] = [\tilde{a}_0]\lambda^n + [\tilde{a}_1]\lambda^{n-1} + \dots + [\tilde{a}_{n-1}]\lambda + [\tilde{a}_n]$  можно воспользоваться теоремой В.Л. Харитонова, в соответствии с которой проверить гурвицевость полиномов (3.10) – (3.13). Гурвицевость этих полиномов гарантирует наличие у системы (3.1), степени устойчивости не ниже заданной  $\eta$ .

Возможна и обратная задача, если в соответствие с (3.17) составить четыре полинома В.Л. Харитонова (3.10) – (3.13) параметризованные  $\eta$  в форме

$$D_1(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \dots, \quad (3.18)$$

$$D_2(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \dots, \quad (3.19)$$

$$D_3(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \dots, \quad (3.20)$$

$$D_4(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \dots. \quad (3.21)$$

Если теперь найти для каждого полинома (3.18) – (3.21) условие границы устойчивости, то получим четыре оценки  $\eta$  на которых строится ее интервальное представление  $[\eta] = [\underline{\eta}, \bar{\eta}] = \eta_0 + [\Delta\underline{\eta}, \Delta\bar{\eta}]$  и оценка относительной интервальности  $\delta_I \eta = \|\Delta\eta\|/\|\eta_0\|$ .

Если желаемое значение  $\eta$  не достигается реализацией матриц закона управления (2.100), рассчитанных на основе медианной версии  $A_0$  матрицы состояния ОУ, то эти матрицы следует модифицировать.

Развивая тот же подход, можно сконструировать вещественно значную матричную функцию от матрицы  $f(N) = N^\nu$ , где  $\nu$  – целое нечетное положительное число. Алгебраический спектр  $\sigma\{f(N) = N^\nu\}$  собственных значений принимает вид  $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{Ni}) = \lambda_{Ni}^\nu; i = \overline{1, n}\}$ . Таким образом, становится очевидной справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3.2.** Пусть гурвицева матрица  $N$  в своем спектре  $\sigma\{f(N)\} = \{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$  собственных значений содержит комплексно-сопряженные компоненты, в результате чего распределение  $\{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$  собственных значений этой матрицы характеризуется колебательностью  $\mu$ , при этом матрица  $N^K$  также гурвицева, но близка к границе устойчивости колебательного типа при значении

$$\nu = \max \arg \left\{ \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^\nu) \cong 0; i = \overline{1, n} \right\}, \quad (3.22)$$

тогда для колебательности  $\mu$  матрицы  $N$  справедливо оценочное неравенство

$$\mu \leq \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\nu} \right) = \mu. \quad \blacksquare \quad (3.23)$$

Применительно к системе (3.1) оказывается справедливым утверждение.

**Утверждение 3.3.** Если ИХП интервальной матрицы  $[F^\nu]$ , где  $\nu$  – целое нечетное положительное число, является гурвицевым, при этом  $\nu$  максимальное число, при котором гурвицевость матрицы  $[F^\nu]$  сохраняется, тогда система (3.1) обладает колебательностью  $\mu$ , определяемой (3.23).  $\blacksquare$

В качестве *дополнительного показателя качества системы* (3.1) рассматривается *ее запас устойчивости по фазе*, который для разработчика является удобной пользовательской характеристикой на этапе проектирования системы. Этот *интервальный показатель* оценивается как в абсолютной интервальной постановке, так и в относительной, с оценками  $\Delta_{I\Delta\varphi}, \delta_{i\Delta\varphi}$ , задаваемыми выражениями

$$\Delta_{I\Delta\varphi} = \|\Delta\Delta\varphi\| \text{ и } \delta_{i\Delta\varphi} = \frac{\Delta\|\Delta\Delta\varphi\|}{\Delta\varphi_0}, \quad (3.24)$$

где  $\Delta\varphi_0$  и  $\Delta\Delta\varphi$  связаны соотношением  $[\Delta\varphi] = \Delta\varphi_0 + [\Delta\Delta\varphi]$ .

Задача контроля запаса устойчивости системы (3.1) с интервальной матрицей состояния  $[F]$  решается с привлечением аппарата семейства характеристических полиномов В.Л. Харитонова (3.10), (3.13). На семействе полиномов этого вида конструируются *эквивалентные разомкнутые системы*, так как такой показатель качества системы как запас устойчивости формируется на частотных характеристиках разомкнутой системы.

**Определение 3.1.** Система типа одномерный вход – одномерный выход, полученная путем размыкания единичной отрицательной обратной связи по выходу, с передаточной функцией прямой цепи

$$W(s) = \frac{M(s)}{N(s)}, \quad (3.25)$$

где  $M(s), N(s)$  – полиномы от  $s$  с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие требованиям *минимальной фазовости*, называется *эквивалентной разомкнутой системой, сопровождающей характеристический полином  $D(s)$* , если выполняется условие

$$D(s) = M(s) + N(s). \quad (3.26)$$

В развитие разрабатываемых положений сформулируем следующие утверждения.

**Утверждение 3.4.** Системы с передаточными функциями прямых цепей  $W_1(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)}$  и  $W_2(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)}$  соответственно, замкнутые отрицательной

единичной обратной связью по выходу и представленные в одном и том же базисе, обладают идентичными показателями сходящихся по множеству начальных состояний  $\|x(0)\| = x_0$  при отсутствии экзогенного воздействия  $g(t)$  процессов  $x(t) = x[x(0), g(t) \equiv 0, t]$ , если

$$M_1(s) + N_1(s) = M_2(s) + N_2(s) = D(s). \quad \square \quad (3.27)$$

**Доказательство** утверждения строится на непосредственном использовании определения (3.1) с учетом условия (3.27). ■

С целью дальнейших исследований выделяются на классе эквивалентных разомкнутых систем сопровождающих данный характеристический полином замкнутой системы с фиксированным порядком астатизма при помощи следующего определения.

**Определение 3.2.** Передаточная функция прямой цепи вида

$$W(s) = \frac{a_{n-(v-1)}s^{v-1} + a_{n-(v-2)}s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n}{s^v (s^{n-v} + a_1s^{n-v-1} + \dots + a_{n-v})} \quad (3.28)$$

доставляет замкнутой единичной отрицательной обратной связью системе астатизм порядка  $\nu$  и при этом является передаточной функцией эквивалентной разомкнутой системы, сопровождающей характеристический полином

$$D(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_{n-1}s + a_n. \quad \square \quad (3.29)$$

Определение 3.2. позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 3.5.** На множестве значений порядка астатизма  $\nu$ , передаточные функции вида (3.28) порождают класс эквивалентных систем в смысле положений утверждения 3.4.

**Доказательство** утверждения строится на вычислении характеристических полиномов замкнутых систем, образованных замыканием разомкнутых систем с передаточной функцией прямой цепи (3.28), приводящим для всех порядков астатизма к представлению (3.29). ■

Применим положения сформулированных определений и утверждений к оценке запасов устойчивости разомкнутых систем, конструируемых на семействе полиномов В.Л. Харитонова, полученных из (3.1) в форме (3.10), (3.13).

Нетрудно видеть, что если применить положения утверждений 3.4 и 3.5 к семейству полиномов В.Л. Харитонова, то на этом семействе может быть сконструировано семейство эквивалентных разомкнутых систем (СЭРС), сопровождающих эти полиномы при различных порядках астатизма. Так, для астатизма  $\nu = 1$  передаточные функции семейства эквивалентных разомкнутых систем примут вид

$$W_1(s) = \frac{\overline{a_n}}{s(\underline{a_0}s^{n-1} + \underline{a_1}s^{n-2} + \overline{a_2}s^{n-3} + \overline{a_3}s^{n-4} + \dots + \underline{a_{n-1}})}, \quad (3.30)$$

$$W_2(s) = \frac{\overline{a_n}}{s(\underline{a_0}s^{n-1} + \overline{a_1}s^{n-2} + \overline{a_2}s^{n-3} + \underline{a_3}s^{n-4} + \dots + \underline{a_{n-1}})}, \quad (3.31)$$

$$W_3(s) = \frac{\overline{a_n}}{s(\overline{a_0}s^{n-1} + \overline{a_1}s^{n-2} + \underline{a_2}s^{n-3} + \underline{a_3}s^{n-4} + \dots + \overline{a_{n-1}})}, \quad (3.32)$$

$$W_4(s) = \frac{\overline{a_n}}{s(\overline{a_0}s^{n-1} + \underline{a_1}s^{n-2} + \underline{a_2}s^{n-3} + \overline{a_3}s^{n-4} + \dots + \overline{a_{n-1}})}. \quad (3.33)$$

Для случая  $\nu = 2$  это семейство определяется следующими выражениями:

$$W_1(s) = \frac{\overline{a_{n-1}s + a_n}}{s^2(\underline{a_0}s^{n-2} + \underline{a_1}s^{n-3} + \overline{a_2}s^{n-4} + \dots + \overline{a_{n-2}})}, \quad (3.34)$$

$$W_2(s) = \frac{\overline{a_{n-1}s + a_n}}{s^2(\underline{a_0}s^{n-2} + \overline{a_1}s^{n-3} + \overline{a_2}s^{n-4} + \dots + \underline{a_{n-2}})}, \quad (3.35)$$

$$W_3(s) = \frac{\overline{a_{n-2}s + a_n}}{s^2(\overline{a_0s^{n-2} + a_1s^{n-3} + a_2s^{n-4} + \dots + a_{n-2}})}, \quad (3.36)$$

$$W_4(s) = \frac{\overline{a_{n-1}s + a_n}}{s^2(\overline{a_0s^{n-2} + a_1s^{n-3} + a_2s^{n-4} + \dots + a_{n-2}})}. \quad (3.37)$$

И наконец, для  $\nu = n$  передаточные функции СЭРС принимают вид

$$W_i(s) = V_i(s)/S^n \quad (i = 1, n), \quad (3.38)$$

где  $V_i(s) = \overline{a_0^{-1}D_i(s) - s^n}$  для  $i = 1, 2$ ;  $V_i(s) = \overline{a_0^{-1}D_i(s) - s^n}$  для  $i = 3, 4$ . (3.39)

Введение эквивалентных разомкнутых систем позволяет ввести в рассмотрение весьма удобный пользовательский показатель - запас устойчивости по фазе, конструируемый с их помощью. В этой связи оказывается полезным следующее определение.

**Определение 3.6.** Запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi_i$  некоторой системы с единичной отрицательной обратной связью по выходу и передаточной функцией  $W_i(s)$  прямой цепи определяется соотношением

$$\Delta\varphi_i = \pi + \arg W_i(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_{cp}}, \quad (3.40)$$

где частота среза  $\omega_{cp}$  определяется в силу соотношения

$$\omega_{cp} = \arg \{ |W(j\omega)| = 1 \}. \quad (3.41)$$

Применение соотношений (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) к семейству эквивалентных разомкнутых систем, порождаемых полиномами В.Л. Харитонова в форме (3.30–3.33), (3.34–3.37), (3.38–3.40), дают одно и тоже значение запаса устойчивости  $i$ -той системы  $\Delta\varphi_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ . В этой связи предпочтение семейству из числа перечисленных делается исключительно из соображений простоты вычислительного характера. Вычисленные в силу (3.40–3.41), значения запасов устойчивости с помощью передаточных функций эквивалентных разомкнутых систем, сопровождающих полиномы В.Л. Харитонова, порождают интервальную их реализацию вида  $[\Delta\varphi] = [\underline{\Delta\varphi}, \overline{\Delta\varphi}]$ . Это дает возможность сконструировать оценки (3.24) интервальности запаса устойчивости по фазе интервальной системы (3.1).

С пользовательской точки зрения, полученные значения оценок (3.24) позволяют в достаточно сжатой форме оценить эффект введения в структуру системы регулятора, реализующего закон управления и определить направление модификации его матричных компонентов, для уменьшения значений этих оценок с целью достижения их требуемых величин.

### Пример 3.2.

В качестве примера рассматривается задача оценки методом В.Л. Харитонова запаса устойчивости системы, построенной на объединении ОУ (2.99) и закона управления (2.100). Объект управления характеризуется, как и в случае примера 3.1. интервальной матрицей состояния

$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-20; 20] & [-10; 10] & [-7; 7] \end{bmatrix}$  и матрицей управления с фиксированными параметрами  $B = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Закон управления (2.100) должен обеспечивать медианной составляющей матрицы состояния системы  $F_0$  распределение мод Баттерворта третьего порядка с характеристической частотой  $\omega_0 = 4c^{-1}$ . Ставится задача оценки запаса устойчивости системы с интервальной матрицей состояния. Интервальные коэффициенты ИХП (3.2) также получают представления

$$[a_0] = [1; 1], [a_1] = [-7 + 2\omega_0; 7 + 2\omega_0], [a_2] = [-10 + 2\omega_0^2; 10 + 2\omega_0^2] \\ [a_3] = [-20 + \omega_0^3; 20 + \omega_0^3]$$

Строится интервальный характеристический полином матрицы  $[F]$  в виде  $[D(s)] = [1; 1]s^3 + [1; 15]s^2 + [22; 42]s + [44; 84]$ .

В соответствии с процедурой В.Л. Харитонов, на ИХП строятся четыре полинома, а именно

$$D_1(s) = 44 + 22s + 15s^2 + s^3, \\ D_2(s) = 84 + 22s + s^2 + s^3, \\ D_3(s) = 84 + 42s + s^2 + s^3, \\ D_4(s) = 44 + 42s + 15s^2 + s^3.$$

**Семейство эквивалентных разомкнутых систем, сопровождающих полученные характеристические полиномы, характеризуются передаточными функциями, которые принимают вид**

$$W_1(s) = \frac{44}{22s + 15s^2 + s^3}, W_2(s) = \frac{84}{22s + s^2 + s^3}, \\ W_3(s) = \frac{84}{42s + s^2 + s^3}, W_4(s) = \frac{44}{42s + 15s^2 + s^3}.$$

По приведенным передаточным функциям могут быть определены запасы устойчивости по фазе в соответствии с (3.40), (3.41)  $\Delta\varphi_i (i = \overline{1, 4})$ , равные  $\Delta\varphi_1 = 58^0.1$ ,  $\Delta\varphi_2 = 65^0.4$ ,  $\Delta\varphi_3 = 86^0.4$ ,  $\Delta\varphi_4 = 88^0.5$ .

Применение к полученным значениям процедуры интервализации дает интервальные представления запаса устойчивости по фазе

$$[\Delta\varphi] = \Delta\varphi_0 + [\Delta\Delta\varphi] = \Delta\varphi_0 + [\underline{\Delta\Delta\varphi}, \overline{\Delta\Delta\varphi}] = [52^0.4; 88^0.5] = 70^0.45 + [-18^0.05; 18^0.05],$$

которые позволяют сконструировать оценки интервальности запаса устойчивости ФЭСС в абсолютной и относительной постановках, принимающие в силу (3.24) значения

$$\Delta_{I\Delta\varphi} = \|\Delta\Delta\varphi\| = 18^0.05 \quad \delta_{I\Delta\varphi} = \frac{\|\Delta\Delta\varphi\|}{\|\Delta\varphi_0\|} = \frac{18^0.05}{70^0.45} = 0.256 \text{ (25.6\%).}$$

### 3.3. Анализ робастной устойчивости нелинейных систем на основе интервально линеаризованных представлений

Одной из теоретических задач настоящего пособия является изучение возможностей метода В.Л. Харитонова для целей анализа устойчивости и динамических свойств нелинейной системы, полученной агрегированием исходного нелинейного объекта управления и закона управления вида (2.100), на основе интервально линеаризованных представлений нелинейного объекта. В решении поставленной задачи будем иметь дело с нелинейным объектом, содержащим нелинейные зависимости, как в цепи управления, так и в цепи вектора состояния, при этом будем полагать, что вектор выхода объекта формируется из вектора состояния линейным образом, что позволяет записать

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \varphi(u(t)); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (3.42)$$

Переход к использованию метода В.Л. Харитонова предполагает следующие итерации. **На первой** из них, следуя результатам параграфа п. 2.4. конструируется интервально линеаризованное модельное представление исходного нелинейного ОУ (3.42) в форме

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (3.43)$$

**На второй** итерации введение на входе ОУ буферной системы с фиксированными параметрами минимальной размерности вида (2.113) с выполнением условия (2.114). Таким образом, интервально линеаризованный объект (3.43) сводится к виду, содержащему в интервально линеаризованном представлении только один интервальный матричный компонент, которым является матрица состояния объекта, записываемый в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{A}]\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t); \tilde{x}(0); y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t). \quad (3.44)$$

**На третьем** шаге итерации интервальная матрица объекта (3.44) должна быть представлена в виде (2.35) так, что она записывается

$$[\tilde{A}] = \tilde{A}_0 + [\Delta\tilde{A}]. \quad (3.45)$$

**На четвертом** шаге итерации с использованием медианной компоненты  $\tilde{A}_0$  синтезируется закон управления вида (2.100), который для решаемой задачи принимает вид

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K}_g g(t) - \tilde{K}\tilde{x}(t). \quad (3.46)$$

**Агрегированием закона управления (3.46) и интервально линеаризованного объекта (3.44) строится интервально линеаризованная модель нелинейной системы в форме**

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{F}]\tilde{x}(t) + \tilde{G}g(t); \tilde{x}(0); y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \quad (3.47)$$

где матричные компоненты имеют представления

$$[\tilde{F}] = \tilde{F}_0 + [\Delta\tilde{F}] = \tilde{F}_0 + [\Delta\tilde{A}], \quad \tilde{G} = \tilde{B}\tilde{K}_g. \quad (3.48)$$

На этом шаге итерации организуется внутренняя итерационная процедура для целей поиска реализации матрицы  $\tilde{K}$  обратной связи по состоянию на основе результатов контроля оценки  $\tilde{\delta}_1 F$  относительной интервальности матрицы  $\tilde{F}$ , задаваемой в форме

$$\tilde{\delta}_I F = \frac{\|[\Delta \tilde{F}]\|}{\|\tilde{F}_0\|} = \frac{\|[\Delta \tilde{A}]\|}{\|\tilde{A}_0 - \tilde{B}\tilde{K}\|}, \quad (3.49)$$

которая заканчивается выполнением условия

$$\tilde{F} = \arg\{\tilde{\delta}_I \tilde{F} \leq \tilde{\delta}_{I\Omega} \tilde{F}\}. \quad (3.50)$$

В условии (3.50)  $\tilde{\delta}_{I\Omega} \tilde{F}$  – экспертная априорная оценка относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы. Так для случая примера 3.1., в котором методом В.Л. Харитоновой исследовалась робастная устойчивость интервальной системы третьего порядка с медианным распределением мод Баттерварта, экспертная оценка составила величину 0.1443, при которой система становится устойчивой и величину 0.1029, при которой система гарантированно робастно устойчива и к динамическим свойствам которой можно предъявлять необходимые требования.

**На пятом** шаге итерации методами интервальной арифметики или перебором угловых реализаций интервальной матрицы состояния системы  $[\tilde{F}]$  конструируется ИХП системы в форме (3.2)

$$[\tilde{D}(\lambda)] = \det(\lambda I - [\tilde{F}]) = [\tilde{a}_0] \lambda^n + [\tilde{a}_1] \lambda^{n-1} + \dots + [\tilde{a}_{n-1}] \lambda + [\tilde{a}_n].$$

**На следующем** шаге итерации в соответствии с базовым результатом В.Л. Харитоновой на ИХП  $[\tilde{D}(\lambda)]$  конструируются четыре “харитоновских” характеристических полинома с фиксированными параметрами вида (3.10), (3.13), которые получают представления

$$\tilde{D}_1(\lambda) = \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-1} \lambda + \tilde{a}_{n-2} \lambda^2 + \tilde{a}_{n-3} \lambda^3 + \tilde{a}_{n-4} \lambda^4 + \dots, \quad (3.51)$$

$$\tilde{D}_2(\lambda) = \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-1} \lambda + \tilde{a}_{n-2} \lambda^2 + \tilde{a}_{n-3} \lambda^3 + \tilde{a}_{n-4} \lambda^4 + \dots, \quad (3.52)$$

$$\tilde{D}_3(\lambda) = \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-1} \lambda + \tilde{a}_{n-2} \lambda^2 + \tilde{a}_{n-3} \lambda^3 + \tilde{a}_{n-4} \lambda^4 + \dots, \quad (3.53)$$

$$\tilde{D}_4(\lambda) = \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-1} \lambda + \tilde{a}_{n-2} \lambda^2 + \tilde{a}_{n-3} \lambda^3 + \tilde{a}_{n-4} \lambda^4 + \dots. \quad (3.54)$$

Если при синтезе закона управления (3.46) с использованием условия (3.50) экспертная оценка относительной интервальности матрицы состояния интервально линеаризованной нелинейной системы оказались выбранной удачно так, что полиномы В.Л. Харитоновы (3.51) - (3.54) фиксируют наличие у спроектированной системы *робастной устойчивости* то, следуя пункту п.3.2. **на последнем** шаге итерации необходимо оценить медианные значения степеней устойчивости, запасов устойчивости, колебательности и их оценок относительной интервальности.

В заключении следует сказать, что при построении интервально линеаризованного представления (3.43), а затем (3.44) исходного нелинейного объекта в силу процедуры интервальной линеаризации представленной в пункте п.2.4. элементы интервальных матриц  $[A]$  и  $[B]$  существенным образом зависят от параметров сфер  $S_x$  и  $S_u$  в которых осуществляется линеаризация. При этом ситуации при назначении параметров сфер  $S_x$  и  $S_u$  существенно разнятся по степени достоверности информации. Так параметры сферы  $S_x$  могут быть достаточно корректно определены исходя из функционального

назначения проектируемой системы. Параметры сферы  $S_u$  существенным образом зависят от синтезированного ЗУ (2.100) матричные компоненты которого определяют норму вектора управления и как следствие размер сферы  $S_u$ . Если по завершении итерационной процедуры синтеза нелинейной системы, и анализа ее робастной устойчивости на основе интервальных модельных представлений, полученных путем интервальной линеаризации, провести оценку нормы используемых управлений, то по результатам этих оценок целесообразно вернуться к итерации с целью коррекции параметров сферы  $S_u$ .

При работе с интервальными представлениями следует иметь ввиду, что априорное завышение интервальности приводит всегда к повышенным затратам ресурса управления, что особенно важно при использовании интервальных модельных представлений нелинейных систем.

### Пример 3.3.

В качестве примера рассматривается объект управления, взятый из примера 3.1, но дополненный нелинейной связью по переменной  $x_1$ . Таким образом, матрица состояния исходного объекта содержит в себе и интервальные и нелинейные компоненты, так что векторно-матричное представление исходного ОУ имеет вид

$$\dot{x}(t) = [A(x)] + Bu(t), \quad (3.55)$$

где компоненты  $[A(x)]$  и  $B$  задается в форме

$$[A(x)] = \begin{bmatrix} 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \\ -f_{31}(x_1) + [-10;10]x_2 + [-7;7]x_3 \end{bmatrix}, \quad B = [0 \ 0 \ 1]^T. \text{ В } [A(x)] \text{ нелинейный}$$

элемент  $f_{31}(x_1)$  описывается выражением

$$f_{31}(x_1) = \sin x_1. \quad (3.56)$$

Сферу  $S_x$  (2.129), в которой осуществляется интервальная линеаризация  $f_{31}(x_1)$ , зададим неравенством  $|x_1| < \pi$ . Реализация нелинейной зависимости  $f_{31}(x_1)$  в форме (3.56) позволяет для интервальной линеаризации этой зависимости использовать подход, представленный (2.133), что позволяет для (3.55) записать

$$f_{31}(x_1) = \sin x_1 = \frac{\sin x_1}{x_1} x_1. \quad (3.57)$$

Очевидно, переход от исходного модельного компонента  $[A(x)]$ , к его векторно-матричному интервально линеаризованному представлению  $[A]x$  характеризуется интервально линеаризованным компонентом  $[A_{31}]$  с угловыми значениями  $\underline{A}_{31} = \min \frac{\sin x_1}{x_1} = 0$ ,  $\overline{A}_{31} = \max \frac{\sin x_1}{x_1} = 1$ ,  $|x_1| \leq \pi$ .

В итоге исходная нелинейно-интервальная модель объекта (3.55) получает интервально линеаризованное представление, записываемое в форме

$$\dot{x}(t) = [A]x + Bu(t), \quad (3.58)$$

где интервальная матрица  $[A]$  имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-1;0] & [-10;10] & [-7;7] \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Интервальный объект (3.58) с матрицей состояния (3.59) сводит задачу к задаче примера 3.1. Исследование системы, полученной агрегированием объекта (3.58) и ЗУ (2.100) проведем на распределении мод Баттерворта третьего порядка со значениями характеристических частот примера 3.1. Результаты исследования робастной устойчивости интервально-линеаризованной системы методом Харитонов В.Л. сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

$\omega_0$	$\ [\Delta F] = [\Delta A]\ $	$\ F_0\ $	$\delta_I F$	Свойство системы
3	12.26	41.3498	0.2954	неустойчива
5	12.26	140.1408	0.0872	неустойчива
5.088	12.26	146.9446	0.0811	на границе устойчивости
6	12.26	232.2873	0.0526	устойчива
7	12.26	360.6901	0.0339	устойчива
8	12.26	531.2526	0.023	устойчива
9	12.26	749.9195	0.0163	устойчив
10	12.26	1022.7	0.0119	устойчива

Из таблицы 3.2. видно, что при значениях характеристической частоты меньших 5.088 спроектированная система неустойчива, при значениях больших 5.088 система становится устойчивой, при  $\omega_0 = 5.088$  система оказывается на границе устойчивости. Переход из зоны неустойчивости в зону устойчивости системы на множестве значений  $\omega_0$  также сопровождается уменьшением относительной интервальности ее матрицы состояния. Гарантированная устойчивость наблюдается, начиная со значения оценки относительной интервальности  $\delta_I F = 0.0526$ , с этого значения, наблюдаемого при  $\omega_0 = 6 \text{ c}^{-1}$ , следует рекомендовать выбор характеристической частоты, обеспечивающей медианной версии системы требуемые динамические свойства.

### **3.4. Анализ динамических свойств интервальных систем, спроектированных с использованием метода В.Л. Харитонova при конечномерном задающем воздействии**

Метод В.Л. Харитонova контроля робастной устойчивости систем с интервальными параметрами, сводящий проблему анализа устойчивости систем к определению устойчивости четырех “харитоновских” ХП с фиксированными

параметрами, существенно упростил задачу анализа динамики интервальных систем. В этой связи, если рассматривать задачу синтеза интервальных систем как задачу синтеза их медианных версий, с последующим контролем влияния интервальных составляющих интервальных системных компонентов на свойства системы, то с использованием метода Харитонова В.Л. за конечное число итераций можно синтезировать интервальную систему с желаемыми показателями, которые можно охарактеризовать на “харитоновской” выборке из угловых реализаций полной мощности медианными значениями этих показателей и оценить их относительную интервальность. К сожалению, эти показатели в основном являются локализационными в том смысле, что они представляют собой параметры аппроксимирующего покрытия области локализации (размещения) собственных значений семейства ХП В.Л. Харитонова, основными из которых являются степень устойчивости и колебательность, определяющая такой показатель как перерегулирование.

Однако, пользователей проектируемых систем интересуют такие показатели как полоса пропускания отношения вход-выход (ВВ) на уровне заданного значения амплитудной частотной характеристики, показатель колебательности, полоса пропускания отношения вход-ошибка (ВО) на уровне требуемого значения относительной частотной ошибки и так далее. Очевидно, все эти показатели будут носить интервальный характер. Нетрудно понять, что идея интервальных представлений, порождающих на угловых реализациях семейство “угловых” траекторий, делает корректной постановку задачи конструирования мажорантного и минорантного покрытий этих процессов. Если мажоранта и миноранта семейства угловых траекторий обладает минимальной достаточностью, то из них может быть извлечена вся информация интересующая пользователя. Следует заметить, что минимальной достаточностью обладают эллипсоидные мажоранты и миноранты, конструируемые на экстремальных элементах алгебраического спектра сингулярных чисел некоторой критериальной матрицы отношения вход-выход, сводящей задачу управления при конечномерном задающем воздействии к линейной алгебраической задаче. С тем, чтобы сконструировать критериальную матрицу необходимо иметь четыре “угловые харитоновские” реализации систем вида

$$\dot{x}_i(t) = F_i x + G_i g(t); x(0); y_i(t) = C x_i(t) \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.60)$$

сопровождающие “харитоновские” ХП  $D_i(\lambda)$  (3.10) – (3.13).

Для конструирования матричных компонентов систем вида (3.60) воспользуемся тем обстоятельством, что отношение вход-выход и вход-ошибка инвариантны относительно базиса представления. Дополним это свойство систем предположением, что в неподвижном состоянии при постоянном задающем воздействии  $g(t) = g_0 = const$  выполняется условие  $y_{ycm} = g_0$ . Тогда передаточные функции систем вида (3.60) могут быть охарактеризованы следующим семейством передаточных функций, сконструированных на ХП В.Л. Харитонова (3.10) – (3.13) так, что они записываются

$$\Phi_1(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y_1(s)}{g(s)} = \frac{\underline{a}_n}{D_1(s)} = C(sI - F_1)^{-1} G_1, \quad (3.61)$$

$$\Phi_2(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y_2(s)}{g(s)} = \frac{\bar{a}_n}{D_2(s)} = C(sI - F_2)^{-1} G_2, \quad (3.62)$$

$$\Phi_3(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y_3(s)}{g(s)} = \frac{\bar{a}_n}{D_3(s)} = C(sI - F_3)^{-1} G_3, \quad (3.63)$$

$$\Phi_4(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y_4(s)}{g(s)} = \frac{\underline{a}_n}{D_4(s)} = C(sI - F_4)^{-1} G_4. \quad (3.64)$$

Структурная реализация передаточной функции (3.61) – (3.64) порождает семейство систем вида (3.60).

Сведем отношение вход-выход при конечномерном задающем воздействии к линейной алгебраической задаче вида

$$\eta(t) = N_{\eta, \chi}(t) \chi(0), \quad (3.65)$$

где  $N_{\eta, \chi}(t)$  – критериальная матрица,  $\eta$  принимает смысл агрегированного выхода семейства систем (3.60)  $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$  или агрегированной ошибки  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]^T$ ,  $\chi(0)$  – вектор начального состояния источника конечномерного задающего воздействия. Скаляризация векторно-матричного выражения (3.65) с помощью эллипсоидных миноранты и мажоранты осуществляется путем перехода в (3.65) к соотношению по векторным евклидовым нормам, для которых справедливы неравенства

$$\alpha_m \{N_{\eta, \chi}(t)\} \leq \frac{\|\eta(t)\|}{\|\chi(0)\|} \leq \alpha_M \{N_{\eta, \chi}(t)\}, \quad \forall t, \quad (3.66)$$

где  $\alpha_m \{N_{\eta, \chi}(t)\}, \alpha_M \{N_{\eta, \chi}(t)\}$  минимальные и максимальные сингулярные числа соответственно критериальной матрицы  $N_{\eta, \chi}(t)$ .

Для конструирования критериальной матрицы  $N_{\eta, \chi}(t)$  воспользуемся положениями следующего утверждения.

**Утверждение 3.6.** Пусть  $g(t)$  – конечномерное задающее воздействие, которое генерируется с помощью автономной конечномерной системы минимальной размерности

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t); \quad z(0); \quad g(t) = P z(t); \quad P P^T = I; \quad z(t) = \exp(\Gamma t) z(0), \quad (3.67)$$

где  $z \in R^l, \Gamma \in R^{l \times l}, P \in R^{m \times l}, g \in R^m$ . Тогда, для агрегированной системы, построенной на четырех “харитоновских” угловых реализациях системы вида (3.60) становятся справедливыми представления

$$x(t) = \exp(Ft)x(0) + (T \exp(\Gamma t) - \exp(Ft)T)z(0) \quad (3.68)$$

$$y(t) = Cx(t) = C \exp(Ft)x(0) + C(T \exp(\Gamma t) - \exp(Ft)T)z(0) \quad (3.69)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) = (P - CT) \exp(\Gamma t)z(0) - C \exp(Ft)(x(0) - Tz(0)), \quad (3.70)$$

здесь  $\Gamma = \text{diag} \Gamma_i, P = \text{diag} P_i, F = \text{diag} F_i, C = \text{diag} C_i, T = \text{diag} T_i (i = \overline{1, n})$ , где матричные компоненты  $T_i$  матрицы  $T$  вычисляются с помощью матричного уравнения Сильвестра

$$T_i \Gamma_i - F_i T_i = G_i P_i. \quad \square (3.71)$$

**Доказательство** утверждения можно найти в работах авторов, приведенных в списке литературы. ■

Для построения эллипсоидных мажоранты и миноранты переходной характеристики семейства систем (3.60) путем сведения задачи к виду (3.65) положим в (3.68) – (3.70)  $x(0) \equiv 0$  и сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 3.7.** Для вынужденной составляющей движения (3.68) вектора состояния  $x(t)$  и выхода  $y(t)$  систем (3.60), которые при ступенчатом задающем воздействии  $g(t) = g(0) = Pz(0), \|g(0)\| = 1$  представляют собой *переходные векторные характеристики* по состоянию и выходу системы (3.60) справедливы представления

$$x(t) = N_{xg}(t)g(0); y(t) = N_{yg}(t)g(0) \quad (3.72)$$

где  $N_{xg}(t)$  и  $N_{yg}(t)$  – переходные матрицы по состоянию  $x(t)$  и выходу  $y(t)$  имеют вид

$$N_{xg}(t) = F^{-1}(\exp(Ft) - I)G; N_{yg}(t) = C F^{-1}(\exp(Ft) - I)G, \quad (3.73)$$

а эллипсоидные мажоранты и миноранты переходных характеристик по состоянию и выходу определяются выражениями

$$\begin{aligned} h_{xM}(t) &= \alpha_M \{N_{xg}(t)\}, h_{xm}(t) = \alpha_m \{N_{xg}(t)\}; \\ h_{yM}(t) &= \alpha_M \{N_{yg}(t)\}, h_{ym}(t) = \alpha_m \{N_{yg}(t)\} \end{aligned} \quad \square (3.74)$$

**Доказательство** утверждения строится на подстановке в соотношения (3.68), (3.70)  $\Gamma = 0$  и решении уравнения Сильвестра при этом условии. ■

Использование соотношения (3.72) совместно с (3.71) позволяют сконструировать мажоранты  $\sigma_M(\%)$ ,  $t_{\Pi M}$  миноранты  $\sigma_m(\%)$ ,  $t_{\Pi m}$  соответственно перерегулирования  $\sigma(\%)$  и времени переходного процесса  $t_{\Pi}$  семейства “харитоновских” систем (3.60).

Для построения эллипсоидных мажоранты  $M_M(\omega)$  и миноранты  $M_m(\omega)$  амплитудной частотной характеристики вход-выход и эллипсоидных мажоранты  $\delta_M(\omega)$  и миноранты  $\delta_m(\omega)$  относительной частотной ошибки рассмотрим соотношения (3.68) – (3.70) в установившемся режиме для случая гармонического внешнего задающего воздействия, которые с учетом (3.67) принимают вид

$$x(t) = T \exp(\Gamma t)z(0) = T z(t), \quad (3.75)$$

$$y(t) = Cx(t) = CTz(t), \quad (3.76)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) = (P - CT)z(t). \quad (3.77)$$

Для случая гармонического задающего воздействия интерес представляют критериальные матрицы  $N_{xg}(t), N_{yz}(t)$  и  $N_{\varepsilon z}(t)$ , для которых в силу (3.75) – (3.77) можно записать

$$N_{xg}(t) = T \exp(\Gamma t), N_{yg}(t) = CT, N_{\varepsilon z}(t) = (P - CT), \quad (3.78)$$

здесь матрицы  $\Gamma$  и  $\exp \Gamma t$  имеют представления

$$\Gamma = \text{diag} \left\{ \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} (i = \overline{1, m}) \right\}, \quad (3.79)$$

$$\exp \Gamma t = \text{diag} \left\{ \exp(\Gamma_i t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} (i = \overline{1, m}) \right\}, \quad (3.80)$$

в силу которого, последняя из них является ортогональной. Если воспользоваться *свойством спектра сингулярных чисел* произвольной матрицы не зависеть от умножения ее слева или справа на ортогональную матрицу, то при использовании соотношения (3.66) для формирования мажорант и минорант амплитудно-частотных характеристик вход-выход и относительной частотной ошибки исчезает зависимость от времени, причем для гармонического воздействия в случае выполнения в (3.67) условия  $PP^T = I$  норма  $\|\chi(0)\| = \|z(0)\|$  совпадает с амплитудой гармонического воздействия так, что  $g_m = \|z(0)\|$ . Таким образом, становится справедливым положение следующего утверждения.

**Утверждение 3.8.** Эллипсоидные мажоранты и миноранты амплитудных частотных характеристик по состоянию  $x(t) = x(t, \omega)$ , выходу  $y(t) = y(t, \omega)$  и ошибке  $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, \omega)$  многомерной непрерывной системы, построенной на семействе “харитоновских” систем (3.60) удовлетворяют оценочным неравенствам (3.66), принимающим для гармонического воздействия вид

$$M_{xm}(\omega) \leq \frac{\|x(t, \omega)\|}{\|z(0)\|} = \frac{\|x(\omega)\|}{\|z(0)\|} \leq M_{xM}(\omega), \forall \omega, \quad (3.81)$$

$$M_{xm}(\omega), M_{xM}(\omega) \in \sigma_\alpha \{T\}.$$

$$M_{ym}(\omega) \leq \frac{\|y(t, \omega)\|}{\|z(0)\|} = \frac{\|y(\omega)\|}{\|z(0)\|} \leq M_{yM}(\omega), \forall \omega, \quad (3.82)$$

$$M_{ym}(\omega), M_{yM}(\omega) \in \sigma_\alpha \{CT\},$$

$$\delta_m(\omega) \leq \frac{\|\varepsilon(t, \omega)\|}{\|z(0)\|} = \frac{\|\varepsilon(\omega)\|}{\|z(0)\|} \leq \delta_M(\omega), \forall \omega \quad (3.83)$$

$$\delta_m(\omega), \delta_M(\omega) \in \sigma_\alpha \{(P - CT)\},$$

в которых  $\sigma_\alpha \{(*)\}$  – алгебраический спектр сингулярных чисел матриц (\*), матрица  $T$  в которых путем решения уравнения Сильвестра (3.71) принимает вид

$$T_i(\omega) = -(\omega^2 I + F_i^2)^{-1} \text{row} \{ [F_i G_i \quad \omega G_i]; i = \overline{1, m} \}, \quad (3.84)$$

где  $\omega$  частота задающего внешнего векторного воздействия.  $\square$

**Доказательство** утверждения строится на использовании неравенства (3.66) применительно к выражению (3.78) с учетом свойств ортогональной

матрицы (3.80), а также на непосредственном решении уравнения Сильвестра (3.71) для случая матрицы  $\Gamma$  вида (3.79). ■

Использование соотношений (3.75) – (3.77) с учетом представления решения уравнения Сильвестра в форме (3.71) позволяет сконструировать мажоранты и миноранты полос пропускания на уровне заданных значений амплитудных частотных характеристик вход-выход и относительной частотной ошибки на семействе “харитоновских” систем. Более того, они позволяют наблюдать как процесс сходимости мажорант и минорант друг к другу по мере снижения относительной интервальности системных компонентов исходной интервальной системы (2.101)

#### Пример 3.4.

В качестве примера рассматривается процесс конструирования мажорант и минорант переходных и частотных характеристик интервальной системы примера 3.1. с распределение мод Баттерворта третьего порядка для значений характеристической частоты  $\omega_0$ , *гарантирующей робастную устойчивость и характеризующуюся оценками относительной интервальности матрицы состояния системы*, (см. таблицу 3.1.).

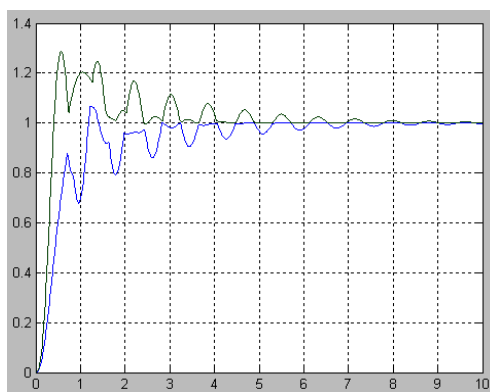


Рисунок 3.1. Мажоранта и миноранта переходной характеристики интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 6 \text{ c}^{-1}$

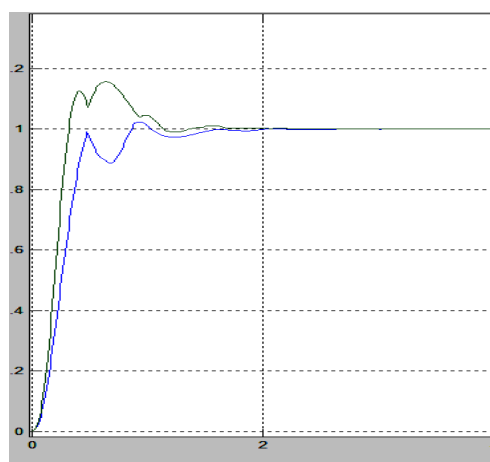
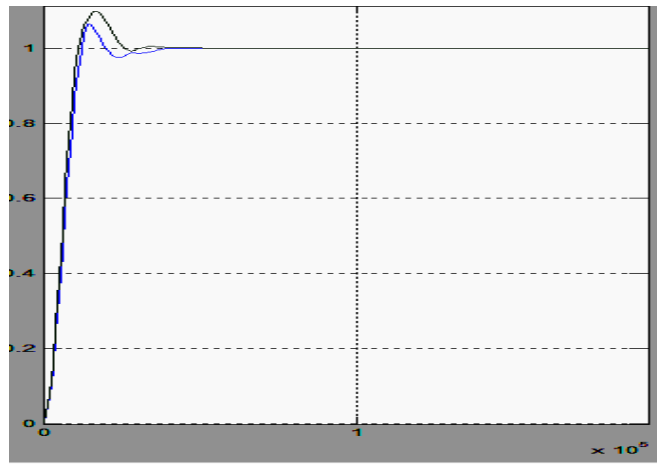
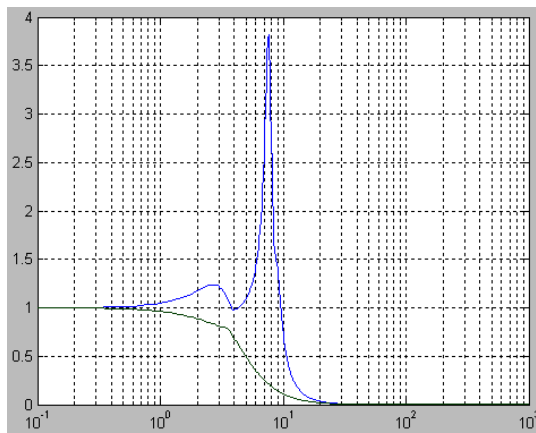


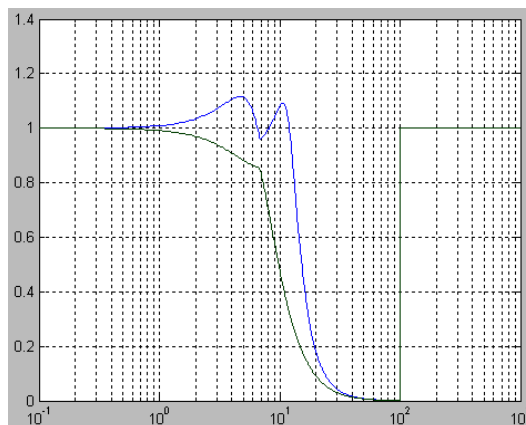
Рисунок 3.2. Мажоранта и миноранта переходной характеристики интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 10 \text{ c}^{-1}$



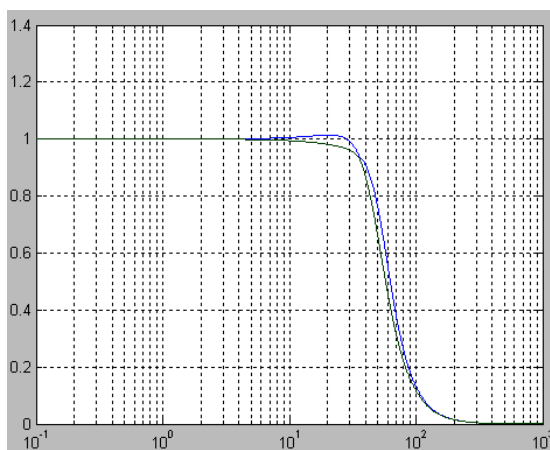
**Рисунок 3.3.** Мажоранта и миноранта переходной характеристики интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 50 \text{ c}^{-1}$



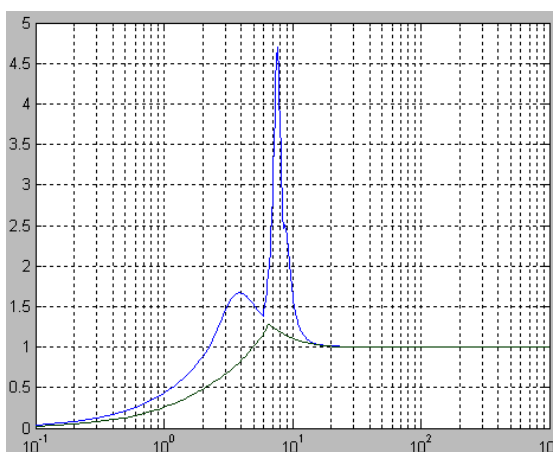
**Рисунок 3.4.** Мажоранта и миноранта амплитудной частотной характеристики «вход – выход» интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 6 \text{ c}^{-1}$



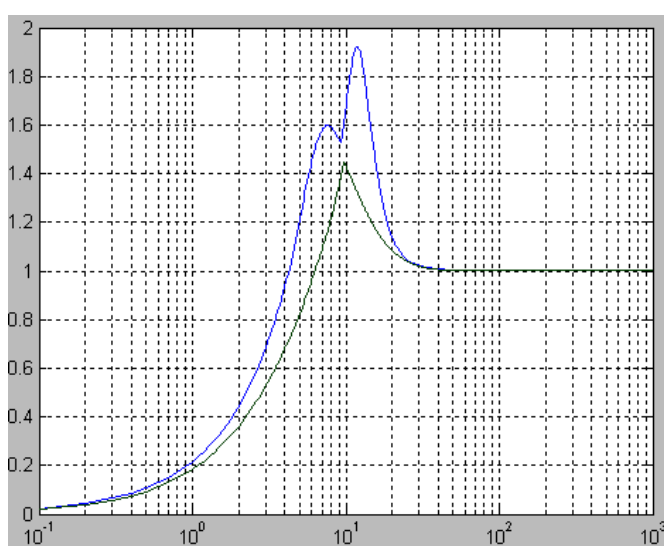
**Рисунок 3.5.** Мажоранта и миноранта амплитудной частотной характеристики «вход – выход» интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 10 \text{ c}^{-1}$



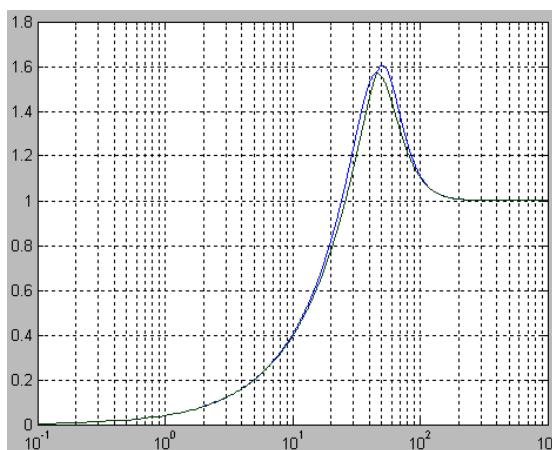
**Рисунок 3.6.** Мажоранта и миноранта амплитудной частотной характеристики «вход – выход» интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 50 \text{ c}^{-1}$



**Рисунок 3.7.** Мажоранта и миноранта относительной частотной ошибки интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 6 \text{ c}^{-1}$



**Рисунок 3.8.** Мажоранта и миноранта относительной частотной ошибки интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 10 \text{ c}^{-1}$



**Рисунок 3.9.** Мажоранта и миноранта относительной частотной ошибки интервальной системы при значении характеристической частоты  $\omega_0 = 50 \text{ c}^{-1}$

Таким образом, приведенные кривые эллипсоидных мажорант и минорант во временной и частотной областях позволяют наблюдать степень влияние фактора интервальности на процессы в системах с интервальными параметрами, а также констатировать факт сходимости мажорант и минорант друг к другу по мере управляемого уменьшения относительной интервальности системных компонентов интервальной системы. Очевидно аналогичные кривые в форме эллипсоидных мажорант и минорант могут быть построены для случая стохастического задающего воздействия.

### Контрольные вопросы

3.1. Весь ли многогранник в параметрическом пространстве, построенный на интервальных реализациях коэффициентов интервального характеристического полинома (ИХП) надо перебирать с тем, чтобы установить гурвицевость ИХП?

3.2. В чем суть теоремы Эрмита – Билера, проиллюстрируйте это на примере полинома  $D(z) = z^3 + 1.44z^2 + 2.8z + 1.44$ , определив с помощью этой теоремы является ли он гурвицевым?

3.3. В чем суть результата Заде – Дезоера в теории устойчивости ИХП?

3.4. В чем суть результата В.Л.Харитонов по робастной устойчивости ИХП, проиллюстрируйте это на примере ИХП матрицы

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-196; -236] & [-62; -82] & [-5; -19] \end{bmatrix} ?$$

3.5. Как с помощью результата В.Л.Харитонов можно обеспечить системе с интервальными параметрами гарантированную степень устойчивости?

3.6. Как с помощью результата В.Л.Харитонов можно обеспечить системе с интервальными параметрами гарантированную колебательность?

3.7. Как с помощью метода В.Л.Харитоновца построить оценку абсолютной и относительной интервальности степени устойчивости робастно устойчивой системы с ИХП?

3.8. Как вычислить оценку относительной интервальности ИХП?

3.9. На примере характеристического полинома третьей степени с устойчивым медианным компонентом постройте ИХП, который не является робастно устойчивым в смысле гурвицевости четырех полиномов В.Л.Харитоновца?

3.10. Как по заданному гурвицеву полиному с фиксированными коэффициентами оценить запас устойчивости по фазе системы, характеристический полином матрицы состояния которой совпадает с заданным?

3.11. Как с помощью четырех полиномов В.Л.Харитоновца вычислить оценки абсолютной и относительной интервальности запаса устойчивости по фазе системы, матрица состояния которой имеет вид

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-980; -1020] & [-190; -210] & [-13; -27] \end{bmatrix} ?$$

3.12. Обладает ли система с интервальной матрицей состояния  $[F]$  гарантированной степенью устойчивости  $\eta$ , если интервальная матрица  $[F] + \eta I$  является гурвицевой и почему?

3.13. Обладает ли система с интервальной матрицей состояния  $[F]$  гарантированной степенью устойчивости  $\eta$ , если три полинома Харитоновца интервальной матрицы  $[F] + \eta I$  являются гурвицевыми, а четвертый находится на границе устойчивости?

3.14. Построить интервально линеаризованную модель системы  $\dot{x}(t) = f(x) + Bu$ , где нелинейная функция  $f(x)$  имеет представление

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1x_2^2 \\ 5x_1x_2 + 7x_1^2x_2 \end{bmatrix} \text{ на сфере } \|x\|_\infty = 10.$$

3.15. Решить задачу 3.14 на сфере  $\|x\|_\infty = 5$ .

3.16. Решить задачу на сфере  $\|x\|_2 = 10$ .

3.17. Как строятся мажоранты и миноранты переходных характеристик систем с фиксированными параметрами?

3.18. Как строятся мажоранты и миноранты переходных характеристик систем с интервальными параметрами?

3.19. Как строятся мажоранты и миноранты амплитудных частотных характеристик систем с фиксированными параметрами?

3.20. Как строятся мажоранты и миноранты амплитудных частотных характеристик систем с интервальными параметрами?

## 4. МЕДИАННОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С КОНТРОЛЕМ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

### 4.1. Базовый алгоритм синтеза модального управления объектами с полной параметрической определенностью как алгоритм синтеза медианного модального управления на основе решения уравнения Сильвестра

Практика синтеза управлений для объектов с полной параметрической определенностью в рамках векторно-матричных модельных представлений метода пространства состояний в основном использует возможности оптимального и модального управлений. Достоинством последнего из них является то, что выбором структуры собственных значений (мод) матрицы состояния проектируемой системы можно доставить этой системе требуемые пользовательские показатели, характеризующие ее динамические свойства в переходном и установившемся режимах. Более того, развитие идей модального управления от первичной его постановки в форме желаемой структуры мод в направлении обеспечения векторного и матричного подобия процессов в проектируемой системе процессам в системе той же размерности с желаемыми свойствами, принимаемой за эталонную унифицировало алгоритмическое обеспечение синтеза управления. Это алгоритмическое обеспечение, использующее концепцию подобия, опирается на решение матричного уравнения Сильвестра.

Для того, чтобы адаптировать базовый алгоритм синтеза модального управления объектами с параметрической определенностью, опирающийся на решение матричного уравнения Сильвестра, к задачам синтеза медианного модального управления, под которыми понимается управление объектом с медианными матричными компонентами исходных интервальных матриц, дополненным задачей контроля достигаемого в процессе синтеза значения оценки относительной интервальности матриц проектируемой системы и как следствие показателей ее качества рассмотрим алгоритм в предположении, что в качестве номинальных параметров объекта приняты их медианные версии. Опираясь на результаты научной школы кафедры систем управления и информатики (бывшей кафедры автоматике и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, в работе используется базовый алгоритм синтеза модального управления объектами с полной параметрической определенностью, которому присвоен номер 4.1., в следующей форме

#### Алгоритм 4.1

1. Построение (A, B, C) представления ОУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (4.1)$$

2. Формирование (F, G, C) представления проектируемой системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (4.2)$$

где  $F : \sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg(\pi_j R \pi_{jR})\} \& \sigma\{F\} \cap \sigma\{A\} = \emptyset$ ,

где  $\pi_j, \pi_{jR}$  – соответственно  $j$  – тый показатель динамических свойств проектируемой системы в переходном и установившемся режимах и его требуемое значение,  $R$  – отношение порядка на паре  $(\pi_j, \pi_{jR})$ , которое принимает смысл “больше” или “меньше” в зависимости от конкретного содержания показателя  $\pi_j$ .

$$G = \arg\left\{\Phi(s) = C(sI - F)^{-1}G\right\}_{s=0} = -CF^{-1}G = I. \quad (4.3)$$

3. Формирование математической модели закона управления (ЗУ) в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (4.4)$$

где матрицы  $K$  и  $K_g$  удовлетворяют соотношениям

$$K = \arg\{F = A - BK\} \quad (4.5)$$

$$K_g = \arg\{G = BK_g\}. \quad (4.6)$$

4. Формирование модальной модели в форме матричного  $(\Gamma, H)$  – представления, где

$$\Gamma = \arg\{\sigma\{\Gamma\} = \sigma\{F\}\} \quad (4.7)$$

$$H = \arg\{observ(\Gamma, H)\}. \quad (4.8)$$

Для целей обеспечения гарантированной вычислительной устойчивости матричных процедур решения уравнения Сильвестра, а также, если в матрице  $F$  заложить требования контроля структуры ее собственных векторов  $\xi_i$

$$F\xi_i = \lambda\xi_i : i = \overline{1, n}, \quad (4.9)$$

матрицу  $\Gamma$  следует задавать в диагональной (блочно диагональной) форме

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i : i = \overline{1, n}\}. \quad (4.10)$$

5. Решение уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \quad (4.11)$$

относительно матрицы  $M$  преобразования подобия

$$M\Gamma = FM, \quad (4.12)$$

где  $M$  при  $\Gamma = \Lambda$  такова, что  $M_i = \xi_i$ .

6. Конструирование матрицы  $K$  обратной связи в силу соотношения

$$K = HM^{-1}. \quad (4.13)$$

7. Формирование матрицы  $F$  состояния проектируемой системы в форме

$$F = A - BK. \quad (4.14)$$

8. Формирование матрицы

$$G = BK_g, \quad (4.15)$$

где  $K_g = \arg\left\{\Phi(s) = C(sI - F)^{-1}BK_g\right\}_{s=0} = I$ , которая в случае равенства размерностей  $\dim C^T = \dim B$  матриц  $C$  и  $B$  представима в форме

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}. \quad (4.16)$$

9. Формирование реализационных версий ЗУ, который в зависимости от имеющегося состава измерения получает представления

$$u(t) = K_g g(t) - K_y y(t) - K_x x(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (4.17)$$

где  $K_g = K_y = K_\varepsilon$ ,  $K_x = K - K_y C = K - K_\varepsilon C = K + (CF^{-1}B)^{-1}C$

10. Техническая реализация ЗУ в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t) \quad (4.18)$$

в предположении, что используемые в реализационной версии закона управления компоненты вектора состояния измеримы.

11. В случае *неполной измеримости* вектора состояния  $x$  закон управления должен быть дополнен динамическим наблюдателем (ДН) используемых в ЗУ компонентов вектора состояния ОУ  $x$ , *недоступных непосредственному измерению*. Динамический наблюдатель задается в форме

$$x_H(t) = F_H x_H(t) + G_H u(t) - L_H y(t), \quad (4.19)$$

здесь вектор состояния ДН  $x_H$  связан с вектором состояния  $x$  ОУ векторно-матричным соотношением

$$x_H(t) = Px(t) - \Theta_H(t), \quad (4.20)$$

где  $\Theta_H(t)$  – вектор невязки наблюдения, который путем выбора алгебраического спектра собственных значений матрицы  $F_H$  состояния ДН должен сходиться к нулю с требуемым темпом в силу соотношения

$$\Theta_H(t) = e^{F_H t} \Theta_H(0); \quad (4.21)$$

где  $\Theta_H(0) = Px(0) - x_H(0)$ . Матрицы  $G_H, L_H$  должны удовлетворять условию

$$(G_H, L_H) = \arg\{control(F_H, G_H) \& control(F_H, L_H)\}, \quad (4.22)$$

причем  $L_H$  назначается, а  $G_H$  вычисляется в процессе синтеза.

12. Конструирование динамического модального регулятора (ДМР), реализующего закон управления с использованием доступных измерению переменных  $\varepsilon(t)$ ,  $y(t)$  и состояния наблюдающего устройства  $x_H(t)$  записываемый в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - Dy(t) - Ex_H(t), \quad (4.23)$$

где матрицы связей  $D$  и  $E$  вычисляются в силу соотношения

$$(D, E) = \arg\left\{ \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ P \end{bmatrix} = K_x \right\}. \quad (4.24)$$

Матрица  $P$  находится как решение уравнения Сильвестра

$$PA - F_H P = L_H C, \quad (4.25)$$

которое позволяет сконструировать матрицу  $G_H$  в форме

$$G_H = PB. \quad (4.26)$$

13. Проведение компьютерного эксперимента в среде MATLAB с целью оценки выполнения условия  $\pi_j R \pi_{jR}$ , в случае невыполнения которого возвращение к п. 11. алгоритма. ■

В заключении необходимо отметить, что данный алгоритм при выборе матрицы  $H$  в п.4. может быть дополнен требованием достижения минимального числа обусловленности  $C\{M\}$  матрицы  $M$ , построенной на собственных векторах матрицы  $F$  состояния проектируемой системы, путем выполнения условия

$$H = \arg\{observ(\Gamma, H) \& \min C\{M\{H\}\}\}. \quad (4.27)$$

Достижение минимального значения числа обусловленности  $C\{M\{H\}\}$  матрицы  $M$  собственных векторов гарантирует *максимальную модальную робастность проектируемой системы.*

#### **4.2. Алгоритм синтеза медианного модального управления с контролем оценки относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы**

**Задача адаптации возможностей алгоритма 4.1. синтеза модального управления объектами с полной параметрической определенностью к проблемам конструирования закона управления, доставляющего системе, полученной агрегированием объекта управления с *интервальными матричными компонентами* и закона управления с фиксированными матрицами, решается на примере объекта вида (2.99), который характеризуется интервальностью параметров только матрицы его состояния. Справедливость постановки задачи в такой форме вызвана тем, что к виду (2.99) могут быть сведены ситуации, когда интервальной являются как матрица состояния, так и матрица управления, что достигается структурной модификацией агрегатного состава системы, рассмотренной в параграфе 2.3. Более того, к такой постановке может быть сведена и задача синтеза закона управления, когда исходный объект сочетает в своем представлении интервальные компоненты с нелинейными элементами, как в тракте управления, так и в тракте состояния. Как показано в параграфе 2.4, это может быть сделано сочетанием процедур интервальной линеаризации нелинейных компонентов и агрегатной модификации. Доказанное в главе 2. утверждение, что закон управления (2.100), (4.4) *меняет только относительную интервальность матрицы состояния* проектируемой системы вида (2.101) позволяет наложить на процедуру требование *контроля достижения необходимого значения оценки относительной интервальности интервальной матрицы состояния.* В силу соотношения (2.106) значение оценки относительной интервальности однозначно связано с *нормой медианного компонента интервальной матрицы* состояния проектируемой системы, что в процедуре синтеза должно проявиться в формировании требований к *норме матрицы состояния модальной модели* с последующим контролем априорного значения этой нормы. *Контроль относительной интервальности интервальной матрицы* состояния проектируемой системы дает *богатую информацию в форме априорной оценки интервальности ожидаемых показателей качества,* медианные значения которых обеспечиваются медианным модальным управлением, а также в форме априорной оценки достижения уровня параметрической неопределенности, начиная с которого становится корректным *использование возможностей аппарата теории чувствительности* в рамках функций чувствительности первого порядка.**

В соответствии со сказанным *сформулируем постановку задачи синтеза закона медианного модального управления* в форме (4.4) объектом управления (2.99) с интервальной матрицей состояния с тем, чтобы:

1. Медианная составляющая  $F_0 = A_0 - BK$  матрицы  $[F]$  спроектированной системы (2.101) доставляла медианные значения  $\pi_{0\rho}$  ( $\rho = \overline{1, \mu}$ ) показателям качества процессов в переходном и установившемся режимах, удовлетворяющих требованиям

$$\pi_{0\rho} R \pi_{0\rho R} \quad (\rho = \overline{1, \mu}), \quad (4.28)$$

$R$  – отношение порядка на паре  $(\pi_j, \pi_{jR})$ , которое принимает смысл “*больше*” или “*меньше*” в зависимости от конкретного содержания показателя  $\pi_j$ .

2. Оценка относительной интервальности  $\delta_I F$  матрицы  $[F]$  состояния спроектированной системы (2.101) удовлетворяла условию

$$\delta_I F \leq \delta_{IR} F, \quad (4.29)$$

при этом  $\delta_{IR} F$  такова, что становится корректным использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка.

3. Выполнялось для спроектированной системы с медианной составляющей  $F_0$  интервальной матрицы состояния  $[F]$  условие обеспечения единичного отношения “*вход – выход*” в неподвижном состоянии

$$\Phi_0(s) = C(sI - F_0)^{-1} G \Big|_{s=0} = I. \quad (4.30)$$

Алгоритму синтеза медианного модального управления с контролем оценки относительной интервальности интервальной матрицы состояния проектируемой системы, удовлетворяющего сформулированным выше требованиям придадим номер 4.2.

#### **Алгоритм 4.2.**

1. Построение интервального  $([A], B, C)$  представления объекта управления в форме (2.99), где

$$[A] = A_0 + [\Delta A]. \quad (4.31)$$

2. Формирование  $([F], G, C)$  представления проектируемой системы

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (4.32)$$

здесь  $[F] = F_0 + [\Delta F]$ :  $\sigma\{F_0\} = \{\lambda_i = \arg(\pi_j R \pi_{jR})\} \& \sigma\{F_0\} \cap \sigma\{A_0\} = \emptyset$ ,

где  $\pi_j, \pi_{jR}$  – соответственно  $j$  – тый показатель динамических свойств проектируемой системы в переходном и установившемся режимах и его требуемое значение,  $R$  – отношение порядка на паре  $(\pi_j, \pi_{jR})$ , которое принимает смысл “*больше*” или “*меньше*” в зависимости от конкретного содержания показателя  $\pi_j$ ;

$$F_0 = \arg \left\{ \delta_I F \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \leq \delta_{IR} F \right\}. \quad (4.33)$$

$$G = \arg \left\{ \Phi_0(s) = C(sI - F_0)^{-1} G \Big|_{s=0} = I \right\}, \quad (4.34)$$

при выполнении условий (4.33), (4.34) переход к п.6. алгоритма в противном случае к п.3.

3. Выбор наблюдаемой пары матриц  $(\Lambda, H)$ , где матрица  $\Lambda$

$$\Lambda = \arg \left\{ \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F_0\} \& \|F_0 = M\Lambda M^{-1}\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_{IR} F_0} \right\}, \quad (4.35)$$

на первом шаге итерации вычисляется в силу (4.35) в предположении, что  $M=I$ .

4. Решение уравнения Сильвестра

$$M\Lambda - A_0 M = -BH \quad (4.36)$$

относительно матрицы  $M$ .

5. Контроль выполнения неравенства

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|M\Lambda M^{-1}\|} \leq \delta_{IR} F \quad (4.37)$$

с тем, чтобы при его выполнении осуществить переход к п. 6 настоящего алгоритма в противном случае к п.3 с целью увеличения нормы  $\|\Lambda\|$ .

6. Формирование математической модели закона управления (ЗУ) в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (4.38)$$

где матрицы  $K$  и  $K_g$  удовлетворяют соотношениям

$$K = \arg \{ F_0 = M\Lambda M^{-1} = A_0 - BK \} = HM^{-1} \quad (4.39)$$

$$K_g = \arg \{ G = BK_g \} = \arg \{ -C(F_0)^{-1} BK_g = I \}, \quad (4.40)$$

причем в случае равенства размерностей  $\dim C^T = \dim B$  матрица  $K_g$  ищется в форме

$$K_g = -(CF_0^{-1}B)^{-1}. \quad (4.41)$$

7. Формирование реализационных версий закона медианного модального управления (ЗММУ), который в зависимости от имеющегося состава измерения получает представления

$$u(t) = K_g g(t) - K_y y(t) - K_x x(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (4.42)$$

где  $K_g = K_y = K_\varepsilon$ ,  $K_a = K + (CF_0^{-1}B)^{-1} C$ . (4.43)

8. Техническая реализация закона медианного модального управления в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t) \quad (4.44)$$

в предположении, что используемые в реализационной версии закона компоненты вектора состояния полностью измеримы.

9. Введение в случае неполной измеримости вектора состояния  $x$  ОУ, используемого в ЗММУ (4.44), в структуру системы динамического наблюдателя, задаваемого в форме

$$\dot{x}_H(t) = F_H x_H(t) + G_H u(t) + L_H y(t), \quad (4.45)$$

здесь вектор состояния ДН  $x_H$  связывается с вектором состояния  $x$  ОУ векторно-матричным соотношением

$$x_H(t) = Px(t) - \Theta_H(t), \quad (4.46)$$

где  $\Theta_H(t)$  – вектор невязки наблюдения, который путем выбора алгебраического спектра собственных значений матрицы  $F_H$  состояния ДН должен сходиться к нулю с требуемым темпом в силу соотношения

$$\Theta_H(t) = e^{F_H t} \Theta_H(0); \quad (4.47)$$

где  $\Theta_H(0) = Px(0) - x_H(0)$ . Матрицы  $G_H, L_H$  должны удовлетворять условию

$$(G_H, L_H) = \arg\{control(F_H, G_H) \& control(F_H, L_H)\}, \quad (4.48)$$

причем  $L_H$  назначается, а  $G_H$  вычисляется в процессе синтеза.

10. Конструирование *динамического медианного модального регулятора* (ДММР), реализующего закон управления с использованием доступных измерению переменных  $\varepsilon(t)$ ,  $y(t)$  и состояния наблюдающего устройства  $x_H(t)$  записываемый в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - Dy(t) - Ex_H(t), \quad (4.49)$$

где матрицы связей  $D$  и  $E$  вычисляются в силу соотношения

$$(D, E) = \arg\left\{ \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ P \end{bmatrix} = K_x \right\}. \quad (4.50)$$

Матрица  $P$  находится как решение уравнения Сильвестра,

$$PA_0 - F_H P = L_H C, \quad (4.51)$$

которое позволяет сконструировать матрицу  $G_H$  в форме

$$G_H = PB. \quad (4.52)$$

11. Проведение компьютерного эксперимента в среде MATLAB с целью оценки выполнения условия  $\pi_{0j} R \pi_{jR}$ , для медианной версии спроектированной системы и оценки относительной интервальности

$$\delta_I \pi_j = \frac{\Delta \left[ \Delta \pi_j \right]}{\pi_{0j}}. \quad \blacksquare$$

Оценку влияния ДММР на достигаемые значения оценок относительной интервальности матриц состояния спроектированной системы можно не производить в силу следующих соображений. Спроектированная система с агрегированным вектором состояния  $\tilde{x} = col(x, \Theta_H)$  имеет интервальное векторно-матричное представление

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{F}] \tilde{x}(t) + \tilde{G} g(t); y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t), \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned} [\tilde{F}] &= \tilde{F}_0 + [\Delta \tilde{F}] = \begin{bmatrix} [F] & BE \\ 0 & F_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 + [\Delta F] & BE \\ 0 & F_H \end{bmatrix}; \\ \tilde{G} &= \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [C \quad 0] \end{aligned} \quad (4.54)$$

при этом

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} F_0 & BE \\ 0 & F_H \end{bmatrix} \quad [\Delta \tilde{F}] = \begin{bmatrix} [\Delta F] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta A] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Из (4.55) следует выполнение системы соотношений

$$\|\Delta \tilde{F}\| = \|\Delta F\| = \|[\Delta A]\|; \quad \|\tilde{F}_0\| \geq \|F_0\|. \quad (4.56)$$

Таким образом (4.56) содержит доказательство следующего утверждения

**Утверждение 4.1.** Динамический наблюдатель компонентов вектора состояния  $x$  исходного ОУ с интервальной матрицей состояния в составе медианного модального регулятора не увеличивает относительной интервальности интервальной матрицы состояния спроектированной системы в том смысле, что выполняется соотношение

$$\delta_I \tilde{F} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|[\Delta \tilde{F}]\|}{\|\tilde{F}_0\|} \leq \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|} \stackrel{\Delta}{=} \delta_I F \quad \blacksquare \quad (4.57)$$

В заключение отметим, что алгоритм 4.2. при выборе матрицы  $H$  в п.3. может быть дополнен требованием достижения минимального числа обусловленности  $C\{M\}$  матрицы  $M$ , построенной на собственных векторах  $F_0$  медианной составляющей интервальной матрицы состояния проектируемой системы, путем выполнения условия

$$H = \arg \{ \text{observ}(\Lambda, H) \& \min C\{M\{H\}\} \}. \quad (4.58)$$

Достижение минимального значения числа обусловленности  $C\{M\{H\}\}$  матрицы  $M$  собственных векторов гарантирует максимальную модальную робастность для медианной версии проектируемой системы и значительно сокращает число итераций в цикле алгоритма п.3. – п.5. – п.3. по выбору матрицы  $\Lambda$  модальной модели с требуемой нормой  $\|\Lambda\|$ .

### 4.3. Управление интервальностью матрицы состояния системы с одновременным решением задачи слежения с нулевой ошибкой за конечномерным задающим воздействием, на основе принципа внутренней модели

В параграфе 2.3 рассмотрен случай структурной модификации объекта управления путем включения на его входе буферной системы с целью обеспечения такого модельного представления модифицированного объекта, при котором интервальной оказывается только его матрица состояния. Таким образом, введение буферной системы является конструктивным решением задачи достижения требуемой интервальности матричных компонентов проектируемой системы в случае, если в исходном объекте управления (2.107) интервальными оказались матрицы  $[A]$  состояния и  $[B]$  управления, путем сведения в виду (2.115). В этой связи встает вопрос о рациональном выборе буферной системы с тем, чтобы с ее помощью решить дополнительные задачи. Если функция буферной системы состоит в конструировании *предрегулятора*, решающего только одну задачу минимизации фактора интервальности, то в

этом случае достаточно чтобы *размерность  $\ell$  этой системы была равна  $r$  – числу входов исходного объекта управления*, то есть в каждый канал управления достаточно включить систему первого порядка. Заметим, что если система первого порядка реализована в виде апериодического звена, то в чистом виде *решается задача предрегулятора*, а если в виде интегрирующего звена, то *решается задача предрегулятора с одновременным повышением на единицу астатизма системы*. В развитие последнего положения, справедливо поставить задачу расширения функций буферной системы, возложив на нее реализацию *принципа внутренней модели конечномерного задающего воздействия* с целью достижения модельного представления (2.107) ОУ и нулевой установившейся ошибки для медианной версии системы (2.109).

Основной результат раздела может быть представлен в виде утверждения.

**Утверждение 4.2.** Пусть медианная версия агрегированного объекта (2.115), (2.116)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_0 \tilde{x}(t) + \tilde{B}_0 \tilde{u}(t), \quad y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t) \quad (4.59)$$

должна воспроизводить внешнее задающее конечномерное воздействие  $g(t)$  с нулевой установившейся ошибкой

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (4.60)$$

Пусть модель конечномерного воздействия представима автономной системой минимальной размерности  $\ell$  в форме

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t); \quad z(0); \quad g(t) = P_z(t), \quad (4.61)$$

где  $z \in R^\ell$ ;  $g \in R^m$ ;  $\Gamma \in R^{\ell \times \ell}$ ;  $P \in R^{m \times \ell}$ .

Пусть при построении агрегированного ОУ (2.115) выполнены матричные условия

$$\Gamma_B = \Gamma; \quad P_B = P \quad (4.62)$$

так, что матрица  $\tilde{A}_0$  принимает вид

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 P \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

тогда поставленная задача получает решение с помощью управления

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K} \tilde{\zeta}(t), \quad (4.64)$$

где вектор ошибки слежения по состоянию задается в форме

$$\tilde{\zeta}(t) = \tilde{T} z(t) - \tilde{x}(t), \quad (4.65)$$

если матрица подобия удовлетворяет матричным соотношениям

$$\tilde{T} \Gamma - \tilde{A}_0 \tilde{T} = 0 \quad \tilde{P} - \tilde{C} \tilde{T} = 0. \quad (4.66)$$

**Доказательство** утверждения строится с использованием модели ошибки слежения по состоянию, для которой можно записать.

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \tilde{T} \dot{z}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) \quad (4.67)$$

Если в (4.67) подставить (4.59) и (4.61), учесть (4.65), то для модели ошибки получим

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \tilde{A}_0 \tilde{\zeta}(t) + (\tilde{T}\Gamma - \tilde{A}_0 \tilde{T})z(t) - \tilde{B}\tilde{u}(t); \tilde{\zeta}(0) = \tilde{T}z(0) - \tilde{x}(0). \quad (4.68)$$

Учтем в (4.68) первое из матричных соотношений (4.66) и подставим в него (4.64), тогда получим окончательную модель для ошибки слежения по вектору состояния

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \tilde{F}_0 \tilde{\zeta}(t); \quad \tilde{\zeta}(0), \quad (4.69)$$

где  $\tilde{F}_0 = \tilde{A}_0 - \tilde{B}\tilde{K}$ .

Явное решение для системы (4.69) имеет вид

$$\tilde{\zeta}(t) = \exp(\tilde{F}_0 t) \tilde{\zeta}(0). \quad (4.70)$$

Это решение, обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}(t) = 0, \quad (4.71)$$

если матрица состояния  $\tilde{F}_0$  гурвицева, причем требуемый темп сходимости в (4.71) определяется структурой собственных значений (мод) матрицы  $\tilde{F}_0$ , тем самым задача обеспечения нулевой ошибки слежения за конечномерным задающим воздействием сводится к задаче модального управления при выполнении соотношения (4.66). Теперь покажем, что выполнение условия (4.71) с одновременным учетом второго матричного соотношения (4.66) гарантирует выполнение условия (4.60).

Для ошибки слежения по выходу за конечномерным задающим воздействием в силу (4.61) и (4.66) можно записать

$$\varepsilon(t) = \tilde{C}\tilde{\zeta}(t) - (\tilde{P} - \tilde{C}\tilde{T})z(t). \quad (4.72)$$

Подстановка в (4.72) второго соотношения (4.66) дает

$$\varepsilon(t) = \tilde{C}\tilde{\zeta}(t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = C \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}(t) = 0. \quad (4.73)$$

Ключевым моментом в получении результатов (4.70), (4.71), и (4.73) является нетривиальное решение (4.66). Условием этого решения является пересечение алгебраических спектров собственных значений матриц  $\Gamma$  и  $\tilde{A}_0$ . Это условие в данном случае выполняется, т.к. матрица  $\tilde{A}$  имеет треугольный вид (4.63), для которого можно записать

$$\sigma\{\tilde{A}_0\} = \sigma\{A_0\} \cup \sigma\{\Gamma\}. \quad \blacksquare \quad (4.74)$$

Положения утверждения 4.2. позволяют сформировать алгоритм синтеза

*обобщенного издромного управления методами модального управления, который*

**получает номер 4.3.**

Алгоритм 4.3.

Поставленную задачу синтеза обобщенного изодромного управления в форме (4.64) будем решать в два этапа. На первом этапе синтезируется  $\tilde{K}$  матрица связей, в предположении непосредственной измеримости вектора ошибки  $\tilde{\zeta}(t)$ . На втором этапе синтезируется устройство, которое формирует его асимптотическую оценку. В реализации такого подхода алгоритм принимает вид:

1. Составить  $([A], [B], C)$  представления исходного ОУ (2.107).
2. На основе анализа входного задающего воздействия построить его конечномерную модель с матрицами  $(\Gamma, P)$  (4.61).
3. Сформировать агрегированный объект управления (2.107) и БС (2.113), матричные компоненты которой совпадают с матричными компонентами конечномерного входного воздействия.
4. Сформировать требования к динамическим свойствам системы в переходном и установившемся режимах, задав их в форме желаемой структуры мод и условия обеспечения нулевой установившейся ошибки слежения, а также в виде требований к значению оценки относительной интервальности матрицы состояния агрегированной системы.

5. На основе сформированной структуры мод сконструировать модальную модель в виде наблюдаемой пары матриц  $(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})$  и нормой удовлетворяющей требованиям к значению интервальности

$$\tilde{\Lambda} = \arg \left\{ \tilde{\Lambda} = \text{diag} \{ \tilde{\lambda}_i \in \sigma \{ \tilde{F} \} \} \& \delta_I \tilde{F} = \frac{\| [\Delta \tilde{\Lambda}] \|}{\| \tilde{M} \tilde{\Lambda} \tilde{M}^{-1} \|} \leq \delta_{IR} \tilde{F} \right\}.$$

6. Решить уравнения Сильвестра  $\tilde{M} \tilde{\Lambda} - \tilde{A}_0 \tilde{M} = -\tilde{B} \tilde{H}$  относительно матрицы подобия  $\tilde{M}$  для медианной версии агрегированного ОУ.

7. Сконструировать матрицу  $\tilde{M} \tilde{\Lambda} \tilde{M}^{-1}$ , вычислить ее норму  $\| \tilde{M} \tilde{\Lambda} \tilde{M}^{-1} \|$  и осуществить проверку выполнения требования к интервальности интервальной матрицы состояния проектируемой системы, в случае его невыполнения осуществить возвращение к п.5, в противном случае – к п.8.

8. Вычислить матрицу обратной связи  $\tilde{K}$  в форме  $\tilde{K} = \tilde{H} \tilde{M}^{-1}$  обобщенного изодромного управления  $\tilde{u}(t) = \tilde{K} \tilde{\zeta}(t)$ .

9. Сформировать реализационную версию закона обобщенного изодромного управления (ЗОИУ)

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K}_\varepsilon \varepsilon(t) + \tilde{N} \tilde{\zeta}_H \quad (4.75)$$

на основе измерения ошибки  $\varepsilon(t)$  по выходу системы и вектора состояния  $\tilde{\zeta}_H$  динамического наблюдателя вектора  $\tilde{\zeta}$  ошибки слежения по состоянию

$$\dot{\zeta}_H = \tilde{F}_H \zeta_H + \tilde{L}_H \varepsilon(t), \quad (4.76)$$

опирающегося на модельное представление  $\dot{\zeta}(t) = \tilde{F} \tilde{\zeta}(t)$ ;  $\varepsilon(t) = \tilde{C}_y \tilde{\zeta}(t)$ , так чтобы матричные компоненты (4.75) вычислить в силу соотношения

$$(\tilde{K}_\varepsilon, N) = \arg \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{K}_\varepsilon & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{P} \end{bmatrix} = \tilde{K} \right\}, \quad (4.77)$$

для которого матрицу  $\tilde{P}$  вычислить из решения уравнения Сильвестра

$$\tilde{P}\tilde{F} - \tilde{F}_H\tilde{P} = -\tilde{L}_H\tilde{C}. \quad (4.78)$$

10. Провести компьютерный эксперимент в среде программой оболочки MATLAB с целью проверки корректности назначения собственных значений матрицы состояния наблюдателя (4.76) вектора ошибки слежения по состоянию на основе медианной версии интервального модельного представления агрегированной системы

$$\dot{v}(t) = [F_v]v(t); v(0) \varepsilon(t) = C_v v(t), \quad (4.79)$$

где

$$v = \text{col} \{ \tilde{\zeta}, \Theta_{\zeta_H} = P\tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}_H \}, [F_v] = \begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{B}N \\ 0 & \tilde{F}_H \end{bmatrix}; C_v = [\tilde{C} \quad 0]. \quad \blacksquare (4.80)$$

Следует заметить, что, как показано в параграфе 4.2., введение в состав системы наблюдателя не увеличивает оценки относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы, поэтому необходимость контроля его влияния на эту оценку исчезает. Более того, оценка относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы в предположении, что вектор ошибки слежения по состоянию полностью измерим, формируется в процедуре синтеза в п.5. тела алгоритма 4.3., поэтому по завершении выполнения алгоритма  $\delta_I \tilde{F}$  оказывается вычисленной.

#### Пример 4.1.

Для иллюстрации полученных результатов рассматривается изодромное управление вида (3.42) объектом, с интервальными матрицами состояния (см.

прим. 3.1.) и управления, которые имеют вид  $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-1; 0] & [-10; 10] & [-7; 7] \end{bmatrix}$ ,

$[B] = [0 \quad 0 \quad [1.5; 0.5]]^T$ . Матрица выхода объекта имеет фиксированные параметры и записывается в форме  $C = [1 \quad 0 \quad 0]$ . Матричные компоненты источника конечномерного входного воздействия  $\dot{z}(t) = \Gamma z(t); z(0); g(t) = Pz(t)$ , в

случае гармонического входного воздействия, при  $\omega = 5c^{-1}$  получают реализации  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P = [1 \quad 0]$ . Модифицируем ОУ, путем введения

буферной системы согласно п.3. алгоритма 4.3. с тем, чтобы интервальной оказалась только расширенная матрица состояния  $[\tilde{A}]$ , так, что

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ [-1; 0] & [-10; 10] & [-7; 7] & [1.5; 0.5] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Матрицы управления } \tilde{B} \text{ и выхода}$$

$\tilde{C}$  соответственно расширенной системы принимают вид  $\tilde{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , причем пара матриц  $(\tilde{A}_0, \tilde{B})$  управляемая. На рисунке 4.1 представлены траектории  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\varepsilon(t)$

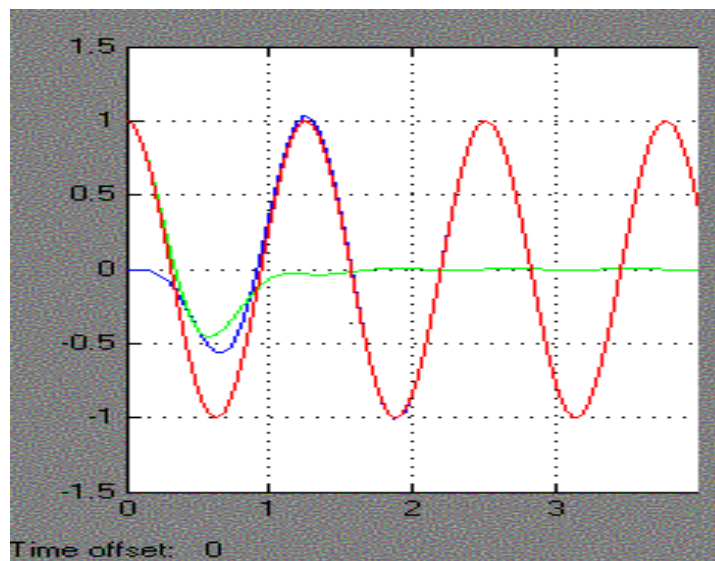


Рисунок 4.1. Траектории  $y(t)$ ,  $g(t)$ ,  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$

#### 4.4. Аппарат теории чувствительности в задаче оценки показателей качества интервальных систем с гарантированной относительной интервальностью матричных компонентов модельного представления

Контроль относительной интервальности интервальной матрицы состояния проектируемой системы обнаружил свои конструктивные пользовательские возможности уже при исследовании динамических показателей интервальных систем методом В.Л. Харитонов. Исследования, основанные на мажоранте и миноранте переходных и частотных характеристик интервальных систем, проведенные на “харитоновской” выборке из множества всех угловых реализаций показали, что с уменьшением относительной интервальности интервального характеристического полинома или интервальной матрицы состояния адекватным образом ведет к уменьшению интервальности перечисленных выше характеристик, в пределе сближая их друг к другу. Анализ и синтез систем, проведенные в данной главе, основаны на медианном подходе, при котором используются модельные представления с медианными матричными компонентами, как исходного объекта, так и спроектированной системы, дополненные контролем оценки их относительной

интервальности с гарантированным достижением требуемого значения. Такой подход дает разработчику две возможности. **Первая возможность** состоит в том, что достигнутые значения оценки относительной интервальности матрицы состояния путем переноса на показатели динамических свойств спроектированной системы позволяют разработчику сконструировать экспресс оценки мажорантных и минорантных значений этих показателей. **Вторая возможность** состоит в том, что если относительная интервальность матричных компонентов модельного представления спроектированной системы не превышает сорока процентов, то становится корректным использование аппарата теории чувствительности динамических систем в рамках функций чувствительности первого порядка с учетом того факта, что за номинальные значения системных параметров приняты медианные значения их интервальных реализаций.

В данном пособии для целей поставленных исследований авторы используют *аппарат траекторной чувствительности* при исследовании влияния фактора интервальности на динамические процессы и аппарат *функций чувствительности сингулярных чисел* при исследовании влияния фактора интервальности на пользовательские показатели, формируемые в критериальной области. Использование возможностей теории чувствительности, как в траекторной, так и в критериальной областях осуществляется по одной и той же схеме и реализуется в форме мажорант и минорант вариации траектории или показателя качества системы на множестве угловых реализаций интервальных системных параметров.

Эта схема состоит в следующем. Пусть  $\ell$  – мерный показатель  $\pi$  параметризован непрерывным временем  $t$ , пусть он зависит от  $p$  – мерного векторного системного параметра  $q$ , претерпевающего вариацию  $\Delta q$  относительно номинального (медианного) значения  $q_0$  так, что становится справедливым представление

$$\pi(t, q = q_0 + \Delta q) = \pi(t) + \Delta \pi(t, q_0, \Delta q), \quad (4.81)$$

где  $\pi(t) = \pi(t, q_0) : \pi \in R^\ell : q \in R^p : q = q_0 + \Delta q$ .

Пусть является корректным использование аппарата траекторной чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка, тогда для полной вариации  $\Delta \pi(t)$ , порожденной полной вариацией  $\Delta q$  вектора параметров номинального значения  $q_0$  справедливо представление

$$\Delta \pi = S_\pi(t) \Delta q, \quad (4.82)$$

где  $S_\pi(t)$  – матрица функций траекторной чувствительности по векторной переменной  $\pi(t)$ , которая принимает смысл векторов состояния  $x(t)$ , выхода  $y(t)$  и ошибки  $\varepsilon(t)$ ,  $S_\pi(t) - (\ell \times p)$  – матрица

$$S_\pi(t) = \text{row} \left\{ \text{col} \left\{ \eta_{v,j} = \left. \frac{\Delta \partial \pi_v(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} : v = \overline{1, \ell} \right\} j = \overline{1, p} \right\}. \quad (4.83)$$

Заметим, что для функций траекторной чувствительности по ошибке  $\varepsilon(t)$  и выходу  $y(t)$  справедливы соотношения

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_v(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} \{g(t) - y(t, q)\} \Big|_{q=q_0} = - \left. \frac{\partial y(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = -\eta_{vj}(t). \quad (4.84)$$

Оценим мажоранты и миноранты вариаций  $\Delta \pi_v(t, \Delta q_j)$ , используя (4.82). В силу (4.82) становятся справедливыми записи

$$\max_j \Delta \pi_v(t, \Delta q) = \sum_{j=1}^p |\eta_{vj}(t)| |\Delta q_j| \quad (4.85)$$

$$\min_j \Delta \pi_v(t, \Delta q) = -\max \Delta \pi_v(t, \Delta q) \quad (4.86)$$

Параметризованное относительно параметром  $q_j$  представление интервального числа  $\pi_v$  имеет вид

$$\begin{aligned} \pi_v(t, q_j) &= (\underline{\pi}_v(t))(1 - q_j) + (\overline{\pi}_v(t))q_j : \\ q_j &\in [0, 1] : q_{j0} = 0.5 : q_j = q_{j0} + \Delta q_j \end{aligned} \quad (4.87)$$

где  $-0.5 \leq \Delta q_j \leq 0.5$ , поэтому в (4.85), (4.86) следует подставлять значения  $|\Delta q_j| = 0.5$ .

Если вектор  $\pi$  является вектором показателей качества спроектированной системы, то он не параметризован временем. Для него справедливы представления

$$\pi(q = q_0 + \Delta q) = \pi + \Delta \pi(q_0, \Delta q), \quad (4.88)$$

где  $\pi = \pi(q_0) : \pi \in R^\ell : q \in R^p$ , при этом

$$\Delta \pi(q_0, \Delta q) = S_\pi \Delta q, \quad (4.89)$$

Если показатели качества системы строить на максимальном  $\alpha_M(N_v)$  и минимальном  $\alpha_m(N_v)$  сингулярных числах некоторой критериальной матрицы  $N_v$ , то соотношение (4.89) реализуется на векторно-матричных соотношениях

$$\Delta \pi_v = \begin{bmatrix} \Delta \pi_{vm} = \alpha_m(S_v) \\ \Delta \pi_{vM} = \alpha_M(S_v) \end{bmatrix} = S_{\pi_v} \Delta q, \quad (4.90)$$

где  $S_{\pi_v} = \text{row} \left\{ \text{col} \left\{ \alpha_{mj} = \left. \frac{\partial \alpha_m(N_v(q))}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \alpha_{Mj} = \left. \frac{\partial \alpha_M(N_v(q))}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} \right\} \right\}_{j=1, p}$ .

При этом максимальная и минимальная вариация показателей  $\Delta \pi_{vm}$  и  $\Delta \pi_{vM}$  оцениваются с помощью соотношений

$$\max_j \{ \Delta \pi_{vm} = \Delta \alpha_m(N_v) \} = -\min_j \{ \Delta \pi_{vm} = \Delta \alpha_m(N_v) \} = \sum_{j=1}^p |\alpha_{mj}| |\Delta q_j|, \quad (4.91)$$

$$\max_j \{ \Delta \pi_{vM} = \Delta \alpha_M(N_v) \} = - \min_j \{ \Delta \pi_{vM} = \Delta \alpha_M(N_v) \} = \sum_{j=1}^p |\alpha_{Mj}| |\Delta q_j|. \quad (4.92)$$

Используя параметризованное относительным параметром  $q_j$  представление интервального числа  $\pi_v$ , которое имеет вид

$$\pi_v(q_j) = \underline{\pi}_v(1 - q_j) + \bar{\pi}_v q_j : q_j \in [0,1] : q_{j0} = 0.5 : q_j = q_{j0} + \Delta q_j, \quad (4.93)$$

где  $-0.5 \leq \Delta q_j \leq 0.5$ , в выражения (4.91), (4.92) следует подставлять значения  $|\Delta q_j| = 0.5$ .

Проиллюстрируем возможности использования аппарата теории чувствительности, к исследованию процессов в системах с интервальными матричными компонентами. Будем полагать, что исходный объект управления имеет матрицы с фиксированными параметрами, но он модифицирован так, что алгебраический спектр собственных значений матрицы состояния модифицированного ОУ содержит в своем составе спектр собственных значений медианной составляющей матрицы состояния ИЗВ.

**Предположим, что:**

1. значение интервалов параметров матричных компонентов модели

$$\dot{z}(t) = [G]z(t); z(0); g(t) = Pz(t) \quad (4.94)$$

не противоречат возможностям методов теории чувствительности;

2. закон ОИУ реализуется в форме (4.64). В этом случае модель ошибки (4.69), (4.65), (4.73) примет вид

$$\dot{\zeta}(t) = \tilde{F}\zeta(t) + T[\Delta G]z(t) \quad (4.95)$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{C}\zeta(t) \quad (4.96)$$

Соотношение (4.87) позволяет представить (4.95) и (4.96) в форме

$$\dot{\zeta}(t, q) = \tilde{F}\zeta(t, q) + T\Delta G(q)z(t, q) \quad (4.97)$$

$$\varepsilon(t, q) = \tilde{C}\zeta(t, q) \quad (4.98)$$

Продифференцируем выражения (4.97) и (4.98) по компонентам  $q_j$  ( $j=1 \div p$ ) вектора параметров  $q$  при номинальном значении параметра. Тогда модель траекторной чувствительности (МТЧ) ошибки слежения в системе с ОИР к вариации  $j$ -го параметра  $q_j$  ИЗВ примет вид

$$\dot{\sigma}_j(t) = \tilde{G}\sigma_j(t) + T\Gamma_{q_j}z(t) \quad (4.99)$$

$$\eta_j(t) = \tilde{C}\sigma_j(t) \quad (4.100)$$

где  $\sigma_j(t) = \left. \frac{\partial \zeta(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}$  – функция траекторной чувствительности вектора расширенной ошибки  $\zeta(t)$  к вариации  $j$ -го параметра  $q$ ;

$\eta_j(t) = \left. \frac{\partial \varepsilon(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}$  – функция чувствительности ошибки слежения по выходу к вариации того же параметра.

Не трудно видеть, что если модель чувствительности (4.99) и (4.100) дополнить номинальной моделью ИЗВ, то появляется возможность генерирования функции траекторной чувствительности, и построение на их основе матриц траекторной чувствительности.

Матрица траекторной чувствительности  $\Sigma_{\eta}(t)$  позволяет для полного вектора вариации  $\Delta\varepsilon(t, \Delta q, q_0)$  ошибки слежения  $\varepsilon(t)$  записать

$$\Delta\varepsilon(t, \Delta q, q_0) = \Sigma_{\eta}(t)\Delta q, \quad (4.101)$$

где  $\Sigma_{\eta}(t) = \text{row}\{\eta_j(t); j = \overline{1, p}\}$ .

Если вернуться к первоначальной задаче, то, используя строки матрицы траекторной чувствительности, на множестве экстремальных реализаций интервализирующего параметра  $q$ , можно получить оценку максимальной вариации  $k$ -го компонента вектора ошибки в форме

$$\Delta\varepsilon_k(t) = \max_{\Delta q} \Delta\varepsilon_k(t) = \sum_{j=1}^p |\eta_{kj}(t)| |\Delta q_j|. \quad (4.102)$$

### Контрольные вопросы

4.1. Запишите в общем виде выражение для матрицы состояния системы  $F$ , если известны матрица состояния объекта управления  $A$ , его матрица входа  $B$  и матрица обратных связей  $K$  по вектору состояния объекта.

4.1. В чем состоит концепция векторного и матричного подобия в задаче синтеза модального управления объектом с фиксированными параметрами?

4.2. Почему от закона управления в форме  $u(t) = K_g g(t) - K_x x(t)$  при практической реализации переходят к форме  $u(t) = K_{\varepsilon} \varepsilon(t) - K_x x(t)$ ?

4.3. Почему при  $g(t) = g_0 = \text{const}$  условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t)\} = g_0$  выполняется при равенстве  $\mathcal{C}(s)|_{s=0} = I$ , где  $\mathcal{C}(s): y(s) = \mathcal{C}(s)g(s)$ ?

4.4. При каких условиях, накладываемых на матричные компоненты, неоднородное матричное уравнение Сильвестра оказывается разрешимым?

4.5. В какой форме согласно алгоритму 4.1 задается динамический наблюдатель в случае неполной измеримости вектора состояния  $x$ ?

4.6. Сконструируйте согласно алгоритму 4.1 и запишите в общем виде динамический модальный регулятор (ДМР), реализующий закон управления с использованием доступных измерению переменных  $\varepsilon(t)$ ,  $y(t)$  и состояния наблюдающего устройства  $x_H(t)$ .

4.7. Почему «динамика» наблюдающего устройства не оказывает влияние на качество переходной характеристики системы, но влияет на качество процессов, порождаемых ненулевым начальным состоянием объекта?

4.8. Запишите выражения для матриц связей  $D$  и  $E$  динамического модального регулятора.

4.9. Как проверить пару матриц  $(A, B)$  на управляемость, а пару матриц  $(\Gamma, H)$  – на наблюдаемость?

4.10. Как осуществить переход от матрицы модальной модели  $\Lambda$  с нормой  $\|\Lambda\|$  к новой версии этой матрицы с нормой  $\gamma\|\Lambda\|$ , увеличинной в  $\gamma$  раз?

4.11. От каких матриц  $K_g$  ( $K_\varepsilon$ ) прямой связи по задающему воздействию (ошибки слежения) или матрицы обратной связи  $K$  по вектору состояния зависит величина  $\delta_I F$  оценки относительной интервальности интервальной матрицы  $[F]$  состояния проектируемой системы?

4.12. Как влияет на величину оценки относительной интервальности матрицы состояния проектируемой системы включение в ее состав динамического наблюдающего устройства?

4.13. Даны две модальные модели с диагональными матрицами состояния, параметризованные характеристической частотой  $\Lambda(\omega_{0i}), i=1;2$ , при этом  $\omega_{02} > \omega_{01}$ , произведен синтез методами медианного модального управления двух вариантов систем для одного и того же объекта с интервальной матрицей состояния; в каком случае величина оценки относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы будет меньше?

4.14. Синтезируется система на основе объекта типа «одномерный вход – одномерный выход» с интервальными матрицами состояния и управления, какой должна быть буферная система минимальной размерности с тем, чтобы обобщенное изодромное управление доставило системе гарантированный астатизм второго порядка?

4.15. Каковы должны быть алгебраические спектры матриц с тем, чтобы однородное уравнение Сильвестра  $\tilde{T}\Gamma - \tilde{A}_0\tilde{T} = 0$  имело нетривиальное решение для матрицы  $\tilde{T}$ ?

4.16. Какой вид должна иметь матрица  $\Gamma$ , если изодромное управление должно обеспечивать нулевую ошибку при входном задающем воздействии  $g(t) = 3 + 5 \sin(\pi t)$ ?

4.17. Изменится ли и как матрица  $\Gamma$ , если воздействие будет иметь вид  $g(t) = -3 + 5 \cos(\pi t)$ ?

4.18. В чем суть «принципа внутренней модели»?

4.19. Пусть в системе реализовано обобщенное изодромное управление, при каком сочетании начальных состояний источника внешнего задающего воздействия и объекта управления устанавливается нулевая ошибка с момента  $t = 0$ ?

4.20. Как строится модель траекторной чувствительности динамической системы, позволяющей формировать функции траекторной чувствительности по векторам состояния, выхода и ошибки к вариациям параметров матричных компонентов модельного представления системы?

4.21. Как с помощью модели траекторной чувствительности можно оценить влияние интервальности параметров матричных компонентов исходного объекта на такие показатели, как перерегулирование и время переходного процесса?

4.22. Как можно проранжировать интервальные параметры по степени их влияния на динамические показатели системы с помощью моделей траекторной чувствительности?

4.23. Как Вы модифицируете алгоритм синтеза медианного модального управления, если Вы будете обладать шкалой ранжирования интервальных параметров по степени их влияния на динамические показатели системы?

## 5. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ КОНТРОЛЯ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ВЕРХНЕГО ОПОРНОГО УЗЛА РАДИОТЕЛЕСКОПА НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

### 5.1. Схема измерений деформаций верхнего опорного узла.

Главным функциональным компонентом в составе системы контроля угловых и линейных деформаций опорного узла (ВОУ), несущим на себе контррефлектор (КР) радиотелескопа (РТ), который крепится с помощью четырех опор к несущей конструкции, является сам ВОУ, для опто – электронного следящего мониторинга деформаций которого строится система.

В модельном представлении ВОУ задается упругим стержнем жестко закрепленным одним концом в физическом центре главного рефлектора (ГР) в невозмущенном вертикальном положении совпадающим с радиооптической осью отъюстированного РТ, второй конец стержня несет модельную площадку, размещенную на стержне на уровне монтажной площадки ВОУ. На рисунке 5.1а., 5.1б с использованием указанного модельного представления ВОУ приведены схемы его деформации в угломестной плоскости при  $\Psi_{РТ}=90^0$  и  $\Psi_{РТ}=0^0$ .

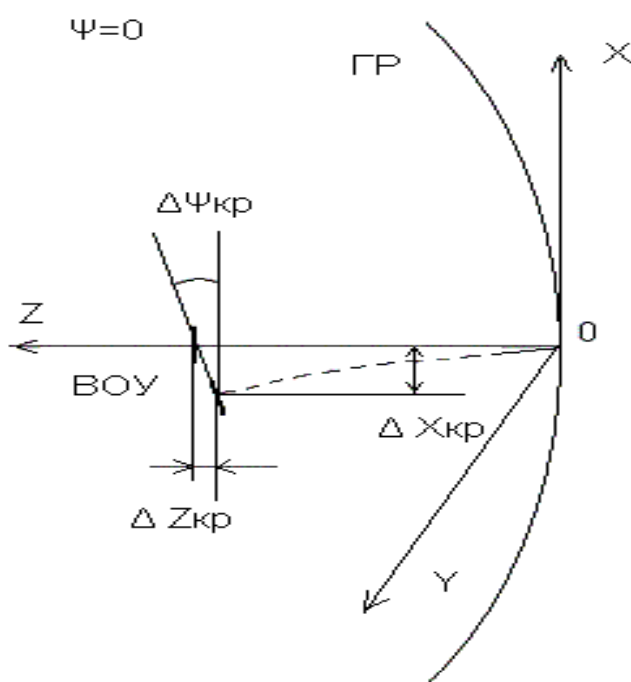
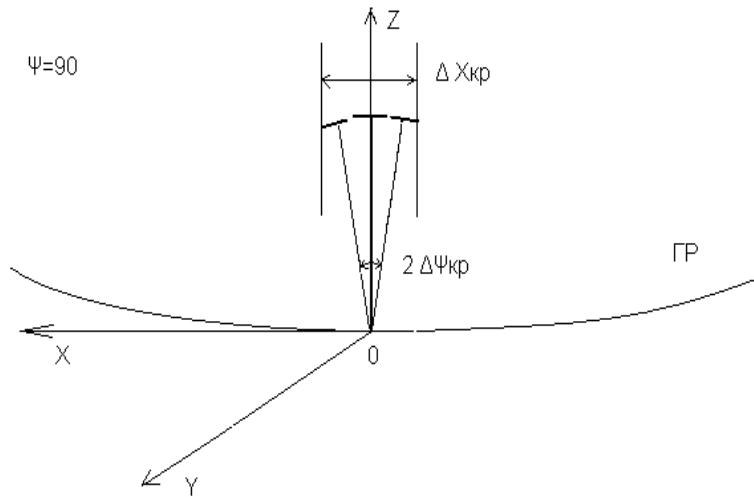


Рисунок 5.1а. Схема деформаций ВОУ РТ при  $\Psi_{РТ}=0^0$



**Рисунок 5.16.** Схема деформации ВОУ при  $\Psi_{РТ}=90^0$

По данным ЦНИИПСК для оценок максимальных линейных и угловых деформаций ВОУ РТ типа ТНА – 1500 в угломестной плоскости при  $\Psi_{РТ}=0^0$ , планарная модель деформации ВОУ, задаваемая в форме

$$\Delta x_{KP} = a_{x0} + a_{x1}z + a_{x2}z^2 \quad (5.1)$$

характеризуется параметрами  $a_{x0} = 0, a_{x1} = 0.002385, a_{x2} = 0.000012 \text{ м}^{-1}$ . Планарная модель вида (5.1) деформации ВОУ в угломестной плоскости при  $\Psi_{РТ}=90^0$  характеризуется параметрами  $a_{x0} = 0, a_{x1} = 0.001648, a_{x2} = 0 \text{ м}^{-1}$ , так что деформация ВОУ в отсутствие весового компонента является линейной. Деформация в коллимационной плоскости ВОУ при любых значениях  $\Psi_{РТ}$  не содержит весового компонента

$$\Delta y_{KP} = a_{y0} + a_{y1}z + a_{y2}z^2, \quad (5.2)$$

а потому характеризуется параметрами  $a_{y0} = 0, a_{y1} = 0.001454, a_{y2} = 0 \text{ м}^{-1}$ , значения которых оказались меньше по сравнению со значениями для модели (5.1) в угломестной плоскости.

Модели (5.1), (5.2) деформации ВОУ, при доступной измерению только координаты  $z$  обнаруживают необходимость контроля, как линейного смещения  $\Delta x_{KP}$ , так и углового  $\Delta \phi_{KP}$  в УМП, а также –  $\Delta y_{KP}$  и  $\Delta \alpha_{KP}$  в КП.

Для целей информационного обеспечения алгоритмов системы фокусно-угловой компенсации (СФУК) для целей динамической юстировки требуется измерение двух линейных перемещений и двух угловых в угломестной и коллимационной плоскостях соответственно  $\Delta x_{KP}, \Delta y_{KP}$  и  $\Delta \phi_{KP}, \Delta \alpha_{KP}$ , которые необходимо дополнить измерением линейного перемещения  $\Delta z_{KP}$  ВОУ.

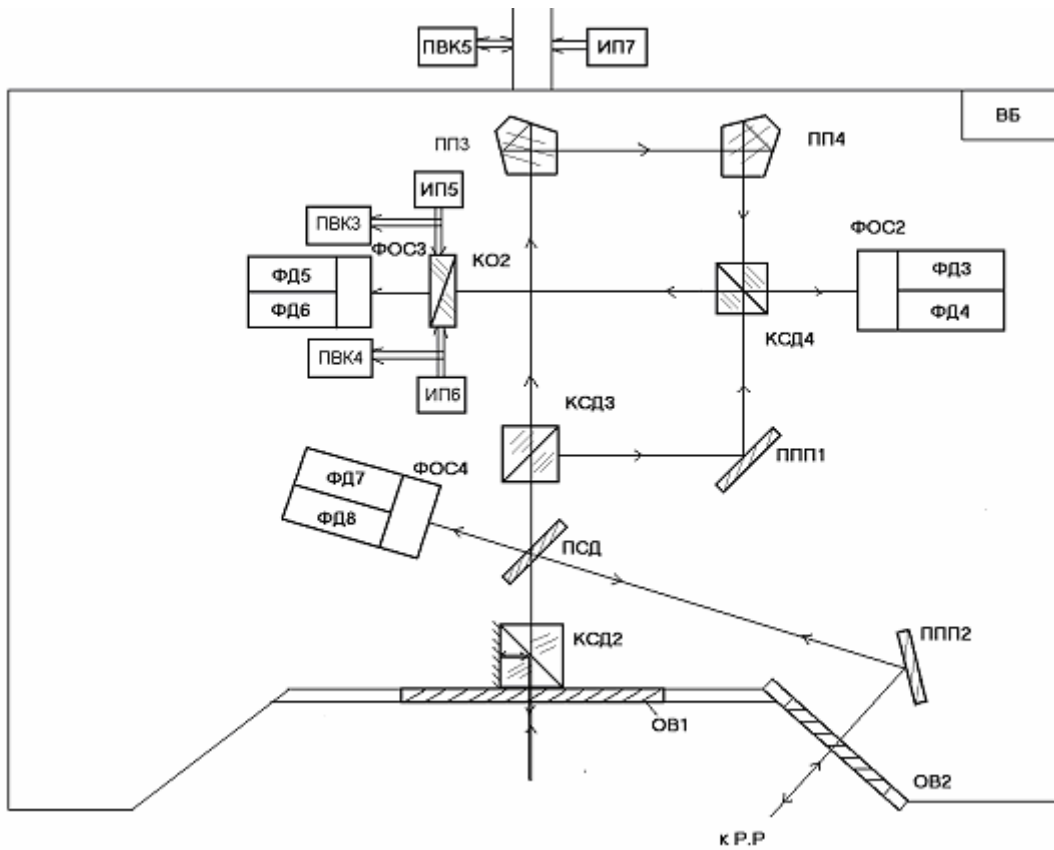


Рисунок 5.2а Оптическая схема верхнего блока

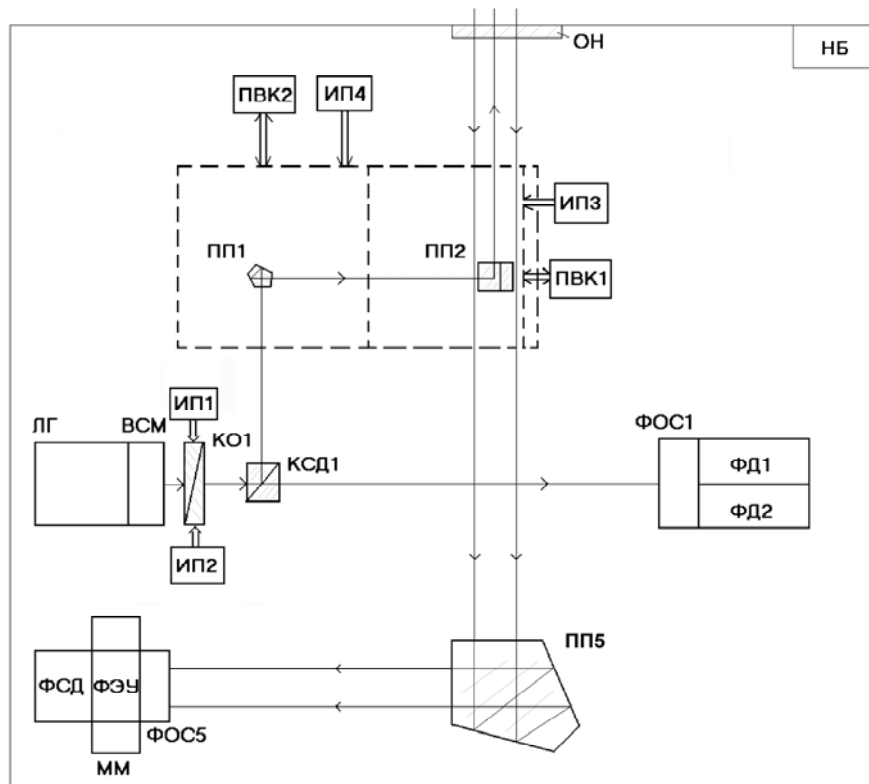


Рисунок 5.2б. Оптическая схема нижнего блока

Эта задача решается в технической среде системы контроля угловых и линейных деформаций СКУЛД ВОУ, использующей принцип фотоэлектрического следящего преобразования, при контроле перемещений  $\Delta x_{KP}$ ,  $\Delta y_{KP}$  и  $\Delta \phi_{KP}$ ,  $\Delta \alpha_{KP}$ , а также принцип фазовой лазерной дальнометрии, при контроле перемещения  $\Delta z_{KP}$  ВОУ. Оптическая схема СКУЛД приведена на рисунке 5.2а и рисунке 5.2б.

Рисунок 5.2а содержит оптическую схему верхнего блока (ВБ) СКУЛД, рисунок 5.2б оптическую схему нижнего блока (НБ). На оптических схемах рисунка 5.2а и рисунка 5.2.б приняты следующие обозначения: КСД1–КСД4 – кубики светоделительные; ПСД – пластина светоделительная; ППП1–ППП2 – плоскопараллельные пластины; ПП1–ПП5 – пентапризмы; ФОС1–ФОС5 – входные формирующие оптические системы; КО1–КО2 – компенсаторы оптические двухкоординатные; ФД1–ФД8 – фотодатчики линейных смещений в плоскости анализа принятого изображения с полудисковыми модуляторами; ЛГ – лазер газовый непрерывный (мощностью до 10 мВт; ВСМ – высокочастотный светомодулятор (частотой 755 мГц); ФЭУ – фотоэлектронный умножитель; ММ – магнетронный модулятор электронного потока ФЭУ (частотой 755.005 мГц); ФСД – фазовый светодальномер; ИП1–ИП7 – исполнительные электроприводы; ПВК1–ПВК5 – преобразователи вал-код (типа IRC–111); ОВ1–ОВ2 – окна оптических коммуникаций верхнего блока; ОН – окно оптических коммуникаций нижнего блока.

Каналы измерения линейных смещений ВОУ  $\Delta x_{KP}$ ,  $\Delta y_{KP}$  в угломестной и коллимационной плоскостях образованы следующими цепочками элементов приведенными на рис. 5.2а, 5.2.б схем: ЛГ – КО1 – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – ПСД – КСД3 – ПП4 – ПП5 – КСД4 – ФОС2 – ФД3 – ИП3 – ПВК1, последний в которой формирует измерение  $\hat{\Delta x}_{KP}$  перемещения  $\Delta x_{KP}$ ; ЛГ – КО1 – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – ПСД – КСД3 – ПП4 – ПП5 – КСД4 – ФОС2 – ФД4 – ИП4 – ПВК2, последний в которой формирует измерение  $\hat{\Delta y}_{KP}$  перемещение  $\Delta y_{KP}$ . Каналы измерения угловых смещений ВОУ  $\Delta \phi_{KP}$ ,  $\Delta \alpha_{KP}$  в угломестной и коллимационной плоскостях образованы цепочками, составленными из следующих элементов приведенных на рис. 5.2а, 5.2.б схем ЛГ – КО1 – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – ПСД – КСД3 – ППП1 – КСД4 – КО2 – ФОС3 – ФД5 – ИП5 – ПВК3, при этом последний элемент цепочки формирует измерение  $\hat{\Delta \phi}_{KP}$  угловой деформации  $\Delta \phi_{KP}$ ; ЛГ – КО1 – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – ПСД – КСД3 – ППП1 – КСД4 – КО2 – ФОС3 – ФД6 – ИП6 – ПВК4, при этом последний формирует измерение  $\hat{\Delta \alpha}_{KP}$  угловой деформации  $\Delta \alpha_{KP}$ .

Канал измерения линейной деформации  $\Delta z_{KP}$  ВОУ вдоль радиооптической оси РТ построен на принципе лазерной фазовой дальнометрии и составлен из следующих элементов схем (рисунок 5.2.а, 5.2.б): ЛГ – ВСМ – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – КСД2 – ОВ1 – ОН –

ПП6 – ФОС5 – ФЭУ – ММ – ФСД, последний с использованием показаний преобразователей ПВК1 и ПВК2 о линейных смещениях зондирующего лазерного луча относительно физического центра ГР РТ формирует измерения  $\Delta z_{KP}^{\wedge}$  деформации  $\Delta z_{KP}$ .

В состав СКУЛД входят две сервисные системы. Первая сервисная система осуществляет стабилизацию оси диаграммы направленности используемого лазера, в ее состав входят элементы: ЛГ – КО1 – КСД1 – ФОС1 – ФД1, ФД2 – ИП1, ИП2. Луч газового лазера, стабильное положение в пространстве которого обеспечивается двухкоординатным оптическим компенсатором КО1, формирует ось OZ измерительной системы координат, привязанной к физической вершине главного рефлектора. Эта ось, будучи коллинеарной с геометрической осью отъюстированного радиотелескопа, оказывается нежестко связанной с его вершиной, так как она, совпадая с оптической осью верхнего блока, оказывается привязанной к ВОУ. Это обстоятельство связано с тем, что ось совершая измеряемое перемещение в плоскости OXY, оказывается задействованной в измерении линейных деформаций верхнего опорного узла, на котором крепится контррефлектор РТ.

Вторая сервисная система осуществляет привязку верхнего блока к коллимационной плоскости ГР в отъюстированном состоянии РТ при развороте его в положение «в зенит». В состав системы входят элементы схем (рисунок 5.2.а, 5.2.б), образующих цепочку: ЛГ – КО1 – КСД1 – ПП1 – ПП2 – ОН – ОВ1 – КСД2 – ПСД – ППП2 – ОВ2 – РР (ретрорефлектор типа катафот, устанавливаемый на поверхности ГР в его угломестной плоскости) – ОВ2 – ППП2 – ПСД – ФОС4 – ФД7 – ИП7 – ПВК5.

Предметной областью иллюстрации оптоэлектронного мониторинга деформаций элементов металлоконструкций РТ являются фотоэлектрические следящие системы (ФЭСС КЛД, ФЭСС КУД), используемые в каналах измерения линейных смещений ВОУ  $\Delta x_{KP}$ ,  $\Delta y_{KP}$  и его угловых смещений  $\Delta \phi_{KP}$ ,  $\Delta \alpha_{KP}$ , дополненные сервисной фотоэлектрической следящей системой (ФЭСС ОДН) стабилизации оси диаграммы направленности (ОДН), используемого в составе СКУЛД ЛГ как источник возможных дополнительных ошибок проводимых СКУЛД измерений. Структурная схема вычлененной подсистемы СКУЛД приведена на рисунке 5.3а.

Схема обнаруживает наличие связей входов ФЭСС УД с сигналом ошибки ФЭСС ОДН с единичными коэффициентами передачи этих связей. Связи входов ФЭСС ЛД с ошибкой ФЭСС ОДН характеризуются коэффициентом, определяемым базовым расстоянием  $l_B$  ВОУ от геометрического центра ГР РТ.

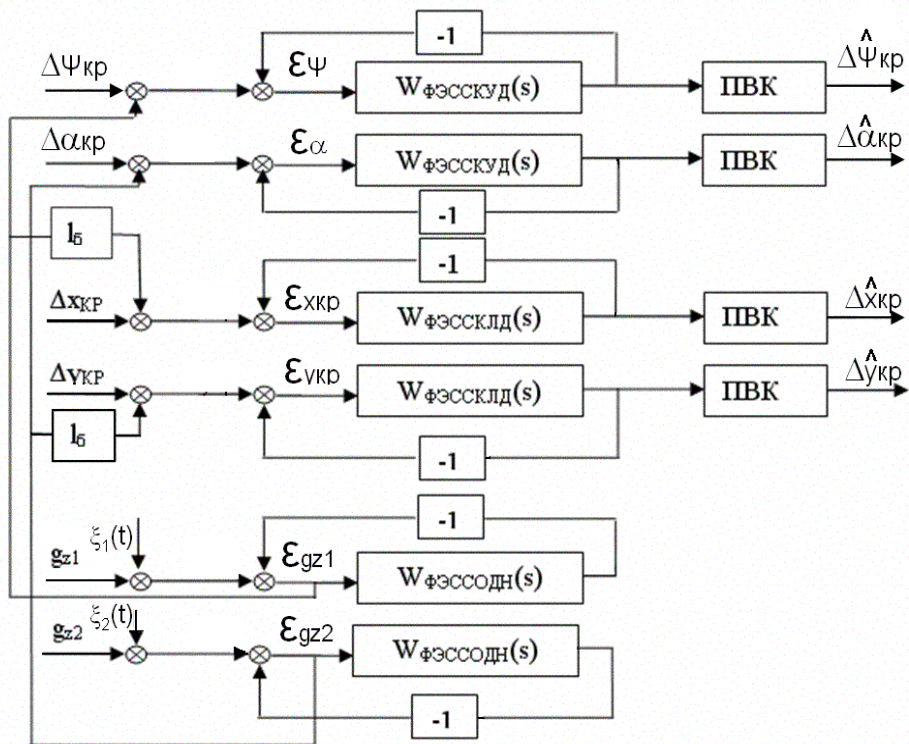
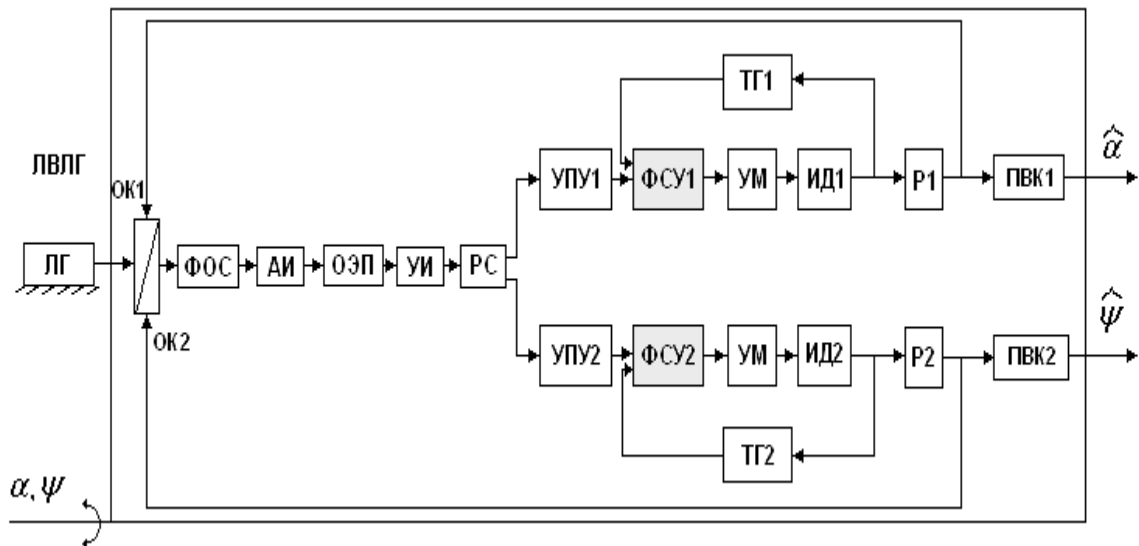


Рисунок 5.3а. Структурная схема СКУЛД ВОУ

Каждая из перечисленных двухканальных фотоэлектрических систем следящего оптоэлектронного мониторинга деформаций построена по унифицированной схеме с функционально однотипными компонентами с точностью до различий в построении оптико-механических схем оптических компенсаторов смещения изображения в фокальных плоскостях фотодатчиков следящих систем. Типовой состав двухканальной ФЭСС на рисунке 5.3б иллюстрируется системой контроля угловых деформаций ВОУ. Различие этих схем порождено большей детализацией с целью подготовки исходного состава ФЭСС к «задачам управления» ее динамическими свойствами. Так исполнительные приводы (ИП) представлены тремя компонентами – усилителем мощности (УМ), исполнительным двигателем (ИД) и редуктором (Р), тем самым сформировав точку съема скоростного сигнала с помощью тахогенератора (ТГ), а также предоставив разработчику формирователя сигнала управления (ФСУ) часть проблем возложить на УМ. Функциональные блоки: анализатор изображения (АИ), оптико-электронный преобразователь (ОЭП), избирательный усилитель (УИ), расщепитель сигнала (РС) по каналам отработки и каналные усилительно – преобразовательные устройства (УПУ) образуют фотодатчик (ФД) с электронными средствами обработки видеосигнала.



**Рисунок 5.36.** Функциональная схема двухканальной ФЭСС контроля угловых деформаций АОУ

ФЭССКУД, представленная схемой рисунок 5.36, изображена погруженной в верхний блок, который совместно с АОУ относительно оси  $OZ$  измерительной системы координат, формируемой стабилизированным в пространстве лучом газового лазера, под действием деформирующих факторов претерпевают нежелательные угловые деформации  $(\alpha, \psi)$ , оценки которых  $(\hat{\alpha}, \hat{\psi})$  формируются средствами следящего преобразования. В отличие от схемы рисунок 5.2а, которая является оптико – механической, схема рисунок 5.36 является опто – электро – механической.

Таким образом, *проблема информационного обеспечения динамической юстировки РОС РТ в системной постановке приводит к необходимости синтеза алгоритмов управления многомерной связанной системой, совокупный порядок которой не ниже восемнадцатого*, вход и выход которой характеризуется размерностью равной шести. Алгоритмы управления должны учитывать интервальность функциональных компонентов системы, интервальность модельных представлений возмущающих факторов, приводящих к деформациям металлоконструкций РТ и обеспечивать при этом *максимальную достижимость всеволновости и всепогодности эксплуатации большого полноповоротного радиотелескопа типа ТНА – 1500.*

## **5.2. Формирование требований к динамическим свойствам ФЭСС системы контроля угловых и линейных деформаций АОУ полноповоротного радиотелескопа типа ТНА-1500**

В главе первой сформирован полный состав факторов и оценена факторная составляющая  $\Delta_{\phi}$  совокупной погрешности наведения РТ на ОРАН, при которых гарантируется требуемое качество получаемого изображения ОРАН, при данной длине волны излучения. Так же в этот набор факторов включены ошибки формирования оценок угловых и линейных деформаций

ВОУ как для угломестной, так и для коллимационной плоскостей. Для формирования требований к динамическим системам необходимо провести дополнительную декомпозицию общей факторной погрешности  $\Delta_\phi$  по локальным факторам, возникающим при измерении. полная ошибка ФЭСС в составе СКУЛД;

- погрешность преобразования вал-код, при формировании пользовательской оценки  $\Delta(\hat{*})_{кр}$  измеряемой деформации  $\Delta(\hat{*})_{кр}$ ;
- угловая нестабильность зондирующего лазерного луча на выходе нижнего блока, величина которой определяется ошибкой ФЭСС стабилизации ОДН (ФЭСС СОДН), осуществляющей стабилизацию в пространстве оси диаграммы направленности ЛГ;
- ошибка фотоэлектрического следящего измерительного преобразования (ФЭСС СКУЛД) линейных и угловых деформаций;
- фактор не учитываемых возмущений.

Если воспользоваться гипотезой равновесности факторов, их стохастической независимости, то любая ФЭСС должна характеризоваться среднеквадратической ошибкой, не превышающей величины

$$\Delta_{ФЭСС} = \frac{\Delta_\phi}{\sqrt{n_{\phi СКУЛД}}} = 0.5\Delta_\phi. \quad (5.3)$$

В свою очередь полная ошибка  $\Delta_{ФЭСС}$  каждой из входящих в СКУЛД ФЭСС имеет своими компонентами статическую ошибку  $\varepsilon_{ст}$ , кинетическую ошибку  $\varepsilon_k$  и динамическую ошибку  $\varepsilon_d$ . Величина статической ошибки ФЭСС, которая использует в своем составе ПДМ для анализа смещения принятого изображения относительной оптической оси, определяется эксцентриситетом установки ножа обтюратора и фокусным расстоянием формирующей оптической системы (ФОС), устанавливаемой на входе ПДМ.

Таблица 5.1.

### Величина среднеквадратической ошибки ФЭСС СКУЛД

$\Delta$ $\lambda$ (мм)	ТНА-400-ДГР-32 метра			ТНА-1500-ДГР-64 метра		
	$[\Delta_{ФЭСС}]$ (угл. мин)	$\Delta_{0ФЭСС}$ (угл. мин)	$\Delta\Delta_{ФЭСС}$ (угл. мин)	$[\Delta_{ФЭСС}]$ (угл. мин)	$\Delta_{0ФЭСС}$ (угл. мин)	$\Delta\Delta_{ФЭСС}$ (угл. мин)
100	[0.1545; 0.3865]	0.2705	0.116	[0.0775; 0.1935]	0.1355	0.058
75	[0.116; 0.29]	0.203	0.087	[0.058; 0.145]	0.01015	0.0435
50	[0.0755; 0.192]	0.135	0.057	[0.0385; 0.0965]	0.0675	0.029
30	[0.0465; 0.116]	0.0815	0.0345	[0.023; 0.058]	0.0405	0.0175
20	[0.031; 0.0775]	0.054	0.0235	[0.0155; 0.0385]	0.027	0.0115
10	[0.0155; 0.0385]	0.027	0.0115	[0.008; 0.0195]	0.014	0.0055

Кинетическая ошибка  $\varepsilon_k$  наблюдается в системах, которые осуществляют измерение деформаций ВОУ в угломестной плоскости. Динамическая ошибка  $\varepsilon_d$  в основном порождается ветровой составляющей деформации ВОУ, которая, как обнаружено в разделе 1 в медианном представлении может быть эквивалентирована гармоническим входным воздействием. Для целей количественных оценок перечисленных составляющих ошибок ФЭСС на первом шаге ее проектирования воспользуемся гипотезой равновесности и стохастической независимости, что позволяет для них записать

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_k = \varepsilon_d = \frac{\Delta_{\text{ФЭСС}}}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_\phi}{2\sqrt{3}} \quad (5.4)$$

Следует заметить, что основные требования к динамическим свойствам ФЭСС, используемых в составе СКУЛД, являются требования к показателям качества систем в установившемся режиме. Это вызвано тем, что СКУЛД в составе СЭКД используется постоянно в процессе эксплуатации РТ и переходные процессы в системах имеют место только при включении, и завершаются переходом ФЭСС из режима захвата в режим сопровождения (позиционирования), который является для них основным. Таким образом, все переходные процессы завершаются на этапе подготовки РТ к эксплуатации.

Процедуры синтеза опираются на возможности модального управления, поэтому полученные значения компонентов полной ошибки проектируемой ФЭСС должны быть корректно отображены на параметры модальной модели, конструируемой для каждого канала ФЭСС в классе распределения мод полиномиальных динамических модальных моделей (ПДММ), показатели которых параметризованы характеристической частотой  $\omega_0$ . Таким образом, основным параметром модальной модели в классе ПДММ является ее характеристическая частота  $\omega_0$ , которая оценивается с помощью следующего алгоритма, которому придан номер 5.1.

### Алгоритм 5.1

1. Задать диапазон длин волн излучения  $\lambda$ , в котором средствами СЭКД и СФУК должна обеспечиваться требуемая ошибка наведения РТ на ОРАН;
2. Рассчитать по описанной выше схеме для каждого системного канала составляющую  $\Delta_{\text{ФЭСС}}$  полной погрешности СКУЛД;
3. Выбрать тип полиномиальной динамической модальных модели, распределение мод которой задает модальную модель (ММ) в процедуре синтеза закона модального управления;
4. Разбить с использованием гипотезы равновесности и стохастической независимости ошибку  $\Delta_{\text{ФЭСС}}$  на допустимые статическую  $\varepsilon_{cm}$ , кинетическую  $\varepsilon_k$  и динамическую составляющие  $\varepsilon_d$ ;
5. Оценить значения характеристических частот  $\omega_{0k}$  и  $\omega_{0d}$  выбранной ММ на основе выполнения условия

$$\omega_{0k} = \arg\{\varepsilon_k(\omega_0) \leq \varepsilon_{k \text{ don}}\} \quad (5.5)$$

$$\omega_{0d} = \arg\{\varepsilon_d(\omega_0 = \omega_{0d}) \leq \varepsilon_{d \text{ don}}\} \quad (5.6)$$

6. Сравнить полученные значения характеристических частот (5.5), (5.6) и если эти частоты приблизительно равны, то для формирования модальной модели принять характеристическую частоту равную

$$\omega_0 = \max(\omega_{0k}, \omega_{0d}), \quad (5.7)$$

и перейти к п.7. алгоритма. Если полученные частоты различаются значительно, то перейти к п.4 алгоритма, отказавшись от гипотезы равновесности и назначив веса соответствующие отношению частот  $\omega_{0k}$  и  $\omega_{0d}$ ;

7. Передать выбранную полиномиальную динамическую модель с рассчитанной характеристической частотой  $\omega_0$  разработчику алгоритма модального управления медианной версии системы для формирования матричных компонентов векторно-матричного представления модальной модели.

Проиллюстрируем процесс выбора характеристической частоты полиномиальной динамической модели на примере ФЭСС измерения угловых деформаций в угломестной плоскости. Тогда, следуя *алгоритму 5.1*:

1. Выберем диапазон длин волн излучения РТ с диаметром раскрыва ГР 64 метра, задаваемый неравенством  $\lambda \geq 50$  мм;

2. С помощью таблицы 5.1 оценим составляющую  $\Delta_{\Phi ЭСС}$  полной погрешности СКУЛД, которая составляет величину  $\Delta_{\Phi ЭСС} = 0.0405$  угл.мин = 2.43 угл. сек;

3. Выберем в качестве полиномиальной динамической модели модель с распределением мод Баттерворта (РМБ) четвертого порядка, динамические свойства которого, параметризованном характеристической частотой  $\omega_0$  виде приведены в таблице П 6.1 и таблице П6.3 приложения 6;

4. Разобьем ошибку  $\Delta_{\Phi ЭСС}$  на допустимые статическую  $\varepsilon_{ст}$ , кинетическую  $\varepsilon_k$  и динамическую составляющие  $\varepsilon_d$ , которые составляют величину  $\varepsilon_{ст доп} = \varepsilon_{k доп} = \varepsilon_{d доп} = 1.403$  угл. сек. Значение статической ошибки  $\varepsilon_{ст доп}$ , фокусное расстояние  $f$  формирующей оптической системы ФОС 3 (см. рис.5.2а) и эксцентриситет установки ножа обтюратора ПДМ  $\Delta_{ЭПДМ}$  связаны соотношением  $\varepsilon_{ст доп} = (\Delta_{ЭПДМ} f^{-1}) рад = 2.0626 * 10^5 (\Delta_{ЭПДМ} f^{-1}) угл.сек$ , которое использовать для оценки фокусного расстояния, для которого получим  $f = 2.0626 * 10^5 (\Delta_{ЭПДМ} \varepsilon_{ст доп}^{-1}) = 1600$  мм при  $\Delta_{ЭПДМ} = 0.015$  мм (технологически допустимым является величина  $\Delta_{ЭПДМ} = 0.010$  мм);

5. Произведем оценку значений  $\omega_{0k}$  и  $\omega_{0d}$  характеристической частоты. В соответствии с таблицей П6.1 скорость изменения входного воздействия, кинетическая ошибка и характеристическая частота связаны выражением

$$\omega_{0k} = \frac{\dot{g}_{\phi \max}}{0.385 \varepsilon_k}, \quad \text{где } \dot{g}_{\phi \max} = 7 \text{ (угл. сек.) } С^{-1} \text{ максимальная скорость весовой}$$

составляющей угловой деформации ВОУ при развороте по углу места РТ со скоростью 1 град  $С^{-1}$ , что при  $\varepsilon_k = \varepsilon_{k доп} = 1.403$  угл.сек для характеристической

частоты  $\omega_{0к}$  дает значение  $\omega_{0к}=13C^{-1}$ ; Оценку  $\omega_{0д}$  характеристической частоты  $\omega_0$  осуществим в экспресс – форме на основе использования эквивалентного гармонического представления стохастической составляющей ветровой деформации ВОУ, для которой в силу таблицы П6.1 для РМБ четвертого порядка оказывается справедливой запись  $\omega_{0д} = \frac{2.6 \omega_{\varepsilon}}{\delta} = \frac{2.6 \omega_p 0.2 g_{\phi \max}}{3 \varepsilon_{\delta}}$ , подстановка в которую значений угловых ветровых деформаций ВОУ из таблицы П2.2 для  $\omega_{0д}$  дает значение  $\omega_{0д} = \frac{2.6 \cdot 5 \cdot 0.2 \cdot 340}{3 \cdot 1.403} = 210C^{-1}$ ;

6. Производим сравнение значения оценок характеристических частот  $\omega_{0к}$  и  $\omega_{0д}$ , обнаруживаем заметное их расхождение, отказываемся от гипотезы равновесности  $\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_{\delta}$ , организуем итерационную процедуру п.4–п.6. в теле алгоритма, получаем значение  $\omega_0 = 150.63c^{-1}$ ;

7. Передаем полиномиальную динамическую модель с распределением мод Баттерворта четвертого порядка, обладающую характеристической частотой  $\omega_0 = 150.63c^{-1}$ , для синтеза алгоритмов управления медианной версией ФЭСС, которая в случае их реализации будет обладать медианными показателями качества:

- перерегулирование  $\sigma \leq 11\%$ ;
- время переходного процесса  $t_n \leq 0.05c$ ;
- добротность по скорости  $D=58$  с-1;
- полоса пропускания на уровне относительной частотной ошибки  $\delta_{\phi}=0.0863 \Delta\omega = 5c^{-1}$ ;

Аналогично, в соответствии с алгоритмом 5.1. и данными ЦНИИ ПСК деформаций ВОУ выбраны характеристические частоты полиномиальной динамической модели для ФЭСС измерения угловых деформаций ВОУ в коллимационной плоскости, а также каналов ФЭСС измерения линейных деформаций в УМП и КП.

$$\omega_{0_{ум\ у\delta}} = 150.63c^{-1}, \omega_{0_{кп\ у\delta}} = 132.99c^{-1}, \omega_{0_{ум\ л\delta}} = 150.63c^{-1}, \omega_{0_{кп\ л\delta}} = 132.99c^{-1}$$

С целью формирования требований к ФЭСС ОДН на рисунке 5.4. приведена кривая планарной девиации ОДН газового лазера типа ОКГ – 13 мощностью, удовлетворяющей требованиям к отношению сигнал/шум для построения СКУЛД той же длины волны излучения  $\lambda = 0.6328$  мкм.

Статистическая обработка этой кривой дала следующие результаты:

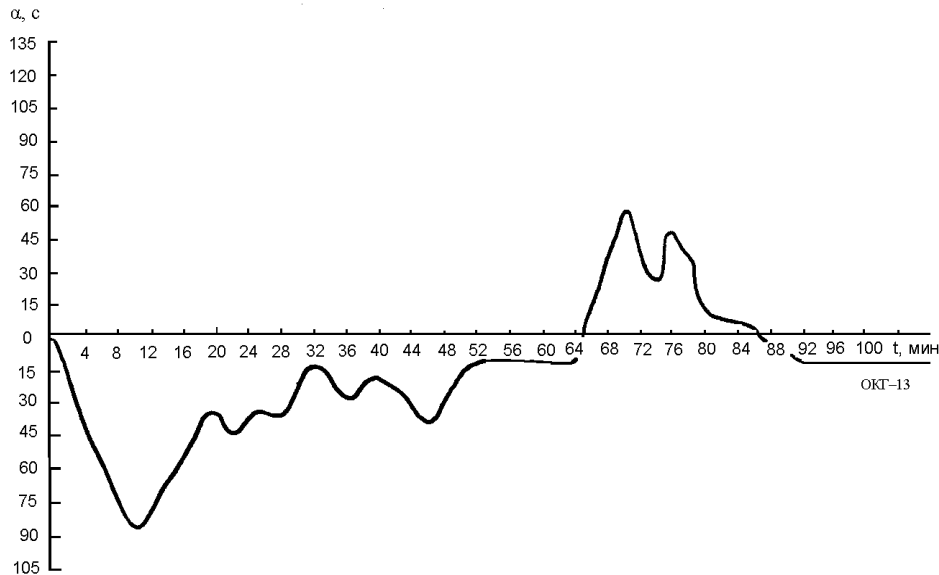
- среднеквадратическое отклонение  $\sigma_{\zeta_{ОДН}} = 24$  угл.сек.;
- дисперсия  $D_{\zeta_{ОДН}} = \sigma_{\zeta_{ОДН}}^2 = 576$  (угл.сек)<sup>2</sup>;
- интервал корреляции  $\tau_{ОДН} = 30$  сек.

Предполагается, что сигнал является стохастическим типа окрашенный экспоненциально коррелированный шум, который может быть сформирован из

стационарного в широком смысле стохастического сигнала типа “белый шум”

интенсивностью  $N = \frac{2D_{\varepsilon \text{ ОДН}}}{\Omega_{\text{ОДН}}} = 35942 \text{ (угл.сек)}^2 \text{С}^{-1}$  с помощью

апериодического фильтра первого порядка с эффективной полосой  $\Omega_{\text{ОДН}} = 0.0032 \text{ с}^{-1}$ .



**Рисунок 5.4.** Кривая девиации ОДН газопого лазера ОКГ – 13

На кривой процесса девиации ОДН ЛГ четко выражены участки с постоянной скоростью  $\dot{g}_{\text{ОДН max}} = 0.194 \text{ угл.сек.С}^{-1}$ . Тогда следуя алгоритму 5.1, дополненному аналитическим выражением для дисперсии ошибки в полиномиальной динамической модальной модели с распределением мод Баттерворта четвертого порядка

$$\overline{D_{\varepsilon}} = \frac{4.567 \overline{\omega_0}^3 + 5.114 \overline{\omega_0}^2 + 3.259 \overline{\omega_0} + 1}{\overline{\omega_0}^4 + 2.6 \overline{\omega_0}^3 + 3.4 \overline{\omega_0}^2 + 2.6 \overline{\omega_0} + 1}, \quad (5.8)$$

записанной для относительной дисперсии ошибки  $\overline{D_{\varepsilon}} = D_{\varepsilon} / D_{\varepsilon \text{ ОДН}}$  при экспоненциально окрашенном внешнем воздействии и относительной характеристической частотой  $\overline{\omega_0} = \omega_0 / \Omega_{\text{ОДН}}$ , при полной допустимой ошибке  $\varepsilon \leq 2.43 \text{ угл.сек.}$  для длины волны излучения радиотелескопа  $\lambda = 30 \text{ мм}$ , можно оценить значение характеристической частоты составляющей величину  $\omega_0 = 6.85 \text{ с}^{-1}$ , которая гарантирует достижение полной ошибки ФЭСС стабилизации ОДН равной  $\varepsilon_{\text{ОДН}} = 1.9726 \text{ угл.сек}$  с компонентами

$\varepsilon_{\text{стОДН}} = 1.403 \text{ угл.сек.}$   $\varepsilon_{\text{кОДН}} = 0.12125 \text{ угл.сек.}$ ,  $\varepsilon_{\sigma} = \sigma(\varepsilon_{\text{ОДН}}) = 1.908 \text{ угл.сек.}$

Полученные результаты по формированию требований к динамическим свойствам ФЭСС СКУЛД, а также значения характеристических частот их

модельных представлений в классе полиномиальных динамических моделей с распределением мод Баттерворта четвертого порядка сведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

### Требуемые динамические параметры ФЭСС

ФЭСС стабилизации ОДН		ФЭСС УД		ФЭСС ЛД	
Угломестный канал (угл.сек)	Коллимационный канал (угл.сек)	Угломестный канал (угл.сек)	Коллимационный канал (угл.сек)	Угломестный канал (мм)	Коллимационный канал (мм)
$\varepsilon_{ст}=1.403$	$\varepsilon_{ст}=1.403$	$\varepsilon_{ст}=1.403$	$\varepsilon_{ст}=1.403$	$\varepsilon_{ст}=0.167$	$\varepsilon_{ст}=0.167$
$\varepsilon_{д}=1.908$	$\varepsilon_{д}=1.908$	$\varepsilon_{д}=1.9841$	$\varepsilon_{д}=1.9841$	$\varepsilon_{д}=0.237$	$\varepsilon_{д}=0.237$
$\varepsilon_{к}=0.12125$	$\varepsilon_{к}=0.12125$	$\varepsilon_{к}=0.1209$	–	$\varepsilon_{к}=0.0144$	–
перерегулирование $\sigma = 5\%$					
$\omega_0=6.85 \text{ C}^{-1}$	$\omega_0=6.85 \text{ C}^{-1}$	$\omega_0=150.6 \text{ C}^{-1}$	$\omega_0=132.9 \text{ C}^{-1}$	$\omega_0=150.6 \text{ C}^{-1}$	$\omega_0=132.9 \text{ C}^{-1}$

Приведенные в таблице 5.2. значения составляющих ошибок, а также характеристических частот полиномиальных динамических моделей с распределением мод Баттерворта разрабатываемых каналов ФЭСС СКУЛД следует рассматривать как медианные.

### 5.3. Интервальное модельное представление исходных функциональных компонентов ФЭСС СКУЛД

Предметом настоящего параграфа являются построение *интервальных модельных представлений исходных функциональных компонентов* всех ФЭСС входящих в систему контроля угловых и линейных деформаций, дополненную ФЭСС стабилизации ОДН ЛГ в соответствии с оптическими схемами их построения (рисунок 5.2.а, 5.2.б), функциональными схемами рисунок 5.3а и рисунок 5.3б с учетом условий всесезонной эксплуатации этих ФЭСС, а также с целью унификации модельного представления элементов ФЭСС.

Основными функциональными компонентами всех каналов ФЭСС, входящих в состав СКУЛД являются, как это видно из схем рисунок 5.2.а, 5.2.б, и 5.3б являются фотодатчики (ФД), формирующие электрические видеосигналы; устройства обработки видеосигнала (УОВС), которые видны на рисунке 5.3.б, а также исполнительные электроприводы (ИП), осуществляющие следящие перемещения элементов оптических компенсаторов (КО).

Типовой состав фотодатчика включает входную оптику, оптический компенсатор, анализатор принятого изображения контрольного элемента, формирующий электрический видеосигнал, в качестве которого во всех каналах СКУЛД использован полудисковый модулятор (ПДМ), вращение ножа обтюлятора которого со стабильной скоростью обеспечивается синхронным гистерезисным двигателем кинематически связанным единым валом с генератором, формирующим ортогональные гармонические сигналы, используемые для расщепления векторного видеосигнала на каналные компоненты соответственно в угломестной и коллимационной плоскостях.

Существенной особенностью всех ФЭСС СКУЛД, как систем пространственного слежения, является ограниченность апертуры фотодатчиков, которые в разрабатываемой аппаратуре унифицированы и в угловой мере не превышают трех угловых минут. Выбор оптических компенсаторов, входящих в состав ФД определяются видом деформации (линейной и угловой), а также максимальными значениями этих деформаций. Структурно ФД включается в канал ошибки слежения в качестве первого элемента ее преобразования в сигнал управления исполнительным электроприводом. Аналитически ФД задается нелинейной функцией

$$u_{\varepsilon}(t) = f(\varepsilon(t)); f(0) = 0; \quad (5.9)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) \quad (5.10)$$

В соотношениях (5.9), (5.10)  $\varepsilon$ ,  $g$ ,  $y$  – соответственно ошибка рассогласования ФЭСС, вектор задающего воздействия (измеряемой деформации), вектор выхода (слеящее измерение измеряемой деформации),  $y, g, \varepsilon, \in R^m (m=2)$ . Нелинейная вектор – функция  $f(\varepsilon(t))$  в описании (5.10) фотодатчика ФЭСС составлена из его нелинейной пеленгационной характеристики и алгоритма, описывающего процесс расщепления сигнала общего тракта по канальным компонентам, образующим вектор  $u_{\varepsilon}$ . Для полного описания ФД соотношение (5.9) необходимо дополнить условием

$$\varepsilon(t) \in S_{\varepsilon}, \quad (5.11)$$

выполняемым для режима сопровождения. В (5.11)  $S_{\varepsilon}$  – сфера, задаваемая в форме

$$S_{\varepsilon} : \|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon_3\|, \forall t. \quad (5.12)$$

где  $\|\varepsilon(t)\|$  – норма вектора ошибки  $\varepsilon(t)$ ,  $\|\varepsilon_3\|$  – значение нормы вектора ошибки ФЭСС, при котором происходит переход от режима захвата к режиму сопровождения (слежения). Параметры сферы (5.12) в дальнейшем используются при интервальном модельном представлении соотношения (5.9). Построение интервально линейризованного модельного представления исходного нелинейного описания (5.9) ФД произведем в полном соответствии с положениями, разработанными в параграфе 2.4, использование которых позволяет сконструировать интервально линейризованное векторно-матричное представление нелинейной характеристики (5.9), которое записывается в форме

$$u_{\varepsilon}(t) = [K_{\varepsilon}] \varepsilon(t). \quad (5.13)$$

Задача решается в унифицированной обобщенной форме. Пеленгационная характеристика ФД  $u_{\varepsilon} = f(\varepsilon)$ , может быть записана в покоординатной форме  $\begin{bmatrix} u_{\varepsilon 1} \\ u_{\varepsilon 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\varepsilon) \\ f_2(\varepsilon) \end{bmatrix}$ , скалярные элементы которой формируются в силу соотношений

$$u_{\varepsilon 1} = f_1(\varepsilon) = u_{\|\varepsilon\|} \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon\|} \quad (5.14)$$

где  $\|\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ . В приведенных выражениях модульный компонент  $u_{\|\varepsilon\|}$  представляется степенным рядом с двумя членами в форме

$$u_{\|\varepsilon\|} = \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \pi - \frac{1}{3!} \frac{\|\varepsilon\|^3}{\varepsilon_m^3} \pi^3. \quad (5.15)$$

где  $\frac{\sqrt{6}}{\pi} \varepsilon_m$  – размер апертуры ФД.

Выражение (5.14) с учетом (5.15) получает следующее представление

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= U_m \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \pi - \frac{1}{3!} \frac{\|\varepsilon\|^3}{\varepsilon_m^3} \pi^3 \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \|\varepsilon\| & \|\varepsilon\| \end{bmatrix}^T = \\ &= \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3!} \frac{\pi^2}{\varepsilon_m^2} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \|\varepsilon\|^2 \\ \varepsilon_2 \|\varepsilon\|^2 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left( I - \frac{1}{3!} \frac{\pi^2}{\varepsilon_m^2} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{bmatrix} \right) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left( I - \frac{1}{3!} \frac{\pi^2}{\varepsilon_m^2} \|\varepsilon\|^2 \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1^2}{\|\varepsilon\|^2} & \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\|\varepsilon\|^2} \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\|\varepsilon\|^2} & \frac{\varepsilon_2^2}{\|\varepsilon\|^2} \end{bmatrix} \right) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Введем обозначения  $\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon\|} = \cos \varphi$ , а  $\frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon\|} = \sin \varphi$ , которые позволяют выражение (5.16) переписать в виде

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \left\{ \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left( I - \frac{1}{3!} \frac{\pi^2}{\varepsilon_m^2} \|\varepsilon\|^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \frac{1}{2} \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \sin 2\varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \right) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left\{ \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \cos^2 \varphi & -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \sin 2\varphi \\ -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \sin 2\varphi & 1 - \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

**Интервальное представление  $f(\varepsilon)$  строится на интервальных значениях тригонометрических функций при изменении переменной  $\varphi$  в пределах от 0 до  $+2\pi$  и использовании правил интервальной арифметики в результате чего получаем линейное интервально линеаризованное векторно-матричное представление пеленгационной характеристики ФД (5.13) с интервальной матрицей  $[K_\varepsilon] = \begin{bmatrix} [K_{\varepsilon_{11}}] & [K_{\varepsilon_{12}}] \\ [K_{\varepsilon_{21}}] & [K_{\varepsilon_{22}}] \end{bmatrix}$ . Граничные (угловые) значения элементов**

интервальной матрицы  $[K_\varepsilon]$  находятся в силу следующих соотношений

$$[K_\varepsilon]_{ij} = [\underline{K}_{\varepsilon ij}, \overline{K}_{\varepsilon ij}], \quad i, j = 1, 2,$$

$$\underline{K}_{\varepsilon 11} = \min_{\varphi, \left(\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}\right)} \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \cos^2 \varphi \right\} = \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon_3\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \right\},$$

$$\overline{K}_{\varepsilon 11} = \max_{\varphi, \left(\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}\right)} \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \cos^2 \varphi \right\} = \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m},$$

$$\overline{K}_{\varepsilon 12} = \max_{\varphi, \left(\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}\right)} \left( -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \sin 2\varphi \right) \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} = \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon_3\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m},$$

$$\underline{K}_{\varepsilon 12} = -\overline{K}_{\varepsilon 12} \quad \underline{K}_{\varepsilon 21} = \underline{K}_{\varepsilon 12}, \quad \overline{K}_{\varepsilon 21} = \overline{K}_{\varepsilon 12}, \quad \overline{K}_{\varepsilon 22} = \overline{K}_{\varepsilon 11} \quad \underline{K}_{\varepsilon 22} = \underline{K}_{\varepsilon 11},$$

Введем в рассмотрение оценки относительной интервальности интервальной матрицы  $[K_\varepsilon]$ , для чего представим ее в форме

$$[K_\varepsilon] = K_{\varepsilon 0} + [\Delta K_\varepsilon], \quad (5.18)$$

где  $K_{\varepsilon 0}$ ,  $[\Delta K_\varepsilon]$  – медианный и интервальный компоненты  $[K_\varepsilon]$ ,

$$K_{\varepsilon 0} = 0,5(\underline{K}_\varepsilon + \overline{K}_\varepsilon) = \frac{U_m \pi}{\varepsilon_m} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$[\Delta K_\varepsilon] = \frac{u_m \pi}{\varepsilon_m} \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \\ -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & -\frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 & \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Оценка относительной интервальности  $\delta_I K_\varepsilon = \frac{\|[\Delta K_\varepsilon]\|}{\|K_{\varepsilon 0}\|}$ , если воспользоваться столбцовыми нормами матриц  $K_{\varepsilon 0}$  (5.19) и  $[\Delta K_\varepsilon]$  (5.20), функция  $\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}$  принимает вид

$$\delta_I K_\varepsilon = \frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.21)$$

Значения  $\delta_I K_\varepsilon$  в функции от  $\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}$  (5.21) для  $0 \leq \frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m} \leq \frac{\|\varepsilon_3\|}{\varepsilon_m}$ , где  $\frac{\|\varepsilon_3\|}{\varepsilon_m}$  положено 0.75, приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3.

Значения  $\delta_I K_\varepsilon$  в функции от  $\|\varepsilon\|/\varepsilon_m$

$\ \varepsilon\  / \varepsilon_m$	0	0.166	0.25	0.333	0.5	0.666	0.75
$\frac{1}{6} \pi^2 \left( \frac{\ \varepsilon\ }{\varepsilon_m} \right)^2$	0	0.046	0.104	0.183	0.411	0.73	0.926
$K_{\varepsilon^0} \frac{\varepsilon_m}{U_m \pi} = 1 - \frac{1}{12} \pi^2 \left( \frac{\ \varepsilon\ }{\varepsilon_m} \right)^2$	1	0.977	0.948	0.909	0.794	0.635	0.537
$\delta_{K\varepsilon} \left( \ \varepsilon\  / \varepsilon_m \right)$	0	0.047	0.11	0.201	0.518	1.15	1.645

Кривая этой зависимости представлена на рисунке 5.5.

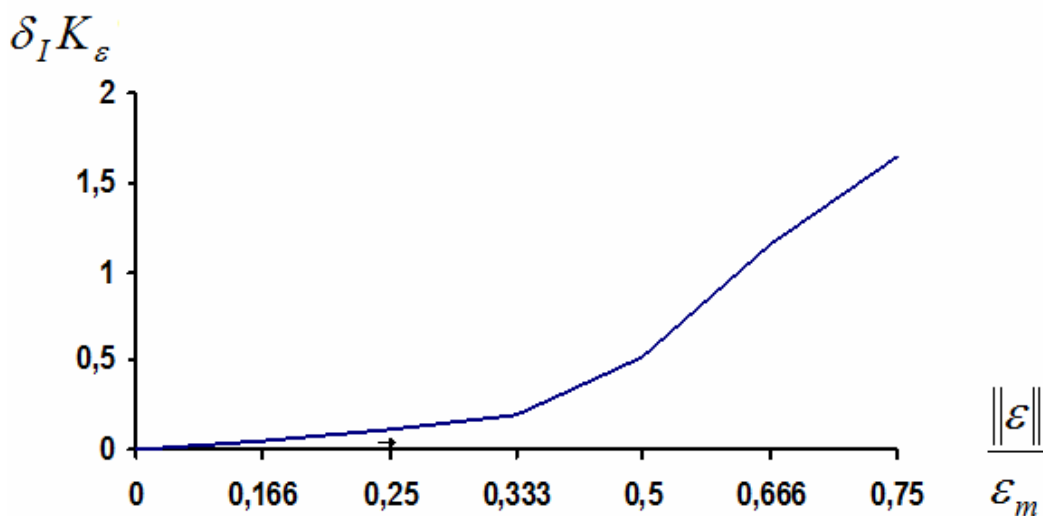


Рисунок 5.5. Значение  $\delta_I K_\varepsilon$  в функции от  $\frac{\|\varepsilon\|}{\varepsilon_m}$

С уменьшением нормы  $\|\varepsilon\|$  ошибки слежения ФЭСС уровень интервальности представления (5.14) пеленгационной характеристики падает, в окрестности точки  $\varepsilon = 0$  матрица  $K_\varepsilon$  перестает быть интервальной и при этом становится диагональной.

ФД всех ФЭСС унифицированы и характеризуются значением  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_m = 8.7 \cdot 10^{-4}$  рад, а также максимальным значением напряжения  $U_m = 4.14$  В.

Параметры пеленгационной характеристики ФД позволили в силу (5.19) вычислить значения компонентов матрицы  $[K_\varepsilon]$  в функции от  $\|\varepsilon\|/\varepsilon_m$ , которые сведены в таблицу 5.4.

Таблица 5.4

**Значения компонентов матрицы  $[K_\varepsilon]$  в функции от  $\|\varepsilon\|/\varepsilon_m$**

$\ \varepsilon\ /\varepsilon_m$	0	0.166	0.25	0.333	0.5	0.666	0.75
$ \Delta K_{\varepsilon 12}  =  \Delta K_{\varepsilon 21} $ (В/рад)	0	69.47	157.06	276.37	620.69	1102.4	1398
$K_{0\varepsilon 11} = K_{\varepsilon 022}$ (В/рад)	1510	1475	1432	1373	1199	958	810

Оценим теперь значения медианного и интервального компонентов интервальной матрицы  $[K_\varepsilon]$ , а также вычислим оценки ее относительной интервальности при условии, что ФЭСС СКУЛД обладают ошибками, не превышающими значения, приведенные в таблице 5.1., то есть в функции длины волны излучения РТ. Полученные результаты сведены в таблицу 5.5.

Таблица 5.5

**Значения компонентов матрицы  $[K_\varepsilon]$  в функции от длины волны излучения РТ**

$\Delta$ $\lambda$ (мм)	ТНА – 400 ДГР – 32 метра			ТНА – 1500 ДГР – 64 метра		
	$ \Delta K_{\varepsilon 12}  =  \Delta K_{\varepsilon 21} $ (В/рад)	$\Delta K_{0\varepsilon 11} = \Delta K_{\varepsilon 022}$ (В/рад)	$\delta_I K_\varepsilon$	$ \Delta K_{\varepsilon 12}  =  \Delta K_{\varepsilon 21} $ (В/рад)	$\Delta K_{0\varepsilon 11} = \Delta K_{\varepsilon 022}$ (В/рад)	$\delta_I K_\varepsilon$
100	199.3349	14706	0.0271	50.0188	14855	0.0067
75	112.2657	14793	0.0152	28.0664	14879	0.0038
50	49.6504	14855	0.0067	12.4126	14893	0.0017
30	18.0955	14887	0.0024	4.4685	14901	0.0006
20	7.9441	14897	0.0011	1.9860	14903	0.00027
10	1.9860	14903	0.00027	0.5340	14903	0.0007

Таким образом, если ФЭСС СКУЛД обладают ошибками слежения не превышающими значения представленные в таблице 5.1, то в режиме слежения фотодатчик представляет собой линейный элемент, матричное представление которого имеет “почти” фиксированные параметры. Интервально линейаризованная модель ФД возникает только на переходе из режима захвата в режим слежения.

При синтезе алгоритма управления ФЭСС используется линейаризованная модель ФД, характеризующаяся интервальной матрицей, содержащей только медианную часть так, что она принимает вид  $[K_\varepsilon] = K_{\varepsilon 0} = \begin{bmatrix} 14900 & 0 \\ 0 & 14900 \end{bmatrix}$  в каналах угловых измерений и  $[K_\varepsilon] = K_{\varepsilon 0} = \begin{bmatrix} 596 & 0 \\ 0 & 596 \end{bmatrix}$  в канал измерений линейных перемещений.

Построим теперь интервальное модельное представление остальных исходных функциональных компонентов ФЭСС. Устройство обработки видеосигнала (УОВ) в предположении точного знания его параметров, а также постоянства их значений на номинальном (медианном) уровне имеет векторно-матричное представление

$$\dot{x}_{yO}(t) = A_{yO}x_{yO}(t) + B_{yO}u_{\varepsilon}(t); v_{\varepsilon}(t) = C_{yO}x_{yO}(t); \quad (5.22)$$

где  $x_{yO}$  – вектор состояния устройства обработки видеосигнала,  $x_{yO} \in R^{n_{yO}}$ ;  $v_{\varepsilon}$  – вектор выхода УОВС, составленный из канальных компонентов электрического аналога рассогласования  $\varepsilon$ ;  $u_{\varepsilon}$  – входной сигнал устройства обработки видеосигнала;  $v_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} \in R^r$ ;  $(A_{yO}, B_{yO}, C_{yO})$  – тройка матриц состояния, входа (управления) и выхода УОВС, размерности которых согласованы с размерностями векторных переменных представления (5.22).

Устройство обработки видеосигнала в своем интервальном модельном представлении, учитывающем фактор возможной вариации его параметров, характеризуется интервальностью одного матричного компонента (5.22), в качестве которого в зависимости от выбранного базиса представления может быть одна из матриц входа  $B_{yO}$ , состояния  $A_{yO}$  или выхода  $C_{yO}$ . Основным источником интервальности параметров УОВ является неточность первоначальной установки ПДМ относительно осей отработки ФЭСС на угловую величину  $\mu$ . Этот источник приводит к интервальности структурных компонентов УОВ, проявляясь в виде появления межканальных связей ФЭСС с матрицей связей  $T = \text{col}\{\cos \mu \sin \mu; [-\sin \mu \cos \mu]\}$ . Избирательный усилитель, включаемый в общий тракт ФЭСС, сигнал в котором является модулированным с двумя информационными параметрами амплитуда и фаза, после декомплексификации и трансформации спектра по оси частот модулированного сигнала с помощью синхронного детектора (демодулятора) (СД) представим аperiodическим звеном с сопрягающей частотой, равной половине полосы пропускания ИУ, которую схемотехническими средствами обычно удается поддерживать фиксированной. Таким же образом удастся поддерживать фиксированными значения постоянных времени аperiodических фильтров на выходе СД. Однако с точки зрения возможных алгоритмов управления интервальностью матричных компонентов, как указывалось ранее, предпочтительнее ввести интервальность в матрицу состояния  $A_{yO}$ , структурно включив появляющиеся межканальные связи ФЭСС между ИУ и аperiodическими фильтрами СД.

В итоге интервальное модельное векторно-матричное представление устройства обработки видеосигнала принимает вид

$$\dot{x}_{yO}(t) = [A_{yO}]x_{yO}(t) + B_{yO}u_{\varepsilon}(t); v_{\varepsilon}(t) = C_{yO}x_{yO}(t). \quad (5.23)$$

Модель (5.23) всех устройств обработки двумерного видеосигнала во всех ФЭСС СКУЛД унифицирована и характеризуется матрицами

$$[A_{y0}] = \begin{bmatrix} -94.48 & 94.48[0.9659;1] & 0 & 94.48[-0.259;0.259] \\ 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 94.48[-0.259;0.259] & -94.48 & 94.48[0.9659;1] \\ 0 & 0 & 0 & -31.4 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$B_{y0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 31.4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 31.4 \end{bmatrix} \quad C_{y0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

При построении интервальной матрицы состояния (5.24) использовано допущение, что межканальные связи порождаются интервальным набегом фазы  $[\mu] = [-\pi/12; +\pi/12]$ , характеризующимся медианным значением  $\mu_0 = 0$ . В соответствии со сказанным медианное представление  $A_{y0}$  матрицы состояния устройства обработки принимает вид

$$A_{y0} = \begin{bmatrix} -94.48 & 92.8691 & 0 & 0 \\ 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -94.48 & 94.48 \\ 0 & 0 & 0 & -31.4 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

В предположении точного знания исполнительных электроприводов ФЭСС, а также постоянства их значений на номинальном (медианном) уровне в процессе эксплуатации векторно-матричное представление исполнительных электроприводов каждого канала всех ФЭСС СКУЛД принимает вид

$$\dot{x}_{\Pi}(t) = A_{\Pi}x_{\Pi}(t) + B_{\Pi}u_{\Pi}(t); y(t) = C_{\Pi}x_{\Pi}(t); y_{\omega}(t) = C_{\omega\Pi}x_{\Pi}(t), \quad (5.27)$$

где  $x_{\Pi}$  – вектор состояния ИП,  $x_{\Pi} \in R^{n_{\Pi}}$ ;  $u_{\Pi}$  – вектор управления электроприводами ФЭСС,  $u_{\Pi} \in R^r$ ;  $y$  – вектор выхода ИП, являющийся вектором выхода ФЭСС;  $y_{\omega}(t)$  – вектор выхода тахогенераторов ИП,  $(A_{\Pi}, B_{\Pi}, C_{\Pi}, C_{\omega\Pi})$ , – матрицы состояния, входа (управления) и выходов ИП, размерности которых согласованы с размерностями векторных переменных представления (5.27).

Все приводы всех ФЭСС СКУЛД с целью унификации усилительно-преобразовательных устройств, частично редукторов, установочных узлов в конструкциях исполнительной части ФЭСС построены на асинхронном двухфазном двигателе АДТ-521А со встроенным тахогенератором постоянного тока. Основным источником интервальности элементов исходного номинального модельного представления (5.27) исполнительных электроприводов является всесезонный режим их эксплуатации в неотапливаемых зимой и неохлаждаемых летом помещениях.

Эксперимент по определению интервальных значений параметров модельного представления унифицированного исполнительного привода, построенного на асинхронном двигателе АДТ-521 проводился в холодильной установке типа FRIGERA Санкт-Петербургского технологического института холодильной промышленности СПб ТИХП и в холодильной камере Санкт-Петербургского научно-исследовательского института Арктики и Антарктики

(СПб НИИ АА) в диапазоне температур от  $-45$  С до  $+45$  С. Исследования показали, что если контролировать возможность роста числа интервальных компонентов в модельном представлении привода, то интервальным оказывается всего лишь один параметр, которым является элемент  $A_{22}$  матрицы состояния исполнительного привода каждого канала всех ФЭСС, учитывающий факт реальной интервальности вязкости смазки используемой в редукторах приводов.

Таким образом, интервальное модельное векторно-матричное представление исполнительных электроприводов имеет вид

$$\dot{x}_{II}(t) = [A_{II}]x_{II}(t) + B_{II}u_{II}(t); y(t) = C_{II}x_{II}(t); y_{\omega}(t) = C_{\omega II}x_{II}(t), \quad (5.28)$$

медианная версия которых задается в форме

$$\dot{x}_{II}(t) = A_{0II}x_{II}(t) + B_{II}u_{II}(t); y(t) = C_{II}x_{II}(t); y_{\omega}(t) = C_{\omega II}x_{II}(t), \quad (5.29)$$

при этом матричные компоненты векторно-матричных описаний (5.28), (5.29) характеризуются матрицами:

– для ФЭСС угловых деформаций

$$C_{II} = [1 \ 0]; B_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \end{bmatrix} (1/C^2 B); [A]_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} \\ 0 & [-4.096; -1.412] \end{bmatrix}; \quad (5.30)$$

$$C_{\omega II} = [0 \ 1]$$

$$A_{0II} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} \\ 0 & -2.754 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

– для ФЭСС линейных деформаций

$$C_{II} = [1 \ 0]; B_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \end{bmatrix} (1/C^2 B); [A]_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^{-5} \\ 0 & [-4.096; -1.412] \end{bmatrix}; \quad (5.32)$$

$$C_{\omega II} = [0 \ 1]$$

$$A_{0II} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -2.754 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

– для ФЭСС стабилизации ОДН

$$C_{II} = [1 \ 0]; B_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \end{bmatrix} (1/c^2 B); [A]_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} \\ 0 & [-4.096; -1.412] \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

$$C_{\omega II} = [0 \ 1]$$

$$A_{0II} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} \\ 0 & -2.754 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Для целей поканального синтеза ФЭСС СКУЛД необходимо сконструировать медианные версии исходных «объектов управления (ОУ)» и оценить абсолютную интервальность матричных компонентов интервального представления этих объектов. Исходный ОУ каждого из каналов ФЭСС СКУЛД образуется путем структурного соединения через единичную отрицательную обратную связь выхода исполнительного привода канала, являющегося выходом синтезируемой ФЭСС, фотодатчика и последовательно соединенным

с ним каналом обработки видеосигнала. На входе фотодатчика формируется ошибка рассогласования выхода относительно задающего воздействия (контролируемой деформации). Таким образом, специфика синтеза состоит в том, что в исходном объекте заложена единичная отрицательная обратная связь по выходу, причем сигнально в модельном представлении ОУ присутствует задающее воздействие. Состав измерений в исходном объекте представлен выходом УОВС, являющимся динамическим электрическим аналогом ошибки рассогласования и сигналом тахогенератора исполнительного электропривода. Достижимым входом объекта является сигнал управления электропривода, то есть вход усилителя мощности. Для построения модели исходного объекта для каждого канала ФЭСС введем составной вектор состояний

$$x = \text{col}\{x_{\Pi}, x_{\text{VO}}\}, \quad (5.36)$$

Интервальная векторно-матричная модель исходного объекта управления каждого канала ФЭСС принимает вид

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t) + Gg(t); y(t) = Cx(t); v_{\varepsilon}(t) = C_V x(t), y_{\omega}(t) = C_{\omega} x(t) \quad (5.37)$$

где  $x \in R^n$ ,  $n = n_{\Pi} + n_{\text{VO}}$ ;

$$[A] = \text{col}\{([A_{\Pi} \quad 0]); (-B_{\text{VO}} K_{\varepsilon} C_{\Pi} \quad [A_{\text{VO}}])\} \quad (5.38)$$

$$B = \text{col}\{B_{\Pi} \quad 0\} \quad (5.39)$$

$$G = \text{col}\{0; (B_{\text{VO}} K_{\varepsilon})\}; \quad (5.40)$$

$$C = [C_{\Pi} \quad 0]; C_V = [0 \quad C_{\text{VO}}], C_{\omega} = [C_{\omega\Pi} \quad 0]. \quad (5.41)$$

В представлении (5.37) интервальной оказалась только матрица состояния исходного объекта управления, которую запишем в форме  $[A] = A_0 + [\Delta A] = A_0 + [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ . Для вычисления значения оценки абсолютной интервальности интервальной матрицы  $[A]$  воспользуемся нормой любой из угловых реализаций ее интервальной составляющей  $[\Delta A]$ , так что в силу (5.38) для нее можно записать

$$\Delta_I A = \|\text{col}\{([\Delta A_{\Pi} \quad 0]); (0 \quad [\Delta A_{\text{VO}}])\}\|, \quad (5.42)$$

Для медианной версии векторно-матричного представления исходного объекта управления каждого канала ФЭСС в силу (5.37) можно записать

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + Bu(t) + Gg(t); y(t) = Cx(t); v_{\varepsilon}(t) = C_V x(t), y_{\omega}(t) = C_{\omega} x(t), \quad (5.43)$$

где

$$A_0 = \text{col}\{([A_{0\Pi} \quad 0]); (-B_{\text{VO}} K_{\varepsilon} C_{\Pi} \quad A_{0\text{VO}})\} \quad (5.44)$$

В результате матричные компоненты медианной версии (5.43) модельного представления исходного ОУ каждого канала, а также значения оценки абсолютной интервальности его интервальной матрицы состояния характеризуются реализациями:

**– для ФЭСС угловых деформаций**

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 * 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -2.754 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.8691 \\ -467860 & 0 & 0 & -31.4 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.46)$$

$$C_V = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5.47)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 467860 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$\Delta_I A = 1.6109$  в декомпозированном виде,  $\Delta_I A = 24.47$  в связанном виде.

**– для ФЭСС линейных деформаций**

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 * 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & -2.754 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.8691 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.50)$$

$$C_V = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5.51)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18714 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$\Delta_I A = 1.6109$  в декомпозированном виде,  $\Delta_I A = 24.47$  в связанном виде.

**– для ФЭСС стабилизации ОДН**

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -2.754 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.8691 \\ -467860 & 0 & 0 & -31.4 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

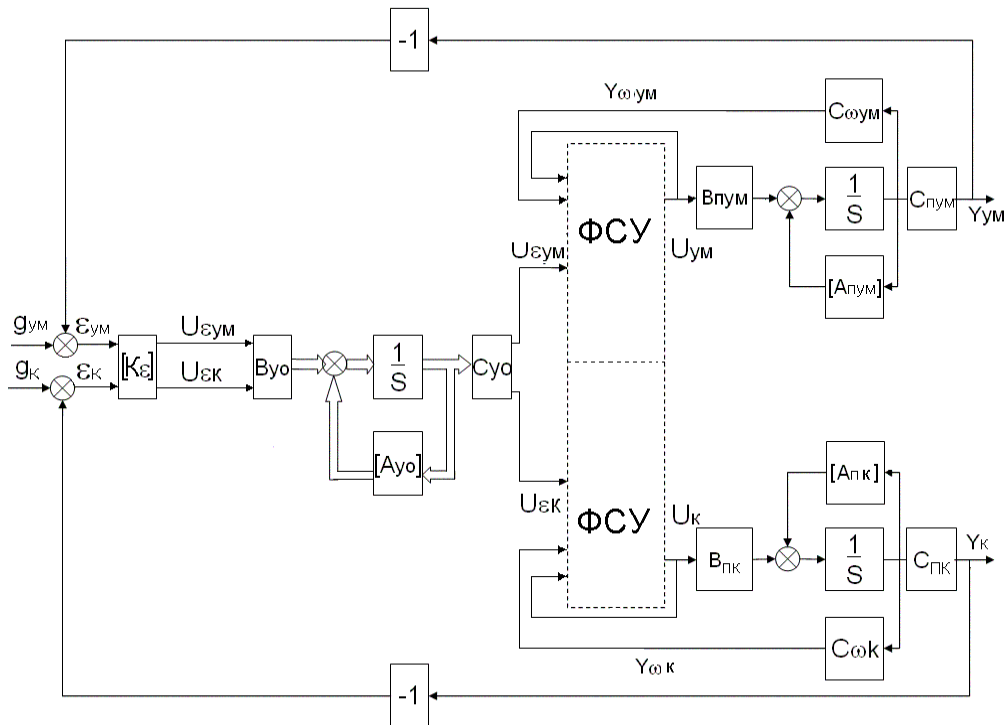
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 288.6645 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.54)$$

$$C_V = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5.55)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 467860 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$\Delta_I A = 1.6109$  в декомпозированном виде,  $\Delta_I A = 24.47$  в связанном виде.

Структурное представление интервальной версии исходного объекта управления унифицированных двухканальных ФЭСС, входящих в состав СКУЛД, приведен на рисунке 5.6а.



**Рисунок 5.6а.** Структурная схема интервального ОУ со встраиваемым формирователем сигнала управления

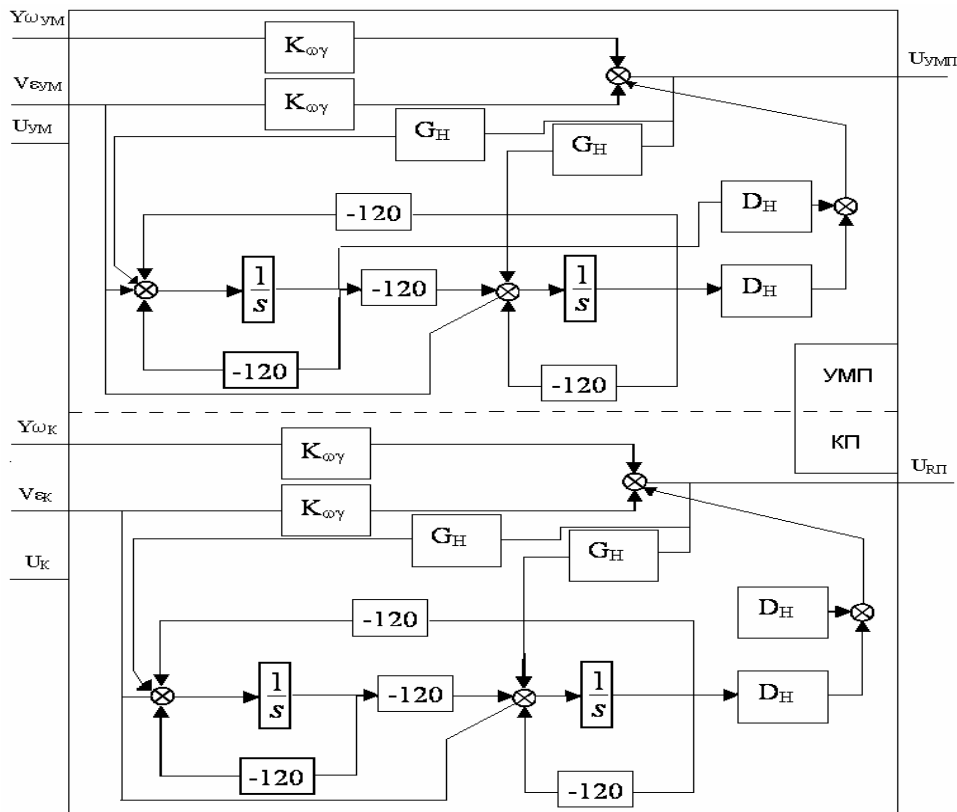


Рис. 5.66. Формирователь сигнала управления

Рисунок 5.6а. с учетом модельного представления п.4. алгоритма 5.2. медианной версии исходного объекта управления унифицированных двухканальных ФЭСС, входящих в состав СКУЛД обнаруживает возможность поканальной декомпозиции исходного ОУ с матричными компонентами вида (5.45) – (5.56), а следовательно возможность поканального синтеза модального управления.

Эта возможность подтверждается положениями следующего утверждения.

**Утверждение 5.1.** Двухканальная система с симметричными каналами, каждый из которых характеризуется передаточной функцией  $W(s)$  прямой цепи, имеющая матрицу перекрёстных связей  $T = \text{col}\{\cos \mu \quad \sin \mu, [-\sin \mu \quad \cos \mu]\}$ , с помощью процедуры *комплексификации векторных переменных* может быть приведена к скалярному случаю с эквивалентной передаточной функцией  $W_9(s)$  *прямой цепи*, определяемой выражением:

$$W_9(s) = e^{-j\mu} W(s).$$

**Доказательство.** Описанная в утверждении структура позволяет связать вектор  $y = [y_1 \quad y_2]^T$  выхода двухканальной системы с вектором ошибки  $\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]^T$  следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{bmatrix},$$

которое в покомпонентной форме записывается:

$$y_1(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s);$$

$$y_2(s) = -W(s)(\sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)\varepsilon_2(s).$$

Введём в рассмотрение комплексифицированные переменные двухканальной системы задав их с помощью следующих соотношений:

$$g^* = g_1 + jg_2; \varepsilon^* = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2; y^* = y_1 + jy_2.$$

Умножим выражение для  $y_2(s)$  на  $j$ , в результате чего получим:

$jy_2(s) = -W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s))$ . Просуммируем выражения для  $y_1(s)$  и  $jy_2(s)$ , тогда получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} y^*(s) &= y_1(s) + jy_2(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s) - \\ &- W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) - W(s)(j \sin \mu)(j\varepsilon_2(s)) - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + \\ &+ W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}\varepsilon_1(s) + W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)e^{-j\mu}(\varepsilon_1(s) + j\varepsilon_2(s)) = e^{-j\mu}W(s)\varepsilon^*(s) = W_\rho(s)\varepsilon^*(s). \end{aligned}$$

Доказанное утверждение делает справедливыми положения утверждения 5.2.

**Утверждение 5.2.** Двухканальная система с симметричными каналами, каждый из которых характеризуется передаточной функцией  $W(s)$ , обладающей запасом устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$ , имеющая матрицу перекрёстных связей  $T = \text{col}\{\cos \mu \sin \mu, [-\sin \mu \cos \mu]\}$ , сохраняет устойчивость при  $\mu < \Delta\varphi$ , оказывается на границе устойчивости, если  $\mu = \Delta\varphi$ , и становится неустойчивой при  $\mu > \Delta\varphi$ .

**Доказательство.** Для доказательства справедливости утверждения необходимо применить критерий устойчивости Найквиста к системе типа «одномерный вход–одномерный выход» с передаточной функцией  $W_\rho(s) = e^{-j\mu}W(s)$ .

**Примечание.** Если величина  $\mu$  оказывается интервальной, то в силу утверждения 5.2, при исследовании влияния  $[\mu]$  на динамические свойства двухканальной системы достаточно ограничиться значением правой угловой реализации.

#### **5.4. Синтез алгоритмов управления фотоэлектрическими слеящими системами контроля угловых и линейных деформаций верхнего опорного узла**

**Сформированные в параграфе 5.2 требования к динамическим свойствам ФЭСС СКУЛД, медианные версии интервальных модельных**

представлений исходных объектов управления каналов ФЭСС СКУЛД, а также значения оценок абсолютных интервальностей их матриц состояния в связанном и декомпозированном виде, вычисленные в параграфе 5.2, позволяют осуществить синтез алгоритмов управления ФЭСС СКУЛД с использованием алгоритма синтеза медианного модального управления, дополненного процедурой контроля оценки относительной интервальности матричных компонентов и показателей качества. Если синтез алгоритмов осуществляется поканально, то контроль относительной интервальности матричных компонентов должен иметь две фазы. На первой фазе контролируется интервальность матриц состояния просинтезированного канала ФЭСС, во второй фазе контролируется интервальность матрицы состояния двухканальной версии ФЭСС в связанном виде, учитывающей интервальность межканальных связей. Дополнительной особенностью синтеза ФЭСС, в исходный объект каналов которой в силу специфики, изначально введена единичная отрицательная обратная связь по выходу, является необходимость контроля сохранения этой единичной связи, которая может быть нарушена вводимыми межканальными связями в алгоритм управления.

В связи со сказанным сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 5.3.** Закон управления исходным ОУ сепаратного канала унифицированной ФЭСС, реализуемого в форме отрицательной обратной связи

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5.57)$$

по вектору состояния  $x(t)$  с матрицей  $K$ , декомпозированного на компоненты  $x_{II}(t)$  и  $x_{OY}(t)$ , так что он представим в форме

$$u(t) = -K_{II}x_{II}(t) - K_{OY}x_{OY}(t), \quad \square \quad (5.58)$$

в которой матрица  $K_{II}$  обратных связей по состоянию исполнительного привода имеет ненулевой первый элемент  $K_{II1}$  этой матрицы, нарушает единичное замыкание ФЭСС по выходу.

**Доказательство** утверждения строится на структурном представлении ЗУ (5.69) с реально рассчитанными компонентами матриц  $K_{II}$  и  $K_{OY}$  и агрегированием его с исходным объектом управления сепаратного канала унифицированной ФЭСС. ■

Ситуация заметно меняется, если непосредственное измерение компонентов векторов  $x_{II}$  и  $x_{OY}$  заменить их асимптотической оценкой, вырабатываемой динамическим наблюдающим устройством (ДНУ) по имеющемуся составом измерения в виде сигналов  $v_\varepsilon$  – выхода устройства обработки электрического видеосигнала (УОВС) и  $u$  – входа усилителя мощности электропривода.

**Утверждение 5.4.** Закон управления, записанный в форме

$$u(t) = -K_V v_\varepsilon - K_\omega \omega - D_H x_H, \quad (5.59)$$

где  $x_H$  – вектор состояния ДНУ редуцированной размерности  $n_H \langle n$ .

$$\dot{x}(t) = F_H x_H(t) + G_H u(t) + L_H v_\varepsilon(t), \quad (5.60)$$

в котором  $F_H$  – матрица состояния ДНУ с распределением мод, не ухудшающим динамические свойства проектируемого канала ФЭСС,

$$\{G_H L_H\} = \arg\{ctrl\{(F_H, G_H); (F_H, L_H)\}\}, \quad (5.61)$$

матрицы  $K_V, K_\omega, D_H, G_H$  удовлетворяют матричным соотношениям

$$[K_V \quad K_\omega \quad D_H] \begin{bmatrix} C_V \\ C_\omega \\ T_H \end{bmatrix} = K, \quad G_H = T_H B, \quad (5.62)$$

а матрица преобразования подобия  $T_H$  удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$T_H A_0 - F_H T_H = L_H C_V, \quad (5.63)$$

сохраняет единичную обратную связь сепаратного канала ФЭСС, доставляет ее матрице состояния желаемую структуру мод, обеспечивает свойство разделимости мод ФЭСС и ДНУ.

**Доказательство** утверждения строится на структурном представлении ЗУ в форме (5.59), дополненного ДНУ в форме (5.60), а также построении модели динамики невязки наблюдения  $\Theta_H(t) = T_H x(t) - x_H(t)$ , которая в силу (5.62), (5.63) принимает вид

$$\dot{\Theta}_H(t) = F_H \Theta_H(t), \quad \Theta_H(0), \quad (5.64)$$

и в силу свойств спектра мод матрицы  $F_H$  характеризуется асимптотической сходимостью с необходимым темпом. ■

Синтез ФЭСС СКУЛД произведен в соответствии с алгоритмом, которому придан номер 5.2.

### Алгоритм 5.2.

1. В соответствие с положениями параграфа 5.2. сформировать требования к динамическим свойствам каналов проектируемой ФЭСС;

2. В соответствии с положением параграфа 5.3. сформировать интервальные и медианные версии модельных представлений ФЭСС в связанном виде и поканально, оценив абсолютную интервальность матрицы состояния в декомпозированном и связанном видах;

3. Сформировать требования к оценке относительной интервальности матрицы состояния проектируемой ФЭСС;

4. Выполнить п.п. 3, 4, 5 алгоритма 4.2., в которых для всех матричных компонентов  $(*)_0$  следует положить  $(*)_0 = \text{diag}\{(*)_{0_{УМ}}, (*_{0_K})\}$ , где  $(*)_{0_{УМ}}, (*_{0_K})$  – соответственно матричные компоненты угломестного и коллимационных каналов ОУ и их модальных моделей, причем контроль достигаемого значения оценки интервальности  $\delta_I F$  выполнить для случаев декомпозированной и связанной реализаций ФЭСС;

5. Выполнить п.б. алгоритма 4.2. изъяв из него процедуру формирования матрицы прямых связей  $K_g$  по задающему воздействию;

6. Сконструировать динамическое наблюдающее устройство в форме (5.60), (5.61);

7. Сконструировать динамический закон модального управления в форме (5.59), (5.62).;

8. Сконструировать медианное векторно-матричное представление сепаратного канала ФЭСС с динамическим модальным регулятором в его составе

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{F}_0 \tilde{x}(t) + \tilde{G}_0 g(t); y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (5.65)$$

где

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} F_0 & B_0 D_H \\ 0 & F_H \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_0 = \begin{bmatrix} G_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0]. \quad (5.66)$$

$G_0$  для обеспечения условия единичного замыкания должна совпадать со столбцом матрицы  $F_0$  с компонентами с обратными знаками, которые соответствуют компонентам вектора состояния, формирующим выход  $y(t)$ .

9. С использованием аппарата теории чувствительности оценить глобальные мажоранты ошибок проектируемых ФЭСС на угловых реализациях интервальных параметров моделей линейных и угловых деформаций верхнего опорного узла;

10. В случае удовлетворения глобальных мажорант ошибок требованиям табл. 5.2 перейти к п.11, в противном случае - к п. 5 алгоритма;

11. Просинтезировать закон обобщенного изодромного динамического управления в соответствии с алгоритмом 4.3.;

12. Провести комплексное исследование спроектированных ФЭСС в автономном режиме в программной среде MATLAB и SIMULINK.

В результате использования алгоритма 5.1. для синтеза ФЭСС СКУЛД получены законы медианного модального управления (5.58) и медианного динамического модального управления (5.70), медианные векторно-матричные представления (5.65), (5.66) каналов ФЭСС с встроенными в них блоками ФСУ, оценки относительной интервальности матричных компонентов сепаратных каналов ФЭСС и ФЭСС в связанном виде, которые имеют реализации, приведенные в таблице 5.4, а также оценки относительной интервальности собственных значений спроектированных систем поканально и в связанном виде.

Таблица 5.4.

## Матричные компоненты ФЭСС СКУЛД

ФЭСС угловых деформаций	
Угломестная плоскость	Коллимационная плоскость
Матричные компоненты закона медианного модального управления	
$K=[8.5139*10^7, 0.91795, -5294.7, -13386]$	$K=[6.1601*10^7, 0.75827, -2772.1, -7908.7]$
Матричные компоненты закона медианного динамического модального управления	
$K_V = -91795$ , $K_{\omega y} = 2.4786$ $D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ , $D_{H1} = 8.0483*10^6$ , $D_{H2} = -1.384*10^6$ $F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 5.6446*10^{-5} \\ -2.7416*10^{-6} \end{bmatrix}$	$K_V = -61368$ , $K_{\omega y} = 1.8384$ $D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ , $D_{H1} = 5.5612*10^6$ , $D_{H2} = -7.6911*10^5$ $F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 5.6446*10^{-5} \\ -2.7416*10^{-6} \end{bmatrix}$
Медианные матричные компоненты ФЭСС	
$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.66*10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.46*10^{10} & -267.7 & 1.5*10^6 & 3.86*10^6 & 2.3*10^9 & -3.9*10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -4.6786*10^5 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$ $\tilde{G}_0 = [0 \ 2.46*10^{10} \ 0 \ 4.6786*10^5 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.66*10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.78*10^{10} & -221.64 & 8*10^5 & 2.3*10^6 & 1.6*10^9 & -2.2*10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -467860 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$ $\tilde{G}_0 = [0 \ 1.7782*10^{10} \ 0 \ 4.6786*10^5 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

## Интервальные матричные компоненты ФЭСС в связанном виде

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.46 \cdot 10^{10} & [-4.096; -1.412] \cdot \text{BK} & 1.5 \cdot 10^6 & 3.86 \cdot 10^6 \cdot \cos(\mu) & 2.3 \cdot 10^9 & -3.9 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 \cdot \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -4.6786 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.86 \cdot 10^6 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 \cdot 10^6 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1.66 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.78 \cdot 10^{10} & [-4.096; 1.412] \cdot BK & 8 \cdot 10^5 & 2.3 \cdot 10^6 \cdot \cos(\mu) & 1.6 \cdot 10^9 & -2.2 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 \cdot \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -467860 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = [0 \ 2.46 \cdot 10^{10} \ 0 \ 4.6786 \cdot 10^5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.78 \cdot 10^{10} \ 0 \ 467860 \ 0 \ 0]^T$$

$$C = [1000000000000; 000000100000]$$

Продолжение таблицы 5.4

Оценки относительной интервальности матричных компонентов ФЭСС $\delta_I F$	
$9.9112 * 10^{-10}$ (0.00000009%)	$1.3704^{-9}$ (0.0000001%)
Оценки относительной интервальности мод	
$\delta_I \lambda_1 = 0.0039834$ (0.39834%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0032104$ (0.32104%) $\delta_I \lambda = 0.035969$ (0.35969%)	$\delta_I \lambda_1 = 0.0040509$ (0.40509%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0032732$ (0.32732%) $\delta_I \lambda = 0.0036621$ (0.36621%)
Оценки относительной интервальности мод в варианте с перекрестными связями	
$\delta_I \lambda_1 = 0.020486$ (2.0486%) $\delta_I \lambda_2 = 0.020486$ (2.0486%) $\delta_I \lambda_3 = 0.019173$ (1.9173%) $\delta_I \lambda_4 = 0.019173$ (1.9173%) $\delta_I \lambda = 0.01983$ (1.983%)	
Матричные компоненты ФЭСС коллимационная плоскость	
ФЭСС линейных деформаций	
Матричные компоненты законов управления	
$K = [3.5333 * 10^6 \ 0.91795 \ -5493.3 \ -13888]$	$K = [2.5564 * 10^6 \ 0.75827 \ -2876.1 \ -8205.5]$
$K_V = -95239$ , $K_{\omega_y} = 2.4786$	$K_V = -63670$ , $K_{\omega_y} = 1.8384$
$D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ $D_{H1} = 8.3503 * 10^6$ $D_{H2} = -1.4359 * 10^6$	$D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ $D_{H1} = 5.7699 * 10^6$ $D_{H2} = -7.9797 * 10^5$
$F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 0.07764 \\ -0.031804 \end{bmatrix}$	$F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 0.07764 \\ -0.031804 \end{bmatrix}$

## Медианные матричные компоненты ФЭСС

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.02 \cdot 10^9 & -267.731.58 \cdot 10^6 & 4 \cdot 10^6 & 2.4 \cdot 10^9 & -4.1449 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 = [0 \ 1.0199 \cdot 10^9 \ 0 \ 18714 \ 0 \ 0]^T$$

$$\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.3795 \cdot 10^8 & -221.648.3 \cdot 10^5 & 2.37 \cdot 10^6 & 1.66 \cdot 10^9 & -2.3 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 = [0 \ 7.3795 \cdot 10^8 \ 0 \ 18714 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

## Интервальные матричные компоненты ФЭСС

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.02 \cdot 10^9 & [-4.096; -1.412] \cdot B \cdot K & 1.58 \cdot 10^6 & 4 \cdot 10^6 \cdot \cos(\mu) & 2.4 \cdot 10^9 & -4.1449 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 \cdot \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \cdot 10^6 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.37 \cdot 10^6 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.3795 \cdot 10^8 & -221.64 & 8.3 \cdot 10^5 & 2.37 \cdot 10^6 \cdot \cos(\mu) & 1.66 \cdot 10^9 & -2.3 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 \cdot \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = [0 \quad 1.02 \cdot 10^9 \quad 0 \quad 18714 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7.3795 \cdot 10^8 \quad 0 \quad 18714 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$C = [1000000000000; 000000100000]$$

Оценки относительной интервальности матричных компонентов ФЭСС	
$\delta_I F = 9.2341 * 10^{-9}$ (0.0000009%)	$\delta_I F = 1.3326 * 10^{-8}$ (0.000001%)
Оценки относительной интервальности мод	
$\delta_I \lambda_1 = 0.003269$ (0.3269%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0032104$ (0.32104%) $\delta_I \lambda = 0.0032187$ (0.32187%)	$\delta_I \lambda_1 = 0.0032883$ (0.32883%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0032732$ (0.32732%) $\delta_I \lambda = 0.0032807$ (0.32867%)
Оценки относительной интервальности в варианте с перекрестными связями	
$\delta_I \lambda_1 = 0.020486$ (2.0486%) $\delta_I \lambda_2 = 0.020486$ (2.0486%) $\delta_I \lambda_3 = 0.019173$ (1.9173%) $\delta_I \lambda_4 = 0.019173$ (1.9173%) $\delta_I \lambda = 0.01983$ (1.983%)	
ФЭСС стабилизации оси диаграммы направленности	
Матричные компоненты законов управления	
$K = [1.0367 * 10^7 \ 0.0070047 \ -1012 \ 1395.5]$	$K = [1.0367 * 10^7 \ 0.0070047 \ -1012 \ 1395.5]$
$K_V = -1231.1$ , $K_{\omega_y} = -5.1536$ , $D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ $D_{H1} = 9308.7$ $D_{H2} = -24114$ $F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 0.07764 \\ -0.031804 \end{bmatrix}$	$K_V = -1231.1$ , $K_{\omega_y} = -5.1536$ , $D_H = [D_{H1}, D_{H2}]$ $D_{H1} = 9308.7$ $D_{H2} = -24114$ $F_H = \begin{bmatrix} -120 & 120 \\ -120 & -120 \end{bmatrix}$ , $L_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $G_H = \begin{bmatrix} 0.07764 \\ -0.031804 \end{bmatrix}$

Медианные матричные компоненты ФЭСС							
$F_0 =$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.66e-006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.9*10^9 & -4.776 & 2.9*10^5 & -4.03*10^5 & 2.68*10^6 & -6.96*10^6 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -4.6786*10^5 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$	$F_0 =$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.66e-006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.9*10^9 & -4.776 & 2.9*10^5 & -4.03*10^5 & 2.68*10^6 & -6.96*10^6 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 & 0 & 0 \\ -4.6786*10^5 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$	$\tilde{G}_0 = [0 \ 1.0199 * 10^9 \ 0 \ 18714 \ 0 \ 0]^T$	$\tilde{G}_0 = [0 \ 1.0199 * 10^9 \ 0 \ 18714 \ 0 \ 0]^T$	$\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$	$\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$
Интервальные матричные компоненты ФЭСС							
$F_{11} =$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.66 * 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.9 * 10^9 & [-4.096; -1.412] - B * K & 2.9 * 10^5 & -4.03 * 10^5 * \cos(\mu) & 2.68 * 10^6 & -6.96 * 10^6 \\ 0 & 0 & -94.48 & 92.869 * \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -4.6786 * 10^5 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix}$						

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.03 \cdot 10^5 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot \sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.03 \cdot 10^5 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 92.869 \cdot -\sin(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.9 \cdot 10^9 & -4.776 & 2.9 \cdot 10^5 & -4.03 \cdot 10^5 \cdot \cos(\mu) & 2.68 \cdot 10^6 & -6.96 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & -94.48 \cdot \cos(\mu) & 92.869 \cdot \cos(\mu) & 0 & 0 \\ -18714 & 0 & 0 & -31.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & -120 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = [1000000000000; 00000001000000]$$

$$G = [0 \ 1.02 \cdot 10^9 \ 0 \ 4.6786 \cdot 10^5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2.9 \cdot 10^9 \ 0 \ 18714 \ 0 \ 0]^T$$

Оценки относительной интервальности матричных компонентов ФЭСС	
$\delta_I F = 8.177 * 10^{-9}$ (0.0000008%)	$\delta_I F = 8.177 * 10^{-9}$ (0.0000008%)
Оценки относительной интервальности мод	
$\delta_I \lambda_1 = 0.0077315$ (0.77315%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0074658$ (0.74658%) $\delta_I \lambda = 0.0075987$ (0.75987%)	$\delta_I \lambda_1 = 0.0077315$ (0.77315%) $\delta_I \lambda_2 = 0.0074658$ (0.74658%) $\delta_I \lambda = 0.0075987$ (0.75987%)
Оценки относительной интервальности в варианте с перекрестными связями	
$\delta_I \lambda_1 = 0.050275$ (5.0275%) $\delta_I \lambda_2 = 0.050275$ (5.0275%) $\delta_I \lambda_3 = 0.050091$ (5.0091%) $\delta_I \lambda_4 = 0.050091$ (5.0091%) $\delta_I \lambda = 0.05017$ (5.017%)	

Нетрудно из приведенных таблиц видеть, что матрицы связей по вектору состояния каналов ФЭСС ОДН, при их реализации в виде обратной связи обнаруживают положительную обратную связь по переменной  $x_2$  (скорости вращения исполнительного двигателя), что технически является недопустимым. Проведенный анализ показывает, что увеличением характеристической частоты  $\omega_0$  обратная связь по переменной  $x_2$  может быть сделана отрицательной, в связи, с чем для технически реализуемой версии ФЭСС ОДН положено  $\omega_0 = 50 \text{ c}^{-1}$ , приводящей к матрице связей  $K$ , имеющей вид  $K = [1.0367 \cdot 10^7 \ 0.0070047 \ -1012 \ 1395.5]$  в обоих каналах.

### **5.5. Оценка показателей качества системы контроля угловых и линейных деформаций ВОУ радиотелескопа**

Целью настоящего параграфа является иллюстрация эффективности использования интервальных модельных представлений систем и среды их функционирования в сочетании с разработанными алгоритмами, опирающимися на возможности медианного модального управления, дополненного контролем оценки относительной интервальности матричных компонентов проектируемых ФЭСС СКУЛД, дающее разработчику возможность оценки достижимых ошибок следящего преобразования в измерительном процессе с использованием аппарата теории чувствительности.

Поставленная задача в исследовательской версии решается экспериментально с привлечением возможностей программной оболочки MATLAB, путем экспериментальной оценки ошибок ФЭСС, вызванных конечномерными и стохастическими компонентами внешнего воздействия, представляющими собой контролируемые деформации ВОУ, с учетом фактора интервальности параметров источников внешнего воздействия и спроектированных систем СКУЛД при различных режимах функционирования радиотелескопа. В пользовательской версии задача решается в форме контроля соответствия экспериментально полученных поканальных показателей качества системы, в функционально связанном виде с использованием эллипсоидных показателей качества процессов, требуемым значениям этих ошибок, сформированным при декомпозиции общей допустимой погрешности РТ на ОРАН по факторным компонентам.

Формирование конечномерных компонентов внешнего воздействия, порождаемых угломестным разворотом РТ, неравномерностью нагрева его конструкций и остужающего действия ветра, а также квазистационарными порывами ветрового воздействия осуществляется в соответствии с концептуальной моделью деформации рисунке 2.2. При синтезе стохастическая составляющая ветровой деформации была сведена к эквивалентному гармоническому задающему воздействию с интервальным значением его частоты и амплитуды, поэтому экспериментальная оценка погрешности вызванная ветровой деформацией производится при стохастическом внешнем воздействии и осуществляется на четырех угловых реализациях параметров

модели деформации, а если учитывать интервальность представления параметров формирующего фильтра ветрового воздействия, то число угловых реализаций должно быть доведено до восьми.

Анализ работы ФЭСС контролирующей деформации ВОУ в угломестной плоскости в соответствии с функционированием РТ проводится для следующих режимов работы его главных приводов:

Режим оптимального по быстродействию реверсивного движения угломестной оси.

Режим с застопоренной УМО.

Режим работы привода РТ с постоянной максимальной скоростью.

Режим работы привода с постоянной минимальной скоростью.

Наиболее неблагоприятным режимом, характеризующимся в каждой точке ненулевыми значениями первой и второй производной задающего внешнего воздействия, причем последняя из них претерпевает разрывы, является режим оптимального по быстродействию реверсивного движения. Для реализации этого режима в рамках модельного представления рис.2.2. угломестной деформации РТ это представление необходимо дополнить алгоритмом коммутации начального состояния  $z_3(0)$  по закону

$$z_3(0) = \eta_{3\max} \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{2\pi}{t_{\pi}}t\right), \quad (5.67)$$

где  $t_{\pi}$  – время переходного процесса угломестных приводов по оптимальной траектории, которое в силу максимальных развиваемых скоростей и ускорений привода составляет величину  $t_{\pi}=5\text{с}$ ,  $\eta_{3\max}$  – максимальное ускорение процесса деформации ВОУ при угломестном развороте РТ, которое характеризуется значением  $\eta_{3\max}=2.8 \text{ угл.сек.с}^{-2}$  для угловых деформаций и  $\eta_{3\max}=0.32 \text{ мм с}^{-2}$  для линейных деформаций.

Формирование стохастической составляющей задающего воздействия связано с математической проблемой нереализуемости непрерывного белого шума, но реализуемостью дискретного белого шума, в этой связи от непрерывного описания необходимо перейти к дискретному как в модели стохастического воздействия, так и в модели исследуемых систем. Ключевым моментом в этой проблеме является переход от непрерывного стохастического воздействия к эквивалентному дискретному. Для этой цели докажем два утверждения.

**Утверждение 5.5.** Пусть непрерывный формирующий фильтр (ФФ) с фиксированными параметрами, возбуждаемый по входу стационарным в широком смысле стохастическим непрерывным воздействием  $w(t)$  типа “белый” шум с нулевым средним значением и матрицей интенсивности  $N$ , формирующий на своем выходе стохастический стационарный в широком смысле процесс  $\xi(t)$  типа “окрашенный” шум с матрицей дисперсий  $D_{\xi}$ , имеет векторно-матричное описание вида (2.60)

$$\dot{z}_{\phi}(t) = \Gamma_{\phi}z_{\phi}(t) + G_{\phi}w(t); z_{\phi}(0) = 0; \xi(t) = C_{\phi}z_{\phi}(t), \quad (5.68)$$

для векторных компонентов которого справедливы соотношения

$$M[w(t)] = 0; M[w(t)w^T(t)] = N\delta(t, \tau); M[w(t)z_\phi^T(t)] = 0; M[z_\phi(t)w^T(t)] = 0, \quad (5.69)$$

$$D_z(t) = M[z_\phi(t)z_\phi^T(t)]; M[\xi(t)\xi^T(t)] = D_\xi(t); D_\xi(t) = P_\phi D_z(t) P_\phi^T. \quad (5.70)$$

Тогда для матрицы дисперсий  $D_z(t)$  вектора состояния  $z_\phi$  как функция времени оказывается справедливым интегральное представление

$$D_z(t) = \int_0^t \exp(\Gamma_\phi(t-\tau)) G_\phi N G_\phi^T \exp(\Gamma_\phi^T(t-\tau)) d\tau, \quad (5.71)$$

которое имеет дифференциальный матричный аналог

$$\dot{D}_z(t) = \Gamma_\phi D_z(t) + D_z(t) \Gamma_\phi^T + G_\phi N G_\phi^T; D_z(0) = 0. \quad (5.72)$$

При этом в случае гурвицевости матрицы  $\Gamma_\phi$  решение матричного уравнения (5.72) имеет установившееся значение  $D_z$ , вычисляемое как решение алгебраического матричного уравнения типа уравнения Ляпунова

$$\Gamma_\phi \cdot D_z + D_z \cdot \Gamma_\phi^T = -G_\phi N G_\phi^T. \quad (5.73)$$

**Доказательство.** Запишем решение уравнения (5.68) в интегральной форме

$$z_\phi(t) = \int_0^t \exp(\Gamma_\phi(t-v)) G_\phi w(v) dv = e^{\Gamma_\phi t} \int_0^t e^{-\Gamma_\phi v} G_\phi w(v) dv, \text{ теперь для построения}$$

матрицы дисперсии  $D_z(t) = M[z_\phi(t)z_\phi^T(t)]$  сформируем интегральное представление для вектора строки

$$z_\phi^T(\sigma) = \int_0^\sigma w^T(\mu) G_\phi^T \exp(\Gamma_\phi^T(\sigma-\mu)) d\mu = \int_0^\sigma w^T(\mu) G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \mu} d\mu e^{\Gamma_\phi^T \sigma}. \text{ Теперь для}$$

матрицы ковариаций можно записать

$$\begin{aligned} R_z(t, \sigma) &= M[z_\phi(t)z_\phi^T(\sigma)] = M \left\{ e^{\Gamma_\phi t} \int_0^t e^{-\Gamma_\phi v} G_\phi w(v) dv \int_0^\sigma w^T(\mu) G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \mu} d\mu e^{\Gamma_\phi^T \sigma} \right\} = \\ &= e^{\Gamma_\phi t} \int_0^t e^{-\Gamma_\phi v} G_\phi dv \int_0^\sigma M \{ w(v) w^T(\mu) \} G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \mu} d\mu e^{\Gamma_\phi^T \sigma} = \\ &= e^{\Gamma_\phi t} \int_0^t e^{-\Gamma_\phi v} G_\phi dv \int_0^\sigma N \delta(v, \mu) G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \mu} d\mu e^{\Gamma_\phi^T \sigma} = e^{\Gamma_\phi t} \left\{ \int_0^t e^{-\Gamma_\phi v} G_\phi N G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T v} dv \right\} e^{\Gamma_\phi^T \sigma}. \end{aligned}$$

Если в полученном выражении положить  $\sigma = t, v = \tau$ , то получим в силу равенства  $R_z(t, \sigma)|_{\sigma=t} = D_z(t)$  соотношение (5.71)

$$D_z(t) = e^{\Gamma_\phi t} \left\{ \int_0^t e^{-\Gamma_\phi \tau} G_\phi N G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \tau} d\tau \right\} e^{\Gamma_\phi^T t} = \int_0^t \exp(\Gamma_\phi(t-\tau)) G_\phi N G_\phi^T \exp(\Gamma_\phi^T(t-\tau)) d\tau.$$

Дифференцирование по переменной  $t$  выражения для дисперсии

$$D_z(t) = e^{\Gamma_\phi t} \left\{ \int_0^t e^{-\Gamma_\phi \tau} G_\phi N G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \tau} d\tau \right\} e^{\Gamma_\phi^T t} \text{ дает (5.72). Если в (5.72) для случая}$$

гурвицевых матриц  $\Gamma_\phi, \Gamma_\phi^T$  совершить предельный переход  $\lim_{t \rightarrow \infty} D_z(t) = D_z$ , порождающий предельный переход  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{D}_z(t) = 0$ , то из (5.72) получим (5.73). ■

Пусть из процессов непрерывного по переменным  $z_\phi(t)$  и  $\xi_\phi(t)$  формирующего фильтра (2.60) осуществляется дискретная по времени с интервалом дискретности  $\Delta t$  выборка, так что сформированные дискретные стохастические процессы  $z_\phi(k)$  и  $\xi_\phi(k)$  получают векторно-матричное представление

$$z_\phi(k+1) = \bar{\Gamma}_\phi z_\phi(k) + \bar{G}_\phi w(k); z_\phi(0) = 0; \xi_\phi(k) = \bar{P}_\phi z_\phi(k) \quad (5.74)$$

где  $k$  – дискретное время, удовлетворяющее соотношению  $t = k \Delta t$

$$\bar{\Gamma}_\phi = \exp(\Gamma_\phi \Delta t), \quad \bar{G}_\phi = \Gamma_\phi^{-1} (\exp(\Gamma_\phi \Delta t) - I) G_\phi, \quad \bar{P}_\phi = P_\phi. \quad (5.75)$$

Для векторных компонентов (5.74) справедливы соотношения

$$M[w(k)] = 0; M[w(k)w^T(k)] = V; M[w(k)z_\phi^T(k)] = 0; M[z_\phi(k)w^T(k)] = 0,$$

$$D_z(k) = M[z_\phi(k)z_\phi^T(k)]; M[\xi(k)\xi^T(k)] = D_\xi(k); D_\xi(k) = \bar{P}_\phi D_z(k) \bar{P}_\phi^T, \quad ,$$

где  $V$  – матрица дисперсий дискретного "белого шума"  $w(k)$ .

**Определение 5.1.** Два стохастических «окрашенных» сигнала стационарных в широком смысле  $\xi(t)$  и  $\xi(k)$ , один из которых  $\xi(t)$  непрерывный и сформирован из непрерывного «белого шума»  $w(t)$  с помощью непрерывного формирующего фильтра (5.68), а второй из которых  $\xi(k)$  дискретный и сформирован из дискретного «белого шума»  $w(k)$  при  $t = k(\Delta t)$  с помощью дискретного формирующего фильтра (5.74) с матричными компонентами, связанными с матричными компонентами непрерывного ФФ соотношениями (5.75), будем называть эквивалентными, если оказываются совпадающими все моменты процессов.

**Примечание 5.2.** В связи с тем, что для векторных стохастических переменных моменты выше второго порядка не определены эквивалентировать стохастические переменные будем по первым двум моментам, то есть использовать эквивалентность в смысле первых двух моментов.

*Поставим и решим задачу:* при каком значении матрицы  $V$  дисперсии дискретного «белого шума»  $w(k)$  стохастические процессы  $\xi(t)$  и  $\xi(k)$  стационарные в широком смысле оказываются эквивалентными в смысле первых двух моментов?

Решение задачи сформулируем с помощью утверждения.

**Утверждение 5.6.** Для того чтобы стохастические процессы  $\xi(t)$  и  $\xi(k)$ , формируемые соответственно ФФ (5.68) и (5.74) были эквивалентными в смысле первых двух моментов необходимо, чтобы матрица  $V$  задавалась выражением

$$V = (\bar{G}_\phi^T \bar{G}_\phi)^{-1} \bar{G}_\phi^T D_z(\Delta t) \bar{G}_\phi (\bar{G}_\phi^T \bar{G}_\phi)^{-1}. \quad (5.76)$$

**Доказательство.** Для доказательства сформируем аналитическое представление для матрицы  $D_z(k+1) = M[z_\phi(k+1)z_\phi^T(k+1)]$ . С этой целью на основании (5.74) сформируем выражение для вектора – строки  $z_\phi^T(k+1)$

$$\begin{aligned} z_\phi^T(k+1) &= z_\phi^T(k)\bar{\Gamma}_\phi^T + w^T(k)\bar{G}_\phi^T, z_\phi^T(0) = 0; \xi_\phi^T(k) = z_\phi^T(k)\bar{P}_\phi^T. \quad (5.77) \\ D_z(k+1) &= M[z_\phi(k+1)z_\phi^T(k+1)] = M[\bar{\Gamma}_\phi z_\phi(k)z_\phi^T(k)\bar{\Gamma}_\phi^T] + M[\bar{G}_\phi w(k)w^T(k)\bar{G}_\phi^T] + \\ &+ M[\bar{\Gamma}_\phi z_\phi(k)w^T(k)\bar{G}_\phi^T] + M[\bar{G}_\phi w(k)z_\phi^T(k)\bar{\Gamma}_\phi^T] = \bar{\Gamma}_\phi D_z(k)\bar{\Gamma}_\phi^T + \bar{G}_\phi V \bar{G}_\phi^T, D_z(0) = 0. \end{aligned}$$

Положим в рекуррентное уравнение для матриц дисперсий

$$D_z(k+1) = \bar{\Gamma}_\phi D_z(k)\bar{\Gamma}_\phi^T + \bar{G}_\phi V \bar{G}_\phi^T \quad k=0, D_z(0) = 0 \text{ получим}$$

$$D_z(1) = \bar{\Gamma}_\phi D_z(0)\bar{\Gamma}_\phi^T + \bar{G}_\phi V \bar{G}_\phi^T = \bar{G}_\phi V \bar{G}_\phi^T, \text{ где } D_z(1) = D_z(1\Delta t) = D_z(\Delta t).$$

Решение матричного уравнения  $D_z(\Delta t) = \bar{G}_\phi V \bar{G}_\phi^T$  относительно матрицы дисперсии  $V$  дискретного «белого» шума приводит к (5.76). ■

**Примечание 5.3.** Нетрудно видеть, что значение матрицы  $D_z(\Delta t)$  может быть вычислено с помощью (5.71), если положить  $t = \Delta t$ , что даст

$$D_z(\Delta t) = e^{\Gamma_\phi \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\Gamma_\phi \tau} G_\phi N G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \tau} d\tau e^{\Gamma_\phi^T \Delta t}. \quad (5.78)$$

Воспользуемся положениями доказанных утверждений, для формирования параметров эквивалентного дискретного «белого» шума  $w(k)$  на основе параметров  $N$  и  $\Omega_\phi$  интенсивности непрерывного «белого» шума и эффективной полосы пропускания непрерывного ФФ ветрового воздействия.

Решение задачи оформим в виде процедуры

1. Представление матричных компонент исходного непрерывного ФФ в виде

$$\Gamma_\phi = [-\Omega_\phi]; G_\phi = [\Omega_\phi]; P_\phi = [1]. \quad (5.79)$$

2. Представление матричных компонент дискретного ФФ при заданном  $\Delta t$ : с помощью (5.75) в виде

$$\bar{\Gamma}_\phi = \exp(-\Omega_\phi \Delta t); \bar{G}_\phi = 1 - \exp(-\Omega_\phi \Delta t); P_\phi = [1], \quad (5.80)$$

3. Вычисление значения дисперсии  $D_z(\Delta t)$  с помощью (5.71), (5.78)

$$\begin{aligned} D_z(\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} \exp(-\Omega_\phi(\Delta t - \tau)) \Omega_\phi N \Omega_\phi \exp(-\Omega_\phi(\Delta t - \tau)) d\tau = \\ &= N \Omega_\phi^2 \exp(-2\Omega_\phi \Delta t) \int_0^{\Delta t} \exp(2\Omega_\phi \tau) d\tau = \frac{N \Omega_\phi}{2} (1 - \exp(-2\Omega_\phi \Delta t)). \quad (5.81) \end{aligned}$$

4. Вычисление значения дисперсии  $V$  дискретного «белого» шума с помощью соотношений (5.76) и (5.81) которое дает

$$V = \frac{N \Omega_\phi (1 + \exp(-\Omega_\phi \Delta t))}{2 (1 - \exp(-\Omega_\phi \Delta t))}. \quad (5.82)$$

Из последнего выражения нетрудно видеть, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  значение  $V$  стремится к бесконечности, т. е. дискретный "белый" шум по своим свойствам приближается к непрерывному.

При моделировании стохастического дискретного процесса типа "белый" шум с матрицей дисперсии  $V$  в программной оболочке MATLAB с помощью генераторов случайных чисел возникает задача определения коэффициента нормирования  $k_n$ , доставляющего требуемое значение дисперсии  $V$  моделируемому дискретному процессу.

При решении данной задачи можно ограничиться случаями двух наиболее распространённых генераторов случайных чисел: с равномерным и нормальным распределением. Если выход генератора случайных чисел обозначить  $\zeta_{ген}$ , то базовое выражение для вычисления коэффициента  $k_n$ , примет вид

$$k_n^2 D_{\zeta_{ген}} = V, \quad (5.83)$$

где  $D_{\zeta_{ген}}$  — дисперсия на выходе генератора случайных чисел.

Для случая равномерного распределения случайных чисел в интервале  $[-a, a]$   $k_n$ , вычисляется в силу соотношения

$$k_n = \left( \frac{V}{D_{\zeta_{ген}}} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{a} V^{1/2}. \quad (5.84)$$

При использовании генератора с нормальным распределением случайных чисел с параметром  $\sigma_{ген}$  значение коэффициента  $k_n$ , определяется выражением

$$k_n = \frac{1}{\sigma_{ген}} V^{1/2}. \quad (5.85)$$

При моделировании ветрового воздействия выход генератора *равномерно распределенных чисел* должен быть связан со входом дискретного ФФ через линейный блок с коэффициентом передачи

$$k_n = \frac{\sqrt{3}}{a} \left( \frac{N\Omega_{\phi}}{2} \cdot \frac{1 + \exp(-\Omega_{\phi}\Delta t)}{1 - \exp(-\Omega_{\phi}\Delta t)} \right)^{1/2}; \quad (5.86)$$

для случая генератора *нормально распределенных случайных чисел* этот коэффициент приобретает значение

$$k_n = \frac{1}{\sigma_{ген}} \left( \frac{N\Omega_{\phi}}{2} \cdot \frac{1 + \exp(-\Omega_{\phi}\Delta t)}{1 - \exp(-\Omega_{\phi}\Delta t)} \right)^{1/2} \quad (5.87)$$

На рисунках 5.7.а, 5.7.б приведены кривые дискретных белых шумов сформированных в программной среде MATLAB, в соответствии с описанной выше методикой, при использовании генератора случайных чисел с равномерным (рисунок 5.7а), нормальным гауссовским (рисунок 5.7б) распределениями, а также двумерный портрет «белого шума» на входе двухканального ФФ (рисунок 5.7в).

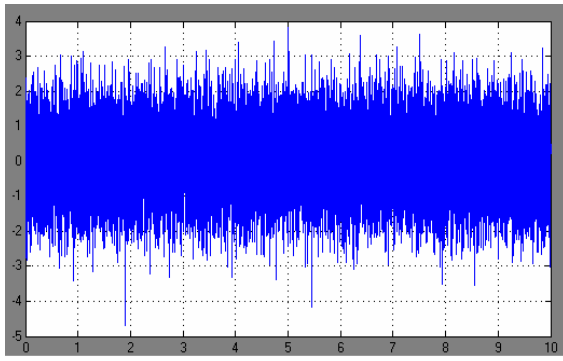


Рисунок 5.7 а

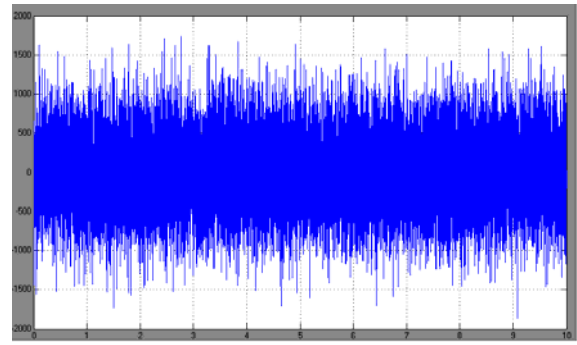


Рисунок 5.7 б

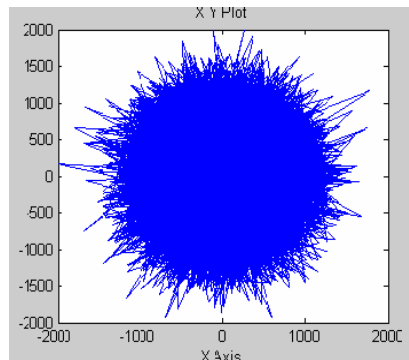
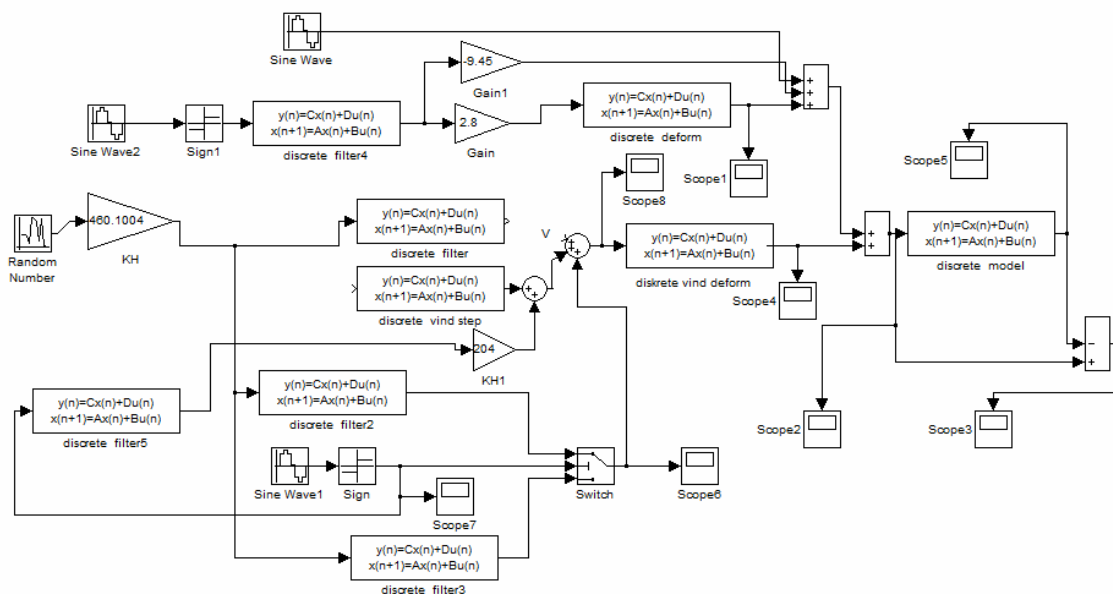


Рисунок 5.7 в

Компьютерный «стенд» для проведения эксперимента с целью оценок ошибок ФЭСС, входящих в состав СКУЛД, представляет собой дискретный аналог угломестного канала двухканальной ФЭСС (рисунок 5.3б) контроля угловых деформаций ВОУ, функционирующей в условиях комплексного характера деформаций, структурно агрегированный с дискретным аналогом модели полных деформаций (рисунок 2.2). Компьютерный «стенд» реализован в программной оболочке MATLAB 6.5, схема которого для канала ФЭСС угломестной плоскости приведена на рисунке 5.8.



### Рисунок 5.8.

При проведении исследования ФЭСС СКУЛД смоделированы *три режима* функционирования радиотелескопа, характеризующиеся различной степенью деформируемости ВОУ РТ.

*В качестве первого режима* выбран режим, имеющий место при наведении РТ на ОРАН приводами большой скорости с оптимальными разгоном, торможением и возможным реверсом, происходящим в условиях шквального ветра со скоростью 20 М/С, дополненного при его стационаризации порывами интенсивностью в  $\pm 5$  М/С, режим сопровождается максимальным нагревом его конструкции на солнце и охлаждающим действием ветра в теневой части конструкции.

*Второй режим* является режимом наблюдения ОРАН, осуществляемый приводами малой скорости, но при тех же ветровых и температурных воздействиях на конструкцию РТ, как и в первом режиме.

*Третий режим* является наиболее благоприятным для РТ как радиоастрономического инструмента, он реализуется в ночное время, который характеризуется безветрием, отсутствием деформаций от температурных градиентах и имеет место при наблюдении ОРАН, сопровождение которого осуществляется приводами малой скорости.

На рисунках 5.9.а, 5.9.б приведены кривые стохастической составляющей ветровых воздействий на ВОУ с медианной составляющей скорости ветра 20 МС<sup>-1</sup> в угломестной и коллимационной плоскостях соответственно, а также двумерный портрет ветрового воздействия на рисунке 5.9.в

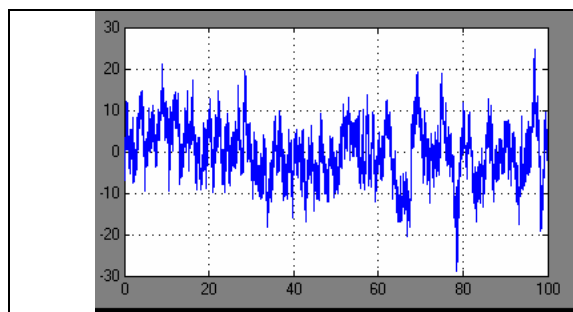


Рисунок 5.9 а

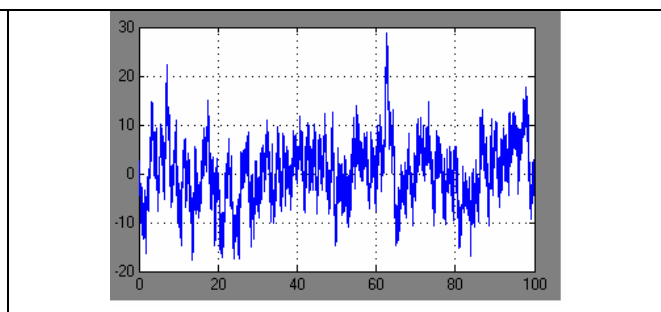


Рисунок 5.9 б

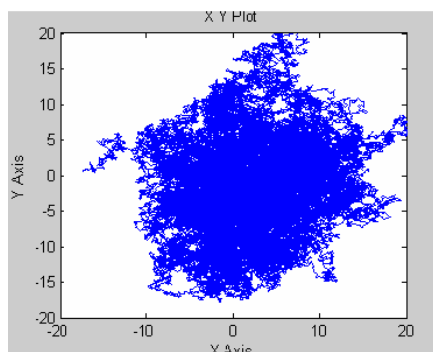
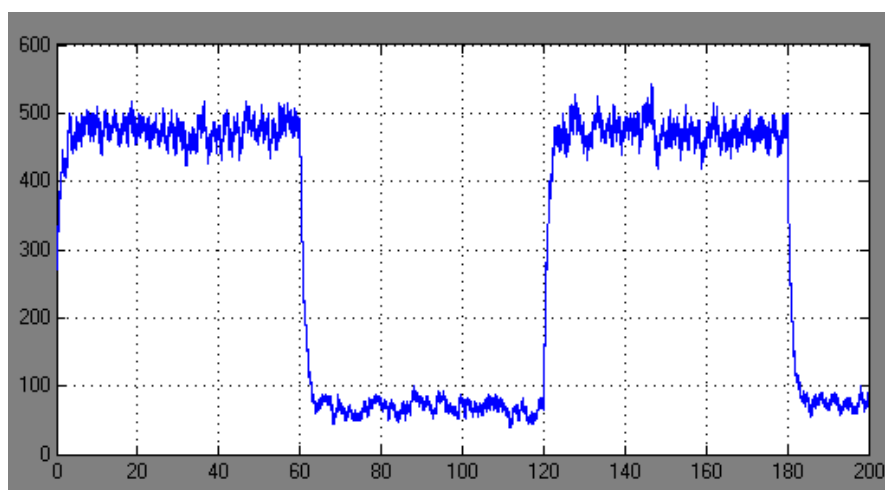


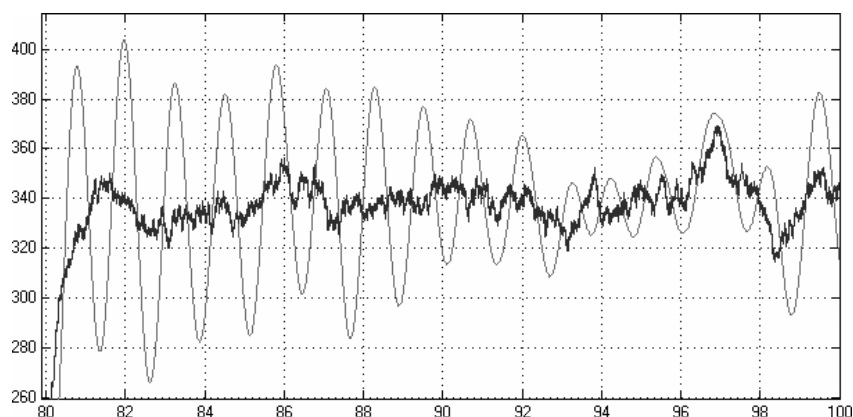
Рисунок 5.9 в

На рисунке 5.10. приведены кривые ветрового воздействия на ВОУ для медианной составляющей скорости ветра  $20 \text{ МС}^{-1}$  и порывов  $\pm 5 \text{ МС}^{-1}$



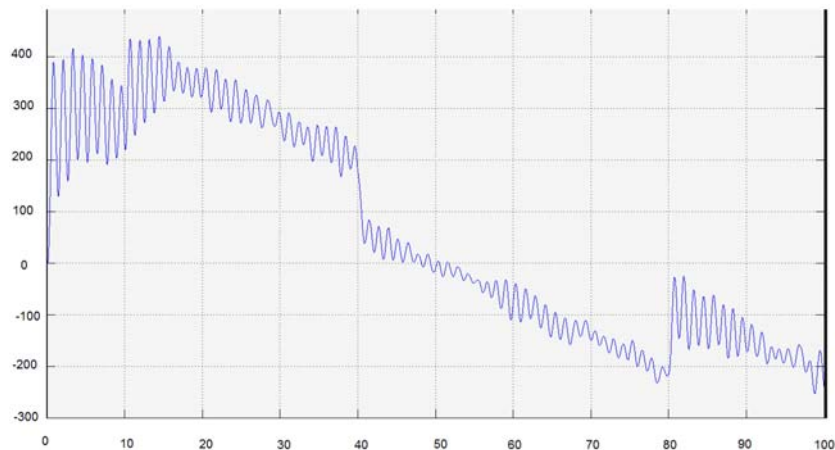
**Рисунок 5.10**

Для иллюстрации свойства жесткости конструкции РТ, которая модельно характеризуется высоким показателем колебательности, так что деформации этой конструкции под действием стохастической составляющей ветрового воздействия описывается эквивалентным гармоническим сигналом со случайной амплитудой на рисунке 5.11 приведены кривые, иллюстрирующие этот процесс.



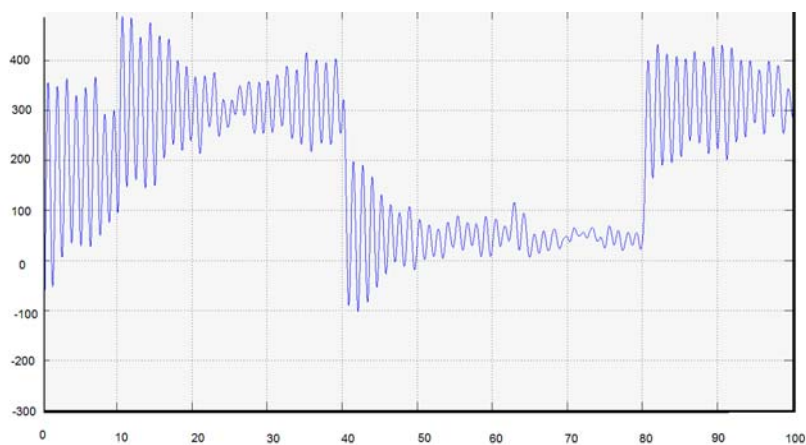
**Рисунок 5.11.**

На рисунке 5.12 приведена кривая полной угловой деформации ВОУ в угломестной плоскости при вращении РТ по углу места, порожденная весовыми и ветровыми воздействиями с порывами  $\pm 5 \text{ МС}^{-1}$ , и медианной составляющей скорости ветра  $20 \text{ МС}^{-1}$



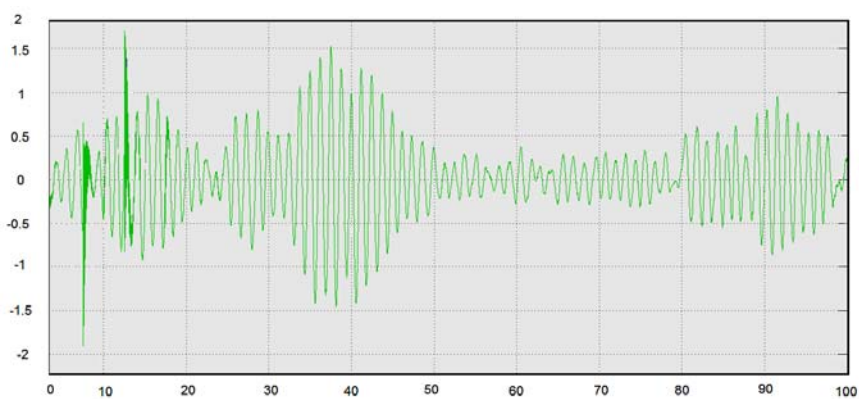
**Рисунок 5.12.**

На рисунке 5.13 приведена кривая полной угловой деформация ВОУ в коллимационной плоскости под действием ветра с порывами  $\pm 5 \text{ МС}^{-1}$  и медианной составляющей скорости ветра  $20 \text{ МС}^{-1}$



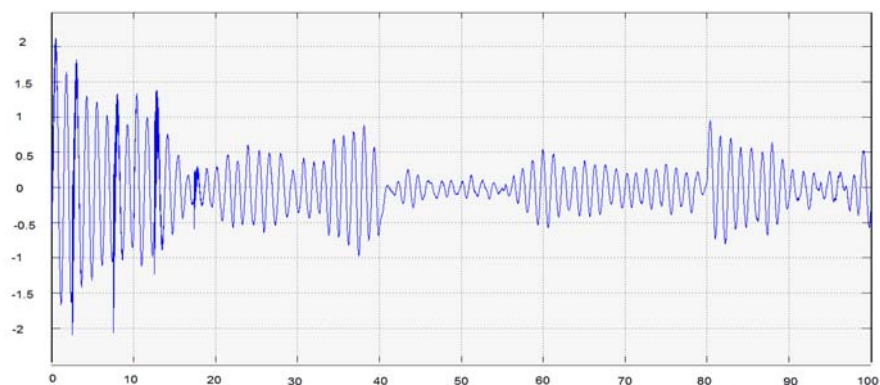
**Рисунок 5.13.**

На рисунке 5.14 представлены кривые ошибки измерения полных угловых деформаций ВОУ средствами ФЭСС УД в угломестной плоскости.



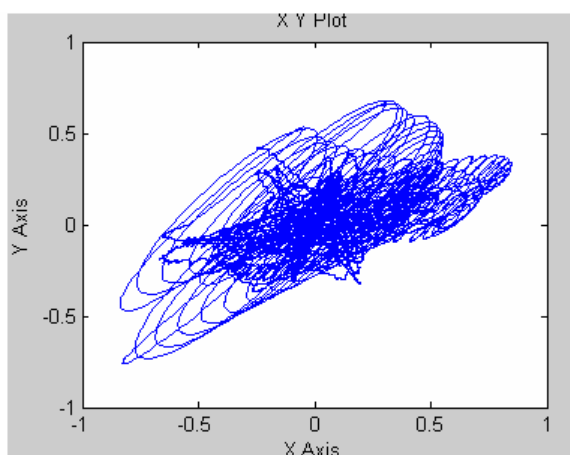
**Рисунок 5.14.**

На рисунке 5.15 представлены кривые ошибки измерения полных угловых деформаций ВОУ средствами ФЭСС УД в коллимационной плоскости



**Рисунок 5.15.**

На рисунке 5.16 представлен двумерный портрет ошибки измерения угловых деформаций средствами двухканальной ФЭСС УД



**Рисунок 5.16.**

Таблица 5.5.

## Значения ошибок ФЭСС УД в различных условиях эксперимента

Требуемое значение ошибки для $\lambda=30$ мм	Режим работы Главных приводов РТ	Весовая деформация	Ветровое воздействие	Деформация от ускорения РТ	Деформация от температурного градиента конструкции РТ	Достигнутые медианные значения ошибки			Режим функционирования РТ
						УМП $\varepsilon_0$ угл. сек	КП $\varepsilon_0$ угл. сек	Эллипсоидные оценки $\varepsilon_{0m}, \varepsilon_{0M}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.43 угл.сек	УМП большой скорости с оптимальным по быстродействию реверсом и переходом на круговое вращение с максимальной скоростью	Со скоростью 7 угл. сек/С и ускорением 2.8 угл. сек/С <sup>2</sup> при разгоне и торможении РТ (в угломестной плоскости)	Шквальный ветер со скоростью V=20М/С и порывами $\Delta V=[-5; 5]$ М/С	Знакопеременная со значениями [-9.45; 9.45] угл. сек	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4} \text{ С}^{-1}$	0.259	нет	0.05 0.21	Наведение на ОРАН (РФРТ №1)
2.43 угл.сек	Азимутальный привод большой скорости с оптимальным по быстродействию реверсом и переходом на круговое вращение с максимальной скоростью	В коллимационной плоскости отсутствует	Шквальный ветер со скоростью V=20М/С и порывами $\Delta V=[-5; 5]$ М/С	Знакопеременная со значениями [-9.45; 9.45] угл. сек	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4} \text{ С}^{-1}$	нет	0.253		

Продолжение таблицы 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.43 угл.сек	Угломестный привод малой скорости	Со скоростью 0.175 угл.сек. /С	Шквальный ветер со скоростью V=20м/с и порывами $\Delta V = [-5; 5]$ М/С	нет	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4}$ С <sup>-1</sup>	0.249	нет	0.049 0.205	Наблюдение ОРАН в дневных условиях (РФРТ №2) ОРАН
2.43 угл.сек	Азимутальный привод малой скорости	В коллимационной плоскости отсутствует	Шквальный ветер со скоростью V=20м/с и порывами $\Delta V = [-5; 5]$ М/С	нет	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4}$ С <sup>-1</sup>	нет	0.2351		
2.43 угл.сек	Угломестный привод малой скорости	Со скоростью 0.175 угл.сек. /С	Ветер со скоростью V=[0; 5] М/С	нет	нет	0.21	нет	0.042 0.119	Наблюдение ОРАН в ночных условиях
2.43 угл.сек	Азимутальный привод малой скорости	В коллимационной плоскости отсутствует	Ветер со скоростью V=[0; 5] М/С	нет	нет	нет	0.0095		(РФРТ №3)

Таблица 5.6.

## Значения ошибок ФЭСС ЛД при различных условиях эксперимента

Требуемое значение ошибки для $\lambda=30$ мм	Режим работы Главных приводов РТ	Весовая деформация	Ветровое воздействие	Деформация от ускорения РТ	Деформация от температурного градиента конструкции РТ	Достигнутые медианные значения ошибки			Режим функционирования РТ
						УМП $\epsilon_0$ мм	КП $\epsilon_0$ мм	Эллипсоидные оценки $\epsilon_{0m}, \epsilon_{0M}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.43 угл.сек	УМП большой скорости с оптимальным по быстродействию разгоном, торможением и переходом на круговое вращение с максимальной скоростью	Со скоростью 7 угл.сек/С и ускорением 2.8 угл. сек/С <sup>2</sup> при разгоне и торможении РТ(в угломестной плоскости)	Шквальный ветер со скоростью V=20м/с и порывами $\Delta V=[-5; 5]$ М/С	Знакопеременная со значениями [-9.45; 9.45] угл. сек	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4} \text{С}^{-1}$	0.09	нет	0.002 0.122	Наведение на ОРАН (РФРТ №1)
	АП большой скорости с оптимальным по быстродействию реверсом и переходом на круговое вращение с макс. скоростью	В коллимационной плоскости отсутствует	2.43 угл.сек	Знакопеременная со значениями [-9.45; 9.45] угл. сек	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4} \text{С}^{-1}$	нет	0.085		

Продолжение таблицы 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.43 угл.сек	УМП малой скорости	Со скоростью 0.175 угл.сек. /С	Шквальный ветер со скоростью $V=20\text{М/С}$ и порывами $\Delta V=[-5; 5]\text{М/С}$	нет	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4}\text{С}^{-1}$	0.082	нет	0.002 0.12	Наблюдение ОРАН в дневных условиях (РФРТ №2) ОРАН
2.43 угл.сек	АП малой скорости	В коллимационной плоскости отсутствует	Шквальный ветер со скоростью $V=20\text{М/С}$ и порывами $\Delta V=[-5; 5]\text{М/С}$	нет	До 80 угл.сек и циклом изменения с круговой частотой $1.4544 \cdot 10^{-4}\text{С}^{-1}$	нет	0.08		
2.43 угл.сек	УМП малой скорости	Со скоростью 0.175 угл.сек/С	Ветер со скоростью $V=[0; 5]\text{М/С}$	нет	нет	0.071	нет	0.0018 0.1192	Наблюдение ОРАН в ночных условиях (РФРТ №3)
2.43 угл.сек	АП малой скорости	В коллимационной плоскости отсутствует	Ветер со скоростью $V=[0; 5]\text{М/С}$	нет	нет	нет	0.07		

Таблица 5.7

## Значения ошибок ФЭСС стабилизации ОДН в различных условиях эксперимента

Требуемое значение ошибки и для $\lambda=30$ мм	Характеристика девиации ОДН	Достигнутые значения ошибки														
		Угломестная плоскость					Коллимационная плоскость					Эллипсоидные оценки				
		$\epsilon_0$ угл. сек	$\epsilon_{11}$ угл. сек	$\epsilon_{12}$ угл. сек	$\epsilon_{21}$ угл. сек	$\epsilon_{22}$ угл. сек	$\epsilon_0$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{12}$	$\epsilon_{21}$	$\epsilon_{22}$	$\epsilon_{0m}$ $\epsilon_{0M}$	$\epsilon_{1m}$ $\epsilon_{1M}$	$\epsilon_{12m}$ $\epsilon_{1M}$	$\epsilon_{21m}$ $\epsilon_{2M}$	$\epsilon_{22m}$ $\epsilon_{2M}$
2.43 угл.сек	девиация ОДН представляет собой экспоненциально коррелированный стохастический процесс в угломестной и коллимационной плоскостях с дисперсией $D_{\text{ОДН}}=576$ угл.сек <sup>2</sup> , сформированной фильтром с эффективной полосой $\Omega_{\text{ОДНО}}=0.0032$ С <sup>-1</sup>	4.47 $10^{-4}$	4.7 $10^{-4}$	4.5 $10^{-4}$	4.2 $10^{-4}$	4.5 $10^{-4}$	4.47 $10^{-4}$	4.7 $10^{-4}$	4.5 $10^{-4}$	4.2 $10^{-4}$	4.5 $10^{-4}$	4.47 $10^{-4}$	4.8 $10^{-4}$	4.5 $10^{-4}$	4.2 $10^{-4}$	4.4 $10^{-4}$

Полученные в результате проведенных экспериментальных исследований ФЭСС СКУЛД значения их ошибок обнаруживают заметный потенциал для гарантий всесезонной и широковолновой вплоть до длины волны излучения  $\lambda=10$  мм (до частоты излучения  $f=30$  ГГц) эксплуатации деформируемого большого полноповоротного радиотелескопа типа ТНА 1500, оборудованного системой фокусно-угловой компенсации деформаций верхнего опорного узла, информационное обеспечение функционирования которой осуществляется средствами СКУЛД.

У разработчиков средств опто-электронного мониторинга деформаций с использованием фотоэлектрического следящего преобразования в условиях интервальности модельных представлений имеется алгоритмический потенциал для высказанных выше гарантий, опирающийся на возможности использования принципа внутренней модели при разработке алгоритмов управления измерительными ФЭСС.

### Контрольные вопросы

5.1. Почему при построении оптических систем СКУД и СКЛД при необходимости изменения направления хода оптического луча используются пентопризмы, а не плоские зеркала?

5.2. Чем отличаются модели деформаций ВОУ в угломестной и коллимационной плоскостях?

5.3. Почему при формировании измерений деформаций ВОУ нельзя ограничиться измерением только его линейных деформаций?

5.4. Почему при построении измерительного комплекса угловых и линейных деформаций ВОУ необходимо вводить систему пространственной стабилизации выходного луча лазера, используемого в качестве зондирующего луча измерительной системы?

5.5. Для каких целей в состав опто-электронных следящих систем, использующих полудисковый модулятор для анализа полученных изображений, вводится резонансный усилитель, настроенный на частоту вращения полудиска?

5.6. Как формируются требования к полной ошибке  $\varepsilon_{\text{ФЭСС}}$  фотоэлектрической измерительной следящей системы при мониторинге деформаций ВОУ при заданной длине  $\lambda$  излучения РТ и диаметре раскрытия главного рефлектора (ГР)?

5.7. Как формируются требования к фокусу формирующей оптической системы (ФОС), размещаемой на полудисковом модуляторе?

5.8. Как формируется значение характеристической частоты  $\omega_0$  выбранной полиномиальной модальной модели, на основе использования которой синтезируется медианное модальное управление исполнительными

приводами оптико-механических компенсаторов фотоэлектрических измерительных систем СЭЖД?

5.9. Как по реализации стохастического процесса стационарного в широком смысле осуществить экспресс-оценку интервала корреляции?

5.10. Реализуем ли в модельной среде стохастический процесс стационарный в широком смысле типа «белый шум»?

5.11. Какие функциональные элементы типовой двухканальной фотоэлектрической системы опто-электронного следящего мониторинга деформаций вносят интервальность в их модельное представление?

5.12. Чем объясняется возможность использования медианной версии линеаризованной пеленгационной характеристики фотодатчика, представляемой диагональной матрицей, при описании процессов в установившемся режиме без контроля оценки ее относительной интервальности?

5.13. Как должны соотноситься величина  $\mu$  матрицы перекрестных антисимметричных связей между каналами системы и величина  $\Delta\varphi$  запаса устойчивости идентичных сепаратных каналов, чтобы двухканальная система была устойчива?

5.14. По каким критериям эквивалентируются непрерывный и дискретный экспоненциально коррелированные окрашенные стохастические скалярные процессы?

5.15. Как связаны матрица интенсивности  $N$  непрерывного белого шума и матрица дисперсий  $V$  дискретного белого шума, с помощью которых на выходах формирующих фильтров первого порядка формируются эквивалентные экспоненциально коррелированные процессы?

5.16. Как в оболочке Matlab – Simulink поставить эксперимент по исследованию непрерывной системы под воздействием непрерывного белого шума интенсивности  $N$ ?

5.17. Как в оболочке Matlab – Simulink можно промоделировать ветровое воздействие с порывами?

5.18. Какой из режимов функционирования РТ является самым «тяжелым» для измерения деформаций ВОУ?

5.19. Как моделируется в оболочке Matlab – Simulink оптимальный разгон и торможение силовых приводов?

5.20. Как должны соотноситься величина  $\mu$  матрицы перекрестных антисимметричных связей между каналами системы и величина  $\Delta\varphi$  запаса устойчивости идентичных сепаратных каналов, чтобы двухканальная система оказалась на границе устойчивости?

5.21. Зависит ли запас устойчивости  $\Delta\varphi$  по фазе системы типа «одномерный вход – одномерный выход» с передаточной функцией вход-выход  $Ц(s, \omega_0)$ , коэффициенты которой параметризованы характеристической частотой  $\omega_0$ , от частоты  $\omega_0$ ?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Книга, которую читатель подержал в руках, полистал ее, а возможно и прочитал, написана специалистами в области теории управления и информационных систем, поэтому в содержании книги явно просматривается доминирование задач теории и практики динамических систем, используемых в первичных измерениях комплексной задачи опто-электронного мониторинга деформаций устройства пространственного наблюдения, реализованного в форме большого полноповоротного радиотелескопа, при решении задачи динамической юстировки его радио-оптической приемо-передающей системы.

Тем не менее тот факт, что они сложились как научные работники в стенах университета, основная специфика которого в отличие от многих технических университетов страны состоит в использовании оптической среды для организации информационных процессов и процессов управления, влияние этой специфики на научное и техническое мировоззрение авторов хорошо просматривается.

Если иметь в виду системные концепции Р.Калмана: «надо перестать гонять железки, пора начинать гонять электроны» и «мало точно измерять, надо точно и обрабатывать», то становится понятным направление дальнейшего развития методов решения проблем, затронутых в книге.

Это в первую очередь переход на регулярные ППЗ-структуры в трактах первичных измерений деформаций, использование волоконно-оптических линий для их передачи, а также использование возможностей современных сетевых технологий. В алгоритмической части необходимо осуществить переход от прямых измерений, как с использованием метода непосредственного преобразования, так и метода следящего преобразования, к формированию результатов измерений в алгоритмической среде цифрового динамического наблюдения процесса деформации, обогащаемого знанием математической модели динамики деформаций.

Таким образом, студент, магистр, аспирант и просто молодой специалист должен вынести суждение, что комплексный характер научных и технических разработок по созданию систем опто-электронного мониторинга деформаций устройств пространственного наблюдения для осуществления их динамической эксплуатационной юстировки применительно к большим радиотелескопам будет в ближайшие годы оставаться актуальной проблемой.

К тому же следует обратить внимание на складывающуюся в последнее время оптимистическую тенденцию оживления созидательных процессов в радиоастрономии. Это в первую очередь участие в международных и национальных проектах «КВАЗАР – КВО», «Радиоастрон и космическая радиоастрономия», «Низкочастотная РДСБ – сеть LFVN», «СКА», «LOFAR», «ALMA», а также завершение разработок, строительства и запуск в эксплуатацию больших полноповоротных параболических радиотелескопов: РТ – 32 в г. Старая Пустынь, РТ – 70 в г. Уссурийске, РТ – 70 в м. Суффа, РТД – 80 с диаметром главного рефлектора 80 метров.

Таким образом, потребность специалистов в области радиоастрономии иметь надежно функционирующие системы опто-электронного мониторинга деформаций УПН и динамической юстировки радиооптических приемопередающих систем больших полноповоротных радиотелескопов в полной мере может быть удовлетворена интеллектуальным потенциалом ученых и специалистов – выпускников нашего университета, чему должно помочь настоящее пособие.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица П 1.1

### КОНСТРУКЦИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОТЕЛЕСКОПА РТФ – 64 (ТНА – 1500) ПАРАМЕТРЫ ОСНОВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

№	Параметр	Ед. измерения	Значение
1.	Диаметр рефлектора	м	64
2.	Радиус венца угломестного сектора	м	28
3.	Фокусное расстояние	м	23,6
4.	Высота угломестной оси над уровнем ромба	м	50,05
5.	Сторона квадрата горизонтальной платформы	м	57
6.	Общее число колес (тележек)	шт.	36
7.	Число колес (тележек) на внутреннем пути	шт.	20
8.	Число колес (тележек) на наружном пути	шт.	16
9.	Радиусы рельсовых путей:		
	– внутреннего	м	39,9976
	– наружного	м	45,9976
10.	Угол наклона качающейся стойки угломестного привода к вертикали	градус	20,18

Таблица П 1.2

### ВЕСОВЫЕ И ИНЕРЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

№ п/п	Элемент	Характеристика			
		масса, т		момент инерции отн. азим. оси, $\times 10^9$	момент инерции отн. угломестной оси, $\times 10^9$
			$\times 1,2$		
1	Несущий каркас	300	360	0,05	0,153
2	ПОК – конус	200	240	0,022	0,066
3	Отражательные щиты	50	60	0,031	0,027
4	Блок каркасы	65	78	0,04	0,033
5	ПОК – пирамида	200	340	0,022	0,013
6	Центральный барабан	67,7	81,2	0,001	0,003
7	Надзеркальная кабина	22,7	27,2	0,001	0,001
8	Вторичная система	18	21,6	0,004	0,004
9	Боковые башни ОПУ (с кабинами)	190	228	0,172	–
10	Горизонтальная платформа (с кабинами)	400	480	0,307	–
11	Качающаяся стойка с механизмами	150	180	0,019	–
12	Балансирная система	250	300	0,484	–
13	Опоры и механизмы азимутального вращения	360	432	0,347	–
<b>Всего:</b>		<b>2273</b>	<b>2728</b>	<b>1,5</b>	<b>0,3</b>

## МАКСИМАЛЬНЫЕ РАБОЧИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

Параметр	При работе двигателя малой скорости	При работе двигателя большой скорости
По азимуту и углу места:	1,5 угл. мин/С ( $0,44 \times 10^{-3}$ рад/С)	1,0 угл. град/С (0,07 рад/С)
– скорость	0,06 угл. мин/С <sup>2</sup>	0,4 угл. град/С <sup>2</sup>
– ускорение	( $0,07 \times 10^{-5}$ рад/С <sup>2</sup> )	(0,007 рад/С <sup>2</sup> )
Максимальное ускорение при аварийном торможении		2 угл. град/С <sup>2</sup> (0,035 рад/С <sup>2</sup> )

РТ имеет азимутально-угломестную монтировку. Радиооптическая схема РТ – схема Грегори, состоящая из следующих элементов:

- облучателя/приемника;
- контррефлектора с фокусным расстоянием 15,1 м, представляющего собой усеченный эллипсоид вращения;
- главного рефлектора с фокусным расстоянием 23,6 м, представляющего собой вырезку из параболоида вращения;
- диапазон рабочих длин волн радиоизлучения  $\lambda = 3 \div 100$  мм;
- диаграмма направленности РОС РТ, оцениваемая по главному лепестку на уровне половинной мощности в зависимости от используемой длины волны излучения  $\Theta_{0.5} = 12 \div 394$  угл. сек согласно соотношению (1.2);
- допустимое среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  расчетного параболоида ГР от параболоида, аппроксимирующего реальную поверхность, образованную подвижными отражательными щитами, на уровне 5%-го уменьшения реального усиления (коэффициента направленного действия) антенны в указанном диапазоне длин волн излучения составляет  $0.09 \div 1.808$  мм;
- основной режим управления (наведения) РТ на ОРН – программный.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П 2.1

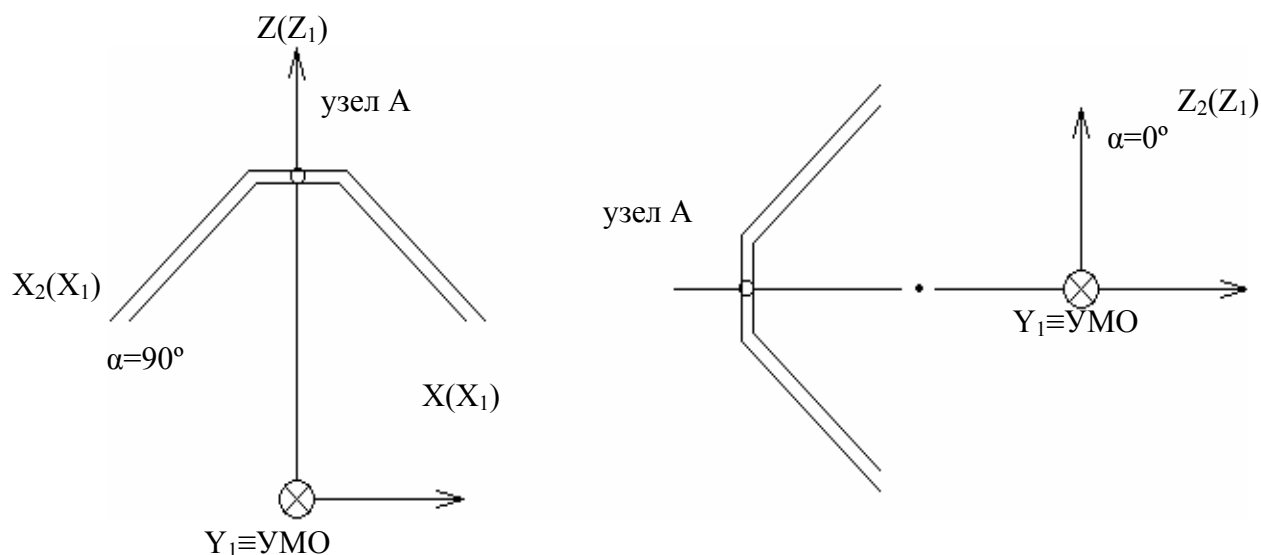
### ОЖИДАЕМЫЕ УГЛОВЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТРЕФЛЕКТОРА В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРАЛЬНОГО БАРАБАНА ОТ СИЛ ВЕСА

Весовые деформации	Угол места	№ узла	Перемещения, (мм)			Поворот вокруг осей, (угл. сек)		
			$\delta x_1$	$\delta y_1$	$\delta z_1$	$x_1$	$y_1$	$z_1$
	$\alpha = 90^0$	а	0	0	-50	0	0	0
$\alpha = 0^0$	а	+10	0	-70	0	-630	0	

Таблица П 2.2

### МАКСИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ ВЕТРОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

$\Delta X_{2max} \cong 40$ мм	$\alpha = 90^0$
$\Delta Y_{2max} \cong 35$ мм	$\alpha = 90^0$
$\Delta Z_{2max} \cong 25$ мм	$\alpha = 90^0$
$\varphi_{x2max} \cong 300$ угл. сек	$\alpha = 90^0$
$\varphi_{y2max} \cong 340$ угл. сек	$\alpha = 90^0$

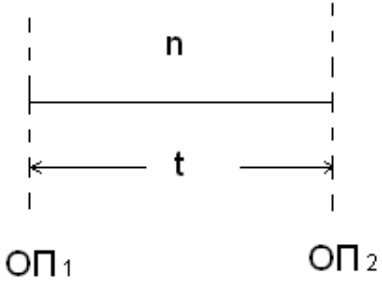
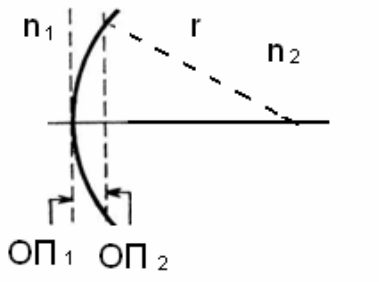
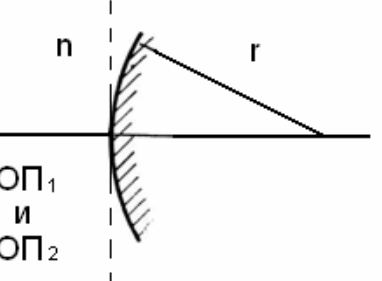
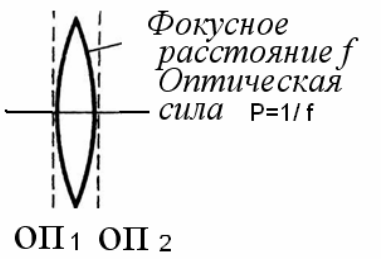


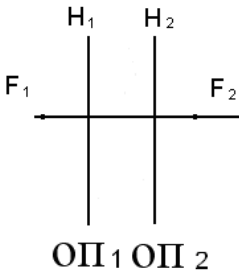
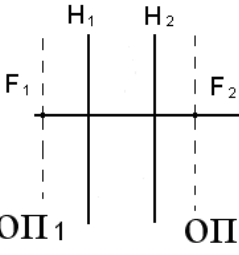
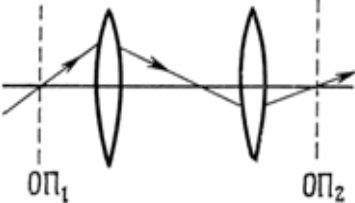
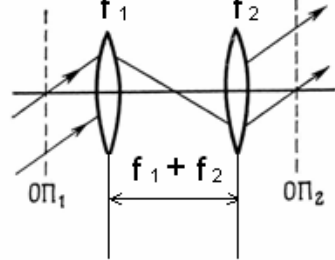
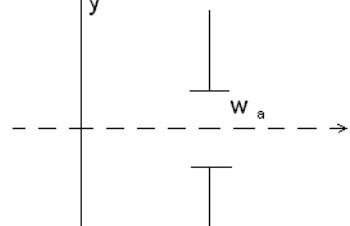
**Рисунок П 2.1.** Схема деформаций верхнего опорного узла, несущего на себе контррефлектор

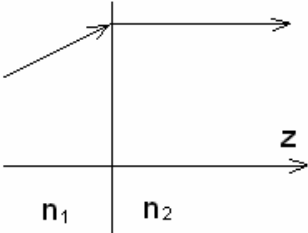
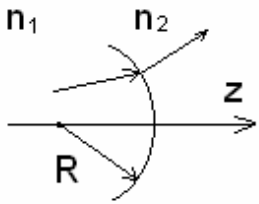
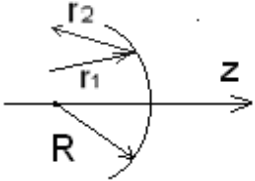
### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица П 3.1

#### МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛУЧЕВЫХ ВЕКТОРОВ (ЛВ)

№ п/п	Описание	Оптическая схема	Матрица преобразования ЛВ
1	2	3	4
1	Перемещение в свободном пространстве ( $G$ – матрица)		$\begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	Преломление на одной поверхности ( $R$ -матрица)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{r} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$
3	Отражение от одной поверхности		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{r} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$
4	Тонкая линза в воздухе (фокусное расстояние $f$ , оптическая сила $P$ )		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$

1	2	3	4
5	Преобразование луча между двумя главными плоскостями системы линз в воздухе (фокусное расстояние $f$ )		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$
6	Преобразование луча между фокальными плоскостями системы линз в воздухе (фокусное расстояние $f$ )		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$
7	Преобразование луча между двумя сопряженными плоскостями оптической системы (поперечное увеличение $m$ и фокусное расстояние $f$ )		$\begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$
8	Афокальная система с поперечным увеличением $m$		$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$
9	Матрица передачи Гауссовской апертуры ( $\lambda$ – длина волны излучения)		$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-j\lambda}{\pi \omega_a^2} & 1 \end{bmatrix}$

1	2	3	4
10	Граница раздела сред с показателями преломления $n_1/n_2$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix}$
11	Сферическая граница раздела сред с показателями преломления		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & n_1/n_2 \end{bmatrix}$
12	Сферическое зеркало с радиусом кривизны $R$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$

МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ РАЗЪЮСТИРОВКИ И  
ДЕЦЕНТРИРОВКИ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В случае отъюстированной и центрированной оптической системы процесс преобразования лучевого вектора (ЛВ)  $\eta_i = [y_i \ V_i]^T$ , характеризуемый в  $i$ -й опорной плоскости ОП<sub>*i*</sub> величиной  $y_i$  линейного смещения лучевого вектора от оптической оси системы  $z$  и направляющим косинусом  $V_i$ , наблюдаемый в  $(i+1)$ -й опорной плоскости ОП<sub>*i+1*</sub>, описывается рекуррентными уравнениями

$$y_{i+1} = A y_i + B V_i, \tag{П 4.1}$$

$$V_{i+1} = C y_i + D V_i, \tag{П 4.2}$$

векторно-матричная версия которых имеет вид

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ V_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ V_i \end{bmatrix}. \tag{П 4.3}$$

Однако, в реальной системе положение оптической оси в опорной плоскости ОП<sub>*i+1*</sub> может быть изменено относительно своего предполагаемого положения на небольшую линейную величину  $\Delta y_i$ . Во многих случаях направление оптической оси также строго не выдерживается, и она может отклоняться от своего номинального направления на небольшой угол  $\Delta V_i$ . Этот же эффект может иметь место и в том случае, когда «плоскопараллельная» пластинка имеет несколько клиновидную форму, когда оптический центр одной из линз слегка смещен от оси и т.д. В этих случаях в уравнения (П 4.3) должны быть добавлены постоянные члены  $\Delta y_i$  и  $\Delta V_i$ . В результате получим представление эффекта разъюстировки, фиксируемой в опорной плоскости ОП<sub>*i+1*</sub>.

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ V_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix}. \tag{П 4.4}$$

К сожалению, форма (П 4.4) для выходного ЛВ не позволяет представить процесс преобразования лучевого вектора в разъюстированной системы простым умножением матрицы системы на вектор входного ЛВ вида (П4.3). Однако, можно предложить прием, который и в новых условиях позволит сохранить это важное свойство матричного умножения: для этого следует воспользоваться «расширенными матрицами» размерности  $3 \times 3$  преобразования расширенного ЛВ. Для этой цели в рассмотрение вводится расширенный ЛВ  $\tilde{\eta} = [y \ V \ 1]^T$ , для которого уравнение (П 4.4) позволяет записать

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ V_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & \Delta y_i \\ C & D & \Delta V_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ V_i \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{П 4.5}$$

Нетрудно проверить путем непосредственного вычисления детерминанта матрицы справедливость следующего утверждения: если  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  – унимодулярная матрица, характеризующаяся единичным значением детерминанта, то и расширенная матрица  $3 \times 3$  – также будет унимодулярной. Векторно-матричное представление (П 4.5) является базовым при описании разъюстированных оптических и радио-оптических систем, коими являются деформированные радиотелескопы.

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ КОМПЕНСАТОРЫ (ОК)

Таблица П 5.1

ОПТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ТИПОВЫХ  
ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ КОМПЕНСАТОРОВ

№ п/п ОК	Тип компенсатора	Оптико-механическая схема компенсатора
1.	Анализатор с микрометричным винтом.	
2.	Плоскопараллельная пластинка в сходящемся пучке лучей.	
3.	Два вращающихся клина в сходящемся пучке лучей	
4.	Клин в сходящемся пучке лучей перемещающийся вдоль оси системы	
5.	Линзовый компенсатор в параллельном пучке лучей	
6.	Телескопическая линза в параллельном пучке лучей	
7.	Телескопическая линза в сходящемся пучке лучей, перемещающаяся перпендикулярно	

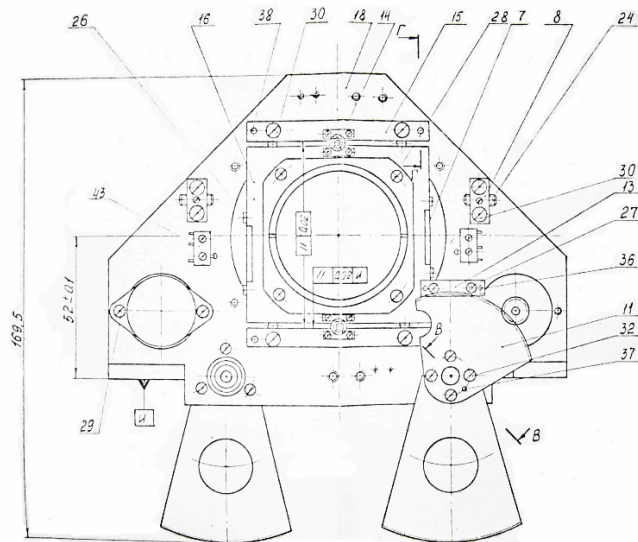


Рисунок П5.1а

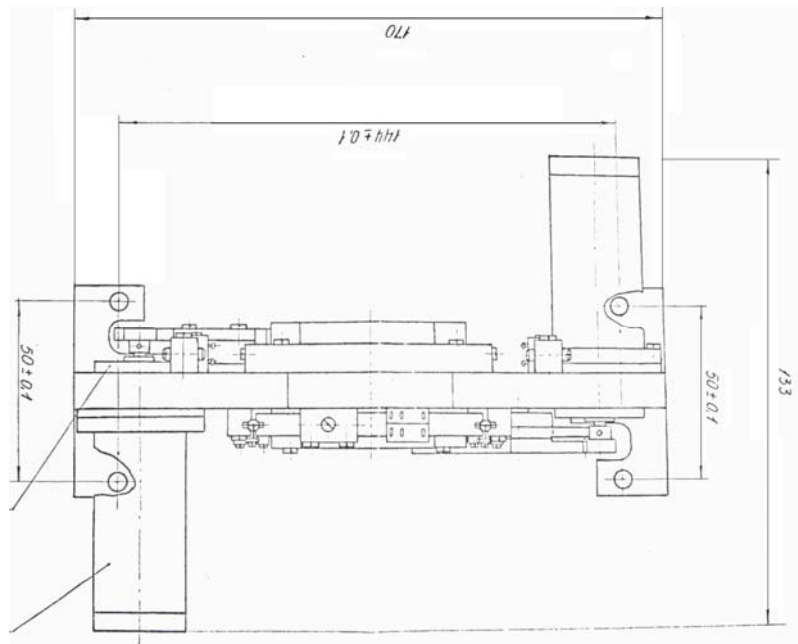


Рисунок П5.1б

На рисунках П5.1(а и б) ОК типа 5 таблицы П5.1 разработки ОКБ ИТМО.

### ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ КОМПЕНСАТОРОВ

№ п/п ОК	Преобразовательная характеристика ОК $\beta = f(\alpha)$ или $\beta = f(x)$	Диапазон линейности преобразовательной характеристики с допуском на нелинейность $\Delta\beta_n$	Крутизна преобразовательной характеристики $K_{ок} = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ или $K_{ок} = \frac{\partial\beta}{\partial x}$	Примечание
1.	$\text{arctg} \frac{s\alpha}{2\pi f'}$	$(3\Delta\beta_n)^{1/3}$	$\frac{2\pi f'}{s}$	$\Delta\beta_M < \frac{1}{3}\beta^3$ $s$ - шаг винта; $f'$ - фокусное расстояние объектив системы
2.	$\frac{d}{f'} \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin 2(\alpha + \beta)}{2\sqrt{n^2 - (\sin(\alpha + \beta))^2}} \right]$	$\frac{n-1}{n} \left[ \frac{6}{4(n-1)^{-1} - 3n^{-2}} \right]^{1/3} \times \left[ \frac{d}{f'} \right]^{2/3} \times (\Delta\beta_n)^{1/3}$	$\frac{nf'}{(n-1)d} - 1$	$n$ - коэффициент преломления материала $d$ - толщина плоскопараллельной пластины
3.	$2\sigma(n-1)\sin\alpha$	$[2\sigma(n-1)]^{2/3} (6\Delta\beta_n)^{1/3}$	$[2\sigma(n-1)]^{-1}$	$\sigma$ - преломляющий угол клина
4.	$\frac{x\sigma(n-1)}{f'} \left( 1 + \frac{n+1}{2n} i^2 \right)$	$\left[ \frac{2f'n}{x\sigma(n^2-1)} \Delta\beta_n \right]^{1/2}$	$\frac{1}{2\sigma(n-1)}$	$i$ - угол падения луча на преломляющую грань клина
5.	$\text{arctg} \left( \frac{x}{f'_n} \right)$	$(3\Delta\beta_n)^{1/3}$	$f'_n$	$f'_n$ - фокусное расстояние линзы О
6.	$\text{arctg} \left( \frac{\varepsilon \text{tg}\alpha}{1 + \varepsilon + (\text{tg}\alpha)^2} \right)$	$\left( \frac{3\varepsilon^2}{2 + \varepsilon} \Delta\beta_n \right)^{1/3}$	$\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}$	$\varepsilon = \gamma - 1$ , $\gamma$ - увеличен телескопической лин с фокусным расстоянием $f'_n$
7.	$\text{arctg} \left( \frac{x\varepsilon}{f'\gamma} \right)$	$(3\Delta\beta_n)^{1/3}$	$\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} f'$	

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ  
МОДАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ

При задании модальных моделей желаемых процессов широкое распространение получили полиномиальные динамические модели. Под полиномиальной динамической модальной моделью (ПДММ) синтезируемой системы понимается модель, матрица состояния которой является сопровождающей матрицей некоторого стандартного полинома  $D(s) = s^n + v_1 s^{n-1} + \dots + v_n$ . Для погружения в аппарат ПДММ рассмотрим векторно-матричное описание (ВМО) синтезируемой системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), y(t) = Cx(t), \quad (\text{П } 6.1)$$

где  $g(t)$ - вектор внешнего (экзогенного) воздействия. Система (П 6.1) характеризуется передаточной матрицей

$$\Phi(s) = C(sI - F)^{-1} G. \quad (\text{П } 6.2)$$

Сепаратный канал объекта, связывающий  $i$ -й выход  $y_i$  и  $j$ -й вход  $g_j$ , описывается передаточной функцией

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{g_j(s)} = C^i (sI - F)^{-1} G_j, \quad (\text{П } 6.3)$$

где  $C^i$  -  $i$ -я строчка матрицы выхода  $C$ ;  $G_j$  -  $j$ -й столбец матрицы входа  $G$ . Если рассмотреть случай равенства числа выходов и входов объекта управления (ОУ), то в предположении, что каждый  $ii$ -й сепаратный канал реализован в виде модели с единичной отрицательной связью по выходу  $y_i$ , его можно охарактеризовать передаточными функциями:

$$\Phi_i(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{g_j(s)} = \frac{v_{in}}{s^n + v_{i1} s^{n-1} + v_{i2} s^{n-2} + \dots + v_{in-1} s + v_{in}} \quad (\text{П } 6.4)$$

$$W_i(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{\varepsilon_i(s)} = \frac{v_{in}}{s(s^{n-1} + v_{i1} s^{n-2} + \dots + v_{in-1})} \quad (\text{П } 6.5)$$

где  $\frac{v_{in}}{v_{in-1}} = D_i$  - добротность по скорости  $ii$ -го канала;

$$\Phi_{\varepsilon i}(s) = \frac{\Delta \varepsilon_i(s)}{g_j(s)} = \frac{s^n + v_{i1} s^{n-1} + v_{i2} s^{n-2} + \dots + v_{in-1} s}{s^n + v_{i1} s^{n-1} + v_{i2} s^{n-2} + \dots + v_{in-1} s + v_{in}} \quad (\text{П } 6.6)$$

В дальнейшем рассматриваются только модели сепаратных каналов, поэтому для простоты индекс « $i$ » опускается.

Наиболее употребительными полиномами, используемыми при назначении желаемой динамической модели управляемого процесса, являются полином Баттерворта (таблица П 6.1) и бином Ньютона (таблица П 6.2).

Коэффициенты этих полиномов параметризованы характеристической частотой  $\omega_0$ , так что  $v_k = v_{k0} \omega_0^k$ . Это позволяет определить параметризованные частотой  $\omega_0$  следующие динамические характеристики полиномиальных динамических моделей при фиксированных значениях перерегулирования  $\sigma$ : время, при котором наблюдается перерегулирование,  $t_\sigma = t_\sigma(\omega_0)$ ; длительность переходного процесса  $t_\Pi = t_\Pi(\omega_0)$ ; добротность по скорости  $D = D(\omega_0)$ ; полосу пропускания модели  $\Delta\omega = \Delta\omega(\omega_0)$  на уровнях:  $M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \geq 0.707$ ;  $M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \geq 0.05$ ;  $|1 - M(\omega)| = |1 - |\Phi(j\omega)|| \leq 0.05$ ;  $\delta(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)| \leq 0.05$ , а также значения частот среза  $\omega_c$  и запасы устойчивости  $\Delta\varphi$  по фазе.

Указанные динамические характеристики ПДММ для перечисленных двух типов наиболее употребительных стандартных полиномов с первого по пятый порядок  $n = (\overline{1, 5})$  приведены в таблицах П 6.1, П 6.2.

Для случая, когда ПДММ (П 6.1) возбуждается окрашенным, например, экспоненциально коррелированным, шумом  $\xi(t)$  с дисперсией  $D_\xi$ , образованным прохождением белого шума  $w(t)$  с интенсивностью  $N$  через формирующий фильтр первого порядка с полосой пропускания на уровне 0.707 амплитудного спектра  $\Delta\omega$  равной  $\Omega_\phi$

$$\dot{\eta}(t) = \Gamma_\phi \eta(t) + B_\phi w(t), \quad \xi(t) = P_\phi \eta(t), \quad (\text{П } 6.7)$$

где  $\Gamma_\phi = -\Omega_\phi$ ,  $B_\phi = \Omega_\phi$ ,  $P_\phi = 1$ , на основе решения матричного уравнения типа Ляпунова

$$E D_\zeta + D_\zeta E^T = -LNL^T, \quad (\text{П } 6.8)$$

где  $E, L$  матрицы составной системы, образованной ПДМ и формирующим фильтром;

$$\dot{\zeta}(t) = E\zeta(t) + Lw(t), \quad y(t) = C_y \zeta(t), \quad \varepsilon = C_\varepsilon \zeta(t), \quad \zeta = [x^T \quad \eta^T]^T, \quad (\text{П } 6.9)$$

имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} F & GP_\phi \\ 0 & \Gamma_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & -\Omega_\phi \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_\phi \end{bmatrix}, \quad C_y = [C \quad 0], \quad C_\varepsilon = [-C \quad P_\phi],$$

Аналитические выражения для дисперсий выхода  $D_y$  и ошибки  $D_\varepsilon$ , определяемых из матрицы дисперсий состояния составной системы  $D_\zeta$  можно получить с помощью соотношений:

$$D_y = C_y D_\zeta C_y^T; \quad D_\varepsilon = C_\varepsilon D_\zeta C_\varepsilon^T$$

Полученные результаты для перечисленных выше полиномиальных динамических моделей приведены в таблицах П 6.3, П 6.4. В таблицах

приводятся аналитические выражения для относительных дисперсий  $\bar{D}_y = D_y / D_\xi$ ,  $\bar{D}_\varepsilon = D_\varepsilon / D_\xi$  параметризованных относительной характеристической частотой  $\bar{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_\phi$ , так что  $\bar{D}_y = \bar{D}_y(\bar{\omega}_0)$ ,  $\bar{D}_\varepsilon = \bar{D}_\varepsilon(\bar{\omega}_0)$

Модельно в виде экспоненциально коррелированного шума  $\xi(t)$  описывается широкий класс помех различной физической природы, имеющих близкую к равномерной в эффективном частотном диапазоне  $\Omega_\phi$  функцию спектральной плотности.

Если значение  $\Omega_\phi$  в полученных аналитических выражениях для дисперсий устремить к бесконечности, то получим случай поведения полиномиальных динамических моделей при входном воздействии типа “белый шум”  $w(t)$ . Для этого случая в тех же таблицах приведены значения еще одной стохастической характеристики ПДММ – интервал корреляции выхода  $y(t)$ . Интервал корреляции оценивается на пяти процентном уровне, т. е. при условиях

$$\tau_k = \min \tau_k ; |R_y(\tau)| \leq 0.05 R_y(0), \text{ при } \tau \geq \tau_k$$

Построение корреляционной функции  $R_y(\tau)$ , а, следовательно, оценка  $\tau_k$  обеспечивается матричным соотношением  $F D_x + D_x F^T = -B N B^T$

$$R_y(\tau) = C \Phi(\tau) D_x C^T, \quad (\text{П 6.10})$$

где  $\Phi(\tau)$  – фундаментальная матрица ПДМ  $D_x$  – матрица дисперсий вектора состояния ПДМ.

В модельном плане корреляционная функция  $R_y(\tau)$  выхода ПДММ представляет собой весовую функцию системы с матрицей состояния  $F$ , выхода  $C$  и входа  $D_x C^T$ . В приводимых таблицах интервал корреляции параметризован характеристической частотой  $\omega_0$  ПДММ. В случае необходимости воспроизведения корреляционной функции (П 6.10) следует воспользоваться автономной версией ПДММ  $\dot{x}(t) = Fx(t), x(0), y(t) = Cx(t)$ , в которой положить  $x(0) = D_x C^T$ , в результате чего на выходе ПДММ будет наблюдаться  $y(t)|_{t=\tau} = R_y(\tau)$ .

Если возникает необходимость вычисления матрицы  $S_x(\omega)$  спектральных плотностей вектора состояния и воспроизведения функции  $S_y(\omega)$  спектральной плотности выхода, то следует воспользоваться выражениями

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \quad (\text{П 6.11})$$

$$S_y(\omega) = C S_x(\omega) C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \quad (\text{П 6.12})$$

Таким образом, при формировании модальной модели ее матрица состояния  $\Gamma$  должна обладать спектром  $\sigma\{\Gamma\}$  собственных значений, элементы которого должны иметь или *распределение Баттерворта*, или *биномиальное распределение Ньютона*. Наличие приведенных таблиц позволяет отобразить

требования к показателям  $\{\pi_\nu; \nu = \overline{1, \rho}\}$  качества процессов проектируемой системы в переходном и установившемся режимах в *требование* к значению  $\omega_0$  характеристической частоты ПДММ. Итоговое значение  $\omega_0$  ищется из условия  $\omega_0 = \max_\nu \{\arg[\pi_\nu(\omega_0)R_\nu\pi_{r\nu}]; \nu = \overline{1, \rho}\}$ , где  $R_\nu, \pi_{r\nu}$  – соответственно *отношение порядка* (типа «больше», «меньше»), требуемое значение  $\nu$ -го показателя качества. Полученное значение  $\omega_0$  характеристической частоты кладется в основу построения матрицы состояния модальной модели в форме  $\Gamma = \Gamma(\omega_0)$ .

Таблица П 6.1

Порядок $n$	Аналитическое выражение полинома	$\sigma, \%$	$t_\sigma \omega_0$	$t_{II} \omega_0$	$D/\omega_0$	$(\Delta\varphi)$	$\omega_c \omega_0^{-1}$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								$M \geq 0.707$	$M \geq 0.05$	$ 1-M  \leq 0.05$	$\delta \leq 0.05$
1	$s + \omega_0$		-	3	1	90	1	1	20	0.3 2	0.0 51
2	$s^2 + 1.414\omega_0 s + \omega_0^2$	5	3.8	4.5	0.7	65. 53	0.6436	1	4.1 34	0.5 23	0.0 35
3	$s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s$	9	4.9 5	6.2 5	0.5	60. 49	0.4963	1	2.6 04	0.6 18	0.02 57
4	$s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4$	11	5.5 5	7	0.3 85	59. 84	0.3934	1	02. 11	0.7 01	0.0 2
5	$s^5 + 3.24\omega_0 s^4 + 5.24\omega_0^2 s^3 + 5.24\omega_0^3 s^2 + 3.24\omega_0^4 s + \omega_0^5$	13	6.3	8	0.3 1	60. 05	0.3189	1	1.7 82	0.7 74	0.0 17

Таблица П 6.2

Порядок $n$	Аналитическое выражение полинома	$\sigma, \%$	$t_{\sigma} \omega_0$	$t_{\Pi} \omega_0$	$D/\omega_0$	$(\Delta\varphi)$	$\omega_c \omega_0$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								$M \geq 0.707$	$M \geq 0.05$	$ 1-M  \leq 0.05$	$\delta \leq 0.05$
1	$s + \omega_0$	0	-	3	1	90	1	1	20	0.3 2	0.0 51
2	$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$	0	-	4.8	0.5	76. 35	0.4 86	0.6 5	5.0 4	0.2 52	0.0 24
3	$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$	0	-	6	0.3 33	71. 25	0.3 26	0.5	2.7 82	0.1 7	0.0 17
4	$s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$	0	-	7.8	0.2 5	68. 58	0.2 48	0.4 4	2.0	0.1 44	0.01 35
5	$s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5$	0	-	9	0.2	66. 94	0.2	0.4	1.5 4	0.1 28	0.01 07

Таблица П6.3

Порядок n	Интервал корреляции $\tau_k$	Дисперсия	Аналитическое выражение относительных дисперсий
1	$\frac{3}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{1}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
2	$\frac{3}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^2 + 0.707\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^2 + 1.414\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{2.121\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^2 + 1.414\bar{\omega}_0 + 1}$
3	$\frac{5.6}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^3 + 1.333\bar{\omega}_0^2 + 0.667\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^3 + 2\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{3.333\bar{\omega}_0^2 + 2.667\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^3 + 2\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
4	$\frac{5.89}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^4 + 1.967\bar{\omega}_0^3 + 1.714\bar{\omega}_0^2 + 0.659\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^4 + 2.6\bar{\omega}_0^3 + 3.4\bar{\omega}_0^2 + 2.6\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{4.567\bar{\omega}_0^3 + 5.114\bar{\omega}_0^2 + 3.259\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^4 + 2.6\bar{\omega}_0^3 + 3.4\bar{\omega}_0^2 + 2.6\bar{\omega}_0 + 1}$
5	$\frac{5.94}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^5 + 2.586\bar{\omega}_0^4 + 3.139\bar{\omega}_0^3 + 2.093\bar{\omega}_0^2 + 0.646\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 3.24\bar{\omega}_0^4 + 5.24\bar{\omega}_0^3 + 5.24\bar{\omega}_0 + 3.24\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{5.826\bar{\omega}_0^4 + 8.379\bar{\omega}_0^3 + 7.333\bar{\omega}_0^2 + 3.886\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 3.24\bar{\omega}_0^4 + 5.24\bar{\omega}_0^3 + 5.24\bar{\omega}_0^2 + 3.24\bar{\omega}_0 + 1}$

Таблица П 6.4

Порядок n	Интервал корреляции $\tau_k$	Дисперсия	Аналитическое выражение относительных дисперсий
1	$\frac{3}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{1}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
2	$\frac{3.6}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^2 + 0.5\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{2.5\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
3	$\frac{5.85}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^3 + 1.125\bar{\omega}_0^2 + 0.375\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^3 + 3\bar{\omega}_0^2 + 3\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{4.125\bar{\omega}_0^2 + 3.375\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^3 + 3\bar{\omega}_0^2 + 3\bar{\omega}_0 + 1}$
4	$\frac{6.25}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^4 + 1.813\bar{\omega}_0^3 + 1.125\bar{\omega}_0^2 + 0.313\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^4 + 4\bar{\omega}_0^3 + 6\bar{\omega}_0^2 + 4\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{5.813\bar{\omega}_0^3 + 7.25\bar{\omega}_0^2 + 4.313\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^4 + 4\bar{\omega}_0^3 + 6\bar{\omega}_0^2 + 4\bar{\omega}_0 + 1}$
5	$\frac{7.44}{\omega_0}$	$\bar{D}_y$	$\frac{\bar{\omega}_0^5 + 2.539\bar{\omega}_0^4 + 2.695\bar{\omega}_0^3 + 1.367\bar{\omega}_0^2 + 0.273\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 5\bar{\omega}_0^4 + 10\bar{\omega}_0^3 + 10\bar{\omega}_0^2 + 5\bar{\omega}_0 + 1}$
		$\bar{D}_\varepsilon$	$\frac{7.539\bar{\omega}_0^4 + 12.7\bar{\omega}_0^3 + 11.367\bar{\omega}_0^2 + 5.273\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^5 + 5\bar{\omega}_0^4 + 10\bar{\omega}_0^3 + 10\bar{\omega}_0^2 + 5\bar{\omega}_0 + 1}$

М – ФАЙЛ\_1 «РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ  
ДЕФОРМАЦИЙ ВЕРХНЕГО ОПОРНОГО УЗЛА,  
ПОРОЖДЕННЫХ ВЕТРОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ»

```

clear; echo off;
format short g;
%Ввод исходных параметров
w=input('Резонансная частота антенны=?');
M=input('Показатель колебательности=?');
Om=1;
N=9.74e-8;
v1=((sqrt(1-(M^2)^-1))^(-1))*w^2;
v2=2^0.5*w*(((sqrt(1-(M^2)^-1))^(-1)-1)^0.5); v3=Om;
%Расчет модели формирующего фильтра
Gammaf=[-v3]; Gf=[v3]; Pf=[1];
%Расчет модели деформаций металлоконструкций
Fd=[0 1;-v1 -v2]; Gd=[0; v1]; Cd=[1 0];
F=[Fd Gd*Pf; zeros(size(1:2)) Gammaf]; B=[0;0;Gf];
C=[Cd 0]; Cwind=[0 0 Pf];
dw=0.002; limit1=0.1; limit2=10; delta=limit2-limit1;
NN=fix(delta/dw);
%Расчет дисперсий
Dx=lyap(F,B*N*B'); Dy=C*Dx*C';
for i=1:NN
omega=limit1+i*dw;omegai(i)=omega;
%Расчет спектральной плотности линейных стохастических деформаций
Sx=-2*F*inv((omega^2*eye(3)+F^2))*Dx;
Sy=C*Sx*C'; Swind=Cwind*Sx*Cwind';
Syi(i)=Sy; Swindi(i)=Swind;
end;
Sigw=sqrt(Syi);
figure(1);loglog(omegai,Syi,'r'); grid;title('spectral densities [loglog]');
figure(2);semilogx(omegai,Syi,'.');grid;title('spectral density');

```

М – ФАЙЛ\_2 «РАСЧЕТ МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ  
ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТНОЙ ОШИБКИ ХАРИТОНОВСКИХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

```

clear; echo off;
format short g;
%Характеристическая частота полиномиальной динамической модели
%om=3;
om = input('характеристическая частота om=?');
%Матричные компоненты автономной конечномерной системы минимальной
размерности
C=[1 0 0];
G1=[0;0;(-20+om^3)];
G2=[0;0;(20+om^3)];
G3=[0;0;(20+om^3)];
G4=[0;0;(-20+om^3)];
A=eye(3);
P=[1 0];
%Расчет матричных компонентов агрегированной системы
%F1
F1=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F2
F2=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F3
F3=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F4%
F4=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
for w1=1:10000
dw=0.1;
w=w1*dw;
T1=-inv((w^2*eye(3)+F1^2))*[F1*G1,w*G1];
Neps1=(P –
C*T1);
T2=-inv((w^2*eye(3)+F2^2))*[F2*G2,w*G2];
Neps2=(P-C*T2);
T3=-inv((w^2*eye(3)+F3^2))*[F3*G3,w*G3];
Neps3=(P-C*T3);
T4=-inv((w^2*eye(3)+F4^2))*[F4*G4,w*G4];
Neps4=(P-C*T4);
%Расчет критериальной матрицы
N=[Neps1 0 0 0 0 0; 0 0 Neps2 0 0 0; 0 0 0 0 Neps3 0 0; 0 0 0 0 0 0 Neps4];
b=svds(N);
%Расчет мажоранты относительной частотной ошибки
bmax(w1)=b(1,1);
%Расчет миноранты относительной частотной ошибки
bmin(w1)=b(4,1);
w2(w1)=w;
end;
%figure;
plot (w2,bmax,w2,bmin);grid;

```

М – ФАЙЛ\_3 «РАСЧЕТ МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ  
АМПЛИТУДНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ «ВХОД – ВЫХОД»  
ХАРИТОНОВСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

```

clear; echo off;
format short g;
%Характеристическая частота полиномиальной динамической модели
%om=3;
om = input('характеристическая частота om=?');
%Матричные компоненты автономной конечномерной системы минимальной
размерности
C=[1 0 0];
G1=[0;0;(-20+om^3)];
G2=[0;0;(20+om^3)];
G3=[0;0;(20+om^3)];
G4=[0;0;(-20+om^3)];
A=eye(3);
P=[1 0];
%Расчет матричных компонентов агрегированной системы
%F1
F1=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F2
F2=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F3
F3=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
%F4%
F4=[0 , 1 , 0; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
for w1=1:10000
dw=0.1;
w=w1*dw;
T1=-inv((w^2*eye(3)+F1^2))*[F1*G1,w*G1];
Ny1=(C*T1);
T2=-inv((w^2*eye(3)+F2^2))*[F2*G2,w*G2];
Ny2=(C*T2);
T3=-inv((w^2*eye(3)+F3^2))*[F3*G3,w*G3];
Ny3=(C*T3);
T4=-inv((w^2*eye(3)+F4^2))*[F4*G4,w*G4];
Ny4=(C*T4);
%Расчет критериальной матрицы
N=[Ny1 0 0 0 0 0; 0 0 Ny2 0 0 0; 0 0 0 0 Ny3 0 0; 0 0 0 0 0 0 Ny4];
b=svds(N);
%Расчет мажоранты амплитудно-частотной характеристики «вход – выход»
bmax(w1)=b(1,1);
%Расчет миноранты амплитудно-частотной характеристики «вход – выход»
bmin(w1)=b(4,1);
w2(w1)=w;
end;
%figure;
semilogx(w2,bmax,w2,bmin);grid;

```

М – ФАЙЛ\_4 «РАСЧЕТ МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ  
ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАРИТОНОВСКИХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

```

clear; echo off;
format short g;
%Характеристическая частота полиномиальной динамической модели
om=3;
om = input('характеристическая частота om=?');
%Матричные компоненты автономной конечномерной системы минимальной
размерности
C=[1 0 0];
G1=[0;0;(-20+om^3)];
G2=[0;0;(20+om^3)];
G3=[0;0;(20+om^3)];
G4=[0;0;(-20+om^3)];
A=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
t=0:0.01:10;
%N=[Ny1 0 0 0;0 Ny2 0 0;0 0 Ny3 0;0 0 0 Ny4];
%b[4];
for i=1:1001
%Расчет матричных компонентов агрегированной системы
%F1
F1=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(-20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
Ny1(i)=C*inv(F1)*(expm(F1*i/100)-A)*G1;
%F2
F2=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
Ny2(i)=C*inv(F2)*(expm(F2*i/100)-A)*G2;
%F3
F3=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
Ny3(i)=C*inv(F3)*(expm(F3*i/100)-A)*G3;
F4=[0 , 1 , 0 ; 0 , 0 , 1; -(-20+om^3) , -(10+2*om^2) , -(7+2*om)];
Ny4(i)=C*inv(F4)*(expm(F4*i/100)-A)*G4;
%Расчет критериальной матрицы
N=[Ny1(i) 0 0 0; 0 Ny2(i) 0 0; 0 0 Ny3(i) 0; 0 0 0 Ny4(i)];
b=svd(N);
%Расчет мажоранты переходной характеристики
max(i)=b(1);
%Расчет миноранты переходной характеристики
min(i)=b(4);
%max
%min
end;
%N=[Ny1 0 0 0;0 Ny2 0 0;0 0 Ny3 0; 0 0 0 Ny4];
%svd(N)
%h[1]
%t=0:0.01:10;
%plot(t,Ny1,t,Ny2,t,Ny3,t,Ny4);
plot(t,min,t,max);
grid;

```

М – ФАЙЛ\_5 «РАСЧЕТ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ  
СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ УГЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ  
ВЕРХНЕГО ОПОРНОГО УЗЛА РАДИОТЕЛЕСКОПА РТ – 64»

```

clear; echo off;
format short g;
%Матричные компоненты объекта управления
A0=[0 1.66*10^(-6) 0 0;0 -2.754 0 0; 0 0 -94.48 92.8691;-467860 0 0 -31.4];
B=[0;288.6645;0;0];
wH = input('характеристическая частота ДНУ wH=?');
FH=[-wH wH;-wH -wH];
LH=[1;1];
CV=[0 0 1 0];
CW=[0 1 0 0];
CC=[1 0 0 0 0 0];
C=[1 0 0 0];
%Расчет матрицы обратной связи К
w0ump = input('характеристическая частота ФЭСС w0ump=?');
w0kп = input('характеристическая частота ФЭСС w0kп=?');
Lump=[-0.92388*w0ump 0.38268*w0ump 0 0;
-0.38268*w0ump -0.92388*w0ump 0 0;
0 0 -0.38268*w0ump 0.92388*w0ump;
0 0 -0.92388*w0ump -0.38268*w0ump];
Lkп=[-0.92388*w0kп 0.38268*w0kп 0 0;
-0.38268*w0kп -0.92388*w0kп 0 0;
0 0 -0.38268*w0kп 0.92388*w0kп;
0 0 -0.92388*w0kп -0.38268*w0kп];
H=[1 1 1 1]; BH=B*H;
Mump=lyap(-A0,Lump,BH);
Mkп=lyap(-A0,Lkп,BH);
Kump=H*inv(Mump);
Kkп=H*inv(Mkп);
F0ump=A0-B*Kump;
F0kп=A0-B*Kkп;
%Расчет наблюдателя
TH=lyap(-FH,A0,-LH*CV);
GH=TH*B;
CTH=[CV;CW;TH];
KPump=Kump*(inv(CTH));
KPкп=Kkп*(inv(CTH));
DHump=[KPump(3) KPump(4)];
BDHump=B*DHump;
DHкп=[KPкп(3) KPкп(4)];
BDHкп=B*DHкп;
Построение матрицы состояния ФЭСС
FFump=[F0ump BDHump;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
FFкп=[F0кп BDHкп;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
Gump=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0]';
Gкп=[0 -FFкп(2,1) 0 -FFкп(4,1) 0 0]';
%Медианное дискретное представление ветрового воздействия

```

```

gamma=0.2;
omFF=1.3;
%omFF=2.6;
%omFF=0.3;
%omTG=1.4544*10^-4
dt=0.0004;
v1=25.28;
v2=0.144;
gmax = input('максимальная ветровая деформация ВОУ gmax=?');
%Расчет формирующего фильтра и интенсивности “белого шума”(AFd, BFd, CFd)
%sigmaGEN=1;
%a=1;
AF=[-omFF];
%ATG=[-omTG];
BF=[omFF];
%BTG=[omTG];
CF=[1];
N=(2*(gamma/3)^2*gmax^2*(v1+v2*omFF+omFF^2))/(v1*omFF*(1+omFF/v2));
KH=sqrt((N*omFF/2)*(1+exp(-omFF*dt))/(1-exp(-omFF*dt)));
%KH=(sqrt(3)/a)*sqrt((N*omTG/2)*(1+exp(-omTG*dt))/(1-exp(-omTG*dt)))
%discrete filter
%GamDFF=exp(-omFF*dt);
%GDF=1-exp(-omFF*dt);
%PDF=1
[AFd,BFd]=c2d(AF,BF,dt);
%[ATGd,BTGd]=c2d(ATG,BTG,dt)
CFd=CF;
%Расчет дискретной модели ветровых деформаций металлоконструкций (Avd, Bvd, Cvd)
Av=[0 1;-25.28 -0.144];
Bv=[0;25.28];
Cv=[1 0];
[Avd,Bvd]=c2d(Av,Bv,dt);
Cvd=Cv;
%Расчет дискретной модели ветровых порывов
Avp=0;
Bvp=0;
Cvp=1;
[Avp,Bvp]=c2d(Avp,Bvp,dt);
Cvp=Cvp;
%Расчет дискретной модели конечномерных деформаций металлоконструкций РТ (весовые, от ускорений, от температурных градиентов)
Ak=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
Bk=[0 1 0 0]';
Ck=[1 0 0 1];
[Akd,Bkd]=c2d(Ak,Bk,dt);
Ckd=Ck;
%Расчет дискретной модели ФЭСС угловых деформаций ВОУ
[Auu]=[FFump];
[Buu]=[Gump];
[Cuu]=[CC];
[Auud,Buud]=c2d(Auu,Buu,dt);

```

```

Cuud=Cuu;
%mmmin=-pi/12
%mmmax=pi/12
%Kwmin=-4.096
%Kwmax=-1.412
Mmax=pi/12
F11=[FFump(1,1) FFump(1,2)    FFump(1,3) FFump(1,4)    FFump(1,5) FFump(1,6);
      FFump(2,1) 0.5127*FFump(2,2) FFump(2,3) cos(Mmax)*FFump(2,4) FFump(2,5) FFump(2,6);
      FFump(3,1) FFump(3,2)    FFump(3,3) cos(Mmax)*FFump(3,4) FFump(3,5) FFump(3,6);
      FFump(4,1) FFump(4,2)    FFump(4,3) FFump(4,4)    FFump(4,5) FFump(4,6);
      FFump(5,1) FFump(5,2)    FFump(5,3) FFump(5,4)    FFump(5,5) FFump(5,6);
      FFump(6,1) FFump(6,2)    FFump(6,3) FFump(6,4)    FFump(6,5) FFump(6,6)];
F22=[FFkp(1,1) FFkp(1,2)    FFkp(1,3) FFkp(1,4)    FFkp(1,5) FFkp(1,6);
      FFkp(2,1) FFkp(2,2)*0.5127    FFkp(2,3) FFkp(2,4)*cos(Mmax) FFkp(2,5) FFkp(2,6);
      FFkp(3,1) FFkp(3,2)    FFkp(3,3) FFkp(3,4)*cos(Mmax) FFkp(3,5) FFkp(3,6);
      FFkp(4,1) FFkp(4,2)    FFkp(4,3) FFkp(4,4)    FFkp(4,5) FFkp(4,6);
      FFkp(5,1) FFkp(5,2)    FFkp(5,3) FFkp(5,4)    FFkp(5,5) FFkp(5,6);
      FFkp(6,1) FFkp(6,2)    FFkp(6,3) FFkp(6,4)    FFkp(6,5) FFkp(6,6)];
F12=[0 0 0 0    0 0;
      0 0 0 4*10^5*sin(Mmax) 0 0;
      0 0 0 94.48*sin(Mmax) 0 0;
      0 0 0 0    0 0;
      0 0 0 0    0 0;
      0 0 0 0    0 0];
F21=[0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 4*10^5*(-sin(Mmax)) 0 0;
      0 0 0 94.48*(-sin(Mmax)) 0 0;
      0 0 0 0    0 0;
      0 0 0 0    0 0;
      0 0 0 0    0 0];
FFcs=[F11 F12; F21 F22]
Gcs=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 -FFkp(2,1) 0 -FFkp(4,1) 0 0]';
Ccs=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0];
I=-Ccs*inv(FFcs)*Gcs
[Acs]=[FFcs];
[Bcs]=[Gcs];
[Ccsd]=[Ccs];
[Acsd,Bcsd]=c2d(Acs,Bcs,dt)
Ccsd=Ccs;

```

М – ФАЙЛ\_6 «РАСЧЕТ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ВЕРХНЕГО ОПОРНОГО УЗЛА РАДИОТЕЛЕСКОПА РТ – 64»

```

clear; echo off;
format short g;
%Матричные компоненты объекта управления
A0=[0 4*10^-5 0 0;0 -2.754 0 0; 0 0 -94.48 92.8691;-18714 0 0 -31.4 ];
B=[0;288.6645;0;0];
wH = input('характеристическая частота ДНУ wH=?');
FH=[-wH wH;-wH -wH];
LH=[1;1];
CV=[0 0 1 0];
CW=[0 1 0 0];
CC=[1 0 0 0 0 0];
C=[1 0 0 0];
%Расчет матрицы обратной связи К
w0ump = input('характеристическая частота ФЭСС w0ump=?');
w0kp = input('характеристическая частота ФЭСС w0kp=?');
Lump=[-0.92388*w0ump 0.38268*w0ump 0 0;
-0.38268*w0ump -0.92388*w0ump 0 0;
0 0 -0.38268*w0ump 0.92388*w0ump;
0 0 -0.92388*w0ump -0.38268*w0ump];
Lkp=[-0.92388*w0kp 0.38268*w0kp 0 0;
-0.38268*w0kp -0.92388*w0kp 0 0;
0 0 -0.38268*w0kp 0.92388*w0kp;
0 0 -0.92388*w0kp -0.38268*w0kp];
H=[1 1 1 1];
BH=B*H;
Mump=lyap(-A0,Lump,BH);
Mkp=lyap(-A0,Lkp,BH);
Kump=H*inv(Mump);
Kkp=H*inv(Mkp);
F0ump=A0-B*Kump;
F0kp=A0-B*Kkp;
%Расчет наблюдателя
TH=lyap(-FH,A0,-LH*CV);
GH=TH*B;
CTH=[CV;CW;TH];
KPump=Kump*(inv(CTH));
KPkp=Kkp*(inv(CTH));
DHump=[KPump(3) KPump(4)];
BDHump=B*DHump;
DHkp=[KPkp(3) KPkp(4)];
BDHkp=B*DHkp;
%Построение матрицы состояния ФЭСС
FFump=[F0ump BDHump;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
FFkp=[F0kp BDHkp;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
Gump=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0]';
Gkp=[0 -FFkp(2,1) 0 -FFkp(4,1) 0 0]';

```

```

%Медианное дискретное представление ветрового воздействия
gamma=0.2;
omFF=1.3;
%omFF=2.6;
%omFF=0.3;
%omTG=1.4544*10^-4
dt=0.0004;
v1=25.28;
v2=0.144;
gmax = input('максимальная ветровая деформация ВОУ gmax=?');
%gmax=40 УМП
%gmax=35 КП
%N= 2.9336e+007;
%N= 84.6769;
%Расчет формирующего фильтра и интенсивности "белого шума"(AFd, BFd, CFd)
%sigmaGEN=1;
%a=1;
AF=[-omFF];
%ATG=[-omTG];
BF=[omFF];
%BTG=[omTG];
CF=[1];
N=(2*(gamma/3)^2*gmax^2*(v1+v2*omFF+omFF^2))/(v1*omFF*(1+omFF/v2));
KH=sqrt((N*omFF/2)*(1+exp(-omFF*dt))/(1-exp(-omFF*dt)));
%KH=(sqrt(3)/a)*sqrt((N*omTG/2)*(1+exp(-omTG*dt))/(1-exp(-omTG*dt)))
%discrete filter
%GamDFF=exp(-omFF*dt);
%GDF=1-exp(-omFF*dt);
%PDF=1
[AFd,BFd]=c2d(AF,BF,dt);
%[ATGd,BTGd]=c2d(ATG,BTG,dt)
CFd=CF;
%Расчет модели ветровых деформаций (Avd, Bvd, Cvd)
Av=[0 1;-25.28 -0.144];
Bv=[0;25.28];
Cv=[1 0];
[Avd,Bvd]=c2d(Av,Bv,dt);
Cvd=Cv;
%Расчет модели ветровых порывов
Avp=0;
Bvp=0;
Cvp=1;
[Avp,Bvp]=c2d(Avp,Bvp,dt);
Cvp=Cvp;
%Расчет дискретной модели конечномерных деформаций металлоконструкций РТ (весовые, от ускорений, от температурных градиентов)
Ak=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
Bk=[0 1 0 0]';
Ck=[1 0 0 1];
[Akd,Bkd]=c2d(Ak,Bk,dt);
Ckd=Ck;
%Расчет дискретной модели ФЭСС линейных деформаций ВОУ

```

```

[Auu]=[FFump];
[Buu]=[Gump];
[Cuu]=[CC];
[Auud,Buud]=c2d(Auu,Buu,dt);
Cuud=Cuu;
mmin=-15
mmax=15
m=0
Kwmin=-4.096
Kwmax=-1.412
F11=[FFump(1,1) FFump(1,2)    FFump(1,3) FFump(1,4)    FFump(1,5) FFump(1,6);
      FFump(2,1) FFump(2,2)*0.5127 FFump(2,3) FFump(2,4)*0.9827 FFump(2,5) FFump(2,6);
      FFump(3,1) FFump(3,2)    FFump(3,3) FFump(3,4)*0.9659 FFump(3,5) FFump(3,6);
      FFump(4,1) FFump(4,2)    FFump(4,3) FFump(4,4)    FFump(4,5) FFump(4,6);
      FFump(5,1) FFump(5,2)    FFump(5,3) FFump(5,4)    FFump(5,5) FFump(5,6);
      FFump(6,1) FFump(6,2)    FFump(6,3) FFump(6,4)    FFump(6,5) FFump(6,6)];
F22=[FFkp(1,1) FFkp(1,2)    FFkp(1,3) FFkp(1,4)    FFkp(1,5) FFkp(1,6);
      FFkp(2,1) FFkp(2,2)*0.5127 FFkp(2,3) FFkp(2,4)    FFkp(2,5) FFkp(2,6);
      FFkp(3,1) FFkp(3,2)    FFkp(3,3) FFkp(3,4)*0.9659 FFkp(3,5) FFkp(3,6);
      FFkp(4,1) FFkp(4,2)    FFkp(4,3) FFkp(4,4)*0.9659 FFkp(4,5) FFkp(4,6);
      FFkp(5,1) FFkp(5,2)    FFkp(5,3) FFkp(5,4)    FFkp(5,5) FFkp(5,6);
      FFkp(6,1) FFkp(6,2)    FFkp(6,3) FFkp(6,4)    FFkp(6,5) FFkp(6,6)];
F12=[0 0 FFump(1,3)*sin(mmax) 0 0 0;
      0 0 FFump(2,3)*sin(mmax) 0 0 0;
      0 0 FFump(3,3)*sin(mmax) 0 0 0;
      0 0 FFump(4,3)*sin(mmax) 0 0 0;
      0 0 FFump(5,3)*sin(mmax) 0 0 0;
      0 0 FFump(6,3)*sin(mmax) 0 0 0];
F22=[0 0 FFump(1,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
      0 0 FFump(2,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
      0 0 FFump(3,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
      0 0 FFump(4,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
      0 0 FFump(5,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
      0 0 FFump(6,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0];
FFcs=[F11 F12; F21 F22]
Gcs=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 -FFkp(2,1) 0 -FFkp(4,1) 0 0]';
Ccs=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
I=-Ccs*inv(FFcs)*Gcs
[Acs]=[FFcs];
[Bcs]=[Gcs];
[Ccsd]=[Ccs];
[Acsd,Bcsd]=c2d(Acs,Bcs,dt)
Ccsd=Ccs;

```

М – ФАЙЛ\_7 «РАСЧЕТ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ ЛУЧА ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА НА ВЫХОДЕ ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКОГО КОМПЕНСАТОРА»

```

clear; echo off;
format short g;
%Матричные компоненты объекта управления
A0=[0 1.66*10^(-6) 0 0;0 -2.754 0 0; 0 0 -94.48 92.8691;-467860 0 0 -31.4];
B=[0;288.6645;0;0];
wH = input('характеристическая частота ДНУ wH=?');
FH=[-wH wH;-wH -wH];
LH=[1;1];
CV=[0 0 1 0];
CW=[0 1 0 0];
CC=[1 0 0 0 0 0];
C=[1 0 0 0];
%Расчет матрицы обратной связи К
w0ump = input('характеристическая частота ФЭСС w0ump=?');
w0kp = input('характеристическая частота ФЭСС w0kp=?');
Lump=[-0.92388*w0ump 0.38268*w0ump 0 0;
-0.38268*w0ump -0.92388*w0ump 0 0;
0 0 -0.38268*w0ump 0.92388*w0ump;
0 0 -0.92388*w0ump -0.38268*w0ump];
Lkp=[-0.92388*w0kp 0.38268*w0kp 0 0;
-0.38268*w0kp -0.92388*w0kp 0 0;
0 0 -0.38268*w0kp 0.92388*w0kp;
0 0 -0.92388*w0kp -0.38268*w0kp];
H=[1 1 1 1];
BH=B*H;
Mump=lyap(-A0,Lump,BH);
Mkp=lyap(-A0,Lkp,BH);
Kump=H*inv(Mump);
Kkp=H*inv(Mkp);
F0ump=A0-B*Kump;
F0kp=A0-B*Kkp;
%Расчет наблюдателя
TH=lyap(-FH,A0,-LH*CV);
GH=TH*B;
CTH=[CV;CW;TH];
KPump=Kump*(inv(CTH));
KPkp=Kkp*(inv(CTH));
DHump=[KPump(3) KPump(4)];
BDHump=B*DHump;
DHkp=[KPkp(3) KPkp(4)];
BDHkp=B*DHkp;
%Построение матрицы состояния ФЭСС
FFump=[F0ump BDHump;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
FFkp=[F0kp BDHkp;0 0 0 0 -wH wH;0 0 0 0 -wH -wH];
Gump=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0]';

```

```

Gkp=[0 -FFkp(2,1) 0 -FFkp(4,1) 0 0]';
%Расчет формирующего фильтра (AFd, BFd, CFd)
omFF=0.0032;
dt=0.0004;
AF=[-omFF];
%ATG=[-omTG];
BF=[omFF];
%BTG=[omTG];
CF=[1];
N=35942;
KH=sqrt((N*omFF/2)*(1+exp(-omFF*dt))/(1-exp(-omFF*dt)));
%KH=(sqrt(3)/a)*sqrt((N*omTG/2)*(1+exp(-omTG*dt))/(1-exp(-omTG*dt)))
%GamDFF=exp(-omFF*dt);
%GDF=1-exp(-omFF*dt);
%PDF=1
[AFd,BFd]=c2d(AF,BF,dt);
%[ATGd,BTGd]=c2d(ATG,BTG,dt)
CFd=CF;
%Расчет дискретной модели ветровых деформаций (Avd, Bvd, Cvd)
Av=[0 1;-25.28 -0.144];
Bv=[0;25.28];
Cv=[1 0];
[Avd,Bvd]=c2d(Av,Bv,dt);
Cvd=Cv;
%Расчет дискретной модели ветровых порывов
Avp=0;
Bvp=0;
Cvp=1;
[Avp,Bvp]=c2d(Avp,Bvp,dt);
Cvp=Cvp;
%Дискретная модель конечномерных деформаций металлоконструкций РТ (весовые, от ускорений, от температурных градиентов)
Ak=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
Bk=[0 1 0 0]';
Ck=[1 0 0 1];
[Akd,Bkd]=c2d(Ak,Bk,dt);
Ckd=Ck;
%Расчет матричных компонентов дискретной модели ФЭСС стабилизации ОДН
[Auu]=[FFump];
[Buu]=[Gump];
[Cuu]=[CC];
[Auud,Buud]=c2d(Auu,Buu,dt);
Cuud=Cuu;
mmin=-15
mmax=15
m=0
Kwmin=-4.096
Kwmax=-1.412
F1=[FFump(1,1) FFump(1,2) FFump(1,3)*cos(m) FFump(1,4) FFump(1,5) FFump(1,6);
    FFump(2,1) FFump(2,2)*Kwmin FFump(2,3)*cos(m) FFump(2,4) FFump(2,5) FFump(2,6);
    FFump(3,1) FFump(3,2) FFump(3,3)*cos(m) FFump(3,4) FFump(3,5) FFump(3,6);
    FFump(4,1) FFump(4,2) FFump(4,3)*cos(m) FFump(4,4) FFump(4,5) FFump(4,6);

```

```

FFump(5,1) FFump(5,2) FFump(5,3)*cos(m) FFump(5,4) FFump(5,5) FFump(5,6);
FFump(6,1) FFump(6,2) FFump(6,3)*cos(m) FFump(6,4) FFump(6,5) FFump(6,6)];
F2=[FFkp(1,1) FFkp(1,2) FFkp(1,3)*cos(m) FFkp(1,4) FFkp(1,5) FFkp(1,6);
FFkp(2,1) FFkp(2,2)*Kwmax FFkp(2,3)*cos(m) FFkp(2,4) FFkp(2,5) FFkp(2,6);
FFkp(3,1) FFkp(3,2) FFkp(3,3)*cos(m) FFkp(3,4) FFkp(3,5) FFkp(3,6);
FFkp(4,1) FFkp(4,2) FFkp(4,3)*cos(m) FFkp(4,4) FFkp(4,5) FFkp(4,6);
FFkp(5,1) FFkp(5,2) FFkp(5,3)*cos(m) FFkp(5,4) FFkp(5,5) FFkp(5,6);
FFkp(6,1) FFkp(6,2) FFkp(6,3)*cos(m) FFkp(6,4) FFkp(6,5) FFkp(6,6)];
F11=[0 0 FFump(1,3)*sin(mmax) 0 0 0;
0 0 FFump(2,3)*sin(mmax) 0 0 0;
0 0 FFump(3,3)*sin(mmax) 0 0 0;
0 0 FFump(4,3)*sin(mmax) 0 0 0;
0 0 FFump(5,3)*sin(mmax) 0 0 0;
0 0 FFump(6,3)*sin(mmax) 0 0 0];
F21=[0 0 FFump(1,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
0 0 FFump(2,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
0 0 FFump(3,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
0 0 FFump(4,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
0 0 FFump(5,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0;
0 0 FFump(6,3)*(-sin(mmin)) 0 0 0];
FFcs=[F1 F11; F21 F2]
Gcs=[0 -FFump(2,1) 0 -FFump(4,1) 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 -FFkp(2,1) 0 -FFkp(4,1) 0 0]';
Ccs=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
I=-Ccs*inv(FFcs)*Gcs
[Acs] =[FFcs];
[Bcs]=[Gcs];
[Ccsd]=[Ccs];
[Acsd,Bcsd]=c2d(Acs,Bcs,dt)
Ccsd=Ccs;

```

## ЛИТЕРАТУРА

1. Авелан П.В., Баев А.П., Коровьяков А.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Исследование чувствительности измерительных схем к ошибкам измерений в задаче оценивания профиля антенн крупных полноповоротных радиотелескопов //Антенны: Сб. статей. Вып. 37/ Под ред. А.А. Леманского. – М.:Радио и связь, 1990. - с.43 – 54.
2. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Синтез систем гарантированной модальной стабильности //Известия РАН. Теория и системы управления, 2003, №4.
3. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами. Бишкек: Илим, 1991.
4. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть I. построение интервальной модели компонентов системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т.47, №1.
5. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть II. Синтез обобщенного модального управления доставляющего нелинейной фотоэлектрической следящей системе эллипсоидные показатели качества с заданной оценкой их интервальности // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т.47, №2.
6. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления. // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1991. Т. 34. № 8.
7. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
8. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB и Scilab. СПб: Наука, 1996.
9. Антенны земных станций спутниковой связи /А.М. Покрас, А.М. Сомов, Г.Г. Цуриков. – М.: Радио и связь, 1985.
10. Асланян А.М.РТ-70 – элемент интерферометра.//Радиофизика,1987. т.XXX № 3.
11. Баев А.П. Разработка и исследование измерительных устройств с ПЗС формирователями видеосигнала системы контроля деформации радиотелескопа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.– Л.: ЛИТМО, 1988.
12. Басистов Г.Г. Анализ систем управления радиотелескопом с введением сигнала по ветровому возмущению.– В кн.: Цифровое управление в системах автоматики.– Л.: Наука. 1968.
13. Басистов Г.Г. Исследование устройства компенсации ветровых возмущений антенны радиотелескопа.– В кн.: Теория и применение высокоточных систем управления.– Л.: Наука. 1973.

14. Басистов Г.Г. Коротков С.В. Мясников В.А. Теоретическое и экспериментальное исследование системы компенсации ветровых возмущений на антенну радиотелескопа. – В кн.: Цифровые системы управления точными механизмами/ Под. Ред. Ю.А. Сабинаина.– Л.: Наука. 1967.
15. Белянский П.В., Сергеев Б.Г. Управление наземными антеннами и радиотелескопами. – М.: Сов.радио. 1980.
16. Белоконев Г.В. Датчик местной вертикали с каналом моментной компенсации в составе системы управления деформируемым радиотелескопом. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.– СПб.: 2000.
17. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – СПб.: Изд – во «Профессия», 2003.
18. Болтунов Г.И., Никифоров В.О., Чежин М.С. Программные средства анализа и синтеза систем управления. СПб: СПбГИТМО, 2000.
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
20. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
21. Высокоточные угловые измерения / Д.А. Аникст, К.М. Константинович, И.В. Меськин, Э.Д. Панков. под ред. Ю.Г. Якушенкова. М.: Машиностроение 1987.
22. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973.
23. Голуб Дж. , Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
24. Дагкесаманский Р.Д. Международные проекты SKA, LOFAR и ALMA. //Доклады Российской конференции «Радиотелескопы РТ-2002»(антенны, аппаратура, методы), 9-10 октября 2002г., г. Пущино.
25. Джабиев А.Н., Коняхин И.А., Панков Э.Д. Автоколлимационные углоизмерительные средства мониторинга деформаций. – СПб.: СПбГИТМО(ТУ),2000.
26. Джеррард А., Берч Дж. М. Введение в матричную оптику: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978.
27. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб, СПбГУИТМО, 2008.
28. Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В.. Интервальные модели преобразовательных характеристик фотодатчиков следящих систем // Научно-технический вестник СПбГУИТМО. Выпуск 33. Технологии управления. / Главный редактор В.Н.Васильев.- СПб.: СПбГУИТМО, 2006. 268с
29. Дьяконов В. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения Полное руководство пользователя. Солон-Пресс. 2002.
30. Заде Л, Дезоер Ч. Теория линейных систем/ Пер. с англ. М.: Наука, 1970.

31. Зацаринный А.В. Автоматизация высокоточных инженерно-геодезических измерений. М.: Недра. 1976.
32. Калмыков С.А., Шокин Б.Л., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
33. Коротков С.В., Лобанов Е.П., Степанов Д.Г. Исследование и синтез системы управления радиотелескопом при случайных воздействиях. – В кн.: Элементы цифровых систем управления Под. ред. Мясникова.– Л.: Наука, 1971.
34. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ.-М: Мир, 1977.
35. Корчагин С.Г., Сударчиков С.А. Оценка влияния интервальности модели экзогенного воздействия на параметры многомерной системы с помощью матриц траекторной чувствительности // Современные технологии: Сборник научных статей/ под.ред. профессора С.А. Козлова – СПб.: СПб ГИТМО(ТУ), 2001.
36. Кутузов С.М., Кутузов А.С. О процессе разработки и создания большого радиотелескопа. //Доклады Российской конференции «Радиотелескопы РТ-2002»(антенны, аппаратура, методы),9-10 октября 2002г.,г.Пушино.
37. Ланкастер П. Теория матриц. / Пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984
38. Малинский В.С. Разработка и исследование прецизионного фотоэлектрического комплекса с устройством цифровой фильтрации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.– Л.: ЛИТМО, 1982.
39. Матвеев Л.И., Горшенков Ю.И., Попереченко Б.А., Му Р.Л., Береза К.В. «Медвежьи озера»- пункт радиоинтерферометрии.//Письма в радиоастрономический журнал,1995., т.ХХI, №7.
40. Мирошник И.В. Теория автоматического управления: Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005.
41. Молотов И.Е., Горшенков Ю.И., Попереченко Б.А. Very long base interferometer (VLBI) - activity of ASC on Russian.//Deep Space Tracking Network Proceedings APT and APAG, 1996, p.p.281-288, Kashima.
42. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2002.
43. Николаев П.В., Сабинин Ю.А. Фотоэлектрические следящие системы. Л.: Энергия, 1969.
44. Ньютон Д.К., Гулд Л.А., Кайзер Д.О. Теория линейных следящих систем: Пер. с англ./ Под. Ред. А.М. Летова.– М.: ГИФМЛ, 1961.
45. Обсерватория Паркс (Parkes) - <http://www.parkes.atnf.csiro.au>
46. Обсерватория Аресибо(Arecibo) - <http://www.naic.edu>
47. Обсерватория Еффельсберг(Effelsberg) - <http://www.mpifr-bonn.mpg.de>
48. Обсерватория Джодрелл Бэнк (Jodrell Bank) <http://www.naic.edu>
49. Оморов Р.О. Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности. Диссертация на

- соискание ученой степени кандидата технических наук.– Л.: ЛИТМО, 1985.
50. Первачев С.В., Валуев А.А., Чиликин О.А. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. М.: Сов.радио 1973.
  51. Порфирьев Л.Ф. Основы теории распространения сигналов в оптико-электронных системах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989.
  52. Пояснительная записка к эскизно-техническому проекту по НИР № 89175 РТФ – 64 СЭКД ЭТП. РПЗ. // Система эксплуатационного контроля деформаций металлоконструкций антенны ТНА – 1500–1 комплекса “Газон”. Л.: ЛИТМО, 1991.
  53. Разработка и создание системы эксплуатационного контроля деформаций металлоконструкций антенны ТНА – 1500 – I комплекса “Газон”/. Техническое задание. М.: – Л.: ОКБ МЭИ – ЦНИИ ПСК – ЛИТМО, 1990.
  54. Решение НС РАН по астрономии: Об участии российских астрономов в международных кооперациях по созданию и использованию астрономических инструментов нового поколения в период 2001-2010г.г./ 19 августа 2001г.,г.Санкт-Петербург.- [http://www/asc.rssi.ru](http://www.asc.rssi.ru)
  55. Решение Пленума НС РАН по астрономии: Об эффективности использования существующих наземных астрономических инструментов России и перспективах развития / 6 июня 2004г., г. Москва.- <http://www.astronomer.ru>
  56. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981.
  57. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В.Григорьев, В.Н.Дроздов, В.В.Лаврентьев, А.В.Ушаков. - Л: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
  58. Система эксплуатационного контроля деформаций металлоконструкций ТНА–400–I (РТФ– 32)/. ТП ПЗ. Л.: ЛИТМО, 1989.
  59. Система эксплуатационного контроля деформаций металлоконструкций ТНА – 1500 – I комплекса “Газон”/. ЭТП ПЗ. – Л.: ЛИТМО, 1991.
  60. Смагина Е.М., Моисеев А.Н. Метод модальной стабилизации интервальной динамической системы. // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. Т.41. № 5.
  61. Создание радиоинтерферометрического комплекса на основе радиотелескопа РТ-64 «Калязин» для астрофизических исследований со сверхвысоким угловым разрешением. - Международный научно-технический центр-<http://www.istc.ru>
  62. Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Оценка запасов устойчивости систем с интервальными параметрами. // Научно - технический вестник СПбГИТМО(ТУ). Выпуск 6. Информационные, вычислительные системы / Главный редактор В.Н. Васильев. СПбГИТМО(ТУ), 2002.
  63. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. М.: Сов. радио, 1972.
  64. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход: Пер. с англ.-М.:Наука, 1980. -376 с

65. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии // Автоматика и телемеханика. 1989. №11.
66. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление. // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т.43. №3.
67. Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум./ Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУИТМО, 2007.
68. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравн. 1978. Т.14. №11.
69. Харитонов В.Л. Устойчивость вложенных семейств полиномов. // Автоматика и телемеханика. 1995. №5.
70. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. // Труды матем. Ин-та им Стеклова Изд. АН СССР. 1949. Т. XXVI.
71. Якушенков Ю.Г. Теория и расчет оптико-электронных приборов: Учебник для студентов приборостроительных специальностей вузов. - М.: Машиностроение, 1989.
72. Akunov T.A, Sudarchikov S.A., Ushakov A.V Ellipsoidal Estimations of Quality of Processes in MIMO Continuous System with an Interval State Matrix under Stochastic Exogenous Signal // Proceedings of 4th Asian Control Conference (ASCC'2002), Singapore, 2002.
73. Akunova A., Akunov T.A., Ushakov A. V. Interval Representation in the Synthesis Problem of Nonlinear Systems with the Guaranteed Estimations of Eigenvalues Localization Areas // Proceedings of 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems" (NOLCOS'2001), St. Petersburg, 2001.
74. Bartlet A.C., Hollot C.V., Huang I Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It suffices to Check the Edges. // Math. of Control, Signals and Systems. 1988.
75. Eslami M. (1994). Theory of Sensitivity in Dynamic Systems. An Introduction. Berlin.: Springer Verlag.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

---

**НАУЧНАЯ ШКОЛА КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
И ИНФОРМАТИКИ  
В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ДИНАМИКИ СИСТЕМ  
С НЕПРЕРЫВНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ ОПИСАНИЯМИ НАД  
БЕСКОНЕЧНЫМИ И КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ**

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года кафедра автоматики и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО), организована в 1945-м году одновременно с основанием факультета *электроприборостроения*, со временем переименованного в *радиотехнический*. Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и одновременно первого декана факультета *электроприборостроения* профессора Марка Львовича Цуккермана. На кафедру автоматики и телемеханики СПбГУ ИТМО, в отличие от существовавших к тому времени кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина (ныне СПбГТУ) и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) (ныне СПбГЭТУ («ЛЭТИ»)), была возложена задача по подготовке специалистов в области автоматизации и телемеханизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности.

Профессор Цуккерман М.Л. в 1913-м году закончил электромеханическое отделение Санкт-Петербургского государственного политехнического института им. Петра Великого. В 20-е годы XX в. он организовал в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области телеизмерения. Научные интересы профессора Цуккермана М.Л. и персонала новой кафедры на многие годы определили основные направления ее научной, учебной и методической деятельности, проблемным куратором которой профессор Цуккерман М.Л. оставался вплоть до своей кончины в 1959-м году. К моменту прихода в ИТМО профессор Цуккерман М.Л. имел богатый опыт

преподавания в высших учебных заведениях страны. Так с 1933-го года до начала Великой отечественной войны он заведовал кафедрой *автоматизации и телемеханизации* промышленности в ЛЭТИ им. В.И.Ульянова (Ленина).

ТАНСКИЙ Евфимий Аполлонович – ученик профессора Цуккермана М.Л., кандидат технических наук, доцент, заведовал кафедрой с 1959-го года по 1970-й год; выпускник кафедры автоматизации и телемеханизации промышленности ЛЭТИ им. Ульянова (Ленина) 1936-го года, известный специалист в области систем стабилизации скорости и фазирования в задачах управления многодвигательными комплексами, а также маломощных прецизионных следящих систем.

САБИНИН Юрий Алексеевич – заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор, заведовал кафедрой с 1970-го по 1990-й год; выпускник ЛПИ им. М.И. Калинина 1938-го года, известный специалист в области электропривода, фотоэлектрических следящих систем, робототехники и адаптивной оптики.

ГРИГОРЬЕВ Валерий Владимирович - доктор технических наук, профессор, заведует кафедрой с 1995-го года; выпускник кафедры автоматики и телемеханики ИТМО 1969-го года, известный специалист в области теории качественной устойчивости, синтеза цифровых регуляторов, управления подвижными объектами, систем пространственного слежения, робототехники.

Основные научные разработки кафедры представлены следующими временными периодами.

1945–1959 г.г. – Системы автоматизации комплексных измерений параметров кораблей, телеметрии и регистрации при мореходных испытаниях, а также системы стабилизации и фазирования скоростей двигателей в составе многодвигательных комплексов (научные руководители – профессор Цуккерман М.Л., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик – МОП).

1959–1970 г.г. – фотоэлектрические прецизионные измерительные следящие системы для нужд ракетной техники (комплекс ПОР), автоматизированная система обработки снимков в пузырьковых камерах (комплекс ПУОС), системы стабилизации и фазирования для фототелеграфной аппаратуры (комплекс "Газета-2") (научные руководители – профессор Пальтов И.П., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик – ЛОМО, НИИЭТУ).

1970–1980 г.г. – серия магнитных усилителей для двигателей типа ДИД-ДГ, системы лазерного наведения высокостабильных фазовых светодаальномеров, высокоточные системы астрогидирования в режиме счета фотонов, система управления комплексом вытяжки оптического волокна, цифровые регуляторы на базе микроЭВМ, контурные робототехнические комплексы, системы управления посадкой (научные руководители – профессора Пальтов И.П., Сабинин Ю.А., доценты Николаев П.В., Яковлев Н.М.; заказчик – ЛОМО, ГОИ им. С.И. Вавилова, ВНИИРА, НПО "Дальняя связь", ЦНИИРТК).

1980-1990г.г.- НИР на кафедре ведется в соответствии с программами "Оптимум", "МИР", "Излучение", "Интенсификация – 90", во исполнение которых разработаны системы микропроцессорного управления

многодвигательными приводами; системы адаптивной оптики для многоэлементных главных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров, приводов микроперемещений для систем адаптивной оптики, а также автоматизированный светодальномерный лазерный профилометрический комплекс для предэксплуатационной юстировки больших полноповоротных радиотелескопов; системы управления судовождением судов ледовой проводки и робототехники; системы управления посадочными комплексами летательных аппаратов на стационарное и подвижное основания (научные руководители – профессора Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев, И.В. Мирошник и доцент П.В. Николаев; заказчик – ГОИ, ЛОМО, НПО "Электросила", ПО "Кировский завод", ЦНИИ РТК, ОКБ МЭИ, ВНИИРА).

С 1990 г. основные разработки составили: системы управления лазерными локационными станциями слежения; АСУТП многокаскадных сеточных фотоэлектронных умножителей; САПР САУ; адаптивные робототехнические комплексы и транспортные роботы; системы контурного управления и прецизионной интерполяции для сложных поверхностей; системы согласованного управления многодвигательными агрегатами; устройства на базе пьезоэлектрических, электрострикционных и магнестрикционных двигателей; прецизионные устройства измерения микроперемещений, высокоточные системы оптического контроля формы отражающей поверхности на базе микроконтроллеров; фотоэлектрические измерительные системы с аналоговыми анализаторами и анализаторами на регулярных ППЗ-структурах; аппаратура контроля деформаций металлоконструкций больших полноповоротных радиотелескопов РТФ-32, РТФ-64 с диаметром раскрыва главного рефлектора соответственно 32 и 64 метра; устройства дискретной автоматики (УДА) гарантированной информационной надежности для средств управления стрелочным хозяйством Санкт-Петербургского метрополитена; система автоматики комплекса приготовления удобрения (научные руководители – профессора Григорьев В.В., Мирошник И.В., Сабинин Ю.А., Ушаков А.В.; доценты – Бойков В.И., Николаев П.В.), НИР выполняются по международным, федеральным и региональным комплексным целевым программам "Университеты России", Министерства образования РФ, грантов РФФИ, "Интеграция", развития и поддержки Санкт-Петербургского УНЦ "Проблемы машиностроения", "Излучение", на основе НТП базового финансирования института, "Телемеханика-2000", на основе сотрудничества с НИИТМ, АОЗТ "Технокон" и АО "Экопрод", а также в инициативном порядке.

В настоящее время на кафедре функционируют три научно-исследовательские лаборатории: «технической кибернетики» (основатель профессор Мирошник И.В., научный руководитель профессор Бобцов А.А.), «автоматизированного опто-электронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели профессор Сабинин Ю.А. и доцент Николаев П.В., научные руководители доцент Бойков В.И. и профессор Ушаков А.В.) и «технической информатики и телемеханики» (основатель профессор Цуккерман М.Л., научный руководитель профессор Ушаков А.В.).

Четыре этапа развития кафедры систем управления и информатики (СУИ) со дня ее основания, связанные с именами ее руководителей, – это четыре этапа формирования *научной мысли* ее коллектива.

Первые шаги научной школы в области теории управления и динамики систем с непрерывным и дискретным описанием над бесконечными и конечными полями связаны с трудами доктора технических наук, профессора Пальтова Ивана Петровича, который влился в коллектив кафедры после демобилизации из состава вооруженных сил в 1964-м году. На кафедре профессор Пальтов И.П. продолжил развитие положений, изложенных в совместной с профессором Поповым Е.П. монографии: *Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.* – М.:Физматгиз,1960. Результаты этой работы вылились в защиту Пальтовым Иваном Петровичем докторской диссертации в 1970-м году и выход в свет монографии: *Пальтов И.П. Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах.* – М.: Наука, 1975.

После кончины профессора Пальтова И.П. научная школа кафедры продолжала свое формирование усилиями коллег новой возрастной и научной мировоззренческой формации, опираясь на системологию метода пространства состояния в лице доцента Лаврентьева В.В., профессоров Григорьева В.В., Дроздова В.Н., Ушакова А.В. и Мирошника И.В., организовавших в 1970-м году действующий до настоящего времени научный семинар кафедры «Современные проблемы теории управления». С конца прошлого века на кафедре проводятся научные «Крещенские чтения», получившие статус городского семинара по теории управления и динамике систем.

В настоящее время кафедра объединяет тесно сотрудничающие между собой научные коллективы, возглавляемые профессорами В.В. Григорьевым, Ушаковым А.В., Никифоровым В.О., Бобцовым А.А., доцентами Бойковым В.И., и Быстрым С.В. Системная методология научной школы кафедры опирается на возможности методов Ляпунова, оптимизации и матричного формализма, заложенного в уравнениях Ляпунова, Сильвестра и Риккати, а также методов современной теории нелинейных систем, модального, медианного модального для объектов с интервальными параметрами, робастного и адаптивного управления в условиях неопределенности. Области научных интересов кафедры охватывают как классические, так и новые направления теории управления: теория качественной устойчивости, методы аппарата скалярных и векторных систем сравнения в задачах сжатия информации о процессах в сложных системах, теория непрерывных и дискретных систем «многомерный вход - многомерный выход» (МВМВ) с использованием процедуры сингулярного разложения критериальных матриц систем для построения скалярных (эллипсоидных) оценок качества многомерных векторных процессов (SVD-approach) при конечномерных и стохастических экзогенных воздействиях; аналитический синтез регуляторов; нелинейные и адаптивные системы управления пространственным движением, согласованным движением по многообразиям, интеллектуальная

робототехника; робастность, интервальность, нечеткость, структурная и информационная избыточность в задачах управления, измерения и наблюдения; теория чувствительности с ориентацией на анализ чувствительности алгебраических компонентов таких как собственные значения, сингулярные числа и собственные вектора матриц, что позволило инструментально обеспечить решение задач модальной робастности; теория и методы проектирования многомерных систем с модальными и эллипсоидными показателями качества гарантированной стабильности над бесконечными полями и гарантированной информационной надежности над полями Галуа, теория и практика двоичных динамических систем дискретной автоматики. При этом общесистемный подход позволил поставить и решить задачу помехозащитного преобразования кодов в фазе декодирования как задачу наблюдения состояния двоичного канала связи, алгоритмически сводящуюся к матричному уравнению Сильвестра над двоичным полем Галуа. В последнее время получены интересные результаты в разработке теории систем цифрового дистанционного управления техническими объектами с учетом фактора канальной среды с помехами. Разработаны технологии контроля вырождения сложных динамических систем МВМВ – типа с непрерывным и дискретным модельным представлением. Развитие матричных методов модального управления позволило решить задачу обобщенного модального управления, доставляющего матрице состояния проектируемой системы желаемые собственные значения и собственные вектора, что стало алгебраической основой разработки методов обеспечения инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений. При решении задач адаптивного управления и адаптивной компенсации конечномерных возмущений с неизвестными параметрами особенно интенсивно развиваются методы, опирающиеся на использовании информации только о выходе объекта.

Научные результаты кафедры СУИ имеют богатую национальную и зарубежную библиографию. Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и в трудах международных конференций. Ученые кафедры опубликовали более 100 монографий и учебников, приблизительно 200 методических и учебных пособий, около 2400 статей из них более 270 в журналах академий наук, около 150 статей и докладов в зарубежных англоязычных изданиях, ученые кафедры являются авторами более 550 изобретений; приняли участие в работе более 480 национальных и зарубежных научных конференций. Кафедра поддерживает научные контакты с 20 техническими зарубежными университетами. Четыре члена кафедры профессора Григорьев В.В., Мирошник И.В., Никифоров В.О., Ушаков А.В. являются действительными членами (академиками) международной академии нелинейных наук.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов, свидетельством тому является резкое сокращение

возраста соискателей ученой степени доктора технических наук в последние годы, подтверждением чему являются успешные защиты докторских диссертаций тридцативосьмилетним и тридцатитрехлетним воспитанниками научной школы кафедры Никифоровым Владимиром Олеговичем и Бобцовым Алексеем Алексеевичем.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПОНЯТИЕ, ТЕРМИН .....	СТР.	ПОНЯТИЕ, ТЕРМИН .....	СТР.
Автосопровождение .....	19	Интервальные показатели качества .....	16
Агрегированная система .....	58	Интервальный вектор .....	38
Азимутальный индуктосин .....	22	Интервальный компонент интервального числа .....	40
Апертура .....	13	Интервальный полином .....	41
Аппроксимирующий параболоид вращения .....	7	Интервальный характеристический полином .....	41
Белый шум .....	50	Кинетическая ошибка .....	116
Большой полноповоротный радиотелескоп .....	2	Коллимационная плоскость .....	53
Буферная система .....	17	Контррефлектор .....	13
Верхний модуль .....	13	Космический объект .....	19
Верхний опорный узел .....	13	Лазерный профилометр .....	25
Видеосигнал .....	35	Лазерный фазовый дальномер .....	13
Газовый лазер .....	13	Линейная буферная система .....	17
Главный рефлектор .....	6	Лучевой вектор .....	28
Граничные (угловые) значения параметра .....	62	Матричное уравнение Сильвестра .....	82
Гурвицев полином .....	68	Медиана интервальной матрицы .....	36
Датчик местной вертикали .....	28	Медианное модальное управление .....	16
Деформирующие факторы .....	27	Медианный модальный регулятор .....	96
Динамическая юстировка .....	6	Межканальные перекрестные связи .....	17
Измерительная следящая система .....	35	Метод Харитоновна .....	67
Интервальная линеаризация .....	62	Модальная робастность .....	93
Интервальная линейная алгебра .....	38	Нижний модуль .....	13
Интервальная матрица .....	38	Облучатель-приемник .....	13
Интервальная матрица состояния .....	58	Объект радиоастрономического наблюдения .....	16
Интервальное комплексное число .....	38	Объект управления .....	16
Интервальное модельное представление .....	45	Опорная плоскость .....	174
Интервальное число .....	38	Опорно-поворотное устройство .....	13
Интервальные вычисления .....	38	Оптимальная аппроксимация .....	8

ПОНЯТИЕ, ТЕРМИН .....	СТР.
Оптический компенсатор .....	13
Опто-электронная система .....	7
Ось диаграммы направленности .....	13
Планарная модель .....	36
Планарная составляющая погрешности .....	33
Полуавтоматическое наведение .....	22
Полудисковый модулятор .....	14
Предрегулятор .....	98
Предэксплуатационная юстировка .....	7
Призмный компенсатор .....	13
Программное управление .....	21
Произведение интервальных чисел .....	38
Пространство параметров .....	67
Пространство состояния .....	7
Радио-оптическая система .....	7
Разность интервальных чисел .....	39
Робастная устойчивость .....	14
Ручное наведение .....	21
Силовой привод ОПУ .....	22
Сингулярное число .....	104
Система контроля линейных деформаций .....	14
Система контроля угловых деформаций .....	14
Система контроля угловых и линейных деформаций .....	13
Система предэксплуатационной юстировки	25
Система фокусно-угловой компенсации .....	6
Система эксплуатационного контроля деформаций	11
ПОНЯТИЕ, ТЕРМИН .....	СТР.

Система эксплуатационного опто-электронного контроля деформаций МК РТ .....	7	
Статическая ошибка.....	116	
Сумма интервальных чисел.....	39	
Траекторная чувствительность .....	17	
Угловая реализация интервальной матрицы .....	41	
Угломестная плоскость.....	26	
Угломестный индуктосин.....	22	
Узловой элемент МК РТ .....	7	
Унимодулярная матрица .....	175	
Фокусно-угловая компенсация деформаций .....	7	
Фотоэлектрическая следящая система .....	14	
Функция чувствительности .....	17	
Характеристическая частота .....	69	
Частное интервальных чисел .....	39	
Эквивалентная разомкнутая система .....	73	
Экзогенное воздействие .....	73	
Эксплуатационный контроль деформаций.....	13	
Элемент металлоконструкции .....	6	
Эллипсоидальная мажоранта .....	16	
Эллипсоидальная миноранта .....	16	

