

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики**

**В.В. Григорьев, С.В. Быстров, В.И. Бойков,
Г.И. Болтунов, О.К.Мансурова**

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



**Санкт-Петербург
2011 г.**

В.В.Григорьев, С.В.Быстров, Бойков В.В., Болтунов Г.И., Мансурова О.К.
– СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 133 с.

Учебное пособие посвящено рассмотрению общих технологических подходов к построению моделей цифровых объектов и дискретных процессов, анализу их качества поведения, современных методов аналитического конструирования регуляторов, идеология построения которых подобна созданию регуляторов для непрерывных объектов. Приводятся примеры, демонстрирующие возможности применения рассмотренных методов и процедур синтеза и анализа цифровых систем управления.

Пособие предназначено для магистров (студентов) технических университетов, обучающихся по направлению «Системный анализ и управление» (220100.68). Так же может быть полезно магистрам других технических направлений, а также аспирантам, преподавателям вузов и инженерам, научная и практическая деятельность которых связана с вопросами анализа и проектирования цифровых систем управления.

Рекомендовано к печати Учёным советом Факультета КТ и У, 12.04.2011, протокол №4



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2011

© В.В.Григорьев, С.В.Быстров, Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К., 2011

Содержание

Введение	5
1 Обобщенная функциональная схема системы с цифровым (дискретным) управлением.....	5
2 Принципы построения регуляторов для цифровых (дискретных) систем.....	7
Раздел 1. Математические модели дискретных объектов и дискретных процессов внешних воздействий	20
1.1 Дискретизация процессов и моделей объектов управления на основе амплитудно-импульсной модуляции.....	20
1.2 Построение модели объекта управления с элементом амплитудно-импульсной модуляции и непрерывной линейной частью.....	23
1.3 Формы задания уравнений движения дискретного объекта (системы) в виде разностных уравнений.....	29
1.4 Построение моделей внешних воздействий.....	36
1.5 Дискретное преобразование Лапласа и основные его свойства.....	40
1.6 Передаточные функции дискретных объектов и замкнутых систем.....	44
Раздел 2. Устойчивость цифровых (дискретных) систем	46
2.1 Классические виды устойчивости дискретных систем.....	46
2.2 Качественная экспоненциальная устойчивость дискретных систем.....	48
2.3 Метод Ляпунова для анализа свойства устойчивости дискретных систем.....	51
2.4 Уравнения Ляпунова для анализа свойства устойчивости линейных дискретных систем.....	54
2.5 Необходимые и достаточные корневые условия устойчивости дискретных систем.....	57
2.6 Уравнения Ляпунова как критерии расположения корней замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости внутри (вне) единичного круга с центром в начале координат.....	59
2.7 Виды стохастической устойчивости дискретных систем.....	61
2.8 Матричные неравенства и уравнения для линейных позитивных систем.....	65
2.9 Анализ переходной и установившихся составляющих динамических процессов дискретных систем при внешних воздействиях. Матричные коэффициенты ошибок.....	70

Раздел 3. Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с измеримыми состояниями.....	77
3.1 Построение регуляторов для систем стабилизации на основе принципа Беллмана. Основы и постановка задачи модального управления дискретными объектами.....	77
3.2 Задача модального управления.....	78
3.3 Решение задачи модального управление на основе принципа эталонной модели.....	78
3.4 Особенности задания матриц описания эталонной модели для дискретных систем. Использование стандартных полиномов для задания желаемых корней (коэффициентов характеристического полинома), обеспечивающих требуемые показатели качества в замкнутых системах.....	82
3.5 Синтез интегрального регулятора для систем с одним входом и выходом.....	84
3.6 Построение регуляторов со встроенной моделью.....	88
Раздел 4. Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с ограничениями на измеряемые переменные.....	92
4.1 Устройство оценки полной размерности и способы проектирования.....	92
4.2 Устройство оценки пониженной размерности и способы проектирования.....	94
4.3 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки полной размерности.....	97
4.4 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности.....	100
Раздел 5. Системы пространственного слежения.....	105
5.1 Модели систем пространственного слежения.....	106
5.2 Синтез линейных регуляторов для системы пространственного слежения.....	112
5.3 Исследование режимов захвата и автосопровождения системы пространственного слежения.....	121
Заключение.....	132
Литература.....	133

ВВЕДЕНИЕ

1 Обобщенная функциональная схема системы с цифровым (дискретным) управлением.

Окружающий нас мир представляет собой сложную развивающуюся во времени и пространстве открытую систему, включающую разнообразные, находящиеся во взаимодействии подсистемы: социальные, экономические, экологические, биологические, технические системы. Любая система (подсистема) развивается в соответствии с целью ее функционирования. Управление той или иной системой (подсистемой) осуществляется таким образом, чтобы достичь (приблизиться) к цели функционирования системы на основе анализа и обработки информации о текущих значениях измеряемых параметров системы, характеризующих динамику развития системы и ее отклонения от цели функционирования. Причем управление должно обеспечивать устойчивое развитие во времени системы (подсистемы), и обладать свойством адаптируемости и робастности (грубости) к изменяющимся условиям внешней среды и эволюции цели управления.

Современное развитие компьютерных аппаратных средств, информационных сетей и технологий, телекоммуникаций и исполнительных устройств позволяет реализовывать сложные иерархические алгоритмы управления, включающие алгоритмы обработки информации, алгоритмы идентификации объектов управления, робастные алгоритмы адаптации к изменению параметров объекта и внешних возмущающих воздействий, обеспечивающие устойчивое динамическое развитие системы и позволяющие достичь цели управления. Эффективное и качественное экономическое развитие ставит перед производством и управлением им новые задачи, а именно, создание интегрированных систем управления производством, включающим системы автоматизированного проектирования (САПР), автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУ ТП), автоматизированные системы управления производством (АСУП), а также, автоматизированные системы управления качеством выпускаемой продукции. Все эти системы находятся во взаимодействии и образуют сложную иерархическую систему.

Развитие аналитических методов конструирования регуляторов для систем автоматического управления, ориентированных на использование ЭВМ в процессе проектирования потребовало установления связи этих методов с качеством процессов синтезируемой системы. И если изначально эти методы гарантировали асимптотическую устойчивость, то последующее развитие позволило обеспечивать экспоненциальную

устойчивость, тесно связанную с оценками быстродействия и запасом устойчивости (степенью устойчивости). Однако выполнение условий экспоненциальной устойчивости не всегда приводит к требуемым показателям переходных процессов САУ. Поэтому появилась необходимость получения более локальных условий и понятий устойчивости, связанные с усилением ограничений на свойства системы. Для линейных систем подобные ограничения вводились на области расположения желаемых корней замкнутой системы, что позволило установить связь методов аналитического конструирования регуляторов с корневыми показателями и привело к упрощению процедуры синтеза по требуемым показателям качества. В общем случае, для нестационарных и нелинейных систем корневые методы анализа и синтеза являются недействительными. Однако наметившийся подход локализации корней линейной системы на основе прямого метода Ляпунова позволяет с помощью введения более локального понятия устойчивости, чем понятие экспоненциальной устойчивости, распространить подобный подход для анализа нестационарных и нелинейных систем с гладкими нелинейностями.

Для этого вводится понятие качественной экспоненциальной устойчивости, являющейся сужением понятия экспоненциальной устойчивости благодаря введению дополнительных условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения вектора состояния системы. С помощью дополнительных условий удастся локализовать и свойства процессов системы, при этом качественно экспоненциально устойчивые системы отличается меньшей колебательностью и большей «плавностью» процессов, при сохранении возможности оценки быстродействия и придания запаса устойчивости, присущих экспоненциально устойчивым системам.



Рисунок 1 - Обобщенная функциональная схема системы управления.

На рисунке 1 изображена обобщенная функциональная схема системы управления, состоящая собственно из технического объекта (ТО), которым следует управлять в соответствии с назначением его функционирования, исполнительного механизма (ИМ), изменяющего состояние x ТО при выполнении цели функционирования ТО, измерителя информации (ИМ), вырабатывающего текущую информацию о состоянии ТО, программно-задающего устройства, определяющего в сигнальном виде g желаемое поведение ТО, а именно, его выходных или регулируемых переменных u , внешней среды (ВС), отражающей происхождение аддитивных и мультипликативных внешних воздействий f на систему и отдельные ее элементы. Основополагающим функциональным элементом системы управления является регулятор, позволяющий по текущей информации об состоянии объекта и информационным сигналами о желаемом поведении объекта в соответствии с целью функционирования ТО, вырабатывать управляющие воздействия, поступающие на исполнительный механизм и приводящие состояния объекта к желаемым значениям. В цифровых системах управляющие воздействия на основе обработки информации об измерениях и желаемого поведения регулируемых переменных вырабатываются с помощью микропроцессорной техники, другими словами регуляторы в таких системах строятся на основе микроконтроллеров.

2 Принципы построения регуляторов для цифровых (дискретных) систем.

Единый подход к синтезу регуляторов для систем непрерывного и дискретного действия основан на аналитических методах конструирования регуляторов, идеология использования которых позволяет с единых позиций строить структуру регуляторов, а специфика расчетов заключается только в использовании непрерывных или дискретных моделей объектов управления или систем. Следует отметить, что реализацию регуляторов для непрерывных объектов, зачастую осуществляют на микроконтроллерах, дискретизируя непрерывную модель регулятора, полученную при проектировании.

В данном параграфе не будем останавливаться на особенностях математического описания объектов дискретного или непрерывного действия, а рассмотрим общие принципы формирования регуляторов для подобных объектов. Обобщение принципов построения регуляторов для объектов дискретного и непрерывного действия основано на их математическом описании с помощью вектора состояния и использовании принципа Беллмана, что управление есть функция состояния.

Под вектором состояния ОУ понимается такой минимальный набор переменных, знание которых в текущий момент времени позволяет при условии знания последующих внешних воздействий предсказать будущее поведение системы. Другими словами, вектор состояния ОУ есть память о прошлых воздействиях на объект и знание вектора состояния определяет дальнейшую стратегию управлений, с целью достижения желаемой цели функционирования.

Формализуем взаимодействие ОУ и внешней среды. Объект управления ОУ, характеризуется вектором состояния $x \in R^n$, вектором управляющих воздействий $u \in R^k$ и вектором регулируемых переменных $y \in R^k$. Внешняя среда характеризуется вектором состояния ξ и выходными переменными, определяющими внешние возмущения f . Функциональные связи взаимодействия отражены на рисунке 2.

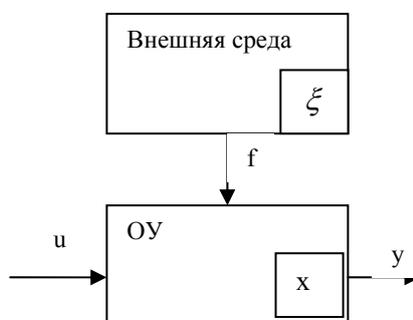


Рисунок 2 - Взаимодействие объекта управления и внешней среды.

В зависимости от принципа работы ОУ (непрерывность, или дискретность) и его математического описания, а также внешней среды, все функции состояний, выходов и управлений могут зависеть как от непрерывного времени t , так и от дискретное времени $t=mT$, где T -интервал дискретности, $m=0,1,2,\dots$ номер интервала дискретности.

В дальнейшем будем считать, что ОУ полностью управляем, т.е. с помощью управления мы можем воздействовать на все собственные движения ОУ и изменять их в соответствии с требуемыми динамическими свойствами, предъявляемыми к замкнутой системе. Также будем считать, что ОУ полностью наблюдаем, другими словами в выходах (регулируемых переменных) ОУ проявляются все собственные движения ОУ и, как следствие, по выходным или измеряемым переменным можно восстановить все переменные вектора состояния. В дальнейшем обозначение y будем присваивать как регулируемым переменным, так и измеряемым.

Будем говорить, что ОУ с полной информацией, если все переменные состояния x доступны для измерения и с неполной информацией, если измеряются только часть переменных вектора состояния, т.е. количество измерений y меньше числа переменных состояния n [$l < n$]. Будем называть внешнюю среду с с полной информацией если все параметры вектора ξ измеряемы. Если измеряется только часть переменных состояния внешней среды или только внешние воздействия f , то внешнюю среду будем называть средой с неполной информацией.

I. Системы стабилизации

a) Построение пропорционального обобщенного регулятора (ОП-регулятора).

На рисунке 3 представлена функциональная схема обобщенного пропорционального регулятора по переменным вектора состояния ОУ и внешней среды. При построении ОП регулятора предполагается, что ОУ с полной информацией и внешняя среда с полной информацией, т.е. измеряются все переменные вектора состояния ОУ и внешней среды.

Используя принцип Беллмана управление формируется как функция состояний ОУ и внешней среды, а именно, для пропорционального регулятора как линейная функция состояний ОУ и внешней среды. Отметим, что использование принципа Беллмана позволяет для замкнутой системы получить наперед заданные желаемые динамические свойства, другими словами позволяет изменить (воздействовать) все собственные движения исходного ОУ.

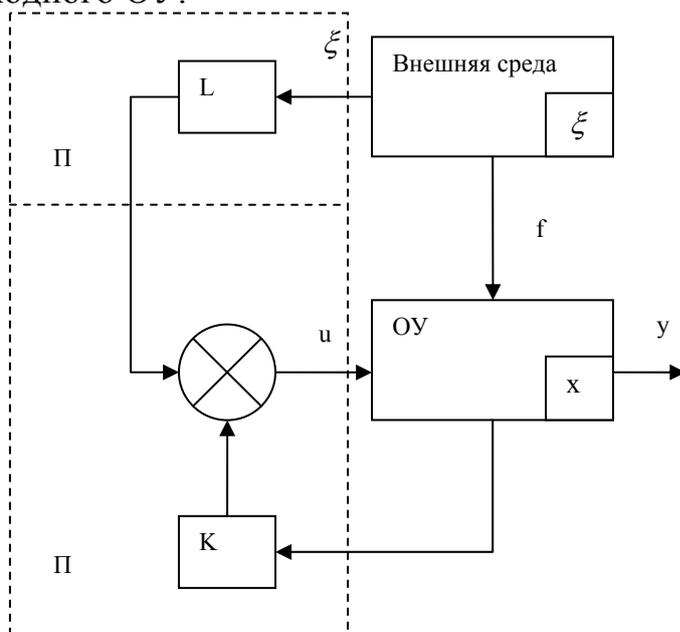


Рисунок 3 - Обобщенный пропорциональный регулятор для системы стабилизации.

Будем формировать управляющие воздействия как линейные функции вектора состояния ОУ и внешней среды в соответствии с уравнением

$$u = -Kx + L\xi$$

K - матрица линейных стационарных обратных связей (ЛСОС) размерности $k \times n$, элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора состояний ОУ, а L - матрица прямых связей по переменным вектора состояния внешней среды размерности $k \times q$, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора состояния внешней среды.

Задача синтеза ОП- регулятора состоит в отыскании таких матриц ЛСОС K и матрицы прямых связей L , которые обеспечивают в системе стабилизации требуемые показатели качества. Матрица K ищется из условий обеспечения в замкнутой системе желаемые динамические свойства (качество и вид переходных процессов тип устойчивости), а матрица L требуемую точность отработки (подавления) внешних воздействий. Устройство, реализующее подобный закон управления будем называть ОП- регулятором по состояниям ОУ и внешней среды.

б) Построение обобщенного пропорционально-дифференциального регулятора (ОПД- регулятора).

Данный регулятор строится для ОУ с неполной информацией, когда измеряется только величина $y \in R^k$ [$k < n$], т.е. измеряется только часть переменных состояния или их линейная комбинация, причем количество измерений меньше чем количество переменных вектора состояний ОУ. При этом полагается, что внешняя среда с полной информацией. Использование принципа Беллмана при формировании управляющих воздействий как функций состояния позволяет данную идеологию провести только для внешних воздействий. Для того, чтобы с помощью управляющих воздействий в замкнутой системе была бы возможность достижения наперед заданных желаемых динамических свойств будем формировать составляющую управления по переменным состояниям ОУ не как функцию переменных состояния, ибо не все переменные состояния измеряются, а как функцию оценок вектора состояния ОУ. Под вектором оценки вектора состояния ОУ понимается такой вектор оценки, который с течением времени стремится к оцениваемому вектору. Устройство, представляющее динамическую систему, которое по текущей информации об измеряемых переменных y и текущих значениях управляющих воздействий вырабатывает вектор оценки, называют устройством оценки. Другими словами, под устройством оценки будем понимать устройство,

которое по текущему значению измеряемых переменных y и управляющему воздействию u вырабатывает вектор оценки \hat{x} , который с течением времени стремится к вектору состояния x ОУ.

В данном случае будем строить регулятор как линейную функцию переменных состояния внешней среды и оценок вектора состояния ОУ, которые вырабатывает устройство оценки.

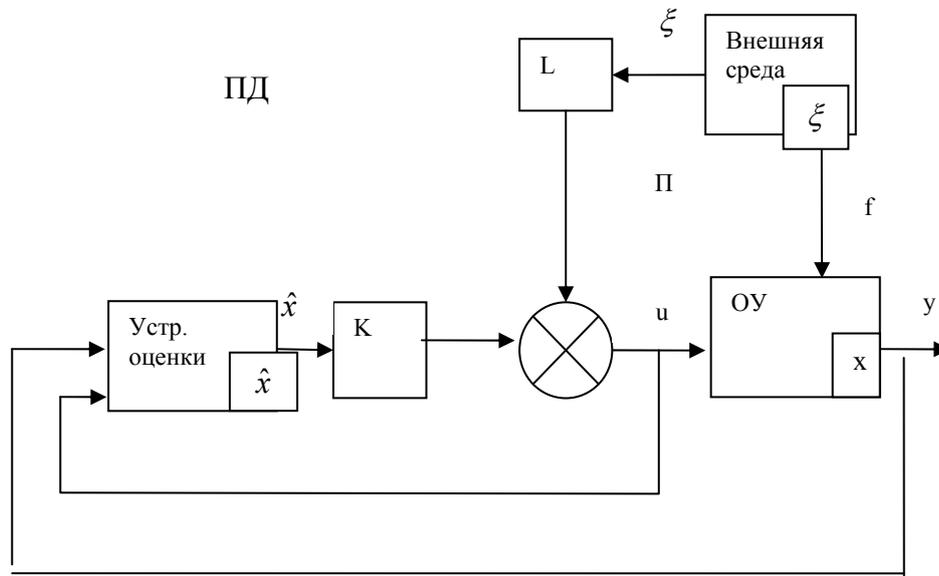


Рисунок 4 - Обобщенный ПД- регулятор с устройством оценки и прямой связью по внешним воздействиям.

В этом случае управляющие воздействия формируются как линейная функция вектора оценок вектора состояния ОУ и линейная функция прямых связей по состояниям вектора внешней среды

$$U = -K\hat{x} + L\xi,$$

где K - матрица линейных стационарных обратных связей (ЛСОС) размерности $k \times n$, элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора оценок состояний ОУ, а L - матрица прямых связей по переменным вектора состояния внешней среды размерности $k \times q$, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора состояния внешней среды. Совокупность устройства оценки вектора состояния и устройства перемножение вектора оценки на матрицу ЛСОС K реализует регулятор, который будем называть обобщенным ОПД-регулятором, ибо устройство оценки эквивалентно введению дифференцирующих связей в закон управления.

в) Построение обобщенного ОПД регулятора по оценкам состояния ОУ и оценкам состояния внешней среды.

В этом случае ОУ с неполной информацией, когда измеряется только часть переменных вектора состояния или их линейная комбинация и количество измерений меньше числа переменных вектора состояния ОУ $y \in R^k$ [$k < n$]. Внешняя среда также с неполной информацией, когда количество измерений меньше, чем количество переменных вектора состояния внешней среды, то есть измеряемые переменные таковы, что $f \in R^l$ [$l < q$].

Строится регулятор, вырабатывается управление как линейную функцию оценок вектора состояния ОУ и внешней среды.

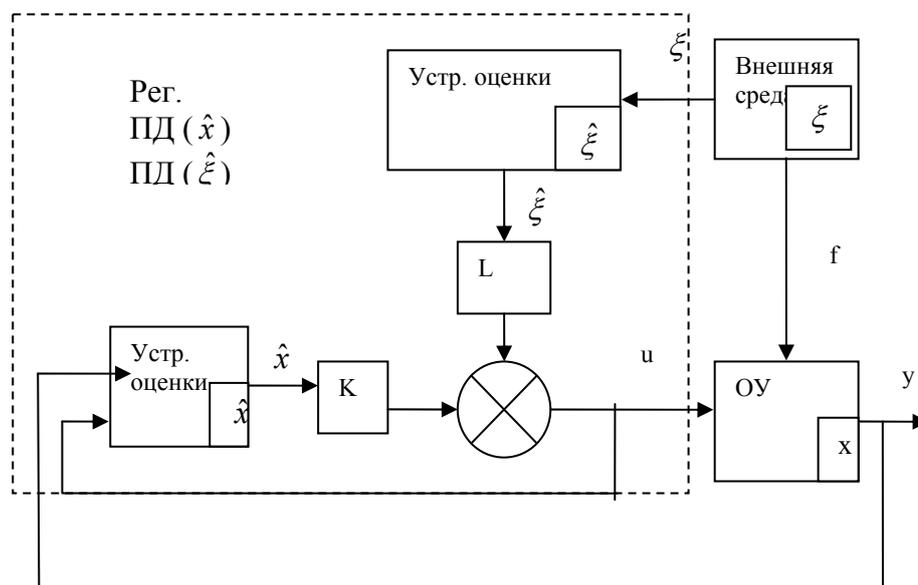


Рисунок 5 - Обобщенные ОПД- регуляторы с устройствами оценки по состояниям ОУ и внешней среды.

Строится регулятор, вырабатывающий управление как линейную функцию оценок вектора состояния ОУ и оценок вектора состояния внешней среды

$$U = -K\hat{x} + L\hat{\xi}$$

где K - матрица линейных стационарных обратных связей (ЛСОС) размерности $k \times n$, элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора оценок состояний ОУ, а L - матрица прямых связей по переменным вектора оценок состояния внешней среды размерности $k \times q$, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора оценок состояния внешней среды.

2. Следящие системы.

а) Рассмотрим ОУ с полной информацией и внешнюю среду с полной информацией, которая порождает задающие воздействия g , определяющие либо желаемое поведение регулируемых переменных y , либо воздействия, характеризующие поведение внешних объектов координаты, которых требуется отслеживать. В дальнейшем будем полагать, что количество входов g ($g \in R^k$) и выходов y совпадает, другими словами система содержит k каналов. При этом вектор ошибки между задающими и регулируемыми переменными определяется соотношением

$$e = g - y,$$

где вектор ошибки имеет размерность $e \in R^k$, совпадающую с размерностями векторов задающих воздействий и регулируемых переменных. Предполагается, что измеряется ошибка слежения e

$$e = g - y$$

$$\xi = \begin{bmatrix} g \\ \bar{x} \end{bmatrix}, g \in R^k; \xi \in R^q; \bar{x} \in R^{q-k}$$

а также часть переменных состояния внешней среды, дополняющих задающие воздействия g до полного вектора состояния внешней среды.

Предполагается, что та часть переменных вектора состояния ОУ

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, x \in R^n; y \in R^k; \bar{x} \in R^{n-k}$$

, которая в совокупности с регулируемыми переменными определяет вектор состояния ОУ измеряется.

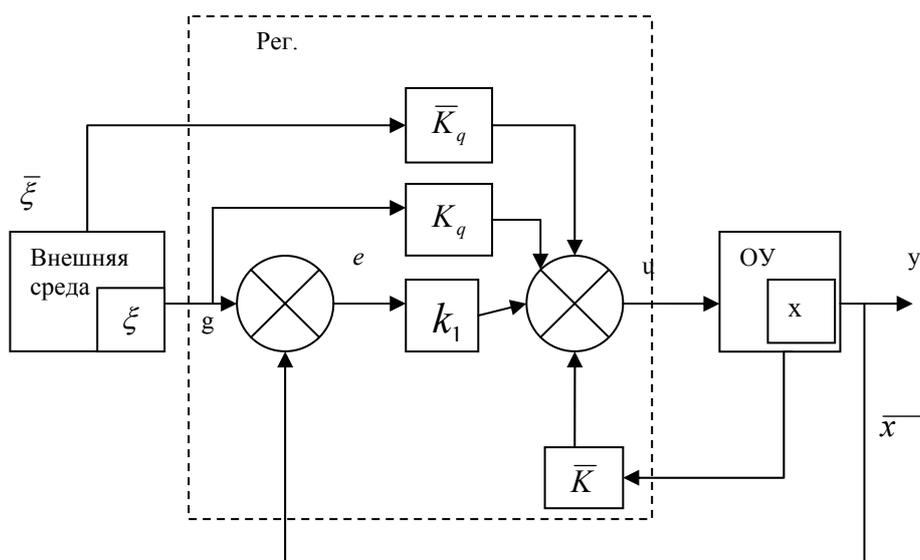


Рисунок 6 - Обобщенный пропорциональный регулятор ОПД по состоянию ОУ и внешней среды для следящей системы.

Для следящей системы обобщенный пропорциональный регулятор формируется в соответствии с уравнениями

$$U = k_1 e - \bar{K} \bar{x} + K_q g + \bar{K}_q \bar{\xi}$$

где $k_1 I$ матрица коэффициентов передачи по вектору ошибки размерности $k \times n$, матрица \bar{K} - матрица линейных стационарных обратных связей по переменным вектора состояния x , матрица K_q - матрица коэффициентов передачи по задающим воздействиям размерности $k \times k$, матрица \bar{K}_q - матрица прямых связей по измеряемым переменным состояния внешней среды. Формирование управляющих воздействий, выраженных через составные вектора состояний внешней среды

$$U = k_1 q - k_1 y + K_q q + \bar{k}_q \bar{\xi} - \bar{k} \bar{x} = [k_1 + K_q, \bar{k}_q] \begin{bmatrix} q \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} - [k_1, \bar{k}] \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

Используя обозначения

$$L = [k_1 + k_q, \bar{k}_q]$$

$$K = [k_1, \bar{k}]$$

формирование управляющих воздействий можно записать в более простой форме

$$U = -Kx + L\xi$$

а поэтому проектирование подобного регулятора заключается в отыскании таких матриц линейных стационарных связей K и матрицы прямых связей L , которые обеспечивают в замкнутой системе желаемые показатели качества переходных процессов и требуемые точностные показатели при заданном классе задающих воздействий.

Устройство, реализующее подобное управляющее воздействие является обобщенным пропорциональным ОП регулятором по переменным состояния ОУ и переменным состояния задающего воздействия.

б) Построение регулятора для ОУ с полной информацией, при задающем воздействии с неполной информацией, когда измеряется лишь ошибка между задающими воздействиями и регулируемым переменными ОУ.

В этом случае предполагается, что измеряется ошибка между задающими воздействиями и регулируемым переменными ОУ

$$e = g - y, e \in R^k$$

и переменные составного вектора состояния ОУ \bar{x} - измеряются ($\bar{x} \in R^{n-k}$)

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, x \in R^n; y \in R^k; \bar{x} \in R^{n-k}$$

Составной вектор состояния задающих воздействий может быть представлен в виде

$$\xi_q = \begin{bmatrix} g \\ \bar{\xi}_q \end{bmatrix}, \xi_q \in R^q; \bar{\xi}_q \in R^{q-k}; g \in R^k$$

причем полагается, что вектор задающих воздействий g измеряется.

Управляющие воздействия для ОПД регулятора формируются на основе следующих соотношений

$$U = k_1 e - \bar{k} \bar{x} + L_q \hat{\xi}_q = k_1 q - k_1 y - \bar{k} \bar{x} + L_q \hat{\xi}_q,$$

где k_1 - матрица коэффициента передачи по ошибке $[k_1 k]$,

матрицы \bar{k} - матрица коэффициентов линейных стационарных обратных связей ЛСОС по измеряемым переменным вектора состояния ОУ.

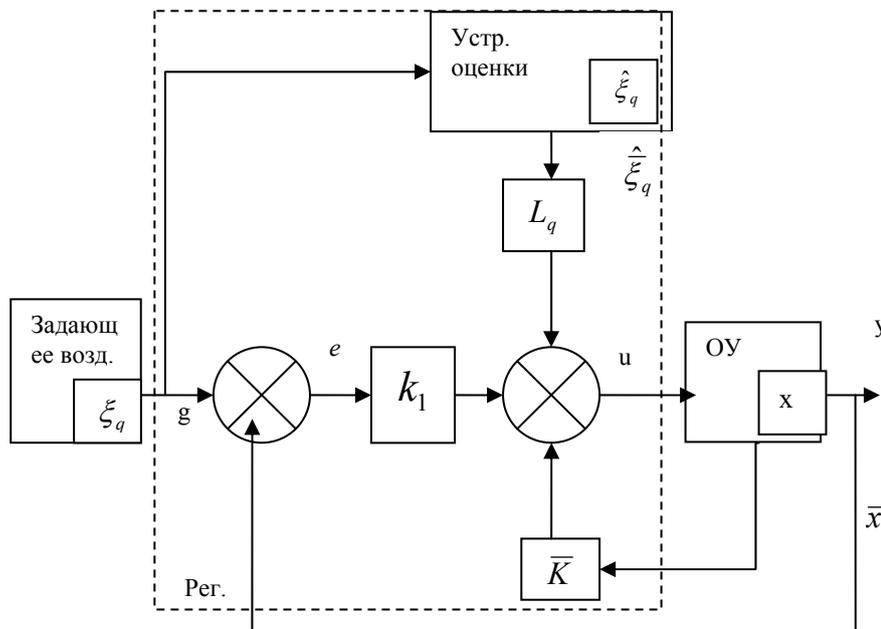


Рисунок 7 - Обобщенный регулятор ОПД- по задающему воздействию (пропорционально-дифференцирующий) и пропорциональный регулятор ОП- по состояниям ОУ.

Матрица L_q - матрица прямых связей ($L_q - [k \times (q - k)]$)

$$L_q = [k_1, L_q]$$

включает добавки в управляющее воздействие оценки по части переменных вектора состояния задающего воздействия ($\hat{\xi}$ - вектор оценки $\bar{\xi}$)

$$\hat{\xi}_q = \begin{bmatrix} q \\ \hat{\xi}_q \end{bmatrix}$$

Устройство, вырабатывающее подобное управляющее воздействие, будем называть обобщенным пропорционально дифференциальным (ОПД) регулятором по оценкам вектора состояния внешних воздействий и обобщенным пропорциональным регулятором (ОП) по измеряемым состояниям ОУ.

в) Построение регулятора со встроенной моделью внешнего воздействия.

Регулятор со встроенной моделью внешнего воздействия позволяет получить нулевую ошибку в установившемся режиме на заданный класс внешних воздействий, описание которых определяет наиболее существенные воздействия на систему, приводящие к наибольшим ошибкам функционирования системы. Предполагается, что эти воздействия описываются линейными автономными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, которые получены на основе анализа их происхождения – тех физических законов, положенных в основу их функционирования.

Рассмотрим случай, когда по входу измеряется только задающее воздействие, а ОУ с полной информацией, но измеряется.

$$\bar{x} : \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \bar{x} \in R^{n-k}; e = q - y; e \in R^k$$

В этом случае вектор состояния встроенной модели совпадает по размерности с вектором состояния, а встроенная модель совпадает по описанию с моделью задающего воздействия, где z - вектор состояния встроенной модели по размерности совпадающая с вектором состояния задающего воздействия g

$$U = k_1 e + k_z z - \bar{k} \bar{x} = k_1 q - k_1 y + k_z z - \bar{k} \bar{x} = k_1 q + k_z z - kx$$

$$K = [k_1, \bar{k}]$$

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

где $k_1 - [k \times k]; k_z - [k \times q]$ матрицы коэффициентов передачи по соответствующим переменным соответствующей размерности.

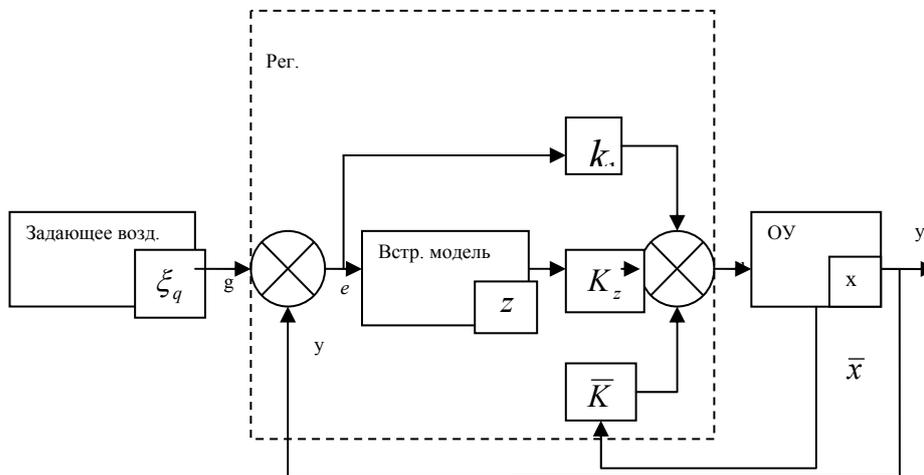


Рисунок 8 - Обобщенный ОПИ регулятор со встроенной моделью.

Регулятор со встроенной моделью (ПИ) обобщенный пропорционально-интегральный регулятор позволяет в случае обеспечения устойчивости и требуемого качества процессов в замкнутой системе получение нулевой установившейся ошибки на задающее воздействие, описание которого задается линейной автономной моделью. В частном случае, для следящих систем с одним входом и выходом, если описание встроенной модели задается интегрирующим элементом (постоянные воздействия), то получаем классический регулятор с интегральной связью по управлению.

г) Построение регулятора со встроенной моделью для объект управления с неполной информацией.

В данном случае полагается, что измеряется ошибка между задающими воздействиями и регулируемыми (измеряемыми) переменными ОУ

$$e = q - y; e \in R^k$$

Составной вектор состояния объекта

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}; z \in R^q$$

где y регулируемых (измеряемых) переменных, \bar{x} - вектор размерности ($\bar{x} \in R^{n-k}$), который включает те переменные вектора состояния, которые не доступны для измерения.

Задающее воздействие с неполной информацией, ОУ с неполной информацией.

Уравнение формирования управляющих воздействий обобщенного регулятора со встроенной моделью и обобщенным пропорционально-дифференцирующим регулятором по состоянию ОУ, принимает вид

$$U = k_1 e + K_z z - \bar{k} \hat{x} = k_1 q - k_1 y + K_z z - \bar{k} \hat{x} = k_1 q + K_z z - K \hat{x}$$

$$K = [k_1, \bar{k}]$$

где $\hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x} \end{bmatrix}$.

$$k_1 - [k \times k];$$

$$K_z - [k \times q]$$

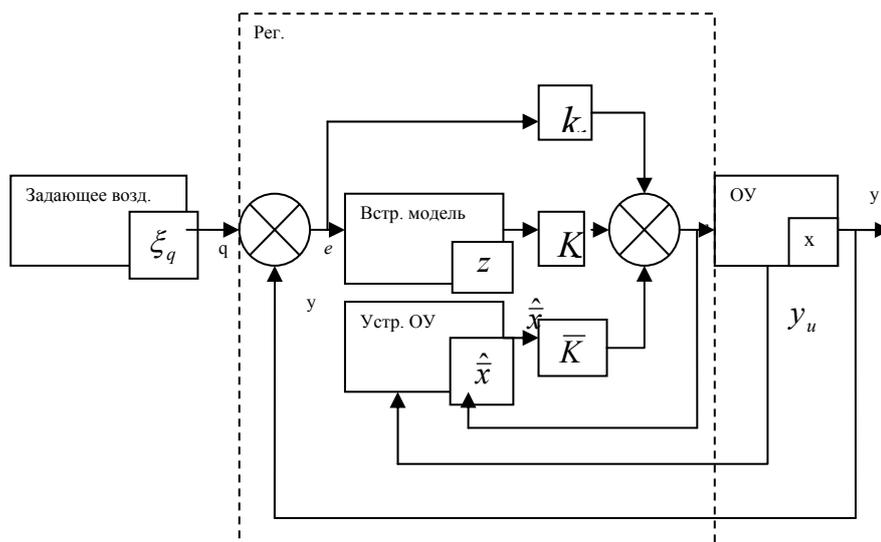


Рисунок 9 - Обобщенный регулятор со встроенной моделью ОПИД и ОПД регулятором по состояниям объекта.

Встроенная модель имеет то же самое математическое описание, что и модель задающего воздействия.

Для всех случаев задача синтеза регулятора состоит в определении таких матриц ЛСОС,

- матриц прямых связей;
- матриц коэффициента передачи по ошибке;
- матриц по состоянию встроенной модели;

- а также в формировании устройств оценок векторов состояния объекта или внешнего воздействия, которое обеспечивает в замкнутой системе требуемые показатели качества переходных процессов и точностные показатели качества.

Приведенные регуляторы имеют одинаковые функциональные схемы для непрерывных и дискретных случаев.

Дискретные системы управления.

Раздел 1. Математические модели дискретных объектов и дискретных процессов внешних воздействий.

1.1 Дискретизация процессов и моделей объектов управления на основе амплитудно-импульсной модуляции.

Любая система автоматического управления состоит из набора элементов, определяющих функционирование система. Для каждого из элементов системы, связь между входной и выходной переменными описывается алгебраическими, дифференциальными, разностными уравнениями, либо уравнениями в частных производных. Под дискретными системами будем понимать такие системы, в которых имеет место хотя бы один элемент, для которого непрерывному изменению входного сигнала соответствует дискретное по времени или по уровню изменение выходного сигнала. Современные аппаратные средства вычислительной техники располагают элементами с высокой разрядной сеткой, а поэтому квантованием по уровню с достаточной для практики точностью можно пренебречь. Квантование же по времени, хотя и производится зачастую с высокой частотой (малым значением интервала дискретности), но для регулятора, вырабатывающего управляющие воздействия, который реализуется на микроконтроллере, требуется алгоритм, заданный в виде рекуррентного соотношения (разностного уравнения). Получение разностного уравнения описания регулятора может производиться по непрерывной модели регулятора, путем замены непрерывных уравнений описания регулятора разностными уравнениями, что, как правило, осуществляется с известной долей приближения, либо разностное уравнение описания регулятора может быть получено по дискретной модели исходного ОУ, учитывающего дискретизацию по времени, на основе аналитических методов проектирования дискретных (цифровых) регуляторов, результатами которых является алгоритм работы регулятора – разностное уравнение описания регулятора.

Рассмотрим элемент системы с входным и выходным воздействиями:



Рисунок 1.1 - Элемент системы с входным и выходным воздействиями.

где x_1 - входная переменная, а x_2 - выходная переменная элемента, другими словами входная переменная есть причина, а изменение выходной переменной есть следствие изменения входной переменной.

Будем говорить, что элемент дискретного принципа действия, если при непрерывном изменении входной переменной выходная переменная изменяется только в дискретные моменты времени. Для элемента дискретного принципа действия характерно, что если изменение входной переменной описывается $x_1(t)$ - непрерывной функцией, то изменение выходной переменной, изменяющейся только в дискретные моменты времени, описывается $x_2(t)$ - функцией, значения которой изменяются только в дискретные моменты времени $t = mT$, где T - интервал дискретности, определяющий моменты изменения функции, а m - целое число $= 0, 1, 2, \dots$, определяющие номер интервала дискретности, а следовательно и момент времени.

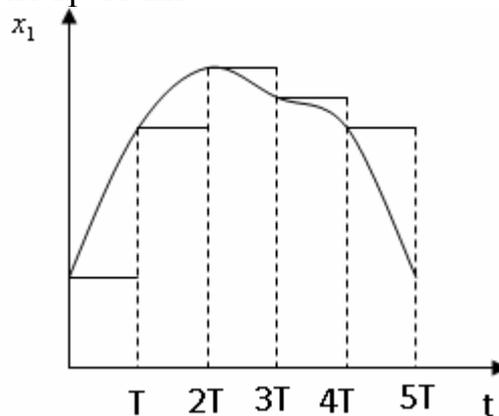


Рисунок 1.2 - Экстрополятор входного сигнала нулевого порядка (запоминающий элемент).

Рассмотрим уравнения запоминающего элемента для произвольного момента времени:

$$mT \leq t < (m + 1)T$$

$$x_2(t) = x_1(mt)$$

$$t = mT + \tau$$

$$0 \leq \tau < T$$

$$x_2(mT + \tau) = x_1(mT)^{(*)}$$

Элемент, описание которого задается уравнением (*), называют запоминающим элементом или экстраполятором нулевого порядка.

Рассмотрим общую ситуацию амплитудно-импульсной модуляции, когда имеет место устройство, генерирующее импульсы определенной формы и заданной длительностью с постоянным интервалом дискретности и амплитудой, пропорциональной значению входного сигнала в предшествующий момент времени.

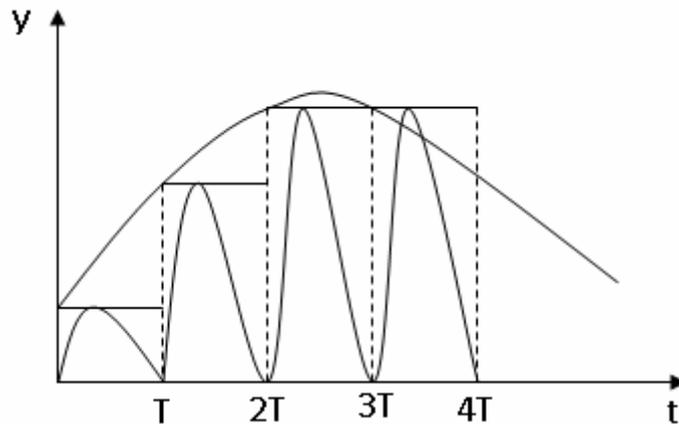


Рисунок 1.3 - Иллюстрация амплитудно-импульсной модуляции.

Таким образом, под амплитудно-импульсной модуляцией будем понимать такое преобразование входного сигнала, когда значения выходного сигнала представляют из себя последовательность импульсов одинаковой формы и длительности τ_1 (при $\tau_1 < T$) с одинаковым периодом следования, равным интервалу дискретности T , при этом амплитуда импульсов на производном интервале дискретности, равна (пропорциональна) значению входного сигнала на предшествующем интервале дискретности в моменты времени $t = mT$.

Зададим описание импульса, который имеет место на каждом интервале дискретности:

$$0 \leq \tau < T,$$

положим, что нормированный импульс задается функцией $\varphi(t)$, определенной на промежутке времени $0 \leq \tau < \tau_1$, где τ_1 -длительность импульса и функция $\varphi(\tau) = 0$ при $\tau_1 \leq \tau < T$, тогда для произвольного момента времени имеем

$$\begin{aligned} mT < t < (m+1)T \\ x_2(mT + \tau) &= \varphi(\tau)x_1(mT) \\ (t = mT + \tau) \end{aligned},$$

то есть второе уравнение определяет связь входной и выходной переменных импульсного элемента при амплитудно-импульсной модуляции.

Рассмотрим структурное представление в системах управления импульсного элемента, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию. Для отражения дискретизации по времени при амплитудно-импульсной модуляции в структуру системы элемента вводится ключ, замыкание которого происходит только в дискретные моменты времени

$t = mT$, причем полагается, что импульсы бесконечно малой длительности, а их амплитуда пропорциональна (равна) амплитуде входного сигнала в дискретные моменты времени $t = mT$.

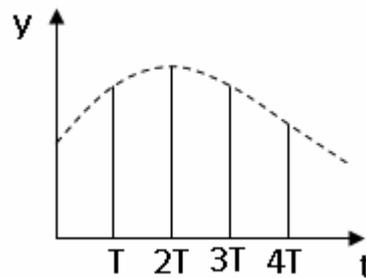


Рисунок 1.4 График работы ключа.

Для отражения формы импульсов, определяющих изменение выходного при амплитудно-импульсной модуляции, вводится импульсный элемент.

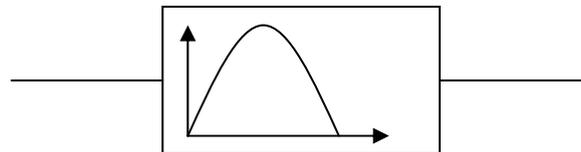


Рисунок 1.5 Форма импульса, генерируемая импульсным элементом.

Под импульсным элементом будем понимать элемент, который генерирует последовательность импульсов одинаковой формы и длительности τ_1 (при $\tau_1 < T$) единичной амплитуды, описание которого задается функцией $\varphi(\tau)$ при $0 \leq \tau < \tau_1$, и эти импульсы генерируются с периодом, равным интервалу дискретности T в моменты времени $t = mT$.

Отражение амплитудно-импульсной модуляции в любой системе определяется введением в систему последовательного соединения ключа и импульсного элемента. В дальнейшем совокупность ключа и импульсного элемента будем называть Импульсным элементом (ИЭ).

1.2 Построение модели объекта управления с элементом амплитудно-импульсной модуляции и непрерывной линейной частью.

Рассмотрим последовательное соединение ИЭ, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию, и НЛЧ, описание которой задается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

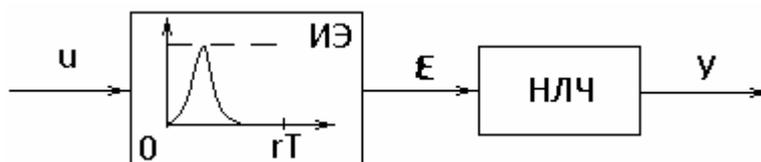


Рисунок 1.6 - Последовательное соединение ИЭ и НЛЧ.

На функциональной схеме u -входной сигнал для последовательного соединения ИЭ и НЛЧ, ε - сигнал, подаваемый на вход НЛЧ, y -выходной сигнал НЛЧ.

Будем полагать, что НЛЧ описывается уравнением движения в пространстве состояний – уравнением «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} \dot{x} = A_H x + B_H \varepsilon \\ y = Cx \end{cases}$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния непрерывной линейной части (НЛЧ), $\varepsilon \in R^1$ - входной сигнал для НЛЧ, $y \in R^1$ - выходной сигнал (выходная переменная) НЛЧ, а матрицы описания модели «вход-состояние-выход» имеют следующие размерности

$$\begin{aligned} A_H &- n \times n; \\ B_H &- n \times 1; \\ C &- 1 \times n. \end{aligned}$$

Описание ИЭ при амплитудно-импульсной модуляции при определяется соотношениями

$$\begin{aligned} t &= mT + \tau \\ \varepsilon(mT + \tau) &= \varphi(\tau)u(mT) \\ 0 &< \tau < T \end{aligned}$$

Получим модель, связывающей значения входной и выходной переменных последовательного соединения ИЭ и НЛЧ только в дискретные моменты времени $t = mT$. Для этого рассмотрим решение уравнения движения НЛЧ для произвольного момента времени t ($mT \leq t < (m+1)T$)

$$x(t) = e^{A_H(t-mT)} x(mT) + \int_{mT}^t e^{A_H(t-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta$$

где $t = (m+1)T$ - последующий интервал дискретности интервал дискретности от предшествующего интервала $t = mT$, тогда разностное

уравнение совместного описания ИЭ и НЛЧ для дискретных моментов времени примет вид

$$x((m+1)T) = e^{A_H T} x(mT) + \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta$$

Введем обозначение, пусть $e^{A_H T} = A$ и воспользуемся уравнением описания ИЭ

$$\varepsilon(mT + \tau) = \varphi(\tau)u(mT)$$

тогда

$$\int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta =$$

$$\int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varphi(\theta - mT)u(mT) d\theta = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau B_H u(mT)$$

где $\theta = mT + \tau$.

Отметим, что окончательно полученное интегральное выражение не зависит от номера интервала дискретности и результат его вычисления дает постоянную матрицу для любого из номеров интервалов дискретности m . Обозначим значение данного интегрального выражения через матрицу

$$B = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau B_H$$

тогда окончательно для интегральной составляющей имеет место соотношение

$$\int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta = Bu(mT)$$

При этом, уравнение движения последовательного соединения ИЭ и НЛЧ для дискретных моментов времени $t = mT$ определяется разностным уравнением с постоянными параметрами

$$\begin{cases} x((m+1)T) = Ax(mT) + Bu(mT) \\ y(mT) = Cx(mT) \end{cases}$$

где A -матричная экспонента $= e^{A_H T}$ - переход от непрерывной модели к дискретной модели, определяющая динамические свойства данного соединения, а матрица входов по управлению определяется в виде

$$B = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau B_H$$

Получено совместное описание импульсного элемента и НЛЧ в виде разностного уравнения, заданного в форме Коши, причем это уравнение линейное, и задает связь значения вектора состояния на последующем интервале дискретности со значениями вектора состояния и входных сигналов на предшествующих интервалах дискретности.

В дальнейшем, в разностных уравнениях, при их записи будем опускать обозначение интервала дискретности, оставив лишь номера интервалов дискретности, полагая, что значение интервала дискретности используется при вычислении матриц дискретного описания последовательного соединения ИЭ и НЛЧ (матриц A и B)

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

Отметим также, что разностные уравнения задают описание процессов в системе только в дискретные моменты времени $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots, T$ - интервал дискретности, а m – номер интервала дискретности.

Частный случай:

Рассмотрим последовательное соединеня запоминающего элемента (экстраполятора нулевого порядка) и непрерывной линейной части (НЛЧ).

ИЭ:

$$\varepsilon(mT + \tau) = u(mT)$$

$$0 \leq \tau \leq T$$

$$A = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)} d\tau B_H$$

$$\int_0^T e^{A_H(T-\tau)} d\tau = e^{A_H T} \int_0^T e^{-A_H \tau} d\tau = e^{A_H T} A_H^{-1} (I - e^{-A_H T}) = A_H^{-1} (e^{A_H T} - I) =$$

$$= A_H^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A_H^i T^i}{i!} - I \right) = A_H^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!} - I \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} =$$

$$A = e^{A_H T}$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H$$

Приближенное вычисление матриц A и B конечным числом членов ряда.
 Выделим k -членов ряда, тогда приближенное вычисление матриц описания движений дискретной модели можно записать в форме

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i=0}^k \frac{A_H^i T^i}{i!} \\ B = \sum_{i=1}^k \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H \end{array} \right.$$

Чем большее количество членов ряда k используется при вычислении матриц описания дискретной модели, тем выше степень приближения вычислений.

Пример:

Рассмотрим последовательное соединение запоминающего элемента и НЛЧ, состоящей из двух интеграторов.

Уравнение описания движений НЛЧ, содержащей два интегратора с единичными коэффициентами передачи, в скалярной форме можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon \\ y = x_1 \end{array} \right.$$

или с использованием векторно-матричных обозначений в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где матрицы описания НЛЧ и вычисленные по этим матрицам матрицы дискретного описания последовательного соединения ИЭ и НЛЧ имеют вид

$$\begin{aligned}
A_H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0] \\
A_H^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_H^3 &= O, i \geq 2 \\
A &= e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!} = I + A_H T \\
A &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
B &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H = (IT + \frac{A_H T^2}{2}) B_H = \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

где T - интервал дискретизации.

Следовательно, уравнение «вход-состояние-выход», определяющее описание движения данного соединения в дискретные моменты времени, примет вид

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(m) \\ y(m) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Выберем интервал дискретности $T = 1c$, тогда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим реакцию последовательного соединения на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях $x(0)=0$, то есть $u(t) = 1, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= y(0) = 0 \\
x_2(0) &= \dot{x}(0) = 0 \\
u(m) &= 1
\end{aligned}$$

Проводя последовательные вычисления последующих значений вектора состояний по предыдущим значениям, получим значения вектора состояния, а следовательно и значения регулируемой переменной для моментов времени 1 с., 2 с., 3 с. и так далее для любого номера интервала дискретности m (момента времени)

$$\begin{aligned}
x(m+1) &= Ax(m) + Bu(m) \\
u(m) &= 1 \\
t &= 1c, m = 0 \\
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \\
x_1(1) &= 0.5 \\
x_2(1) &= 1 \\
t &= 2c, m = 1 \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
x_1(2) &= 2 \\
x_2(2) &= 2 \\
t &= 3c, m = 2 \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) \\
\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
x_1(3) &= 4.5 \\
x_2(3) &= 3
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательное вычисление значений состояний позволяет получить численное решение разностного уравнения «вход-состояние-выход», а тем самым производить анализ поведения траекторий движения исследуемого соединения.

1.3 Формы задания уравнений движения дискретного объекта (системы) в виде разностных уравнений.

1. Дискретная модель объекта, заданная разностным уравнением в нормальной форме Коши-уравнение вход-состояние-выход.

Разностное уравнение «вход-состояние-выход» задается уравнениями

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

где $x \in R^n$ -вектор состояния объекта управления ОУ, $u \in R^k$ -задающее (управляющее) воздействие, $y \in R^k$ -вектор регулируемых переменных, $A - n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами, определяющая

динамические свойства системы, $B - n \times k$ -матрица входов, определяющая точки приложения к объекту управляющих воздействий, $C - k \times n$ -матрица выходов, определяющая связь между переменными состояния и выходными переменными.

Рассмотрим вычисление переходных процессов для ОУ на основе разностных уравнений описания движения объекта. Поведение регулируемых (выходных) переменных ОУ целиком и полностью определяется поведением вектора состояния объекта. Поэтому получим выражение для вычисления значения вектора $x(t)$ в произвольный момент времени $t = mT$, если заданы начальные условия, т.е. вектор начальных значений $x(0)$ и значения внешней функции $u(m)$ для любого момента времени $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots$.

Для решения поставленной задачи рассмотрим рекуррентное решение разностного уравнения и установим общую закономерность зависимости значений вектора состояния от начальных значений вектора состояния и внешней функции:

1) на первом шаге по заданным начальным условиям на вектор состояния $x(0)$ и значению внешней функции $u(0)$ вычислим последующее значение вектора состояния $x(1)$ в соответствии с исходным уравнением движения:

$$\begin{aligned} x(0), u(0), m = 0, \\ x(1) = Ax(0) + Bu(0), \end{aligned}$$

2) на втором шаге по полученному значению вектора состояния $x(1)$ на предыдущем шаге и значению внешней функции $u(1)$ на первом номере интервала дискретности вычислим последующее значение вектора состояния $x(2)$ в соответствии с исходным уравнением движения:

$$\begin{aligned} x(1), u(1), m = 1, \\ x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1). \end{aligned}$$

3) аналогично произведем вычисления на третьем шаге

$$\begin{aligned} x(2), u(2), m = 2, \\ x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2). \end{aligned}$$

Продолжая вычисления рассмотрим m -й шаг, для которого известно значение вектора состояния на предыдущем шаге и значение внешнего воздействия $x(m-1), u(m-1)$. Просматривая закономерность вычисления вектора состояния на предшествующих шагах, получим выражение для

вычисления вектора состояния для произвольного номера интервала дискретности $x(m)$:

$$x(m) = Ax(m-1) + Bu(m-1) = A^m(x(0)) + A^{m-1}Bu(0) + \\ + A^{m-2}Bu(1) + \dots + Bu(m-1) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i Bu(m-1-i).$$

Аналитическое решение уравнения.

Таким образом, аналитическое решение разностного уравнения можно записать в двух эквивалентных формах

$$x(m) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i Bu(m-1-i) = \\ = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} Bu(i)$$

в которых слагаемые, содержащие суммы, подобны записи интеграла типа Дюамеля для непрерывного объекта или системы.

По аналогии приведем решение уравнения «вход-состояние-выход» дифференциального уравнения, описания движения непрерывного объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau$$

В аналитическом решении разностного уравнения 1-е слагаемое, порожденное ненулевыми начальными условиями, определяет свободное движение дискретной системы или объекта, а 2-е слагаемое, порожденное внешней функцией, вынужденное движение системы.

Из анализа решения следует, что матрица A описания движения исходного объекта, а именно ее свойства (характеристический полином, корни характеристического полинома) определяют решение уравнения или поведение процессов для ОУ (системы).

Пример:

Для исходной дискретной системы требуется найти аналитическое решение, описывающее поведение процессов при постоянном внешнем воздействии и нулевых начальных условиях.

Предполагается, что все собственные числа матрицы A или корни характеристического полинома по модулю меньше единицы, начальные условия нулевые, а внешнее воздействие имеет постоянное значение

$$x(0) = 0, u(m) = u_0, m = 0, 1, 2, \dots, K$$

При этом характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det[A - zI] = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

где z_1, z_2, \dots, z_n - корни характеристического полинома, причем все корни по модулю меньше единицы. Производя вычисления в соответствии с аналитическим решением уравнения движения, получаем конечный ряд, похожий на геометрическую прогрессию (в скалярном случае совпадающий), который удается свести к более простому выражению

$$\begin{aligned} |z_i| < 1, i = \overline{1, n}. \\ x(m) &= \sum_{i=0}^{m-1} A^i B u_0 = (I + A + A^2 + \dots + A^{m-1}) B u_0 = \\ &= (I - A^m)(I - A)^{-1} B u_0 \end{aligned}$$

Матрица A в этом случае подобна знаменателю геометрической прогрессии для скалярного случая.

2. Задание уравнений движения в виде разностного уравнения n -го порядка.

Для объектов или систем с одним входом и выходом уравнение движения может быть задано следующим уравнением

$$\begin{aligned} y(m+n) + a_{n-1}y(m+n-1) + \dots + a_1y(m+1) + a_0y(m) = \\ = b_k u(m+k) + b_{k-1}u(m+k-1) + \dots + b_1u(m+1) + b_0u(m), \end{aligned}$$

где y - регулируемая (выходная) переменная, u - входное (управляющее) воздействие, m - номер интервала дискретности $m = 0, 1, 2, \dots, K$ (целое число), n - максимальный сдвиг выходной переменной относительно текущего значения m , определяющий порядок разностного уравнения, k - максимальный сдвиг входной переменной относительно текущего значения входной переменной m , причем $k \leq n$ - условие физической реализуемости, а параметры

$$\begin{aligned} a_i, i = 0, 1, \dots, n-1 \\ b_j, j = \overline{0, k} \end{aligned}$$

постоянные коэффициенты, зависящие от коэффициентов передачи и постоянных времени отдельных составных элементов ОУ (системы) и интервала дискретизации.

Если в левой части разностного уравнения заменить выходную переменную, сдвинутую на i интервалов ($y(m+i)$) на алгебраическую переменную z^i , и приравнять полученный полином к нулю, то получаем характеристическое уравнение ОУ (системы)

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0.$$

Решение этого уравнения, то есть его корни z_1, z_2, \dots, z_n будут корнями разностного уравнения ОУ (системы).

Переходные процессы ОУ (системы) по описанию движения, заданным разностным уравнением можно получить следующим образом. Если определить n начальных условий, а именно n значений выходной функции $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ и задать вынуждающую функцию $u(m)$ для любого номера интервала дискретности $m = 0, 1, 2, \dots, K$, то разностное уравнение имеет единственное решение, порожденное ненулевыми начальными условиями и вынуждающей функцией.

Решение разностного уравнения.

Пусть z_1, z_2, \dots, z_n - вещественные и различные корни разностного уравнения. Положим, что для заданной вынужденной функции $u(m)$, определенной на любом номере интервала дискретности $m = 0, 1, 2, \dots, K$, найдено частное решение уравнения, обращающее исходное уравнение в тождество на любом из интервалов дискретности, т.е. для заданного $u(m)$ найдено $y_r(m)$ при любом m

$$\begin{aligned} y_r(m+n) + a_{n-1}y_r(m+n-1) + \dots + a_1y_r(m+1) + a_0y_r(m) &\equiv \\ &\equiv b_k u(m+k) + b_{k-1}u(m+k-1) + \dots + b_1u(m+1) + b_0u(m). \end{aligned}$$

где y_r - частное решение уравнения движения при заданном внешнем воздействии $u(m)$ при $m = 0, 1, 2, \dots, K$.

Частное решение разностного уравнения ищется по виду вынужденной функции из условия обращения исходного уравнения в тождество.

Пример:

Положим, что внешнее воздействие постоянно $u(m) = u_0 - const$, при любом $m = 0, 1, 2, \dots, K$.

Будем искать частное решение $y_r(m)$ также как постоянную функцию $y_r(m) = y_0$, следовательно

Пример:

Найти реакцию системы, с уравнением движения:
 $y(m+2) - 1.3y(m+1) + 0.4y(m) = 0.1u(m)$, на ступенчатое постоянное воздействие при нулевых начальных условиях, т.е. $y(0) = 0, y(1) = 0, u(m) = 1$ при любом $m = 0, 1, 2, \dots$.

1). Найдем частное решение:

$$\begin{aligned}y_r(m) &= y_0, \\y_0 - 1.3y_0 + 0.4y_0 &= 0.1 \cdot 1, \\y_0 &= 1.\end{aligned}$$

2). Определим корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned}z^2 - 1.3z + 0.4 &= 0, \\z_1 &= 0.8, \\z_2 &= 0.5.\end{aligned}$$

Тогда общее решение разностного уравнения может быть записано в виде
 $y(m) = c_1 \cdot 0.8^m + c_2 \cdot 0.5^m + 1$,

откуда из приравнивания начальных условий значениям переменной y в соответствующие моменты времени получаем систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов, решение которой дает значения неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ 0.8c_1 + 0.5c_2 + 1 = 0 \end{cases}, \\c_1 = \frac{2}{3}; c_2 = -1\frac{2}{3}.$$

Окончательно решение исходного уравнения имеет вид

$$y(m) = -\frac{5}{3} \cdot 0.8^m + \frac{2}{3} \cdot 0.5^m + 1,$$

и проверка общего решения по начальным значениям подтверждает правильность решения

$$\begin{aligned}y(0) &= -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 0, \\y(1) &= -\frac{5}{3} \cdot 0.8 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 + 1 = 0.\end{aligned}$$

1.4 Построение моделей внешних воздействий.

Для описания дискретных процессов присущих цифровым системам используется понятие решетчатой функции. Под решетчатой функцией понимается функция, определенная только на дискретном множестве точек, другими словами $y(m)$ - решетчатая функция, если ее значения определены для любого номера $m = 0, 1, 2, \dots, K$.

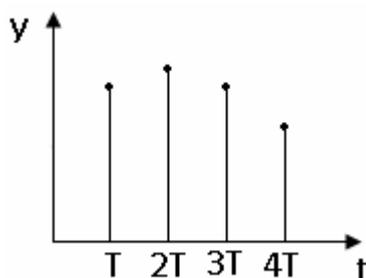


Рисунок 1.7 - График изменения решетчатой функции.

Под решетчатой функцией $y(m)$, используемой для описания поведения дискретных процессов, понимаем такую функцию $y(mT)$ заданную на дискретном множестве моментов времени $t = mT$, где T - интервал дискретности, а $m = 0, 1, 2, \dots, K$ номер интервала дискретности. В дальнейшем при записи решетчатой функции обозначение интервала дискретности будем опускать, подразумевая что номер интервала дискретности m определяет момент времени $t = mT$, а тем самым решетчатая функция есть функция времени.

Для анализа поведения дискретных процессов и упрощения решения линейных разностных уравнений, определяющих развитие во времени процессов цифровых систем, вводится дискретное преобразование Лапласа. Дискретное преобразование Лапласа позволяет заменить операции сдвига функции и операцию суммирования алгебраическими операциями, что упрощает технологию анализа поведения дискретных процессов и решения разностных уравнений, сводя временные операции с решетчатыми функциями к алгебраическим преобразованиям.

Прямое дискретное преобразование Лапласа.

Для решетчатой функции $y(m)$, определенной для любого $m = 0, 1, 2, \dots, K$, дискретное изображение Лапласа $Y(z)$ определяется отношением:

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m}$$

где z -оператор дискретного изображения Лапласа, определяемый соотношением $z = e^{sT}$, s -оператор непрерывного изображения Лапласа, T -интервал дискретности.

Операцию взятия дискретного изображения Лапласа от решетчатой функции будем обозначать

$$Y(z) = Z[y(m)],$$

как оператор дискретного преобразования Z примененный к временной решетчатой функции $y(m)$.

Пример: Получим дискретное преобразование Лапласа для постоянной решетчатой функции $y(m) = y_0$, определенной для любого $m = 0, 1, 2, \dots$. Воспользуемся определением прямого дискретного преобразования Лапласа и на основании разложения в ряд и свертки этого изображения получим дискретное изображение Лапласа этой функции

$$Y(z) = Z[y(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} y_0 z^{-m} = y_0 \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} = y_0 (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = y_0 \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{y_0 z}{z - 1}.$$

Обратное преобразование Лапласа.

Оригинал дискретного преобразования Лапласа $Y(z)$ решетчатой функции $y(m)$ вычисляется с помощью кругового интеграла

$$y(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz,$$

который и определяет связь оригинала решетчатой функции с ее изображением.

Вычисление кругового интеграла.

Предположим, что изображение Лапласа $Y(z)$ есть дробно-рациональная функция, и порядок знаменателя равен n . Тогда, если полином приравнять к нулю и найти корни, считая, что z -алгебраическая переменная, то эти корни z_1, z_2, \dots, z_n определяют полюса или особые точки подинтегрального выражения при $m \geq 1$. Заметим, что при $m = 0$ может добавиться еще один полюс, порожденный множителем $\frac{1}{z}$, или z^{-1} , и этот полюс $z_{n+1} = 0$.

Применим формулу Коши для вычисления кругового интеграла:

4.5 Положим, что z_1, z_2, \dots, z_n -полюса подинтегрального выражения $Y(z) \cdot z^{n-1}$, и все эти полюса различны, тогда по теореме Коши значение кругового интеграла равно сумме вычетов, вычисленных в особых точках, равных полюсам подинтегрального выражения:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}_{z=z_i} [Y(z) z^{m-1}]$$

$$\operatorname{Re}_{z=z_i} [Y(z) z^{m-1}] = [(z - z_i) Y(z) z^{m-1}]_{z=z_i}.$$

4.6 Рассмотрим случай кратных корней $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, т.е. z_1 -корень кратности n . В этом случае:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz = \operatorname{Re}_{z=z_1} [Y(z) z^{m-1}]$$

$$\operatorname{Re}_{z=z_1} [Y(z) z^{m-1}] = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_1)^{n-1} Y(z) z^{m-1}]_{z=z_1}$$

Пример. Требуется найти оригинал функции, изображение которого задается выражением

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)} y_0.$$

Найдем оригинал, используя теорему Коши

$$y(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z}{(z-1)} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{y_0 z^m}{(z-1)} dz,$$

где $z_1 = 1$ - полюс (особая точка) подинтегрального выражения. Производя вычисление вычета, получим оригинал функции

$$y(m) = \left[(z-1) \frac{y_0 z^m}{(z-1)} \right]_{z=1} = y_0.$$

Свойства дискретного преобразования Лапласа.

Дискретное преобразование Лапласа от функции, сдвинутой на один или несколько интервалов дискретности.

Положим, что $y^{(m)}$ -решетчатая функция и для нее существует дискретное преобразование Лапласа: $Y(z) = Z[y(m)]$, тогда дискретное преобразование Лапласа от решетчатой функции, сдвинутой на один интервал дискретности, равно:

$$Y_1(z) = z[y(m+1)] = zY(z), (y(0) = 0).$$

$$Y_k(z) = z^k[y(m+k)] = z^k Y(z),$$

$$(y(0) = 0; y(1) = 0; \dots; y(k-1) = 0).$$

Вычисление дискретного преобразования Лапласа для решетчатой функции, если известен ее непрерывный аналог и определено непрерывное изображение Лапласа этой функции.

Положим, что $y^{(m)}$ -решетчатая функция, а $y(t)$ -непрерывная функция, значение которой совпадает со значениями решетчатой функции в дискретные моменты времени $t = mT$, другими словами $y(t) = y(m)$, а $Y(s)$ -непрерывное изображение Лапласа функции $y(t)$. Тогда дискретное изображение решетчатой функции определяется контурным интегралом

$$Y(z) = Z[y(m)] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{Y(s)}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} ds,$$

который вычисляется также на основании теоремы Коши.

Замечание. Подобная форма записи контурного интеграла подразумевает, что в подинтегральном выражении, формально, переменная z не зависит непрерывного оператора Лапласа s .

В случае, если $Y(s)$ представляет дробно-рациональную функцию, то полюса подинтегрального выражения целиком и полностью определяются полюсами этой функции. Если s_1, s_2, \dots, s_n -полюса функции $Y(s)$ и они различны, то значение контурного интеграла равно:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{k/s}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} ds = \sum_{i=1}^n \left[(s - s_i) \frac{Y(s)}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} \right]_{s=s_i}$$

Пример. Вычислим дискретное изображение Лапласа для решетчатой функции, значения которой постоянны на любом из интервалов дискретности

$$y(m) = y_0, y(t) = y_0, Y(s) = \frac{y_0}{s}.$$

$$Y(z) = \left[s \frac{1}{s(1 - e^{sT} \cdot z^{-1})} y_0 \right]_{s=0} = \frac{y_0}{1 - z^{-1}} = \frac{y_0 z}{z - 1}.$$

Вычисление оригинала по дискретному изображению Лапласа делением числителя на знаменатель.

По определению дискретное преобразование Лапласа представляет разложение в виде бесконечного ряда по отрицательным степеням оператора z дискретного преобразования Лапласа

$$Y(z) = Z[y(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m} = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots$$

причем коэффициентами при степенях оператора z являются значения решетчатой функции $y(m)$ в дискретные моменты времени $t=mT$. Если изображение решетчатой $Y(s)$ представляет дробно-рациональную функцию, то деление числителя на знаменатель дискретного изображения Лапласа $Y(z)$ позволяет получить разложение изображения по отрицательным степеням z , при этом коэффициенты при соответствующих степенях z определяются значениями оригинала.

1.5 Дискретное преобразование Лапласа и основные его свойства.

Передаточной функцией линейной стационарной дискретной системы (объекта) будем называть отношение дискретного изображения Лапласа выходной переменной к дискретному изображению Лапласа входной переменной, при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим линейную дискретную систему (объект), для которой решетчатые функции $g(m)$ и $y(m)$ описанием входной и выходной переменных и для этих функций существуют дискретные изображения Лапласа

$$Y(z) = Z[y(m)],$$

$$G(z) = Z[g(m)].$$

Тогда в соответствии с определением, отношение изображения Лапласа выходной переменной к изображению Лапласа входной переменной при нулевых начальных условиях есть передаточная функция дискретной системы (объекта)

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)}.$$

Передаточная функция определяет оператор преобразования в изображениях Лапласа входной переменной в выходную переменную.

1. Вычисление передаточной функции по разностному уравнению n -го порядка.

Положим, что уравнение описания движения линейной дискретной системы задается разностным уравнение n -го порядка

$$\sum_{i=0}^n a_i y(m+i) = \sum_{j=0}^k b_j g(m+j),$$

где функции $g(m)$ - описание входной переменной, $y(m)$ - описание выходной переменной, a_i и b_j - постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы, $m = 0, 1, 2, \dots$ - номера интервалов дискретности.

Для получения передаточной функции применим дискретное преобразование Лапласа к левой и правой частям исходного разностного уравнения при нулевых начальных условиях и воспользуемся свойствами линейности и сдвига функции для дискретного преобразования Лапласа

$$Z\left[\sum_{i=0}^n a_i y(m+i)\right] = Z\left[\sum_{j=0}^k b_j g(m+j)\right],$$

$$\sum_{i=0}^n a_i Z[y(m+i)] = \sum_{j=0}^k b_j Z[g(m+j)].$$

и сдвига функции для дискретного преобразования Лапласа

$$Z[y(m+i)] = z^i Y(z),$$

$$Z[g(m+j)] = z^j G(z).$$

при нулевых начальных условиях. Выполняя преобразования изображений в полученных соотношениях, приходим к выражению для передаточной функции

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i z^i\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^k b_j z^j\right) G(z),$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{\sum_{j=0}^k b_j z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i},$$

которая есть отношение двух полиномов степеней переменной z , причем коэффициенты полинома числителя определяются коэффициентами

правой части исходного разностного уравнения b_j , а коэффициенты полинома знаменателя определяются коэффициентами левой части исходного разностного уравнения a_i .

Замечание. Порядок полинома числителя должен быть меньше (равным) порядку полинома знаменателя передаточной функции, что является условием физической реализуемости системы (объекта).

Пример. Вычислим передаточную функцию для дискретной системы и определим корни (полюса передаточной функции) полинома знаменателя

$$y(m+2) - 1.6y(m+1) + 0.64y(m) = 0.04g(m),$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{0.04}{z^2 - 1.6z + 0.64},$$

$$z^2 - 1.6z + 0.64 = 0,$$

$$z_{1,2} = 0.8.$$

2. Вычисление передаточной функции матриц по уравнению вход-состояние-выход.

Положим, что уравнение описания движения линейной стационарной дискретной системы (объекта) задается уравнением «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} x(m+1) = Fx(m) + Bg(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases},$$

где $g \in R^k$ - k -мерный вектор входных переменных, $x \in R^n$ - n -мерный вектор переменных состояния, $y \in R^k$ - k -мерный вектор регулируемых (выходных) переменных, а F , B , C - матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей ($F - n \times n$, $B - n \times k$, $C - k \times n$).

Возьмем дискретное преобразование Лапласа от исходного уравнения при нулевых начальных условиях ($x(0) = 0$)

$$\begin{cases} Z[z(m+1)] = Z[Fx(m) + Bg(m)] \\ Z[y(m)] = Z[Cx(m)] \end{cases}$$

Введем обозначения

$$X(z) = Z[x(m)],$$

$$G(z) = Z[g(m)],$$

$$Y(z) = Z[y(m)].$$

Тогда исходное уравнение в изображениях Лапласа примет вид

$$\begin{cases} zX(z) = FX(z) + BG(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases},$$

в котором исключая дискретное изображение Лапласа вектора состояния $X(z)$ как промежуточную переменную, получим связь изображения вектора выходных переменных с изображением вектора входных переменных

$$\begin{aligned} (zI - F)X(z) &= BG(z), \\ X(z) &= (zI - F)^{-1} BG(z), \\ Y(z) &= C(zI - F)^{-1} BG(z), \end{aligned}$$

и передаточную матрицу, как оператор преобразования изображения вектора входных переменных в вектор изображений выходных переменных

$$W(z) = C(zI - F)^{-1} B,$$

где $W(z)$ – передаточная матрица размерности $k \times k$, элементами которой являются передаточные функции, связывающие входные переменные с соответствующими выходными переменными.

Пример. Получим передаточную функцию для дискретной системы с уравнением движения «вход – состояние – выход»

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} g(m) \\ y(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} \end{cases},$$

в котором матрицы описания системы равны

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим передаточную функцию ($k=1$) системы по соотношению

$$W(z) = C(zI - F)^{-1} B,$$

и производя последовательно вычисления получим

$$zI - F = \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix},$$

$$(zI - F)^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2} ((zI - F)^T)^V = \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix},$$

$$(zI - F)^T = \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix} ((zI - F)^T)^V = \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2},$$

$$W(z) = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2}.$$

Для полученной передаточной дискретной функции имеет место один ноль - $z_0 = -1$; и два кратных полюса $z_{1,2} = 1$.

1.6 Передаточные функции дискретных объектов и замкнутых систем.

Дискретные передаточные функции (матрицы) замкнутых дискретных систем предназначены для анализа динамических свойств замкнутых систем, анализа качества процессов, точности отработки задающих воздействий и степени подавления возмущающих внешних воздействий. Рассмотрим функциональную схему дискретной системы, замкнутую с помощью единичных обратных связей

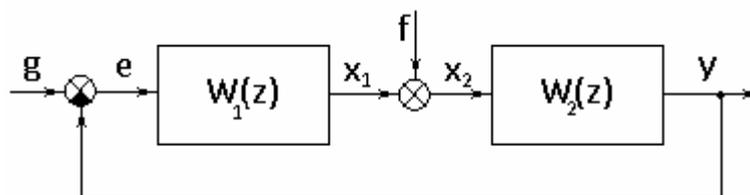


Рисунок 1.8 - Функциональная схема замкнутой системы.

На функциональной схеме (Ри.7) применены следующие обозначения: $g \in R^k$ - k -мерный вектор задающих воздействий, $y \in R^k$ - k -мерный вектор регулируемых переменных, $f \in R^l$ - l -мерный вектор возмущающих воздействий, $x_1, x_2 \in R^l$ - вектора по размерности, совпадающие с возмущающим воздействием, $W_1(z)$ - передаточная матрица размерности $k * l$, связывающая изображение $X_1(z)$ с изображением ошибки $E(z) = G(z) - Y(z)$.

$$X_1(z) = W_1(z)E(z).$$

$W_2(z)$ - передаточная матрица, связывающая $Y(z)$ с $X_2(z)$.

$$Y(z) = W_2(z)X_2(z).$$

Получаем описание всей системы в целом, записав уравнение связи между входами и выходами для каждого из структурных элементов.

$$\begin{cases} E = G - Y \\ X_1 = W_1 \cdot E \\ X_2 = X_1 + F \\ Y = W_2 \cdot X_2 \end{cases},$$

$$Y = W_2(W_1(G - Y) + F),$$

$$(I + W_2W_1)Y = W_2W_1G + W_2F,$$

$$I - k \times k.$$

Обозначим:

$W_{p.k.}(z) = W_2(z)W_1(z)$ - передаточная матрица разомкнутого контура системы, размерностью $(k \times k)$.

$$Y(z) = (I + W_{p.k.}(z))^{-1}W_{p.k.}(z)G(z) + (I + W_{p.k.}(z))^{-1}W_2(z)F(z).$$

$\Phi(z) = (I + W_{p.k.}(z))^{-1}W_{p.k.}(z)$ - передаточная матрица замкнутой системы по регулируемой переменной задающего (возмущающего) воздействия.

При $k = 1$:

$$\Phi(z) = \frac{W_{p.k.}(z)}{1 + W_{p.k.}(z)},$$

$$\Phi_\gamma(z) = \frac{W_2(z)}{1 + W_{p.k.}(z)}.$$

При произвольной размерности k :

$$Y(z) = \Phi(z)G(z) + \Phi_\gamma(z)F(z).$$

Передаточные матрицы замкнутых систем по ошибке.

$$E(z) = G(z) - Y(z).$$

Выразим регулируемую переменную через $E(z)$ и $G(z)$:

$$Y = G - E,$$

$$G - E = \Phi G + \Phi_f F,$$

$$E = (I - \Phi)G - \Phi_f F,$$

$$E(z) = (I - \Phi(z))G(z) - \Phi_f(z)F(z).$$

Обозначим: $\Phi_e(z) = (I - \Phi(z))$ - передаточная матрица замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия.

Получим передаточную матрицу по ошибке, вычислим через передаточную матрицу разомкнутого контура системы:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= I - (I + W_{p.k.})^{-1}W_{p.k.} = (I + W_{p.k.})^{-1}(I + W_{p.k.}) - (I + W_{p.k.})^{-1}W_{p.k.} = \\ &= (I + W_{p.k.})^{-1}(I + W_{p.k.} - W_{p.k.}) = (I + W_{p.k.})^{-1}, \\ \Phi_e(z) &= (I + W_{p.k.}(z))^{-1} - k \times k.\end{aligned}$$

При $k = 1$:

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + W_{p.k.}(z)}.$$

Замечание: для дискретных систем структурные преобразования структурных схем осуществляются по тем же правилам, что и для непрерывных систем, если для всех структурных элементов системы получены передаточные функции (матрицы) в дискретном преобразовании Лапласа. Если в структурных схемах имеет место последовательное соединение импульсных элементов и непрерывных линейных частей, то требуется вначале получить дискретную модель этого последовательного соединения в виде передаточной функции или матрицы, а затем осуществлять структурные преобразования.

Раздел 2 Устойчивость цифровых (дискретных) систем.

2.1 Классические виды устойчивости дискретных систем.

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы, заданное в пространстве состояний:

$$x(m + 1) = F(x(m)),$$

где $x - n$ -мерный вектор состояний, $F - n$ -мерная, нелинейная, векторозначная функция векторного аргумента такая, что при $x = 0, F(0) = 0$, и решение исходного разностного уравнения при произвольных начальных условиях единственно.

1. Асимптотическая устойчивость.

Определение. Будем говорить, что положение равновесия $x=0$ асимптотически устойчиво (а.у.) во всем пространстве состояний, если для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий для любого $x(0) \in R^n$, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) = 0,$$
$$(\lim_{m \rightarrow \infty} \|x(m)\| = 0),$$

т.е. вектор состояния, с течением времени - ростом номера интервала дискретности, стремится к началу координат.

Асимптотическая устойчивость говорит о стремлении траекторий движений к положению равновесия, но а быстроте стремления траекторий движения системы к устойчивому положению информация отсутствует. Для нелинейных систем свойство асимптотической устойчивости может иметь место в ограниченной области пространства состояния, а поэтому понятие асимптотической устойчивости нелинейных систем подразделяют на устойчивость в «большом» - во всем пространстве состояний и на устойчивость в «малом» - в ограниченной области пространства состояний.

2. Экспоненциальная устойчивость.

Определение. Будем говорить, что положение равновесия $x=0$ экспоненциально устойчиво, если существуют такие положительные числа $\beta \geq 1$ или $0 < \alpha < 1$, что для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x(0) \in R^n$, для любого номера интервала дискретности $m = 0, 1, 2, K$, выполняется неравенство:

$$\|x(m)\| \leq \beta \cdot \alpha^m \cdot \|x(0)\|.$$

Параметр α характеризует скорость сходимости процессов к положению равновесия, и чем меньше его значение, тем быстрее процессы стремятся к положению равновесия. Косвенно, этот параметр характеризует быстродействие системы. Геометрическая интерпретация данного вида сходимости на рисунке 2.1.

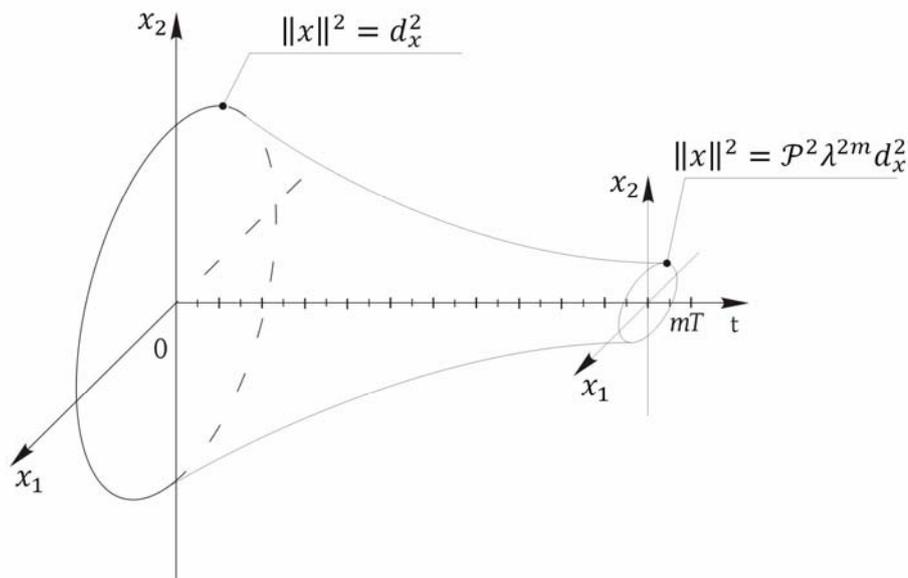


Рисунок 2.1 - Экспоненциальная устойчивость

Как и для вида асимптотической устойчивости в общем случае для нелинейных систем различают экспоненциальную устойчивость в «большом» - во всем пространстве состояний и в «малом» - в ограниченной области пространства состояний.

2.2 Качественная экспоненциальная устойчивость дискретных систем.

Пусть поведение динамической системы описывается разностным уравнением вида:

$$x(m+1) = F(x(m)), \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния дискретной динамической системы, $F(x)$ — n -мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x(0) \in R^n$ решение уравнения (2.1) существует и единственно и m — номер интервала дискретности $m = 0, 1, 2, \dots$. Введём понятие КЭУ для системы (2.1).

Положение равновесия $x = 0$ дискретной динамической системы называется качественно экспоненциально устойчивым «в большом», если для любых траекторий движения $x(m)$ системы (2.1), исходящих из произвольных начальных условий $x(0) \in R^n$, существуют такие параметры $r > 0$, $\rho \geq 1$, $\beta : -1 < \beta + r < 1$, что для любого номера

интервала дискретности m , $m = 0, 1, 2, \dots$ имеет место следующее неравенство:

$$\|x(m) - \beta^m x(0)\|_V \leq \rho [(\beta + r)^m - \beta^m] \|x(0)\|_V,$$

где норма определяется по выражению.

Геометрическая интерпретация определение КЭУ дискретной динамической системы представлена на рисунке 19 для $\rho = 1$. Определение КЭУ дискретной динамической системы «в малом» может быть введено для ограниченной области, включающей начало координат с использованием аналогичного подхода.

Понятие качественной экспоненциальной устойчивости представляет собой наиболее общий случай всех видов устойчивости, в частности из КЭУ следует экспоненциальная и асимптотическая устойчивость. Для непрерывных и дискретных динамических систем параметры качественной экспоненциальной устойчивости r и β имеют следующий смысл. Параметр β определяет среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия $x = 0$ и, следовательно, связан со временем переходного процесса t_{Π} . Параметр r определяет отклонения (разброс) траекторий движения от усредненной траектории и характеризует степень колебательности процессов системы. Другими словами, параметр β подобен коэффициенту сноса (среднее значение), а параметр r коэффициенту диффузии отклонение от среднего значения) при описании случайных процессов.

На основе определений КЭУ непрерывных и дискретных систем управления по соотношениям соответственно можно получить аналитическую связь таких показателей качества как время переходных процессов, значений первого выброса σ_0 и перерегулирования по множеству траекторий, геометрическая интерпретация которых приведена на рисунке 2.2.

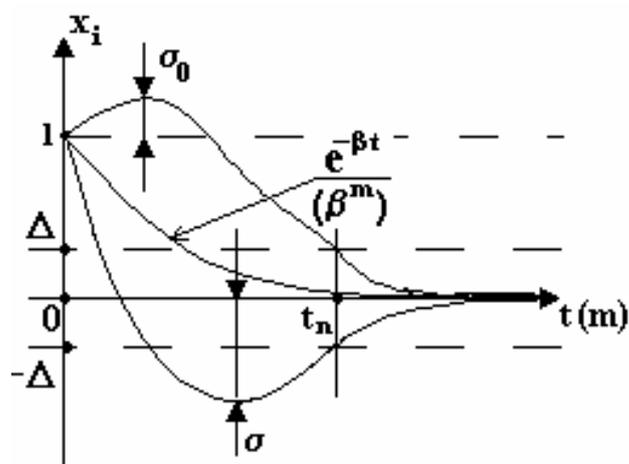


Рисунок 2.2 - Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости.

При определении качественной экспоненциальной устойчивости норма вектора определялась соотношением

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{\frac{1}{v}},$$

где v – целое число, равное $v = 1, 2, \dots$, а x_i – i -ая компонента вектора состояния x . При $v = 2$ имеем евклидову норму, которая определяет «естественную» длину вектора, при $v = 1$ имеем модульную норму. Поверхности постоянного уровня $\|x\|^v = 1 (x \in R^2)$ для различных значений v приведены на Рисунке 2.3.

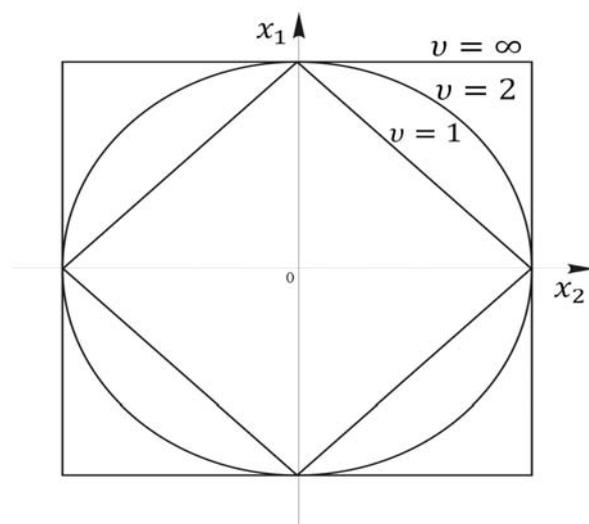


Рисунок 2.3 - Геометрическая интерпретация различных норм

Отметим, что для детерминированных процессов из сходимости по какой-либо норме следует сходимость по любой из норм.

2.3 Метод Ляпунова для анализа свойства устойчивости дискретных систем.

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения системы:

$$x(m+1) = \Phi(x(m)), \quad x \in R^n,$$

$\Phi - n$ -мерная векторзначная функция векторного аргумента x .

Метод Ляпунова основан на сопоставлении движений системы в пространстве состояний размерности n с отображениями движений системы в скалярное пространство положительных чисел. При этом, если функции в пространстве положительных чисел будут убывать, то можно считать, что траектории движения системы стремятся к положению равновесия. Убывание функции в пространстве положительных чисел гарантирует отрицательное значение первой разности этой функции на траекториях движения системы.

Формализуем метод Ляпунова для исследования устойчивости дискретных систем.

Введем функцию Ляпунова $V(x)$ как функцию, задающую отображение векторов n пространства в пространство положительных чисел $R^n \xrightarrow{V} R^+$: для которой выполняются следующие свойства:

1) $V(x) \geq 0$ для любого $x \in R^n$,
и при $x = 0 \Leftrightarrow V(x) = 0$.

2) поверхности постоянного уровня $V(x) = c, c > 0 - const$ охватывают начало координат (положение равновесия).

3) функция $V(x)$ равномерно возрастает при равномерном возрастании нормы вектора x ($\|x\|$).

Наиболее простой и распространенный способ выбора функции Ляпунова является выбор ее в виде квадратичной формы. В качестве примера рассмотрим задание функции Ляпунова в виде квадратичной формы для объекта или системы второго порядка

$$V(x) = x^T P x,$$

где P - положительно определенная симметрическая матрица.

При этом $n = 2$. Рассмотрим поверхность постоянного уровня

$$V(x) = x^T P x = c,$$

которая представляет из себя поверхность - эллипсоид, охватывающий начало координат (точку равновесия). Причем большее значение поверхности постоянного уровня определяет поверхность, которая включает в себя поверхность более малого значения.

Теорема Ляпунова.

Для того, чтобы исходная система была бы асимптотически устойчивой, требуется, чтобы существовала такая функция Ляпунова $V(x)$, что на всех траекториях движения системы, исходящих из произвольных начальных условий для любого номера интервала дискретности m , первая разность от функции Ляпунова должна быть отрицательной

$$V(x(m+1)) - V(x(m)) < 0,$$

другими словами значение последующего значения функции Ляпунова на всех траекториях движения системы должно меньше предшествующего значения

$$V(x(m+1)) < V(x(m)),$$

то есть требуется, чтобы последующее значение вектора состояния лежало бы внутри области, ограниченной поверхностью постоянного уровня, значение которой определяется предшествующим значением вектора состояния.

Следствие.

Дискретная система будет экспоненциально устойчивой, если существует такая функция Ляпунова $V(x)$, что для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий для любого номера интервала дискретности выполняется неравенство:

$$V(x(m+1)) \leq \lambda^2 V(x(m)),$$

где $0 < \lambda < 1$, а функция Ляпунова $V(x)$ из класса квадратичных форм.

Покажем, что для любого номера интервала дискретности m выполняется соотношение

$$\|x(m)\| < \beta \lambda^m \|x(0)\|,$$

где $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ -Евклидова норма, а

$$V(x) = x^T P x,$$

$$P - n \times n.$$

квадратичная форма. Воспользуемся соотношением Релея

$$c_1^2 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq c_2^2 \|x\|^2,$$

где c_1^2 и c_2^2 – \min минимальное и \max максимальное собственные числа матрицы P . Из соотношения Релея следует что

$$c_1 \|x\| \leq V^{1/2}(x) \leq c_2 \|x\|,$$

а из условия экспоненциальной устойчивости следуют неравенства

$$\begin{aligned} V(x(m+1)) &\leq \lambda^2 V(x(m)), \\ V^{1/2}(x(m+1)) &\leq \lambda V^{1/2}(x(m)). \end{aligned}$$

Последовательно усиливая неравенства от $m=0$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} m=0: V^{1/2}(x(1)) &\leq \lambda V^{1/2}(x(0)), \\ m=1: V^{1/2}(x(2)) &\leq \lambda V^{1/2}(x(1)) \leq \lambda^2 V^{1/2}(x(0)), \\ &\dots\dots\dots \\ V^{1/2}(x(m)) &\leq \lambda^m V^{1/2}(x(0)), \end{aligned}$$

и используя соотношение Релея, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} c_1 \|x(m)\| &\leq \lambda^m c_2 \|x(0)\|, \\ \|x(m)\| &\leq \frac{c_2}{c_1} \lambda^m \|x(0)\|, \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{c_2}{c_1} \geq 1, \lambda = \alpha.$$

Геометрическая интерпретация экспоненциальной устойчивости приведена на рисунок 2.4.

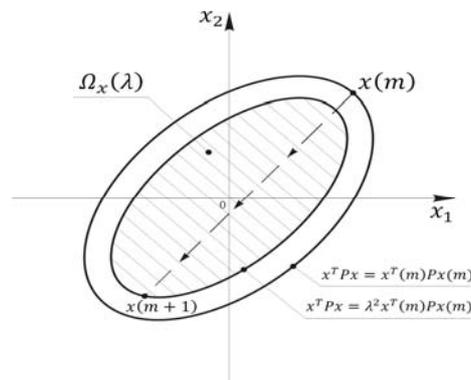


Рисунок 2.4 - Локальное поведение траекторий дискретных экспоненциально-устойчивых систем

2.4 Уравнения Ляпунова для анализа свойства устойчивости линейных дискретных систем.

Рассмотрим систему с невозмущенным уравнением движения

$$x(m+1) = F(x(m)),$$

где вектор состояния $x \in R^n$, $F - n \times n$ - квадратная матрица с постоянными коэффициентами, определяющая динамические свойства системы.

1. Асимптотическая устойчивость.

Для исследования устойчивости выберем функцию Ляпунова из класса квадратичных форм:

$$V(x) = x^T P x,$$

где $P - n \times n$ - положительно определенная симметрическая матрица.

Вычислим значение функции Ляпунова на траекториях движения системы для произвольного номера интервала дискретности, подставив правую часть исходного уравнения движения вместо последующего значения вектора состояния $x(m+1)$, в результате получим

$$V(x(m+1)) = x^T(m+1) P x(m+1) = x^T(m) F^T P F x(m).$$

Применим теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости

$$\begin{aligned} V(x(m+1)) &< V(x(m)), \\ x^T(m) F^T P F x(m) &< x^T(m) P x(m), \\ x^T(m) (F^T P F - P) x(m) &< 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дополнительную квадратичную форму $x^T Q x$, где $Q - n \times n$ - положительно определенная симметрическая матрица. Рассмотрим, наряду с полученным неравенством, уравнение:

$$x^T(m) (F^T P F - P) x(m) = -x^T(m) Q x(m).$$

Из этого уравнения следует условие асимптотической устойчивости, а так как данное уравнение должно быть справедливо для любого значения вектора состояния $x \in R^n$, то выполняется и матричное уравнение

$$F^T P F - P = -Q,$$

которое является матричным уравнением Ляпунова для дискретных систем.

Условие асимптотической устойчивости.

Для того, чтобы линейная дискретная система была бы асимптотически устойчивой, необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо, по крайней мере, положительно полуопределенной матрицы Q решение уравнения Ляпунова относительно матрицы P было бы положительно полуопределенным.

Практическое использование условий асимптотической устойчивости линейной дискретной системы заключается в использовании достаточного условия. При этом процедура анализа устойчивости включает следующие последовательные шаги

- 1). Производится выбор матрицы $Q \geq 0$, по крайней мере, положительно полуопределенной (обычно $Q = I > 0$).
- 2). Решается уравнение Ляпунова относительно матрицы P .
- 3). Осуществляется проверка матрицы P на положительную определенность.

Пример. Рассмотрим систему с уравнением движения

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix}$$
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, z_1 = z_2 = 0$$

где F матрица описания движений системы с нулевыми корнями характеристического уравнения. Исследуем данную систему на

устойчивость. Для этого выберем $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и разрешим уравнение Ляпунова относительно матрицы P

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix},$$

$$F^T P F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix},$$

$$F^T P F - P = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 \\ -p_2 & p_1 - p_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = 2, \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

В результате получаем матрицу $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, которая является положительно определенной, а следовательно исходная система асимптотически устойчива.

2. Модифицированное уравнение Ляпунова для исследования экспоненциальной устойчивости (э.у.).

Получим модифицированное уравнение Ляпунова для исследования экспоненциальной устойчивости дискретной линейной системы. Условие экспоненциальной устойчивости дискретной линейной системы

$$V(x(m+1)) \leq \lambda^2 V(x(m)).$$

Вычислим значение функции Ляпунова на траектории движения системы, для чего подставим вместо последующего значения вектора состояния системы его выражение через предшествующее значение вектора состояния

$$\begin{aligned} x^T(m+1)Px(m+1) - \lambda^2 x^T(m)Px(m) &\leq 0, \\ x^T(m)(F^T PF - \lambda^2 P)x(m) &\leq 0, \\ x^T(m)(F^T PF - \lambda^2 P)x(m) &= -x^T(m)Qx(m). \end{aligned}$$

Если матрица $Q - n \times n$, по крайней мере положительно полуопределенная матрица, $Q \geq 0$, то из этого уравнения следует, что выполняется неравенство экспоненциальной устойчивости, для любого $x \in R^n$. Полученное уравнение эквивалентно матричному уравнению,

$$F^T PF - \lambda^2 P = -Q$$

которое является модифицированным уравнением Ляпунова и при значениях $\lambda < 1$ позволяет исследовать экспоненциальную устойчивость, а при значении $\lambda = 1$ совпадает с обычным уравнением Ляпунова для дискретных систем.

3. Модифицированное уравнение Ляпунова для исследования качественной экспоненциальной устойчивости.

На основе условий качественной экспоненциальной устойчивости повторяя те же самые выкладки приходим к модифицированному уравнению Ляпунова вида

$$(\bar{F} - \beta I)^T P(\bar{F} - \beta I) - r^2 P = -\bar{Q} \beta,$$

где β и r параметры качественной экспоненциальной устойчивости. Отметим, что при значении $\beta=0$ и $r=1$, данное уравнение совпадает с

классическим уравнением Ляпунова для дискретных систем, а при $b=0$ и при значении r меньшим единицы с модифицированным уравнением Ляпунова для исследования экспоненциальной устойчивости.

2.5 Необходимые и достаточные корневые условия устойчивости дискретных систем.

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы:

$$\begin{aligned}x(m+1) &= Fx(m), \\x &\in R^n, F - n \times n.\end{aligned}$$

Определим характеристическое уравнение системы и найдем корни:

$$\det(zI - F) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

z_1, z_2, \dots, z_n - корни уравнения.

Положим, что все корни z_1, z_2, \dots, z_n - вещественны и различны и найдем условие, когда система будет асимптотически устойчива:

$$\begin{aligned}x(m) &= F^m x(0), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x(m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} F^m x(0) = 0.\end{aligned}$$

Для анализа поведения процессов в системе заменим базис в исходной системе таким образом, чтобы в новых координатах матрицы F была бы в диагональном виде, т.е. произведем замену переменных

$$x = M\xi,$$

где

$$\xi \in R^n, M - n \times n, (\exists M^{-1}).$$

а матрица M , такая, что существует обратная матрица. Тогда исходное уравнение движения приобретает вид

$$\xi(m+1) = M^{-1}FM\xi(m).$$

Из множества матриц M выберем такую, которая приводит матрицу описания движения исходной системы к диагональной форме

$$M^{-1}FM = F_g = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix},$$

тогда уравнения движения системы в новом базисе приобретают вид

$$\begin{bmatrix} \xi_1(m+1) \\ \xi_2(m+1) \\ \vdots \\ \xi_n(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & K & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(m) \\ \xi_2(m) \\ \vdots \\ \xi_n(m) \end{bmatrix},$$

из которых следует, что для каждой из переменных вектора состояния в новом базисе последующее значение этой переменной от предшествующего значения переменной определяется соотношением

$$\xi_i(m+1) = z_i \xi_i(m), i = \overline{1, n},$$

другими словами получили, что описание движения исходной системы эквивалентно системе из n скалярных разностных уравнений. Запишем решение каждого из n скалярных уравнений по каждой из переменных в зависимости от начальных значений

$$\xi_i(m) = z_i^m \xi_i(0),$$

откуда следует, что каждая из переменных вектора состояния с течением времени будет стремиться к нулю

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m \xi_i(0) = \xi_i(0) \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m = 0,$$

тогда и только тогда, если модуль каждого из корней меньше единицы $|z_i| < 1$.

Необходимые и достаточные корневые условия асимптотической устойчивости дискретных систем.

Для того, чтобы линейная дискретная система была бы асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения по модулю были бы меньше единицы.

Если хотя бы один из корней по модулю больше единицы, то система неустойчива.

2.6 Уравнения Ляпунова как критерии расположения корней замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости внутри (вне) единичного круга с центром в начале координат.

Расположение корней на комплексной плоскости для случаев к.э.у. и э.у. процессов дискретных систем.

Рассмотрим множество матриц \bar{F} , с собственными числами (корнями характеристического уравнения) $F - \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$: расположены в круге радиуса r с координатами в точке $(\beta; j0)$ - смещенный круг.

Рассмотрим множество матриц F , являющихся функциями от матрицы \bar{F} , т.е. таких, которые связаны подобными преобразованиями

$F = \frac{1}{r}(\bar{F} - \beta I)$. И обозначим через z_1, z_2, \dots, z_n собственные числа или корни характеристического уравнения матрицы F , т.е.

$$z_i = \frac{\bar{z}_i - \beta}{r},$$

где $i = \overline{1, n}$.

Т.к. все собственные числа \bar{z}_i лежат в круге радиуса r , смещенном на значение β , то все собственные числа z_i по модулю меньше 1.

С другой стороны, если все собственные числа z_i по модулю меньше 1, то для матрицы \bar{F} все собственные числа лежат в круге радиуса r , смещенном на значение β .

Запишем уравнение Ляпунова, как критерий расположения корней матрицы F , в единичном круге:

$$F^T P F - P = -Q,$$

подставим в уравнение Ляпунова выражение матрицы F через \bar{F} :

$$\frac{1}{r^2}(\bar{F} - \beta I)^T P (\bar{F} - \beta I) - P = -Q.$$

Домножив на r^2 получим:

$$(\bar{F} - \beta I)^T P (\bar{F} - \beta I) - r^2 P = -\bar{Q},$$

где $\bar{Q} = r^2 Q$.

На рисунке 2.5 изображены различные окружности, ограничивающие области корней при обеспечении различных видов устойчивости

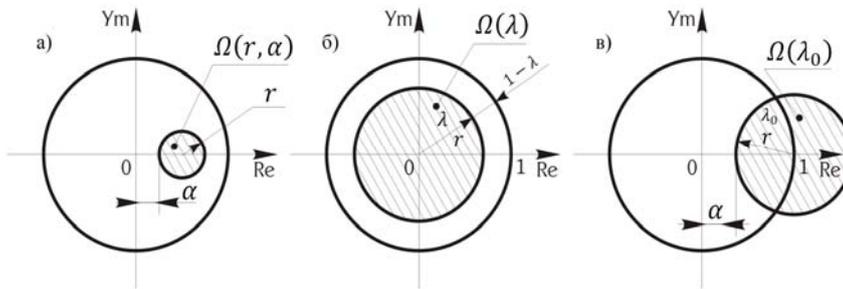


Рисунок 2.5 - Отображение круга в круг:

- а) смещенный круг – к.э.у,
- б) центральный круг – э.у.

Если $\beta=0$ (круг центральный), то модифицированное уравнение принимает вид:

$$\overline{F^T} P F - r^2 P = -Q.$$

Если $\beta=0; r=1; \overline{F^T} P \overline{F} - P = -Q.$

Последовательность исследования на устойчивость

Выбираются параметры β, r , назначается матрица Q , по крайней мере, $Q \geq 0$ ($Q=1$) и решается модифицированное уравнение Ляпунова относительно матрицы P , с последующей проверкой ее на положительно - определенность.

Если P положительно - определенная, то корни характеристического уравнения матрицы \overline{F} лежат в круге радиуса, смещенном на значение β относительно начала координат.

Рассмотрим ситуацию, когда $\beta=0; r < 1$.

Если все корни характеристического уравнения системы расположены в круге радиуса $r < 1$, т.е. $|z_i| < r, i = \overline{1, n}$, то в этом случае говорят, что система обладает запасом устойчивости $\eta = 1 - r$.

Запас устойчивости характеризует отклонение доминирующих корней (наибольших по модулю) от границы устойчивости.

Степень устойчивости косвенно характеризует быстродействие системы: чем больше значение степени устойчивости, тем более быстрые процессы характеризуют систему.

2.7 Виды стохастической устойчивости дискретных систем.

КАЧЕСТВЕННАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Прямой метод Ляпунова, являющийся одним из наиболее общих методов исследования систем управления, базируется на понятиях асимптотической либо экспоненциальной устойчивости и использовании выбранной определенным образом функции Ляпунова (ФЛ). Этот метод при корректном выборе функции Ляпунова позволяет построить конструктивные процедуры анализа [1,2] и синтеза [3] систем управления. Введенное в работе [3] определение качественной экспоненциальной устойчивости (КЭУ) и разработанный аналитический аппарат обусловили возможность установления взаимосвязи между параметрами КЭУ и значениями „инженерных“ показателей качества синтезируемых и исследуемых систем.

Понятие стохастической экспоненциальной устойчивости систем также широко используется, в частности, в работе [4]. В данной статье рассматривается стохастический аналог качественной экспоненциальной устойчивости.

1 Качественная экспоненциальная устойчивость детерминированных систем. Рассмотрим понятие качественной экспоненциальной устойчивости для дискретных систем, описываемых разностным уравнением:

$$\left. \begin{aligned} x(m+1) &= F(q(m), x(m)); \\ x(0) &= x_0, q(0) = q_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где x — n -мерный вектор состояния системы; q - k -мерный вектор изменяющихся параметров; $F(\cdot)$ - n -мерная функция векторных аргументов; $t = 0, 1, 2, \dots$ - номер интервала дискретности. Приведенная модель охватывает классы линейных, нелинейных, стационарных и нестационарных систем.

Понятие КЭУ вводится следующим образом.

Определение 1. Положение равновесия $x = 0$ дискретной системы (2.2) будет качественно экспоненциально устойчивым, если существуют такие положительные числа $\beta > 0$, $r > 0$, $\beta + r < 1$, и $p \geq 1$, что на всех траекториях движения системы (2), исходящих из произвольных

начальных условий $x(0) \in R^n$ для любого номера t интервала выполняется неравенство

$$\|x(m) - \beta^m x(0)\|_v \leq \rho((r + \beta)^m - \beta^m) \|x(0)\|_v, \quad (2.3)$$

где

$$\|x\|_v = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{1/v}, \quad (2.4)$$

$v = 1, 2, 3, \dots$ — целое положительное число, определяющее задание нормы; при $v = 2$ имеем евклидову норму. При $\beta = 0$ и $r < 0$ данное определение совпадает с определением экспоненциальной устойчивости дискретных систем.

Смысловая нагрузка параметров β и r КЭУ заключается в следующем: параметр β определяет темп сходимости траектории движения системы по всем координатам, параметр r определяет отклонение траекторий движения системы от усредненной траектории ($\beta^m x(0)$). Из неравенства непосредственно следуют способы построения мажорирующих процессы „трубок“ и оценки времени переходных процессов и перерегулирования.

Качественная экспоненциальная устойчивость стохастических систем. Рассмотрим дискретную систему вида

$$x(m+1) = F(q(m, x(m)), x(m), \xi(m)),$$

где $x(m)$ — n -мерный вектор состояния системы; $\xi(m)$ — q -мерный вектор случайного внешнего возмущающего воздействия; $q(m, x(m))$ — k -мерный вектор случайно изменяющихся параметров, возможно зависящий и от состояния системы; $F(\cdot)$ — детерминированная нелинейная n -мерная функция от векторных аргументов. Будем считать, что для случайных последовательностей $q(m)$ и $\xi(m)$ для $\forall t$ определены (т. е. существуют) значения математического ожидания и матриц ковариаций.

Определение 2. Дискретная система будет качественно экспоненциально v -устойчива относительно положения равновесия $x = 0$, если существуют такие положительные числа $\beta > 0$, $r > 0$, $\beta + r < 1$, и $\rho \geq 1$, что на всех траекториях системы для любого номера t интервала дискретности справедливо неравенство

$$M \left[\|x(m) - \beta^m x(0)\|_v \right] \leq \rho((r + \beta)^m - \beta^m) M \left[\|x(0)\|_v \right],$$

где $M^{[g]}$ означает операцию взятия математического ожидания.

Локальное достаточное условие стохастической качественной экспоненциальной ν -устойчивости. В соответствии с прямым методом Ляпунова для исследования системы (2.2) вводится функция Ляпунова $V(x)$ в виде положительно-определенной функции степени ν , обладающей свойством

$$c_1 \|x\|_\nu \leq V^{1/\nu}(x) \leq c_2 \|x\|_\nu,$$

где c_1 и c_2 — постоянные и положительные коэффициенты.

Достаточные условия качественной экспоненциальной ν -устойчивости получаются из рассмотрения условного математического ожидания ФЛ от разности последующего значения вектора состояния $x(m+1)$ и прогнозируемого среднего значения $\beta x(m)$ на всех траекториях движения системы.

Локальное достаточное условие качественной экспоненциальной ν -устойчивости имеет вид

$$M [V(x(m+1) - \beta x(m)) | x(m)] \leq r^\nu M [V(x(m))],$$

где β и r — параметры КЭУ, $\beta + r < 1$.

Частный случай условия при $\beta = 0$ и $r < 1$ является известным достаточным условием экспоненциальной ν -устойчивости.

Параметр β в среднем характеризует изменения математического ожидания, а параметр r — дисперсионные отклонения. Применение понятия качественной экспоненциальной устойчивости. При исследовании детерминированных систем прямым методом Ляпунова вводятся несколько критериев устойчивости и используются различные функции Ляпунова. Значительно большее разнообразие определений устойчивости вводится при рассмотрении стохастических систем. Применение понятия качественной экспоненциальной устойчивости позволяет с единых позиций исследовать процессы как в детерминированных, так и в стохастических системах.

На практике наиболее просто исследовать КЭУ стохастических систем, применяя квадратичные функции Ляпунова вида (для $\nu = 2$) $V(x) = x^T P x$, где P - положительно-определенная симметрическая $n \times n$ -матрица. Использование норм (2.4) при $\nu = 2$ согласуется со свойствами случайных процессов второго порядка и принято в инженерных приложениях, основанных на корреляционной теории. При этом постоянные c_1 , c_2 неравенства - квадратные корни из минимального и максимального собственных значений матрицы P .

Обобщенные нормы с $v > 2$ целесообразно использовать при исследовании КЭУ Более сложных стохастических систем, содержащих в описании моментные функции выше второго порядка.

Пример. В качестве примера на рисунке 2.6 приведена структурная схема лазерной угломерной системы,

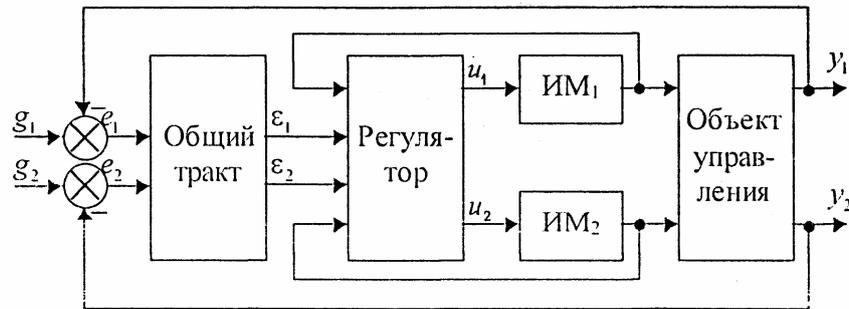


Рисунок 2.6 - Структурная схема лазерной угломерной системы.

где y_1, y_2 — регулируемые величины; g_1, g_2 — входные задающие воздействия; e_1, e_2 — сигналы рассогласования; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — выходные сигналы общего тракта; u_1, u_2 — управляющие воздействия; ИМ₁, ИМ₂ — исполнительные механизмы углов места и азимута. Особенностью данной системы является то, что наличие фазовых искажений в общем тракте преобразования сигнала приводит к возникновению перекрестных связей между исполнительными механизмами. Если считать фазовые искажения случайными, то в линейном приближении получается следующая математическая модель дискретной системы:

$$x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) + B_g(\xi)g(m); y(m) = Cx(m),$$

где A — матрица описания исходной системы, B и B_g — матрицы входов по управляющим и задающим воздействиям соответственно, C — матрица выходов, ξ — случайное возмущение в перекрестных связях каналов.

Пусть матрицы описания лазерной угломерной системы имеют следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_g = \begin{bmatrix} k_{o.c\delta 1} & 0,01 + \xi[m] \\ 0,01 + \xi[m] & k_{o.c\delta 2} \end{bmatrix},$$

где $k_{o.cb1}$, $k_{o.cb2}$ — коэффициенты обратной связи по выходу ИМ₁ и ИМ₂ соответственно; $\xi[m]$ — некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Для квадратичной функции Ляпунова, а также корневых параметров $\beta = 0,7$ и $r = 0,1$ была получена следующая матрица линейных стационарных обратных связей:

$$K = \begin{bmatrix} 1,0219 & 0,0249 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0070 & 0,0260 \end{bmatrix}.$$

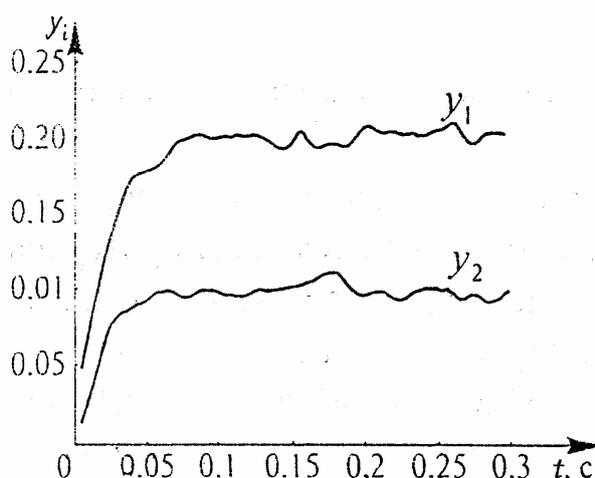


Рисунок 2.7 - Реализации переходных процессов.

На рисунке 2.7 представлены графики типовых реализаций переходных процессов в обоих исполнительных механизмах при ступенчатом единичном воздействии. Из графиков видно, что типовые реализации соответствуют выбранным корневым показателям качества.

2.8 Матричные неравенства и уравнения для линейных позитивных систем.

Получим матричные неравенства и уравнения типа Ляпунова при использовании для анализа модульных функций Ляпунова ($\nu = 1$) применительно к линейным позитивным нестационарным и, как частный случай, стационарным дискретным системам, у которых все элементы описания и значения принимают неотрицательные значения. К классу позитивных систем относятся, например, системы сравнения, используемые для анализа свойств многосвязных систем на основе метода векторных функций Ляпунова. Пусть движение линейной дискретной системы задано разностным уравнением

$$v(m+1) = \lambda(m)v(m),$$

где v - k – мерный вектор состояния системы, все переменные которого принимают только неотрицательные значения при любом значении $m = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda(m)$ - квадратная матрица размером $k \times k$ с неотрицательными элементами.

Введем модульную функцию Ляпунова ($v = 1$) в виде

$$V(v) = \sum_{i=1}^k p_{0i} |v_i|,$$

где p_{0i} - положительные весовые коэффициенты, а v_i - переменные вектора состояния позитивной системы ($v = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T$). Учитывая неотрицательность значений переменных вектора состояния $v_i \geq 0$ знак модуля в выражении для модульной функции Ляпунова можно опустить и переписать ее в более компактной матричной форме

$$V(v) = P_0 v,$$

где $P_0 = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0k}]$ - матрица строка, размером $1 \times k$ с положительными элементами. В дальнейшем, хотя и будем пользоваться более простой формой записи модульной функции Ляпунова, необходимо помнить, что первообразной является первичная форма задания. Поэтому следует оговорить, что если A - квадратная матрица размером $k \times k$, то справедливо соотношение

$$V(Av) = P_0 Av$$

только в том случае, если элементы матрицы A – неотрицательны.

Приведем вывод матричного неравенства и уравнения типа Ляпунова, соответствующие локальному достаточному условию экспоненциальной устойчивости позитивной системы. Запишем неравенство для значений предшествующего и последующего значений модульных функций Ляпунова на траекториях движения позитивной системы

$$V(\lambda(m)v(m)) \leq \lambda V(v(m)). \quad (0 < \lambda < 1)$$

Элементы матрицы $\lambda(m)$ неотрицательны, следовательно данное неравенство можно переписать в виде

$$P_0 \lambda(m)v(m) \leq \lambda P_0 v(m),$$

которое должно выполняться при любых m и любых неотрицательных значениях вектора $v(m)$. Поэтому неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$P_0 \lambda(m) \leq \lambda P_0,$$

которое понимается в смысле, что каждый элемент матрицы строки $P_0 \lambda(m)$ меньше либо равен соответствующего элемента матрицы P_0 , умноженного на значение параметра λ .

Непосредственно проверяется, что если выполняется матричное уравнение $P_0 \lambda(m) - \lambda P_0 = -Q_0(m)$,

где матрица $Q_0(m)$ - матрица строка размером $1 \times k$ с неотрицательными элементами, то из него следует предшествующее матричное неравенство. Данное матричное уравнение является модифицированным уравнением типа Ляпунова для анализа экспоненциальной устойчивости позитивных систем с неотрицательными значениями переменных состояния и элементов матрицы описания движения системы. По аналогии с пучком квадратичных форм назовем пару $P_0 \lambda(m) \nu$, $\mu P_0 \nu$ - пучком линейных форм с положительными элементами, где $\nu \in R^k$. Установим минимаксные свойства этого пучка

$$\mu_-(m) \leq \frac{P_0 \lambda(m) \nu}{P_0 \nu} \leq \mu_+(m),$$

записанного в виде неравенства. Представим матрицу $\lambda(m)$ в виде $\lambda(m) = [\lambda_1(m), \lambda_2(m), \dots, \lambda_k(m)]$, где $\lambda_i(m)$ - матрица столбец размером $k \times 1$.

Тогда значения $\mu_+(m)$ и $\mu_-(m)$ могут быть определены следующим образом

$$\mu_+(m) = \max_i \left\{ \frac{P_0 \lambda_i(m)}{P_{0i}} \right\},$$

$$\mu_-(m) = \min_i \left\{ \frac{P_0 \lambda_i(m)}{P_{0i}} \right\}.$$

Положив значение $\lambda(m) = \mu_+(m)$, вычисленному по приведенному выражению, из предшествующего неравенства следует выполнение неравенства, являющегося условием экспоненциальной устойчивости. Таким образом, полученное выражение позволяет вычислить параметр λ , определяющий оценку быстродействия позитивной системы. Значение ρ

при этом равно $\rho = \frac{C_{20}}{C_{10}}$, где значения C_{10} и C_{20} определяются из

иллюстрирует минимаксные ограничения для модульной функции Ляпунова, определяемой матрицей P_0 . На Рисунк. 1.8б показано, что для экспоненциально устойчивой системы в случае выполнения локальных достаточных условий при $0 < \lambda < 1$ при любом значении $v(m) \in R_+^2$ последующее значение вектора $v(m)$ будет принадлежать заштрихованной области, т.е. области, отсекаемой от R_+^2 поверхностью

$$P_0 v = \lambda V(v(m)).$$

Другими словами, если поверхность

$$P_0 v = V(v(m))$$

проходит через конец вектора $v(m)$, то значение постоянного уровня поверхности, ограничивающей область расположения последующих значений вектора состояний системы, уменьшается в λ раз ($\lambda < 1$). Область расположения вектора состояния через i интервалов дискретности изображена на этом рисунке с двойной штриховкой. С увеличением числа интервалов m при $\lambda < 1$ эти области стягиваются к началу координат, а, следовательно, и значения вектора состояния стремятся к нулю. Перепишем модифицированное уравнение Ляпунова для стационарного случая положительной системы

$$P_0 \Lambda - \lambda P_0 = -Q_0 \quad (2.5)$$

когда элементы матрицы Λ не зависят от интервала дискретности. При значении параметра $\lambda = 1$ имеем уравнение типа Ляпунова для стационарных положительных дискретных систем. Это уравнение позволяет производить анализ устойчивости линейных стационарных дискретных систем, когда матрица Λ имеет неотрицательные элементы. Сформулируем аналог теоремы Ляпунова.

Теорема. Пусть задана положительная система и матрица Λ - квадратная матрица с неотрицательными элементами ($v(0) \in R_+^k$). Тогда для того, чтобы положительная система была бы устойчивой необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо матрицы Q_0 с положительными элементами, решение уравнения типа Ляпунова ($\lambda = 1$) матрица P_0 содержала бы только положительные элементы.

Достаточное условие теоремы 1.3. позволяет получить простой алгоритм анализа устойчивости стационарных дискретных систем. Задаваясь произвольной матрицей Q_0 с положительными элементами, решаем линейное матричное уравнение (2.5) относительно неизвестной матрицы P_0 и осуществляем проверку элементов матрицы P_0 , чтобы они были положительными. Решение уравнения Ляпунова ($\lambda = 1$) имеет вид

$$P_0 = Q_0(I - \Lambda)^{-1},$$

где матрица $(I - \Lambda)$ имеет обратную, если собственные числа Λ лежат в единичном круге, т.е. исходная позитивная система устойчива.

Пример.

Рассмотрим систему, описание которой задано разностным уравнением

$$\begin{bmatrix} v_1(m+1) \\ v_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(m) \\ v_2(m) \end{bmatrix}, \quad v_1(0) \geq 0, v_2(0) \geq 0$$

Выберем матрицу $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда решение уравнения Ляпунова дает матрицу

$$P_0 = [0.33(3) \quad 5.33(3)]$$

с положительными элементами, а, следовательно, рассматриваемая система устойчива. Действительно собственные числа матрицы Λ равны

$$\lambda_1 = 0.7, \quad \lambda_2 = 0.9,$$

т.е. по модулю меньше единицы.

2.9 Анализ переходной и установившихся составляющих динамических процессов дискретных систем при внешних воздействиях. Матричные коэффициенты ошибок.

Анализ качества САУ основывается на исследовании переходных процессов, характерных для функционирования системы. Выделение в переходных процессах переходной и установившейся составляющих позволяет разделить задачу анализа качества процессов на две отдельные подзадачи. Установившаяся составляющая характеризует точность воспроизведения полезного сигнала или подавление возмущающих

воздействий и по ней определяются точностные показатели качества, переходная составляющая - каким образом и как долго система приходит к режиму нормального функционирования и по ней вводятся такие показатели качества как время переходных процессов, перерегулирование, количество колебаний и др. В данном параграфе рассмотрим определение переходной и установившейся составляющих в общем случае для нелинейных систем, а затем остановимся на вычислительных аспектах выделения этих составляющих для линейных стационарных дискретных систем, когда модель внешних воздействий также является линейной.

Положим, что описание движения исследуемой многомерной дискретной САУ задается разностным уравнением

$$\begin{aligned} x(m+1) &= F(q, x(m), \varphi(m)), \quad \|x(0)\| \leq d_x \\ y(m) &= Cx(m), \\ e(m) &= q(m) - y(m) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где x - n - мерный вектор состояния системы, φ - составной вектор входных ($q \in R^k$) и возмущающих ($f \in R^e$) воздействий ($\varphi^T \neq [q^T, f^T]$), y - k - мерный вектор регулируемых величин, e - k - мерный вектор ошибки, $F(\dots)$ нестационарная нелинейная n -мерная вектор-функция, C матрица выходов размером $k \times n$. Ограничение по норме вектора начальных состояний в (2.6) ($d_x > 0$) задает область допустимых начальных рассогласований $D(x)$.

Модель наиболее характерных для исходной системы детерминированных внешних воздействий зададим в виде модели автономной дискретной динамической системы уравнениями

$$\varphi(m) = \begin{bmatrix} q(m) \\ f(m) \end{bmatrix} = H\xi(m) = \begin{bmatrix} H_q \\ H_f \end{bmatrix} \xi(m) \quad (2.7)$$

$$\bar{\xi}(m+1) = \Gamma\xi(m), \quad \|\xi(0)\| \leq d_\xi$$

где ξ - χ - мерный вектор состояния модели внешних воздействий, Γ - квадратная матрица размером $\chi \times \chi$, а размеры матриц H, H_q и H_f удовлетворяют условию корректности этих уравнений. Ограничение начальных условий исходит из физической ограниченности множества воздействий, приложенных к реальным системам. Модель внешних воздействий генерирует множество типовых воздействий, являющихся решениями разностного однородного уравнения с начальными условиями из области, ограниченной поверхностью $\|\xi(0)\|^2 = d_\xi^2$. Эту область будем называть областью допустимых начальных

значений внешних воздействий. Любое начальное значение вектора состояния $\xi^{(0)}$ принадлежащее этой области осуществляет выборку одного типового воздействия и его параметров из множества, генерируемых моделью внешних воздействий. В целях простоты описания, модель внешних воздействий задана линейной. Во многих практических случаях, когда типовые воздействия описываются полиномами времени, набором гармонических незатухающих (экспоненциально затухающих или расходящихся) функций, экспоненциальных функций, или линейной комбинацией перечисленных функций модель внешних воздействий удастся свести к модели автономной системы. Принципиально, когда функции, генерируемые моделью внешних воздействий недостаточно точно аппроксимируют внешние воздействия, модель внешних воздействий усложняется и может быть выбрана нелинейной. Переходные процессы в системе, порождаемые ненулевыми начальными условиями на вектор состояния системы и внешними воздействиями, генерируемыми моделью внешних воздействий, однозначно определяются поведением во времени вектора состояния системы. Ненулевые начальные условия при отсутствии внешних воздействий порождают свободные движения системы, а внешние воздействия - вынужденные. Определим понятие установившейся составляющей вынужденного движения. Для этого представим вектор состояния системы в виде суммы

$$x(m) = x_n(m) + x_y(m) \quad (2.8)$$

переходной составляющей $x_n(m)$ и установившейся составляющей $x_y(m)$

Определение 2.1. Под установившейся составляющей вынужденного движения будем понимать такую вектор-функцию $x_y(m)$, которая при заданном воздействии $x_y(m)$ ($m=0,1,2,\dots$) обращает уравнение движения системы в тождество

$$x_y(m+1) = f(m, x_y(m), \varphi(m)) \quad (2.9)$$

при каждом значении m , и к которой сходятся при m , стремящемся к бесконечности все решения уравнения движения системы (2.6) при любых значениях вектора $x(0) \in R^n$ (из допустимой области начальных рассогласований $x(0) \in Dx$, т.е.

$$\lim \rho(x_n(m)) = 0, \quad (2.10)$$

где $\rho(\cdot)^n$ - метрика, равная

$$\rho(x_n(t)) = \min \|x(t) - x_{0n}\|$$

а D_0 - $x_0 \in D_0$ ограниченная замкнутая

односвязная область диссипативности $D_0 \in D_x$.

В дальнейшем будем рассматривать только такой класс систем, для которого область диссипативности D_0 включает только начало координат, т.е. рассмотренное условие имеет вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n(m)\| = 0$$

Данное условие фактически означает, что исследуемая система при заданном воздействии $\varphi(m)$ относительно переходной составляющей должна быть устойчивой. Вычитая из исходного уравнения движения уравнение для установившейся составляющей получим уравнение движения относительно переходной составляющей

$$x(m+1) = F_\varphi(m, x_n(m)), \quad x_n(0) = x(0) - x_y(0) \quad (2.11)$$

где применено следующее обозначение

$$F_\varphi(m, x_n(m)) = F(m, x(m), \varphi(m)) - F(m, x_y(m), \varphi(m))$$

Свойства модели системы по переходной составляющей определяют, каким образом процессы стремятся к установившемуся режиму, т.е. характеризуют быстродействие и характер сходимости. Определение установившейся составляющей $x_y(m)$ для нелинейных систем как непрерывных, так и дискретных на класс внешних воздействий в виде линейной модели в общем случае является достаточно сложной задачей и решается лишь в простейших случаях при жестких ограничениях на внешние воздействия (постоянные, линейно-возрастающие) и ограничениях на структуру системы (линейная часть плюс статические нелинейности). Рассмотрим алгоритм вычисления установившейся составляющей при воздействиях, генерируемых моделью внешних воздействий для линейных дискретных систем с уравнением описания движения системы вида

$$x(m+1) = Fx(m) + B_\varphi \varphi(m), \quad (2.12)$$

где F - квадратная матрица размером $n \times n$ с постоянными элементами, B_φ - матрица входов размером $n \times (k+1)$, характеризующая точки приложения входных и возмущающих воздействий. Остальные переменные имеют тот же смысл и размерность, что и в уравнении, и кроме того, регулируемые величины w и ошибка e определяются теми же соотношениями, что и в

уравнении. Свойства линейности системы и линейности модели внешних воздействий наталкивает на мысль, что в установившемся режиме преобразование внешних воздействий подобно действию линейного оператора. В работах показано, что установившуюся составляющую можно искать как результат действия линейного преобразования вектора состояния модели внешних воздействий в виде

$$x_y(m) = M\xi(m) \quad (2.13)$$

где M - матрица размером $n \times \lambda$. Установившаяся составляющая обращает полученное уравнение в тождество. Поэтому подстановка правой части уравнения модели внешних воздействий в уравнение установившегося режима с учетом уравнения движения системы приводит к матричному алгебраическому уравнению

$$M\Gamma - FM = B_\phi M, \quad (2.14)$$

решение которого относительно матрицы M позволяет находить искомое линейное преобразование для вычисления установившейся составляющей. Из полученных соотношений и решения уравнения движения системы следует, что установившаяся составляющая определяется соотношением

$$x_y(m) = M\Gamma^m \xi(0), \quad (2.15)$$

где M - есть решение матричного уравнения типа Сильвестра и зависит от локального значения вектора $\xi(0)$, по которому осуществляется выборка конкретного внешнего воздействия из множества воздействий, генерируемых моделью внешних воздействий. Уравнение движения исходной системы по переходной составляющей имеет вид

$$x_n(m+1) = Fx_n(m), \quad x_n(0) = x(0) - M\xi(0)$$

Это уравнение является линейным и его решение для определения переходной составляющей можно записать в форме

$$x_n(m) = Fx_n(0) = F^m(x(0) - M\xi(0)) \quad (2.16)$$

откуда следует, что переходная составляющая зависит от вида внешнего воздействия, задаваемого вектором $\xi(0)$. Если исходная система устойчива, то собственные числа матрицы F принадлежат единичному кругу и переходная составляющая с течением времени стремится к нулю. Найденная таким образом установившаяся составляющая обращает исходное уравнение в тождество,

Рассмотрим решение уравнения движения исходной системы, которое задается выражением

$$x(m) = Fmx(0) + \sum_{i=0}^{m-1} F^i B_\phi(m-1-i), \quad (2.17)$$

где первое слагаемое определяет свободную составляющую переходного процесса, порождаемую ненулевыми начальными условиями, а второе слагаемое - вынужденную составляющую, порождаемую внешним воздействием. Сопоставим выражению (2.17) переходной составляющей

решение уравнения (2.12), выраженное через переходную и установившуюся составляющие. На основании (2.8) и выражений (2.15) и (2.16) имеем

$$x(m) = F^m(x(0) - M\xi(0)) + M\Gamma^m\xi(0) \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.17) и (2.18) приходим к выводу, что вынужденная составляющая движений определяется выражением

$$\sum_{i=0}^{m-1} F^i B_\varphi \varphi(m-1-i) = M\Gamma^m\xi(0) - M^m\xi(0)$$

или соотношением

$$\sum_{i=0}^{m-1} F^i B_\varphi H\Gamma^{-1-i}\xi(m) = (M - F^m M\Gamma^{-m})\xi(m), \quad (2.19)$$

которое получается при использовании решения уравнения (2.7). Из (2.19) получаем матричное уравнение

$$M = F^m M\Gamma^{-m} + \sum_{i=0}^{m-1} F^i B_\varphi H\Gamma^{-1-i}, \quad (2.20)$$

которое может служить основой для организации итерационных процедур отыскания решения матричного алгебраического уравнения (2.14).

Способы решения алгебраического матричного уравнения типа Сильвестра при различных формах задания матрицы Γ представлены в . Следует отметить, что выбор формы задания матрицы Γ находится в руках проектировщика системы, т.к. для одного и того же класса внешних воздействий можно построить различные модели, отличающиеся формами задания пары матриц Γ и H и начальными значениями вектора состояния $\xi(0)$ для выборки конкретного внешнего воздействия. При всех формах задания матрицы Γ должна иметь одни и те же собственные числа, которые порождают элементарные базисные функции при решении этого уравнения. Множество воздействий, генерируемые данной моделью является линейными комбинациями этих элементарных базисных функций. Для упрощения алгоритма решения уравнения модели внешних воздействий и анализа системы на отдельные составляющие внешних воздействий желательно матрицу Γ задавать в о вещественном диагональном виде. Таким образом в линейной системе при внешних воздействиях, генерируемых моделью внешних воздействий, переходная составляющая зависит от начальных условий на вектор состояния системы, а также от вида внешнего воздействия, что проявляется в наличии в решении добавочного члена эквивалентного изменению значения вектора начального состояния системы. Кроме того, переходная составляющая является линейной комбинацией только собственных функций движений, «порождаемых» собственными числами матрицы Γ системы (2.12). Следовательно, качество процессов в переходном режиме зависит от свойств системы (2.12). Установившаяся составляющая является линейной комбинацией только собственных функций модели (2.7), порождаемых

собственными числами матрицы Γ . Другими словами, в установившемся режиме вектор состояния устойчивой системы (2.12) с точностью до линейного преобразования воспроизводит движения автономной системы (2.7), задающей внешние воздействия. Установившаяся составляющая определяет точностные показатели системы, которые зависят как от свойств замкнутой системы (матрицы Γ), так и от вида внешних воздействий (модели (2.7)). Переходная и установившаяся составляющие вектора регулируемых величин и ошибки определяются переходной и установившейся составляющими вектора состояния соответственно и как следует из (2.6) и(2.8) имеют вид

$$y_n(m) = cx_n(m) \quad y_y(m) = cx_y(m)$$

$$e_n(m) = -cx_n(m) \quad e_y(m) = q(m) - cx_y(m)$$

где индексы "n" и "y" присвоены переходной и установившейся составляющим векторов соответственно. Иллюстрация переходной (x_n) и установившихся составляющих (x_y, e_y), а также переменной x , при входном воздействии с постоянной скоростью (q) приведена на рисунке 2.8.

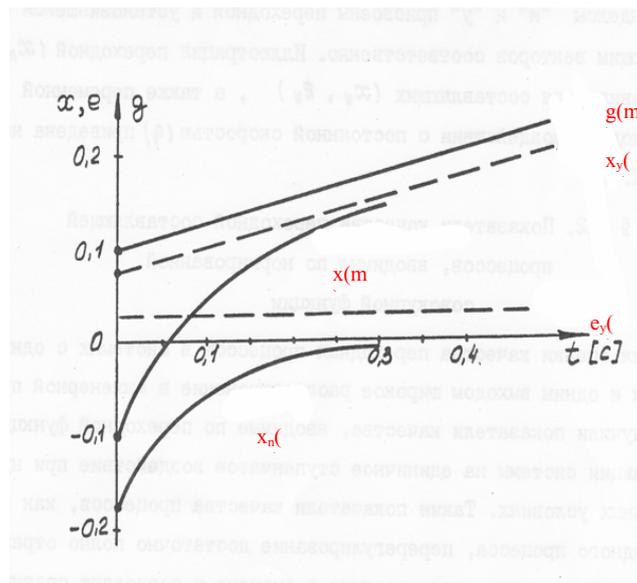


Рисунок 2.8 - Переходная и установившаяся составляющие процессов.

Раздел 3. Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с измеримыми состояниями.

3.1 Построение регуляторов для систем стабилизации на основе принципа Беллмана. Основы и постановка задачи модального управления дискретными объектами.

Постановка задачи синтеза стабилизирующих управлений для объектов с полной информацией.

Рассмотрим объект управления (ОУ) с уравнением движения:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases},$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния;

$y \in R^k$ – вектор регулируемых переменных;

$U \in R^k$ – вектор управляющих воздействий.

$A = n \times n$;

B – матрица входов по управлению $n \times k$;

C – матрица выходов $k \times n$.

Будем полагать, что пара A, B – полностью управляема, т.е. с помощью управлений можно воздействовать на все собственные движения объекта.

Будем говорить, что ОУ с полной информацией, если все переменные вектора состояния доступны для измерения. Если число измерений меньше чем порядок объекта, то объект с неполной информацией.

Для ОУ с полной информацией будем искать управление на основе принципа Беллмана, как функцию всех переменных состояния, а именно линейную функцию, в виде:

$$U(m) = -kx(m),$$

где знак минус, стоящий перед алгебраическим выражением, отражает отрицательность обратных связей, а матрица k размерности $k \times n$, называется матрицей линейных стационарных обратных связей (ЛСОС) и ее элементы определяют коэффициенты отрицательных обратных связей (ООС) по соответствующим переменным вектора состояния.

Регулятор, который вырабатывает подобное управление, будем называть линейным статическим регулятором или пропорциональным регулятором.

Получим уравнение движения замкнутой системы с искомым законом управления:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(m+1) = Ax(m) - Bkx(m) \\ x(m+1) = Fx(m) \\ y = Cx(m) \end{array} \right. ,$$

где $F = A - Bk$ - $n \times n$ -матрица описания замкнутой системы, определяющая ее свойства.

Задача синтеза пропорционального регулятора (стабилизирующих управлений), заключается в отыскании таких параметров матрицы ЛСОС k , которая обеспечивает замкнутой системе, динамика которой определяется матрицей $F = A - Bk$ наперед заданные желаемые свойства, показателей качества процессов.

3.2 Задача модального управления.

Определим характеристический полином замкнутой системы и корни характеристического уравнения.

Запишем характеристический полином:

$$\det(F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

где $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ - коэффициенты характеристического полинома;

z_1, z_2, \dots, z_n - корни характеристического полинома (системы).

Задача модального управления заключается в выборе желаемых коэффициентов характеристического полинома α_i^* или желаемых корней системы z_i^* по заданным показателям качества и обеспечения желаемых коэффициентов (корней) с помощью параметров матрицы ЛСОС k , т.е.

$$F = A - Bk \quad \det(F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^*z^{n-1} + \dots + \alpha_1^*z + \alpha_0^* = 0$$

и корни $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$.

3.3 Решение задачи модального управление на основе принципа эталонной модели.

Введем в рассмотрение эталонную модель, определяющую желаемые свойства замкнутой проектируемой системы, а именно желаемые корни или коэффициенты характеристического уравнения.

Эталонную модель зададим уравнениями движения:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) \\ v(m) = -H\eta(m) \end{cases},$$

где η – вектор состояния эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния объекта;

v – вектор выхода эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором управления;

Матрица Γ – квадратичная матрица $n \times n$, определяющая свойства эталонной модели и такая, что ее характеристический полином или собственные числа совпадают с желаемым характеристическим полиномом, или желаемыми корнями замкнутой системы;

Матрица H – $k \times n$ – матрица выходов: пара $H\Gamma$ – полностью наблюдаема (п.н.), т.е. в выходах проявляются все собственные движения эталонной модели.

$$\Gamma : \det(\Gamma - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^* = 0$$

и корни этого уравнения совпадают с желаемыми корнями $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$.

Потребуем, чтобы вектор состояния замкнутой системы с искомым управлением вел себя таким же образом, как и вектор состояния эталонной модели. Другими словами, потребуем, чтобы для любого момента времени mT вектор состояния замкнутой системы и эталонной модели были бы связаны линейным стационарным преобразованием, т.е.

$$x(m) = M\eta(m),$$

где M – квадратичная матрица $n \times n$, задающая неособое линейное преобразование $\exists M^{-1}$.

Подставим в уравнение движения замкнутой системы связь между ее вектором состояния и вектором состояния эталонной модели.

$$\begin{aligned} M\eta(m+1) &= FM\eta(m) \\ \eta(m+1) &= M^{-1}FM\eta(m) \end{aligned}.$$

Для обеспечения линейной связи между векторами состояния замкнутой системы и эталонной модели, выберем матрицу M таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$M : M^{-1}FM = \Gamma.$$

Из свойств матриц следует совпадение характеристических полиномов матриц F и Γ , и их собственных чисел. Получим эквивалентную форму записи $F = A - Bk$. Подставим:

$$MG - AM = -BKM,$$

получили матричное уравнение с неизвестными матрицами M и k . Матрицы A, B, Γ – заданы. $M - n \times n - n^2$ неизвестных, $k - k \times n - k \cdot n$ неизвестных. Всего неизвестных: $n^2 + kn$. Приравнивая л.ч. и п.ч. получим n^2 уравнений.

Полученное матричное уравнение эквивалентно системе из n^2 уравнений, а число неизвестных $n^2 + kn$, следовательно, требуется получить дополнительное матричное уравнение, эквивалентное системе из $k \cdot n$ уравнений.

Для получения добавочного матричного уравнения потребуем, чтобы выход эталонной модели совпадал бы с желаемым управляемым воздействием, т.е. чтобы для любого выполнялось:

$$m: U(m) = V(m).$$

Свяжем управляющее воздействие и выход эталонной модели:

$$\begin{aligned} -Kx(m) &= -H\eta(m) \\ KM\eta(m) &= H\eta(m) \\ \forall \eta \in R^n : KM &= H \\ \begin{cases} MG - AM = -BH \\ K = HM^{-1} \end{cases} & \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix} \end{aligned}$$

Уравнение (*), называется матричным уравнением, линейным относительно матрицы M . Это уравнение имеет единственное решение, относительно матрицы M , причем, матрица M при этом имеет обратную M^{-1} , если на исходные матрицы описания объекта и эталонной модели накладываются следующие ограничения:

1. Пара A, B – полностью управляема;
2. Пара H, Γ – полностью наблюдаема;
3. Матрицы Γ, A не должны иметь одинаковые собственные числа (корни разомкнутой системы объекта не должны совпадать с желаемыми корнями замкнутой системы).

Соотношение (**) позволяет по заданному решению матричного уравнения, типа Сильвестра (*), отыскивать матрицу ЛСОС K , решающую задачу модального управления.

Пример:

Рассмотрим ОУ с полной информацией, где последовательно соединен экстраполятор 0-го порядка и 2 интегратора.

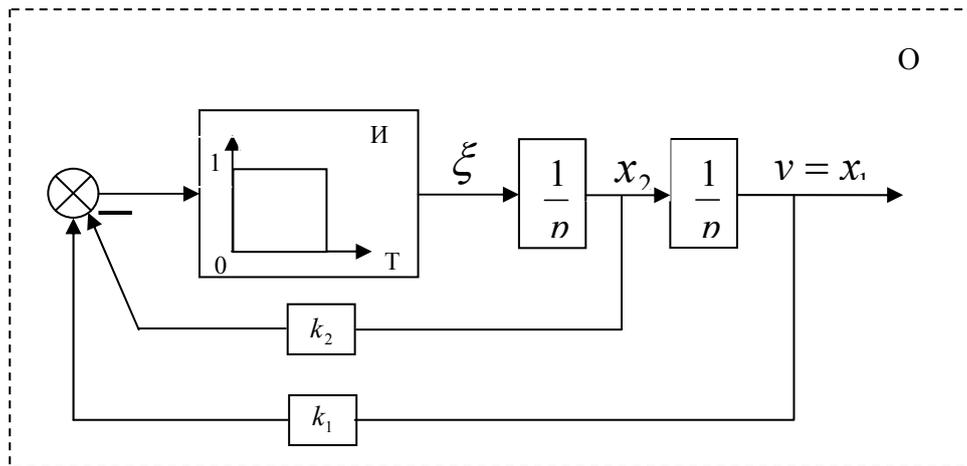


Рисунок 3.1 - ОУ с последовательно соединенными экстраполятором 0-го порядка и 2-мя интеграторами.

Для объекта, состоящего из последовательного соединения экстраполятора 0-го порядка и 2-х интеграторов в предположении, что измеряются выходная переменная и скорость ее изменения, найти коэффициенты ЛСОС, обеспечивающих в замкнутой системе оптимальность по быстродействию.

Для линейных дискретных систем с доним входом и выходом справедливо: система будет оптимальной по быстродействию, т.е. ее переходные процессы будут закончены не более чем за n интервалов дискретности, где n – порядок системы, если все n корней системы равны нулю.

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} U(m)$$

$$T = 1 [c], \quad n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = [k_1 \quad k_2]$$

Назначим матрицы эталонной модели. Для этого выберем желаемые корни $z_1^* = z_2^* = 0$, чтобы обеспечить оптимальность по быстродействию.

$$z^2 = 0 \quad (\alpha_0^* = 0; \alpha_1^* = 0)$$

Назначим матрицу Γ по желаемым корням в диагональном виде $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и выберем матрицу H из условий полной наблюдаемости пары H, Γ : $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решим матричное уравнение Сильвестра относительно матрицы M :

$$M\Gamma - AM = -BH$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$M\Gamma = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_3 & m_2 + m_4 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$BH = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -m_1 - m_3 = -0.5 & m_3 = 1 \\ m_1 - m_2 - m_4 = 0 & m_3 = m_4 = 1 \\ -m_3 = -1 & m_1 = -m_3 + 0.5 = -1 + 0.5 = -0.5 \\ m_3 - m_4 = 0 & m_2 = m_1 - m_4 = -0.5 - 1 = -1.5 \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad K = HM^{-1} \quad \det M = -0.5 + 1.5 = 1$$

$$M^V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad M^{VT} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

3.4 Особенности задания матриц описания эталонной модели для дискретных систем.

Ставится задача нахождения эквивалентной модели в предположении, что сформулирована непрерывная эталонная модель по требуемым показателям качества переходных процессов.

Предполагается, что требуемым показателям качества сформулирована непрерывная эталонная модель с уравнением движения:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = G_H \eta \\ V = -H\eta \end{cases}$$

где $\eta - n$ -мерный вектор состояния непрерывной эталонной модели;

$V - k$ -мерный вектор выходов эталонной модели;

$G_H - n \times n$ -матрица, определяющая желаемое поведение проектируемой системы, т.е. $G_H : \det[G_H - sI] = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + a_1^* s + a_0^* = 0$, $a_{n-1}^*, a_{n-2}^*, \dots, a_0^*$ или $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$ назначены из требуемых показателей качества переходных процессов (например, с помощью стандартных полиномов);

$H - k \times n$ -матрица выходов эталонной модели: пара H, G_H - полностью наблюдаема.

Наряду с непрерывной эталонной моделью, рассмотрим дискретную эталонную модель с уравнением движения:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = G\eta(m) \\ V(m) = -H\eta(m) \end{cases}$$

где все переменные по размерности соответствует непрерывной эталонной модели, а матрица $G - n \times n$, $H - k \times n$.

Ставится задача нахождения такой дискретной эталонной модели (фактически отыскания матрицы G), поведение которой подобно поведению непрерывной эталонной модели, причем под подобным понимается совпадения значений вектора состояния дискретной эталонной модели с вектором состояния непрерывной эталонной модели в любые дискретные моменты времени $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots, T$ - интервал дискретности, т.е.

$$\forall t = mT, \eta(m) = \eta(T).$$

Решение задачи.

Запишем решение уравнения движения непрерывной эталонной модели для произвольного момента времени t относительно $t_0, \forall t : t_0 < t$:

$$\eta(t, t_0) = e^{G_H(t-t_0)} \eta(t_0).$$

Положим, что $t_0 = mT$, а $t = (m+1)T$. Подставим

$$\eta((m+1)T) = e^{G_H((m+1)T-mT)} \eta(mT) \quad \eta(m+1) = e^{G_H T} \eta(m)$$

Дискретная эталонная модель будет подобна непрерывной эталонной модели при условии, если матрицу Γ выбрать в виде: $\Gamma = e^{\Gamma_H T}$.

Найдем связь корней характеристического уравнения дискретной эталонной модели с корнями характеристического уравнения непрерывной эталонной модели. Для этого обозначим: $\det[\Gamma - zI] = z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^* = 0, z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ - корни характеристического уравнения дискретной эталонной модели.

В силу того, что матрица Γ является функцией от матрицы Γ_H , то и корни ее характеристического уравнения будут, той же самой функцией непрерывной эталонной модели. Т.е. $z_i^* = e^{s_i^* T}, i = 1 \dots n$.

Есть и другой вариант формирования матриц дискретной эталонной модели: с помощью стандартных полиномов по заданным показателям качества, выбираем для непрерывных систем желаемые корни характеристического уравнения $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$; по ним рассчитываются желаемые корни дискретной эталонной модели $z_i^* = e^{s_i^* T}, i = 1 \dots n$ и если необходимые желаемые коэффициенты характеристического уравнения дискретной эталонной модели $\alpha_{n-1}^*, \dots, \alpha_1^*, \alpha_0^*$.

По корням или коэффициентам характеристического полинома формируется матрица дискретной эталонной модели Γ в одной из канонических форм. Матрица H выбирается из условия полной наблюдаемости пары H, Γ .

3.5 Синтез интегрального регулятора для систем с одним входом и выходом.

Интегральные регуляторы предназначены для повышения точностных свойств и повышают порядок астатизма системы на единицу. Рассмотрим функциональную схему следующей системы с ОУ с полной информацией.

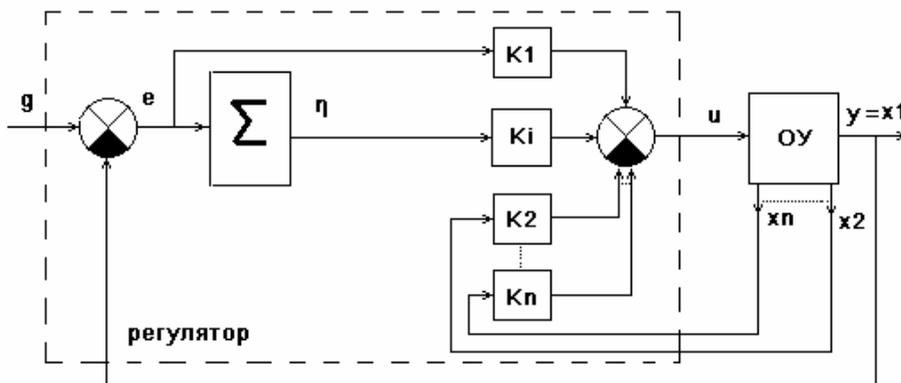


Рисунок 3.2 - ОУ с полной информацией.

Постановка задачи.

Задан ОУ с уравнением движения:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases},$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния;

$u \in R^1$ – управляющее воздействие;

$y \in R^1$ – регулируемая переменная;

$A - n \times n$ – матрица, определяющая свойства объекта;

$B - n \times 1$ – матрица входов по управлению;

$C - 1 \times n$ – матрица выходов.

ОУ с полной информацией, т.е. все переменные вектора состояния измеряются. Пара A, B – полностью управляема; пара C, A – полностью наблюдаема, т.е. в выходе проявляются все собственные движения, причем $C : y = x_1$ (регулируемая переменная совпадает с первой компонентой вектора состояния) $C = [1 \ 0 \dots 0]_{1 \times n}$.

Требуется построить следящую систему для слежения за задающим воздействием g в предположении, что измеряется ошибка $e = g - y$, которая обеспечивает заданные требования к качеству переходных процессов.

Замечание. В данном случае имеются измерители ошибки e и переменных состояния x_2, x_3, \dots, x_n ($e = g - y = g - x_1$), т.е. x_1 косвенно измеряется.

Будем строить интегральный регулятор, описание которого задается уравнением движения:

$$\begin{cases} v(m+1) = v(m) + e(m); v(0) = 0 \\ u(m) = k_1 e(m) + k_u v(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) \end{cases}$$

где $v \in R^1$ – состояние описываемой выходной переменной сумматора;

k_u – коэффициент передачи интегральной составляющей (суммарной);

k_1, k_2, \dots, k_n – коэффициенты обратной связи по соответствующим переменным состояния.

Таким образом, интегральный регулятор содержит два уравнения: первое – алгебраическое, второе – динамическое.

Ставится задача с помощью интегрального регулятора обеспечить в замкнутой системе наперед заданные желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенные из требуемых показателей качества переходных процессов. Т.е., требуется определить параметры интегрального регулятора k_1, k_2, \dots, k_n , которые обеспечивают замкнутой системе желаемые корни $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*, z_{n+1}^*$.

Решение задачи.

Перепишем уравнение формирования управляющих воздействий, подставив в выражение ошибки $e = g - x_1$.

$$\begin{aligned} u(m) &= k_1 g(m) + k_u v(m) - k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) = \\ &= k_1 g(m) - [-k_u, k_1, k_2, \dots, k_n] \begin{bmatrix} v(m) \\ x_1(m) \\ \text{M} \\ x_n(m) \end{bmatrix} = k_1 g(m) - [-k_u, k] \begin{bmatrix} v(m) \\ x(m) \end{bmatrix} \\ k &= [k_1, k_2, \dots, k_n], 1 \times n. \end{aligned}$$

Введем уравнение движения расширенного объекта, подсоединив к уравнениям движения объекта уравнение сумматора регулятора.

$$\begin{cases} v(m+1) = v(m) + g(m) - x_1(m) \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \end{cases}$$

Перепишем полученное уравнение в блочном виде:

Введем составной вектор $\begin{bmatrix} v(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} \Delta x_1 = Cx$

$$\begin{bmatrix} v(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} g(m)$$

Обозначим через вектор \bar{x} расширенный вектор, составленный из выходного сумматора и x .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}, \quad \text{через } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad B_{1g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{k} = [-k_u, k].$$

С использованием введенных обозначений уравнение движения примет вид:

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + B_{1g}g(m) \\ u(m) = k_1g(m) - \bar{k}\bar{x}(m) \end{cases}$$

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x}(m) + (k_1\bar{B} + B_{1g})g(m),$$

обозначим через матрицу замкнутой системы:

$$\bar{F} - (n+1) \times (n+1) = \bar{A} - \bar{B}\bar{k},$$

где $\bar{B}_g = k_1\bar{B} + B_{1g} - (n+1) \times 1 -$ матрица входов по управляющему воздействию.

$$\bar{x}(m+1) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m)$$

Вывод:

Матрицы $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$ определяет динамические свойства замкнутой системы, т.е. качество переходных процессов. Следовательно, задача синтеза интегрального регулятора сводится к отысканию такой матрицы ЛСОС $\bar{k} - 1 \times (n+1)$, которая обеспечивает замкнутой системе наперед заданные желаемые корни $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n+1}^*$. Т.е. свели задачу синтеза интегрального регулятора к решению задачи модального управления, которая разрешима единственным образом при условии полной управляемости пары \bar{A}, \bar{B} . Эта пара будет полностью управляема, если матрицы A, B - полностью управляемы, а пара C, A - полностью наблюдаема.

Последовательность синтеза интегрального регулятора.

Исходные данные:

ОУ: A, B, C .

1. Проверка пары A, B на полную управляемость, пары C, A на полную наблюдаемость;
2. По требуемым показателям качества процессов назначение $n+1$ желаемых корней замкнутой системы $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n+1}^*$;
3. По желаемым корням назначение матриц дискретной эталонной модели - матрицы $\bar{F} - (n+1) \times (n+1)$ и матрицы выходов $\bar{H} - 1 \times (n+1)$ из условия полной наблюдаемости пары;
4. Формирование матриц расширенного описания объекта;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

5. Решение задачи модального управления: вычисление матрицы ЛСОС на основе матричного уравнения Сильвестра:

$$\overline{M}\Gamma - \overline{A}\overline{M} = -\overline{B}\overline{H} \quad \overline{k} = \overline{H}\overline{M}^{-1},$$

где \overline{M} – матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$.

3.6 Построение регуляторов со встроенной моделью.

Метод встроенной модели позволяет повышать точностные свойства системы, а именно обеспечивать нулевую ошибку в установившемся режиме для заданного класса внешних воздействий, модель которых задается автономным разностным уравнением.

Рассмотрим следящую систему со следующей функциональной схемой:



Рисунок 3.2 – Система управления.

где y – регулируемая переменная;

g – задающее воздействие;

МВВ – модель внешних воздействий, описание которой задается разностным уравнением.

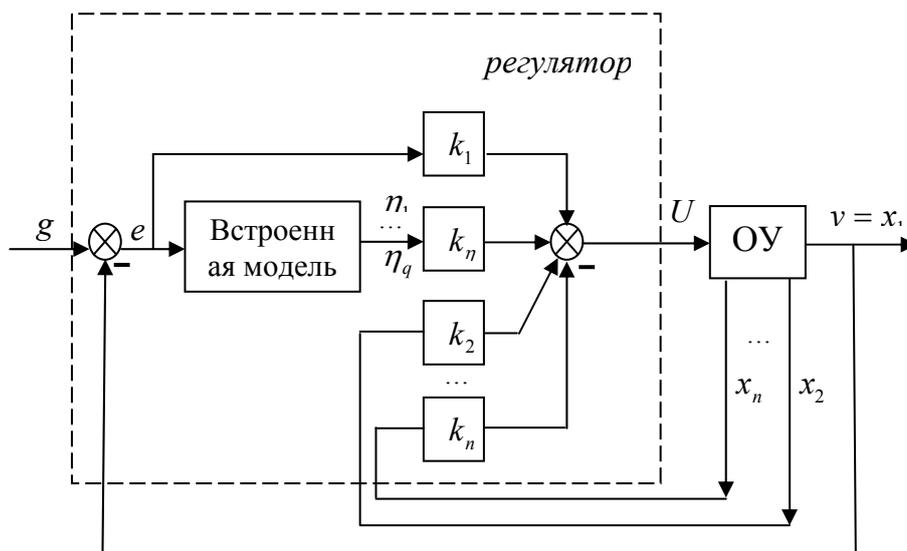


Рисунок 3.3 - Следящая система.

где e – ошибка $e = g - y$;

$\eta - q$ – мерный вектор состояний встроенной модели;

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_q \end{bmatrix};$$

где $k_{\eta} - 1 \times q$ – матрица коэффициентов прямых связей по состоянию встроенной модели:

$$k_{\eta} = [k_{1\eta} \quad k_{2\eta} \quad \dots \quad k_{q\eta}],$$

где k_1, \dots, k_n – коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояния.

Постановка задачи.

Будем полагать, что в результате анализа задающих воздействий, выделены воздействия, приводящие к наиболее существенным ошибкам в установившемся режиме, и класс этих воздействий генерируется линейным автономным разностным уравнением. Другими словами будем считать, что получена модель внешних воздействий (МВВ):

$$\begin{aligned} \xi(m+1) &= \Gamma \xi(m) \\ g(m) &= H_{\xi} \xi(m) \end{aligned},$$

где $\xi(0)$ – тип воздействий и его параметры;

$\xi \in R^q$ – вектор состояния МВВ;

$\Gamma - q \times q$ – матрица, задание которой определяет виды внешних воздействий;

$H_{\xi} - 1 \times q$ – матрица выходов МВВ.

Класс внешних воздействий, генерируемый этой моделью, определяется решением этого уравнения, т.е. формула:

$$g(m) = H_{\xi} \Gamma^m \xi(0) \quad (*)$$

Будем полагать, что задано уравнение движения ОУ в виде:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases},$$

где $x \in R^n$, y – регулируемая величина.

$$y = x_1, \quad B - n \times 1, \quad A - n \times n, \quad C - 1 \times n.$$

$$C = [1 \quad K \quad 0 \quad 0]$$

Будем полагать, что измеряется ошибка $e = g - y$ и переменные вектора состояния x_2, x_3, \dots, x_n . Пара A, B — полностью управляема, пара C, A — полностью наблюдаема.

Будем строить регулятор со встроенной моделью, описание которого задается уравнениями:

$$\begin{aligned}\eta(m+1) &= \Gamma \eta(m) + B_\eta e(m) \\ u(m) &= k_1 e(m) + k_\eta \eta_m - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m),\end{aligned}$$

где $\eta \in R^q$ — вектор состояния встроенной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния внешних воздействий;

$\Gamma - q \times q$ — матрица, совпадающая с матрицей МВВ;

матрица входов встроенной модели (МВВМ).

МВВМ выбирается из условия полной управляемости пары Γ, B_η . Задача синтеза регулятора состоит в нахождении коэффициентов обратной связи k_1, k_2, \dots, k_n и матрицы коэффициентов k_η , обеспечивающих в замкнутой системе желаемое качество процессов.

Если воспользоваться методом модального управления, то искомые параметры регулятора должны обеспечивать в замкнутой системе желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенного из требуемых показателей качества.

Замечание. Приведенная структура регулятора со встроенной моделью при условии устойчивости замкнутой системы обеспечивает нулевую установившуюся ошибку для заданного класса задающих воздействий (*).

Сведение задачи к задаче модального управления.

Рассмотрим формирование задающих воздействий и подставим вместо ошибки: $g - y$

$$\begin{aligned}U(m) &= k_1 g(m) + k_\eta \eta(m) - k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) = \\ &= k_1 g(m) + k_\eta \eta(m) - kx(m) =\end{aligned}$$

$$= k_1 g(m) - \begin{bmatrix} -k_\eta & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix}$$

$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$ — матрица ЛСОС.

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} -k_\eta & k \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение расширенную ОУ, объединив уравнение движения объекта с уравнением встроенной модели:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta g(m) - B_\eta y(m) \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \eta(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g(m)$$

$$\bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1 g(m)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1 g(m) \\ u(m) = k_1 g(m) - \bar{k}\bar{x}(m) \end{cases}$$

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x}(m) + (\bar{B}_1 + k_1\bar{B})g(m)$$

где $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$ – матрица размерности $(n+q) \times (n+q)$ – матрица описания замкнутой системы;

$\bar{B}_g = \bar{B}_1 - \bar{B}\bar{k}_1$ – матрица входов по задающему воздействию $(n+q) \times 1$.

$\bar{x}(m+1) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m)$,

$\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$ – определяет динамические свойства замкнутой системы.

И если пара \bar{A}, \bar{B} – полностью управляема, то выбором матрицы \bar{k} можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы.

Отметим, что пара \bar{A}, \bar{B} будет полностью управляема при выполнении следующих условий:

1. Пара A, B объекта полностью управляема, а пара C, A – полностью наблюдаема;
2. Пара Γ, B_η – полностью управляема.

Раздел 4. Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с ограничениями на измеряемые переменные.

4.1 Устройство оценки полной размерности и способы проектирования.

Как уже отмечалось, устройство оценки вектора состояния объекта управления предназначено для восстановления (выработки) недоступных для измерения переменных вектора состояния и использование этих оценок для формирования управляющих воздействий. Устройства оценки вырабатывают оценки переменных вектора состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Построение устройства оценки полной размерности.

Рассмотрим уравнение движения ОУ с неполной информацией

$$ОУ: \begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \end{cases}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^k$; $y_u \in R^l$ - вектор изменяемых величин, а матрицы $A - n \times n$; $B - n \times k$ и матрица измерений $C_u - l \times k$. Предполагается, что для объекта с неполной информацией число измерений l меньше числа переменных вектора состояния ОУ n , т. е. $l < n$ и $rank C_u = l$, другими словами нет дублирующих друг друга измерений.

Будем строить устройство оценки полной размерности как динамическую систему с уравнением движения

$$v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) \quad v(0) = 0$$

где $v \in R^n$ - вектор состояния устройства оценки, по размерности совпадающий с размерностью вектора состояния исходного ОУ, A, B, C_u - матрицы описания объекта, L - матрица входов устройства оценки размерности $(n \times l)$.

Задача построения устройства оценки полной размерности состоит в отыскании такой матрицы входов данного устройства L , которое обеспечивает в сходимость вектора оценки $v \in R^n$ к оцениваемому вектору $x \in R^n$ с требуемой скоростью сходимости, назначенной из желаемых динамических свойств.

Для определения условий, при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки, вычтем из уравнения движения этой системы уравнение движения объекта, при этом получим уравнение

$$\begin{aligned} v(m+1) - x(m+1) &= \\ &= A \cdot v(m) + L \cdot (C_u \cdot x(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) - A \cdot x(m) - B \cdot u(m) \end{aligned}$$

группируя члены этого уравнения, приходим к уравнению

$$v(m+1) - x(m+1) = A \cdot (v(m) - x(m)) - L \cdot C_u \cdot (v(m) - x(m)),$$

из которого следует уравнение

$$v(m+1) - x(m+1) = (A - L \cdot C_u) \cdot (v(m) - x(m)).$$

Обозначая разность векторов состояний

$$\tilde{x}(m) = v(m) - x(m),$$

как вектор невязки, а матрицу

$$F_v = A - L \cdot C_u,$$

как матрицу, определяющую динамические свойства устройства оценки, приходим к уравнению движения относительно вектора невязки

$$\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m),$$

которое является автономным уравнением и свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы F_v . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки $v \in R^n$ тогда и только тогда, когда матрица $F_v = A - L \cdot C_u$ является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

*Синтез устройства оценки полной размерности
на основе метода модального управления.*

Определение параметров матрицы входов устройства оценки L.

1. Проверка пары C_u, A на выполнение условия полной наблюдаемости.
2. Назначение n — желаемых корней устройства оценки $z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$ (коэффициентов характеристического полинома) исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более “быстрыми”, чем корни для синтеза матрицы ЛСОС.

3. По желаемым корням формирование матрицы эталонной модели $\Gamma - n \times n$, и выбор матрицы выходов H_v устройства эталонной модели - $l \times n$ из условия п.н. пары H_v, Γ_v .

4. Решение матричного уравнения Сильвестра $M_v \cdot \Gamma_v - A^T \cdot M_v = -C_u \cdot H_v$ относительно матрицы M_v . Вычисление матрицы входов устройства оценки L по соотношению $L = H \cdot M^{-1}$.

Синтез устройства оценки полной размерности

на основе метода локальной оптимизации.

Отметим, что построение устройства оценки полной размерности подобно структуре построения фильтра Калмана, которого отличает критерий нахождения матрицы входов устройства оценки L и модель исходного объекта, к которому приложены шумы в управлении и имеют место шумы в измерениях. Матрица входов устройства оценки L ищется из условия минимизации математического ожидания от квадратичного функционала, как правило, на бесконечном интервале времени, что сводится к решению матричного уравнения типа Риккати.

4.2 Устройство оценки пониженной размерности и способы проектирования.

Идеология построения устройства оценки пониженной размерности заключается в использовании измеряемых переменных при формировании вектора оценки. При этом удается понизить размерность устройства оценки по сравнению с размерностью оцениваемого вектора состояния на количество измерений, что упрощает реализацию устройства оценки. Устройства оценки как полной так и пониженной размерностей предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Построение устройства оценки пониженной размерности.

Рассмотрим объект управления с неполной информацией с уравнением движения в форме «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_n(m) = C_n \cdot x(m) \end{cases}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^k$; $y_u \in R^l$ - вектор изменяемых величин, а матрицы $A - n \times n$; $B - n \times k$ и матрица измерений $C_u - l \times k$. Предполагается, что для объекта с неполной информацией число измерений l меньше числа переменных вектора состояния ОУ n , т. е. $l < n$ и $rank C_u = l$, другими словами нет дублирующих друг друга измерений. Предполагается, что пара A, B - полностью управляема, пара C_u, A - полностью наблюдаема.

Будем строить устройство оценки пониженной размерности в соответствии со следующим уравнением движения

$$\begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} \end{cases} \quad v(0) = 0$$

где $v \in R^{n-l}$ - вектор состояния устройства оценки, размерность которого меньше размерности оцениваемого вектора состояния на число измерений, $\hat{x}(m) \in R^n$ - вектор оценки, формируемый по вектору измеряемых переменных и вектору состояния устройства оценки,

$F_v - (n-l) \times (n-l)$ - матрица определяющая динамические свойства устройства оценки, $G - (n-l) \times l$ - матрица входов устройства оценки, $M - (n-l) \times n$ - матрица линейных преобразований, согласующая размерности векторов состояния ОУ и устройства оценки.

Из уравнения описания движения устройства оценки следует, что

задача построения с устройством оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства оценки F_v и матрицы входов G , а также матрицы преобразования M , которые позволяют получить вектор оценки при заданной скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Определим условия при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки. Для этого, вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта управления, слева умноженное на матрицу преобразования M , тогда получим

$$\begin{aligned} v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= \\ &= F_v \cdot v(m) + G \cdot C_u x(m) + M \cdot B \cdot u(m) - M \cdot A \cdot x(m) - M \cdot B \cdot u(m), \end{aligned}$$

или

$$v(m+1) - M \cdot x(m+1) = F_v \cdot v(m) + (G \cdot C_u - M \cdot A) \cdot x(m).$$

Положим, что выполняется матричное уравнение типа Сильвестра вида

$$M \cdot A - F_v \cdot M = G \cdot C_u$$

Тогда справедливо уравнение

$$v(m+1) - M \cdot x(m+1) = F_v \cdot (v(m) - M \cdot x(m)),$$

и если введем вектор невязки по соотношению

$$\tilde{v}(m) = v(m) - M \cdot x(m),$$

то относительно вектора невязки получим уравнение

$$\tilde{v}(m+1) = F_v \cdot \tilde{v}(m),$$

которое является автономным уравнением свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы F_v . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки

$$\begin{cases} \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} \end{cases},$$

тогда и только тогда, когда матрица F_v является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Процедура синтеза устройства оценки пониженной размерности.

Формирование матриц описания устройства

1. Проверка C_u , A на полную наблюдаемость, $\text{rank } C_u = 1$
2. Исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору назначение $n-1$ желаемых корней характеристического полинома (или коэффициентов)
3. По желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки $F_v - (n-1) \times (n-1)$ в одном из канонических видов и выбор матрицы входов устройства оценки $G - (n-1) \times 1$ из условия полной управляемости пары F_v, G
4. Решение уравнения типа Сильвестра относительно матрицы преобразования $M - (n-1) \times n$
5. Нахождение произведения $M \cdot B$ и вычисление матриц E, D по соотношению

$$[E, D] = K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1}$$

4.3 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки полной размерности.

Совокупность устройства оценки и устройства, реализующего соотношение

$$u(m) = -k \cdot \hat{x}(m)$$

где u – вектор управляющих воздействий;

k – матрица линейных обратных стационарных связей;

\hat{x} – вектор невязки;

будем называть динамическим регулятором.

Устройства оценки предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Постановка задач синтеза регулятора.

Задано уравнение движения с неполной информацией.

$$OY: \begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \end{cases}$$

$x \in R^n$; $u \in R^k$; $y_u \in R^l$ – вектор изменяемых величин.

$$A - n \times n; \quad B - n \times k$$

Матрица измерений $C_u - l \times k$

Для объекта с неполной информацией число измерений $l < n$, т. е. $l < n$

$$\text{rank} C_u = l$$

A, B – п.у. C_u – п.н.

Будем строить динамичный регулятор с устройством оценки полной размерности в соответствии со следующими уравнениями:

$$v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m) + B \cdot u(m)) \quad v(0) = 0$$

$$u(m) = -k_v \cdot v(m)$$

$v \in R^n$ – вектор состояния устройства оценки.

A, B, C_U – матрицы описания объекта.

L – матрица входов устройств оценки. ($n \times l$)

K – матрица ЛСОС $k \times n$.

Задача синтеза (з.с.) динамического регулятора состоит в отыскании таких неизвестных матриц L и k , которые обеспечивают в з.с. желаемые динамические свойства.

Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки полной размерности представлена на рисунке 4.1:

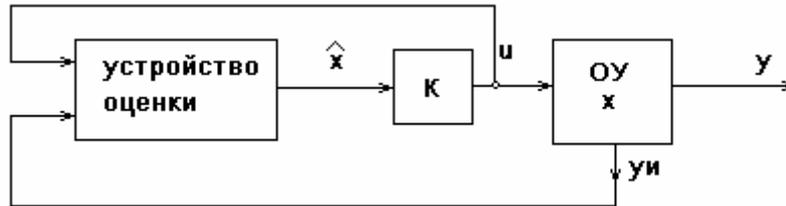


Рисунок 4.1 - Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки полной размерности.

Для расширения свойств з.с. получим ее описание, объединив уравнение движения объекта и уравнение движения динамического регулятора.

$$\text{з.с.} \begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \\ v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) \\ u(m) = -k \cdot v(m) \end{cases}$$

Для упрощения описания з.с. вычтем из третьего уравнения уравнение описания устройства оценки; первое уравнение минус уравнение объекта.

Тогда:

$$v(m+1) - x(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (C_u \cdot x(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) - A \cdot x(m) - B \cdot u(m)$$

$$v(m+1) - x(m+1) = A \cdot (v(m) - x(m)) - L \cdot C_u \cdot (v(m) - x(m))$$

$$v(m+1) - x(m+1) = (A - L \cdot C_u) \cdot (v(m) - x(m))$$

$\tilde{x}(m) = v(m) - x(m)$ - вектор невязки.

$$F_v = A - L \cdot C_u$$

$$\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m)$$

Перепишем уравнение движения з.с. относительно вектора невязки:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) - B \cdot k \cdot v(m) \\ \tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(m) &= \tilde{x}(m) + x(m) \\
x(m+1) &= A \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) - B \cdot k \cdot x(m) \\
x(m+1) &= (A - B \cdot k) \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) \\
F &= A - B \cdot k
\end{aligned}$$

$$\text{з.с.} \begin{cases} x(m+1) = F \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) \\ \tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m) \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{x}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot k \\ 0 & F_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{x}(m) \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot k \\ 0 & F_v \end{bmatrix} - \text{матрица описания з.с.}$$

Размерность $\bar{F} - 2n \times 2n$

Из верхнетреугольного вида матрица описания з.с. следует, что свойство з.с. зависит от свойств матрицы $F = A - B \cdot k$ и свойств матрицы $F_v = A - L \cdot C_u$, т.е. определитель матрицы з.с. равен произведению определителя матрицы F и F_v корни характеристического уравнения з.с. объединяют корни характеристических уравнений матриц F и F_v .

$$\det[\bar{F} - z \cdot I_{2n \times 2n}] = \det[F - z \cdot I_{n \times n}] \det[F_v - z \cdot I_{n \times n}] = 0$$

Отсюда следует:

$$z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^* - \text{корни } F$$

$$z_{1v}^*, z_{2v}^*, \dots, z_{nv}^* - \text{корни } F_v$$

$$\bar{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1^* & & & \\ & z_2^* & & \\ & & \dots & \\ & & & z_n^* \end{bmatrix}}_{2n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_{1v}^* & & & \\ & z_{2v}^* & & \\ & & \dots & \\ & & & z_{nv}^* \end{bmatrix}}_{2n}$$

Из полученного следует свойство разделения, которое заключается в следующем:

1. n – желаемых корней з.с. можно обеспечить выбором матрицы ЛСОС k , т.е. если A, B - п.у. то $\exists F = A - B \cdot k \quad z_1^*, \dots, z_n^*$
2. оставшиеся n желаемых корней можно обеспечить выбором матрицы входов устройства оценки C_u, A - п.н., т.е. если то $\exists L: F_v = A - L \cdot C_u \quad z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$.

Синтез динамического регулятора с устройством оценки полной размерности на основе метода модального управления.

I. Синтез матрицы ЛСОС k :

1. Проверка пары A, B на п.у.
2. Выбор n – желаемых корней z_1^*, \dots, z_n^* или желаемых коэффициентов характеристического полинома исходя из требуемых показателей количества.
3. По желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома назначение матрицы эталонной модели $\Gamma - n \times n$, и выбор матрицы выходов эталонной модели $H - n \times n$ из условия п.н. H, Γ .
4. Решение матричного уравнения Сильвестра $M \cdot \Gamma - A \cdot M = -B \cdot H$ относительно матрицы $H - n \times n$ с последующим вычислением матрицы ЛСОС $k = H \cdot M^{-1}$

II. Синтез матрицы входов устройства оценки L .

5. Проверка пары C_u, A на п.н.
 1. Назначение оставшихся n – желаемых корней з.с. $z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$ (коэффициентов характеристического полинома) исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более “быстрыми”, чем корни для синтеза матрицы ЛСОС.
 2. По желаемым корням формирование матрицы эталонной модели $\Gamma - n \times n$, и выбор матрицы выходов H_v устройства эталонной модели $- l \times n$ из условия п.н. пары H_v, Γ_v .
 3. Решение матричного уравнения Сильвестра $M_v \cdot \Gamma_v - A^T \cdot M_v = -C_u \cdot H_v$ относительно матрицы входов $L^T = H_v \cdot M_v^{-1}$

4.4 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности.

Совокупность устройства оценки и устройства, реализующего соотношение

$$u(m) = -k \cdot \hat{x}(m)$$

где u – вектор управляющих воздействий;

k – матрица линейных обратных стационарных связей;

\hat{x} – вектор невязки;

будем называть динамическим регулятором.

Устройства оценки предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Постановка задачи:

Задан объект управления с неполной информацией с уравнением движения:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \end{cases}$$

$x \in R^n; u \in R^k; y_u \in R^l. (l < n)$

пара A, B – полностью управляема;

пара C_u, A – полностью наблюдаема;

$\text{rank } C_u = l$

Будем строить динамический регулятор с устройством оценки пониженной размерности по следующим уравнениям движения:

$$\text{З.с.} \begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} \\ u(m) = -k \cdot \hat{x}(m) \end{cases} \quad v(0) = 0$$

$v \in R^{n-l}$ – вектор состояния устройства оценки

$\hat{x}(m) \in R^n$ – вектор оценки

$F_v - (n-l) \times (n-l)$ – опред. свойства

$G - (n-l) \times l$ – матрица входов устройства оценки

$M - (n-l) \times n$

$K - k \times n$ – матрица ЛСОС

Задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства оценки F_v и G , а также матрицы преобразования M и матрицы ЛСОС k , которые обеспечивают замкнутой системе желаемые динамические свойства.

Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности представлена на рисунке 4.2:

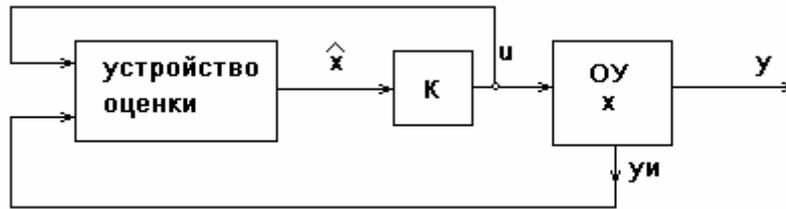


Рисунок 4.2 - Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности.

Рассмотрим свойства замкнутой системы:

$$\begin{aligned}
 u(m) &= -k \cdot \hat{x}(m) = -K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m) = \\
 &= -[E, \quad D] \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} \\
 E &= k \times l; \\
 D &= k \times (n-l)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [E, \quad D] &= K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \\
 [E, \quad D] \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix} &= K \\
 K &= E \cdot C_u + D \cdot M
 \end{aligned}$$

Запишем уравнение движения замкнутой системы, объединив уравнения движения объекта и динамического регулятора. Замкнутая система:

$$\begin{cases}
 x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\
 y_u(m) = C_u \cdot x(m) \\
 v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\
 u(m) = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m)
 \end{cases}$$

Вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта, слева умноженное на матрицу преобразования М, тогда:

$$\begin{aligned}
v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= \\
&= F_v \cdot v(m) + G \cdot C_u x(m) + M \cdot B \cdot u(m) - M \cdot A \cdot x(m) - M \cdot B \cdot u(m) \\
v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= F_v \cdot v(m) + (G \cdot C_u - M \cdot A) \cdot x(m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G \cdot C_u - M \cdot A &= -F_v \cdot M \\
M \cdot A - F_v \cdot M &= G \cdot C_u \\
v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= F_v \cdot (v(m) - M \cdot x(m)) \\
\tilde{v}(m) &= v(m) - M \cdot x(m)
\end{aligned}$$

$\tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m)$ -вектор невязки, тогда

Замкнутая система:

$$\begin{cases}
x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\
\tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m) \\
u(m) = -E \cdot C_u x(m) - D \cdot v(m)
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x(m+1) &= A \cdot x(m) - B \cdot E \cdot C_u \cdot x(m) - B \cdot D \cdot v(m) \\
\tilde{v}(m+1) &= F_v \cdot \tilde{v}(m) \\
\tilde{v} &= v - M \cdot x \\
v(m) &= \tilde{v}(m) + M \cdot x(m)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
x(m+1) = (A - B \cdot E \cdot C_u - B \cdot D \cdot M) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\
\tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m)
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x(m+1) &= (A - B \cdot (E \cdot C_u + D \cdot M)) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\
x(m+1) &= (A - B \cdot k) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\
F &= A - F \cdot k
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
x(m+1) = F \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\
\tilde{v}(m+1) = F_v \cdot \tilde{v}(m)
\end{cases}$$

Перепишем уравнение движения системы в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{v}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot D \\ 0 & F_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{v}(m) \end{bmatrix}$$

$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot D \\ 0 & F_v \end{bmatrix}$ - $(2n-1) \times (2n-1)$ – матрица описания замкнутой системы

Из верхнетреугольного вида блочной матрицы описания замкнутой системы следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы – есть

произведение характеристических матриц F и F_v , а корни замкнутой системы есть объединение корней характеристических полиномов матриц F и F_v , т.е.:

$$\det[\bar{F} - zI_{(2n-l)(2n-l)}] = \det[F - zI_{n \times n}] \times \det[F_v - zI_{(n-l)(n-l)}]$$

$$2n-l \qquad \qquad n \qquad \qquad n-l$$

Если обозначить z_1, z_2, \dots, z_n - корни характеристического полинома матрицы F , а $z_{1v}, z_{2v}, \dots, z_{n-lv}$ - корни характеристического полинома матрицы F_v

$$\bar{F} - z_1, z_2, \dots, z_n, z_{1v}, z_{2v}, \dots, z_{n-lv},$$

размерность которого равна $2n-l$.

Свойство разделения:

1. n желаемых корней замкнутой системы можно обеспечить выбором матрицы ЛСОС, т.е. для матрицы $F=A-Bk$
2. Оставшиеся $n-l$ корней можно обеспечить назначением матрицы описания устройства оценки F_v .

Процедура синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности с использованием метода модального управления.

Динамический регулятор описывается уравнениями

$$\begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ u(m) = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m) \end{cases} \quad v(0) = 0,$$

причем для того, чтобы подсистема, описываемая первым уравнением была бы устройством оценки требуется выполнение матричного уравнения типа Сильвестра

$$K = E \cdot C_u + D \cdot M,$$

и условия, что матрица F_v должна быть устойчивой матрицей.

Отсюда следует, что задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности состоит в отыскании матрицы линейных стационарных обратных связей K , обеспечивающих n желаемых корней в замкнутой системе назначенных из требуемых показателей качества, предъявляемых к системе. Матрица F_v , определяющая динамические свойства устройства оценки формируется по характеристическому полиному или его корням, назначенным из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору, матрица G выбирается из условия полной

управляемости пары F, G , матрица M находится из уравнения типа Сильвестра, $K - ?$; а матрицы E и D из формульной связи матриц K и E и D .
 Определение матрицы ЛСОС kA, B – полностью управляемы - ?

По требованию динамическим свойствам замкнутой системы назначение n желаемых корней замкнутой системы или коэффициентов характеристического полинома

По желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матриц эталонной модели Γ в одном из канонических видов и выбор матрицы выходов эталонной модели H из условия полной наблюдаемости пары H, Γ

Решение матричного уравнения типа Сильвестра, относительно матрицы

$$\bar{M}_{n \times n}$$

$$(\bar{M} \cdot \Gamma - A \cdot \bar{M} = -B \cdot H)$$

С последующим вычислением ЛСОС $k = H \cdot M^{-1}$

Формирование матриц описания устройства

1. Проверка C_i, A на полную наблюдаемость, $\text{rank } C_u = 1$

2. Исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору назначение оставшихся $n-1$ желаемых корней характеристического полинома (или коэффициентов)

3. По желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки $F_v - (n-1) \times (n-1)$ в одном из канонических видов и выбор матрицы входов устройства оценки $G - (n-1)$

$\times 1$ из условия полной управляемости пары F_v, G

$$(M \cdot A - F_v \cdot M) = G \cdot C_u$$

4. Решение уравнения типа Сильвестра относительно матрицы преобразования $M - (n-1) \times n$

5. Нахождение произведения $M \cdot B$ и вычисление матриц E, D по соотношению

$$[E, D] = K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1}$$

5. Пример: синтез непрерывных и дискретных П и ПИ регуляторов на основе методов модального и оптимального управления для системы пространственного слежения.

Раздел 5. Системы пространственного слежения.

5.1 Модели систем пространственного слежения.

К системам пространственного слежения относятся следующие системы, предназначенные для автоматического сопровождения и выработки пространственных координат подвижных объектов, перемещающихся в пространстве по неизвестной траектории [9]. К этому классу систем можно отнести радиотехнические, оптические следящие системы, а также системы наведения и ориентации научных приборов. Эти системы объединяют общность выполняемых функций и принципов их построения. Для обнаружения и сопровождения подвижных объектов в подобных системах используется широкий спектр электромагнитных колебаний рентгеновского, оптического, радио- и звукового диапазона.

В системах пространственного слежения в явном виде можно выделить три канала: канал дальности, канал угла места и канал азимута. Как правило, канал дальности является независимым и не влияет на работу каналов азимута и угла места. Каналы угла места и азимута взаимосвязаны между собой и их влияние друг на друга определяется спецификой системы. Целью настоящего раздела является приложение результатов предыдущих разделов к решению задач анализа и синтеза для систем пространственного слежения.

Рассмотрим типовую функциональную схему систем пространственного слежения, представленную на рисунке 5.1 Пеленгатор или пеленгационное устройство (радиотехническое, акустическое) удерживает в поле зрения подвижный объект, обрабатывая с помощью приводов углов места (УМ) и азимута (УА) рассогласование между направлением на объект и осью направленности излучения (осью визирования). Относительное рассогласование между направлением на объект и осью визирования преобразуется пеленгатором и общим трактом в электрические сигналы, поступающие на регулятор, управляющий приводами УМ и УА. Выходные сигналы общего тракта, как правило, зависят нелинейно от ошибок по углам места и азимута. Регулятор может быть выполнен в виде двух автономных регуляторов для каждого из каналов.

В приводах имеют место измерители скорости угловых перемещений (тахогенераторы) и информация о скорости используется для выработки управляющих воздействий в регуляторе, что отражено на рисунке 42 в виде обратных связей с приводами УМ и УА.

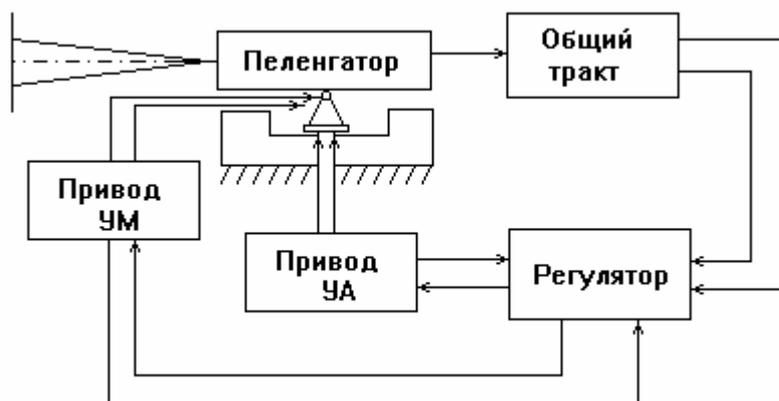


Рисунок 5.1 - Функциональная схема системы пространственного слежения.

Для первоначального наведения пеленгатора на объект используется система целеуказаний, например, станция кругового обзора. При недостаточной априорной информации о положении объекта цели организуется поиск объекта. Переход от поиска к сопровождению объекта называют захватом цели. Основными требованиями, предъявляемыми к системам пространственного слежения, являются обеспечение надежного захвата и высокая точность слежения за объектом в режиме сопровождения. В данном разделе в основном остановимся на решении задачи захвата и синтеза регуляторов, обеспечивающих требуемые динамические свойства с учетом специфики систем пространственного слежения.

В соответствии с функциональной схемой (рисунок 42) структуру систем пространственного слежения по каналам УМ и УА можно представить в виде, изображенном на рисунке 5.2.

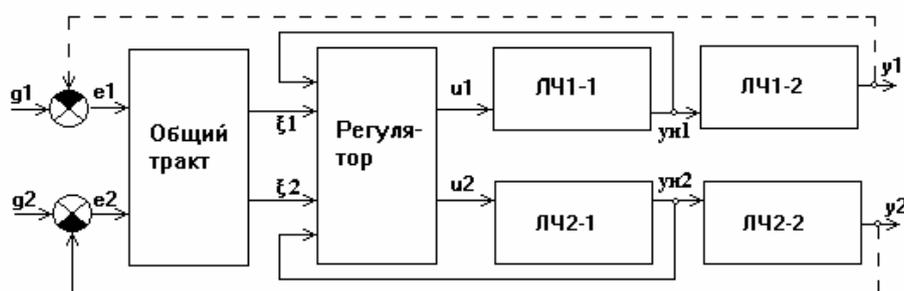


Рисунок 5.2 - Структурная схема каналов углов места и азимута.

На этом рисунке применены следующие обозначения: y_1, y_2 – регулируемые величины – угловые значения направления оси визирования по углам места и азимута соответственно; q_1, q_2 – входные значения, определяющие значения углов места и азимута направления на подвижный объект; e_1, e_2 – ошибки рассогласования; ξ_1, ξ_2 – выходные сигналы с общего тракта функционально нелинейно связанные с ошибками

рассогласования e_1 и e_2 ; u_1 и u_2 – управляющие воздействия, вырабатываемые регулятором и поступающие на приводы УМ и УА соответственно; y_{u1}, y_{u2} – измеряемые переменные, величины, пропорциональные скоростям изменения угловых положений y_1, y_2 ; ЛЧ1-1 и ЛЧ1-2 ($i=1,2$) – линейные части моделей описания приводов УМ и УА.

Детализируем модели общего тракта и линейных частей системы пространственного слежения, которые наиболее часто используются для анализа и синтеза подобного класса систем. Модель общего тракта представлена на рисунке 5.3.

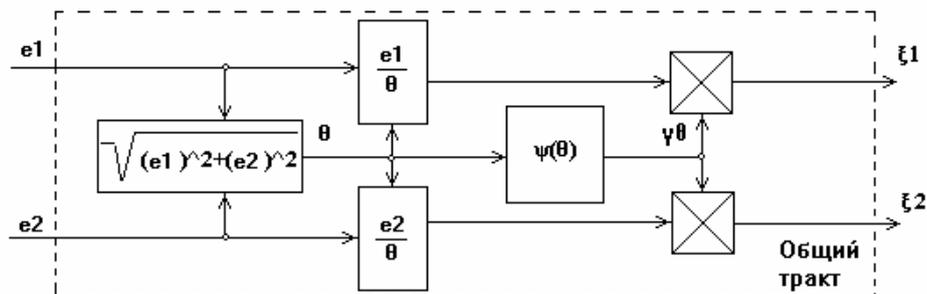


Рисунок 5.3 - Структурная схема общего тракта.

Выходными переменными являются ошибки рассогласования между угловыми значениями направлений на подвижный объект и осью направления визирования e_1 и e_2 , величина θ есть длина вектора ошибки $e = [e_1 \ e_2]^T$ и равна

$$\theta = \sqrt{(e_1)^2 + (e_2)^2} = \|e\| \quad (5.1)$$

$\psi(\theta)$ - нелинейная зависимость, изображенная на рисунке 5.4, отражающая свойства пеленгатора и удовлетворяющая ограничениям

$$0 < \psi(\theta) \leq q_+ \cdot \theta,$$

$$\psi(0) = 0.$$

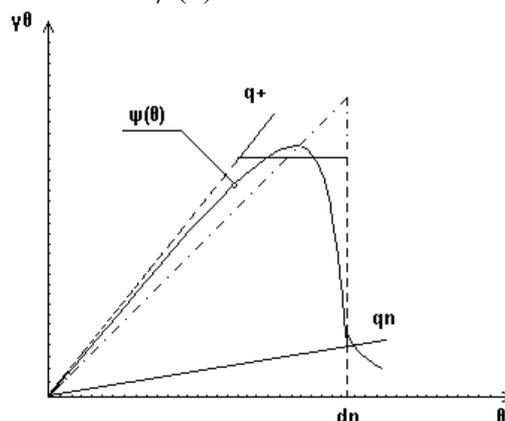


Рисунок 5.4 - Пеленгационная характеристика.

Условные обозначения структурной схемы (рисунок 44) означают, что сигналы p_1 и p_2 после умножителей равны

$$p_1 = \psi(\theta) \cdot \frac{e_1}{\theta},$$

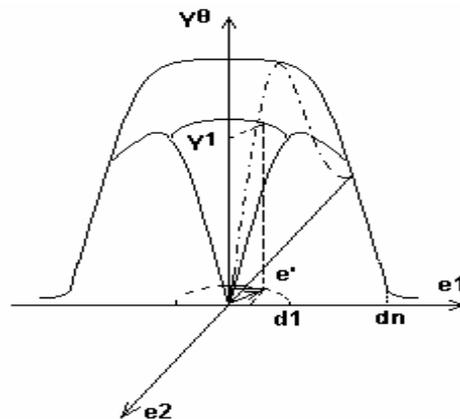
$$p_2 = \psi(\theta) \cdot \frac{e_2}{\theta},$$

или если ввести вектор $p = [p_1 \ p_2]^T$, то

$$p = \psi(\theta) \cdot \frac{e}{\theta}.$$

Нелинейную зависимость $\psi(\theta)$ (рисунок 45) называют пеленгационной характеристикой. Эта характеристика существенно нелинейна, но при решении задач анализа и синтеза допускает ее аппроксимацию кусочно - линейными функциями, отрезком синусоиды или более сложными зависимостями. На рисунке 5.4 для примера изображены аппроксимации пеленгационной характеристики линейной зависимостью (штрих – пунктирная линия) в пределах $\theta \in [0 \ d_n]$, где d_n такое значение θ , которое определяет поле зрения (апертуру) пеленгационного устройства, и линейной характеристикой с насыщением $\theta \in [0 \ d_n]$ (пунктирная линия). Отметим, что нелинейная функция $\psi(\theta)$ является функцией компонент вектора ошибки e_1 и e_2 , так как значение θ есть длина вектора ошибки. Поэтому эту нелинейную функцию можно трактовать как зависимость от двух переменных e_1 и e_2 , а геометрическая интерпретация этой зависимости приведена на рисунке 5.5 а).

а)



б)

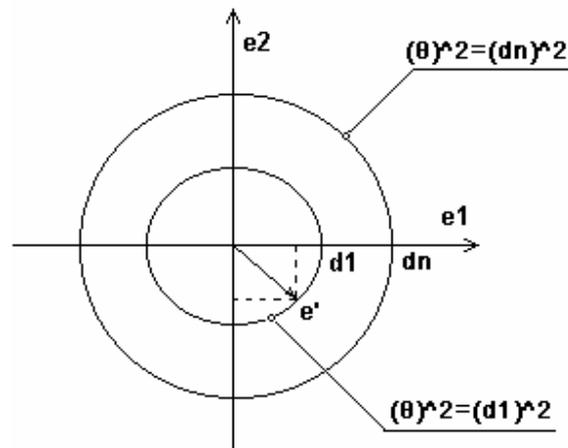


Рисунок 5.5 - Геометрическая интерпретация нелинейности общего тракта:
 а) в пространстве ошибок и выходной переменной; б) в пространстве ошибок.

При такой трактовке зависимость выходной переменной нелинейности γ_θ от переменных e_1 и e_2 задается поверхностью, образованной вращением кривой $\gamma_\theta = \psi(e_1)$ при $e_2=0$ вокруг оси в пространстве $(\gamma_\theta, e_1, e_2)$. При этом всем векторам ошибок одной и той же длины $\theta = \sqrt{(e'_1)^2 + (e'_2)^2} = d_1$ соответствует одно и то же значение выходной переменной γ_1 . На рисунке 46 б) в плоскости ошибок e_1 и e_2 изображена поверхность постоянного уровня (окружность) $\theta^2 = d_1^2$, определяющая задание множества векторов ошибок одинаковой длины d_1 , которые неразличимы по значению γ_1 выходной переменной нелинейности. Поверхность постоянного уровня $\theta^2 = d_n^2$ ограничивает поле зрения – апертуру пеленгатора. Значение d_n зависит от уровня полезного сигнала на выходе пеленгатора на спаде пеленгационной характеристики. Заметим, что величина, определяемая соотношением (5.1) евклидова норма вектора ошибок, т. е. $\theta = \|e\|$, а поэтому $\psi(\theta) = \psi(\|e\|)$.

На рисунке изображена типовая структура привода следящей радиолокационной станции по одному из каналов, состоящего из двигателя постоянного тока и редуктора. На структурной схеме приняты следующие обозначения: x_{1i} - угол поворота ротора двигателя; x_{2i} - скорость изменения угла поворота ротора двигателя; i_i - коэффициент редукции; k_i - коэффициент передачи двигателя; T_i - постоянная времени двигателя постоянного тока. В рассматриваемом приводе к ЛЧ1-1 относится модель описания двигателя постоянного тока относительно скорости вращения

ротора двигателя x_{2i} . К ЛЧ1-2 относится модель, описывающая связь угловых положений пеленгатора (антенны) y_i со скоростью вращения ротора двигателя x_{2i} . Скорость вращения двигателя измеряется посредством тахогенератора с коэффициентом передачи k_{mgi} и y_{ni} - переменная (напряжение) пропорциональная скорости вращения x_{2i} .

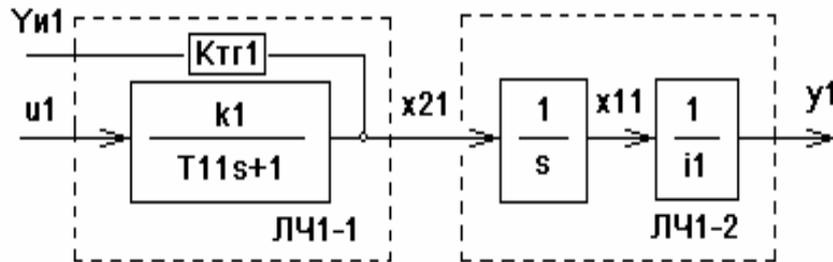


Рисунок 5.6 Структурная схема привода.

Итак, совместное описание общего тракта и линейных частей определяет модель ОУ.

В системах пространственного слежения переход от режима поиска к режиму автосопровождения объекта наблюдения называют захватом цели. Под режимом захвата будем понимать состояние системы начиная с момента попадания объекта наблюдения в поле зрения системы (в пределы апертуры пеленгационной характеристики) до момента, начиная с которого система пространственного слежения сопровождает цель с требуемой для обеспечения заданной цели функционирования этой системы точностью. Анализ захвата состоит в определении условий захвата – области начальных отклонений, из которой все траектории системы стягиваются к устойчивому положению равновесия, т.е. осуществляется переход к режиму автосопровождения. Режим захвата может дополнительно характеризоваться временем перехода от режима поиска к режиму сопровождения.

В этом параграфе остановимся на вопросе определения области захвата для систем пространственного слежения.

В режиме сопровождения целью функционирования систем является поддержание малых рассогласований при слежении за объектом наблюдения.

5.2 Синтез линейных регуляторов для системы пространственного слежения.

В данном подразделе остановимся на вопросах синтеза и анализа систем с непрерывными и дискретными П и ПИ регуляторами, синтезированными при помощи методов модального (решение уравнения Сильвестра) и оптимального (решение модифицированного уравнения Риккати) управлений. Задача синтеза П (ПИ) регуляторов состоит в нахождении матриц линейных стационарных обратных связей для каждого из каналов.

1). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0]$$

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$.

$$\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50, \quad G = \begin{bmatrix} -50 & 1 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0]$$

Тогда

Применяя алгоритм “sn” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [378.65 \ 10.211]$

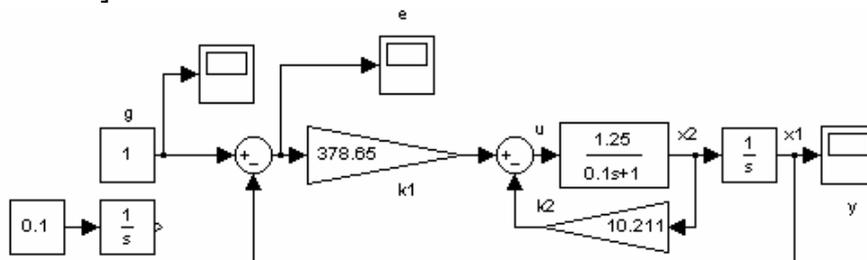


Рисунок 5.7 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором, рассчитанным методом модального управления.

2). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ

следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0]$$

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$. Период квантования $T=0,003$ с.

Тогда $\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$ $G = \begin{bmatrix} 0.861 & 1 \\ 0 & 0.861 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0]$

Применяя алгоритм “sd” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [227.81 \ 7.6107]$.

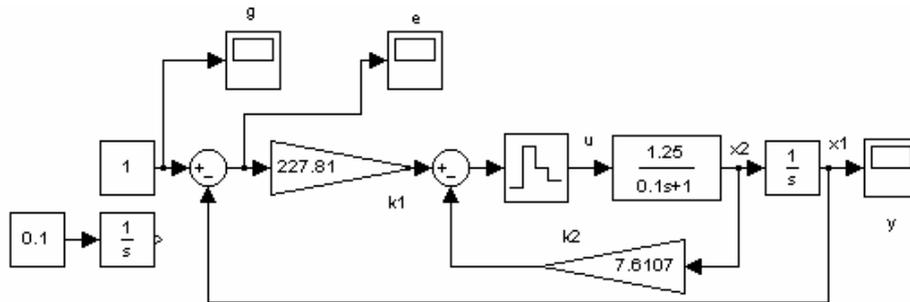


Рисунок 5.8 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным П регулятором, рассчитанным методом модального управления.

3). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ

следующими матрицами: $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0]$

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$.

Тогда $\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$, $\beta + r = -\omega_0, r \approx 1, \text{ тогда } \beta = -51$.

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$.

Применяя алгоритм “rscп” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [378.12 \ 10.2]$.

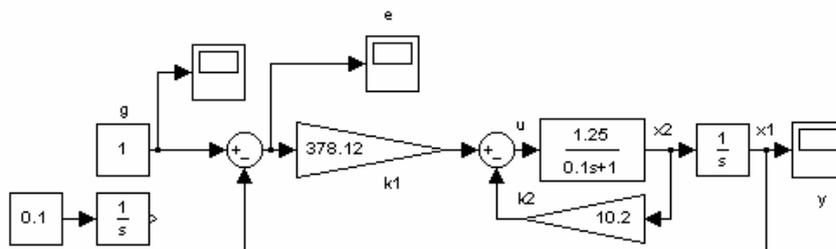


Рисунок 5.9 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

4). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0]$$

следующими матрицами:

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$. Период квантования $T=0,003$ с.

Тогда $\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$, $\beta + r = -\omega_0, r \approx 1, \text{ тогда } \beta = -51$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Применяя алгоритм “gcd” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [197.11 \quad 6.906]$

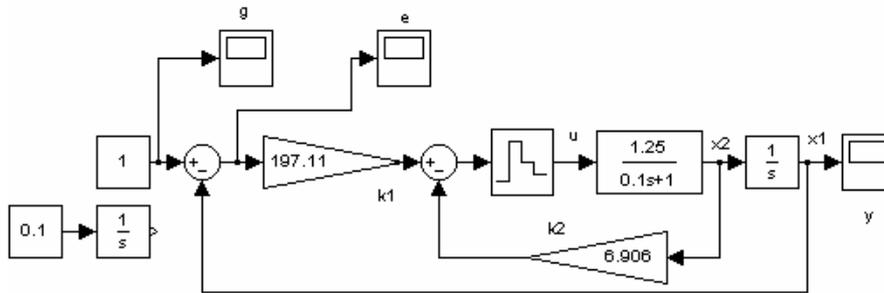


Рисунок 5.10 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

5). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0 \quad 0]$$

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$.

$$\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50 \quad \text{Тогда} \quad G = \begin{bmatrix} -50 & 1 & 0 \\ 0 & -50 & 1 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}, H = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Применяя алгоритм “sn” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [-144087 \quad 3553.5 \quad 29.406]$

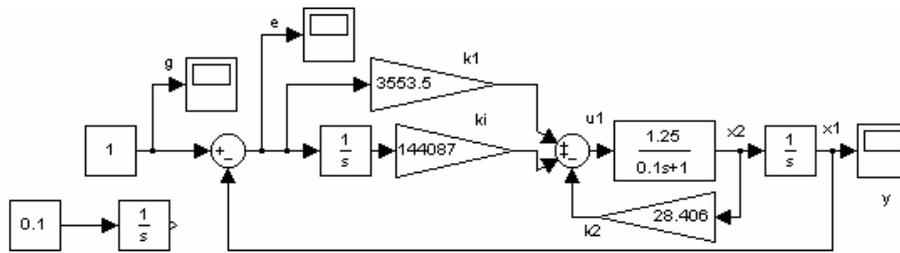


Рисунок 5.11 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления.

б). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0]$$

и заданные показатели качества $t_n = 0,1c, \sigma = 0\%$. Период квантования $T=0,003$ с.

Тогда $\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$

$$G = \begin{bmatrix} 0.861 & 1 & 0 \\ 0 & 0.861 & 1 \\ 0 & 0 & 0.861 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0]$$

Применяя алгоритм “sd” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [-115.76 \ 1439.9 \ 16.255]$

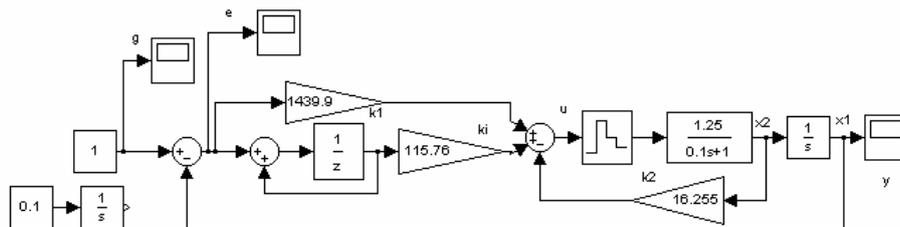


Рисунок 5.12 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления.

7). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0]$$

и заданные показатели качества

$$t_n = 0,1c, \sigma = 0\%.$$

Тогда

$$\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50,$$

$$\beta + r = -\omega_0, r \approx 1, \text{ тогда } \beta = -51.$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Применяя алгоритм “тсн” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [-118186 \quad 3131.1 \quad 26.534]$

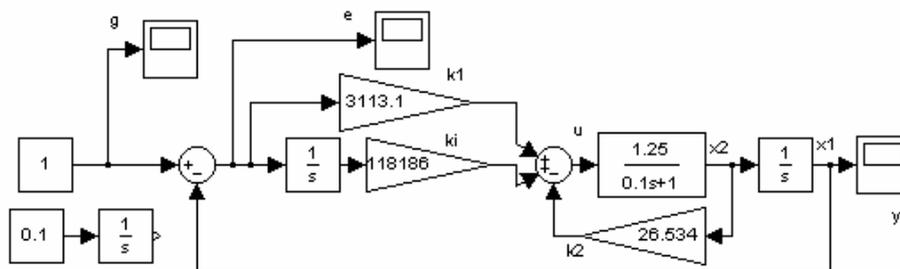


Рисунок 5.13 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

8). Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0 \quad 0]$$

и заданные показатели качества

$$t_n = 0,1c, \sigma = 0\%.$$

Период квантования $T=0,003$ с.

Тогда

$$\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50,$$

$$\beta + r = e^{-\omega_0 T}, r \approx 0.1, \text{ тогда } \beta = 0.761.$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Применяя алгоритм “rcd” (см. Приложение 1) получаем матрицу ЛСОС $k = [-67.867 \quad 1005.2 \quad 13.598]$

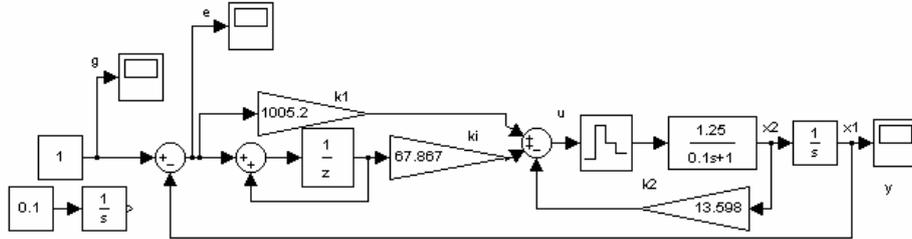


Рисунок 5.14 - Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

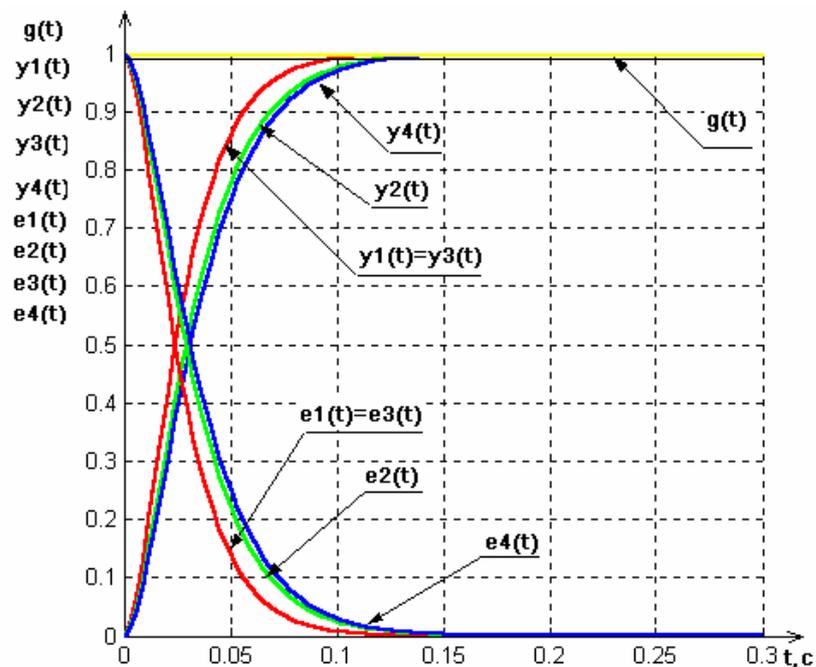


Рисунок 5.15 - Графики переходных процессов, задающего воздействия $g = 1(t)$ и ошибок слежения.

Где $y_1(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $y_2(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $y_3(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;
 $y_4(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;
 $g(t)$ - единичное ступенчатое воздействие;

$e_1(t)$ - ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $e_2(t)$ – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $e_3(t)$ – ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;
 $e_4(t)$ - ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

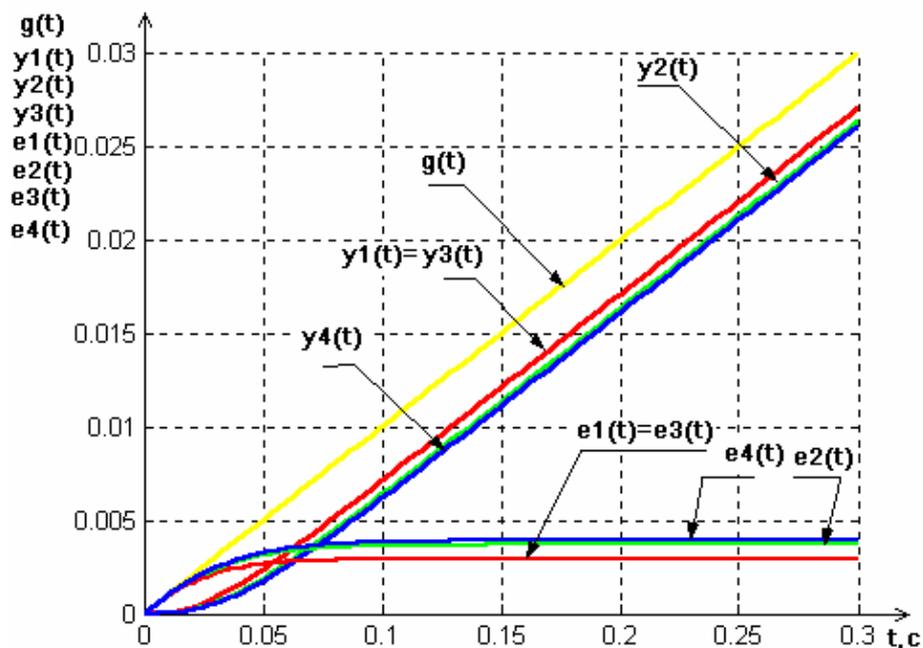


Рисунок 5.16 - Графики переходных процессов, задающего воздействия $g(t) = 0.1 \cdot t$ и ошибок слежения.

Где $y_1(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления; $y_2(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $y_3(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;
 $y_4(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;
 $g(t)$ – линейно-нарастающее воздействие;
 $e_1(t)$ - ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $e_2(t)$ – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;
 $e_3(t)$ - ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;

$e_4(t)$ - ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

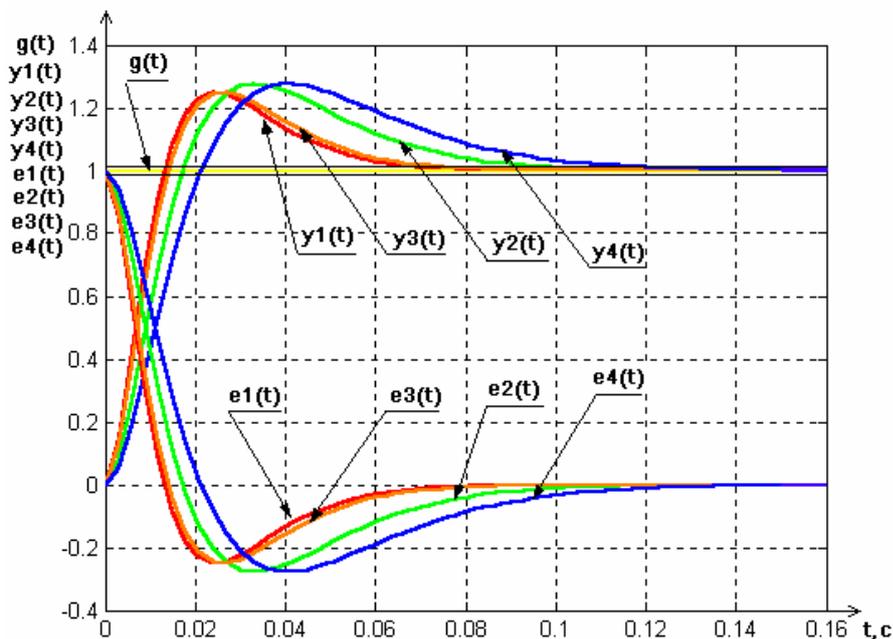


Рисунок 5.17 - Графики переходных процессов, задающего воздействия $g = 1(t)$ и ошибок слежения.

Где $y_1(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $y_2(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $y_3(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $y_4(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $g(t)$ - единичное ступенчатое воздействие; $e_1(t)$ - ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $e_2(t)$ – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $e_3(t)$ - ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $e_4(t)$ - ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

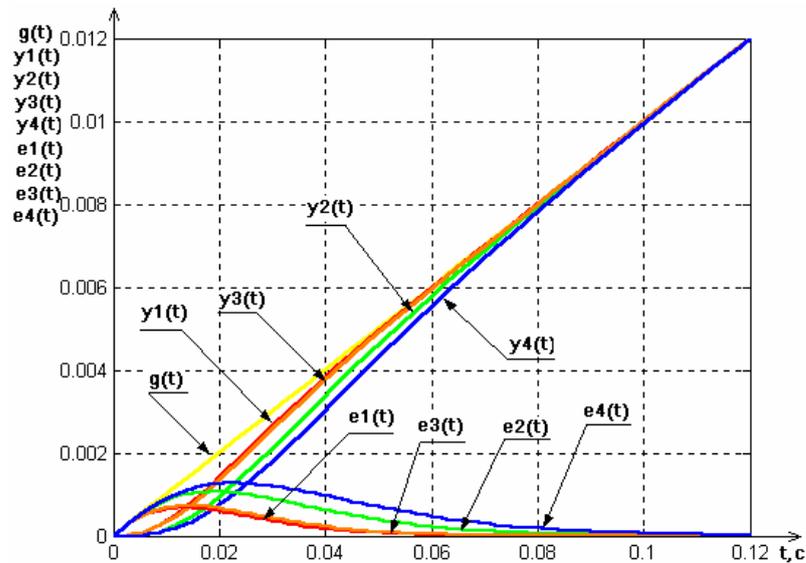


Рисунок 5.18 - Графики переходных процессов, задающего воздействия $g(t) = 0.1 \cdot t$ и ошибок слежения.

Где $y_1(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $y_2(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $y_3(t)$ - переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $y_4(t)$ - переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $g(t)$ – линейно-нарастающее воздействие; $e_1(t)$ - ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $e_2(t)$ – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления; $e_3(t)$ - ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления; $e_4(t)$ - ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

Результаты моделирования, а именно, значения показателей качества сведены в таблицу 1 (см. Приложение 2), из которой видно, что непрерывные регуляторы превосходят дискретные по динамическим свойствам, так как в них отсутствует квантование сигнала. Если же производить анализ, то лучшими динамическими показателями из непрерывных обладает П регулятор, рассчитанный методом модального управления, так как он обладает лучшими показателями качества по

сравнению с другими регуляторами ($t_n = 0.07c, \sigma = 0\%$), а из дискретных – тот же, его показатели следующие: $t_n = 0.085c, \sigma = 0\%$.

5.3 Исследование режимов захвата и автосопровождения системы пространственного слежения.

В данном подразделе мы исследуем режимы работы системы пространственного слежения (захват и автосопровождение). Для каждой системы (дискретной) мы посмотрим диапазоны входных постоянных воздействий, при которых работает захват цели, и линейно- нарастающих, при которых работает слежение или автосопровождение. Также найдем критические значения этих воздействий, при которых происходит срыв процесса наблюдения за целью. Еще оценим применение тех или иных регуляторов в зависимости от динамики поведения системы.

На рисунке 60 представлена нелинейность, присутствующая в схеме общего тракта. Она описывается следующим соотношением: $\psi(\theta) = a \cdot \sin(b \cdot \theta)$, где a - амплитуда нелинейности, b -частота.

Первый параметр выбирается из условия, что касательная, проведенная к нелинейности, так, что тангенс угла наклона равен 1, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Второй же - из условия, что полупериод нелинейности $\theta = 3^\circ$. Таким образом, мы получаем нелинейность следующего вида

$$\psi(\theta) = \frac{1}{0.105} \cdot \sin(0.105 \cdot \theta)$$

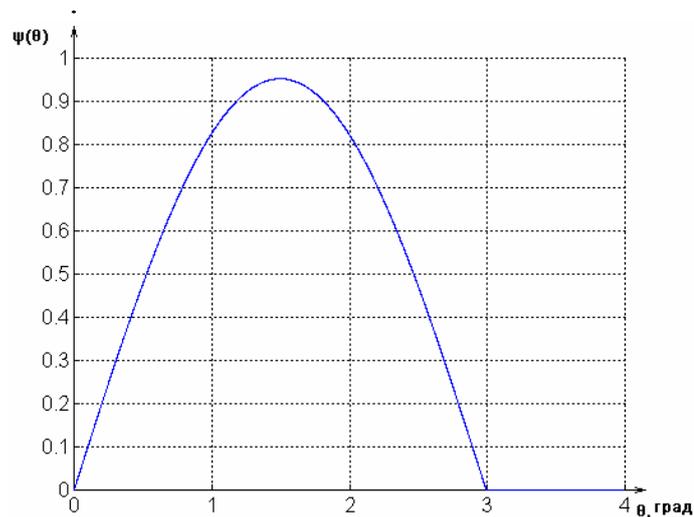


Рисунок 5.19 - Пеленгационная характеристика.

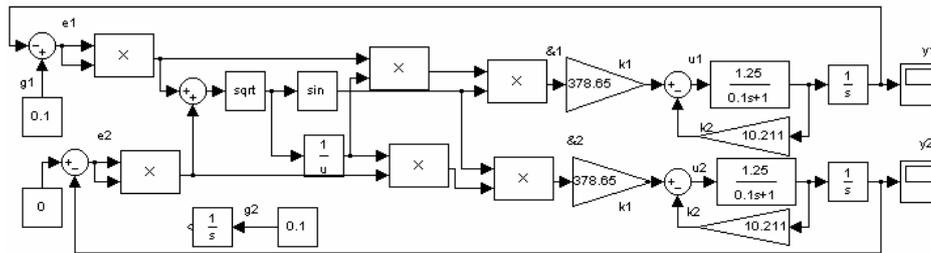


Рисунок 5.20 - Схема моделирования системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором.

На рисунке 5.21 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При $g(t) = 2.8(t)$ происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при $g(t) = 2.5(t)$. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) = 3(t)$ и больше система прекращает захват и становится неустойчивой.

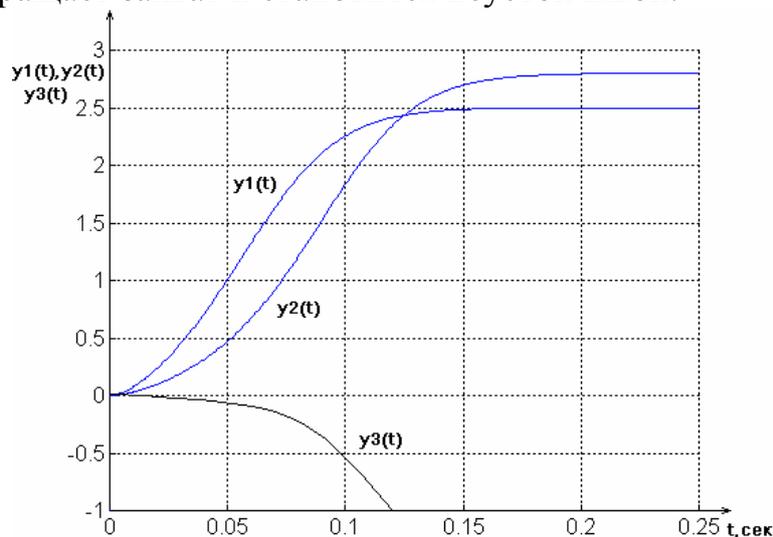


Рисунок 5.21 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

На рисунке 62 можно видеть, что при различных значениях линейно – нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При $g(t) \leq 32.7 \cdot t$ происходит слежение за целью. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) \geq 32.8 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

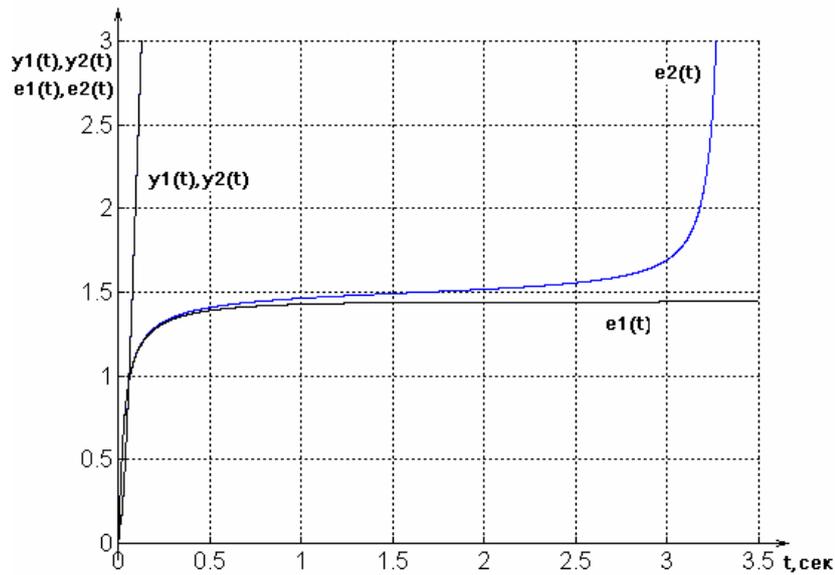


Рисунок 5.22 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

Данные результаты (см. рисунки 5.21, 5.22) получены для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.20, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС $k = [378.12 \ 10.2]$.

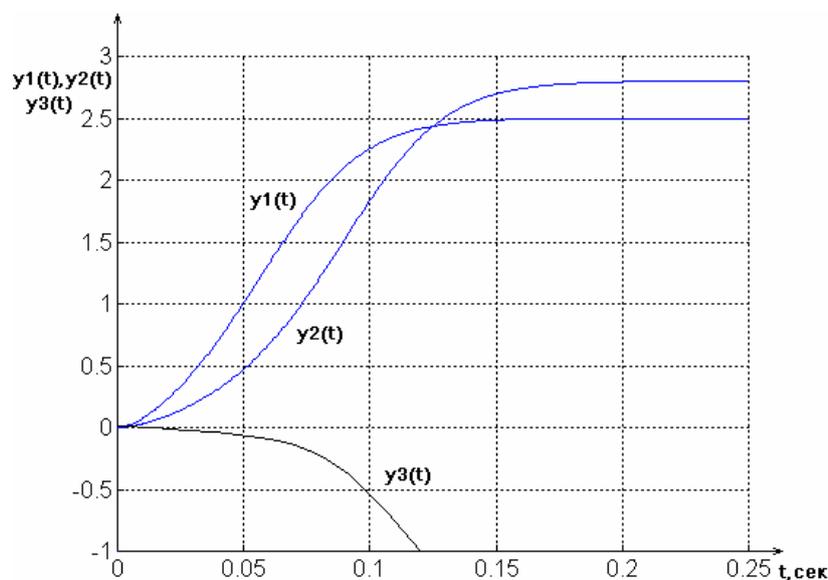


Рисунок 5.23 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

При $g(t) \geq 32.77 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

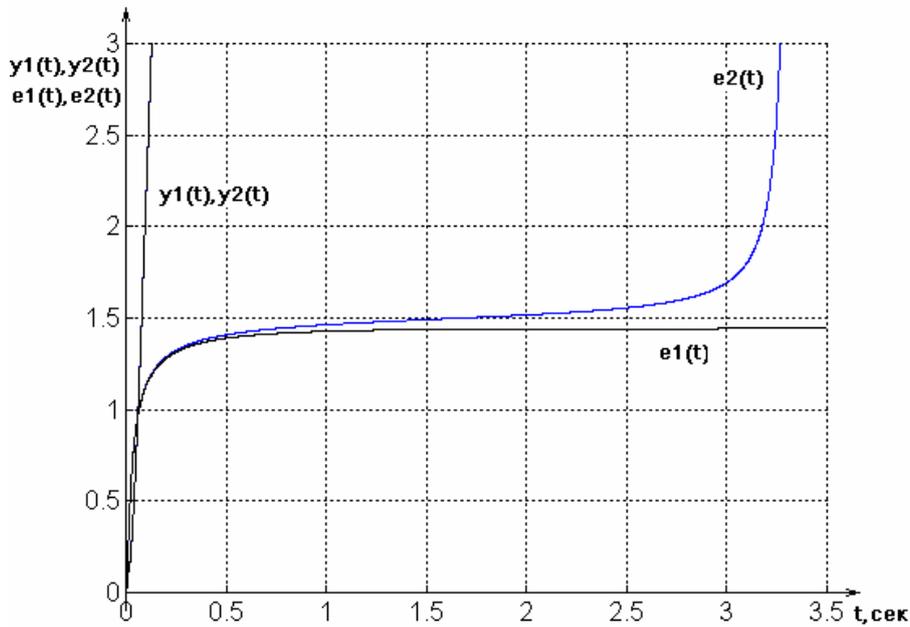


Рисунок 5.24 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

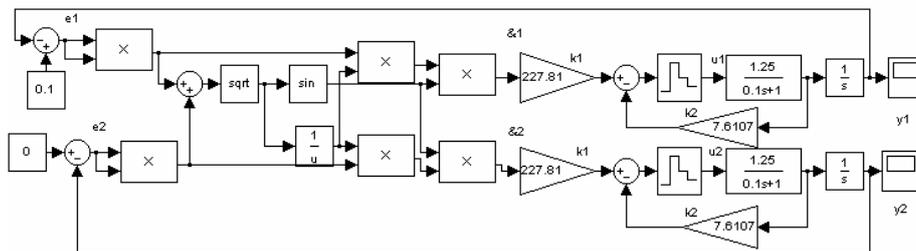


Рисунок 5.25 - Схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным П регулятором.

На рисунке 5.26 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При $g(t) = 2.8(t)$ происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при $g(t) = 2.5(t)$. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) = 3(t)$ и больше система прекращает захват и становится неустойчивой.

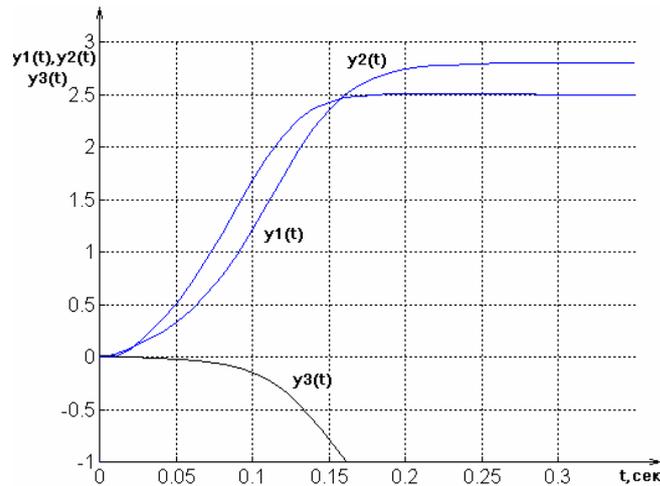


Рисунок 5.26 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

На рисунке 5.27 можно видеть, что при различных значениях линейно – нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При $g(t) \leq 25.7 \cdot t$ происходит слежение за целью. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) \geq 25.9 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

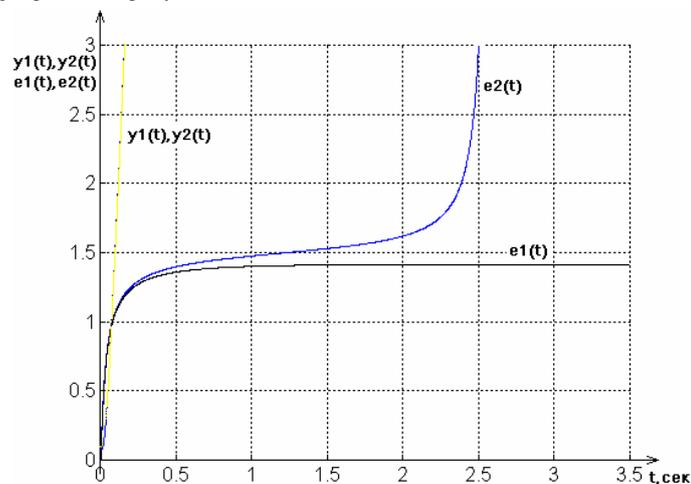


Рисунок 5.27 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

Данные результаты (см. рисунок 5.26, 5.27) получены для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования

аналогична схеме, представленной на рисунке 5.25, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС $k = [197.11 \quad 6.906]$.

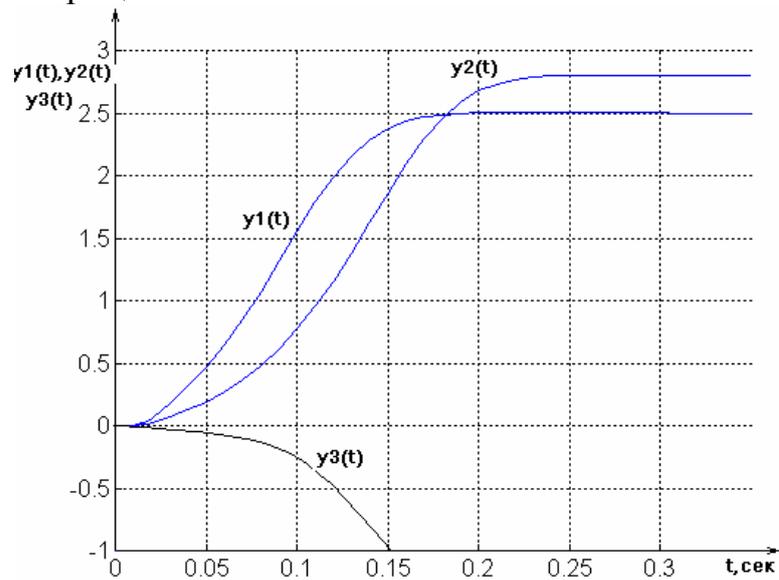


Рисунок 5.28 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

При $g(t) \geq 24.5 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

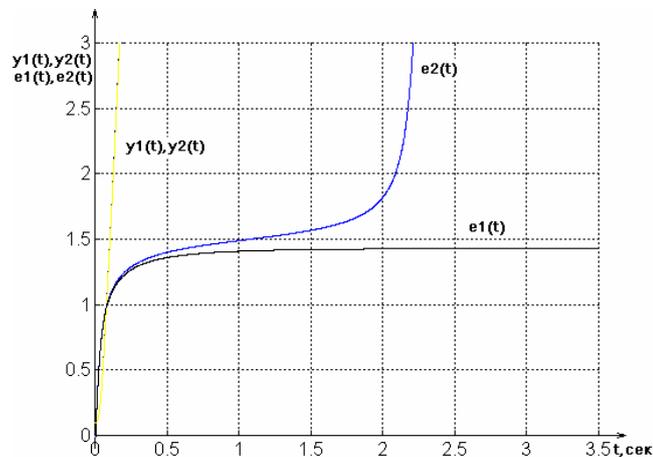


Рисунок 5.29 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

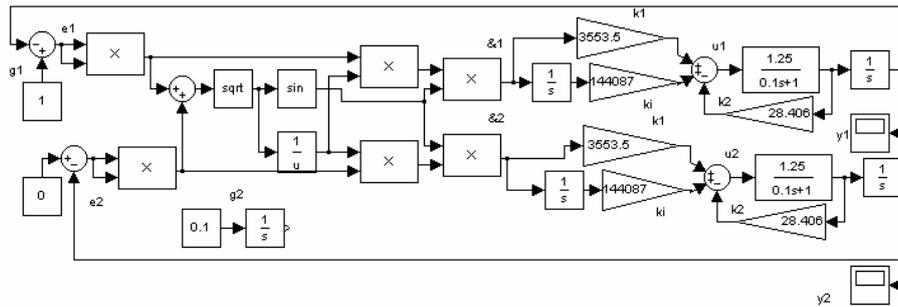


Рисунок 5.30 - Схема моделирования системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором.

На рисунке 5.31 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При $g(t) = 2.8(t)$ происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при $g(t) = 2.5(t)$. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) = 2.99(t)$ и больше система прекращает захват и становится неустойчивой.

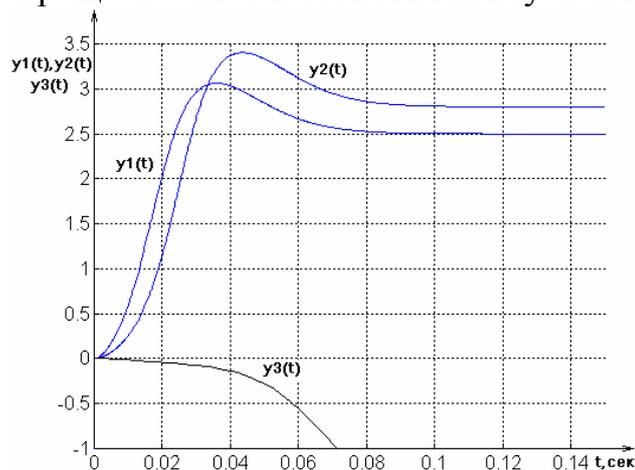


Рисунок 5.31 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

На рисунке 5.32 можно видеть, что при различных значениях линейно – нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При $g(t) \leq 207.7 \cdot t$ происходит слежение за целью. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) \geq 207.8 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

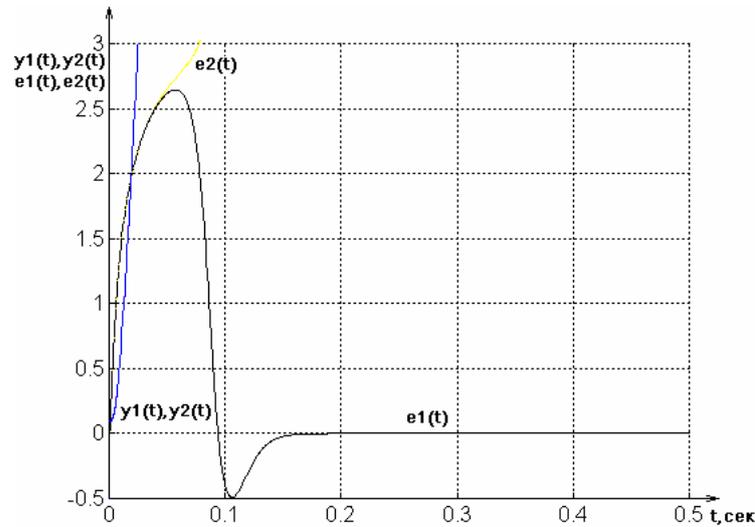


Рисунок 5.32 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

Данные результаты (см. рисунки 5.31, 5.32) получены для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.30, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС $k = [-118186 \quad 3113.1 \quad 26.534]$.

При $g(t) \geq 2.99(t)$ система прекращает захват цели и становится неустойчивой.

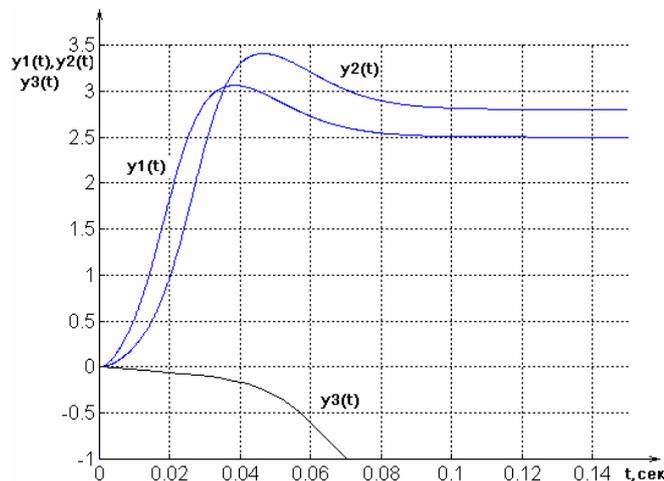


Рисунок 5.33 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

При $g(t) \geq 194.5 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

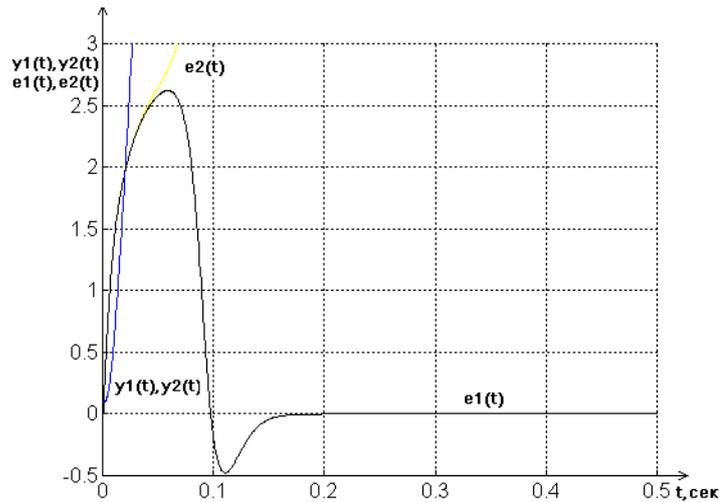


Рисунок 5.34 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$

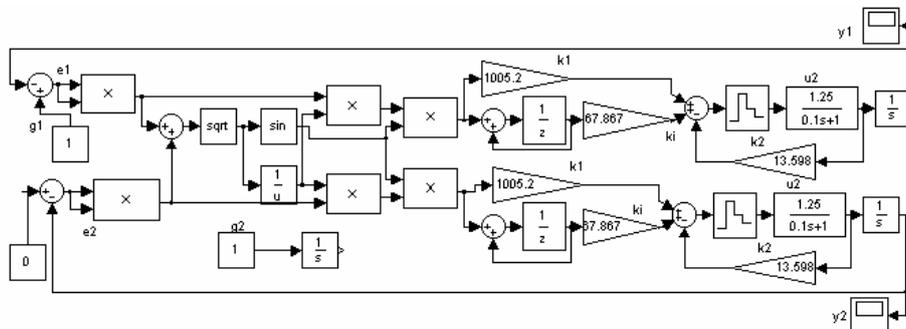


Рисунок 5.35 - Схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором.

На рисунке 5.36 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При $g(t) = 2.8(t)$ происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при $g(t) = 2.5(t)$. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При $g(t) = 2.99(t)$ и больше система прекращает захват и становится неустойчивой.

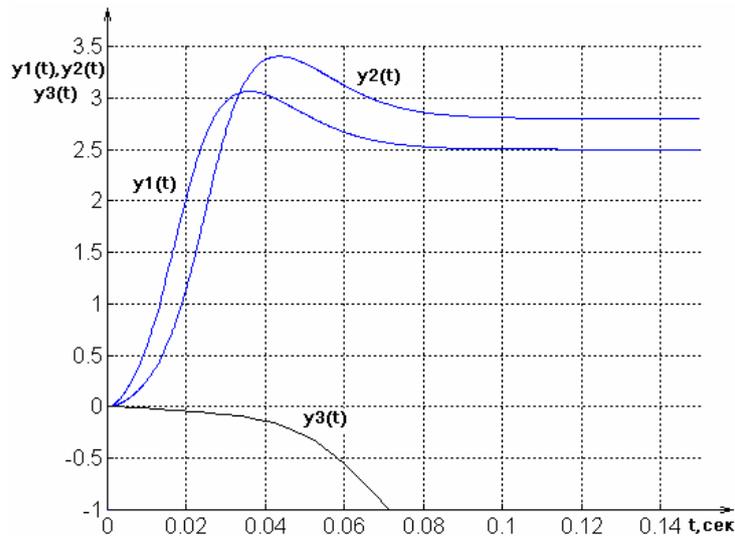


Рисунок 5.36 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

На рисунке 5.37 можно видеть, что при различных значениях линейно – нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При $g(t) \leq 194.4 \cdot t$ происходит слежение за целью. Это обуславливается различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристики. При $g(t) \geq 194.5 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

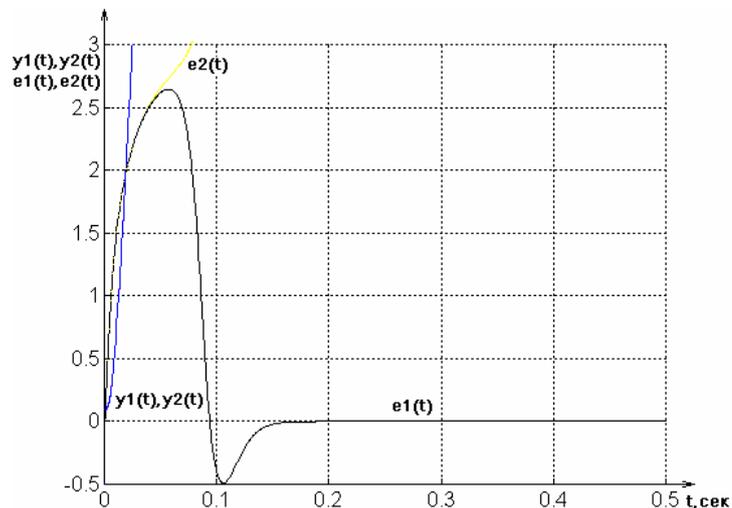


Рисунок 5.37 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

Данные результаты (см. рисунки 5.36, 5.37) получены для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема

моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.35., с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС $k = [-67.867 \ 1005.2 \ 13.598]$.

При $g(t) \geq 2.99(t)$ система прекращает захват цели и становится неустойчивой.

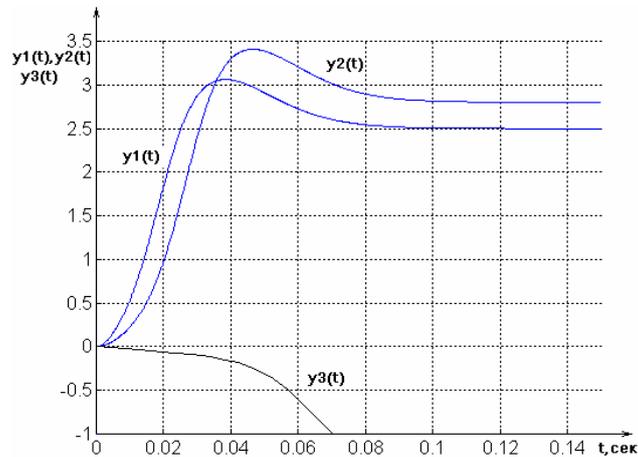


Рисунок 5.38 - Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия $g(t)$.

При $g(t) \geq 190.7 \cdot t$ система прекращает автосопровождение и становится неустойчивой.

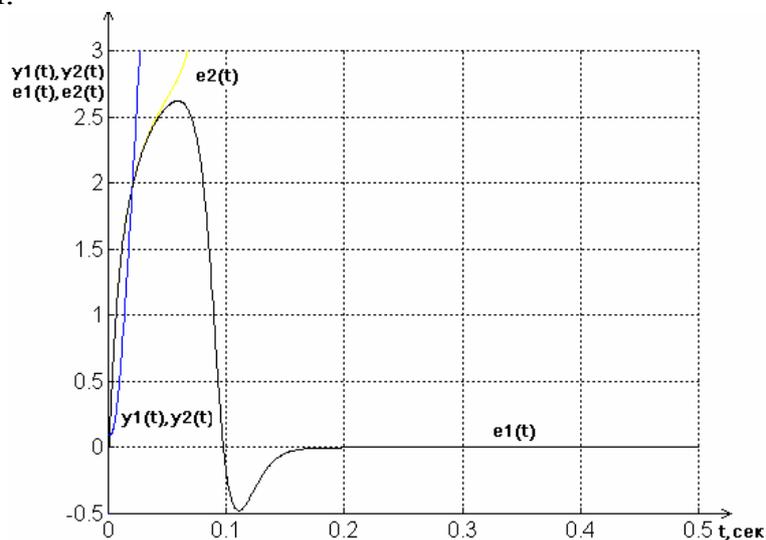


Рисунок 5.39 - Графики переходных процессов при граничных значениях линейно – нарастающего воздействия $g(t)$ и ошибок слежения $e(t)$.

Заключение

Результаты для анализа и проектирования цифровых систем управления, изложенные в учебном пособии, дают базовые основы для изучения дискретных объектов и дискретных динамических процессов. В пособие прослежена единая методология, позволяющая с единых позиций производить анализ и синтез как непрерывных, так и дискретных (цифровых) систем управления, причем различие и специфика состоит только в математическом описании систем в непрерывном случае дифференциальными уравнениями, а в дискретном случае – разностными уравнениями. Развита современная технология и методы описания моделей объектов и внешних воздействий, достаточно подробно изложены различные виды устойчивости цифровых систем и связь различных видов устойчивости с показателями качества динамических процессов. Приведен достаточно широкий спектр обобщенных структур цифровых регуляторов и аналитических методов конструирования цифровых регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев В. В., Коровьяков А. Н. Анализ процессов в многосвязных системах на основе векторных функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1984. № 4.
2. Григорьев В. В., Мансурова О. К. Построение областей гарантированного качества допустимых изменений параметров для дискретных систем // Управление в оптических и электромеханических системах: Межвуз. сб. Л.: ЛИТМО, 1989.
3. Григорьев В. В. Аналитические методы синтеза регуляторов на основе качественной устойчивости: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Л.: ЛИТМО, 1989.
4. Бойков В. И., Григорьев В. В., Николаев П. В. Анализ дискретных многосвязных стохастических систем на основе векторных функций Ляпунова // Тез. докл. I ВНТК „Синтез и проектирование многоуровневых систем управления“. Барнаул: Изд-во АГУ, 1982.
5. Григорьев В. В., Коровьяков А. Н. Исследование качества многосвязных систем на основе метода сравнения // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9.
6. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В.Григорьев, В.Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
7. Бушуев А. В., Григорьев В. В., Литвинов Ю. В. Синтез управлений по заданным оценкам качества дискретных систем с изменяющимися параметрами // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11.
8. Аналитическое конструирование регуляторов по корневым показателям качества / А. П. Богачев, В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, А. Н. Коровьяков // Там же. 1979, № 8.
9. Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мотылькова М.М., Рабыш Е.Ю., Рюхин В.Ю., Мансурова О.К., Синтез модальных управлений для проектирования статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. №5.