

Оглавление

Введение	3
1 Основные понятия о математических моделях на основе дифференциальных уравнений	6
2 Модели типа ускорение – скорость	13
2.1 Скорость и ускорение	13
2.2 Задача пловца	15
2.3 Траектория полета	17
2.4 Вертикальное движение	20
2.5 Учет сопротивления	22
2.5.1 Сопротивление, пропорциональное скорости	22
2.5.2 Сопротивление, пропорциональное квадрату скорости	25
2.6 Задачи	26
3 Переменное гравитационное ускорение.....	28
4 Вторая космическая скорость.....	30
Задачи	32
5 Движение ракеты	33
5.1 Постоянная сила тяги	35
5.2 Сопротивление отсутствует	36
5.3 Безвоздушное пространство	38
6 Естественный рост и распад.....	39
6.1 Основные модели	39
6.2 Уравнение естественного роста	41
6.3 Модели ограниченного роста популяции и логистическое уравнение	45
6.4 Дополнительные приложения логистического уравнения	48
6.4.1 Ограниченные ресурсы среды.	48
6.4.2. Конкуренция.	48
6.4.3 Пропорциональность производству	48
6.5 Судный День и исчезновение популяции	50
6.6 Сбор урожая в логистической популяции	52
6.7 Уравнение радиоактивного распада	53
6.8 Задачи	54
7 Охлаждение и нагревание.....	57
7.1 Изменение температуры тела	57
7.2 Колебания температуры внутри помещения	59
7.3 Задачи	61
8 Закон Торричелли	62
Задачи	64
9 Задачи на смеси.....	66
9 Задачи на смеси.....	67

Задачи.....	70
10 Механические колебания.....	71
11 Математический маятник	73
Задачи.....	75
12 Свободные незатухающие колебания.....	76
13 Свободные затухающие колебания.....	80
13.1 Случай сверхзатухания	80
13.2 Случай критического затухания.....	82
13.3 Затухающие колебания	84
13.4 Задачи.....	88
14 Вынужденные колебания и резонанс.....	91
14.1 Незатухающие вынужденные колебания	93
14.2 Биения	95
14.3 Резонанс	97
15 Электрические цепи.....	100
15.1 Соответствия механических и электрических систем	102
15.2 Импеданс и реактивное сопротивление	104
15.3 Расчет силы тока	104
15.3 Расчет силы тока	105
15.4 Электрический резонанс	107
15.5 Задачи.....	109
16 Задачи с граничными условиями.....	111
16.1 Провисание (прогиб) однородной балки.....	111
16.2 Стержень на стяжке	115
17 Математические модели на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений	117
17.1 Простейшие применения	118
17.2 Анализ подсистем	121
17.3 Колебания многоэтажных зданий, вызванные землетрясением.....	125
18.1 Законы Кеплера.....	129
18.2 Движение планет и спутников	133
18.2 Движение планет и спутников	134
18.3 Комета Галлея	137
18.4 Ваша собственная комета	139
Заключение.....	140
Список литературы.....	141
КАФЕДРА ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ.....	142

Введение

При проектировании сложных систем и их подсистем возникают задачи, требующие оценки количественных и качественных закономерностей процессов функционирования таких систем, проведения структурного алгоритмического и параметрического их синтеза [1]. Но сложные системы относятся к классу больших систем, этапы проектирования, внедрения, эксплуатации и эволюции которых в настоящее время невозможны без использования различных видов моделирования. Ресурсы современной информационно-вычислительной техники дают возможность ставить и решать математические задачи такой сложности, которые в недавнем прошлом казались нереализуемыми, например моделирование больших систем.

Ограниченность возможностей экспериментального исследования больших систем делает актуальной разработку методики их моделирования, которая позволила бы в соответствующей форме представить процессы функционирования систем, описание протекания этих процессов с помощью математических моделей, получение результатов экспериментов с моделями по оценке характеристики исследуемых объектов. Причем на разных этапах создания и использования перечисленных систем для всего многообразия входящих в них подсистем, применение метода моделирования преследует конкретные цели, а эффективность метода зависит от того, насколько грамотно разработчик использует возможности моделирования.

Выбор метода моделирования и необходимая детализация моделей существенно зависят от этапа разработки сложной системы [2]. На этапах обследования объекта управления, например промышленного предприятия, и разработки технического задания на проектирование автоматизированной системы управления модели в основном носят описательный характер и преследуют цель наиболее полно представить в компактной форме информацию об объекте, необходимую разработчику системы.

Достигнутые успехи в использовании средств вычислительной техники для целей моделирования часто создают иллюзию, что применение современной ЭВМ гарантирует возможность исследования системы любой сложности. При этом игнорируется тот факт, что в основу любой модели положено трудоемкое по затратам времени и материальных ресурсов предварительное изучение явлений, имеющих место в объекте-оригинале. И от того, насколько детально изучены реальные явления, насколько правильно проведена их формализация и алгоритмизация, зависит в конечном итоге успех моделирования конкретного объекта.

В основе моделирования лежат *информационные процессы*, поскольку само создание модели M базируется на информации о реальном объекте. В процессе реализации модели получается информация о данном

объекте, одновременно в процессе эксперимента с моделью вводится управляющая информация, существенное место занимает обработка полученных результатов, т. е. информация лежит в основе всего процесса моделирования.

Для правильно построенной модели M характерным является то, что она выявляет лишь те закономерности, которые нужны исследователю, и не рассматривает свойства системы S , не существенные для данного исследования. Следует отметить, что оригинал и модель должны быть одновременно сходны по одним признакам и различны по другим, что позволяет выделить наиболее важные изучаемые свойства. В этом смысле модель выступает как некоторый «заместитель» оригинала, обеспечивающий фиксацию и изучение лишь некоторых свойств реального объекта.

Таким образом, характеризуя проблему моделирования в целом, необходимо учитывать, что от постановки задачи моделирования до интерпретации полученных результатов существует большая группа сложных научно-технических проблем, к основным из которых можно отнести следующие: идентификацию реальных объектов, выбор вида моделей, построение моделей и их машинную реализацию, взаимодействие исследователя с моделью в ходе машинного эксперимента, проверку правильности полученных в ходе моделирования результатов, выявление основных закономерностей, исследованных в процессе моделирования. В зависимости от объекта моделирования и вида используемой модели эти проблемы могут иметь разную значимость.

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т. е. построена математическая модель.

Под *математическим моделированием* будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности.

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S . Однако такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные

трудности, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, желая использовать аналитический метод, в этом случае идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численный метод особенно эффективен при использовании ЭВМ.

Исходной информацией при построении математических моделей процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой (проектируемой) системы S . Эта информация определяет основную цель моделирования системы S и позволяет сформулировать требования к разрабатываемой математической модели M . Причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь системы хочет получить ответ с помощью модели, и в какой-то степени определяет выбор математической схемы.

В данной книге, построение математических моделей процессов функционирования систем будет проводиться с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений.

Анализ полученных моделей будет проводиться с помощью систем компьютерной алгебры MATLAB или MAPLE [3,4].

1 Основные понятия о математических моделях на основе дифференциальных уравнений

Законы Вселенной написаны на языке математики. Алгебра решает много задач с постоянными величинами, но самые интересные природные явления включают изменение и описываются уравнениями, которые связывают изменяющиеся величины.

Поскольку производная $dx/dt = f'(t)$ функции f является скоростью изменения величины $x = f(t)$, которая зависит от независимой переменной t , естественно, что уравнения, содержащие производные, часто используются для описания изменений, происходящих во Вселенной. Уравнение, связывающее неизвестную функцию и одну или несколько ее производных, называют **дифференциальным уравнением** [5]:

Пример 1.1. Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

содержит как неизвестную функцию $x(t)$, так и ее первую производную $x'(t) = dx/dt$. Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

содержит неизвестную функцию y независимой переменной x и ее производные: первого порядка (первая производная) – y' и второго порядка (вторая производная) – y'' .

Изучение дифференциальных уравнений имеет три основных цели.

1. Научиться составлять дифференциальное уравнение, которое описывает изучаемое физическое явление.
2. Найти – точно или приблизительно – соответствующее решение полученного уравнения.
3. Интерпретировать найденное решение.

В алгебре обычно ищут неизвестные числа, которые удовлетворяют какому-нибудь уравнению, например $x^3 + 7x^2 - 11x + 41 = 0$. Однако при решении дифференциального уравнения нам необходимо найти неизвестные функции $y = y(x)$, для которых выполняется тождество типа $y'(x) = 2xy(x)$ на некотором интервале вещественных чисел. Обычно нужно найти все решения дифференциального уравнения, если это возможно.

Пример 1.2. Если C – константа и

$$y(x) = Ce^{x^2} \tag{1.1}$$

то

$$\frac{dy}{dx} = C(2xe^{x^2}) = (2x)(Ce^{x^2}) = 2xy$$

Таким образом, каждая функция $y(x)$ вида (1.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$dy/dx=2xy \quad (1.2)$$

для всех x . В частности, равенство (1.1) определяет бесконечное семейство различных решений этого дифференциального уравнения, по одному решению для каждого значения произвольной постоянной C . Методом разделения переменных[5] можно показать, что каждое решение дифференциального уравнения (1.2) имеет форму, указанную в равенстве (1.1).

Следующие три примера иллюстрируют процесс перевода научных законов и принципов на язык дифференциальных уравнений. В каждом из этих примеров независимой переменной является время t , но далее будут приведены примеры, в которых другая величина, а не время, служит независимой переменной.

Пример 1.3. Закон охлаждения, установленный Ньютоном, может быть сформулирован так: скорость изменения (в данном случае имеется в виду скорость изменения относительно времени t) температуры $T(t)$ тела пропорциональна разности между T и температурой окружающей среды A (рис. 1.1). Иными словами,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A),$$

(1.3)

где k – положительная константа. Заметим, что если $T > A$, то $dT/dt < 0$, так как температура – убывающая функция времени t , и тело охлаждается. Но если $T < A$, то $dT/dt > 0$, так что T увеличивается.

Таким образом, физический закон представлен в виде дифференциального уравнения (1.3). Если известны значения k и A , то можно найти явную формулу для $T(t)$, а затем, с помощью этой формулы, будем предсказывать температуру тела в будущем.

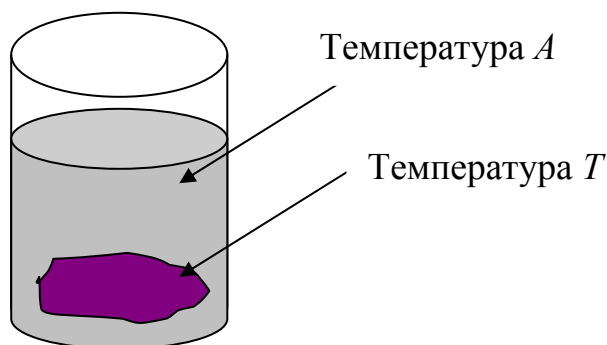


Рис.1.1. Закон охлаждения, установленный Ньютоном, т.е. равенство (1.3), описывает охлаждение горячего камня в воде.

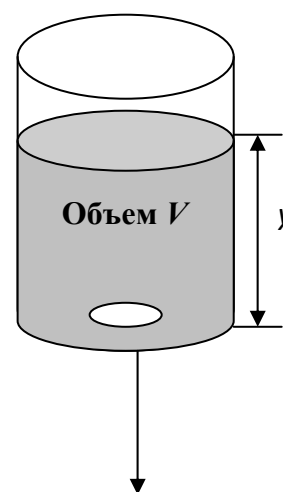


Рис. 1.2. Закон вытекания Торричелли, т.е. уравнение (1.4), описывает вытекание воды из резервуара.

Пример 1.4. Закон Торричелли подразумевает, что скорость изменения объема V воды в резервуаре, из которого вытекает вода (рис. 1.2), пропорциональна квадратному корню из глубины y воды в резервуаре:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y} \quad (1.4)$$

где k — константа. Если резервуар — вертикальный цилиндр с площадью поперечного сечения A , то $V = Ay$, так что $dV/dt = A(dy/dt)$. Тогда уравнение (1.4) имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$$

где $h = k/A$ — константа.

Пример 1.5. Скорость изменения численности населения с постоянными показателями рождения и смертности во многих простых случаях $P(t)$ пропорциональна к численности населения. Иными словами:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Обсудим пример 1.5 подробнее. Сначала заметим, что каждая функция:

$$P(t) = Ce^{kt} \quad (1.6)$$

является решением дифференциального уравнения (1.5).

Проверяем это утверждение следующим образом:

$$P'(t) = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

для всех вещественных чисел t . Поскольку подстановка каждой функции вида (1.6) в уравнение (1.5) порождает тождество, то все такие функции — решения уравнения (1.5).

Таким образом, даже если значение константы k известно, дифференциальное уравнение $dP/dt = kP$ имеет бесконечно много различных решений вида $P(t) = Ce^{kt}$, одному для каждого значения "произвольной" константы C , что типично для дифференциальных уравнений. Благодаря этому можно использовать дополнительную информацию для выбора из множества всех этих решений того частного решения, которое удовлетворяет условиям изучаемой задачи.

Пример 1.6. Предположим, что $P(t) = Ce^{kt}$ — численность колонии бактерий в момент времени t . Численность колонии в момент времени $t = 0$ была равна 1000 и что количество бактерий удваивается через каждый час. Эта дополнительная информация о $P(t)$ приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} 1000 &= P(0) = Ce^0 = C, \\ 2000 &= P(1) = Ce^k. \end{aligned}$$

Из этого следует, что $C = 1000$ и что $e^k = 2$, так что $k = \ln 2 \approx 0.693147$. При этом значении k дифференциальное уравнение (1.5) принимает следующий вид:

$$\frac{dP}{dt} = (\ln 2)P \approx 0.693147 P$$

Замена $k = \ln 2$ и $C = 1000$ в (1.6) дает частное решение $P(t) = 1000(e^{\ln 2})^t = 1000 \cdot 2^t$ (так как $e^{\ln 2} = 2$), которое удовлетворяет указанным условиям. Можно использовать это частное решение, чтобы предсказать численность колонии бактерий в будущем. Например, предсказанная численность бактерий после полутора часов ($t = 1.5$) равна:

$$P(1.5) = 1000 \cdot 2^{3/2} \approx 2828.$$

Условие $P(0) = 1000$ в примере 6 называют начальным условием, потому что часто пишут дифференциальные уравнения, для которых $t = 0$ является "временем пуска". На рис. 3 показано несколько различных графиков функции вида $P(t) = Ce^{kt}$ при $k = \ln 2$. Графики всего бесконечного множества решений $dP/dt = kP$ фактически заполняют всю двумерную плоскость, и никакие два из них не пересекаются. Кроме того, выбор любой точки P_0 на оси P определяет $P(0)$. Поскольку через каждую такую точку проходит только одно решение, то мы видим, что начальное условие $P(0) = P_0$ определяет единственное решение, согласующееся с имеющимися данными.

Текст на MATLAB

```
k=log(2);
t=-1:0.5:5;
C=[ -0.12; -0.06; -0.03; -0.01; -0.005; 0.005; 0.01; 0.03; 0.06; 0.12];
P=C*exp(k*t);
plot(t,P);
title('P(t)=C*e^k*t');
xlabel('t');
ylabel('P(t)');
text(3.1,2.78, 'P(t)= 0.12*e^k*t\rightarrow');
text(3.45,1.78, 'P(t)= 0.06*e^k*t\rightarrow');
text(3.2,0.85, 'P(t)= 0.03*e^k*t\rightarrow');
text(3.1,-0.78, 'P(t)= -0.03*e^k*t\rightarrow');
text(3.45,-1.78, 'P(t)= -0.06*e^k*t\rightarrow');
text(3.1,-2.78, 'P(t)= -0.12*e^k*t\rightarrow');
grid on
```

Краткое обсуждение прироста населения в примерах 1.5 и 1.6 иллюстрирует процесс математического моделирования (рис. 1.4), который включает следующие этапы.

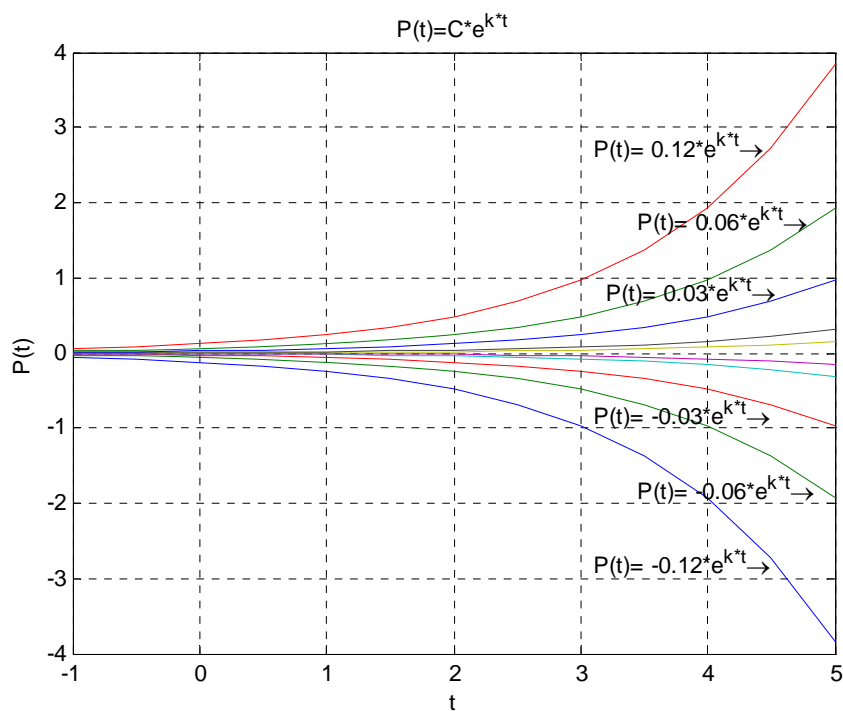


Рис. 1.3. Графики $P(t) = Ce^{kt}$ при $k = \ln 2$.

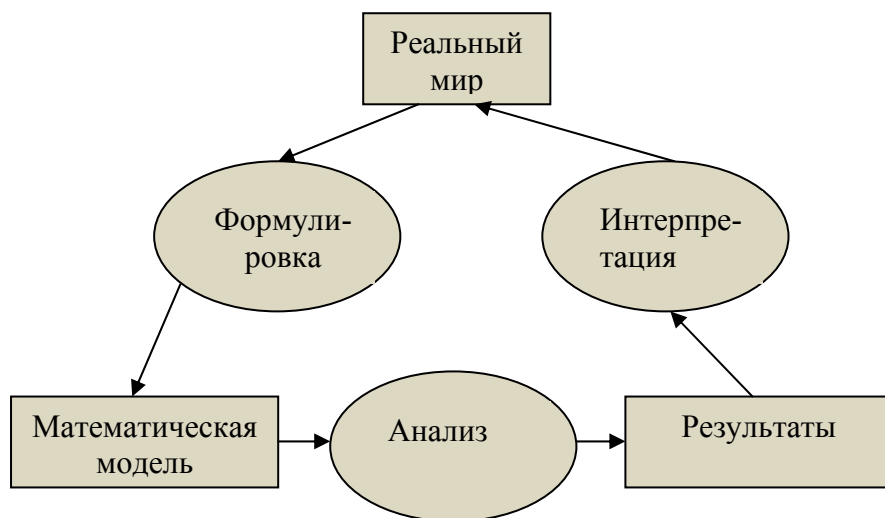


Рис. 1.4. Процесс математического моделирования

1. Формулировка задачи реального мира в математических терминах. Это и есть построение математической модели.
2. Анализ или решение полученной математической задачи.
3. Интерпретация математических результатов в контексте первоначальной задачи реального мира, например, получение ответа на ранее поставленный вопрос.

В примере с населением задача, возникающая в реальном мире – это определение плотности населения в некоторый будущий момент времени. Математическая модель состоит из списка переменных (P и t), которые описывают данную ситуацию, а также одного или нескольких уравнений, связывающих эти переменные ($dP/dt = kP$, $P(0)=P_0$), причем эти уравнения должны быть известны или принимаются как выполняющиеся в рамках данной модели.

Математический анализ состоит из решения этих уравнений (в данном случае определяется P как функция, зависящая от времени t). Наконец, мы применяем полученные математические результаты, чтобы попытаться ответить на первоначально заданный вопрос о реальном мире.

Однако весьма возможно, что ни одно решение дифференциального уравнения не соответствует всей известной информации. В таком случае мы должны заподозрить, что дифференциальное уравнение неточно описывает реальный мир. Например, решения уравнения (1.5) имеют вид $P(t) = Ce^{kt}$ где C – положительная константа, но ни для какого значения констант k и C функция $P(t)$ не описывает точно фактический рост населения во всем мире в течение нескольких прошлых столетий. Возможно, надо поэтому написать более сложное дифференциальное уравнение, в котором принимается во внимание влияние перенаселения на коэффициент рождаемости, нехватка продовольствия и другие факторы. Это должно быть расценено не как отказ от модели, разобранный в примере 1.5, а как понимание того, что нужно учесть влияние дополнительных факторов при изучении роста численности населения. Действительно, уравнение (1.5) является весьма точным при некоторых обстоятельствах. Например, оно выполняется для роста численности колонии бактерий при условиях неограниченного продовольствия и пространства.

Но в нашем примере населения мы игнорировали эффекты таких факторов, как изменение показателей рождения и смертности. Это сделало математический анализ весьма простым, возможно, даже нереалистичным.

Хорошая математическая модель удовлетворяет двум противоречащим требованиям: она должна в достаточной степени учитывать все существенные детали, чтобы представить ситуацию в реальном мире с относительно небольшой погрешностью, и в то же время должна быть достаточно простой, чтобы можно было осуществить математический анализ на практике. Если модель столь детализирована,

что она полностью представляет физическую ситуацию, то выполнить математический анализ может быть слишком трудно. Если модель слишком проста, результаты могут быть столь неточными, что будут бесполезны. Таким образом, есть неизбежный компромисс между тем, что наблюдается в физической реальности и что является математически возможным. Поэтому построение модели, которая правильно преодолевает этот разрыв между реальностью и выполнимостью анализа – самый критический и тонкий шаг в процессе построения модели. Необходимо найти способы упрощения математической модели, которые позволят не жертвовать основными особенностями процесса, происходящего в реальном мире.

2 Модели типа ускорение – скорость

2.1 Скорость и ускорение

С помощью непосредственного интегрирования можно решить множество важных задач о движении частицы (или точки, имеющей определенную массу), если известны силы, действующие на частицу [6]. Движение частицы по прямой линии (ось x) описывается ее положением:

$$x = f(t)$$

т.е. функцией, дающей ее координату x в момент времени t . Скорость частицы определяется равенством:

$$v(t) = \dot{f}(t), \quad \text{т.е.} \quad v = dx/dt.$$

Ускорение тела $a(t)$ равно $a(t) = v'(t) = x''(t)$ или, в обозначениях Лейбница:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Второй закон Ньютона (закон движения тела под воздействием силы) гласит, что если сила $F(t)$ действующая на частицу, направлена вдоль ее линии движения, то:

$$ma(t) = F(t); \quad \text{т.е.} \quad F = ma,$$

где m – масса частицы.

Если сила F известна, то уравнение $x''(t) = F(t)/m$ можно проинтегрировать дважды. Этим будет найдена функция, дающая положение $x(t)$. Эта функция будет содержать две константы, появляющиеся после интегрирования. Эти две произвольные постоянные часто определяются по начальному положению $x_0 = x(0)$ и начальной скорости $v_0 = v(0)$ частицы.

Постоянное ускорение. Предположим теперь, что сила F , а значит и ускорение $a = F/m$, являются постоянными. Начнем с уравнения:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (a - \text{константа}).$$

Проинтегрировав обе части, получим:

$$v(t) = \int a dt = at + C_1$$

Мы знаем, что $v = v_0$, когда $t = 0$, и подстановка этой информации в предыдущее уравнение дает $C_1 = v_0$. Так что

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = at + v_0. \quad (2.1)$$

Второе интегрирование дает:

$$x(t) = \int v dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2,$$

а подстановка $t = 0$, $x = x_0$ дает $C_2 = x_0$. Поэтому:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (2.2)$$

Таким образом, используя уравнение (2.1), мы можем найти скорость, а с помощью уравнения (2.2) положение частицы в любой момент времени t , если известно ее постоянное ускорение a , ее начальная скорость v_0 и ее начальное положение x_0 .

2.2 Задача пловца

На рис. 2.1 схематично представлена текущая на север река шириной $w = 2a$. Линии $x = \pm a$ представляют собой берега реки, а ось y проходит посередине реки. Предположим, что скорость воды увеличивается по мере приближения к центру реки, а зависимость x до центра определяется формулой:

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) позволяет проверить, что вода действительно течет быстрее всего в центре, $v_R = v_0$, и что $v_R = 0$ на каждом берегу реки.

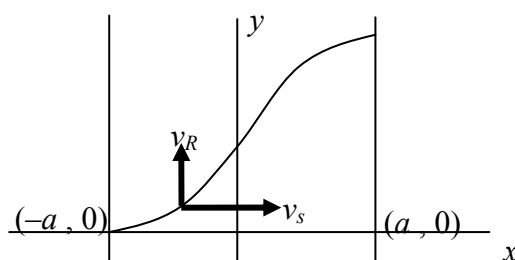


Рис. 2.1. Задача пловца.

Предположим, что пловец начинает плыть из точки $(-a, 0)$ на западном берегу и плывет на восток с постоянной скоростью v_s относительно воды. Как показано на рис.2.1, вектор его скорости (относительно земли) имеет горизонтальную компоненту v_s и вертикальную составляющую v_R . Следовательно, угол α направления движения пловца дается выражением:

$$\tan \alpha = \frac{v_R}{v_s}.$$

Поскольку $\tan \alpha = dy/dx$, замена (2.3) дает дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_s} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (2.4)$$

траектории пловца $y = y(x)$ при пересечении реки.

Пример 2.1. Предположим, что река имеет ширину 2 км, и что скорость воды в середине реки равна $v_0 = 15$ км/час. Если скорость пловца равна $v_s = 5$ км/час, то уравнение (2.4) принимает вид:

$$y' = 3(1 - x^2) = 3 - 3x^2.$$

Интегрирование дает:

$$y(x) = \int (3 - 3x^2) dx = 3x - x^3 + C$$

для траектории пловца. Начальное условие $y(-1) = 0$ дает $C = 2$. Так что:

$$y(x) = 3x - x^3 + 2.$$

Тогда

$$y(1) = 3 - 1 + 2 = 4.$$

Отсюда следует, что пловец дрейфует 4 км вниз по течению, в то время как он проплывает 2 км поперек реки.

2.3 Траектория полета

Предположим, что самолет вылетает из точки $(a, 0)$, расположенной к востоку от аэропорта назначения, расположенного в начале координат $(0,0)$. Самолет перемещается с постоянной скоростью v_0 относительно ветра, который дует на север с постоянной скоростью w . Как показано на рис. 2.2, мы предполагаем, что пилот держит курс на начало координат. Рис. 2.3 помогает получить компоненты скорости самолета относительно земли. Они равны:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -v_0 \cos \theta = -\frac{v_0 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{dy}{dt} = -v_0 \sin \theta = -\frac{v_0 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + w \end{cases}$$

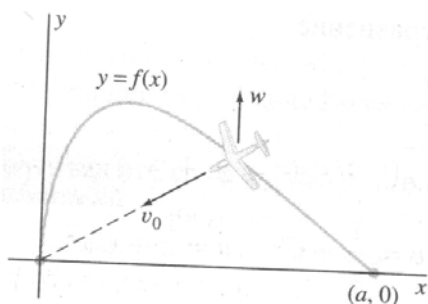


Рис. 2.2. Самолет держит курс на начало координат

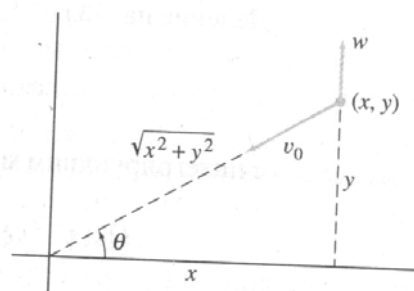


Рис. 2.3. Компоненты скорости вектора самолета

Следовательно, траектория $y = f(x)$ самолета удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{v_0 x} (v_0 y - w \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (2.5)$$

Если мы положим $k=w/v_0$, т.е. введем константу k , равную отношению скорости ветра к скорости полета самолета, то (2.5) преобразуется к однородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k \left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

Замена $y = xv$, $y' = v + xv'$ приведет его к виду:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = -k \int \frac{1}{x} dx.$$

Воспользовавшись таблицей интегралов, находим, что:

$$\ln \left(v + \sqrt{1+v^2} \right) = -k \ln x + C,$$

и начальное условие $v(a) = 0$ дает $C = k \ln a$. Отсюда следует, что:

$$\ln(v + \sqrt{1+v^2}) = -k \ln x + k \ln a = -k \ln \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x}{a} \right)^{-k} \Rightarrow v + \sqrt{1+v^2} = \left(\frac{x}{a} \right)^{-k} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{-k} + \left(\frac{x}{a} \right)^k = v + \sqrt{1+v^2} + \frac{1}{v + \sqrt{1+v^2}} = \frac{(v + \sqrt{1+v^2})^2 + 1}{v + \sqrt{1+v^2}} = \frac{v^2 + 2v\sqrt{1+v^2} + 1 + v^2 + 1}{v + \sqrt{1+v^2}}$$

$$= \frac{2v^2 + 2v\sqrt{1+v^2} + 2}{v + \sqrt{1+v^2}} = \frac{2v(v + \sqrt{1+v^2})}{v + \sqrt{1+v^2}} = 2v \Rightarrow v = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{-k} + \left(\frac{x}{a} \right)^k \right].$$

Поскольку $y = xv$, получаем:

$$y(x) = \frac{a}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{1-k} + \left(\frac{x}{a} \right)^{1+k} \right] \quad (2.7)$$

в качестве уравнения траектории самолета.

Обратите внимание, что кривая на рис. 2.4, определяемая уравнением (2.7), проходит через начало только в случае $k < 1$ (т. е. в случае $w < v_0$), так что самолет достигнет аэропорта лишь в этом случае. Если $w = v_0$ (так что $k = 1$), то уравнение (2.7) примет вид $y(x) = (1/2) \cdot a(1 - x^2/a^2)$, так что траектория самолета приближается к точке $(0, a/2)$, а не к $(0,0)$. Ситуация еще хуже, если $w > v_0$ (так что $k > 1$) – в этом случае, как следует из (2.7), $y \rightarrow +\infty$, при $x \rightarrow 0$.

Текст на MATLAB

```
clc
clear
syms a v0 u x k
a = vpa('800'); % километров
v0 = vpa('800'); % начальная скорость, километров/час
w = vpa('40'); % скорость ветра, километров/час
k = w/v0;
y = a/2 * ((x/a)^(1-k) - (x/a)^(1+k));
ezplot(y);
if eval(k) < 1
    d_y = diff(y,x);
    % Найдём максимальное расстояние, на которое самолет относится ветром
    % от курса, т.е находим максимальное значение y(x) при 0 < x < a
    x_del_a = solve(d_y,x)/a;
    y_max = simplify(a/2 * (x_del_a^(1-k) - x_del_a^(1+k)))
end
```

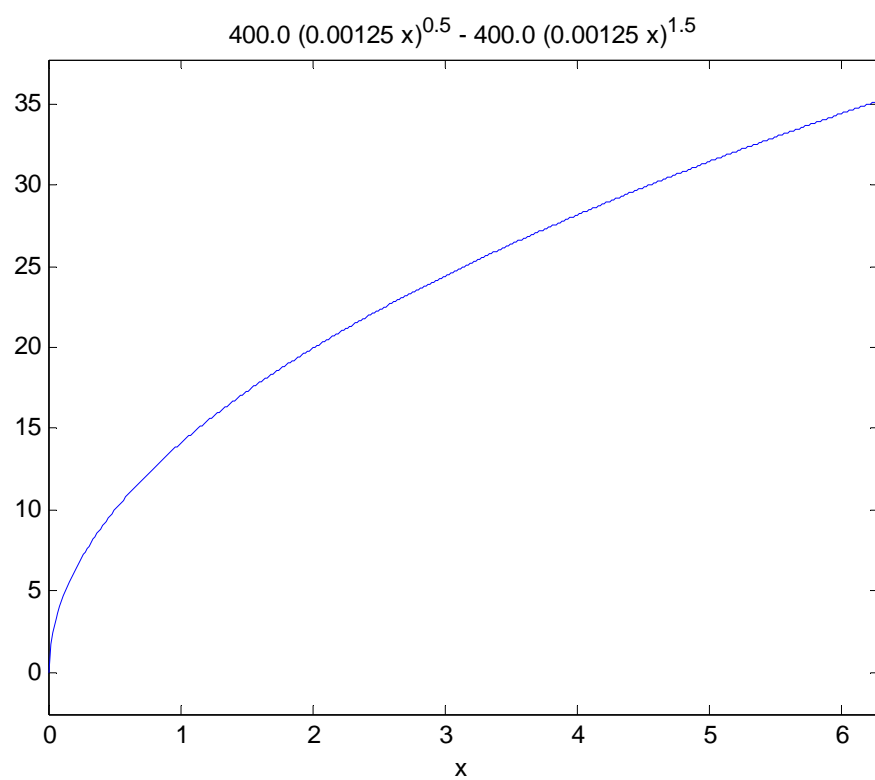


Рис. 2.4. График уравнения 2.7.

2.4 Вертикальное движение

Пример 2.2. Лунный посадочный модуль падает свободно на поверхность Луны со скоростью 450 метров в секунду (м/с). Его тормозные реактивные двигатели обеспечивают постоянное замедление (торможение) 2.5 метров в секунду за секунду (м/с²) (гравитационное ускорение, обусловленное Луной, учтено в данном замедлении). На какой высоте над поверхностью Луны должны быть включены тормозные реактивные двигатели, чтобы гарантировать "мягкое приземление" ($v = 0$ при посадке)?

Решение. Через $x(t)$ мы обозначаем высоту лунного посадочного модуля над поверхностью Луны (рис. 2.5). Пусть тормозные реактивные двигатели должны быть запущены над поверхностью Луны в момент времени $t = 0$. Тогда $v_0 = -450$ (м/с, скорость отрицательна, потому что высота $x(t)$ уменьшается), и $a = +2.5$, потому что тяга вверх увеличивает скорость v (хотя она уменьшает модуль скорости $|v|$). Тогда уравнения (2.1) и (2.2) принимают вид:

$$v(t) = 2.5t - 450 \quad (2.8)$$

и

$$x(t) = 1.25 t^2 - 450t + x_0, \quad (2.9)$$

где x_0 – высота посадочного модуля над поверхностью Луны в момент времени $t = 0$, когда должны быть включены тормозные реактивные двигатели.

Из уравнения (2.8) мы видим, что $v = 0$ (мягкое приземление) происходит, когда $t = 450/2.5 = 180$ с (т. е. 3 минуты); тогда подстановка $t = 180$, $x = 0$ в уравнение (2.2) дает:

$$x_0 = 0 - (1.25)(180)^2 + 450(180) = 40500 \text{ метров.}$$

Т.е. $x_0 = 40.5$ км. Таким образом, тормозные реактивные двигатели должны быть включены, когда лунный посадочный модуль находится на 40.5 км выше поверхности Луны. В этом случае он приземлится мягко на лунной поверхности после 3 минут замедленного спуска.

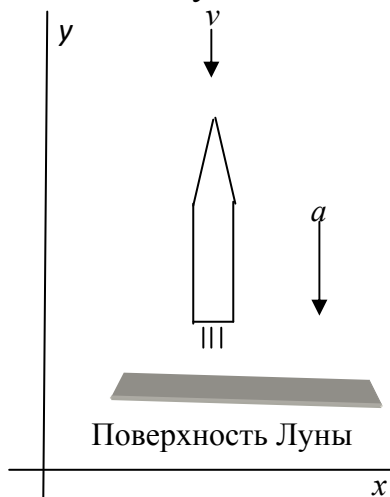


Рис. 2.5. Ракета движется вниз.

Текст на MATLAB

```
clc
clear
x=0; %Высота прилунения
a=2.5; %Лунное ускорение свободного падения
v0=-450; %Начальная скорость прилунения
t=-v0/a %Время прилунения
x0=x-1/2*a*t^2-v0*t %Высота включения двигателей
```

Решим задачу о вертикальном движении массы m около поверхности Земли под влиянием гравитационного поля с постоянным ускорением. Если пренебречь эффектами сопротивления воздуха, то второй закон Ньютона ($F=ma$) подразумевает, что скорость v тела, имеющего массу m , удовлетворяет уравнению:

$$m \frac{dv}{dt} = F_G \quad (2.10)$$

где $F_G = -mg$ — направленная вниз сила тяжести, а g — гравитационное ускорение (в единицах системы СИ).

Пример 2.3. Предположим, что стрела выпущена из арбалета прямо вверх с поверхности земли ($y_0 = 0$) с начальной скоростью $v_0 = 49$ (м/с). Тогда уравнение (2.10) с $g = 9.8$ дает:

$$\frac{dv}{dt} = -9.8, \text{ так что } v(t) = -(9.8)t + v_0 = -(9.8)t + 49.$$

Следовательно, высота (рассматриваемая как функция времени) стрелы $y(t)$ дается формулой:

$$y(t) = \int [-(9.8)t + 49] dt = -(4.9)t^2 + 49t + y_0 = -(4.9)t^2 + 49t.$$

Стрела достигает максимальной высоты, когда $v(t) = -(9.8)t + 49 = 0$. Следовательно, $t = 5$ (с). Таким образом, максимальная высота равна:

$$y_{max} = y(5) = -(4.9)(5^2) + (49)(5) = 122.5 \text{ (м)}.$$

Стрела упадет на землю, когда $y = -(4.9)t(t - 10) = 0$, т.е. после 10 секунд полета.

Теперь в этой задаче учтем сопротивление воздуха. Тогда сила F_R , оказываемая сопротивлением воздуха на движущееся тело массой m , должна быть добавлена в правую часть уравнения (2.10):

$$m \frac{dv}{dt} = F_G + F_R$$

2.5 Учет сопротивления

Ньютон в своих знаменитых Началах (Principia Mathematica) показал, что из простых физических предположений следует, что F_R пропорциональна квадрату скорости: $F_R = kv^2$. Но эмпирические исследования показывают, что фактическая зависимость сопротивления воздуха от скорости может быть весьма сложной. Для многих целей достаточно предположить, что $F_R = kv^p$, где $1 \leq p \leq 2$ и значение k зависит от размера и формы тела, а также от плотности и вязкости воздуха. Вообще говоря, $p=1$ для относительно малых скоростей и $p=2$ для больших опростей, ну а для промежуточных скоростей $1 < p < 2$. Но конкретные значения "низких скоростей" и "высоких скоростей" зависят от тех же самых коэффициентов, которые определяют значение коэффициента k .

Таким образом, сопротивление воздуха – сложное физическое явление. Но для упрощения предположим, что F_R точно выражается приведенной выше формулой, причем $p=1$ или $p=2$. В конце концов, это приводит к хорошей математической модели, которая предсказывает самые важные качественные особенности движения тела в среде с сопротивлением.

2.5.1 Сопротивление, пропорциональное скорости

Сначала рассмотрим вертикальное движение тела массой m около поверхности земли. На тело действуют две силы – направленная вниз сила тяготения F_G и сила F_R сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости (так что $p = 1$). Сила сопротивления воздуха, конечно же, направлена против направления движения тела. Если в системе координат положительное направление y направлено вверх, причем $y=0$ на уровне земли, то:

$$F_G = -mg \text{ и } F_R = -kv \quad (2.11)$$

где k – положительная константа и $v = dy/dt$ – скорость тела. Обратите внимание, что знак "минус" в (2.11) делает F_R положительным (сила направлена вверх), если тело падает (v отрицательно) и делает F_R отрицательным (сила направлена вниз) если тело набирает высоту (v положительна). Равнодействующая сил, действующих на тело, равна:

$$F = F_R + F_G = F_G = -kv - mg,$$

Тогда закон Ньютона движения $F = m(dv/dt)$ приводит к уравнению

$$m \frac{dv}{dt} = -kv - mg.$$

Таким образом,

$$\frac{dv}{dt} = -\rho v - g, \quad (2.12)$$

где $\rho = k/m > 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если бы положительное направление оси y было направлено вниз, то уравнение (2.12) имело бы вид $dv/dt = -\rho v + g$.

Уравнение (2.12) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, и его решением является функция:

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\rho} \right) e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}. \quad (2.13)$$

Здесь $v_0 = v(0)$ – начальная скорость тела. Обратите внимание, что:

$$v_T = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{g}{\rho}.$$

Таким образом, скорость тела, падающего при сопротивлении воздуха, не увеличивается неограниченно – она приближается к конечной граничной скорости, или предельной скорости:

$$|v_T| = \frac{g}{\rho} = \frac{mg}{k}. \quad (2.14)$$

Этот объясняет, почему парашютист не разбивается при прыжке. Это также помогает объяснить случайное выживание людей, которые выпадают без парашютов из высоко летящих самолетов.

Перепишем уравнение (2.13) в виде:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = (v_0 - v_T) e^{-\rho t} + v_T. \quad (2.15)$$

Интегрирование дает:

$$y(t) = -(1/\rho)(v_0 - v_T)e^{-\rho t} + v_T \cdot t + C.$$

Подставив 0 вместо t и обозначив через $y_0 = y(0)$ начальную высоту тела, находим, что $C = y_0 + (v_0 - v_T)/\rho$, и потому:

$$y(t) = y_0 + v_T \cdot t + (1/\rho)(v_0 - v_T)(1 - e^{-\rho t}). \quad (2.16)$$

Равенства (2.15) и (2.16) дают скорость v и высоту y тела,двигающегося вертикально под действием сил тяжести и сопротивления воздуха. Формулы зависят от начальной высоты y_0 тела, его начальной скорости v_0 и коэффициента лобового сопротивления ρ . (Коэффициент лобового сопротивления – это константа, такая, что ускорение из-за сопротивления воздуха равно $a_R = -\rho v$.) Эти два уравнения также содержат предельную скорость v_T , определенную в (2.14).

Для человека, спускающегося на парашюте, обычно значение ρ равно 1.5, что соответствует предельной скорости $|v_T| \approx 6.5$ метра в секунду. Для парашютиста-неудачника, выпрыгнувшем вместо парашюта в расстегнутом пальто, трепещущем на ветру при падении, ρ может измениться, возможно, даже до 0.5, что дает предельную скорость $|v_T| \approx 20$ метров в секунду.

Пример 2.4. Снова полагаем, что стрела выпущена из арбалета прямо вверх с начальной скоростью $v_0 = 49$ м/с с поверхности земли. Но

теперь мы принимаем во внимание сопротивление воздуха, причем $\rho = 0.04$ в уравнении (2.12). Спрашивается, как изменится максимальная высота и время полета вверх по сравнению со значениями, найденными в примере 2.3.

Решение. Подставляем $y_0 = 0$, $v_0 = 49$ и $v_T = -\rho/g = -245$ в (2.13) и получаем:

$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245, \quad y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25}.$$

Найдем время, требуемое для того, чтобы стрела достигла максимальной высоты (тогда $v = 0$). Для этого мы решаем уравнение:

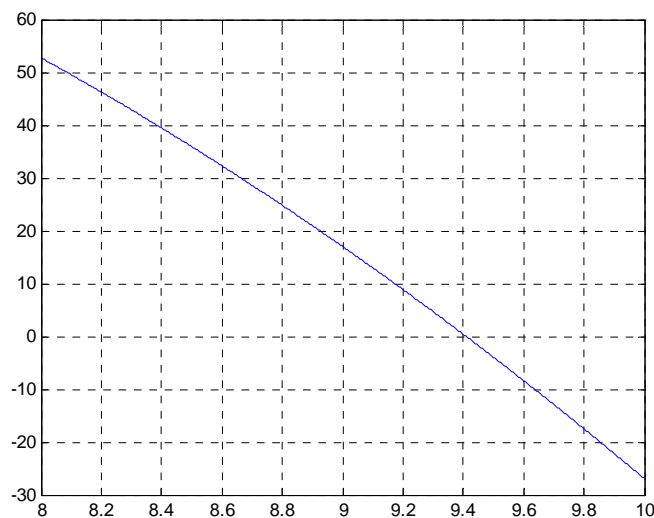
$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245 = 0$$

и находим $t_{max} = 25 \cdot \ln(294/245) \approx 4.558$ (с). Максимальная высота равна $y_{max} = v(t_{max}) \approx 108.280$ метра (а не 122,5 метра, как было бы при отсутствии сопротивления воздуха). Чтобы узнать, когда стрела упадет на землю, нужно решить уравнение:

$$y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25} = 0.$$

Используя метод Ньютона, мы можем начать с начального значения $t_0 = 8$ и выполнять итерации $t_{n+1} = t_n - y(t_n)/y'(t_n)$ чтобы найти последовательные приближения к корню. Или можно использовать команды системы MATLAB.

```
clc
clear
a=7350;
b=245;
c=25;
% Строим график заданной функции
t = 8:0.001:10;
y = a-b*t-a*exp(-t/c);
plot(t,y);
grid on
```



Видим, что пересечение графика $y(t)$ с осью Ot находится в районе $t = 9.4$. Для численного решения добавим следующие строки:

```
f = @(t)a-b*t-a*exp(-t/c);
```

```
z = fzero(f,9)
```

Получим $z = 9.4109$.

Мы рассчитали, что стрела находится в воздухе $t_f \approx 9.41$ секунды (а не 10 секунд, как было бы при отсутствии сопротивления воздуха). Она упадет на землю с меньшей скоростью $|v(t_f)| \approx 43,227$ м/с (а не с начальной скоростью 49 м/с).

Таким образом, эффект сопротивления воздуха уменьшает максимальную высоту стрелы, полное время полета и ее скорость при падении. Также обратите внимание, что стрела при наличии сопротивления воздуха падает дольше, чем поднимается.

2.5.2 Сопротивление, пропорциональное квадрату скорости

Предполагаем, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости:

$$F_R = \pm kv^2 \quad (2.17)$$

причем $k > 0$. Выбор знаков здесь зависит от направления движения, против которого направлена сила сопротивления. Если положительное направление оси y направлено вверх то $F_R < 0$ для движения вверх (когда $v > 0$) и $F_R > 0$ для движения вниз (когда $v < 0$). Таким образом, знак F_R всегда противоположен знаку v , так что мы можем переписать уравнение (2.17) в виде:

$$F_R = -kv|v|$$

Тогда второй закон Ньютона дает:

$$m \frac{dv}{dt} = F_G + F_R = -mg - kv|v|,$$

т.е.

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v|v|, \quad (2.18)$$

где $\rho = k/m > 0$. Рассмотрим случаи движения вверх и вниз отдельно.

Движение вверх. Предположим, что снаряд запущен прямо вверх из начального положения y_0 с начальной скоростью $v_0 > 0$. Тогда уравнение (2.18) для $v > 0$ дает дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v^2 = -g \left(1 + \frac{\rho}{g} v^2 \right)$$

Движение вниз. Предположим, что снаряд запущен (или сброшен) прямо вниз из начального положения y_0 с начальной скоростью $v_0 \leq 0$. Тогда уравнение (2.18) для $v < 0$ дает дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \rho v^2 = -g \left(1 - \frac{\rho}{g} v^2 \right).$$

2.6 Задачи

1. Ускорение спортивного автомобиля Maserati пропорционально разности между 250 км/час и его скоростью. Эта машина может ускориться из состояния покоя до 100 км/час за 10 секунд. Сколько времени потребуется для этого автомобиля, чтобы ускориться из состояния покоя до 200 км/час?

2. Предположим, что тело движется в среде, причем сопротивление среды пропорционально скорости v тела, так что $dv/dt = -kv$.

а) Покажите, что скорость и положение тела в момент времени t даются формулами: $v(t) = v_0 e^{-kt}$ и $x(t) = x_0 + v_0(1 - e^{-kt})/k$.

б) Убедитесь, что тело переместится только на конечное расстояние, и найдите это расстояние.

3. Предположим, что моторная лодка движется со скоростью 1.5 м/с, когда ее двигатель внезапно выходит из строя, и что через 10 с после этого лодка замедлилась до 0.5 м/с. Примите, как и в задаче 2, что сопротивление, с которым сталкивается лодка во время каботажного плавания, пропорционально скорости лодка. Как далеко может проплыть лодка?

4. Рассмотрим тело, которое перемещается горизонтально в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости v , так что $dv/dt = -kv^2$. Покажите, что

$$v(t) = v_0/(1 + v_0 kt) \text{ и что } x(t) = x_0 + \ln(1 + v_0 kt)/k.$$

Обратите внимание что, в отличие от результата задачи 2, $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

5. Предполагая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости (как в задаче 4), определите, сколько проплывет моторная лодка из задачи 3 вдоль побережья за первую минуту после выхода ее мотора из строя?

6. Предположим, что тело,двигающееся со скоростью v , испытывает сопротивление среды, определяемое формулой $dv/dt = -kv^{3/2}$. Покажите, что

$$v(t) = \frac{4v_0}{(kt\sqrt{v_0} + 2)^2}$$

и что

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{k} \sqrt{v_0} \left(1 - \frac{2}{kt\sqrt{v_0} + 2} \right).$$

Покажите, что если сопротивление пропорционально скорости тела в степени 3/2, то тело пройдет только конечное расстояние до остановки.

7. Предположим, что автомобиль начинает двигаться из состояния покоя и его двигатель обеспечивает ускорение 3 м/с², а сопротивление

воздуха обеспечивает замедление 0.05 м/с^2 на каждый метр в секунду скорости автомобиля.

а) Найдите максимально возможную (граничную) скорость автомобиля.

б) Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы достичь 90% его граничной скорости, и как далеко он переместится при этом?

8. Решите заново обе части задачи 7, но теперь примите, что замедление из-за сопротивления воздуха равно $(0,001) v^2 \text{ м/с}^2$, если скорость автомобиля равна $v \text{ м/с}$.

9. Моторная лодка весит 14000 кг, и ее двигатель обеспечивает тягу 2500 кг. Предположите, что сопротивление воды равно 100 кг на каждый м/скорости v лодки. Тогда

$$14000 \frac{dv}{dt} = 2500 - 100v.$$

Если лодка начинает двигаться из состояния покоя, то какой максимальной скорости она может достичь?

10. Женщина выпрыгивает из самолета на высоте 3000 м, падает свободно в течение 20 с, а затем открывает парашют. Сколько времени ей потребуется, чтобы достичь поверхности земли? Примите, что сопротивление воздуха линейно зависит от скорости: $pv \text{ м/с}^2$ и возьмите $p = 0.15$ для полета без парашюта и $p=1.5$ для полета с парашютом. (Указание. Сначала определите высоту и скорость в момент раскрытия парашюта.)

11. Согласно заметке в газете, парашютист выжил, совершив тренировочный прыжок с 400 метров, но его парашют не раскрылся, хотя и обеспечил немного дополнительного сопротивления, так как трепетался нераскрытым на ветру. Предположительно он ударился о землю со скоростью 160 км/час после падения в течение 8 с. Проверьте точность этой заметки. (Указание. Найдите p из уравнения, принимая, что предельная скорость равна 160 км/час. Затем вычислите время, требуемое для падения с высоты 400 метров.)

12. Предложено избавиться от ядерных отходов, залитых в металлические бочки весом $W = 260 \text{ н}$ и объемом 2 кубических метра, путем сброса их в океан ($v_0 = 0$). Сила сопротивления воды для металлической бочки, сбрасываемой в океан, дается уравнением:

$$m \frac{dv}{dt} = -W + B + F_R,$$

где сила B равна весу объема воды, вытесненной металлической бочкой (закон Архимеда), а сила сопротивления воды F_R найдена опытным путем, и оказалось, что она равна 1.5 кг на метр в секунду скорости металлической бочки. Если металлические бочки могут лопнуть при соударении на скорости больше 22.5 метров в секунду, то какова максимальная глубина, на которую они могут быть сброшены в океан, чтобы они не лопнули? (Указание. Плотность воды принять 1000 кг/м^3 .)

3 Переменное гравитационное ускорение

Если снаряд при вертикальном движении не остается в непосредственной близости от поверхности земли, гравитационное ускорение, действующее на него, не постоянно. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила притяжения между двумя точечными массам M и m , равна:

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (3.1)$$

где G – **гравитационная постоянная**. Численно она равна модулю силы тяготения, действующей на точечное тело единичной массы со стороны другого такого же тела, находящегося от него на единичном расстоянии. В единицах СИ рекомендованное на 2006 год значение $G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$, или $\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$.

Формула также имеет силу, если одна или обе из этих двух масс представляют собой однородные сферы. В этом случае r равно расстоянию между центрами сфер.

Пример 3.1. Лунный посадочный модуль свободно падает на Луну, причем на высоте 53 км над поверхностью Луны его скорость, направленная к Луне, равна 1477 км/час. Его тормозные реактивные двигатели, запущенные в безвоздушном пространстве, обеспечивают замедление $T = 4 \text{ м/с}^2$. На какой высоте над поверхностью Луны должны быть активизированы тормозные реактивные двигатели, чтобы гарантировать "мягкое приземление" ($v = 0$ при соударении)?

Решение. Пусть $r(t)$ обозначает расстояние посадочного модуля от центра Луны в момент времени t (рис. 3.1). Складывая (постоянное) ускорение тяги T и (отрицательное) лунное ускорение $F/m = GM/r^2$ из уравнения (3.1), получаем дифференциальное уравнение, левая часть которого есть ускорение:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = T - \frac{GM}{r^2} \quad (3.2)$$

где $M = 7.35 \times 10^{22} \text{ (кг)}$ – масса Луны, которая имеет радиус $R = 1.74 \times 10^6 \text{ м}$ (или 1740 км, немного больше четверти радиуса Земли). Замечая, что это дифференциальное уравнение второго порядка не содержит независимую переменную t , мы заменяем:

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}$$

и получаем уравнение первого порядка:

$$v \frac{dv}{dr} = T - \frac{GM}{r^2}$$

с новой независимой переменной r . Интегрирование по r теперь приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}v^2 = Tr + \frac{GM}{r} + C, \quad (3.3)$$

которое мы можем применить как перед запуском ($T = 0$), так и после запуска посадочного двигателя ($T = 4$).

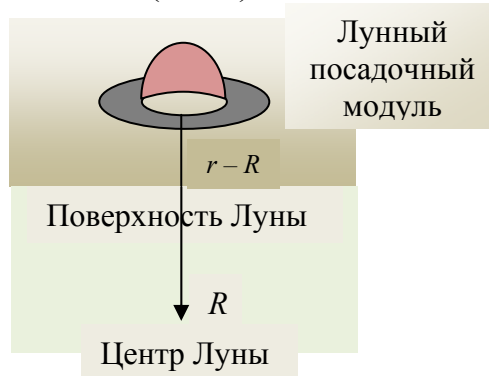


Рис. 3.1. Лунный посадочный модуль, спускающийся на поверхность Луны.

Перед запуском посадочного двигателя. Замена $T = 0$ в (3.3) дает уравнение:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C_1 \quad (3.4)$$

где константа $C_1 = v_0^2 - GM/r_0$, причем

$$v_0 = -1477 \frac{\text{км}}{\text{час}} \times 1000 \frac{\text{м}}{\text{км}} \times \frac{1 \text{ час}}{3600 \text{ с}} = -\frac{14770 \text{ м}}{36 \text{ с}}$$

и $r_0 = (1.74 \times 10^6) + 53000 = 1.793 \times 10^6$ м (от начального положения в системе координат скорость-положение).

После запуска посадочного двигателя. Замена $T = 4$ и $v = 0$, $r = R$ (при приземлении) в (3.3) дает:

$$\frac{1}{2}v^2 = 4r + \frac{GM}{r} + C_2 \quad (3.5)$$

где константа $C_2 = -4R - GM/R$ получена подстановкой значений $v = 0$, $r = R$ при приземлении.

В момент запуска посадочного двигателя лунного посадочного модуля его положение и скорость удовлетворяют и уравнению (3.4) и уравнению (3.5). Поэтому, чтобы найти его искомую высоту h над поверхностью Луны при запуске посадочного двигателя, мы можем приравнять правые части в (3.3) и (3.4). Это дает $r = (C_1 - C_2)/4 = 1.78187 \times 10^6$ и, наконец, $h = r - R = 41870$ м (т. е. 41.87 км). Кроме того, подстановка этого значения r в (3.4) дает скорость $v = -450$ м/с в момент воспламенения.

4 Вторая космическая скорость

Жюль Верн в своем романе “С Земли на Луну”, написанном в 1865 году, поднял вопрос о том, какую начальную скорость должен иметь снаряд, запущенный с поверхности Земли, для того чтобы достичь Луны. Точно так же мы можем спросить, какой должна быть начальная скорость v_0 для того, чтобы снаряд не упал на Землю и не стал спутником Земли. Это будет так, если его скорость $v=dr/dt$ остается положительной для всех $t > 0$, так что снаряд всегда движется от Земли. Обозначим через $r(t)$ расстояние снаряда от центра Земли в момент времени t (рис. 4.1).

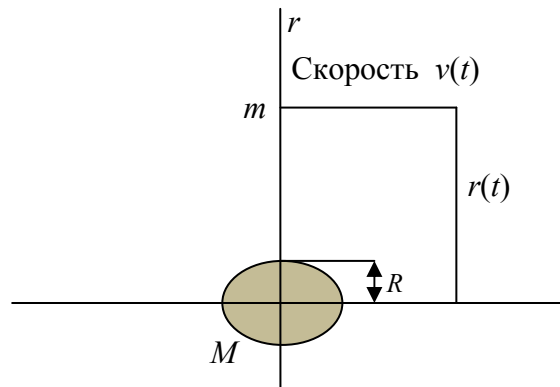


Рис. 4.1. Движение снаряда.

Тогда мы имеем уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (4.1)$$

подобное уравнению (3.2), но в нем $T = 0$ (отсутствует тяга) и $M = 5.975 \times 10^{24}$ (кг) обозначает массу Земли, которая имеет экваториальный радиус $R = 6.378 \times 10^6$ (м). Подстановка выражения $dv/dt = v(dv/dr)$ дает:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Тогда интегрирование обеих частей по r приводит к равенству:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C.$$

Теперь $v = v_0$ и $r = R$, когда $t = 0$, так что $C = (1/2) \cdot v_0^2 - GM/R$, и, следовательно, решение уравнения относительно v^2 дает:

$$v^2 = v_0^2 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Это неявное решение уравнения (4.1) определяет скорость снаряда v как функцию его расстояния r от центра Земли. В частности:

$$v^2 > v_0^2 - \frac{2GM}{R}$$

так что v останется положительным при условии, что $v_0^2 > \frac{2GM}{R}$. Поэтому вторая космическая скорость для Земли дается формулой:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (4.2)$$

Для данных значений G и массы M Земли и ее радиуса R , формула дает $v_0 \approx 11180$ (м/с).

Замечание. Уравнение (4.2) дает вторую космическую скорость для любого (сферического) планетарного тела, если в это уравнение подставить массу и радиус планеты. Например, если подставить массу M и радиус R Луны, мы найдем, что вторая космическая скорость для старта с поверхности Луны равна $v_0 \approx 2375$ м/с. Это только чуть больше одной пятой второй космической скорости для старта с поверхности Земли. Факт, который очень облегчает возвращение на Землю (см. роман С Луны на Землю).

Задачи

1. Масса Солнца в 329320 раз больше, чем масса Земли, а его радиус в 109 раз больше радиуса Земли.

а) Какой радиус (в метрах) должен быть у Земли, чтобы она была черной дырой, т. е. чтобы вторая космическая скорость на ее поверхности была равна скорости света $c = 3 \times 10^8$ м/с ?

б) Решите задачу из части (а) для Солнца вместо Земли.

2. В задаче, поставленной Жюлем Верном, снаряд, запущенный с поверхности Земли притягивается и Землей, и Луной, так что его расстояние $r(t)$ от центра Земли является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_e}{r^2} + \frac{GM_m}{(S-r)^2}; \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0,$$

где M_e и M_m обозначают массы Земли и Луны соответственно; R – радиус Земли и $S = 384400$ км – расстояние между центрами Земли и Луны. Чтобы достичь Луны, снаряд должен только пройти точку между Луной и Землей, где его результирующее ускорение обращается в нуль. После этого он находится “под управлением” Луны и падает на поверхность Луны. Найдите минимальную скорость запуска v_0 , которая позволяет снаряду преодолеть путь “С Земли до Луны”.

5 Движение ракеты

Предположим, что ракета на рис. 5.1. направлена прямо вверх и отрывается от поверхности земли в момент времени $t = 0$. Мы хотим вычислить ее высоту y и скорость $v = dy/dt$ в момент времени t . Ракета движется за счет выхлопных газов, которые выпускаются двигателями (в направлении назад) с постоянной (относительно ракеты) скоростью c . Из-за сгорания топлива масса $m = m(t)$ ракеты будет переменной.

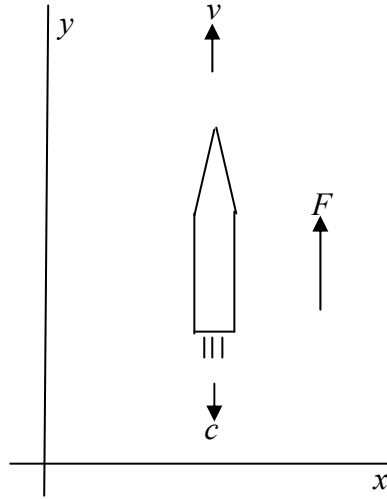


Рис. 5.1. Ракета движется вверх.

Чтобы вывести уравнение движения ракеты, мы используем второй закон Ньютона в форме:

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad (5.1)$$

где P – импульс (произведение массы на скорость), а F обозначает равнодействующую внешних сил (веса, сопротивления воздуха и т. д.).

Если масса m постоянна, то уравнение (5.1) принимает стандартную форму $F = m(dv/dt) = ma$. Но здесь масса m не постоянна.

Предположим, масса изменяется от m до $m + \Delta m$, а скорость изменяется от v до $v + \Delta v$ за короткий временной интервал от момента времени t до момента времени $t + \Delta t$. Тогда изменение импульса самой ракеты равно:

$$\Delta P \approx (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv = m\Delta v + v\Delta m + \Delta m\Delta v.$$

Но система также включает выхлопные газы, удаляемые в течение этого временного интервала, их масса равна $-\Delta m$, а скорость приблизительно равна $v - c$. Следовательно, полное изменение импульса в течение временного интервала Δt равно:

$$\Delta P \approx (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv = (m\Delta v + v\Delta m + \Delta m\Delta v) + (-\Delta m)(v - c) = m\Delta v + c\Delta m + \Delta m\Delta v.$$

Если мы разделим на Δt и возьмем предел при $\Delta t \rightarrow 0$, а затем подставим полученное выражение для dP/dt в (5.1), мы получим уравнение движения ракеты:

$$m \frac{dv}{dt} + c \frac{dm}{dt} = F . \quad (5.2)$$

Если $F = F_G + F_R$, где $F_G = -mg$ – постоянная сила тяжести и $F_R = -kv$ – сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости, то (5.2) примет вид:

$$m \frac{dv}{dt} + c \frac{dm}{dt} = -mg - kv . \quad (5.3)$$

5.1 Постоянная сила тяги

Теперь предположим, что скорость сгорания реактивного топлива постоянна и равна β в течение временного интервала $[0, t_1]$, в течение которого масса ракеты уменьшается от m_0 до m_1 . Таким образом,

$m(0) = m_0, \quad m(t_1) = m_1, \quad m(t) = m_0 - \beta t, \quad dm/dt = -\beta$ для $t \leq t_1$, (5.4)
причем топливо выгорит в момент времени $t = t_1$.

Пример 5.1. Подставляя выражения из равенств (5.4) в уравнение (5.3), получим дифференциальное уравнение:

$$(m_0 - \beta t) \frac{dv}{dt} + kv = \beta c - (m_0 - \beta t) g. \quad (5.5)$$

Решая это линейное уравнение, находим:

$$v(t) = v_0 M^{k/\beta} + \frac{\beta c}{k} (1 - M^{k/\beta}) + \frac{gm_0}{\beta - k} (1 - M^{k/\beta}),$$

где $v_0 = v(0)$ а $M = m(t)/m_0 = (m_0 - \beta t)/m_0$ — обозначает часть массы ракеты в момент времени t .

5.2 Сопротивление отсутствует

Пример 5.2. В случае отсутствия сопротивления воздуха полагаем $k = 0$ в уравнении (5.5) и интегрируем его. В результате этого получим:

$$v(t) = v_0 - gt + c \ln(m_0/(m_0 - \beta t)). \quad (5.6)$$

Поскольку $m_0 - \beta t_1 = m_1$, то из этого следует, что скорость ракеты в момент выгорания топлива ($t = t_1$) равна:

$$v_1 = v(t_1) = v_0 - gt_1 + c \ln(m_0/m_1). \quad (5.7)$$

Пример 5.3. Начнем с уравнения (5.6) и проинтегрируем его. В результате получим:

$$y(t) = (v_0 + ct)t - (1/2) \cdot gt^2 - (c/\beta) \cdot (m_0 - c\beta) \cdot \ln(m_0/(m_0 - \beta t)).$$

Из этого следует, что высота ракеты в момент выгорания топлива равна

$$y_1 = y(t_1) = (v_0 + ct_1)t_1 - (1/2) \cdot gt_1^2 - (cm_1/\beta) \cdot \ln(m_0/m_1).$$

Пример 5.4. Ракета V-2, которая использовалась для бомбардировки Лондона во время Второй мировой войны, имела начальную массу 12850 кг, из которых 68.5 % приходилось на топливо. Это топливо, сжигаемое равномерно в течение 70 секунд, выбрасывалось в виде выхлопных газов со скоростью 2 км/с. Предположите, что на ракету действует сопротивление воздуха 1.45 Н на каждый метр в секунду скорости. Затем найдите скорость и высоту V-2 в момент выгорания топлива, предположив, что ракета была запущена вертикально вверх с поверхности Земли.

Текст на Maple

```
> #Ракета V-2 (ФАУ-2)
> restart:
> #Стартовая масса ракеты (кг)
> M_start_common:=12850:
> #Процент топлива от стартовой массы ракеты
> p:=0.685:#68.5 % от стартовой массы ракеты
> #Стартовая масса топлива (кг)
> M_start_fuel:=M_start_common*p:
> m[0]:=M_start_common:
> # Масса полезной нагрузки (Weight of useful loading)
> M_useful_loading:=M_start_common-M_start_fuel:
> # Скорость сгорания топлива (м/сек)
> beta:=M_start_fuel/70:
> #Ускорение свободного падения
> g:=9.81:
> #Скорость выброса выхлопных газов (м/сек) (Speed of emission of
exhaust gases)
> c:=2000:
> #Коэффициент сопротивления воздуха
```

```

> k:=1.45:
> #Решение обыкновенного дифференциального уравнения методом
интегрирующего множителя
> P:=t->k/(m[0]-beta*t):
> Q:=t->beta*c/(m[0]-beta*t)-g:
> my_sys_ode:=diff(v(t),t)+P(t)*v(t)=Q(t):
> #Расчет интегрирующего множителя
> ro:=simplify(exp(int(P(t),t))):
> #Умножаем правую часть на интегрирующий множитель
> Q(t):=simplify(Q(t)*ro):
> #Интегрируем правую часть с добавлением константы
> ro_v:=simplify(int(Q(t),t) + C1):
> #Получаем решение - делим на интегрирующий множитель
> V:=ro_v/ro:
> `C1`:=C1:
> rrr:=eval(V,t=0)=0:
> C1:=solve(rrr,C1):
> #Высота
> h:=int(V,t=0..70);

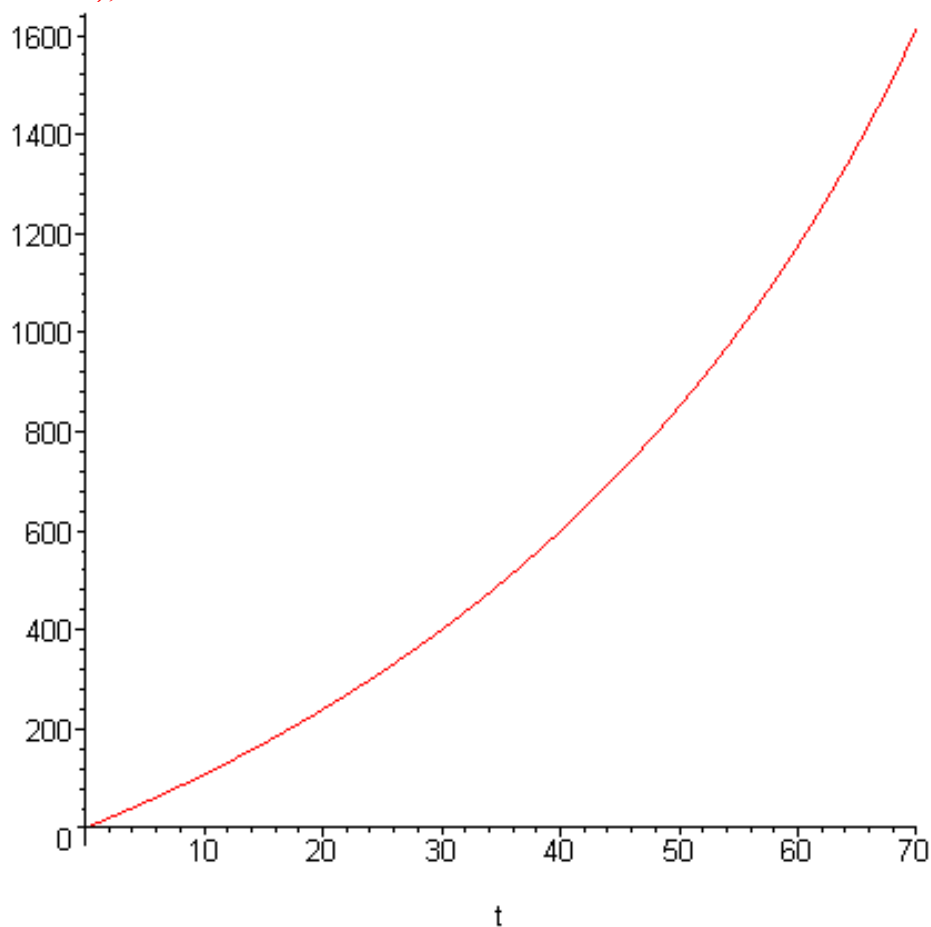
```

$h := 41436.56270$

```

> plot(V,t = 0..70);

```



5.3 Безвоздушное пространство

Предположим, наконец, что ракета ускоряется в безвоздушном пространстве, где нет ни силы тяжести, ни сопротивления, так что $g = k = 0$. При $g = 0$ из уравнения (5.7) следует, что по мере уменьшения массы ракеты от m_0 до m_1 ее скорость увеличивается на $\Delta v = v_1 - v_0 = c \ln(m_0/m_1)$.

Заметьте, что Δv зависит от скорости выхлопных газов c и отношения начальной массы к конечной m_0/m_1 , но не зависит от скорости сжигания β . Например, если ракета запускается из состояния покоя ($v_0 = 0$) и $c = 5$ км/с и $m_0/m_1 = 20$, то ее скорость в момент выгорания топлива равна $v_1 = 5 \cdot \ln 20 \approx 15$ км/с. Таким образом, если в момент запуска ракета имеет большой запас топлива, то она может достичь скоростей, значительно больших, чем (относительная) скорость ее выхлопных газов.

6 Естественный рост и распад

6.1 Основные модели

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k - \text{константа}) \quad (6.1)$$

служит математической моделью для невероятно широкого диапазона естественных явлений – всех тех, в которых скорость изменения некоторой величины пропорциональна текущему значению. Рассмотрим некоторые примеры.

Прирост популяции [7]. Предположим, что $P(t)$ – численность популяции (людей, насекомых или бактерий), у которой постоянны показатели рождаемости и смертности β и δ (количество рождений и случаев смерти на определенное количество особей в единицу времени). Тогда в течение короткого временного интервала Δt происходит приблизительно $\beta P(t)\Delta t$ рождений и $\delta P(t)\Delta t$ случаев смерти, так что $P(t)$ изменяется приблизительно на:

$$\Delta P(t) \approx (\beta - \delta)P(t)\Delta t$$

и потому:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = kP, \quad (6.2)$$

где $k = \beta - \delta$.

Сложные проценты [8]. Пусть $A(t)$ – сумма (в рублях) на сберегательном счету в момент времени t (в годах). Кроме того, пусть сложные проценты начисляются непрерывно с ежегодной процентной ставкой r . (Обратите внимание, что 10%-ной ежегодной ставке соответствует значение $r = 0.10$) Непрерывное начисление сложных процентов означает, что в течение короткого временного интервала Δt на счет добавляется приблизительно $\Delta A = rA(t)\Delta t$, так что:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Радиоактивный распад. Пусть образец некоторого вещества содержит $N(t)$ атомов некоторого радиоактивного изотопа в момент времени t . Известно, что некоторая часть радиоактивных атомов спонтанно распадется (превращаясь в атомы другого элемента или в другой изотоп того же самого элемента) в течение каждой единицы времени. Следовательно, образец ведет себя точно так, как население с постоянным показателем смертности и нулевым приростом (атомы не рождаются). Чтобы написать уравнение модели для $N(t)$, мы используем уравнение (6.2), в котором N займет место P , а $k > 0$ подставим вместо δ и положим $\beta = 0$. Таким образом, мы получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = -kN.$$

Значение k зависит от вида радиоактивного изотопа.

Ключ к радиоуглеродному методу, позволяющему датировать образец, состоит в том, что в любом живом существе отношение количество атомов углерода к количеству атомов радиоактивного изотопа углерода ^{14}C постоянно. Это отношение остается постоянным, потому что процент ^{14}C в атмосфере остается почти постоянным, живые организмы непрерывно потребляют углерод из воздуха или из других живых организмов, в которых содержатся атомы ^{14}C в том же самом постоянном соотношении к обыкновенным атомам ^{12}C . Это же самое соотношение характерно для всех живых организмов, потому что процессы, протекающие в живых организмах, с химической точки зрения, кажется, не зависят от различий между этими двумя изотопами.

Отношение ^{14}C к обычному углероду в атмосфере остается постоянным, потому что, хотя ^{14}C радиоактивен и медленно распадается, его количество непрерывно пополняется из-за превращения ^{14}N (обыкновенного азота) в ^{14}C под воздействием космических лучей в верхних слоях атмосферы. За весьма длительную историю планеты, этот процесс распада и пополнения вошел в почти установившееся состояние.

Конечно, когда организм умирает, метаболизм углерода в нем прекращается, и в нем в процессе радиоактивного распада начинает уменьшаться содержание ^{14}C . Так как после смерти ^{14}C не пополняется, отношение ^{14}C к обычному углероду начинает уменьшаться. Измеряя это отношение, можно узнать, сколько времени прошло после смерти организма. Для таких целей необходимо измерить значение постоянной распада k . Для ^{14}C оно известно: $k \approx 0.0001216$, если t измеряется в годах.

(Метод не столь прост, как здесь изложен. При применении методики радиоуглеродного датирования приходится принимать меры чрезвычайной предосторожности, чтобы избежать загрязнения образца органическими веществами или даже обыкновенным свежим воздухом. Кроме того, очевидно, что поток космических лучей не был постоянным, так что отношение ^{14}C в атмосфере изменилось за прошедшие столетия. Используя независимые методы датирования образцов, исследователи в этой области составили таблицы поправочных коэффициентов, которые позволяют увеличить точность данного метода.)

Выделение препарата из организма. Во многих случаях, когда количество $A(t)$ некоторого препарата превышает естественный уровень этого препарата в крови, скорость уменьшения пропорциональна текущему избыточному количеству. Иными словами:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A$$

где $\lambda > 0$. Параметр λ называется константой выведения препарата.

6.2 Уравнение естественного роста

Дифференциальное уравнение вида $dx/dt = kx$ при $x(t) > 0$ и постоянном (отрицательном или положительном) k легко решается путем разделения переменных и последующим интегрированием:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int k dx \Rightarrow \ln x = kt + C.$$

Затем мы решаем его относительно x :

$$e^{\ln x} = e^{kt+C}; \Rightarrow x = x(t) = e^C e^{kt} = A e^{kt}.$$

где $A = e^C$ – константа.

$A = x(0) = x_0$, так что частное решение уравнения (6.1) с начальным условием $x(0)=x_0$ – это:

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Решение уравнения содержит показательную функцию (с основанием, равным основанию натуральных логарифмов), а само дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

часто называют уравнением экспоненциального роста, или уравнением естественного роста. На рис. 6.1 и рис.6.2 показаны типичные графики $x(t)$ в для $k > 0$ и $k < 0$.

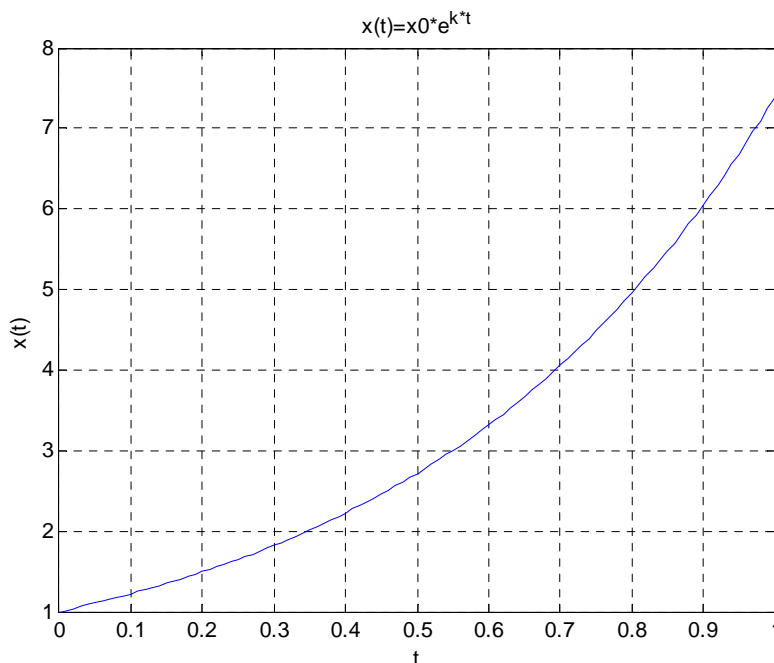


Рис. 6.1. Естественный рост ($k > 0$)

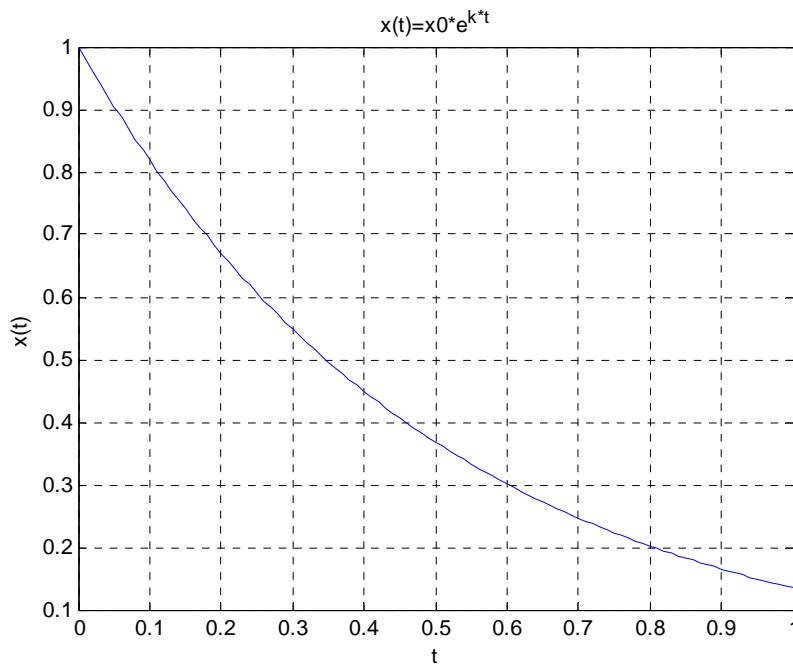


Рис. 6.2. Естественный распад ($k < 0$)

Текст на MATLAB

```
clc
clear
k=2; % или -2
t=0:0.01:1;
x0=1;
P=x0*exp(k*t);
plot(t,P);
title('x(t)=x0*e^k*t');
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
grid on
```

Пример 6.1. Согласно данным, приведенным в www.census.gov, полная численность населения всего мира достигла 6.7 миллиардов человек в середине 2008 года. В то время каждую секунду рождалось 21 и умирало 18 человек. Принимая, что естественный прирост населения продолжается с этой же скоростью, мы хотим ответить на следующие вопросы:

- (а) Каков ежегодный прирост k ?
- (б) Какой будет численность мирового населения в середине XXI столетия?
- (в) Сколько потребуется времени, чтобы население в мире увеличилось десятикратно, т.е. достигло 60 миллиардов? (Некоторые демографы считают, что это максимальная численность населения,

которое планета может обеспечить адекватными запасами продовольствия.)

Решение

а) Мы измеряем численность мирового населения $P(t)$ в миллиардах, а время – в годах. Мы полагаем $t = 0$ для середины 2008 года, так что $P_0 = 6.7$. Поскольку P увеличивается на $(21-18) \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 = 259200$, или на 0.0002592 миллиарда человек в день в момент времени $t=0$. Это значит, что

$$P'(0) = (0.0002592) (365.25) \approx 0.09467$$

миллиардов в год. Из уравнения естественного роста $P' = kP$ при $t = 0$ получаем:

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0.09467}{6.7} \approx 0.01413.$$

Таким образом, численность мирового населения ежегодно возрастает приблизительно на 1.41% (по крайней мере, таким был прирост в 2008 году). Это значение k дает функцию роста мирового населения:

$$P(t) = 6.7e^{0.01413t}$$

(б) При $t = 51$ мы получаем предсказание численности мирового населения

$$P(51) = 6.7e^{(0.01413)(51)} = 6.7e^{0.72063} \approx 13.77 \text{ (миллиарда)}$$

в середине 2050 года (так что население после 2008 года почти удвоится за срок, чуть больше сорока лет).

(с) Численность мирового населения должна достигнуть 60 миллиардов, когда

$$60 = 6.7e^{0.01413t}; \text{ т. е. когда } t = (1/0.01413) \cdot \ln(60/6.7) \approx 155$$

т. е. в 2163 году.

В рассмотренной модели показатели рождаемости β и смертности δ были постоянными. Сейчас рассмотрим более общую модель роста населения, которая учитывает изменение показателей рождаемости и смертности, которые теперь уже не обязательно будут константами. Как и прежде, однако, наша функция численности населения $P(t)$ будет непрерывной аппроксимацией фактической численности населения, которая, конечно, изменяется не непрерывно, а скачками, так как ее приращения являются целыми числами.

Предположим, что численность населения изменяется только в результате рождений и случаев смерти, а иммиграцию и эмиграцию учитывать не будем. Общепринято оценивать прирост или уменьшение населения с помощью функций – коэффициента рождаемости и показателя смертности, определенных следующим образом:

$\beta(t)$ – число рождений на единицу населения на единицу времени в момент времени t ;

$\delta(t)$ – число случаев смерти на единицу населения на единицу времени в момент времени t .

Тогда количество рождений и случаев смерти, которые происходят в течение временного интервала $[t, t + \Delta t]$, выражаются (приблизительно) так:

$$\text{рождений} - \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t, \quad \text{случаев смерти} - \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t.$$

Следовательно, изменение численности населения ΔP в течение временного интервала $[t, t + \Delta t]$ длиной Δt равно:

$$\Delta P = \{\text{количество рождений}\} - \{\text{количество случаев смерти}\} \approx \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t - \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t,$$

так что:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)] P(t).$$

Ошибка в этой аппроксимации должна приближаться к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, так что в результате предельного перехода мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta) P, \quad (6.3)$$

в котором для краткости пишем $\beta = \beta(t)$, $\delta = \delta(t)$, $P = P(t)$. Уравнение (6.3) – общее уравнение численности населения. Если β и δ являются постоянными, уравнение (6.3) приводит к уравнению естественного роста с $k = \beta - \delta$. Но не исключено, что β и δ являются переменными функциями времени t . Количество рождений и показатель смертности не всегда известны заранее. Они могут зависеть от неизвестной функции $P(t)$.

Пример 6.2. Предположим, что популяция аллигаторов первоначально насчитывает 100 особей и что ее показатель смертности $\delta = 0$ (так что ни один аллигатор никогда не умирает). Пусть коэффициент рождаемости $\beta = 0.0005P$. Таким образом, популяция увеличивается, причем уравнение (6.3) приводит к задаче Коши (задаче с начальными условиями):

$$\frac{dP}{dt} = (0.0005) P^2, \quad P(0) = 100$$

(t измеряется в годах). Тогда после разделения переменных получаем:

$$\int \frac{1}{P^2} dP = \int (0.0005) dt; \quad -\frac{1}{P} = 0.0005t + C.$$

Замена $t = 0$, $P = 100$ дает $C = -1/100$, а затем мы легко решаем полученное уравнение и находим: $P(t) = 2000/(20 - t)$.

Пусть, например, $P(10) = 2000/10 = 200$, так что через 10 лет количество аллигаторов в популяции удвоилось. Но поскольку $P \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 20$, то реальный "демографический" взрыв происходит через 20 лет.

6.3 Модели ограниченного роста популяции и логистическое уравнение

Однако по мере увеличения численности населения коэффициент рождаемости уменьшается. Точно так же коэффициент рождаемости уменьшается и в популяции мух в закрытом контейнере. Причины могут быть самыми разными – от возрастания роли науки, образования или усложнения культуры до ограниченности поставок продовольствия. Предположим, например, что коэффициент рождаемости β – линейная убывающая функция, зависящая от численности населения P , так что $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$, где β_0 и β_1 – положительные константы. Если показатель смертности $\delta = \delta_0$ остается постоянным, то уравнение (6.3) принимает вид:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0) P;$$

Иными словами

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \quad (6.4)$$

где $a = \beta_0 - \delta_0$ и $b = \beta_1$.

Если коэффициенты a и b оба положительны, то уравнение (6.4) называют логистическим уравнением. Ради удобства исследования зависимости численности населения $P(t)$ от значений параметров в уравнении, полезно переписать логистическое уравнение в виде:

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P),$$

где $k = b$ и $M = a/b$ – константы.

Пример 6.3. Исследуем изменение численности населения, которая удовлетворяет логистическому уравнению:

$$dP/dt = 0.0004P(150 - P) = 0.06P - 0.0004P^2.$$

Решение. Чтобы решить это дифференциальное уравнение, разделяем переменные и интегрируем. Получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(150 - P)} &= \int 0.0004 dt \Rightarrow \frac{1}{150} \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{150 - P} \right) dP = \int 0.0004 dt \\ \Rightarrow \ln|P| - \ln|150 - P| &= 0.06t + C \Rightarrow \frac{P}{150 - P} = \pm e^C e^{0.06t} = B e^{0.06t}. \quad (\text{где } B = \pm e^C) \end{aligned}$$

Если подставим $t = 0$ и $P = P_0 \neq 150$ в это последнее уравнение, то найдем $B = P_0/(150 - P_0)$. Следовательно,

$$\frac{P}{150 - P} = \frac{P_0 e^{0.06t}}{150 - P_0}.$$

Наконец, это уравнение просто решить относительно численности населения:

$$P(t) = \frac{150 P_0}{P_0 + (150 - P_0) e^{-0.06t}}$$

в момент времени t , считая известной начальную численность населения $P_0 = P(0)$.

На рис. 6.3 показано множество интегральных кривых, соответствующих различным значениям начальной численности населения в пределах от $P_0 = 20$ до $P_0 = 300$. Обратите внимание, что интегральные кривые асимптотически приближаются к горизонтальной линии $P = 150$. Действительно, из найденного решения видно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 150$ независимо от начального значения $P_0 > 0$.

Текст на MATLAB

```
clc
clear
k=-0.06;
t=0:0.2:150;
length_t = length(t);
P=t;
P0=[ 20; 50; 80; 100; 120; 150; 200; 240; 270; 300];
length_P0 = length(P0)
for i_P0=1:length_P0
    for i_t=1:length_t
        P(i_t)=150*P0(i_P0)/(P0(i_P0)+(150-P0(i_P0))*exp(k*t(i_t)));
    end
    plot(t,P);
    hold on
end
title('P(t)=150*P0/(P0+(150-P0)*e^(-0.06*t));% \lambda
xlabel('t');
ylabel('P0');

hText=text(10,30,'\leftarrow P0=20');
hText=text(12,210,'\leftarrow P0=300');
grid on
```

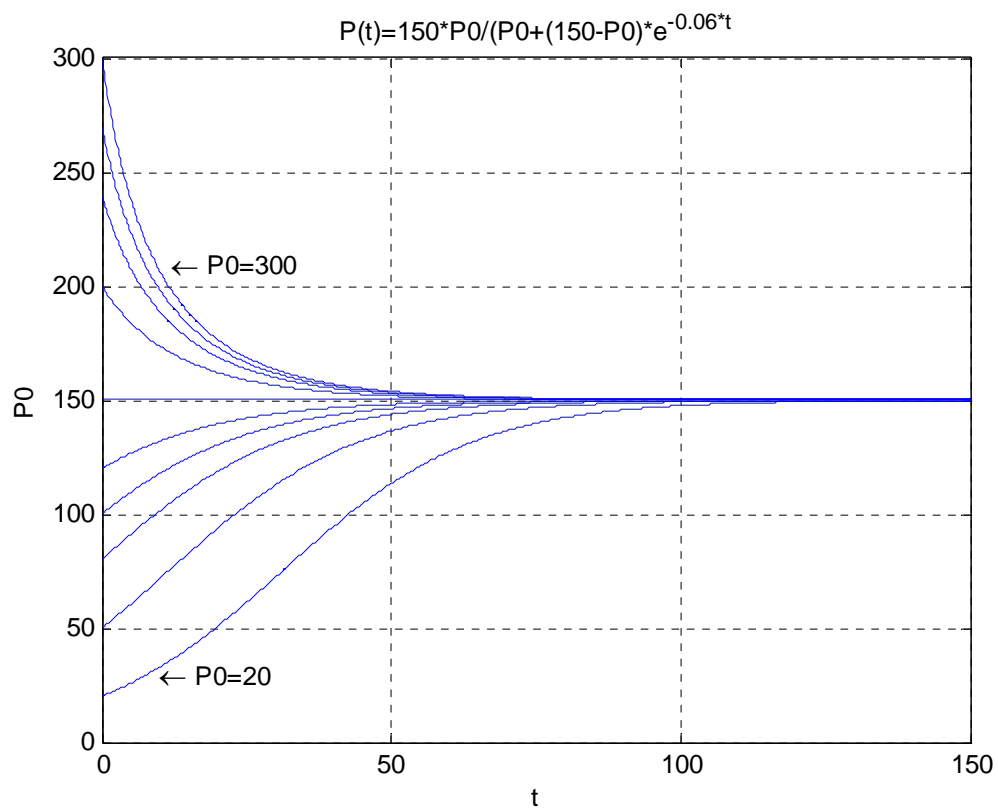


Рис. 6.3. Интегральные кривые логистического уравнения $P' = 0.06P - 0.0004P^2$.

6.4 Дополнительные приложения логистического уравнения

Теперь мы опишем некоторые ситуации, в которых логистическое уравнение является удовлетворительной математической моделью.

6.4.1 Ограниченные ресурсы среды.

Некоторая среда может поддерживать популяцию численностью M особей. Тогда разумно ожидать, что прирост $\beta - \delta$ (объединенный показатель рождаемости и смертности) пропорционален $M - P$, потому что мы можем рассматривать $M - P$ как потенциал для дальнейшего роста. Тогда $\beta - \delta = k(M - P)$, так что

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = kP(M - P).$$

Классический пример среды с ограниченными ресурсами — популяция плодовой мушки в закрытом контейнере.

6.4.2. Конкуренция. Коэффициент рождаемости β является константой, а показатель смертности δ пропорционален P , так что $\delta = \alpha P$, то

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \alpha P)P = kP(M - P).$$

Это может быть разумной рабочей гипотезой при изучении каннибалистической популяции, в которой все смертные случаи являются следствиями случайных столкновений между особями. Конечно, обычно конкуренция между особями не настолько смертельна, а ее эффекты обычно не носят столь драматичного характера.

6.4.3 Пропорциональность произведению. Пусть $P(t)$ обозначает количество особей в популяции с постоянной численностью M , которые инфицированы некоторой неизлечимой инфекционной болезнью. Болезнь распространяется случайно. Тогда $P'(t)$ пропорционально произведению числа P заболевших особей и числа здоровых особей $M - P$, поэтому $dP/dt = kP(M - P)$. Снова мы обнаруживаем, что математическая модель включает логистическое уравнение. Математическое описание распространения слухов среди населения численностью M индивидуумов идентично.

Пример 6.4. Предположим, что в момент времени $t = 0$ в городе с населением $M=100$ тысяч человек некоторый слух услышали 10 тысяч человек. Через 1 неделю число $P(t)$ тех, кто его услышал, увеличилось и стало равным $P(1) = 20$ тысячам. Предполагая, что $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению, вычислим, когда слух услышит 80% населения города.

Решение. Сначала найдем решение уравнения

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad P(0) = P_0.$$

Получаем

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}.$$

В системе символьных вычислений MAPLE текст поиска решения следующий:

```
> my_diff_yravn2:=diff(P(t),t)=k*P(t)*(M-P(t));
      my_diff_yravn2 :=  $\frac{d}{dt} P(t) = k P(t) (M - P(t))$ 

> ics:=P(0)=P[0];
      ics :=  $P(0) = P_0$ 

> v12:=dsolve({my_diff_yravn2,ics});
      v12 :=  $P(t) = \frac{P_0 M}{P_0 + e^{(-k M t)} M - e^{(-k M t)} P_0}$ 
```

Подставляя $P_0 = 10$ и $M = 100$ (тысяч) в логистическое уравнение, получаем:

$$P(t) = 100 / (1 + 9e^{-100kt}).$$

Далее имеем:

$$P(1) = 100 / (1 + 9e^{-100k}) = 20.$$

Это уравнение легко решается относительно e^{-100k} :

$$e^{-100k} = 4/9 \Rightarrow k = 0.01 \cdot \ln(9/4) \approx 0.008109.$$

При $P(t) = 80$ имеем:

$$80 = 100 / (1 + 9e^{-100kt}).$$

Это уравнение мы решаем относительно t :

$$e^{-100kt} = 1/36.$$

Из этого следует, что 80% населения слышали слух тогда, когда

$$t = (\ln 36) / (100k) = (\ln 36) / (\ln 9/4) \approx 4.42,$$

т.е. приблизительно через 4 недели и 3 дня.

6.5 Судный День и исчезновение популяции

Рассмотрим популяцию численностью $P(t)$ бесхитростных животных, в которой особи женского пола для репродуктивных целей полагаются исключительно на случайные встречи с особями мужского пола. Разумно ожидать, что вероятность таких встреч пропорциональна произведению числа $P/2$ особей мужского пола и числа особей женского пола $P/2$, следовательно, пропорциональна P^2 . Мы поэтому предполагаем, что рождения происходят со скоростью kP^2 (в единицу времени, причем k – константа). Коэффициент рождаемости (количество рождений /время/ численность популяции) тогда равен $\beta = kP$. Если показатель смертности δ является константой, то общее уравнение роста популяции (1) принимает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} = kP^2 - \delta P = kP(P - M) \quad (6.5)$$

(где $M = \delta/k > 0$), которое рассматривается как математическая модель роста численности популяции.

Обратите внимание, что правая часть в уравнении (6.5) имеет знак, противоположный знаку правой части логистического уравнения (6.4). Мы увидим, что постоянная M теперь представляет собой пороговое значение численности популяции, так как поведение численности популяции в будущем критически зависит от того, является ли начальное значение численности популяции P_0 меньшим или большим, чем M .

Пример 6.5. Рассмотрим популяцию животных численностью $P(t)$, которая моделируется уравнением:

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P^2 - 0.06P = 0.0004P(P - 150). \quad (6.6)$$

Мы хотим найти $P(t)$ если а) $P(0) = 200$; б) $P(0) = 100$.

Решение. Чтобы решить уравнение (6.6), мы отделяем переменные и интегрируем. Получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(P-150)} &= \int 0.0004 dt \Rightarrow \frac{1}{150} \int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P-150} \right) dP = \int 0.0004 dt \\ \Rightarrow \ln|P| - \ln|P-150| &= -0.06t + C \Rightarrow \frac{P}{P-150} = \pm e^C e^{-0.06t} = B e^{-0.06t}. \text{ (где } B = \pm e^C \text{)} \end{aligned}$$

а) Если мы подставим $t = 0$ и $P = 200$ в последнее уравнение, то найдем $B = 4$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{P}{P-150} &= 4e^{-0.06t} \Rightarrow P = 4e^{-0.06t} (P-150) = 4e^{-0.06t} P - 600e^{-0.06t} \Rightarrow \\ P &= \frac{600e^{-0.06t}}{4e^{-0.06t} - 1}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Заметим, что при увеличении t , когда оно стремится к $T = (\ln 4)/0.06 \approx 23.105$, положительный знаменатель справа в (6.7) уменьшается и стремится к 0. Следовательно, $P \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$. Это Судный День – в этот день происходит реальный демографический взрыв.

b) Подстановка $t = 0$ и $P = 100$ в уравнение дает $B = -2$. При этом значении B мы решаем уравнение и находим:

$$P = \frac{300e^{-0.06t}}{2e^{-0.06t} + 1} = \frac{300}{2 + e^{0.06t}} \quad (6.8)$$

Заметим, что, при неограниченном увеличении t положительный знаменатель в правой части равенства (6.8) стремится к ∞ . Следовательно, $P \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это – состояние окончательного исчезновения.

Таким образом, популяция в примере 6.5 или взрывается, или подвергается другой опасности – угрозе исчезновения, в зависимости от того, превышает ли ее начальная численность пороговое значение $M = 150$. Нечто подобное этому явлению иногда наблюдается в некоторых популяциях животных, таких как популяции аллигаторов в некоторых штатах на Юге Соединенных Штатов.

6.6 Сбор урожая в логистической популяции

Автономное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h \quad (6.9)$$

где a , b и h положительны) можно применить для описания логистической популяции со сбором урожая. Например, можно рассматривать популяцию рыб в озере, из которого ежегодно вылавливают h рыб.

Пример 6.6. Давайте перепишем уравнение (6.9) в форме:

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h, \quad (6.10)$$

в котором граничная численность популяции равна M в случае $h = 0$, т.е. в случае отсутствия сбора урожая. Принимая теперь, что $h > 0$, мы можем решить квадратное уравнение $-kx^2 + kMx - h = 0$ и найти следующие две точки равновесия:

$$H, N = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k} = \frac{1}{2} \left(M \pm \sqrt{M^2 - 4h/k} \right).$$

Принимая предположение о том, что скорость сбора урожая h является достаточно малой, а именно, что $4h < kM^2$, мы получим, что оба корня H и N вещественны, причем $0 < H < N < M$. Тогда мы можем переписать уравнение (6.10) в форме:

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H).$$

Однако количество точек равновесия уравнения может резко измениться при изменении значения параметра.

Пример 6.7. Для конкретного приложения наших заключений об устойчивости в примере 6.6 предположим, что $k=1$ и $M=4$ для численности $x(t)$ логистической популяции рыб в озере, причем численность измеряется в сотнях, а время t в годах. Без вылова рыбы вообще, озеро в конечном счете содержало бы почти 400 рыб независимо от начальной численности популяции. Теперь предположим, что $h=3$, так что ежегодно вылавливаются 300 рыб (с постоянной нормой в течение года). Уравнение (6.10) тогда примет вид $dx/dt = x(4 - x) - 3$, и квадратное уравнение

$$-x^2 + 4x - 3 = (3 - x)(x - 1) = 0$$

имеет решения $H = 1$ и $N = 3$. Таким образом, пороговая численность популяции – 100 рыб, и (новая) граничная численность популяции равна 300 рыбам. Короче говоря, если в озере первоначально было больше 100 особей рыбы, то при увеличении t численность популяции рыб приблизится к граничному значению 300 рыб. Но если в озере первоначально было меньше 100 особей рыбы, то вся рыба в озере будет выловлена, и рыба исчезнет полностью за конечный период времени.

6.7 Уравнение радиоактивного распада

Постоянная распада радиоактивного изотопа часто определяется через другую эмпирическую константу – период полураспада изотопа – потому что обычно более удобен именно этот параметр. Период полураспада τ радиоактивного изотопа – время, требуемое для распада половины этого вещества. Чтобы найти соотношение между k и τ , обозначим $t = \tau$ и $N = (1/2)N_0$ в уравнении $N(t) = N_0 e^{-kt}$, так что $(1/2)N_0 = N_0 e^{-k\tau}$. Решив это уравнение относительно τ , найдем, что $\tau = \ln 2/k$.

Например, период полураспада ^{14}C $\tau \approx (\ln 2)/(0.0001216)$, т. е. приблизительно 5700 лет.

Пример 6.8. Образец древесного угля, найденный в Стоунхедже, содержит 63% ^{14}C от его содержания в образце современного древесного угля равной массы. Каков возраст найденного образца?

Решение. Мы полагаем $t = 0$ в момент смерти дерева, из которого был взят древесный уголь в Стоунхедже, и обозначаем через N_0 количество атомов ^{14}C , которые образец из Стоунхеджа содержал в момент смерти дерева. Поэтому теперь $N = (0,63) N_0$, так что мы решаем уравнение $(0,63)N_0 = N_0 e^{-kt}$ со значением $k = 0.0001216$. Таким образом, мы находим

$$t = -\ln(0.63)/0.0001216 \approx 3800 \text{ (лет)}.$$

Таким образом, образцу приблизительно 3800 лет. Если этот образец имеет что-нибудь общее со строительством Стоунхеджа, наши вычисления позволяют предположить, что эта обсерватория, памятник или храм – чем бы это сооружение ни было – построено не позже 1800 года до нашей эры.

6.8 Задачи

1. (Прирост населения.) Некоторый город имел население 25000 человек в 2008 году, а в 2010 году численность его населения достигла 30 000 человек. Предположите, что его численность населения продолжит расти по экспоненте с постоянной скоростью. Какую численность населения его городские власти могут ожидать в 2015 году?
2. (Прирост популяции.) В некоторой культуре бактерий, число бактерий увеличилось шестикратно за 10 часов. Сколько времени потребуется для того, чтобы численность популяции удвоилась?
3. 30 – летняя женщина занимает должность инженера с начальным заработком 120 000 рублей в год. Ее заработок $S(t)$ увеличивается по экспоненте, причем $S(t)=120e^{t/20}$ тысяч рублей через t лет. Тем временем 12% заработка депонируются непрерывно на пенсионный счет, на котором сумма накапливается непрерывно по ежегодной норме 6%.
 - (a) Выразите ΔA через Δt , чтобы получить дифференциальное уравнение, удовлетворяемое величиной $A(t)$ – суммой на счете после t лет.
 - (b) Вычислите сумму $A(25)$ на момент выхода на пенсию в 55 лет.
4. (Радиоуглеродный метод определения возраста.) Углерод, извлеченный из древнего черепа, содержал только одну шестую того количества углерода ^{14}C , которое содержит углерод, извлеченный из современной кости. Какого возраста череп?
5. (Радиоуглеродный метод определения возраста.) Углерод, взятый из образца, который как подразумевается, относится ко временам Христа, содержит 4.6×10^{10} атомов ^{14}C в грамме. Углерод, извлеченный из современного аналогичного экземпляра, содержит 5.0×10^{10} атомов ^{14}C в грамме. Вычислите приблизительный возраст экземпляра. Каково ваше мнение относительно его подлинности?
6. (Непрерывно начисляемые сложные проценты.) После рождения первого ребенка супружеская пара депонировала 300000 руб. на счет, по которому банк платит 8% дохода, начисляемый ежегодно. Выплачиваемый доход приплюсовывается к вкладу. Сколько рублей будет начислено на счет на восемнадцатый год рождения ребенка?
7. (Непрерывно начисляемые проценты.) Предположим, что вы обнаруживаете на вашем чердаке просроченную в библиотеке книгу, за которую ваш дедушка должен был заплатить штраф 50 копеек 100 лет назад. Если бы просроченный штраф рос по экспоненте по 5%-ной ежегодной норме, начисляемой непрерывно, сколько вы должны были бы заплатить, если бы вы возвратили книгу сегодня?
8. (Выведение препарата.) Предположим, что этанинал натрия (pentobarbital) используется для обезболивания собаки. Состояние обезболивания у собак достигается, когда ее кровь содержит по крайней мере 45 мг этанинала натрия на килограмм веса собаки. Предположим

также, из крови собаки этанинал натрия выводится по экспоненте, с периодом полувыведения 5 часов. Какую разовую дозу нужно ввести, чтобы обезболить 50-килограммовую собаку на 1 час?

9. Период полураспада радиоактивного кобальта – 5.27 лет. Предположим, что в результате ядерной аварии уровень радиации кобальта в некотором регионе в 100 раз превысил уровень, приемлемый для проживания человека. В течение какого времени регион будет не пригодным для жилья? (Игнорируйте вероятное присутствие других радиоактивных изотопов.)

10. Предположим, что минерал, сформировавшийся в результате древнего катаклизма, - возможно при формировании Земли, первоначально содержал изотоп урана ^{238}U (который имеет полураспада 4.51×10^9 лет), но не содержал никакого конечного продукта радиоактивного распада ^{238}U . Если сегодня отношение атомов ^{238}U к атомам свинца в минерале равно 0.9, то когда произошел катаклизм?

11. Некоторая лунная порода содержит равные количества атомов аргона и калия. Предположите, что весь аргон – результат радиоактивного распада калия (его период полураспада равен около 1.28×10^9 лет) и что один из каждых девяти распадов атома калия дает атом аргона. Каков возраст лунной породы, если его исчислять со времени, когда она содержала только калий?

12. Когда сахар растворяется в воде, количество A , которое осталось нерастворенным после t минут, удовлетворяет дифференциальному уравнению $dA/dt = -kA$ ($k > 0$). Если 25% сахара растворилось за 1 минуту, то сколько потребуется времени, чтобы растворилась половина сахара?

13. Интенсивность света I на глубине x метров ниже поверхности озера удовлетворяет дифференциальному уравнению $dI/dx = (-1.4)I$.

(a) На какой глубине интенсивность равна половине интенсивности I_0 на поверхности (где $x = 0$)?

(b) Какова интенсивность на глубине 10 м (какую часть от I_0 составляет интенсивность на глубине 10 м)?

(c) На какой глубине интенсивность будет равна 1% от интенсивности на поверхности?

14. Однажды в городе с населением 100 000 человек начала распространяться сомнительная информация о наличии фенилэтиламина в питьевой воде. В течение недели 10000 человек услышали этот слух. Предположите, что скорость увеличения числа тех, кто слышал этот слух, пропорциональна количеству тех, кто еще не услышал его. Когда половина населения города узнает этот слух?

15. Согласно одной космологической теории, при создании Вселенной в результате Большого взрыва были равные количества двух изотопов урана ^{235}U и ^{238}U . В настоящее время на каждый атом ^{235}U приходится 137.7 атома ^{238}U . Зная время полураспада изотопов урана ^{238}U (4.51×10^9 лет) и ^{235}U (7.1×10^8 лет), вычислите возраст вселенной.

16. В результате аварии на атомной электростанции некоторый регион был загрязнен радиоактивным веществом, которое распадается по экспоненциальному закону. Начальное количество радиоактивного вещества равно 15 стронциевых единиц, а 5 месяцев спустя было еще 10 стронциевых единиц. Предположим, что 1 стронциевая единица считается безопасным количеством для проживания.

(a) Написать формулу, дающую количество $A(t)$ радиоактивного вещества (в стронциевых единицах) через t месяцев.

(b) Какое количество радиоактивного вещества останется через 8 месяцев?

(c) Через сколько месяцев останется $A = 1$ стронциевая единица, так что регион будет безопасным для людей?

17. В настоящее время во всем мире насчитывается приблизительно 3300 различных человеческих “языковых семейств”. Предположите, что все они возникли из единственного первоначального языка и что языковое семейство распадается на 1.5 языкового семейства каждые 6 тысяч лет. Когда же был единственный первоначальный разговорный язык?

18. Тысячи лет назад предки коренных американцев пересекли Берингов пролив из Азии и вошли в западное полушарие. С тех пор они расселились в Северной и Южной Америке. Единственный язык, на котором первоначально говорили коренные американцы, с тех пор распался на многие индийские языковые семейства. Примите, что количество этих семейств языка умножается на 1.5 каждые 6000 лет. Теперь насчитывается 150 языковых семейств коренных американцев в западном полушарии. Когда первые предки сегодняшних коренных американцев прибыли в Америку?

19. Однажды рано утром начался снегопад, причем количество выпадаемого снега росло с постоянной скоростью. В 7 утра снегоочиститель начал чистить дорогу. В 8 утра он очистил 3 км, но снегоочистителю требовалось еще два часа (до 10 утра), чтобы пройти оставшиеся 3 км.

(a) Пусть $t = 0$ в момент, когда начался снегопад; через x обозначим расстояние, которое прошел снегоочиститель в момент времени t . Примем также предположение, что снегоочиститель очищает снег с постоянной скоростью (т. е. определенное количество кубических килограммов снега в час, например). Покажите, что:

$$k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \text{ где } k - \text{константа}$$

(b). Когда начал идти снег?

20. Снегоочиститель отправляется в 7 утра, как в задаче 19. Предположим теперь, что в 8 утра он прошел 6 км и что в 9 утра очистил еще 4 км. Когда начал идти снег? Это более трудная задача для снегоочистителя, потому что теперь, чтобы найти значение k , должно быть решено трансцендентное уравнение численным методом.

7 Охлаждение и нагревание

7.1 Изменение температуры тела

Согласно закону охлаждения Ньютона, изменение температуры $T(t)$ тела, погруженного в среду с постоянной температурой A , пропорциональна разности $A - T$:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

где k – положительная константа. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b.$$

Оно включает показательное уравнение как частный случай ($b = 0$) и также просто решается разделением переменных.

Пример 7.1. Один килограмм мяса, предварительно нагретый до 20°C , начинают жарить в духовке при 180°C в 17:00. После 30 минут оказывается, что температура $T(t)$ равна 55°C . Когда температура жаркого будет равна 85°C (средний тип, не пережарено и не недожарено).

Решение. Измеряем время t в минутах, причем $t = 0$ соответствует 17:00. Также предполагаем (несколько нереалистично), что в любой момент температура $T(t)$ жаркого одинакова по всему жаркому. Имеем $T(t) < A = 180$, $T(0) = 20$ и $T(30) = 55$. Тогда:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 180); \int \frac{1}{180 - T} dT = \int k dt; -\ln(180 - T) = kt + C; \Rightarrow 180 - T = Be^{-kt}.$$

Теперь из $T(0) = 20$ получаем $B = 160$, так что $T(t) = 180 - 160e^{-kt}$. Мы также знаем, что $T = 55$ при $t = 30$. Подстановка этих значений в предыдущее уравнение влечет:

$$k = -(1/30) \ln(125/160) \approx 0.00822.$$

Следовательно, мы должны решить уравнение:

$$85 = 180 - 160e^{(-0.00822)t}$$

для $t_f = -[\ln(95/160)]/(0.00822) \approx 64$ (минуты), общее время, требуемое для приготовления жаркого. Поскольку жаркое было помещено в духовку в 17:00, его нужно вынуть из нее примерно в 18:04.

Текст на MAPLE

> **restart:**

> **ins:=T(0)=20:**

> **A:=180:**

> **my_diff:=diff(T(t),t)=-k*(T(t)-A);**

$$my_diff := \frac{d}{dt} T(t) = -k (T(t) - 180)$$

> **dsolve({my_diff,ins});**

$$T(t) = 180 - 160 e^{(-k t)}$$

> **T:= t -> A-160*exp(-k*t):**

> **r:=T(30)=55;**

$$r := 180 - 160 \mathfrak{e}^{(-30 k)} = 55$$

> **k:=evalf(solve(r,k));**

$$k := 0.008228669263$$

> **t[f]:=evalf(solve(T(t)=85,t));**

$$t_f := 63.35130347$$

7.2 Колебания температуры внутри помещения

В интересной прикладной задаче, в которой используется решение линейного дифференциального уравнения, рассматриваются колебания температуры внутри помещения, которые вызываются наружными колебаниями температуры, имеющими форму:

$$A(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t.$$

Если $\omega = \pi/12$, то эти колебания имеют период 24 часа (так что цикл колебания наружной температуры повторяется ежедневно). Например, в течение типичного дня конца августа в г. Геленжик минимальная температура равна 21°C в момент времени $t = 4$ (утра), а максимум 33°C достигается, когда $t = 16$ (4 часа пополудни). В этом случае мы взяли бы:

$$A(t) = 27 - 6 \cdot \cos(\omega(t - 4)) = 27 - 3 \cdot \cos(\omega t) - 3 \cdot (3)^{1/2} \sin(\omega t).$$

Если мы запишем закон Ньютона для охлаждающегося тела для соответствующей внутренней температуры $u(t)$ в момент времени t , но вместо постоянной температуры A окружающей среды $A(t)$ подставим внешнюю температуру, то мы получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = -k(u - A(t));$$

Иными словами

$$\frac{du}{dt} + ku = k(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) \quad (7.1)$$

с коэффициентами (функциями) $P(t) \equiv k$ и $Q(t) \equiv kA(t)$. Типичные значения константы пропорциональности k лежат в интервале от 0.2 до 0.5 (хотя k может быть больше, чем 0.5 для плохо изолированного здания с открытыми окнами, или меньше, чем 0.2 для хорошо теплоизолированного здания с плотно (почти герметично) закрытыми окнами).

Сценарий. Предположим, что однажды в полночь (в момент времени $t_0 = 0$) наш кондиционер сломался, и мы не можем отремонтировать его до дня зарплаты в конце месяца. Мы поэтому хотим исследовать колебания температуры в комнате, которые нам придется терпеть в течение нескольких следующих дней.

Начните ваше исследование с решения уравнения (7.1) при начальном условии $u(t) = u_0$ (внутренняя температура во время отказа кондиционера). Можно использовать систему компьютерной алгебры. Получим решение:

$$u(t) = a_0 + c_0 e^{-kt} + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t,$$

$$\text{где } c_0 = u_0 - a_0 - \frac{k^2 a_1 - k \omega b_1}{k^2 + \omega^2}, \quad c_1 = \frac{k^2 a_1 - k \omega b_1}{k^2 + \omega^2}, \quad d_1 = \frac{k \omega a_1 - k^2 b_1}{k^2 + \omega^2},$$

причем $\omega = \pi/12$.

При $a_0 = 27$, $a_1 = -3$, $b_1 = -3(3)^{1/2}$ $\omega = \pi/12$ и $k = 0.2$ (например), это решение приводится (приблизительно) к:

$$u(t) = 27 + e^{-t/5}(u_0 - 23.3877) - 3.61225 \cdot \cos(\pi t/12) + 0.46772 \cdot \sin(\pi t/12). \quad (7.2)$$

Заметим, что затухающий показательный член в уравнении (7.2) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, почти не влияя на длительное "устойчивое периодическое" решение:

$$u_{sp}(t) = 27 - 3.61225 \cdot \cos(\pi t/12) + 0.46772 \cdot \sin(\pi t/12).$$

Следовательно, внутренняя температура колеблется каждые 24 часа около той же самой средней температуры 27°C , что и средняя наружная температура.

Выполните подобный анализ, используя средние ежедневные максимальные и минимальные значения температуры в июле в вашей местности, взяв значение k для вашего дома. Можно также провести аналогичное исследование для зимнего дня вместо летнего. (Чем отличаются задачи о внутренней температуре для зимнего и летнего дня?)

7.3 Задачи

1. Кувшин пахты установлен у парадного крыльца, причем температура кувшина первоначально равна 25°C . Температура на крыльце равна 0°C . Предположим, что через 20 минут температура пахты понизилась до 15°C . Когда она будет равна 5°C ?

2. Пирог вынимается из духовки при 100°C и ставится охлаждаться при комнатной температуре 22°C . Через 30 минут температура пирога равна 60°C . Когда она будет равна 38°C ?

3. Как раз перед полуднем безжизненное тело жертвы убийства было найдено в комнате с постоянной температурой 22°C . В 12 полудня температура тела была равна 27°C , а в 13:00 - 24°C . Предположите, что температура тела во время смерти была $36,6^{\circ}\text{C}$ и что оно охлаждалось в соответствии с законом Ньютона. Когда произошло убийство?

4. Предположим, что градина с плотностью $\delta = 1$ начинает падение с состояния покоя, имея незначительный радиус $r = 0$. При падении ее радиус $r = kt$ (k – константа), поскольку он растет (градина увеличивается во время ее падения). Поставьте и решите задачу Коши (задачу с начальными условиями условиями):

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg, \quad v(0) = 0,$$

где m – переменная масса градины, $v = dy/dt$ – ее скорость, а ось y направлена вниз. Затем покажите, что $dv/dt = g/4$. Таким образом, градина падает, как бы под влиянием менее чем одной четвертой силы тяжести.

8 Закон Торричелли

Предположим, что водный резервуар имеет отверстие в основании, через которое вытекает вода. Пусть площадь отверстия равна a . Обозначим через $y(t)$ глубину воды в резервуаре в момент времени t , а через $V(t)$ – объем воды в резервуаре. При некоторых идеальных условиях скорость воды, вытекающей через отверстие, равна:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (8.1)$$

т.е. равна скорости, которую вытекающая вода приобрела бы при свободном падении с поверхности воды до отверстия. Эту формулу можно получить, если сделать предположение, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы остается постоянной. При реальных условиях, принимая во внимание сжатие воды в струе, вытекающей из отверстия:

$$v = c\sqrt{2gy}$$

где c – эмпирическая константа между 0 и 1 (обычно она равна приблизительно 0.6 для маленького непрерывного потока воды). Для простоты мы принимаем $c = 1$ в дальнейшем обсуждении.

Вследствие уравнения (8.1) мы имеем:

$$\frac{dV}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy}$$

Или, эквивалентно

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y},$$

где $k = a\sqrt{2g}$.

Это закон Торричелли для жидкости, вытекающей из резервуара. Если $A(y)$ обозначает горизонтальную площадь поперечного сечения резервуара на высоте y выше отверстия, метод вычисления объема через площади сечений дает:

$$V = \int_0^y A(y)dy$$

так что фундаментальная теорема анализа приводит к выводу, что $dV/dy = A(y)$, и поэтому:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = A(y) \frac{dy}{dt} \quad (8.2)$$

Из уравнений (8.1) и (8.2) получаем:

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy} = -k\sqrt{y}. \quad (8.3)$$

Это альтернативная форма закона Торричелли.

Пример 8.1. Полусферическая чаша высотой (радиусом) 4 м наполнена водой. В момент в времени $t=0$ в основании резервуара открывается круговое отверстие диаметром 0.1 м. Через сколько времени из резервуара вытечет вся вода?

Решение. Из прямоугольного треугольника на рис. 8.1 находим:

$$A(y) = \pi r^2 = \pi [16 - (4 - y)^2] = \pi(8y - y^2).$$

Отсюда уравнение (8.3) принимает вид:

$$\pi(8 - y^2) \frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} \Rightarrow \int \left(8y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = -\frac{k}{\pi} \int dt \Rightarrow \frac{16}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} = -\frac{k}{\pi} t + C.$$

Резервуар будет пуст, когда $y = 0$, т. е. когда:

$$t_f = \pi C/k.$$

Теперь подставим начальное условие $y(0) = 4$. Получаем:

$$C = \frac{16}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} = \frac{448}{15} \approx 29.8666.$$

Тогда получим:

$$t_f \approx 3.14 \cdot 29.8666 / [0.1 \cdot (2 \cdot 9.81)^{1/2}] \approx 2118.298.$$

Иными словами, приблизительно через 35 минут 20 секунд. Так что потребуется немного меньше 36 минут, чтобы из резервуара вытекла вся вода.

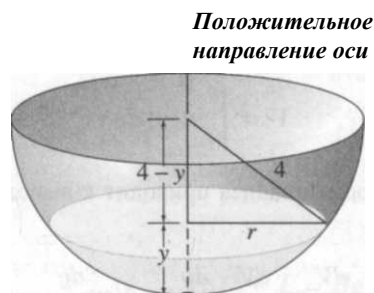


Рис. 8.1. Вытекание жидкости из полусферического резервуара

Задачи

1. Резервуар имеет форму вертикального цилиндра, первоначально он заполнен водой на 3 метра. Из основания в момент времени $t = 0$ (часы) вынимается пробка. После 1 часа глубина воды понизилась и стала равной 1 метру. Сколько потребуется времени, чтобы из резервуара вытекла вся вода?
2. Предположим, что резервуар в задаче 35 имеет радиус 0.9 метра и что в его основании есть круглое отверстие радиусом 0.025 м. Сколько потребуется времени, чтобы из резервуара вытекла вся вода, если первоначально глубина воды равна 3 м?
3. В момент времени $t = 0$ из основания (в вершине конуса) полного конического водного резервуара высотой 5 м вынута пробка. После 1 часа глубина воды равна 3 м. Когда резервуар будет пуст?
4. Предположим, что цилиндрический резервуар, первоначально содержащий V_0 литров воды, сливается через отверстие в основании за T минут. Используйте закон Торричелли, чтобы показать, что объем воды в резервуаре после $t \leq T$ минут равен $V = V_0[1 - (t/T)]^2$.
5. Водный резервуар имеет форму тела, полученного вращением кривой $y = x^{4/3}$ вокруг оси y . Пробка в основании вынимается в 12 часов полудня, когда глубина воды в резервуаре равна 4 м. В 13:00 глубина воды равна 2 м. Когда резервуар будет пуст?
6. Водный резервуар имеет форму тела, полученного вращением параболы $x^2 = by$ вокруг оси y . Глубина воды равна 1.5 м в 12 часов полудня, когда вынимается круглая пробка в основании резервуара. В 13:00 глубина воды равна 0.4 м.
 - (a) Найти глубину $y(t)$ воды, остающейся после t часов.
 - (b) Когда резервуар будет пуст?
 - (c) Предположим, что начальный радиус (верхний) поверхности воды равен 0.6 м. Каков радиус кругового отверстия в основании?
7. Цилиндрический резервуар длиной 1.5 м и радиусом 0.9 м расположен так, что его ось горизонтальна. Предположим, что круговое отверстие в основании с радиусом 0.025 м открыто и резервуар первоначально заполнен наполовину ксилолом. Сколько времени потребуется, чтобы жидкость вытекла полностью?
8. Сферический резервуар радиусом 1.5 м полон бензина, когда в основании открывается круглое отверстие радиусом 0.025 м. Сколько времени потребуется, чтобы из резервуара вытек весь бензин?
9. Предположим, что первоначально полный полусферический водный резервуар радиуса 1 м поставлен на свое плоское дно. Он имеет в основании отверстие радиуса 1 см. Если это отверстие основания открыть в 13:00, когда резервуар будет пуст?

10. Рассмотрим первоначально полный полусферический водный резервуар. Пусть радиус r его кругового отверстия основания неизвестен. В 13:00 в основании открывается отверстие, и в 13:30 глубина воды в резервуаре равна 0.6 м.

(а) Используйте закон Торричелли в форме:

$$\frac{dV}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2gy} \quad (\text{принимается во внимание сжатие}),$$

Чтобы определить, когда резервуар будет пуст.

(b) Каков радиус отверстия в основании?

11. (Клепсидра, или водные часы.) Нужно сконструировать (разработать) 12-часовые водные часы, имеющие измерения, показанные на рис. 8.2 ($r = 0.5$ м, $h = 1.5$ м). Они должны иметь форму, подобную поверхности, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси y . Какова должна быть эта кривая? Каков должен быть радиус кругового отверстия в основании, чтобы уровень воды падал с постоянной скоростью 10 сантиметра в час?

12. На рис. 8.3 показана бусинка, соскальзывающая без трения от точки P до точки Q . В задаче о брахистохроне спрашивается, какой формы должен быть провод, чтобы время

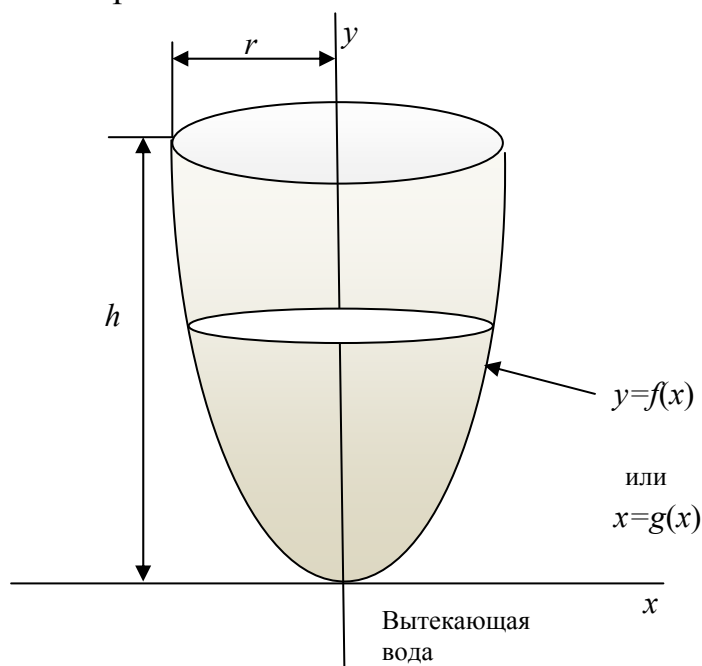


Рис. 8.2. Клепсидра

соскальзывания бусинки (время спуска от P до Q) было минимальным. В июне 1696 года Иоганн Бернулли предложил научному сообществу решить эту задачу в течение не более чем 6 месяцев (позже этот срок был продлен до Пасхи 1697 года по просьбе Готфрида Лейбница). Исаак Ньютон, в то время уже оставивший академические занятия и занявший должность директора Монетного двора в Лондоне, получил вызов Бернулли 29 января 1697 года. Сразу же на следующий день он сообщил свое собственное

решение Королевскому Обществу в Лондоне: кривая минимального времени спуска – это перевернутая дуга циклоиды. Чтобы получить современный вывод этого результата, предположите, что бусинка начинает соскальзывать с состояния покоя в начале координат P и пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой в системе координат, ось y которой направлена вниз. Тогда механический аналог закона Снеллиуса, часто применяемого в оптике, даст, что:

$$(\sin \alpha)/v = \text{const} \quad (\text{i})$$

где α обозначает угол отклонения (от вертикальной линии) касательной к направляющей кривой, так что $\text{ctg } \alpha = y'(x)$ (почему?) и $v = (2gy)^{1/2}$ – скорость бусинки, когда она спустилась на расстояние y по вертикали (поскольку Кинетическая энергия $= (1/2)mv^2 = mgy =$ Потенциальной энергии).

Сначала из уравнения (i) выведите дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \quad (\text{ii})$$

где a – подходящая положительная константа.

(b) Подставьте $y = 2a \sin^2 t$, $dy = 4a \sin t \cos t dt$ в (ii), чтобы получить решение:

$$x = a(2t - \sin 2t), \quad y = a(1 - \cos 2t), \quad (\text{iii})$$

для которого $t = y = 0$, когда $x = 0$. Наконец, подстановка $\Theta = 2a$ в (iii) дает стандартное параметрическое уравнение $x = a(\Theta - \sin \Theta)$, $y = a(1 - \cos \Theta)$ циклоиды, которая является траекторией точки на ободе кругового колеса радиуса a , когда оно катится по оси x .

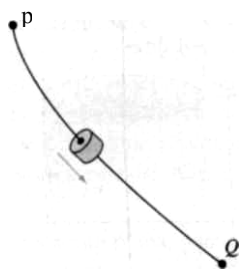


Рис. 8.3. Бусинка, соскальзывающая с провода — задача о брахистохроне

9 Задачи на смеси

Как приложение линейных дифференциальных уравнений первого порядка, рассмотрим резервуар, содержащий раствор–смесь растворенного вещества и растворителя, – например раствор соли в воде. Есть приток и отток растворенного вещества, и мы хотим вычислить количество $x(t)$ растворенного вещества в резервуаре в момент времени t , зная количество $x(0) = x_0$ в момент времени $t = 0$. Предположим, что раствор с концентрацией c_i граммов растворенного вещества в литре раствора вливается в резервуар с постоянной скоростью r_i литров в секунду и что раствор в резервуаре сразу же тщательно перемешивается, причем отток имеет постоянную скорость r_0 литров в секунду.

Чтобы написать дифференциальное уравнение для $x(t)$, мы вычислим изменение Δx количества x в течение короткого временного интервала $[t, t+\Delta t]$. Количество раствора, который вливается в резервуар в течение Δt секунд равно $r_i c_i \Delta t$ граммов. Чтобы проверить это, обратите внимание на размерность полученного нами результата: выражение

$$\left(r_i \frac{\text{литр}}{\text{секунда}} \right) \left(c_i \frac{\text{грамм}}{\text{литр}} \right) (\Delta t \text{ секунда})$$

дает количество, выраженное в граммах.

Количество раствора, который вытекает из резервуара в течение этого же самого временного интервала, зависит от концентрации $c_0(t)$ растворенного вещества в растворе в момент времени t . Но, как показано на рис. 9.1, $c_0(t) = x(t)/V(t)$, где $V(t)$ обозначает объем (является константой только если $r_i = r_0$) раствора в резервуаре в момент времени t . Тогда

$$\Delta x = \{ \text{грамм вливаемого растворенного вещества} \} - \{ \text{грамм выливаемого растворенного вещества} \} \approx r_i c_i \Delta t - r_0 c_0 \Delta t.$$

Теперь делим на Δt :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_0 c_0.$$

Наконец, берем предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Если все имеющиеся здесь функции непрерывны и $x(t)$ дифференцируема, то ошибка в этой аппроксимации также приближается к нулю, и мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - r_0 c_0$$

в котором r_i , c_i и r_0 являются константами, а c_0 обозначает переменную концентрацию

$$c_0(t) = x(t)/V(t)$$

растворенного вещества в резервуаре в момент времени t . Таким образом, количество растворенного вещества в резервуаре $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - \frac{r_0}{V} x. \quad (9.1)$$



Рис. 9.1. Задача на смесь в единственном резервуаре.

Если $V_0 = V(0)$, то $V(t) = V_0 + (r_i - r_0)t$, так что уравнение (9.1) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка для количества $x(t)$ растворенного вещества в резервуаре времени t .

Важно. Уравнение (9.1) не нужно запоминать. Нужно стремиться понять именно метод вывода этого уравнения поведения системы в короткий временной интервал $[t, t+\Delta t]$, потому что именно этот метод позволяет вывести дифференциальные уравнения всех видов.

Пример 9.1. Предположим, что озеро Эри имеет объем 480 км^3 и что скорость притока в него (из озера Гурон) и оттока из него (в озеро Онтарио) равна 350 км^3 в год. Предположим, что в момент времени $t = 0$ (годы), концентрация загрязнителя в озере Эри вызвана прошлым промышленным загрязнением, которому теперь приказали прекратиться (а оно взяло да и послушалось!), в пять раз больше, чем концентрация загрязнителя в озере Гурон. Предположим, что при оттоке вода в озере тщательно перемешивается. Сколько потребуется времени, чтобы концентрация загрязнителя в озере Эри вдвое превышала концентрацию загрязнителя в озере Гурон?

Решение. Здесь мы имеем:

$V = 480 \text{ (км}^3\text{)}, r_i = r_0 = r = 350 \text{ (км}^3\text{/год)}, c_i = c$ (концентрация загрязнителя в озере) и $x_0 = x(0) = 5cV$, а вопрос формулируется так: когда $x(t) = 2cV$? В этих обозначениях уравнение (9.1) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{dt} = rc - \frac{r}{V} x,$$

которое перепишем в виде линейного уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} + px = q$$

с постоянными коэффициентами $p=r/V$, $q = rc$. Его интегрирующий множитель равен $\rho=e^{pt}$. Мы можем решить это уравнение сами или через систему компьютерной алгебры MATLAB.

```
clc
clear
x=dsolve('Dx=r*(c-x/V)','t')
```

Полученное решение:

$$x(t) = V*c - C_1/\exp((r*t)/V).$$

Учтем начальное условие: $x(0) = 5cV = V*c - C_1 \Rightarrow C_1 = -4cV$.

Поэтому, чтобы найти, когда $x(t) = 2cV$, мы должны только решить уравнение:

$$V*c + 4cV/\exp(rt/V) = 2Vc \Rightarrow 1+4/\exp(rt/V) = 2 \Rightarrow 4/\exp(rt/V) = 1 \Rightarrow 4 = \exp(rt/V)$$

$$\Rightarrow \ln 4 = rt/V \Rightarrow t = (V/r) \ln 4 = (480/350) \ln 4 \approx 1.901 \text{ (года)}.$$

Пример 9.2. 450-литровый резервуар первоначально содержит 40 кг растворенной в 340 литрах воды. Морская вода, содержащая 480 грамм соли в литре, вливается в резервуар со скоростью 15 литров в минуту. Тщательно перемешанная смесь вытекает из резервуара со скоростью 11 литров в минуту. Сколько соли содержит заполненный резервуар?

Решение. Интересная особенность этого примера – из-за различия в скорости притока и оттока объем морской воды в резервуаре увеличивается равномерно, причем $V(t) = 340+t$ литров. Изменение Δx количества соли x в резервуаре с момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$ (минут) дается формулой:

$$\Delta x \approx (15)(0.48) \Delta t - 11x/(340+t) \cdot \Delta t,$$

так что наше дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{11}{340+t} x = 7.2.$$

Интегрирующий множитель равен:

$$\rho(x) = e^{\int \frac{11}{340+t} dt} = e^{11 \ln(340+t)} = (340+t)^{11}.$$

что дает:

$$D_t[(340+t)^{11}x] = 7.2(340+t)^{11} \Rightarrow (340+t)^{11}x = (7.2/12)(340+t)^{12} + C = 0.6(340+t)^{12} + C.$$

Учтем начальное условие: $x(0) = 40$. Тогда $C = -164 \cdot (340)^{11}$. Так что количество соли в резервуаре в момент времени t равно:

$$x(t) = 0.6(340+t) - 164 \cdot (340)^{11}/(340+t)^{11}.$$

Резервуар заполнится через 27.5 минут, а когда $t = 27.5$, мы имеем:

$$x(27.5) = 0.6(340+27.5) - 164 \cdot (340)^{11}/(340+27.5)^{11} \approx 150 \text{ (кг)}$$

соли в резервуаре.

Задачи

1. Резервуар содержит 1000 литров водного раствора 100 кг соли. Чистая вода накачивается в резервуар со скоростью 5 литров в секунду, равномерно перемешивается и откачивается с той же самой скоростью. Сколько времени потребуется, чтобы в резервуаре осталось только 10 кг соли?

2. Рассмотрим бассейн объемом 220 миллиардов литров метров, в котором начальная концентрация загрязнителя равна 0,25%. Есть ежедневный приток 14000 миллионов литров воды с концентрацией загрязнителя 0,05% и равный ежедневный отток хорошо перемешанной воды в бассейне. Сколько времени потребуется, чтобы в резервуаре концентрация загрязнителя снизилась до 0.10%?

3. Резервуар первоначально содержит 220 литров чистой воды. Морская вода, содержащая 200 грамм соли в литре, вливается в резервуар со скоростью 6 литров в минуту, полученный (тщательно перемешанный) раствор вытекает из резервуара со скоростью 11 литров в минуту. Таким образом, резервуар будет пуст ровно через 55 минут.

(a) Найдите количество соли в резервуаре после t минут.

(b) Каково максимальное количество соли в резервуаре?

10 Механические колебания

Линейные дифференциальные уравнения часто представляют собой математические модели механических систем и электрических цепей [6]. Предположим, что к телу (материальной точке) массой m с одной стороны присоединена пружина, действующая на него с силой F_S , а с другой – амортизатор, действующий с силой F_R (рис. 10.1). Будем также считать, что сила упругости F_S пружины пропорциональна смещению x тела относительно положения равновесия (положительного при смещении вправо и отрицательного при смещении влево), а сила действия амортизатора F_R пропорциональна скорости тела $v = dx/dt$. На рис. 10.2 показано направление действия этих сил:

$$F_S = -kx \quad (10.1)$$

и

$$F_R = -cv \quad (k, c > 0).$$

Заметим, что знаки "минус" поставлены верно – F_S отрицательна при положительных x , и F_R отрицательна при положительных v . Из второго закона Ньютона $F = ma$ следует:

$$mx'' = F_S + F_R.$$

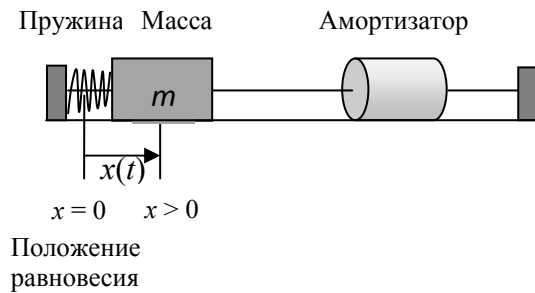


Рис. 10.1. Система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором

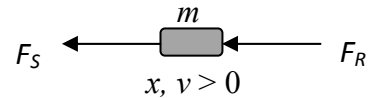


Рис. 10.2. Направления сил, действующих на материальную точку массой m .

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (10.2)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет значение координаты $x(t)$ тела массой m . Это однородное линейное уравнение второго порядка описывает свободные колебания материальной точки.

Если, к тому же, кроме F_S и F_R на точечную массу m действует внешняя сила $F(t)$, ее необходимо добавить к правой части уравнения (10.2) и в результате мы получим уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (10.3)$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение характеризует вынужденные колебания материальной точки под действием внешней силы $F(t)$.

В качестве другого примера можно рассмотреть систему, в которой тело прикреплено к нижнему концу подвешенной пружины. Верхний конец пружины закреплен неподвижно (рис. 10.3). В этом случае сила тяжести $W = mg$ тела растянёт пружину на расстояние s_0 , которое удовлетворяет уравнению (10.1), причем $F_s = -W$ и $x = s_0$. Иными словами, $mg = ks_0$, откуда $s_0 = mg/k$. Это положение статического равновесия тела. Обозначим через y смещение тела при движении относительно положения равновесия, причем положительным направлением будем считать направление вниз. Тогда y удовлетворяет уравнению (10.3) с учетом сил сопротивления.

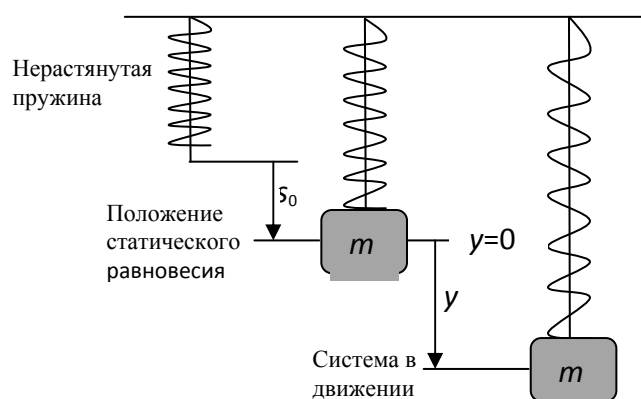


Рис.10.3. Тело, подвешенное на пружине

11 Математический маятник

Дифференциальное уравнение (10.3) очень важно потому, что оно описывает движение также и многих других простых механических систем. Рассмотрим, например, математический маятник. Он состоит из материальной точки массой m , подвешенной на невесомой нити (или на невесомом стержне) длиной L , причем эта материальная точка качается из стороны в сторону, как показано на рис. 11.1. Положение тела в момент времени t можно задать с помощью угла отклонения нити (или стержня) от вертикальной оси $\Theta - \Theta(t)$ (положительного при отклонении против часовой стрелки). Чтобы получить дифференциальное уравнение колебаний материальной точки массой m , запишем закон сохранения механической энергии, согласно которому сумма кинетической и потенциальной энергии тела постоянна.

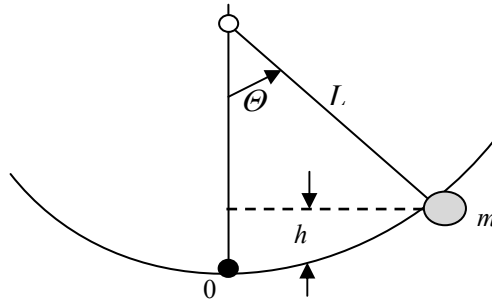


Рис. 11.1. Математический маятник

Расстояние от положения равновесия 0 до материальной точки массой m вдоль дуги $s = L\Theta$. Следовательно, скорость движения материальной точки равна $v = ds/dt = L(d\Theta/dt)$, откуда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2$$

Выберем в качестве начала отсчета самую низкую точку О, через которую проходит при движении материальная точка (рис. 11.1). Тогда потенциальная энергия V равна произведению mg на высоту $h = L(1 - \cos\Theta)$ тела над точкой О, т. е.

$$V = mgL(1 - \cos\Theta).$$

Поскольку сумма T и V равна некоторой постоянной C , получим:

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\Theta) = C.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по t , получим:

$$mL^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right) + mgL(\sin\Theta)\frac{d\Theta}{dt} = 0.$$

Отсюда, после деления на $mL^2(d\Theta/dt)$, получим уравнение:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \Theta = 0. \quad (11.1)$$

Как известно, $\sin \Theta \approx \Theta$ при достаточно малых Θ . На самом деле при значениях $|\Theta|$ не превосходящих $\pi/12$ (или 15°) $\sin \Theta$ и Θ совпадают до второго знака после запятой. А в обычных часах с маятником, Θ никогда не превышает 15° . Поэтому математическую модель математического маятника можно упростить, заменив в уравнении (11.1) $\sin \Theta$ на Θ . Если также включить слагаемое $c\Theta'$ в качестве сил сопротивления окружающей среды, то в результате получим уравнение, аналогичное уравнению (10.2):

$$\Theta'' + c\Theta' + k\Theta = 0, \quad (11.2)$$

где $k = g/L$.

Заметим, что в это уравнение не входит масса m тела, закрепленного на конце стержня. Однако можно ожидать, что погрешность между значениями Θ и $\sin \Theta$ может накапливаться с течением времени, поэтому уравнение (11.2) не будет точно отображать движение маятника на протяжении длительного периода времени.

Далее будут рассмотрены свободные незатухающие колебания, а затем – свободные затухающие.

Задачи

В задачах 1 – 4 предположим, что уравнение математического маятника длиной L имеет вид $L\ddot{\Theta} + g\dot{\Theta} = 0$, где $g = GM/R^2$ – ускорение свободного падения там, где расположен маятник (на расстоянии R от центра Земли; M – обозначает массу Земли).

1. Периоды колебаний двух маятников длиной L_1 и L_2 , расположенных на расстояниях R_1 и R_2 , от центра Земли, соответственно равны p_1 и p_2 . Покажите, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1\sqrt{L_1}}{R_2\sqrt{L_2}}.$$

2. Некоторый маятник точно отображает время в Париже, где $R \approx 63665$ (км), но отстает на 2 минуты 40 секунд за день на экваторе. Используя результат задачи 1, найдите расстояние от центра Земли до экватора.

3. Маятник длиной 2.54 м, расположенный на уровне моря, где радиус Земли $R = 63730$ (км), имеет тот же период колебаний, что и маятник длиной 2.54 м, расположенный на близлежащей горе. Используя результат задачи 1, найдите высоту горы.

4. Большинство дедушкиных часов имеют маятники, длину которых можно регулировать. Одни такие часы отстают на 10 мин в день при длине их маятника 76.2 см. Какой длины должен быть маятник, чтобы часы показывали точное время?

12 Свободные незатухающие колебания

В случае, когда рассматриваемая механическая система состоит лишь из тела и пружины, а внешние силы и сопротивление отсутствуют, уравнение (10.2) принимает более простой вид:

$$mx'' + kx = 0. \quad (12.1)$$

Удобно обозначить

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и записать уравнение (12.1) в виде:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (12.2)$$

Общее решение уравнения (12.2) представляет собой функцию:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Чтобы исследовать колебания, описываемые этим решением, определим постоянные C и α так, чтобы

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{B}{C}. \quad (12.3)$$

Геометрическая интерпретация этих постоянных показана на рис. 12.1.

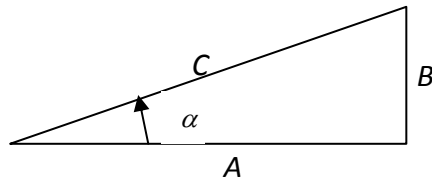


Рис. 12.1 Геометрическая интерпретация постоянных C и α .

Заметим, что хотя $\operatorname{tg} \alpha = B/A$, угол α не равен значению арктангенса этой величины, так как арктангенс принимает значения из интервала $-\pi/2 < x < \pi/2$. Вместо этого, α — угол между 0 и 2π такой, что его косинус и синус заданы равенствами (12.3), в которых и A , и B или даже обе эти величины могут быть отрицательными. Поэтому:

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A > 0, B > 0 \text{ (первая четверть)} \\ \pi + \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A < 0 \text{ (вторая или третья четверть)} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A < 0, B < 0 \text{ (четвертая четверть)} \end{cases}$$

где $\operatorname{arctg}(B/A)$ — значение угла из интервала $(-\pi/2 < x < \pi/2)$.

В любом из этих случаев из равенств (12.2) и (12.3) получим:

$$x(t) = C(\cos \alpha \cos \omega_0 t + \sin \alpha \sin \omega_0 t).$$

По формуле косинуса суммы углов, это равенство можно переписать так:

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha).$$

Следовательно, тело колеблется около положения равновесия, причем колебание описывается следующими параметрами.

- | | |
|---------------------|--------------|
| 1. Амплитуда | C . |
| 2. Круговая частота | ω_0 . |
| 3. Фаза | α . |

Такие колебания называются гармоническими колебаниями.

Если t измеряется в секундах, то круговая частота ω_0 имеет размерность радиан в секунду (рад/с). Периодом колебаний называется время, необходимое системе для совершения одного полного колебания (качания). Период колебаний равен:

$$T = 2\pi/\omega_0$$

секундам. Частота колебаний равна:

$$\nu = 1/T = \omega_0/2\pi$$

герц (Гц). Она равна количеству полных колебаний, совершаемых маятником за 1 секунду. Заметим, что частота измеряется в колебаниях в секунду, в то время как круговая частота – в радианах в секунду.

Типичный график зависимости смещения материальной точки, совершающей гармонические колебания, от времени, т.е. график функции, представляется формулой:

$$x(t) = C(\cos(\omega_0 t - \alpha)) = C(\cos(\omega_0(t - \alpha/\omega_0))) = C(\cos(\omega_0(t - \delta))),$$

где $-\delta = \alpha/\omega_0$ – временная задержка.

Пример 12.1. Тело массой $m = 1/2$ килограмм (кг) прикреплено к пружине. Пружина под действием силы 100 ньютонов (Н) растягивается на 2 метра (м). Тело начинает двигаться из начального положения $x_0 = 1$ (м) с начальной скоростью $v_0 = -5$ (м/с). (Заметим, что из начальных данных следует, что в момент времени $t = 0$ тело смещено вправо и движется влево.) Найти уравнение движения данного тела, а также амплитуду, частоту, период колебаний и временную задержку колебаний.

Решение. Жесткость пружины $k = 100(\text{Н})/2(\text{м})$. Поэтому уравнение (12.2) принимает вид $(1/2)x'' + 50x = 0$ или

$$x'' + 100x = 0.$$

Следовательно, круговая частота гармонических колебаний равна $\omega_0 = (100)^{1/2} = 10$ (рад/сек). Поэтому период колебаний равен:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/10 \approx 0.6283 \text{ (с)},$$

а частота равна:

$$\nu = 1/T = \omega_0/2\pi = 10/2\pi \approx 1.5915 \text{ (Гц)}.$$

Подставим теперь начальные условия $x(0) = 1$ и $x'(0) = -5$ в уравнение движения:

$$x(t) = A\cos 10t + B\sin 10t \text{ и } x'(t) = -10A\sin 10t + 10B\cos 10t.$$

Получим $A=1$ и $B=-1/2$, т.е. уравнение движения тела в данном случае имеет вид:

$$x(t) = \cos 10t - (1/2)\sin 10t.$$

Следовательно, амплитуда колебаний:

$$C = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ (м)}.$$

Чтобы найти значение временной задержки, запишем равенство:

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 10t - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin 10t \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(10t - \alpha),$$

где фазовый угол α удовлетворяет условиям:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \text{ и } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0.$$

Отсюда заключаем, что α лежит в четвертой четверти:

$$\alpha = 2\pi + \arctg\left(\frac{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}}\right) = 2\pi - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5.8195.$$

Поэтому временная задержка

$$\delta = \alpha/\omega_0 \approx 0.5820 \text{ (с)}.$$

Зная значения амплитуды и временной задержки, уравнение движения тела можно записать в виде:

$$x(t) \approx \frac{1}{2}\sqrt{5} \cos(10t - 5.8195).$$

График уравнения движения тела изображен на рис. 12.2.

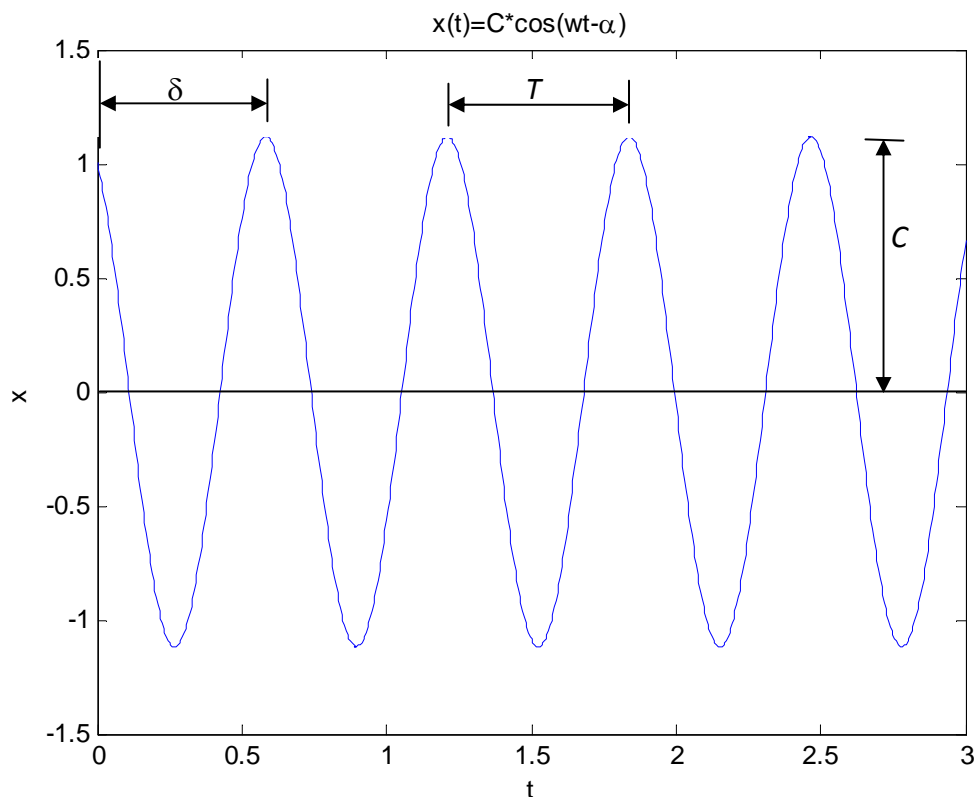


Рис. 12.2. График уравнения движения $x(t) = C \cos(\omega t - \alpha)$ с амплитудой $C \approx 1.118$, периодом $T \approx 0.628$ и временной задержки $\delta \approx 0.582$.

Текст на MATLAB

%Свободные незатухающие колебания

clc

clear

t=0:0.005:3;

C=1.118;

T=0.628;

sigma=0.582;

omega_0=2*pi/T;

alfa=sigma*omega_0;

y=C*cos(omega_0*t-alfa);

plot(t,y);

title('x(t)=C*cos(wt-\alpha)');

xlabel('t');

ylabel('x');

13 Свободные затухающие колебания

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в случае отсутствия внешних сил *принимает* вид: $mx'' + cx' + kx = 0$ или

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \quad (13.1)$$

где $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ – круговая частота незатухающих колебаний и

$$p = c/(2m) > 0.$$

Корни характеристического уравнения $r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0$ дифференциального уравнения (13.1):

$$r_{1,2} = -p \pm (p^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \quad (13.2)$$

Вещественные они или комплексные – это зависит от знака подкоренного выражения

$$p^2 - \omega_0^2 = c^2/(4m^2) - k/m = (c^2 - 4km)/(4m^2)$$

Поэтому критическое затухание c_{cr} вычисляется по формуле $c_{cr} = (4km)^{1/2}$. Рассмотрим отдельно три случая: $c > c_{cr}$, $c = c_{cr}$, $c < c_{cr}$.

13.1 Случай сверхзатухания

Сверхзатухания или сильноео демпфирование: $c > c_{cr}$, ($c^2 > 4km$). Поскольку c в этом случае относительно велико, мы имеем дело с большим сопротивлением при относительно слабой пружине или малой массе. Тогда уравнение (13.2) имеет два различных действительных корня r_1 и r_2 , причем они оба отрицательные. Уравнение движения имеет:

$$x(t) = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t).$$

Ясно, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому тело будет двигаться к своему положению равновесия без каких-либо колебаний. На рис 13.1 изображены графики некоторых уравнений движения в этом случае.

Выбрав фиксированное положительное значение x_0 , построим зависимость уравнения движения от начальной скорости v_0 . Во всех случаях колебания были демпфированы (поглощены демпфером).

Текст на MATLAB

%Случай сверхзатухания

clc

clear

t=0:0.005:5;

C1=-4; C2=5;

r1=[-4, -1, -2, -0.8];

r2=[-6, -5, -3, -0.9];

for i=1:length(r1)

 x=C1*exp(r1(i)*t)+C2*exp(r2(i)*t);

 plot(t,x);

 hold on


```

end
title('x(t)=C1*e^r1*t+c2e^r2*t');
xlabel('t');
ylabel('x');
grid on

```

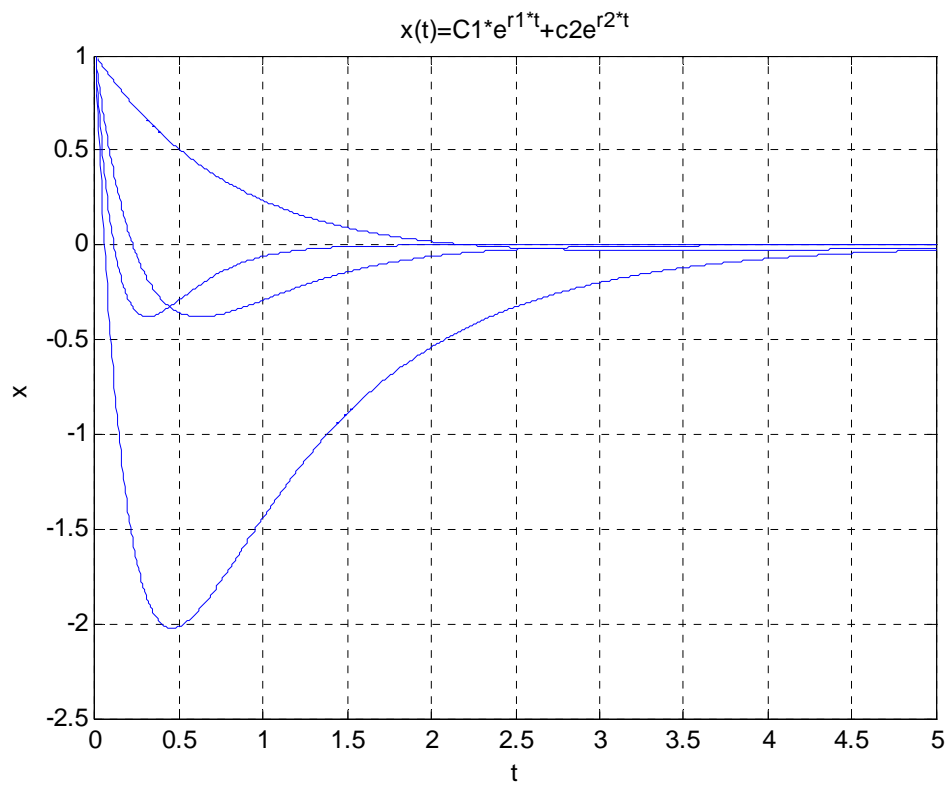


Рис. 13.1. Сверхзатухающие колебания: $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ при $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$. Приведены графики решений с одинаковым начальным положением x_0 и различными начальными скоростями.

13.2 Случай критического затухания

В этом случае $c = c_{cr}$, ($c^2 = 4km$). В этом случае корни характеристического уравнения, определяемые из (13.2), равны: $r_1 = r_2 = -p$. Поэтому общее решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-pt}(c_1 + c_2t).$$

Поскольку $e^{-pt} > 0$, а $c_1 + c_2t$ имеет не больше одного нуля при положительных t , материальная точка пройдет через свое положение равновесия не более одного раза. Ясно, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Графики некоторых уравнений движения в случае критического затухания изображены на рис. 13.2.

Заметим, что они очень похожи на аналогичные графики в случае сверхзатухания (см. рис. 13.1). В случае критического затухания сопротивление амортизатора достаточно для поглощения любых колебаний. Но даже небольшое уменьшение сопротивления приводит к оставшемуся случаю, в котором поведение системы наиболее поразительно.

Текст на MATLAB

%Случай критического затухания

```
clc
clear
t=0:0.005:10;
length_t=length(t);
x=t;
C1=1.5;
C2=-3.0;
p=[4, 1, 2, 0.8];
length_t=length(t);
for i=1:length(p)
    for j=1:length_t
        x(j)=exp(-p(i)*t(j))*(C1 + C2*t(j));
    end
    plot(t,x);
    hold on
end
title('x(t)=e^p^*t(c1+c2*t)');
xlabel('t');
ylabel('x');
grid on
```

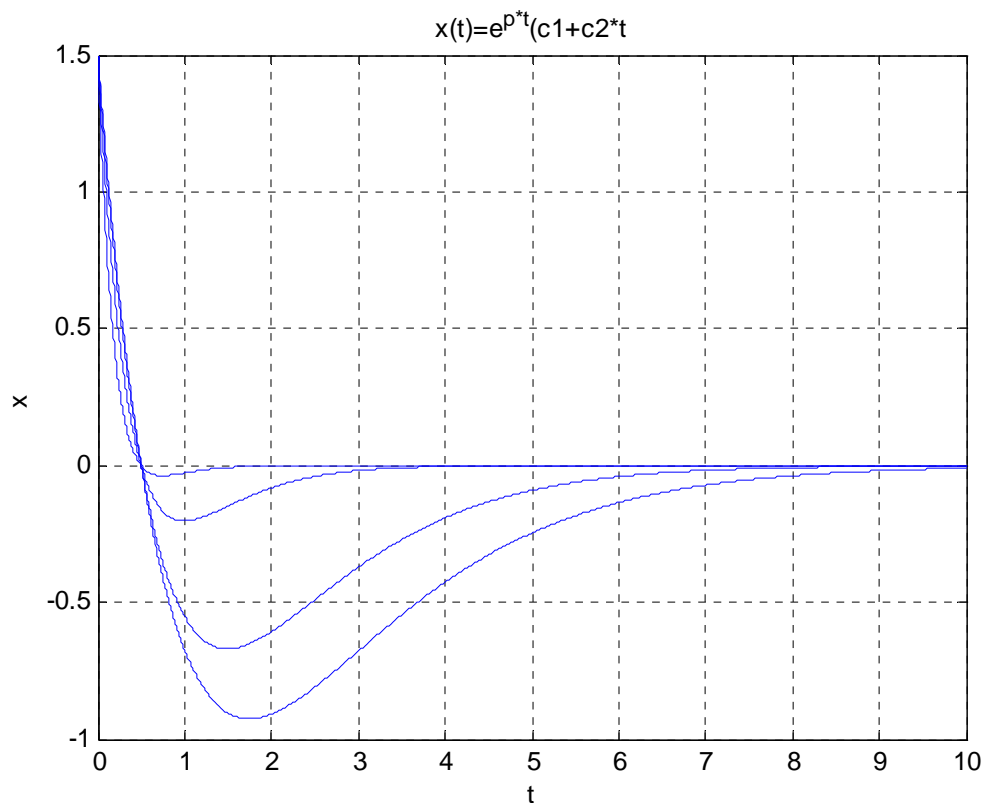


Рис. 13.2. Случай критического затухания: $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-pt}$ при $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$. Приведены графики решений с одинаковым начальным положением x_0 и различными начальными скоростями.

13.3 Затухающие колебания

В этом случае $c < c_{cr}$, ($c^2 < 4km$). Теперь характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $-p \pm i\sqrt{\omega_0^2 - p^2}$. Общее решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-pt}(A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t), \quad (13.3)$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}. \quad (13.4)$$

Используя формулу косинуса суммы, уравнение (13.3) можно переписать как:

$$x(t) = Ce^{-pt} \left(\frac{A}{C} \cos \omega_1 t + \frac{B}{C} \sin \omega_1 t \right),$$

откуда

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(\omega_1 t - \alpha),$$

$$\text{где } C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{B}{C}.$$

Решение (13.3) отображает экспоненциально затухающие колебания материальной точки около положения равновесия. График функции $x(t)$ лежит между “ограничивающими амплитуду” кривыми $x(t) = -Ce^{-pt}$ и Ce^{-p} , касаясь их в точках, где $\omega_1 t - \alpha$ кратно π . Такие колебания не являются гармоническими, а движение – периодическим, но тем не менее, и в этом случае ω_1 называется круговой частотой (или, более точно, круговой частотой затухающих гармонических колебаний), $T_1 = 2\pi/\omega_1$ – условным периодом затухающих гармонических колебаний, а Ce^{-p} – амплитудой, зависящей от времени. Геометрический смысл большинства этих величин указан на графике решения уравнения затухающих колебаний, изображенном на рис 13.3. Из уравнения (13.4) видно, что в этом случае ω_1 меньше, чем круговая частота незатухающих колебаний ω_0 , поэтому T_1 больше периода T колебаний тела такой же массой, подвешенного на такой же пружине, при отсутствии амортизатора. Следовательно, действие амортизатора выражается, по крайней мере, в двух явлениях.

1. Амортизатор гасит колебания и они экспоненциально затухают (это выражается в зависимости (уменьшении) амплитуды от времени).

2. Амортизатор замедляет движение, т. е. уменьшает частоту колебаний.

На следующем примере видно, что затухание обычно также увеличивает отставание (задержку во времени) по сравнению с незатухающими колебаниями с теми же начальными условиями.

Пример 13.1. Пусть теперь, как и в примере 12.1, материальная точка подвешена на пружине, но, кроме пружины, на нее действует амортизатор с силой сопротивления 1 Н на каждый метр в секунду скорости. Тело приведено в движение из того же начального положения $x(0) = 1$ с той же начальной скоростью $x'(0) = -5$, как и в примере 20.

Нужно найти уравнение движения тела, его круговую частоту и условный период колебаний, временную задержку, а также определить время, необходимое материальной точке для ее первых четырех проходов через точку $x = 0$.

Решение. На этот раз мы не будем использовать ранее выведенные формулы. Вместо этого мы получим дифференциальное уравнение и затем найдем решение в явном виде. Напомним, что $m = 1/2$ и $k = 50$. Также имеем $c = 1$. Отсюда уравнение (10.2) принимает вид $(1/2)x'' + x' + 50x = 0$ или $x'' + 2x' + 100x = 0$.

Запишем характеристическое уравнение: $r^2 + 2r + 100 = (r + 1)^2 + 99 = 0$. Его корни $r_{1,2} = -1 \pm i(99)^{1/2}$, поэтому общее решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-t} (A \cos \sqrt{99}t + B \sin \sqrt{99}t). \quad (13.5)$$

Следовательно, новая круговая частота затухающих колебаний $\omega_1 = (99)^{1/2} \approx 9.9499$ (сравните с $\omega_0 = 10$ в примере 12.1). Условный период $T_1 = 2\pi/\omega_1 \approx 0.6315$ и частота $\nu_1 = 1/T_1 = \omega_1/2\pi \approx 1.5836$ Гц (Сравните с $T \approx 0.6283 < T_1$ и $\nu \approx 1.5915 > \nu_1$ в примере 12.1).

Подставим теперь начальные данные $x(0) = 1$ и $x'(0) = -5$, в уравнение движения (13.5). Тогда получим функцию скорости движения:

$$x'(t) = e^{-t} (A \cos \sqrt{99}t + B \sin \sqrt{99}t) + \sqrt{99}e^{-t} (-A \sin \sqrt{99}t + B \cos \sqrt{99}t).$$

Отсюда следует, что

$$x(0) = A = 1 \text{ и } x'(0) = -A + B(99)^{1/2} = -5.$$

Таким образом, $A = 1$ и $B = -4/(99)^{1/2}$. Значит, уравнение движения тела имеет вид:

$$x(t) = e^{-t} \left(\cos \sqrt{99}t - \frac{4}{\sqrt{99}} \sin \sqrt{99}t \right).$$

Амплитуда затухающих колебаний равна:

$$Ce^{-t} = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{99}}\right)^2} e^{-t} = \sqrt{\frac{115}{99}} e^{-t}.$$

Следовательно, можно записать уравнение движения:

$$x(t) = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{99}} e^{-t} \left(\cos \sqrt{99}t - \frac{4}{\sqrt{99}} \sin \sqrt{99}t \right) = \sqrt{\frac{115}{99}} e^{-t} \cos(\sqrt{99}t - \alpha_1),$$

где фаза α_1 удовлетворяет условиям:

$$\cos \alpha_1 = (99/115)^{1/2} > 0 \text{ и } \sin \alpha_1 = -4/(115)^{1/2} < 0.$$

Поэтому α_1 лежит в четвертой четверти, т. е.:

$$\alpha_1 = 2\pi + \arctg \left(\frac{-4/\sqrt{115}}{\sqrt{99}/\sqrt{115}} \right) = 2\pi - \arctg \left(\frac{4}{\sqrt{99}} \right) \approx 5.9009,$$

и временная задержка:

$$\delta_1 = \alpha/\omega_1 \approx 0.5931 \text{ с.}$$

(сравните с $\delta \approx 0.5820 < \delta_1$ в примере 12.1). Подставив найденные амплитуду затухающих колебаний и приближенное значение фазы, получим уравнение движения в форме:

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{99}} e^{-t} \cos(\sqrt{99}t - 5.9009). \quad (13.6)$$

График этой функции представляет собой график гармонического колебания, промоделированного убывающей экспонентой, как показано на рис. 13.3 (сравните с графиком гармонических колебаний в примере 12.1).

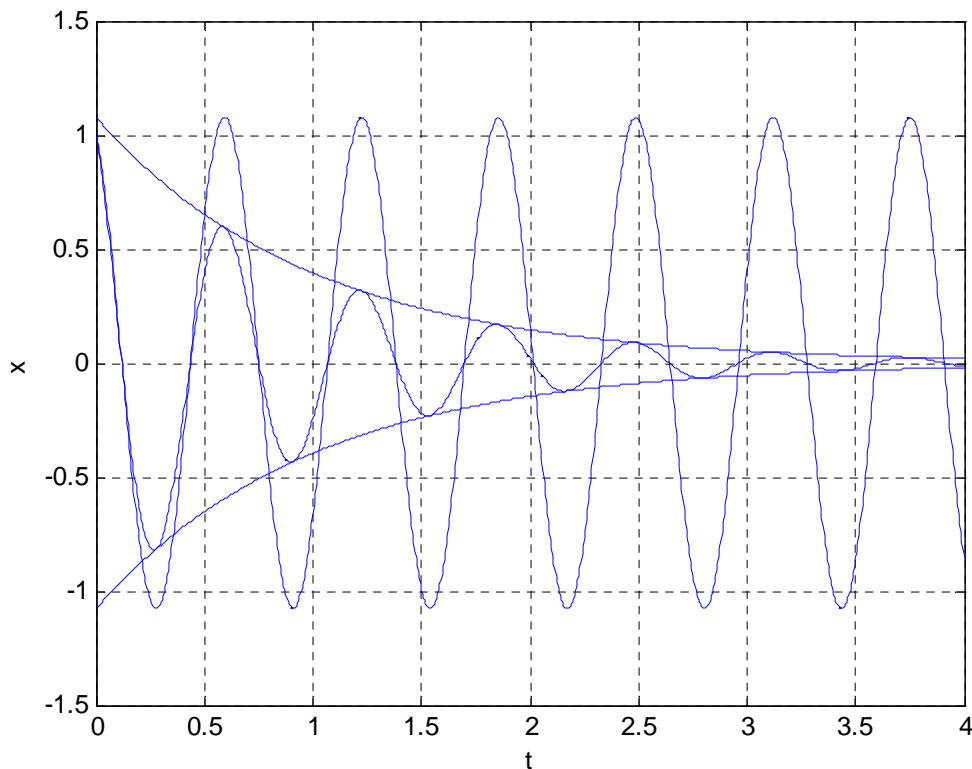


Рис. 13.3 Графики функций смещения $x(t) = C_1 e^{-t} \cos(\omega_1 t - \alpha_1)$ из примера 12.1 (затухающие колебания), $x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha)$ из примера 12.1 (гармонические колебания) и огибающих кривых $x(t) = \pm C_1 e^{-t}$.

Текст на MATLAB

%Затухающие колебания:

clc

clear

t=0:0.005:4;

Csqrt115=sqrt(115);

Csqrt99 =sqrt(99);

Csqrt115del99 =sqrt(115/99);

x1=Csqrt115del99*exp(-t);

x2=-Csqrt115del99*exp(-t);

x0=Csqrt115del99*(cos(Csqrt99*t)/Csqrt115del99-4*sin(Csqrt99*t)/Csqrt115);

x = x0.*exp(-t);

```

plot(t,x);
hold on
plot(t,x0);
hold on
plot(t,x1);
hold on
plot(t,x2);
xlabel('t');
ylabel('x');
grid on

```

Из (13.5) видно, что тело проходит положение равновесия (точку $x = 0$) тогда, когда $\cos(\omega_1 t - \alpha_1) = 0$, т. е. при:

$$\omega_1 t - \alpha_1 = -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots, \text{ или } \\ t = \delta_1 - 3\pi/(2\omega_1), \delta_1 - \pi/(2\omega_1), \delta_1 + \pi/(2\omega_1), \delta_1 + 3\pi/(2\omega_1), \dots$$

Аналогично, в примере 12.1 (без затухания) тело проходит через положение равновесия в моменты времени:

$$t = \delta_0 - 3\pi/(2\omega_0), \delta_0 - \pi/(2\omega_0), \delta_0 + \pi/(2\omega_0), \delta_0 + 3\pi/(2\omega_0), \dots$$

В таблице 13.1 приведены для сравнения четыре первых значения t_1, t_2, t_3, t_4 , подсчитанные для гармонических и затухающих колебаний соответственно. Из ней видно, что затухающие колебания немного запаздывают по сравнению с гармоническими.

Таблица 3.1.

n	1	2	3	4
t_n (незатухающие)	0.1107	0.4249	0.7390	1.0532
t_n (затухающие)	0.1195	0.4352	0.7509	1.0667

13.4 Задачи

1. Определите период и частоту простых гармонических колебаний 4 – килограммового тела на конце пружины с жесткостью 16 Н/м.
2. Определите период и частоту простых гармонических колебаний тела массы 0.75 кг на конце пружины с жесткостью 48 Н/м.
3. Тело массой 3 кг закреплено на пружине, которая удлиняется на 20 см под действием силы в 15 Н. Тело начинает движение из точки $x_0 = 0$ с начальной скоростью $v_0 = -10$ м/с. Найдите амплитуду, период и частоту колебаний.
4. Тело массой 250 г закреплено на пружине, которая удлиняется на 25 см под действием силы в 9 Н. В момент времени $t = 0$ тело оттянули на 1 м вправо (растянув пружину) и толкнули влево с начальной скоростью 5 м/с.
 - а) Найдите смещение тела $x(t)$ в форме $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
 - б) амплитуду и период колебаний тела.
5. Плавающий буй представляет собой однородный цилиндр радиуса r высотой h с плотностью $\rho \leq 0.5$ (напомним, что плотность воды равна 1 г/см³). Предположим, что буй плавает так, что ось цилиндра вертикальна. Вначале буй подвешен над водой так, что его нижнее основание касается поверхности воды. В момент $t = 0$ его отпускают. На него действуют две силы: направленная вниз сила тяготения, равная его весу $mg = \rho\pi r^2 hg$, и направленная вверх сила Архимеда, равная весу $\pi r^2 xg$ вытесненной им воды, где $x = x(t)$ – глубина, на которую погрузилось нижнее основание буя в момент времени t (рис. 28). Покажите, что буй будет совершать простые гармонические колебания около своего положения равновесия $x_e = \rho h$ с периодом $p = 2\pi(\rho h/g)^{1/2}$. Вычислите p и амплитуду колебаний, если $\rho = 0.5$ г/см³, $h = 200$ см, а $g = 980$ см/с².
6. Цилиндрический буй весом 45.5 кг плавает в воде так, что его ось вертикальна. Если на него немного надавить, а затем отпустить, он будет совершать четыре колебания каждые 10 секунд. Пренебрегая сопротивлением среды, найдите радиус буя.

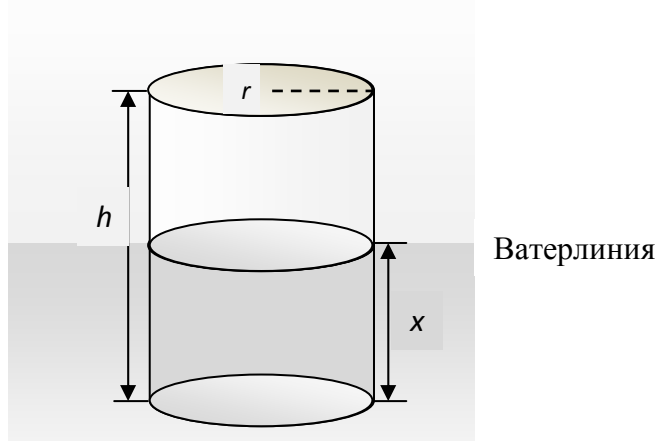


Рис. 13.5. Буй из задачи 6.

7. Предположим, что Земля имеет форму шара, радиус которого равен $R = 63730$ (км), а ее масса равна M . Предположим также, что ее плотность одинакова по всему объему. Для частицы массой m , находящейся внутри Земли на расстоянии r от центра, сила притяжения частицы к центру Земли равна $F_r = -GM_r m/r^2$, где M_r обозначает массу той части Земли, которая заключена внутри шара радиуса r .

а) Покажите, что $F_r = -GMmr/R^3$.

б) Предположим, что прямо через центр Земли просверлено небольшое отверстие, соединяющее диаметрально противоположные точки ее поверхности. Частицу массой m в момент времени $t=0$ бросили в это отверстие с нулевой начальной скоростью. Обозначим через $r(t)$ расстояние от центра Земли до частицы в момент времени t (рис. 13.6). Учитывая второй закон Ньютона и результат полученный в пункте (а), покажите, что $r''(t) = -k^2 r(t)$, где $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

с) Пусть $g = 9.81$ м/с². Учитывая результат пункта (б), покажите, что частица будет совершать простые гармонические колебания от одного конца отверстия к другому с периодом около 84 минут.

д) Найдите (или выведите) период вращения спутника вокруг Земли, предполагая, что он скользит по поверхности. Сравните его с результатом пункта (с). Как вы объясните совпадение? Является ли это совпадением?

е) С какой скоростью (в км/час) частица пролетает мимо центра Земли?

ф) Найдите (или выведите) скорость полета спутника вокруг Земли, предполагая, что он скользит по поверхности. Сравните с результатом пункта (е). Как вы объясните совпадение? Действительно ли это совпадение?

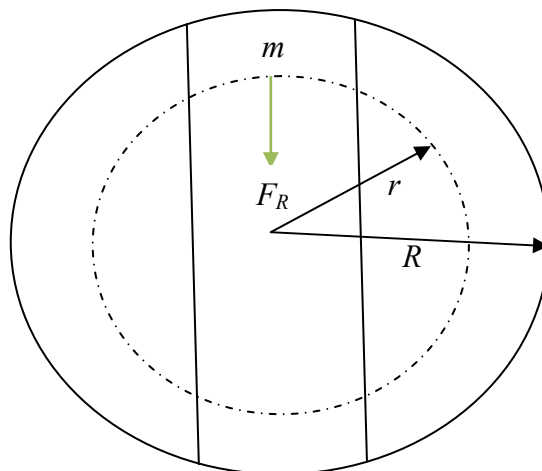


Рис. 13.6. Частица массой m , падающая в отверстие, проходящее через центр земли (задача 7)

8. Пусть система состоит из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором. Пусть параметры системы следующие: Пусть

параметры системы следующие: $m = 25$, $c = 10$ и $k = 2$. Предположим, что тело приведено в движение с начальными условиями $x(0) = 0$ и $x'(0) = 5$.

- а) Найдите смещение $x(t)$ и постройте график этой функции.
- б) Найдите, насколько тело отклонится вправо перед тем, как начнет возвращаться в положение равновесия.

14 Вынужденные колебания и резонанс

Ранее нами было получено дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (14.1)$$

Это уравнение можно рассматривать в качестве закона одномерного движения материальной точки массой m , закрепленной на пружине (жесткости k) и соединенной с амортизатором (с коэффициентом демпфирования c), на которое также действует внешняя сила $F(t)$. Многие механизмы с вращающимися частями обычно содержат системы, состоящие из тела, закрепленного на пружине с амортизатором (или эквивалентные им), внешняя сила в которых является гармонической:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \text{ или } F(t) = F_0 \sin(\omega t), \quad (14.2)$$

где постоянная F_0 – амплитуда периодической силы, а ω – ее круговая частота.

Чтобы понять, как возникает гармоническая сила в механизме с вращающимися частями, рассмотрим тележку с вращающимся вертикальным маховиком (рис. 14.1).

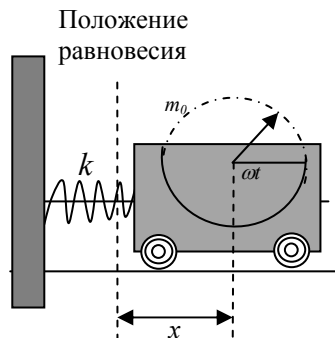


Рис. 14.1. Система, содержащая тележку и маховик

Масса тележки без маховика (массой m_0) равна $m - m_0$. Центр масс маховика расположен на расстоянии a от его геометрического центра. Угловая скорость вращения маховика равна ω (радиан в секунду). Тележка прикреплена к пружине (жесткости k) как показано на рисунке. Предположим, что центр масс тележки без маховика расположен прямо под центром маховика. Обозначим через $x(t)$ смещение тележки от ее положения равновесия (в котором пружина не растянута). Из рис. 14.1 видно, что смещение \bar{x} центра масс тележки вместе с маховиком:

$$\bar{x} = \frac{(m - m_0)x + m_0(x + a \cos \omega t)}{m} = x + \frac{am_0}{m} \cos \omega t.$$

Пренебрегая силами сопротивления, второй закон Ньютона можно записать в виде $m\ddot{\bar{x}} = -kx$, так как сила действия пружины равна $-kx$. Подставим выражение для \bar{x} в последнее уравнение. Тогда получим:

$$mx'' - m_0 a \omega^2 \cos \omega t = -kx,$$

т.е.

$$mx'' + kx = m_0 a \omega^2 \cos \omega t. \quad (14.3)$$

Поэтому тележка с вращающимся маховиком ведет себя как закрепленное на пружине тело, которое движется под действием внешней простой гармонической силы, амплитуда которой равна $F_0 = m_0 a \omega^2$. Такая система является моделью стиральной машины с загрузкой спереди, если центр масс одежды смещен относительно геометрического центра барабана. Поэтому исследование решения уравнения (14.1) с внешними силами вида (14.2) имеет большое практическое значение.

14.1 Незатухающие вынужденные колебания

Для изучения незатухающих колебаний под действием внешней силы $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ положим в уравнении (14.1) $c = 0$. Рассмотрим полученное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (14.4)$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция:

$$x_c = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Здесь $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ обозначает (круговую, или циклическую) собственную частоту колебаний системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине.

Предположим сначала, что внешняя и собственная частоты не равны: $\omega \neq \omega_0$. Чтобы найти частное решение, подставим $x_p = A \cos \omega t$ в уравнение (14.4). (Мы не включили слагаемое с синусом в x_p , так как в левую часть уравнения не входит x' .) В результате получим:

$$-m\omega^2 A \cos \omega t + kA \cos \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

откуда

$$A = F_0 / (k - m\omega^2) = F_0 / m / (\omega_0^2 - \omega^2), \quad (14.5)$$

и поэтому

$$x_p(t) = \cos \omega t \cdot F_0 / m / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (14.6)$$

Следовательно, общее решение $x = x_c + x_p$ имеет вид:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \cos \omega t \cdot F_0 / m / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (14.7)$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$.

Уравнение (14.7) можно переписать в виде:

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha) + \cos \omega t \cdot F_0 / m / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (14.8)$$

Поэтому результирующее движение является суперпозицией двух колебаний: одного с собственной частотой ω_0 , а другого – с частотой ω внешней силы.

Пример 14.1. Предположим, что $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 80$ и $\omega = 5$. Тогда дифференциальное уравнение (14.4) примет вид:

$$x'' + 9x = 80 \cdot \cos(5t).$$

Решение. В данном случае собственная частота $\omega_0 = 3$ и частота внешней силы $\omega = 5$ не совпадают, как и в случае, рассмотренном выше. Сначала подставим $x_p = A \cos 5t$ в дифференциальное уравнение. Получим $-25A + 9A = 80$, откуда $A = -5$. Следовательно, частное решение:

$$x_p = -5 \cos 5t.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $x_c = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$, поэтому общее решение данного неоднородного уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - 5 \cos 5t,$$

его производная

$$x(t) = -3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t + 25 \sin 5t.$$

Из начальных условий $x(0) = 0$ и $x'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 5$ и $c_2 = 0$, откуда требуемое частное решение:

$$x(t) = 5 \cos 3t - 5 \cos 5t.$$

Можно все решить при помощи MATLAB

%Незатухающие вынужденные колебания

clc

clear

y=dsolve('D2x+9*x=80*cos(5*t)','x(0)=0, Dx(0)=0');

y=simple(y)

ezplot(y);

grid on

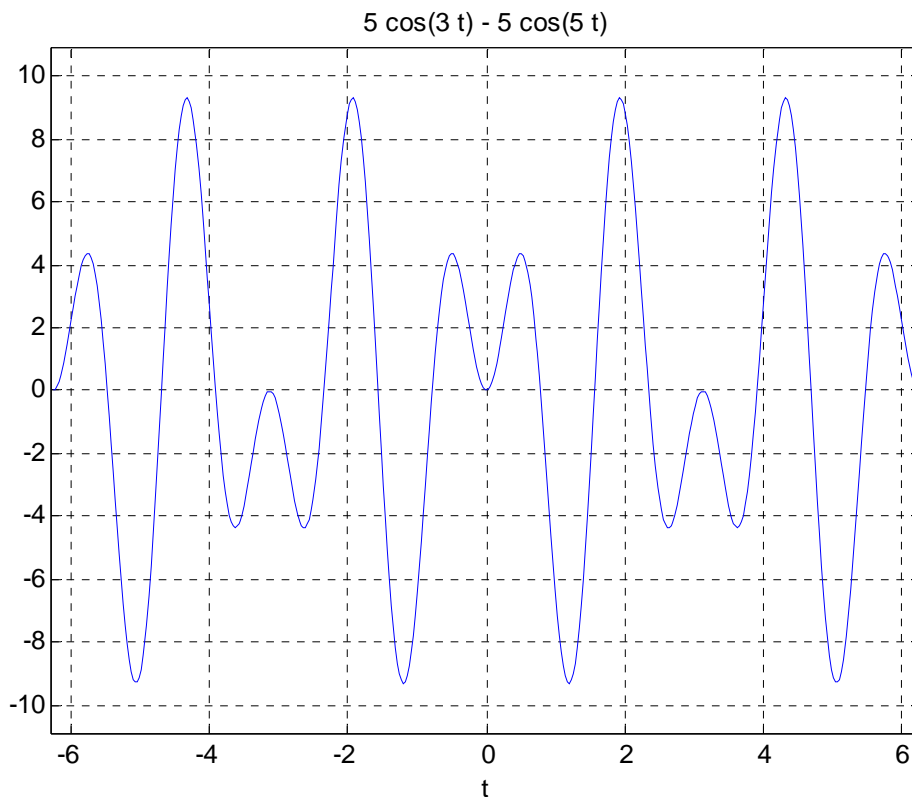


Рис. 14.2. График $x(t) = 5 \cos 3t - 5 \cos 5t$ из примера 14.1

Как показано на рис. 14.2, период $x(t)$ равен наименьшему общему кратному 2π периодов $2\pi/3$ и $2\pi/5$ двух слагаемых с косинусами.

14.2 Биения

Если мы потребуем, чтобы решение (14.7) удовлетворяло начальным условиям $x(0)=\dot{x}(0)=0$, то получим:

$$c_1 = F_0/(m(\omega_0^2 - \omega^2)) \text{ и } c_2 = 0.$$

Поэтому частным решением является функция:

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (14.9)$$

Используя тригонометрическое тождество $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ при $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ и $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, уравнение (14.9) можно переписать в виде:

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}\right). \quad (14.10)$$

Предположим теперь, что $\omega_0 \approx \omega$, поэтому $\omega_0 + \omega$ велико по сравнению с $\omega_0 - \omega$. Тогда $\sin((\omega_0 + \omega)t/2)$ будет быстро изменяющейся функцией, тогда как $\sin((\omega_0 - \omega)t/2)$ будет медленно изменяющейся функцией. Значит, в этом случае уравнение (14.10) можно рассматривать как частые колебания с круговой (циклической) частотой $(\omega_0 + \omega)/2$,

$$x(t) = A(t) \sin((\omega_0 + \omega)t/2),$$

но с медленно изменяющейся амплитудой:

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right).$$

Пример 14.2. При $m = 0.1$, $F_0 = 50$, $\omega_0 = 55$ и $\omega = 45$ из уравнения (14.10) получим:

$$x(t) = \sin(5t) \cdot \sin(50t).$$

На рис. 14.3 изображены соответствующие колебания с частотой $(\omega_0 + \omega)/2 = 50$, которые "модулируются" амплитудной функцией $A(t) = \sin 5t$ с частотой $(\omega_0 - \omega)/2 = 5$.

Частые колебания со сравнительно медленным периодическим изменением амплитуды демонстрируют явление биения. Например, если два недостаточно точно отрегулированных духовых музыкальных инструмента (расстроенных одни относительно другого) одновременно играют одну и ту же ноту "до", один с частотой $\omega_0/(2\pi) = 258$ Гц, а другой – с частотой $\omega/(2\pi) = 254$ Гц, то будут слышны биения (т.е. изменение амплитуды звука) с частотой:

$$\frac{(\omega_0 - \omega)/2}{2\pi} = \frac{258 - 254}{2} = 2 \text{ (Гц)}.$$

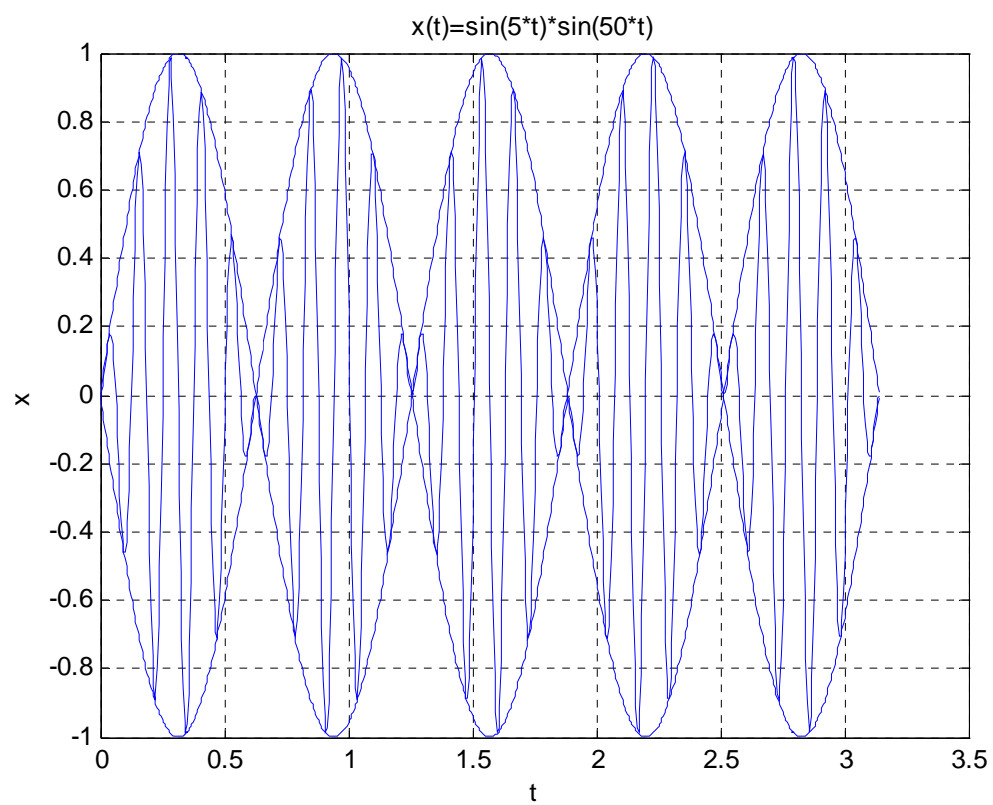


Рис. 14.3. Явление биения

14.3 Резонанс

Из уравнения (14.6) видно, что если собственная частота ω_0 приблизительно равна внешней частоте ω , то амплитуда A решения x_p велика. Иногда полезно записать уравнение (14.5) в виде:

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0 / k}{1 - (\omega / \omega_0)^2} = \pm \frac{pF_0}{k}. \quad (14.11)$$

Здесь F_0/k называется статическим смещением пружины жесткости k под действием постоянной силы F_0 , а p – коэффициентом усиления. По определению он равен:

$$p = \frac{1}{1 - (\omega / \omega_0)^2} \quad (14.12)$$

Очевидно, что $p \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_0$. Это явление резонанса – неограниченный рост (при $\omega \rightarrow \omega_0$) амплитуды колебаний системы (при отсутствии сил сопротивления) с собственной частотой (ω_0) под действием внешней силы с частотой $\omega \approx \omega_0$.

Мы предполагали, что $\omega \neq \omega_0$. Какой же катастрофы следует ожидать, если ω и ω_0 точно совпадают? Тогда уравнение (14.4), после деления всех слагаемых на m примет вид:

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \quad (14.13)$$

Поскольку $\cos(\omega_0 t)$ является слагаемым общего решения соответствующего однородного уравнения, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов необходимо искать частное решение в виде:

$$x_p(t) = t(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)).$$

Подставим это выражение в уравнение (14.13) и получим, что $A = 0$ и $B = F_0/(2m\omega_0)$. Таким образом, частным решением является функция:

$$x_p(t) = F_0 t \sin(\omega_0 t) / (2m\omega_0). \quad (14.14)$$

Из графика $x_p(t)$, изображенного на рис. 14.4, где принято $m=1$, $F_0=100$ и $\omega_0=50$, хорошо видно, как (теоретически) неограниченно должна возрастать амплитуда колебаний в случае чистого резонанса, $\omega=\omega_0$. Можно рассматривать это явление как усиление собственных колебаний системы под действием внешних колебаний той же частоты.

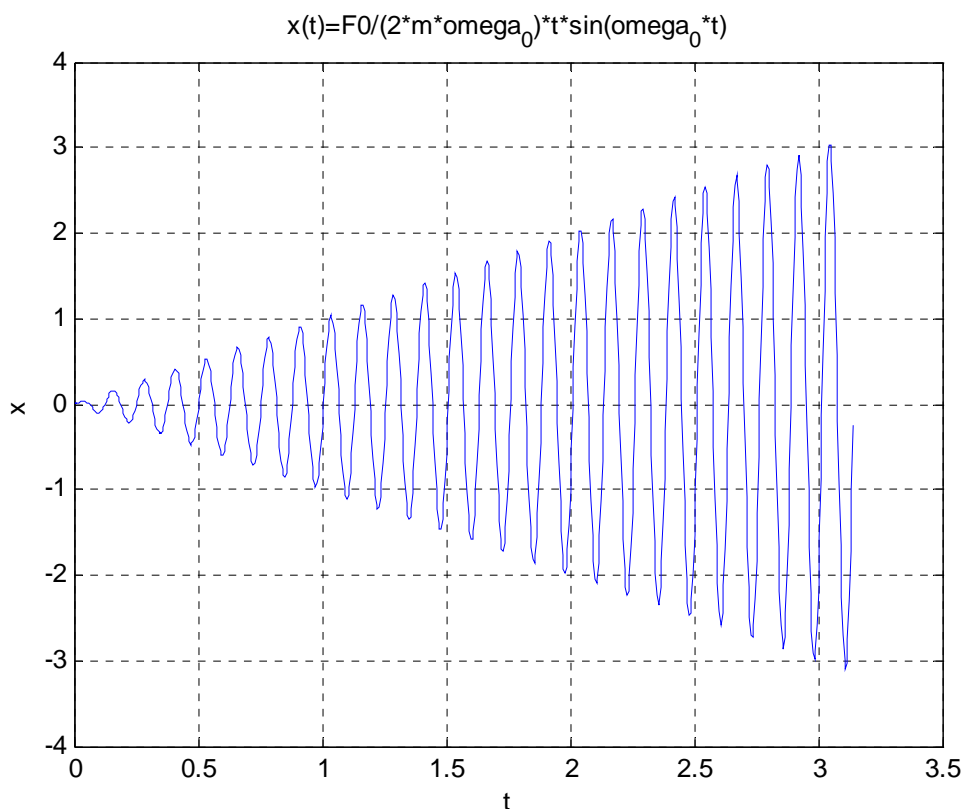


Рис. 14.4. Явление резонанса

Текст на MATLAB

```
clc
clear
F0=100;
omega_0=50;
m=1;
t=0:0.005:pi;
x=F0/(2*m*omega_0)*t.*sin(omega_0*t);
plot(t,x);
title('x(t)=F0/(2*m*omega_0)*t*sin(omega_0*t)');
xlabel('t');
ylabel('x');
grid on
```

Пример 14.3. Предположим, что в системе, состоящей из тележки и маховика (рис. 14.1), $m = 5$ кг и что $k = 500$ Н/м. Тогда собственная частота колебаний $\omega_0 = (k/m)^{1/2} = 10$ рад/с; т. е. $10/(2\pi) \approx 1.59$ Гц. Поэтому следует ожидать колебаний очень большой амплитуды, если маховик вращается со скоростью приблизительно $1.59 \times 60 \approx 95$ оборотов в минуту.

На практике механическая система с очень малым затуханием под действием резонансных колебаний может сломаться. Впечатляющим

примером может служить марш в ногу колонны солдат по мосту. Любая столь сложная конструкция, как мост, имеет много собственных частот колебаний. Если частота шага приблизительно совпадает с одной из собственных частот моста, то, как и в примере с телом, подвешенным на пружине, возникнет резонанс. И на самом деле амплитуда резонансных колебаний может достичь значений, достаточных для разрушения моста. Такие случаи действительно случались: например, в 1831 году в Англии близ Манчестера обвалился мост Broughton Bridge. По этой причине сейчас во многих уставах при движении по мосту предусмотрена команда "сбить ногу". Вполне возможно, что именно резонанс был причиной катастрофы в Канзас-Сити в 1981 году, когда балкон отеля Skywalk ("Небесная прогулка") обрушился вместе с танцорами. Разрушение зданий при землетрясении иногда происходит из-за резонансных колебаний, возникших благодаря колебаниям земли с одной из собственных частот строения. Именно это случилось с многими зданиями во время землетрясения в Мехико 19 сентября 1985 года. Известен случай крушения самолета, связанный с резонансными колебаниями крыльев, вызванных колебаниями двигателей. Сообщалось, что во время одного из первых коммерческих реактивных рейсов собственная частота вертикальных колебаний самолета, вызванных турбулентностью, практически совпала с частотой колебаний системы, подобной системам, состоящим из тела заданной массы, закрепленного на пружине. Оказалось, что такая система состояла из головы пилота (тело заданной массы) и его позвоночника (пружина). Из-за возникшего резонанса у пилота возникли проблемы с чтением приборов. Большие современные коммерческие реактивные самолеты имеют другие собственные частоты, поэтому таких проблем с резонансом больше не возникает.

15 Электрические цепи

В этом разделе рассматриваются RLC – цепи, являющиеся важной составной частью более сложных электрических цепей и сетей [10]. В состав таких цепей, как показано на рис. 15.1, входят следующие элементы:

- резистор (называемый часто также сопротивлением), сопротивление которого равно R ом;
- катушка (называемая часто также индуктивностью), индуктивность которой равна L генри;
- конденсатор (называемый часто также емкостью), емкость которого равна C фарад.

Эти элементы подсоединены к источнику электродвижущей силы (например, к батарее или к генератору), который в момент времени t в цепь подает напряжение в $E(t)$ (вольт). Пусть теперь цепь замкнута, т. е. переключатель на рис. 15.1 включен. Обозначим силу тока в сети в момент времени t через $I(t)$ (ампер), а заряд конденсатора – через $Q(t)$ (кулон). Тогда функции Q и I удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t). \quad (15.1)$$

Мы в таких случаях всегда будем пользоваться системой СИ, в которой время измеряется в секундах.

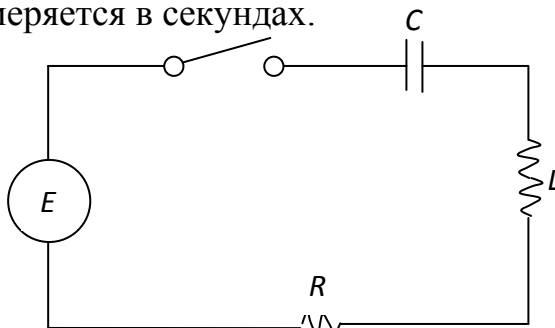


Рис. 15.1. Электрическая цепь, состоящая из резистора, катушки и конденсатора

Падение напряжения на указанных элементах происходит по известным законам для электрических цепей и приведено в таблице 15.1. Для исследования поведения цепи, представленной на рис. 15.1, будем использовать эту таблицу и второй закон Кирхгофа:

(Алгебраическая) сумма падений напряжений на элементах контура цепи равна напряжению, приложенному к данной цепи.

Таблица 15.1

Элемент цепи	Падение напряжения на элементе
Катушка	$L \frac{dI}{dt}$
Резистор	RI
Конденсатор	$\frac{1}{C}Q$

Как следствие, сила тока и заряд в простой цепи, состоящей из резистора, катушки и конденсатора (рис. 15.1), удовлетворяют основному уравнению цепи:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \quad (15.2)$$

Подставив (15.1) в уравнение (15.2), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (15.3)$$

относительно заряда $Q(t)$ при известном напряжении $E(t)$.

В большинстве практических задач интерес представляет сила тока I , а не заряд Q . Поэтому продифференцируем обе части (15.3), подставим I вместо Q' и получим:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t). \quad (15.4)$$

15.1 Соответствия механических и электрических систем

Поразительно, что уравнения (15.3) и (15.4) имеют точно ту же форму, что и уравнение:

$$mx'' + cx' + kx = F(t), \quad (15.5)$$

представляющее собой уравнение движения системы (состоящей из тела, закрепленного на пружине с амортизатором), на которую действует внешняя сила $F(t)$.

Таким образом, между механическими и электрическими системами существует очень важная аналогия. В таблице 15.2 приведено соответствие параметров механических и электрических систем.

Таблица 15.2

Соответствие параметров механических и электрических систем

Механическая система	Электрическая система
Масса m	Индуктивность L
Коэффициент затухания c	Сопротивление R
Жесткость пружины k	Величина $1/C$, обратная емкости
Смещение x	Заряд Q (в (15.3)) (или сила тока I в (15.4))
Сила F	Электродвижущая сила E (или ее производная E')

Как следствие, большинство результатов полученных для механических систем, применимы и к электрическим цепям. То, что одно и то же дифференциальное уравнение служит математической моделью для таких разных физических систем, впечатляюще иллюстрирует важную объединяющую роль математики в исследовании природных явлений. Точнее, соответствие величин, указанное в таблице 15.2, можно использовать для построения электрической модели любой заданной механической системы, причем для такого построения достаточно использовать доступные электрические элементы. Поведение механической системы можно предсказать с помощью точных, но достаточно простых измерений параметров электрической модели. Это особенно полезно, если создание механической системы дорого или если измерение ее параметров (например, скоростей или смещений) связано со сложностью, неточностью либо просто опасно. Эта идея лежит в основе аналоговых компьютеров – электрических моделей механических систем. С помощью аналоговых компьютеров были смоделированы первые ядерные реакторы для промышленных электростанций и силовых установок подводных лодок до их создания.

Обычно напряжение переменного тока равно $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. В этом случае уравнение (15.4) примет вид:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t. \quad (15.6)$$

Так же как и при рассмотрении механической системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине, с амортизатором, на которую действует внешняя периодическая сила, представленная простой гармоникой, решение уравнения (15.6) можно представить в виде суммы переходного тока (тока при переходном процессе, или тока неустановившегося режима) I_{tr} , стремящегося к нулю при $t \rightarrow \infty$ (при условии, что все коэффициенты в уравнении (15.6) положительны, так что корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части), и установившегося периодического тока I_{sp} . Иными словами:

$$I = I_{tr} + I_{sp}. \quad (15.7)$$

Напомним, что установившееся периодическое решение уравнения (15.5) при $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ равно:

$$x_{sp}(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

где $\alpha = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Заменяв в этой формуле m на L , c на R , k на $1/C$ и F_0 на ωE_0 , получим формулу для установившегося периодического тока:

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (15.8)$$

в которой фазовый угол:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (15.9)$$

15.2 Импеданс и реактивное сопротивление

Выражение в знаменателе в формуле (15.8):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (\text{ом}) \quad (15.10)$$

называют полным сопротивлением, кажущимся сопротивлением, волновым сопротивлением или импедансом цепи, а иногда – просто сопротивлением. Тогда установившийся периодический ток равен:

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \alpha), \quad (15.11)$$

а его амплитуда:

$$I_0 = E_0/Z, \quad (15.12)$$

что напоминает закон Ома $I = E/R$.

В уравнении (15.11) установившийся периодический ток представляет собой косинусоиду, в то время как напряжение на входе $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ – синусоиду. Чтобы представить I_{sp} в виде синусоиды, введем реактивное сопротивление, или реактивность:

$$S = \omega L - 1/(\omega C). \quad (15.13)$$

Тогда $Z = (R^2 + S^2)^{1/2}$. Из уравнения (15.9) видно, что α такое, как изображено на рис 15.2, причем угол задержки $\delta = \alpha - \pi/2$. Теперь из уравнения (15.11) получаем:

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z} (\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t) = \frac{E_0}{Z} \left(-\frac{S}{Z} \cos \omega t + \frac{R}{Z} \sin \omega t \right) = \frac{E_0}{Z} (\cos \delta \sin \omega t + \sin \delta \cos \omega t).$$

Следовательно,

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z} \sin(\omega t - \delta), \quad (15.14)$$

$$\text{где } \delta = \arctg \frac{S}{R} = \arctg \frac{LC\omega^2 - 1}{\omega RC}. \quad (15.15)$$

Отсюда получим временную задержку (запаздывание во времени) δ/ω (в секундах) установившегося периодического тока I_{sp} от напряжения на входе.

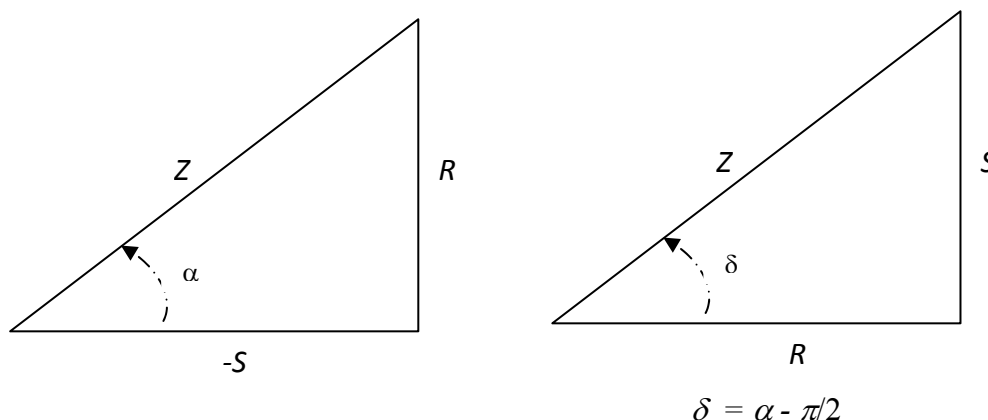


Рис. 15.2. Реактивное сопротивление и угол задержки

15.3 Расчет силы тока

В задачах, где требуется найти кратковременный ток, обычно заданы начальные значения $I(0)$ и $Q(0)$. Поэтому сначала необходимо найти $I'(0)$. Для этого подставим $t=0$ в уравнение (15.2). Получим уравнение:

$$LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0), \quad (15.16)$$

которое позволяет выразить $I'(0)$ через начальные значения тока, заряда и напряжения.

Пример 15.1. Рассмотрим RLC – цепь (т. е. цепь, состоящую из резистора, катушки и конденсатора), у которой $R = 50$ ом (Ω), $L = 0.1$ генри (Гн) и $C = 5 \times 10^{-4}$ фарад (Ф). В момент времени $t = 0$, когда значения $I(0)$ и $Q(0)$ равны нулю, к цепи подключили генератор переменного тока напряжением 110 В и частотой 60 Гц. Найдите силу тока в цепи и отставание во времени установившегося периодического тока от напряжения.

Решение

Если частота равна 60 Гц, то $\omega = (2\pi)(60)$ рад/с, т. е. приблизительно 377 рад/с. Поэтому $E(t) = 110\sin 377t$ (будем считать это равенство точным, а не приближенным). Дифференциальное уравнение (15.6) в этом случае примет вид:

$$(0.1)I'' + 50I' + 2000I = (377)(110)\cos 377t.$$

Подставив в уравнение (15.10) данные значения R , L , C и $\omega = 377$, получим импеданс: $Z = 59.58 \Omega$. Поэтому амплитуда установившегося периодического решения:

$$I_0 = 110 (\text{вольт}) / 59.58 (\text{Ом}) = 1.846 \text{ ампер (А)}.$$

Подставив эти же данные в уравнение (15.15), получим синус фазового угла, а затем найдем и сам угол:

$$\delta = \arctg(0.648) = 0.575.$$

Поэтому отставание по времени тока от напряжения равно:

$$\delta/\omega = 0.575/377 = 0.0015 \text{ с},$$

а установившийся периодический ток равен:

$$I_{sp} = (1.846)\sin(377t - 0.575).$$

Характеристическое уравнение $(0.1)r^2 + 50r + 2000 = 0$ имеет два корня $r_1 \approx -44$ и $r_2 \approx -456$. Используя эти приближенные значения, запишем общее решение в виде:

$$I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t} + (1.846)\sin(377t - 0.575),$$

его производная

$$I'(t) = -44c_1 e^{-44t} - 456c_2 e^{-456t} + 696\cos(377t - 0.575).$$

Поскольку $I(0) = Q(0) = 0$, из уравнения (15.16) получим, что и $I'(0) = 0$. Подставив эти начальные данные, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 - 1.004 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 + 584 = 0. \end{aligned}$$

она имеет решение $c_1 = -0.307$, $c_2 = 1.311$. Поэтому переходную составляющую решения можно записать в виде:

$$I_{tr}(t) = (-0.307)e^{-44t} + (1.311)e^{-456t}.$$

Заметим, что после одной пятой секунды $|I_{tr}(0.2)| < 0.000047$ А (что сравнимо по величине с током, протекающим в одном нервном волокне человека). Такое малое значение тока показывает, что переходная составляющая решения действительно исчезает очень быстро.

Пример 15.2. Предположим, что RLC – цепь из примера 15.1 с теми же начальными данными $I(0) = Q(0) = 0$ в моменте $t = 0$ подключается к батарее с постоянным напряжением 110 В. Найдём ток в цепи.

Решение

Поскольку теперь $E(t) \equiv 110$, из уравнения (15.16) получим:

$$I'(0) = E(0)/L = 110/0.1 = 1100 \text{ (А/с)},$$

так что дифференциальное уравнение принимает вид:

$$(0.1)I'' + 50I' + 2000I = E(t) = 0.$$

Его общее решение совпадает с общим решением однородного уравнения, найденным в примере 15.1:

$$I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t}.$$

Решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 = 1100, \end{aligned}$$

Получим $c_1 = -c_2 = 2.670$. Отсюда находим:

$$I(t) = (2.670)(e^{-44t} - e^{-456t}).$$

Заметим, что $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ несмотря на то, что напряжение постоянно.

15.4 Электрический резонанс

Снова вернемся к дифференциальному уравнению (15.6), соответствующему синусоидальному напряжению на входе $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Мы знаем, что амплитуда установившегося периодического тока равна:

$$I_0(t) = \frac{E_0}{Z} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (15.17)$$

График I_0 как функции от ω , при типичных значениях R , L , C и E_0 изображен на рис. 15.3. Функция I_0 достигает максимального значения при $\omega_m = 1/\sqrt{LC}$, а затем стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Критическая частота ω_m является резонансной частотой цепи.

Ранее была подчеркнута важность избежания резонанса в большинстве механических систем (примером механической системы, в которой резонанс приветствуется, является виолончель).

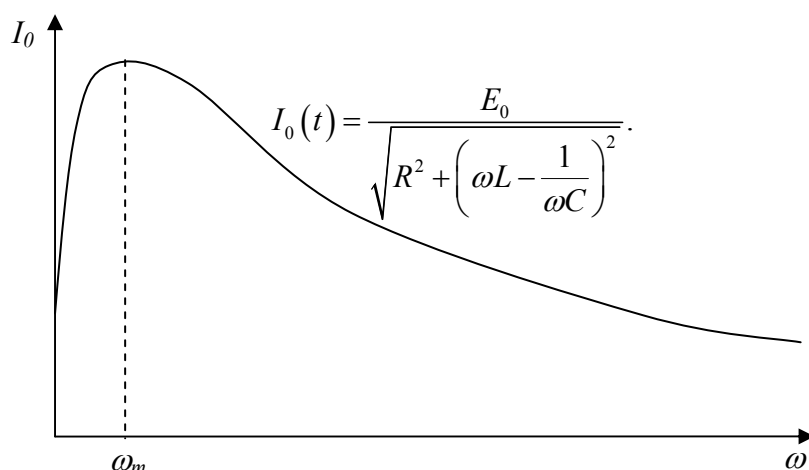


Рис. 15.3. Зависимость I_0 от частоты.

Многие же электрические приборы, в отличие от механических, правильно работают только при наличии резонанса. Ярким примером служит радио. Сильно упрощенной моделью цепи настройки радио является рассмотренная нами RLC – цепь (т. е. цепь, состоящая из резистора, катушки и конденсатора). Ее индуктивность L и сопротивление R постоянны, но емкость C изменяется, когда вы выбираете на шкале настройки нужную частоту.

Предположим, что мы хотим поймать радиостанцию, которая вещает на частоте ω и таким образом создает напряжение $E(t) = E_0 \sin \omega t$ на входе контура настройки радио. Полученный установившийся периодический ток I_{sp} в контуре настройки поступает на усилитель, а затем – на динамик. Громкость звука, который мы слышим, приблизительно пропорциональна амплитуде I_0 силы тока I_{sp} . Чтобы услышать выбранную

станцию (с частотой вещания ω) громче всего и одновременно "отстроиться" от станций, которые вещают на других частотах, нужно выбрать C так, чтобы максимизировать I_0 . Однако, поскольку в уравнении (15.17) мы считаем ω постоянной, изменять можно только один параметр C . Сразу же без вычислений видно, что I_0 максимально при:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Иными словами, максимум достигается при:

$$C = 1/(\omega^2 L).$$

Поэтому при настройке, плавно вращая ручку, мы устанавливаем емкость, приблизительно равную этому значению.

Таким образом работали старые ламповые радиоприемники. Современные АМ-приемники имеют более сложную конструкцию. В них используется пара конденсаторов изменяемой емкости. Первый позволяет настроить частоту так, как уже было описано. Второй регулирует частоту сигнала, который генерирует сам радиоприемник, причем поддерживает ее на уровне, который приблизительно на 455 кГц выше желаемой. Результирующее биение с частотой 455 кГц (эта частота называется промежуточной частотой) затем усиливается в нескольких каскадах. Преимуществом такого метода является то, что несколько RLC -цепей в каскадах усилителя легко сконструировать так, чтобы они резонировали при частоте 455 кГц, подавляя другие частоты. В результате значительно повышается селективность (избирательность, избирательная способность) радиоприемника и достигается больший коэффициент усиления принимаемого сигнала.

15.5 Задачи

В задачах 1-6 рассматривается RL -цепь, в которой последовательно включен резистор с сопротивлением R Ом, катушка с индуктивностью в L генри (рис. 15.4) и источник электродвижущей силы (ЭДС), но конденсатор отсутствует. В этом случае уравнение (15.2) сводится к линейному уравнению первого порядка:

$$LI' + RI = E(t).$$

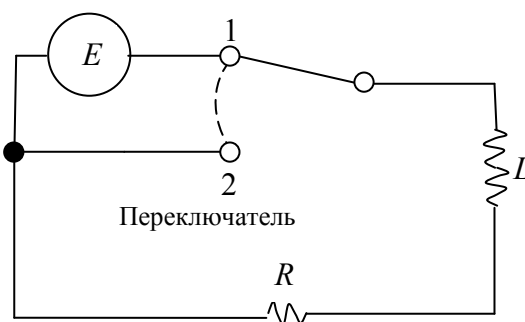


Рис. 15.4. Цепь в задачах 1-6

1. Предположим, что в цепи на рис. 15.4 $L = 5$ Гн, $R = 25$ Ом, а источник ЭДС E – батарея с постоянным напряжением 100 В. Предположим также, что переключатель находится в положении 1 уже долгое время, т. е. в цепи течет установившийся ток 4 А. В момент времени $t = 0$ переключатель устанавливают в положение 2, так что $I(0) = 4$ и $E = 0$ для $t \geq 0$. Найдите $I(t)$.

2. Рассмотрим ту же цепь, что и в задаче 1. Предположим, что вначале переключатель находится в положении 2, но в момент времени $t = 0$ его переключают в положение 1 так, что $I(0) = 0$ и $E = 100$ для $t \geq 0$. Найдите $I(t)$ и покажите, что $I(t) \rightarrow 4$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Предположим, что батарею в задаче 2 заменили генератором переменного тока с напряжением $E(t) = 100\cos 60t$ вольт. Считая, что все остальное осталось неизменным, найдите $I(t)$.

4. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 15.4. Пусть переключатель находится в положении 1 и $L = 2$, $R = 40$, $E(t) = 100e^{-10t}$, $I(0) = 0$. Найдите максимальное значение силы тока для $t \geq 0$.

5. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 15.4. Пусть переключатель находится в положении 1 и $L = 2$, $R = 20$, $E(t) = 100e^{-10t}\cos 60t$, $I(0) = 0$. Найдите значение силы тока для $t \geq 0$.

6. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 15.4. Пусть переключатель находится в положении 1 и $L = 1$, $R = 10$, $E(t) = 30\cos 60t + 40\sin 60t$.

а) Подставьте $I_{sp}(t) = A\cos 60t + B\sin 60t$, затем определите значения A и B и, наконец, найдите ток I_{sp} в установившемся режиме цепи.

б) Запишите решение в виде $I_{sp}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$.

В задачах 7-10 рассматривается RC -цепь, изображенная на рис. 15.5. Она состоит из резистора с сопротивлением R Ом, конденсатора емкостью C фарад, переключателя и источника ЭДС, но в ней нет катушки. Подставив $L = 0$ в уравнение (3), получим линейное дифференциальное, уравнение первого порядка:

$$RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

относительно заряда $Q=Q(t)$ на конденсаторе в момент времени t . Заметим, что $I(t)=Q'(t)$

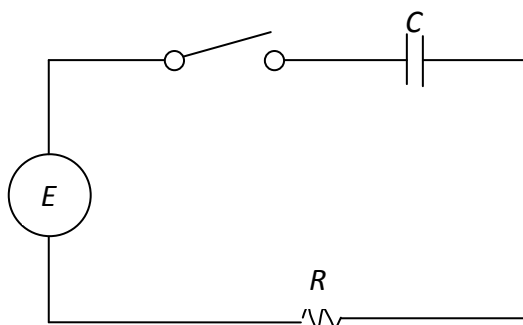


Рис. 15.5. Цепь в задачах 7 - 10

7. а) Найдите заряд $Q(t)$ и силу тока $I(t)$ в данной цепи, если $E(t)=E_0$ (постоянное напряжение, которое обеспечивает батарея) и переключатель замыкает цепь в момент времени $t = 0$, т.е. $Q(0) = 0$.

б) Покажите, что $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = E_0 C$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$.

8. Предположим, что в цепи на рис. 15.5 $R = 10$, $C = 0.02$, $Q(0) = 0$, а $E(t) = 100e^{-5t}$ (вольт),

а) Найдите $Q(t)$ и $I(t)$.

б) Найдите максимальное значение заряда на конденсаторе при $t \geq 0$ и момент времени, когда оно достигается.

9. Предположим, что в цепи на рис. 15.5 $R=200$, $C=2.5 \times 10^{-4}$, $Q(0)=0$, $E(t)=100\cos 120t$.

а) Найдите $Q(t)$ и $I(t)$.

б) Какова амплитуда тока в установившемся режиме?

10. В момент времени $t = 0$ переключатель замыкает RC -цепь, показанную на рис. 15.5, и источник ЭДС, генерирующий напряжение $E(t) = E_0 \cos \omega t$, включается в эту RC -цепь. Пусть $Q(0) = 0$. Подставив $Q_{sp}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ в дифференциальное уравнение, покажите, что ток через конденсатор в установившемся режиме периодических колебаний равен:

$$Q_{sp}(t) = \frac{E_0 C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \beta),$$

где $\beta = \arctg(\omega RC)$.

16 Задачи с граничными условиями

16.1 Провисание (прогиб) однородной балки

Рассмотрим пример применения достаточно простой краевой задачи для объяснения довольно сложного физического явления – формы, которую принимает горизонтальная балка под действием вертикальной силы.

Рассмотрим горизонтальную балку из однородного материала с постоянным сечением, изображенную на рис. 16.1. Если она опирается только на концах, то под действием собственного веса ее продольная ось симметрии изгибается (на рисунке 16.1 она отмечена пунктиром). Наша цель – исследовать форму кривой $y = y(x)$, т. е. кривой прогиба балки. Для этого введем систему координат так, как показано на рис. 16.2. Ось y направлена вниз.

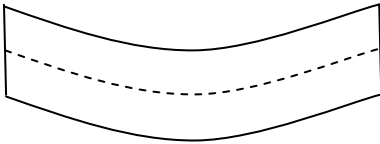


Рис. 16.1. Искривление (деформация) горизонтальной балки

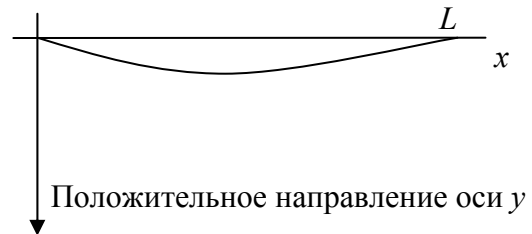


Рис. 16.2. Кривая прогиба

Из теории упругости следует, что при достаточно малых отклонениях балки (настолько малых, что величиной $[y'(x)]^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей), кривая прогиба описывается математической моделью, в основу которой положено дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$EIy^{(4)} = F(x), \quad (16.1)$$

где E – модуль Юнга материала балки;

I – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии проходящей через центр тяжести поперечного сечения;

$F(x)$ – плотность силы, действующей вертикально вниз на балку в точке x .

Что такое плотность силы? В данной задаче это сила, действующая на единицу длины. Таким образом, сила, действующая на очень короткий отрезок балки $[x, x + \Delta x]$, приблизительно равна $F(x)\Delta x$. Размерностью $F(x)$ является единица силы на единицу длины. Мы рассмотрим случай, когда единственной силой, распределенной по балке, будет ее собственный вес, w ньютонов на метр, так что $F(x) \equiv w$. Тогда уравнение (16.1) примет вид:

$$EIy^{(4)} = w, \quad (16.2)$$

где E , I и w – константы

Замечание. Мы не предполагаем наличие каких-либо предварительных знаний по теории упругости или уравнений (16.1) и (16.2). Однако важно уметь анализировать дифференциальные уравнения, получаемые в других прикладных областях. Ведь изучая решения уравнения, мы учимся понимать его смысл. Заметим, что из уравнения (16.2) следует, что четвертая производная пропорциональна плотности веса, т.е. удельной плотности. Коэффициент пропорциональности содержит две постоянные – модуль Юнга E , который зависит только от материала балки, и момент инерции I , который зависит только от формы поперечного сечения балки. Значение модуля Юнга для разных материалов можно найти в справочниках физических величин. $I = \pi a^4/4$ для круглого поперечного сечения радиусом a .

Несмотря на то, что уравнение (16.2) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, решение его сводится к решению уравнений первого порядка, которые решаются интегрированием. Проинтегрировав уравнение (16.2) первый раз, получим, что:

$$EIy^{(3)} = wx + C_1.$$

После второго интегрирования получим:

$$EIy'' = wx^2/2 + C_1x + C_2.$$

Еще одно интегрирование даст:

$$EIy' = wx^3/6 + C_1x^2/2 + C_2x + C_3.$$

И наконец, последнее интегрирование дает:

$$EIy = wx^4/24 + C_1x^3/6 + C_2x^2/2 + C_3x + C_4,$$

где C_1 , C_2 , C_3 и C_4 и – некоторые произвольные постоянные. Таким образом получим решение уравнения (16.2) в виде:

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad (16.3)$$

где A , B , C и D – константы, полученные после четырех интегрирований.

Эти четыре постоянные определяются способом крепления балки на концах, т.е. при $x = 0$ и $x = L$. На рис. 16.3 изображены два способа крепления, причем каждый конец можно закрепить своим способом. Например, на рис. 16.4 изображена консоль – балка прочно закреплена в точке $x = 0$, но не закреплена (вообще нет никакой опоры) на конце $x = L$. В таблице 16.1 показаны граничные, или краевые, условия для трех самых распространенных случаев. Именно эти краевые условия часто используются при решении задач, связанных с креплением балок.

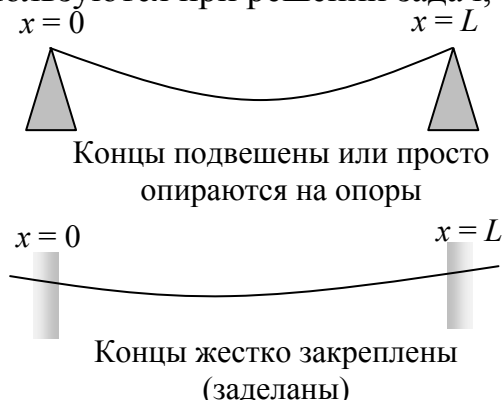


Рис. 16.3. Два способа крепления



Рис. 16.4. Консоль – балка, один конец которой заделан, а второй не закреплён вообще

Таблица 16.1.

Граничные, или краевые, условия для трех самых распространенных случаев

Опора	Краевые условия
Простая опора	$y = y'' = 0$
Заделанный (защемленный) конец	$y = y' = 0$
Свободный конец	$y'' = y^{(3)} = 0$

Например, кривая прогиба консоли на рис. 16.4 задается уравнением (16.3), где коэффициенты A , B , C и D определяются из условий:

$$y(0) = y'(0) = 0 \text{ и } y''(L) = y^{(3)}(L) = 0, \quad (16.4)$$

т. е. в точке $x = 0$ закреплён, а конец в точке $x = L$ – свободен (не закреплён).

Условия (16.4) и дифференциальное уравнение (16.2) составляют краевую задачу.

Пример 16.1. Найдём кривую прогиба однородной горизонтальной балки длиной L и весом w на единицу длины, оба конца которой лежат на простых опорах.

Решение. Запишем краевые условия в нашей задаче:

$$y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0.$$

Вместо того чтобы подставлять их прямо в уравнение (16.3), мы начнём с дифференциального уравнения $EIy^{(4)} = w$ и найдём постоянные, которые будут возникать при (четырёхкратном) интегрировании. В результате первых двух интегрирований получим:

$$EIy^{(3)} = wx + A; \quad EIy'' = wx^2/2 + Ax + B.$$

Поскольку $y''(0) = 0$, то $B = 0$, и тогда из $y''(L) = 0$ следует, что:

$$0 = wL^2/2 + AL.$$

Поэтому $A = -wL/2$ и тогда:

$$EIy'' = x^2/2 - wLx/2.$$

Проинтегрируем ещё два раза. Сначала будем иметь:

$$EIy' = wx^3/6 - wLx^2/4 + C,$$

а после последнего интегрирования получим:

$$EIy(x) = wx^4/24 - wLx^3/12 + Cx + D. \quad (16.5)$$

Теперь из $y(0) = 0$ следует, что $D = 0$. Затем, так как $y(L) = 0$,

$$0 = wL^4/24 - wL^4/12 + CL.$$

Отсюда находим $C = wL^3/24$. Из уравнения (16.5) мы получим уравнение:

$$y(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x),$$

которое определяет форму балки, свободно лежащей на простых опорах.

Из соображений симметрии понятно, что наибольшее отклонение y_{\max} балки достигается посередине, т. е. при $x = L/2$, и оно равно:

$$y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w}{24EI} \left(\frac{1}{16} L^4 - \frac{1}{4} L^4 + \frac{1}{2} L^4 \right).$$

Иными словами,

$$y_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI}. \quad (16.6)$$

Текст на MAPLE

> **restart;**

> **# E - модуль Юнга**

> **# I - момент инерции поперечного сечения балки относительно**

горизонтальной линии проходящей через центр тяжести поперечного сечения

> **# w - вес на единицу длины**

> **f:=E*I*diff(y(x),x\$4)=w;**

$$f := E I \left(\frac{d^4}{dx^4} y(x) \right) = w$$

> **# Задание начальных условий**

> **yx0:=y(0)=0,(D@@2)(y)(0)=0,y(L)=0,(D@@2)(y)(L)=0:**

> **simplify(dsolve({f,yx0},y(x)));**

$$y(x) = \frac{w x (x^3 - 2 L x^2 + L^3)}{24 E I}$$

Пример 16.2. Пусть, например, необходимо вычислить наибольшее отклонение стального стержня, концы которого лежат на простых опорах, если известно, что длина стержня равна 6.1 м, а его сечение представляет собой круг диаметром 0.03 м. В справочнике мы находим, что плотность стали равна $\delta = 7.75$ г/см³, а ее модуль Юнга равен $E = 2 \times 10^{12}$ г/см·с².

Линейная плотность (масса на единицу длины) стержня равна:

$$\rho = \pi a^2 \delta = \pi (1.5)^2 (7.75) \approx 54.75 \text{ г/см.}$$

Поэтому

$$w = \rho g = (54.75 \text{ г/см})(981 \text{ см/с}^2) \approx 53713.4 \text{ г/с}^2.$$

Момент инерции (момент второго порядка) диска радиусом a вокруг диаметра равен $I = \pi a^4 \delta / 4$, так что:

$$I = \pi (1.5)^4 / 4 \approx 3.97 \text{ см}^4.$$

Из равенства (16.6) следует, что:

$$y_{\max} \approx (5)(53713.4)(610)^4 / [(384)(2 \times 10^{12})(3.97)] \approx 12.2 \text{ см.}$$

Это и есть максимальное отклонение стержня, причем оно достигается, как мы уже знаем, посередине. Интересно, что y_{\max} пропорционально L^4 , поэтому, если бы длина стержня была наполовину меньше, то его максимальное отклонение было бы в 16 раз меньше.

Так как $I = \pi a^4 \delta / 4$, из равенства (16.6) следует, что такого же уменьшения отклонения можно достичь, увеличив радиус стержня a вдвое.

16.2 Стержень на растяжке

На рис. 16.5 изображен однородный стержень длиной L . Его концы закреплены на шарнирах. Он выгибается под действием продольной сжимающей силы P , приложенной к одному из концов.

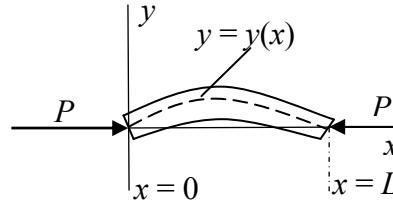


Рис. 16.5. Стержень на растяжке

Мы считаем сжатие стержня настолько малым, что областью определения кривой $y = y(x)$ можно считать отрезок $0 \leq x \leq L$. В теории упругости линейная краевая задача:

$$EIy'' + Py = 0, y(0) = y(L) = 0. \quad (16.7)$$

описывает действительное (нелинейное) поведение стержня. Как и в задаче о прогибе балки, E обозначает модуль Юнга материала, а I – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести поперечного сечения. Если мы напишем:

$$\lambda = P/(EI), \quad (16.8)$$

то задача (16.7) примет вид задачи на собственные значения:

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(L) = 0. \quad (16.9)$$

Напомним, что ее собственные числа $\{\lambda_n\}$ равны:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (16.10)$$

Каждому значению λ_n , соответствует собственная функция $y_n(x) = \sin(n\pi x/L)$.

Чтобы интерпретировать этот результат для выгибающегося стержня, напомним, что в соответствии с (16.8) $P = \lambda EI$. Силы

$$P_n = \lambda_n EI = n^2 \pi^2 EI/L^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.11)$$

являются критическими силами сжатия стержня. Только когда сжимающая сила P равна одному из критических значений силы сжатия, стержень будет "выгибаться", и его форма будет отлична от его прямого (неизогнутого) положения. Наименьшее сжимающее усилие, при котором это происходит, равно

$$P_1 = \pi^2 EI/L^2. \quad (16.12)$$

Эта наименьшая критическая сила называется эйлеровым критическим усилием при продольном изгибе¹ стержня. Это верхняя граница тех сжимающих усилий, которые можно приложить к стержню, не

¹ А также иногда эйлеровой критической силой, или просто критической силой.

опасаясь изогнуть его. (Однако на практике стержень может согнуться при значительно меньшей нагрузке под влиянием факторов, которые не учтены в этой математической модели.)

Пример 16.3. Предположим, нужно вычислить эйлерово критическое усилие при продольном изгибе стального стержня длиной $L = 3.5$ м, если известно, что поперечное сечение стержня представляет собой круг диаметром 0.015 м. В системе СГС (сантиметр-грамм-секунда) мы имеем:

$$E = 2 \times 10^{12} \text{ г/см}\cdot\text{с}^2, \quad I = \pi(1.5)^4/4 \approx 3.97 \text{ см}^4.$$

Подставляя эти значения в равенство (16.12), находим, что эйлерово критическое усилие при продольном изгибе этого стального стержня равно:

$$P_1 \approx 6.4 \times 10^8 \text{ дин.}$$

17 Математические модели на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Ранее мы рассматривали методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с одной неизвестной функцией. Однако во многих приложениях встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие две или больше неизвестных функций, зависящих от одной переменной (обычно от времени). Такие задачи естественно приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно мы будем обозначать неизвестные функции, зависящие от переменной t , через x_1, x_2, x_3, \dots , или x, y, z, \dots . Штрихами будут обозначены производные по t .

Сосредоточим наше внимание на системах, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных функций. Например, систему двух уравнений первого порядка относительно неизвестных функций x и y в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} f(t, x, y, x', y') = 0 \\ g(t, x, y, x', y') = 0 \end{cases}$$

где функции f и g заданы. Решением этой системы на некотором интервале значений t называется пара функций $x(t), y(t)$ от t , в результате подстановки которой в оба эти уравнения эти уравнения превращаются в тождества на этом интервале.

Приведем пример системы уравнений второго порядка. Для этого рассмотрим частицу массой m , которая движется в пространстве под действием силового поля F , зависящего от времени t , координат $(x(t), y(t), z(t))$ частицы и ее скорости $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Записывая второй закон Ньютона $ma = F$ в координатной форме, получим систему:

$$\begin{cases} mx'' = F_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ my'' = F_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz'' = F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций x, y, z , зависящих от независимой переменной t . Три стоящих с правой стороны функции F_1, F_2, F_3 — компоненты векторнозначной функции F .

17.1 Простейшие применения

Примеры 17.1-17.3 иллюстрируют, каким образом системы дифференциальных уравнений возникают в научных задачах.

Пример 17.1. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел и двух пружин, изображенную на рис. 17.1, причем заданная внешняя сила $f(t)$ действует на тело массой m_2 , находящееся справа. Обозначим через $x(t)$ смещение (вправо) тела массы m_1 от его статического положения равновесия (когда систем не движется и находится в положении равновесия и, кроме того, $f(t) = 0$), а через $y(t)$ – смещение тела массой m_2 от его положения равновесия. Таким образом, если x и y равны нулю, пружины не являются ни сжатыми, ни растянутыми.

На рис. 17.1 первая пружина растянута на x единиц, а вторая на $y - x$ единиц. Применив второй закон Ньютона к двум "диаграммам свобода тел", изображенных на рис. 17.2, мы получим систему дифференциальных

уравнений:

$$\begin{cases} mx'' = -k_1x + k_2(y - x) \\ my'' = -k_2(y - x) + f(t) \end{cases} \quad (17.1)$$

с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$ – смещениями тел. Фактические смещения тел должны удовлетворять этой системе уравнений. Например, если $m_1=2$, $m_2=1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 4$, $f(t) = 40\sin 3t$ в соответствующих физических единицах измерения, то система (17.1) сводится к:

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t \end{cases}$$

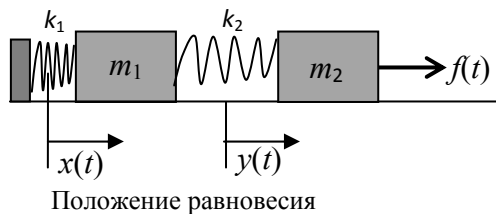


Рис. 17.1 Система тел и пружин из примера 17.1

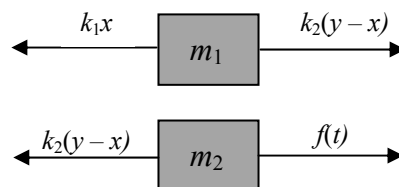


Рис. 17.2. "Диаграмма свободных тел" для системы из примера 17.1.

```
> dsolve({2*diff(x(t),t,t)=-6*x(t)+2*y(t),diff(y(t),t,t)= 2*x(t)-
2*y(t)+40*sin(3*t)}, {x(t),y(t)});
{x(t)=sin(3 t)+_C1 cos(t)+_C2 sin(t)+_C3 cos(2 t)+_C4 sin(2 t),
 y(t)=-6 sin(3 t)+2 _C1 cos(t)+2 _C2 sin(t)-_C3 cos(2 t)-_C4 sin(2 t)}
```

Пример 17.2. Два резервуара с раствором соли соединены так, как показано рис. 17.3. Резервуар 1 содержит $x(t)$ кг соли на 400 литров воды, а резервуар 2 – $y(t)$ кг соли на 800 литров воды. Соляной раствор в каждом из резервуаров тщательно перемешивается, и потому раствор можно считать абсолютно однородным. Раствор соли перекачивается из резервуара в резервуар. Скорости указаны на рис. 17.3. Кроме того, в

резервуар 1 со скоростью 80 литров/мин вливается пресная вода, а соляной раствор вытекает из резервуара 2 со скоростью 80 литров/мин (таким образом, объем раствора в резервуарах остается постоянным). Концентрации соли в резервуарах равны $x/400$ кг на литр и $y/800$ кг на литр соответственно. Вычислив скорости изменения количества соли в резервуарах, мы получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} x' = -120 \cdot \frac{x}{400} + 40 \cdot \frac{y}{800} = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y \\ y' = 120 \cdot \frac{x}{400} - 40 \cdot \frac{y}{800} - 80 \cdot \frac{y}{800} = \frac{3}{10}x - \frac{3}{20}y \end{cases}$$

Иными словами:

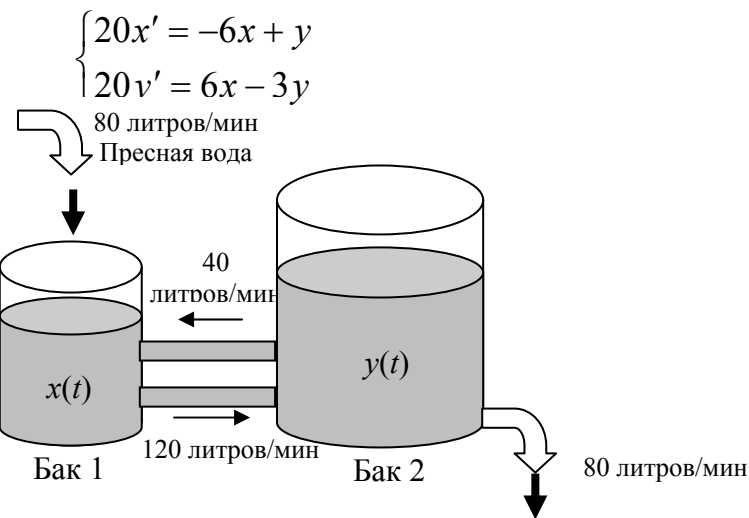


Рис. 17.3. Два резервуара с раствором соли из примера 17.2

Текст на MAPLE

```
> dsolve({20*diff(x(t),t)=-6*x(t)+y(t),20*diff(y(t),t)= 6*x(t)-3*y(t)},
{x(t),y(t)});
```

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} x(t) = & _C1 e^{\left(\left(-9/40 + \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)} + _C2 e^{\left(\left(-9/40 - \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)}, y(t) = \frac{3}{2} _C1 e^{\left(\left(-9/40 + \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)} \\ & + \frac{1}{2} _C1 \sqrt{33} e^{\left(\left(-9/40 + \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)} + \frac{3}{2} _C2 e^{\left(\left(-9/40 - \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)} - \frac{1}{2} _C2 \sqrt{33} e^{\left(\left(-9/40 - \frac{\sqrt{33}}{40}\right)t\right)} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Пример 17.3. Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 17.4. Обозначим через $I_1(t)$ ток, проходящий в указанном направлении через дроссель (катушку индуктивности) L , а через $I_2(t)$ – ток, проходящий через резистор R_2 . Ток, проходящий через резистор R_1 в указанном направлении, равен $I = I_1 - I_2$. Согласно закону Кирхгофа для напряжений (алгебраическая) сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре этой цепи равна нулю. Напряжения на элементах (всех трех типов) цепи

приведены на рис. 17.4. Применив закон Кирхгофа к левому замкнутому контуру цепи, получим уравнение:

$$2 \frac{dI_1}{dt} + 50(I_1 - I_2) - 100 = 0, \quad (17.2)$$

так как падение напряжения между отрицательным и положительным полюсами батареи равно – 100 Вольт. Для правого замкнутого контура цепи получим уравнение:

$$125Q_2 + 25I_2 + 50(I_2 - I_1) = 0, \quad (17.3)$$

где Q_2 – заряд конденсатора. Так как $dQ_2/dt = I_2$, дифференцируя обе части уравнения (17.3), получим уравнение:

$$125I_2 + 75 \frac{dI_2}{dt} - 50 \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (17.4)$$

Разделив (17.2) и (17.4) на 2 и –25 соответственно, получим систему дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 &= 50, \\ 2 \frac{dI_1}{dt} - 3 \frac{dI_2}{dt} - 5I_2 &= 0. \end{aligned}$$

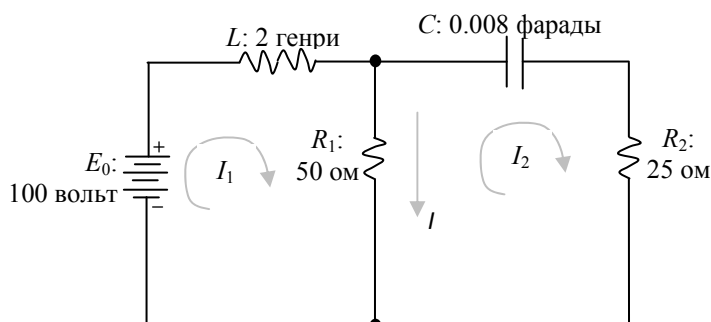


Рис. 17.4. Электрическая цепь из примера 17.3

Текст на MAPLE

```
> restart;
> dsolve({diff(I1(t),t)+25*I1(t)-25*I2(t)=50,2*diff(I1(t),t)-3*diff(I2(t),t)-
5*I2(t)=0}, {I1(t),I2(t)});
Решение  $I_1(t)=2-0.1 * \{e^{-5t} [-12C_1 \sin(5*6^{1/2}/3*t)+ 6^{1/2}C_1 \cos(5*6^{1/2}/3*t)-$ 
 $12C_2 \cos(5*6^{1/2}/3*t) - 6^{1/2}C_2 \sin(5*6^{1/2}/3*t)]\}$ ,  $I_2(t)=e^{-5t} [C_1 \sin(5*6^{1/2}/3*t)+$ 
 $C_2 \cos(5*6^{1/2}/3*t)]$ .
```


17.2 Анализ подсистем

Часто сложный процесс или систему можно разбить на более простые подсистемы или части, которые могут быть проанализированы отдельно. Тогда, чтобы смоделировать всю систему, достаточно иметь описания взаимодействия между различными частями. Таким образом, химический завод, например, может состоять из последовательности отдельных каскадов (или даже физических отделений), в которых объединяются или смешиваются различные реагенты и продукты. Иногда случается, что каждую отдельную подсистему можно описать одним дифференциальным уравнением, тогда модель всей физической системы может быть представлена системой дифференциальных уравнений.

Как простой пример системы с тремя каскадами (этапами) рассмотрим показанные на рис. 17.5 три рассольных бака, содержащие V_1 , V_2 и V_3 литров рассола соответственно. Пресная вода вливается в бак 1, в то время как перемешанный рассол выливается из бака 1 в бак 2 в бак 3 и вытекает из бака 3. Пусть $x_i(t)$ обозначает количество (в кг) соли в баке i в момент времени t для $i = 1, 2$ и 3 . Если в каждый бак вливается и выливается r галлонов в минуту (иными словами, расход равен r литров в минуту), то простой учет концентраций соли приводит к системе первого порядка:

$$\begin{cases} x_1' = -k_1 x_1 \\ x_2' = k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ x_3' = k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{cases} \quad (17.5)$$

где $k_i = r/V_i$, $i = 1, 2, 3$.

(17.6)

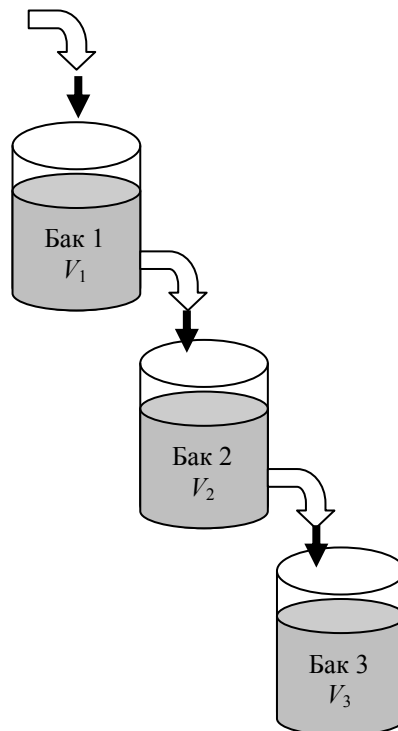


Рис. 17.5. Три рассольных бака

Пример 17.4. Пусть $V_1=20$, $V_2=40$, $V_3=50$, $r=10$ (литров в минуту), а начальное количество соли в трех рассольных баках равны (в кг):

$$x_1(0) = 15, x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Найдем количество соли в каждом резервуаре в момент времени $t \geq 0$.

Решение. Применим метод собственных значений [11]. Подставляя данные числовые значения в равенства (17.5) и (17.6), мы получаем задачу Коши (задачу с начальными условиями). Для ее решения применим метод собственных значений:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.7)$$

для вектора $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$. Простая форма матрицы

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.5 - \lambda & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 - \lambda \end{bmatrix} \quad (17.8)$$

сразу приводит к характеристическому уравнению:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (-0.5 - \lambda)(-0.25 - \lambda)(-0.2 - \lambda) = 0.$$

Таким образом, матрица коэффициентов в уравнении (17.7) имеет различные собственные значения $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.25$, $\lambda_3 = -0.2$.

Случай 1. $\lambda_1 = -0.5$. Подставляя $\lambda = -0.5$ в равенство (17.8), получаем уравнение:

$$|\mathbf{A} + (0.5)\mathbf{I}| \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

Для соответствующего собственного вектора $\mathbf{v} = [a, b, c]^T$. Последние две строки, после деления на 0.25 и 0.05 соответственно, приводят к скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ 5b + 6c &= 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение удовлетворяется при $b = -6$ и $c = 5$, а тогда первое уравнение дает $a = 3$. Таким образом, собственный вектор:

$$\mathbf{v}_1 = [3, -6, 5]^T$$

соответствует собственному значению $\lambda_1 = -0.5$.

Случай 2. $\lambda_2 = -0.25$. Подставляя $\lambda = -0.25$ в равенство (17.8), получаем уравнение:

$$|\mathbf{A} + (0.25)\mathbf{I}| \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

для соответствующего собственного вектора $\mathbf{v} = [a, b, c]^T$. Каждая из первых двух строк дает $a = 0$, а деление третьей строки на 0,05 дает уравнение:

$$5b + c = 0.$$

которое удовлетворяется при $b = 1$, $c = -5$. Таким образом, собственному значению $\lambda_2 = -0.25$ соответствует собственный вектор:

$$\mathbf{v}_2 = [0, 1, -5]^T$$

Случай 3. $\lambda_3 = -0.2$. Подставляя $\lambda = -0.2$ в равенство (17.8), получаем уравнение:

$$[\mathbf{A} + (0.2)\mathbf{I}]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

для соответствующего собственного вектора $\mathbf{v} = [a, b, c]^T$. Первая и третья строки показывают, что $a = 0$ и $b = 0$ соответственно, но нулевой третий столбец позволяет в качестве c выбрать произвольное число (но отличное от нуля). Таким образом, собственный вектор

$$\mathbf{v}_3 = [0, 0, 1]^T$$

соответствует собственному значению $\lambda_3 = -0.2$.

Следовательно, общее решение:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$

Имеет вид:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{(-0.5)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{(-0.25)t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-0.2)t}$$

Полученные скалярные уравнения имеют вид:

$$x_1(t) = 3c_1 e^{-0.5t}$$

$$x_2(t) = -6c_1 e^{-0.5t} + c_2 e^{-0.25t}$$

$$x_3(t) = 5c_1 e^{-0.5t} - 5c_2 e^{-0.25t} + c_3 e^{-0.2t}.$$

Применив начальные условия $x_1(0) = 15$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, получим:

$$3c_1 = 15$$

$$-6c_1 + c_2 = 0$$

$$5c_1 - 5c_2 + c_3 = 0$$

решения которых (в свою очередь) легко находятся: $c_1 = 5$, $c_2 = 30$ и $c_3 = 125$.

Таким образом, наконец, количества соли в момент времени t в трех рассольных баках даются функциями:

$$x_1(t) = 15e^{-0.5t}$$

$$x_2(t) = -30e^{-0.5t} + 30e^{-0.25t}$$

$$x_3(t) = 25e^{-0.5t} - 150e^{-0.25t} + 125e^{-0.2t}.$$

Можно воспользоваться системой MATLAB или MAPLE.

Текст на Maple

> **restart:**

> **V1:= 20: V2:= 40: V3:=50:**

> **r1:= 10: r2:= 10: r3:=10:**

> **k1:=r1/V1: k2:=r2/V2: k3:=r3/V3:**

> **my_diff_uravnenie:={diff(x1(t),t)=-k1*x1(t),diff(x2(t),t)=k1*x1(t)-k2*x2(t),diff(x3(t),t)=k2*x2(t)-k3*x3(t),x1(0)=15,x2(0)=0,x3(0)=0};**

$$my_diff_uravnenie := \{x_1(0) = 15, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, \frac{d}{dt}x_1(t) = -\frac{1}{2}x_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t), \frac{d}{dt}x_3(t) = \frac{1}{4}x_2(t) - \frac{1}{5}x_3(t)\}$$

> **v2:=dsolve(my_diff_uravnenie);**

$$v2 := \{x_1(t) = 15 e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}, x_2(t) = -30 e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} + 30 e^{\left(-\frac{t}{4}\right)},$$

$$x_3(t) = 25 e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} - 150 e^{\left(-\frac{t}{4}\right)} + 125 e^{\left(-\frac{t}{5}\right)}\}$$

>

На рис. 17.6 показаны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Как и следует ожидать, соль из бака 1 быстро "вымывается" поступающей пресной водой, и $x_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Количества $x_2(t)$ и $x_3(t)$ соли в баках 2 и 3 сначала возрастают, а затем приближаются к нулю, поскольку из всей системы с тремя баками соль вымывается при $t \rightarrow \infty$.

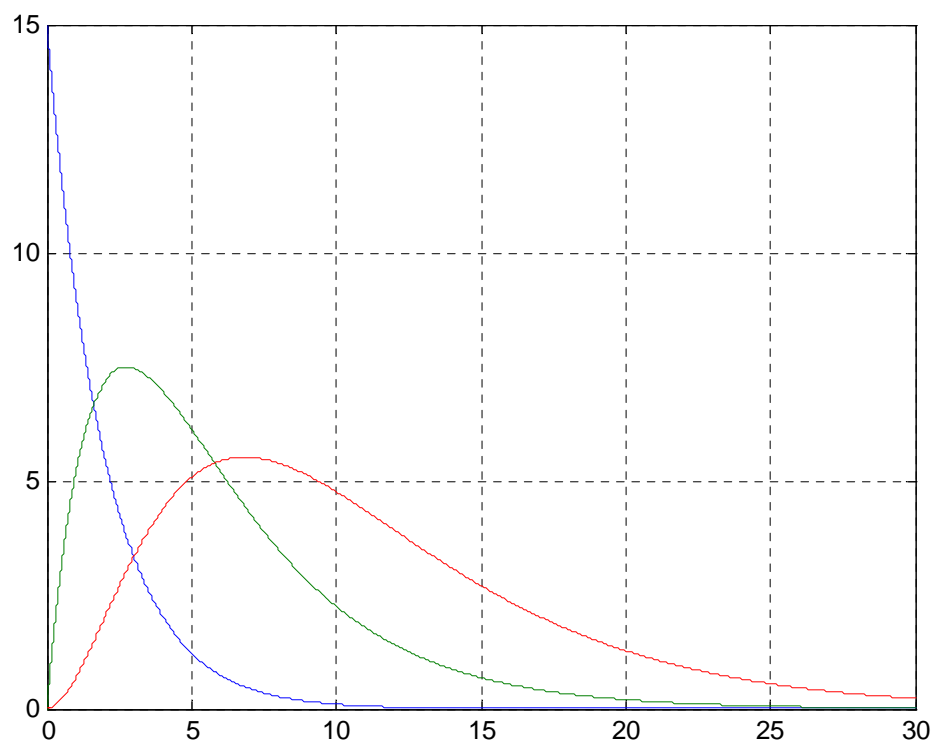


Рис. 17.6. Функции, указывающие содержание соли в баках из примера 17.4.

17.3 Колебания многоэтажных зданий, вызванные землетрясением

Сейчас мы исследуем поведение семиэтажного здания, показанного на рис. 17.7, во время продольных колебаний земли, вызванных землетрясением.

Применяя закон Ньютона $F = ma$ к каждому из семи этажей, получаем уравнения:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ \dots \\ m_6 x_6'' = -k_6 (x_6 - x_5) + k_7 (x_7 - x_6) \\ m_7 x_7'' = -k_7 (x_7 - x_6) - k_8 x_7 \end{cases}$$

Введем обозначения: для вектора смещений $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$, матрицы масс:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 \end{bmatrix},$$

матрицы горизонтальных сил восстановления:

$$K = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -(k_4 + k_5) & k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_5 & -(k_5 + k_6) & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & -(k_6 + k_7) & k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & -(k_7 + k_8) \end{bmatrix}.$$

Предположим, что каждый из семи [наземных] этажей весит 16 тонн, так что масса каждого этажа равна $m=16000$ кг. Также необходимо принять во внимание горизонтальную силу восстановления $k = 10$ (тонн на метр) между смежными этажами. Иными словами, нужно учесть те внутренние силы, которые возникают в ответ на горизонтальные смещения каждого из этажей. Эти силы показаны на рис. 17.8. Из этого следует, что свободные поперечные колебания, показанные на рис. 17.7, удовлетворяют уравнению $MX'' = KX$ при $n = 7$, $m_i = 16000$ кг (для каждого i) и $k_i = 10000$ (кг/м) для $1 \leq i \leq 7$ ($k_8=0$).

Наша система приводится к виду $X'' = AX$ с матрицей A :

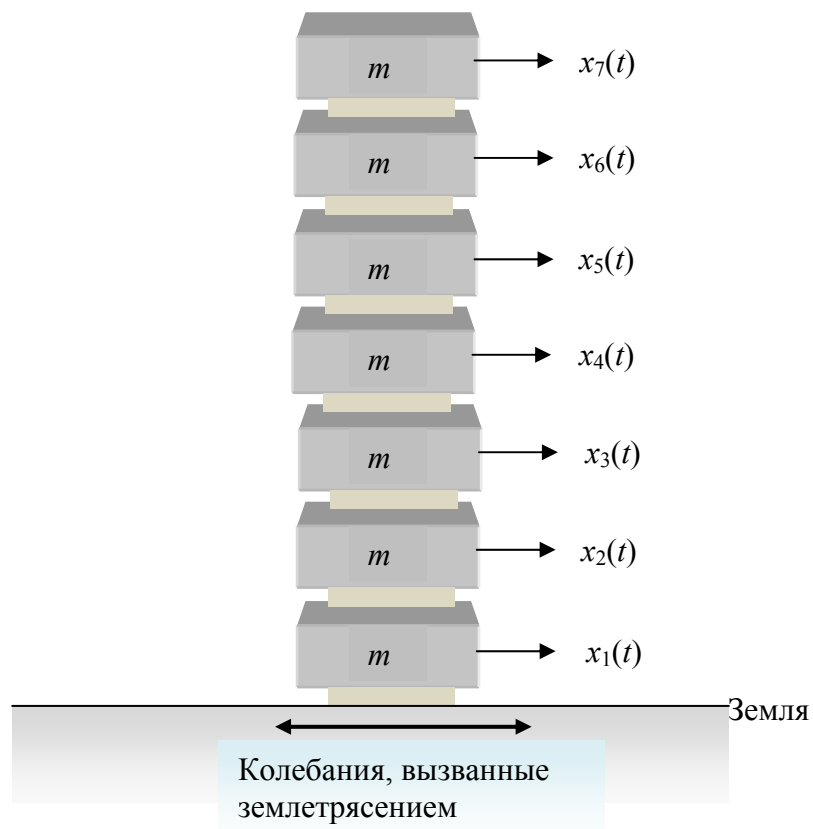


Рис. 17.7. Семизэтажное здание

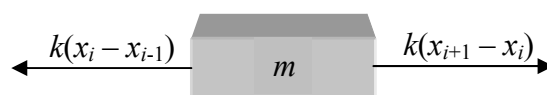


Рис. 17.8. Силы, действующие на i – й этаж.

$$A = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.625 & -1.25 & 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.625 & -1.25 & 0.625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 & -1.25 & 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.625 & -1.25 & 0.625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.625 & -1.25 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.625 & -0.625 \end{bmatrix}$$

Вычислим при помощи системы MATLAB собственные числа (λ_i), частоту (ω_i) и период (P_i). Полученные результаты запишем в таблицу 17.1.

Таблица 17.1.

Частоты и периоды собственных колебаний семиэтажного здания.

№	Собственное значение	Частота	Период
i	λ_i	$\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$	$P_i = \frac{2\pi}{\omega}$ (секунд)
1	-38.2709	6.1863	1.0157
2	-33.3826	5.7778	1.0875
3	-26.1803	5.1167	1.2280
4	-17.9094	4.2320	1.4847
5	-10.0000	3.1623	1.9869
6	-3.8197	1.9544	3.2149
7	-0.4370	0.6611	9.5042

Полученные результаты показывают, что типичное землетрясение, вызывающее наземные колебания с периодом 2 секунды, опасно из-за близости к пятой собственной частоте (с периодом 1.9869 секунды) здания.

Горизонтальное колебание поверхности земли, вызванное землетрясением, $E \cos \omega t$ с амплитудой E и ускорением $a = -E \omega^2 \cos \omega t$, порождает противодействующую силу инерции $F = ma = mE \omega^2 \cos \omega t$ на каждом этаже здания. В результате получается неоднородная система:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + (E \omega^2 \cos \omega t) \mathbf{b}, \quad (17.9)$$

где $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, \mathbf{A} – матрица уравнения (1), $E = 10$.

Для нахождения решения системы (17.9), мы применим метод, в котором находится решение системы:

$$(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I})\mathbf{C} = -E \omega^2.$$

И тогда $x_p(t) = c_p \cos \omega t$. Матрица $(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I})$ несингулярная (неособая), при $-\omega^2 = \lambda$. При помощи системы MATLAB находим $\mathbf{C} = -(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{E} \omega^2$:
 $\mathbf{C} = [8.2242 \ 9.6523 \ 9.9195 \ 9.9760 \ 9.9896 \ 9.9927 \ 9.9930]^T$.

Различные здания имеют различные собственные частоты колебаний, и поэтому какое-нибудь конкретное землетрясение может уничтожить одно здание, но оставит нетронутым ближайшее к нему. Эта кажущаяся аномалия наблюдалась в Мехико после разрушительного землетрясения 19 сентября 1985 года.

18 Гравитация и движение планет

18.1 Законы Кеплера

В начале XVII столетия¹ Иоганн Кеплер проанализировал результаты наблюдения движения, планет, которые были выполнены датским астрономом Тихо Браге². Кеплер сделал вывод, что движение планет вокруг Солнца определяется следующими тремя законами движения планет, которые теперь называются законами Кеплера.

1. Орбита каждой планеты представляет собой эллипс, в одном из фокусов которое находится Солнце.

2. Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, описывает (заметает) площадь, пропорциональную времени движения планеты³.

3. Квадрат периода обращения планеты вокруг Солнца пропорционален кубу большей полуоси ее эллиптической орбиты⁴.

В своих Началах (Principia Mathematica 1687) Исаак Ньютон вывел из законов Кеплера закон всемирного тяготения, согласно которому сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Сейчас будет показано, как из закона тяготения, открытого Ньютоном, выводятся первые два закона Кеплера⁵.

Предположим, что Солнце расположено в начале координат плоскости движения планеты⁶. Запишем радиус-вектор планеты в виде:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (18.1)$$

где $\mathbf{i} = (1, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, 1)$ – единичные векторы осей x и y . Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и потому вектор ускорения планеты $\mathbf{r}''(t)$ задается равенством:

$$r'' = -\frac{kr}{r^3}, \quad (18.2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от Солнца до планеты. Если полярные координаты планеты в момент времени t равны $(r(t), \theta(t))$, то единичный полярный радиус (единичный вектор, направленный вдоль радиус-

¹ Примерно в 1609 – 1619 годах.

² Тихо Браге родился в Кнудструп 14 декабря 1546 года, а умер 24 октября 1601 года в Праге. Значительную часть своей жизни посвятил определению положения звезд и планет. Его наблюдения были наиболее точными до изобретения телескопа. Кроме того, его работы способствовали развитию тригонометрии.

³ Иными словами, секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна.

⁴ Иными словами, отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково.

⁵ Задача, в которой требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов, называется задачей Кеплера. Задачу Кеплера решил Исаак Ньютон.

⁶ Данное движение является плоским. Это следует из того, что движение происходит под действием центральной силы и теоремы об изменении момента количества движения: производная по времени от момента количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей сил, приложенных к ней.

вектора), и перпендикулярный ему единичный вектор (они изображены на рис. 18.1) соответственно равны¹:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \Theta + \mathbf{j} \sin \Theta \text{ и } \mathbf{u}_\Theta = -\mathbf{i} \sin \Theta + \mathbf{j} \cos \Theta. \quad (18.3)$$

Единичный полярный радиус \mathbf{u}_r , приложенный к планете, всегда направлен от начала координат, а перпендикулярный ему единичный вектор \mathbf{u}_Θ получается из него вращением \mathbf{u}_r против часовой стрелки на 90° .

Шаг 1. Продифференцируйте уравнения (18.3) покомпонентно и покажите, что:

$$\frac{du_r}{dt} = u_\Theta \frac{d\Theta}{dt} \text{ и } \frac{du_\Theta}{dt} = -u_r \frac{d\Theta}{dt}. \quad (18.4)$$

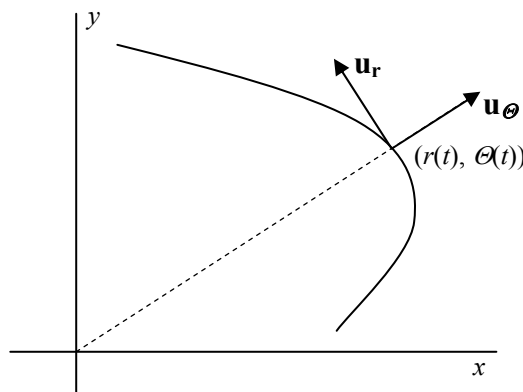


Рис. 18.1. Единичный полярный радиус \mathbf{u}_r и перпендикулярный ему единичный вектор \mathbf{u}_Θ .

Шаг 2. Используя уравнения (18.4), продифференцируйте радиус-вектор планеты $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ и таким образом покажите, что ее вектор скорости равен:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{u}_r dr/dt + r d\Theta/dt \mathbf{u}_\Theta. \quad (18.5)$$

Шаг 3. Продифференцировав еще раз, покажите, что вектор ускорения планеты $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ равен:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\Theta}{dt} \right) \right] \mathbf{u}_\Theta. \quad (18.6)$$

Шаг 4. Радиальные и перпендикулярные компоненты в правых частях уравнений (18.5) и (18.6) должны совпадать, Приравняв перпендикулярные к радиус-вектору компоненты, получим:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\Theta}{dt} \right) \right] = 0. \quad (18.7)$$

Отсюда следует, что:

$$r^2 \frac{d\Theta}{dt} = h, \quad (18.8)$$

¹ Иными словами, векторы \mathbf{u}_r и \mathbf{u}_Θ являются ортами полярной системы координат.

где h – постоянная. Элемент площади в полярных координатах, который позволяет вычислить площадь $A(t)$, заштрихованную на рис. 18.2, равен $dA = r^2 d\Theta/2$. Поэтому из уравнения (18.8) следует, что производная $A'(t)$ постоянна, а это и есть второй закон Кеплера¹.

Шаг 5. Приравняйте радиальные компоненты уравнений (18.5) и (18.6), а затем с помощью равенства (18.8), покажите, что расстояние планеты от начала координат (радиальная координатная функция) $r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}. \quad (18.9)$$

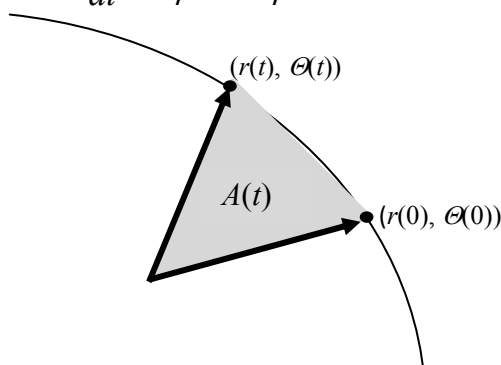


Рис. 18.2. Площадь, которую описывает (заметает) радиус вектор.

Шаг 6. Предположив, что уравнение орбиты можно записать в полярных координатах² в виде $r = r(\Theta)$, используя цепное правило и уравнение (18.8), покажите, что если $r = 1/z$, то:

$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{dz}{d\Theta}.$$

Продифференцировав еще раз, с помощью уравнения (18.9) покажите, что функция $z(\Theta) = 1/r(\Theta)$ удовлетворяет уравнению:

¹ Поскольку момент величества движения материальной точки равен удвоенной массе точки, умноженной на вектор секторной скорости, то из постоянства момента количества движения материальной точки (первый интеграл дифференциальных уравнений движения в векторном виде) следует постоянство вектора секторной скорости. А поскольку секторная скорость измеряется плоскостным элементом, заметаемым радиусом – вектором, то отсюда следует теорема площадей: если материальная точка движется под действием центральной силы, то ее секторная скорость – постоянный вектор. Вот эквивалентная формулировка этой теоремы: при движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус – вектор за любые одинаковые промежутки времени описывает одинаковые плоскостные элементы. Второй закон Кеплера является частным случаем теоремы площадей. (Заметьте, что и первый, и второй интегралы дифференциальных уравнений движения были получены лишь в предположении, что на материальную точку действует центральная сила. Конкретный вид этой силы при выводе интеграла не имеет значения.)

² Мы уже вывели закон площадей $r^2 d\Theta/dt = h$. Поскольку полярный радиус положителен, то из закона площадей следует, что полярный угол изменяется монотонно, если $h \neq 0$. А тогда (по теореме о неявной функции) функция, выражающая зависимость полярного угла от времени, т.е. функция $\Theta = \Theta(t)$, имеет обратную функцию $t = t(\Theta)$. Из этого немедленно следует, что траектория движения может быть представлена в полярных координатах уравнением вида $r = r(\Theta)$.

$$\frac{d^2 z}{d\Theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \quad (18.10)$$

Шаг 7. Покажите, что уравнение (18.10) имеет общее решение:

$$z(\Theta) = A \sin \Theta + B \cos \Theta + k/h^2. \quad (18.11)$$

Шаг 8. Наконец, из уравнения (18.11) выведите, что $r(\Theta) = 1/z(\Theta)$ выражается формулой:

$$r(\Theta) = \frac{L}{1 + e \cos(\Theta - \alpha)}, \quad (18.12)$$

где $e = Ch^2/k$, $C \cos \alpha = A$, $C \sin \alpha = B$ и $L = h^2/k$.

График уравнения (18.12) в полярных координат представляет собой коническое сечение, эксцентриситет которого равен e . Это коническое сечение с фокусом в начале координат является эллипсом при $0 \leq e < 1$, параболой – при $e = 1$, и гиперболой – при $e > 1$. Орбиты планет расположены в ограниченной области (движения планет финитны) и, следовательно, являются эллипсами с эксцентриситетом $e < 1$. Как показано на рис. 18.3, большая ось эллипса лежит на прямой $\Theta = \alpha$.

Шаг 9. Постройте несколько стандартных эллиптических орбит, заданных уравнением (18.12) при различных значениях эксцентриситета, размерах и ориентациях. Чтобы построить эллиптическую орбиту, эксцентриситет которой равен e , а половина фокального параметра – L (рис. 18.3), повернутую на угол α , можно воспользоваться ее параметрическим заданием в прямоугольных декартовых координатах:

$$x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Эксцентриситет орбиты Земли приблизительно равен $e \approx 0.0167$, т. е. настолько близок к нулю, что орбита является практически круговой (но Солнце находится в фокусе, а не в центре), а значения эксцентриситетов орбит других планет варьируются от 0.0068 Венеры и 0.0933 – для Марса, до 0.2056 – для Меркурия и 0.2486 – для Плутона. Однако эксцентриситет орбит многих комет значительно больше. Например, эксцентриситет орбиты кометы Галлея $e \approx 0.97$ (рис. 18.4)¹.

¹ Изложенный выше метод решения задачи двух тел с физической точки зрения содержит некоторые упрощения. Не учитывается, например, притяжение Солнца планетой. С учетом этого притяжения задачу двух тел можно решить, сведя ее к задаче о движении одного тела. Для этого необходимо рассматривать центр масс системы двух тел и их приведенную массу.

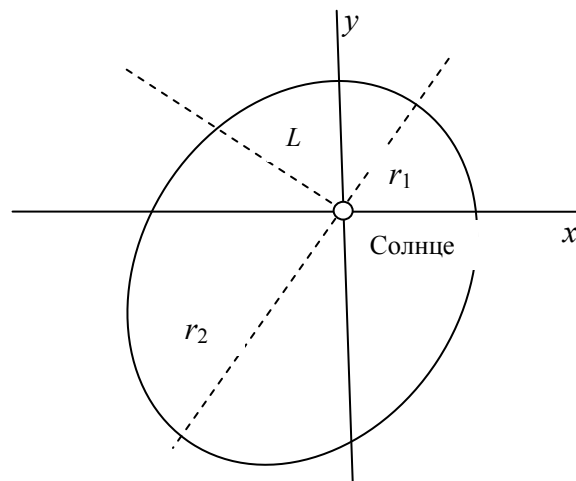


Рис. 18.3. Эллиптическая орбита $r = \frac{L}{1 + e \cos(\Theta - \alpha)}$,
 перигелий которой равен $r_1 = L/(1 + e)$,
 а афелий — $r_2 = L/(1 - e)$.

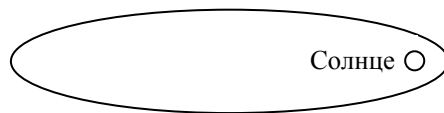


Рис. 18.4. Форма орбиты кометы Галлея.

18.2 Движение планет и спутников

Рассмотрим движение спутника по эллиптической орбите вокруг планеты массой M . Предположим, что единицы измерения выбраны так, что $GM = 1$ (где G – гравитационная постоянная). Если планета расположена в начале координат плоскости xu , то уравнения движения спутника можно записать в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (18.13)$$

Пусть T обозначает период обращения спутника. Согласно третьему закону Кеплера, квадрат T пропорционален кубу большей полуоси a эллиптической орбиты спутника. В частности, если $GM = 1$, то:

$$T^2 = 4\pi^2 a^3. \quad (18.14)$$

Если x - и y – компоненты скорости спутника обозначить через $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x_1'$ и $x_4 = x_2'$, то система (18.13) преобразуется в эквивалентную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ x_4' = -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

- а) Решим численно при помощи MATLAB эту систему размера 4×4 при начальных условиях: $x(0)=1$, $y(0)=0$, $x'(0)=0$, $y'(0)=1$, которые теоретически соответствуют круговой орбите радиуса $a=1$. Тогда из равенства (18.14) должно получиться, что $T = 2\pi$.
- б) Теперь решим численно эту систему при начальных условиях: $x(0)=1$, $y(0)=0$, $x'(0)=0$, $y'(0)=(3/2)^{1/2}$, которые теоретически соответствуют эллиптической орбите, большая полуось которой равна $a=2$. Тогда из равенства (18.14) следует, что $T=4\pi(6)^{1/2}$.

Текст на MATLAB

```
function solv_movement
clc
clear
%Формирование вектора начальных условий
X0=[1; 0; 0; 1];
%Вызов солвера от функции oscil начального и конечного
% момента времени и вектора начальных условий
long_T=4*pi;
[T,X]=ode45(@oscil, [0 long_T], X0);
% Вывод графика решения исходного дифференциального уравнения
```

```

% (маркеры - точки, линия - сплошная)
plot(T,X(:,1),'r.-')
%Вывод графика производной от решения исходного дифференциального
уравнения
%маркеры - точки, линия - сплошная)
hold on
plot(T,X(:,2),'k.-')
% Вывод пояснений на график
xlabel('\itt')
legend('x', 'y',4)
grid on
hold off
%Подпрограмма вычисления правых частей уравнений
function F = oscil(t,x)
F=[x(3); x(4); -x(1)/(x(1)^2+x(2)^2)^(3/2); -x(2)/(x(1)^2+x(2)^2)^(3/2)];

```

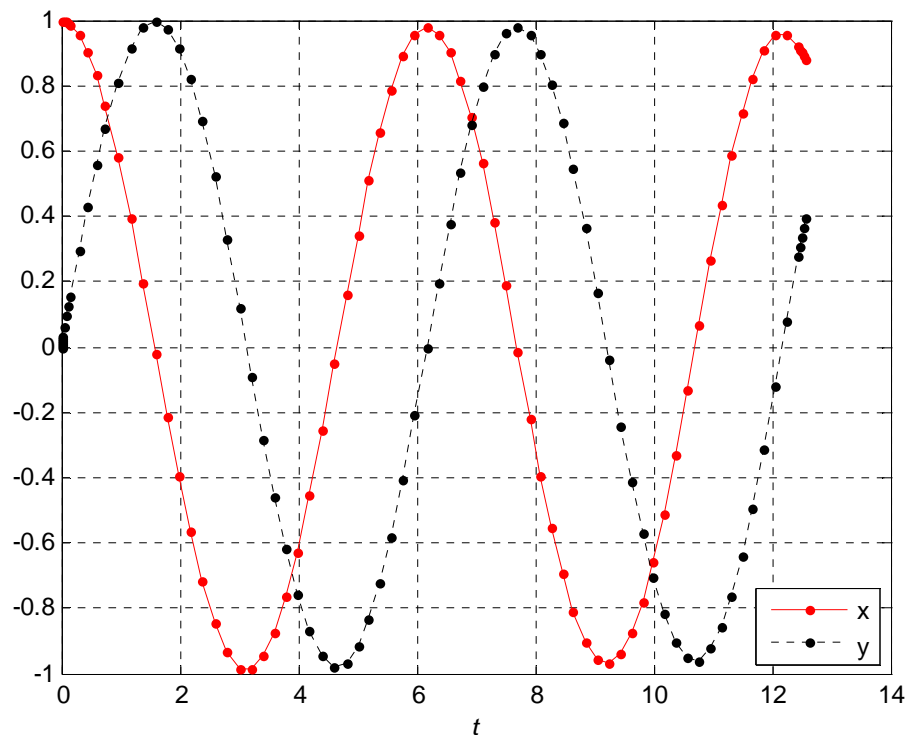


Рис.18.5. Движение спутника по эллиптической орбите (а).

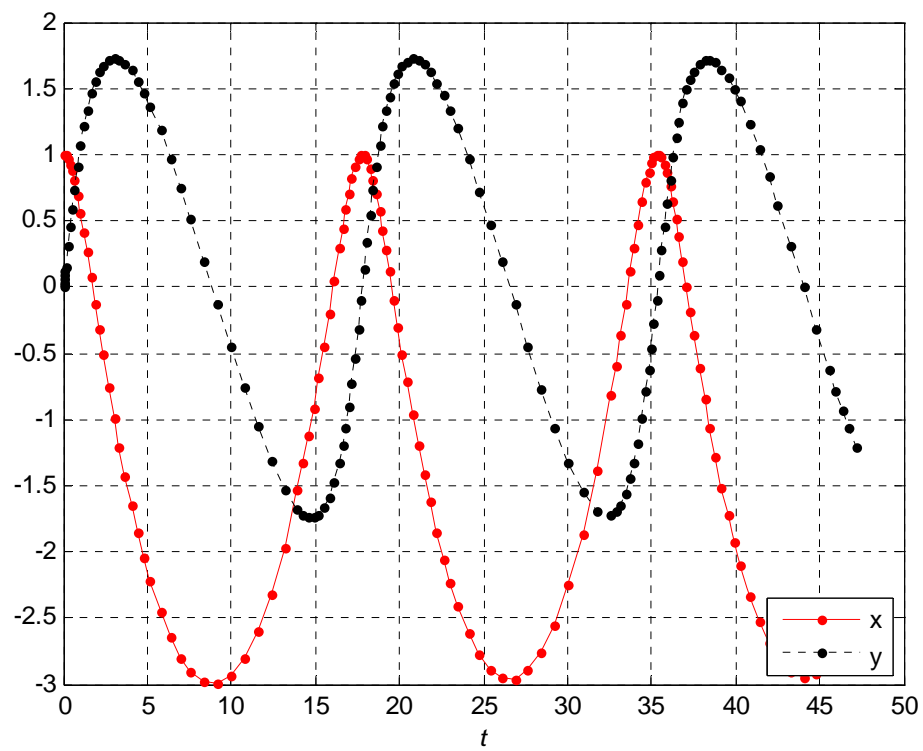


Рис.18.6. Движение спутника по эллиптической орбите (b).

18.3 Комета Галлея

В последний раз комета Галлея проходила через свой перигелий (ближайшая к Солнцу точка орбиты) 9 февраля 1986 года. (Само Солнце считается расположенным в начале координат.) Координаты и компоненты скорости кометы Галлея в тот момент были равны $\mathbf{P}_0 = (0.325514, -0.459460, 0.166229)$ и $\mathbf{v}_0 = (-9.096111, -6.916686, -1.305721)$ соответственно, причем расстояние здесь выражено в астрономических единицах длины – а.е.д., или просто а.е. (астрономическая единица, т. е. длина большой главной полуоси земной орбиты), а время – в годах. В этих единицах измерения трехмерные уравнения движения кометы имеют вид:

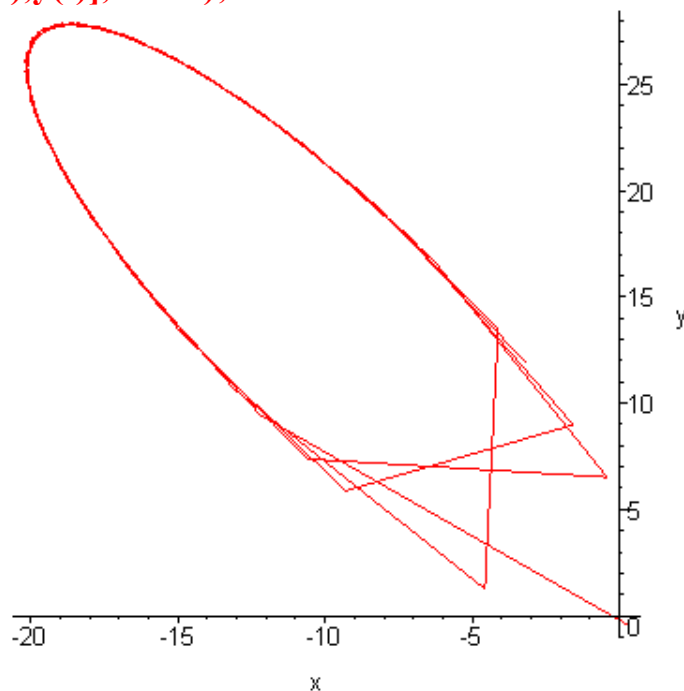
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (18.5)$$

где $\mu = 4\pi^2$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

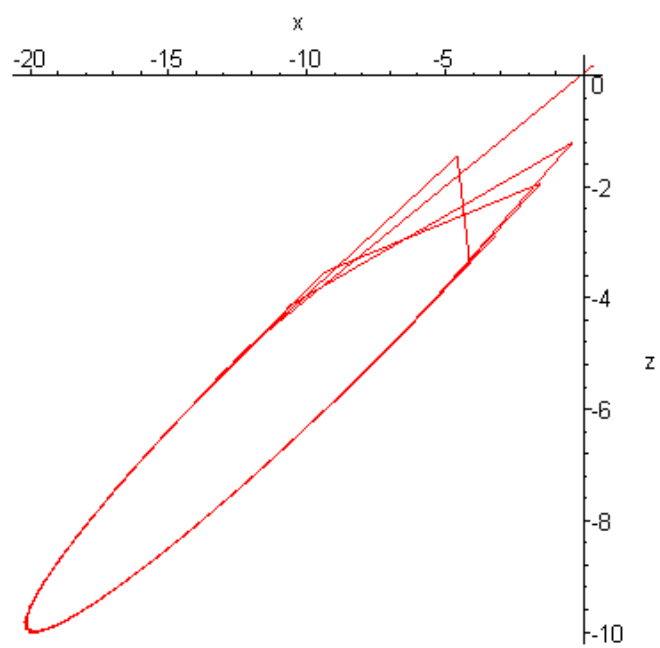
Решите численно систему уравнений (18.5). (Ниже представлен текст на языке Maple.)

Текст Maple

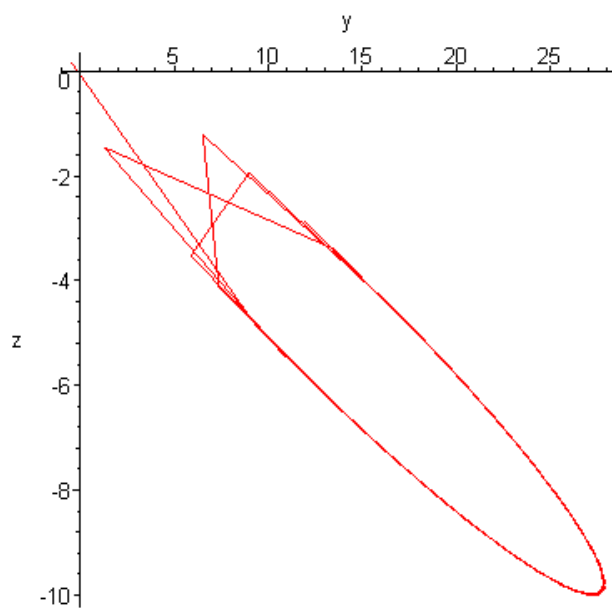
```
> restart;
> with(plots):
> mu:=-4*Pi*Pi;
> r:=(x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2)^(3/2);
> my_diff_yravnienie_0:={diff(x(t),t,t)=mu*x(t)/r,diff(y(t),t,t)=mu*y(t)/r,diff(
z(t),t,t)=mu*z(t)/r,x(0)=0.325514,D(x)(0)=-9.096111,y(0)=-
0.459460,D(y)(0)=6.916686,z(0)=0.166229,D(z)(0)=-1.305721}:
> v2:=dsolve(my_diff_yravnienie_0,numeric);
> odeplot(v2,[x(t),y(t)],0..300);
```



```
> odeplot(v2,[x(t),z(t)],0..300);
```



```
> odeplot(v2,[y(t),z(t)],0..300);
```



18.4 Ваша собственная комета

В ночь перед вашим днем рождения в 2010 году вы установили свой телескоп на вершине недалеко расположенной от вашего дома горы. Ночь была ясной, безоблачной, звездной и вам улыбнулась фортуна: в 0 часов 30 минут ночи вы заметили новую комету. После повторных наблюдений в следующие ночи вам удалось вычислить ее координаты в ту первую ночь. Координаты в гелиоцентрической системе координат: $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и вектор скорости $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$. Используя эти данные, определите:

- расстояние кометы от Солнца в перигелии (самая близкая к Солнцу точка орбиты) и в афелии (самая дальняя от Солнца точка орбиты);
- скорости кометы при прохождении через перигелий и через афелий;
- период обращения кометы вокруг Солнца;
- следующие две даты прохождения кометы через перигелий.

Если измерять расстояние в астрономических единицах, а время - в годах, то уравнение движения кометы примут вид (18.5). Для вашей собственной кометы выберите произвольные начальные координаты и скорости того же порядка, что и у кометы Галлея. В случае необходимости повторно осуществляйте произвольный выбор начального положения и вектора скорости до тех пор, пока не получите правдоподобную эксцентрическую орбиту, выходящую за пределы орбиты Земли (как у большинства настоящих комет).

Заключение

После того как Ньютон решил задачу Кеплера, теория обыкновенных дифференциальных уравнений стала одним из основных инструментов математического естествознания. Поэтому математическое образование специалиста любой естественнонаучной специальности не обойдется без курса дифференциальных уравнений.

В 60-70-е годы дифференциальные уравнения становятся важным инструментом не только в теории автоматического регулирования, но и в исследовании динамических систем и хаотических явлений. И в эти же годы выявляются недостатки численных методов, подчас приводящие к техногенным катастрофам. Выясняется, что роль аналитических методов была незаслуженно преуменьшена. В 1980-е годы дифференциальные уравнения активно используются для построения самых разных моделей — физических, экономических, биологических, географических, экологических, геологических и многих других.

Вкратце отметим те особенности учебного пособия, благодаря которым как раз и удалось вместить весьма обширный материал в небольшой объем.

Во-первых, в пособии не ставится задача перечислить (фактически неисчислимо) множество моделей. Вместо этого происходит обучение студентов строить такие модели самостоятельно, притом в самых разных областях знания — как естественнонаучных (механика, физика, химия, биология), так и гуманитарных (социология, статистика).

Во-вторых, пособие не предназначено для (бесполезного) натаскивания в решении многочисленных типов дифференциальных уравнений, а учит студентов использовать математические пакеты, в которых интегрированы многочисленные методы (численные и аналитические) решения дифференциальных уравнений. Именно благодаря этому удалось вместить в этот курс все то, что должны узнать инженеры из вводного курса дифференциальных уравнений, а не сконцентрироваться на одной (хотя бы и весьма важной!) теме курса дифференциальных уравнений.

Благодаря такому курсу знакомство с естественнонаучными приложениями дифференциальных уравнений (да и самими численными методами) не будет омрачено трудоемкими расчетами по численным методам. И именно благодаря такому курсу студенты могут познакомиться со всем разнообразием дифференциальных уравнений, а не ограничиться несколькими (хотя и весьма современными) темами из курса дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1988. - 400 с.
2. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем. Искусство и наука. – М.:Мир, 1978. – 418 с.
3. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 1104 с : ил.
4. В.П. Дьяконов. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.:СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.: ил.
5. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд., испр. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – Москва: ЧеРо, 1999, 572 с.
7. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. - 232 с.
8. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник. М.; Гардарики, 2002. - 624 с: ил.
9. Поротов Г.С. Математические методы моделирования в геологии: Учебник / Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2006. 223 с
10. Запасный А.И. Основы теории цепей: Учебное пособие. – М.: РИОР, 2006. – 336 с. – (Высшее образование)/
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2.– М.:Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

1945-1966 РЛПУ (кафедра радиолокационных приборов и устройств). Решением Советского правительства в августе 1945 г. в ЛИТМО был открыт факультет электроприборостроения. Приказом по институту от 17 сентября 1945 г. на этом факультете была организована кафедра радиолокационных приборов и устройств, которая стала готовить инженеров, специализирующихся в новых направлениях радиоэлектронной техники, таких как радиолокация, радиоуправление, теленавешение и др. Название кафедры в тот период открыто не упоминалось, а она имела номер 11.

Организатором и первым заведующим кафедрой до 1951 г. был д.т.н., профессор С. И. Зилитинкевич, который являлся крупнейшим деятелем в области радиотехники и электроники, автором ряда важнейших исследований и открытий.

В течение первого года своего существования кафедра развивалась чрезвычайно быстро. Основной лабораторной базой в то время были радиолокационные станции типа "Вюрсбург" (снятая с немецкого поезда) и первая отечественная станция типа "Пегматит". Лишь в пятидесятые годы появились на кафедре действующие отечественные станции "Мист-2", "Кобальт", "П-8" и ряд других.

С 1951 года по 1954 кафедру возглавлял крупный специалист в области передающих устройств РЛС, один из ведущих работников радиопромышленности, кандидат технических наук, доцент А.И. Лебедев-Карманов (по совместительству).

На кафедре № 11 проводилась также большая научно-исследовательская работа. Так, в 1952-1953 годах по заказу Военно-

медицинской академии был разработан и изготовлен первый отечественный электрокардиограф.

В 1954 году А.А. Тудоровский, ставший к этому времени доцентом, был избран заведующим кафедры № 11. Постепенно состав кафедры начал пополняться се молодыми выпускниками. Одновременно на кафедру поступило новое оборудование, в том числе современная измерительная аппаратура, что позволило создать собственную лабораторную базу по всем курсам.

Выпускникам кафедры присваивалась квалификация инженер-радиомеханик, а с 1956 г. – радиоинженер (специальность 0705).

В 1970 году радиотехнический факультет ЛИТМО был ликвидирован. Кафедру КиПРЭА переименовали в кафедру «Конструирования и производства электронно-вычислительной аппаратуры» (КиПЭВА) и перевели на факультет точной механики и вычислительной техники. Коренной переделке подвергся учебный план, по которому велась подготовка специалистов. Были выделены два основных направления: автоматизация конструирования ЭВА и технология производства микроэлектронных устройств ЭВА. Каждый учебный план специальности 0705 коренным образом отличался от предыдущих планов радиотехнической специальности своей четко выраженной конструкторско–технологической направленностью. Оканчивающим институт по этой специальности присваивалась квалификация инженер–конструктор–технолог РЭА.

Заведовал кафедрой доцент А.Н. Иванов.

В конце 1973 года на должность заведующего был избран д.т.н. профессор Ф.Г.Старос. Профессор Ф.Г.Старос являлся одним из основных родоначальников отечественной микроэлектроники. Он был главным разработчиком Советского центра микроэлектроники в Зеленограде. Под его руководством был разработан и изготовлен первым в мировой практике прообраз персонального компьютера - УМ-1-НХ. В связи с назначением профессора Ф.Г.Староса директором одного из институтов АН СССР во Владивостоке в начале 1974 года, он вынужден был оставить кафедру КиПЭВА. В это время на должность заведующего кафедрой был избран выпускник ЛИТМО 1959 года к.т.н. доцент В.В.Новиков (впоследствии д.т.н., профессор). С приходом В.В.Новикова резко усилилась работа в области микроэлектроники. Были открыты научно-исследовательские темы по применению новых физических принципов при разработке различных электронных устройств. Большое участие в этих разработках принимали доценты А.В.Панков и В.С.Салтыков.

С 1976 по 1996 кафедрой руководил известный специалист в области автоматизации проектирования электронных устройств профессор Г.А.Петухов (с небольшим перерывом, когда с 1988 по 1992 год кафедру возглавлял ученик Г.А.Петухова профессор С.А.Арустамов, который в

дальнейшем ушел из ЛИТМО, в связи с переходом на другую работу). За это время получило дальнейшее направление развитие автоматизации проектирования. Был создан один из первых В ЛИТМО собственный машинный класс. Научная работа была в основном сконцентрирована в области САПР. Так в это время на кафедре проводилась большая научно-исследовательская работа по автоматизации топологического проектирования БИС на базовых кристаллах, которую возглавляли профессора Г.А. Петухов и С.А. Арустамов.

С 1996 года кафедру возглавляет ее воспитанник д.т.н., профессор Ю.А.Гатчин. Помимо традиционной подготовки инженеров конструкторов-технологов по микроэлектронике и автоматизации проектирования вычислительных средств (специальность 2205), была начата подготовка специалистов по специальности 090104 «Комплексная защита объектов информатизации», причем основное внимание уделяется программно-аппаратной защите информации компьютерных систем.

В 1998 году кафедра была переименована и получила название «Кафедра проектирования компьютерных систем», что отразило содержание основных научных исследований и направления подготовки студентов и аспирантов.

За время своего существования кафедра выпустила более 4500 дипломированных инженеров. Более 50 молодых ученых защитили кандидатские диссертации, 10 человек защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук.