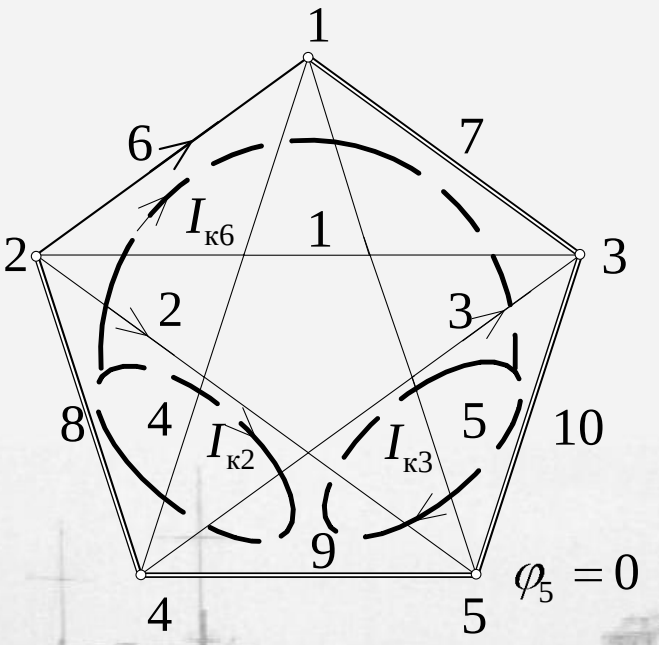
Ю.М. Осипов, П.А. Борисов

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ



Санкт-Петербург
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Ю.М. Осипов, П.А. Борисов

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ

Санкт-Петербург

2012

Осипов Ю.М., Борисов П.А. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 120 с.

В настоящем пособии рассмотрены наиболее часто встречающиеся приемы и методы расчета, которые имеют универсальный характер; указаны различные варианты применения методов, что позволяет студентам с различным уровнем подготовки и степенью сложности поставленной задачи выбрать наиболее приемлемый для него путь решения.

Пособие предназначено для студентов 2, 3 курсов следующих направлений подготовки: 140600, 140604, 210202, 210400, 220200, 220201.

Рекомендовано к печати Учёным советом факультета КТиУ СПб НИУ ИТМО, протокол № 2 от 14.02.2012.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012

©Осипов Ю.М., Борисов П.А., 2012

Введение

Методическое пособие предназначено для студентов, изучающих курс теоретических основ электротехники – ТОЭ и электротехники. Содержание курсов предполагает практический и аналитический анализ физических процессов, которые имеют место в электрических цепях для различного рода электрических воздействий (сигналов). Традиционно рассматривают *стационарные* и *нестационарные* режимы. К стационарным режимам работы цепи относят постоянные - или цепи постоянного тока, синусоидальные – или цепи синусоидального тока, периодические несинусоидальные – или цепи несинусоидального периодического тока. К нестационарным режимам относят переходные процессы, которые возникают вслед за скачкообразным изменением структуры цепи или величин питающих эту цепь источников энергии. Все эти режимы могут рассматриваться применительно к одной и той же цепи, при этом элементы цепи изменяют свою реакцию в зависимости от вида воздействия.

В задачу курса входят вопросы оптимизации решения электротехнических задач, разработки и применения единых подходов и методов их решения. Как это описано в учебной литературе, эти задачи успешно решаются. В настоящем пособии рассмотрены наиболее часто встречающиеся приёмы и методы расчета, которые имеют универсальный характер, указаны различные варианты применения методов, что позволяет студентам с различным уровнем подготовки и степенью сложности поставленной задачи выбрать наиболее приемлемый для него путь решения. Особенно обращается внимание на полноту и правильность постановки задачи, указываются на возможные ошибки в начальной стадии анализа.

1. Основные понятия и определения

1.1. Элементы электрической цепи

Электрической цепью называют набор устройств (элементов), связанных между собой электрическими проводами, предназначенных для протекания по ним электрического тока. Для обеспечения закона сохранения энергии в цепи должны быть элементы, в которых энергия неэлектрического происхождения превращалась бы в энергию электромагнитного поля – электрическую энергию и элементы, в которых электрическая энергия преобразовывалась бы обратно в энергию *сторонних сил* – тепловую, химическую, механическую и т.п. Следует всегда иметь в виду, что движение электрических зарядов – тока обусловлено действием сил электромагнитного поля, обеспечивающих на отдельных участках цепи напряжение. Напряжение u (или U) измеряется в вольтах – (В).

В теории электрических цепей под *током* i (или I) понимают только упорядоченное *движение положительных зарядов* – противоположное направлению движения электронов. Символом $i(t)$ обозначается мгновенное значение тока, т.е. ток произвольного вида в любой момент времени. Прописной латинской буквой I обозначается, как правило, постоянное значение тока. Если электрическая цепь содержит только один постоянный источник энергии, то ***положительное направление*** токов в каждом элементе цепи можно указать в виде стрелки, и это направление есть направление движения *положительных* зарядов. Для цепей переменных токов в каждом элементе цепи также указывают направление тока и называют его ***условным положительным направлением*** тока (или напряжения). Величина тока измеряется в амперах (А). Из этого следует, что токи и напряжения в электрических цепях следует рассматривать как скаляры со знаком <+> или <–>, которые можно назвать *псевдовекторами*. Как будет показано в дальнейшем, решение задачи по определению токов и напряжений в ветвях или в элементах цепи не зависит от того, как первоначально указаны условные положительные направления токов и напряжений.

Резистивное сопротивление

Движение зарядов в проводящих средах встречает сопротивление своему движению. При этом энергия электрического тока (электромагнитного поля) преобразуется в другие виды энергии, например, в тепло. Мера преобразования энергии подчиняется закону Джоуля – Ленца:

$$p = u \cdot i = r \cdot i^2 = g \cdot u^2, \qquad (1.1)$$

где p – мощность (Вт), r – *резистивное сопротивление* (или просто сопротивление), g – *проводимость*. В свою очередь ток и напряжение в сопротивлении подчиняются *закону Ома*:

$$u = r \cdot i \quad \text{или} \quad i = g \cdot u\,. \tag{1.2}$$

Величины r и g являются взаимно обратными *вещественными положительными* числами и характеризуют необратимое преобразование электрической энергии не только в тепло, но и в другие виды энергии, например, в механическую, химическую, акустическую и т.п. Поэтому r в общем случае следует рассматривать как параметр, выражающий меру потребления энергии. Сопротивление r (или R) измеряется в (Ом), проводимость g (или G) – в сименсах (См). **Ток и напряжение в *резисторе* всегда направляют в одну и ту же сторону** (рис. 1.1а). Иначе пришлось бы в законе Ома (1.2) следить за знаком: (если направить ток и напряжение в разные стороны, то в формулах (1.2) следует писать знак минус). Иногда, как исключение, это приходится делать, например, при анализе четырёхполюсников. Из закона Ома следует, что при любой форме напряжения, приложенного к резистору, ток повторяет эту форму, то есть можно говорить о взаимном масштабном повторении тока и напряжения.
На схемах резистивное сопротивление изображают в виде прямоугольника, рядом с которым в виде стрелки указывают условное положительное направление напряжения на нём и *равнонаправленное* направление тока в соединительных проводах. Иногда для простоты достаточно указать только положительное направление тока, полагая *по умолчанию*, что напряжение направлено в ту же сторону.

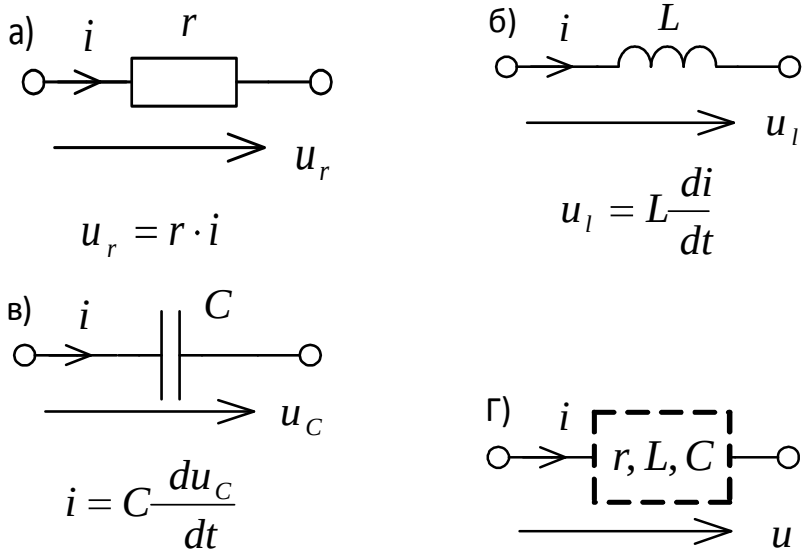


Рис. 1.1 Пассивные элементы электрической цепи:
а) резистивное сопротивление; б) индуктивность; в) ёмкость;
г) схемное соединение пассивных элементов.

Индуктивный элемент

В электрических цепях энергия электромагнитного поля может накапливаться в элементах определённого типа – индуктивностях и ёмкостях. *Индуктивный элемент* обладает способностью накапливать энергию **магнитного** поля, беря её из цепи, или отдавать её обратно в цепь. Мера преобразования энергии определяется формулой $W_L = \frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}$, где L - индуктивность, измеряемая в генри – (Гн); Ψ – потокосцепление, измеряемое в веберах – (Вб). Потокосцепление связано с током зависимостью $\Psi = L \cdot i$, которая формально соответствует закону Ома. Коэффициент L полагается постоянным – для линейного элемента и зависимым $L(i)$ от тока – для нелинейного элемента. Элемент запасает энергию, если $dW_L > 0$ (энергия возрастает во времени), и отдаёт энергию обратно в цепь, если $dW_L < 0$. Закон электромагнитной индукции (Фарадея) связывает ток и напряжение в индуктивности дифференциальным соотношением: $u = \frac{d\Psi}{dt}$, которое для линейного элемента $(L = const)$ принимает вид: $u = L\frac{di}{dt}$. Знак плюс <+> в этом выражении предполагает всегда одинаковый выбор положительных направлений тока и напряжения в элементе (рис. 1.1б). Справедливо и обратное соотношение: $i = \frac{1}{L}\int u\, dt$. В общем случае ток и напряжение в индуктивности изменяются по различным законам, и только в случае синусоидального или экспоненциального воздействия формы тока и напряжения совпадают.

На схемах индуктивный элемент изображают в виде витков катушки.

Ёмкостной элемент

Процесс накопления энергии электрической составляющей электромагнитного поля осуществляется в *ёмкостном элементе* C, ток которого определяется скоростью изменения заряда q на обкладках элемента (конденсатора): $i = \frac{dq}{dt}$.

Это выражение называют *законом сохранения заряда*. В свою очередь заряд, который измеряется в кулонах – (Кл), связан с напряжением между обкладками выражением: $q = C \cdot u$, где C называют *ёмкостью* и измеряют в фарадах – (Ф). Подстановка этого выражения в закон сохранения заряда в случае линейного ёмкостного элемента $(C = const)$

определяет связь между током и напряжением: $i_c = C\dfrac{du_c}{dt}$. Справедливо и обратное соотношение: $u_c = \dfrac{1}{C}\int i_c\, dt$. Знак <+> в этих выражениях указывает на то, что положительные направления тока и напряжения в ёмкости должны совпадать (рис. 1.1в).

Из приведённых выражений следует, что в общем случае ток и напряжение в ёмкости изменяются по различным законам, и только в случае синусоидального или экспоненциального воздействия их формы совпадают.

Энергия, которую накапливает ёмкость, определяется выражением: $W_c = \dfrac{C \cdot u_c^2}{2}$. Ёмкость запасает энергию, если $dW_c > 0$, и отдаёт её в цепь, если $dW_c < 0$.

На схемах ёмкостной элемент показывают в виде двух пластин конденсатора, к которым подводится напряжение.

Рассмотренные здесь пассивные элементы r, L, C могут объединяться в блоки. Такой блок, имеющий пару зажимов для присоединения к другим участкам электрической цепи, не зависимо от способа соединения элементов называют **пассивным двухполюсником**. Двухполюсник можно считать элементом электрической цепи, в котором ток и напряжение направлены в одну и ту же сторону (рис. 1.1г).

Источник напряжения

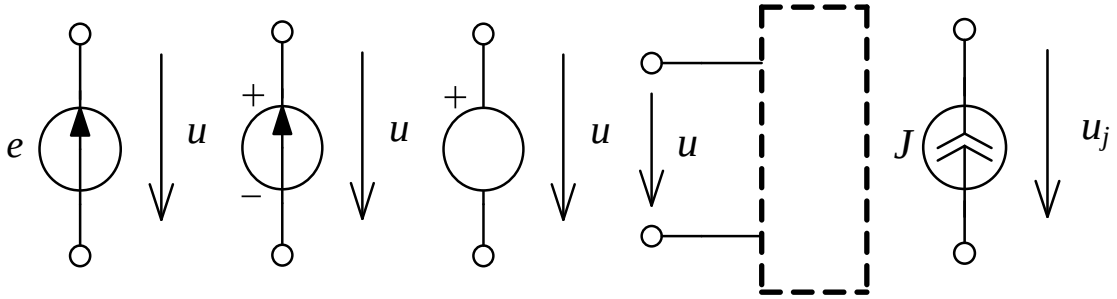
Источниками энергии называют такие устройства, в которых энергия сторонних сил, например, механическая или химическая, преобразуется в электрическую энергию. Реальные источники энергии часто работают в одном из следующих режимов: 1) во всём диапазоне допустимых значений тока напряжение на зажимах источника мало зависит от протекающего через него тока; 2) наоборот, в рабочем диапазоне ток, генерируемый источником, мало зависит от напряжения на его зажимах. В связи с этим классифицируют все источники как *источники напряжения* и *источники тока*. В теории электрических цепей рассматривают идеальные и реальные источники.

Идеальный источник напряжения поддерживает величину напряжения на своих зажимах независимо от величины тока, который отдаёт источник во внешнюю цепь, и эта особенность определяется лишь внутренними свойствами самого источника. Источник напряжения (или источник ЭДС) на схемах изображают в виде кружка со стрелкой, указывающей направление действия сторонних сил (рис. 1.2а – e или E). Величина ЭДС измеряется в вольтах – (В) и может быть измерена вольтметром или с помощью осциллографа. Стрелка внутри источника

направлена к точке, потенциал которой в данный момент выше потенциала точки, от которой исходит стрелка. Иногда к стрелке (рис. 1.2б,в) добавляют знаки <+> и <–> (или только <+>). На зажимах источника возникает напряжение u (или U), которое принято направлять от положительного потенциала к отрицательному, т.е. в сторону обратную действию ЭДС. При этом выполняется равенство:

$$u = e \tag{1.3}$$

Так как ЭДС и напряжение на источнике жёстко определены друг другом, то источник иногда не рисуют, а показывают только напряжение на входных зажимах (рис. 1.2г).



а) б) в) г) д)

Рис. 1.2 Схемное изображение идеальных источников энергии: а), б), в), г) - источников напряжения (ЭДС); д) - источника тока.

Ток i (или I), который может протекать в источнике напряжения, определяется внешней цепью и зависит как от действия самого источника, так и от других источников энергии, которые действуют во внешней цепи. Истинная величина и направление тока в источнике может быть определена только после решения задачи растекания токов во всех элементах цепи. Если ток в источнике протекает в том же направлении, что и действие ЭДС, т.е. противоположно направлению напряжения, то источник отдаёт энергию во внешнюю цепь; если же ток и напряжение имеют одинаковые направления, то источник получает энергию из цепи за счёт действия других источников. Мощность, которую отдаёт (или получает) источник напряжения определяется произведением: $p = \pm E \cdot i_u$, где i_u - ток в источнике.

Внутреннее сопротивление *идеального источника* напряжения полагается равным нулю: $r_u = 0$. Это имеет место, если внутреннее сопротивление источника много меньше, чем сопротивления элементов внешней электрической цепи, и им можно пренебречь.

Реальный источник напряжения имеет внутреннее сопротивление отличное от нуля. Это сопротивление включают в схему последовательно с идеальным источником (рис. 1.3а).

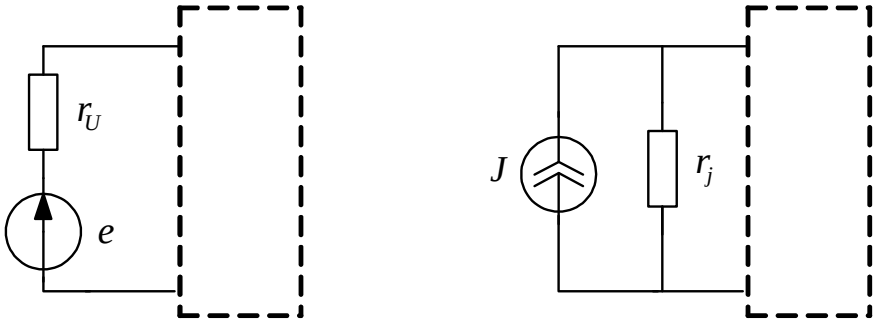


Рис. 1.3 Схемы реальных источников энергии (с потерями): а) источник напряжения; б) источник тока.

Источник тока

Идеальный источник тока обеспечивает постоянное значение тока j (или J), отдаваемого им в цепь независимо от величины и направления приложенного к нему напряжения; это направление определяется только после решения задачи по расчету всех токов и напряжений элементов цепи.

Источник тока изображают в виде кружка с разорванной двойной стрелкой (рис. 1.2.д). Разрыв условно указывает на то, что внутреннее сопротивление источника тока следует считать бесконечно большим: $r_j = \infty$. Это условие обеспечивается, если сопротивления элементов внешней электрической цепи много меньше, чем внутреннее сопротивление источника. Стрелка внутри источника указывает на *направление движения положительных зарядов* (тока) в данный момент времени.

Если в результате решения задачи оказывается, что ток и напряжение направлены в разные стороны, то источник отдаёт энергию в цепь; обратно, при одинаковых направлениях – источник получает энергию из цепи за счёт действия других источников внешней цепи. Мощность, которую отдаёт (или получает) источник тока определяется произведением: $p = \pm J \cdot u_j$, где u_j - напряжение на источнике.

Реальный источник тока (рис. 1.3б) имеет некоторые внутренние потери, которые учитываются в цепи в виде параллельно включённого сопротивления r_j (или проводимости $g_j = \frac{1}{r_j}$).

По отношению к внешней нагрузке *реальные источники* тока и напряжения действуют одинаково, а это делает возможным их взаимную эквивалентную замену. **Источники эквивалентны**, если выполняются условия:

$r_j = r_u;\ J = \dfrac{e}{r_u}$ – при замене источника напряжения на источник тока – и $r_u = r_j;\ e = J \cdot r_j$ – при замене источника тока на источник напряжения.

Идеальные источники тока и напряжения не могут быть преобразованы друг в друга.

1.2. Основные задачи и законы электрических цепей

Электрическая цепь включает набор рассмотренных выше приёмников и источников электрической энергии, которые связаны между собой электрическими проводами.

Если известны величины всех источников энергии и параметры пассивных элементов цепи, то ставится задача определения токов и напряжений в каждом из этих элементов. Такую задачу называют ***прямой задачей*** расчета цепи, она имеет **единственное решение.**

Если известен ток (или напряжение) на каком либо элементе цепи и способ соединения ветвей, то возникает задача по определению токов в других участках цепи и величины питающих цепь источников энергии. Такую задачу называют ***обратной задачей***; она может иметь несколько решений. Обе эти задачи относятся к категории – *задачи анализа* цепи.

Напряжения источников напряжения и токи источников тока называются *воздействиями*, или *входными сигналами*. Все остальные токи и напряжения называются *откликами* на эти воздействия, или *реакциями*.
В зависимости от вида входных воздействий (сигналов) токи и напряжения в исследуемой цепи имеют различную форму, и при смене вида воздействия реакция цепи также меняется. При этом структура цепи может оставаться неизменной. Задача анализа разбивается на две подзадачи: исследование *топологии цепи*, под которой понимается способ соединения ветвей, и собственно анализа токов в элементах и ветвях цепи, что возможно только при заданных источниках и параметрах элементов цепи. Рассматривают различные варианты соединения элементов цепи: последовательное, параллельное, смешанное и т.п. При этом образуются *узловые точки* и *замкнутые контура*.

Узловой точкой, или узлом называют место соединения *трёх* и более элементов или ветвей. Такой узел ещё называют *неустранимым*. В узле ток делится на части, подчиняясь первому закону Кирхгофа:

$$\sum_{1}^{n} i_k(t) = 0 \qquad (1.4)$$

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

Место соединения двух ветвей или элементов называют **простым узлом**. В нём ток не делится на части, поэтому его можно рассматривать как узел или игнорировать. Это *устранимый* узел.

Аналогично формулируется второй закон Кирхгофа для замкнутых контуров:

$$\sum_{1}^{n} u_k(t) = 0 \qquad (1.5)$$

Алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю.

Как правило, контуром называется путь по ветвям цепи, который начинается и заканчивается в одном и том же узле. Однако понятие контура может быть расширено, если помнить, что второй закон Кирхгофа является следствием второго уравнения Максвелла, из которого следует, что контур можно замыкать как по элементам (ветвям) цепи, так и по "воздуху", т.е. вне элементов.

Эти уравнения называют ещё *уравнениями равновесия* электрической цепи. Их следует рассматривать как **тождественные равенства**, справедливые для любого момента времени. Но не следует думать, что простота в написании уравнений равновесия делает простым решение прямой задачи анализа электрической цепи. Эти уравнения требуют более глубокого изучения, что и будет сделано в дальнейшем.

1.3. Преобразования цепей с элементами одного типа

Последовательное соединение элементов

Соединение двух и более элементов называется **последовательным**, если эти элементы соединены между собой *простыми узлами*. В простом узле ток не делится на части, что обуславливает протекание единого тока во всех элементах соединения. На рис. 1.4а показано последовательное соединение n резистивных элементов, которое можно заменить одним эквивалентным сопротивлением r_k, вычисляемым по формуле

$$r_k = \sum_{1}^{n} r_i \,. \qquad (1.6)$$

При переходе к эквивалентному сопротивлению все простые узлы устраняются, остаются только крайние зажимы, посредством которых это соединение подключается к внешней цепи.

Для последовательного соединения m индуктивностей и q ёмкостей (рис. 1.4б, в) имеем соответственно

$$L_k = \sum_1^m L_i ; \qquad \frac{1}{C_k} = \sum_1^q \frac{1}{C_i} . \tag{1.7}$$

Последовательное включение g источников напряжения (см. рис. 1.4г) также можно представить в виде одного источника, только суммирование ЭДС следует производить *алгебраически*:

$$e_k = \sum_1^g e_i . \tag{1.8}$$

Последовательное соединение источников тока не рассматривается из-за его противоречивости. (Какой ток считать истинным?). При обнаружении такого участка цепи следует уточнить модельную схему замещения, включив туда дополнительные сопротивления.

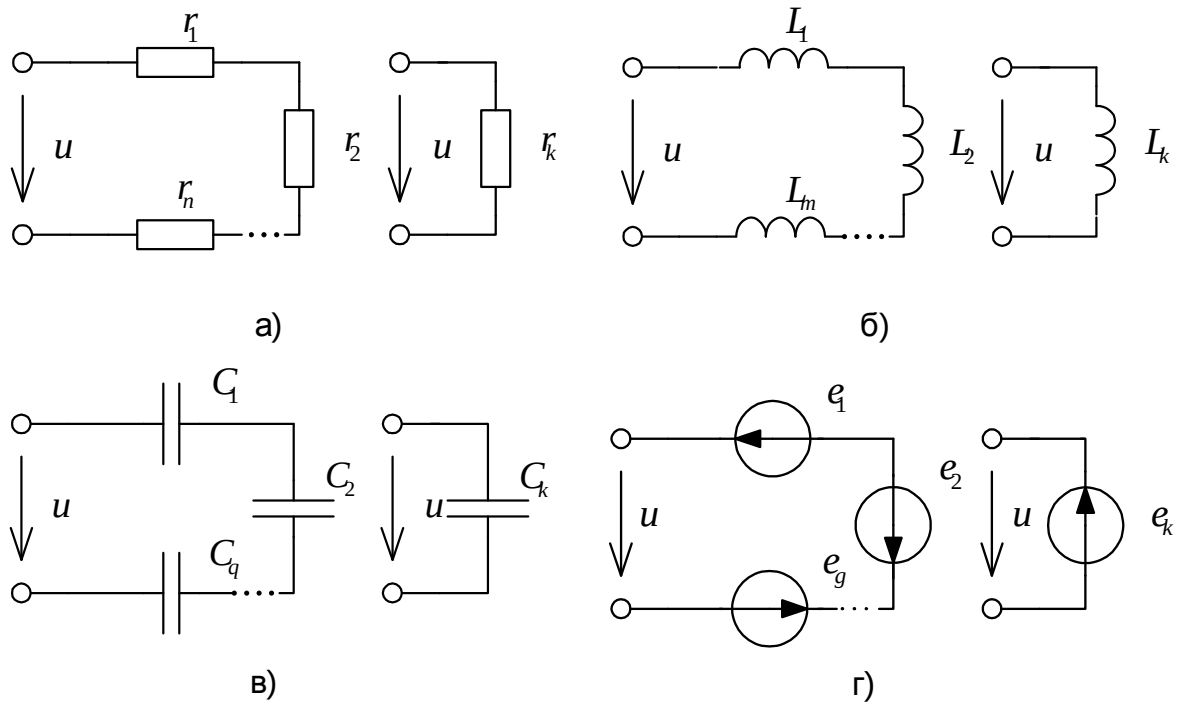


Рис. 1.4 Последовательные соединения однотипных элементов; а) резисторов; б) индуктивностей; в) ёмкостей; г) источников напряжения.

Параллельное соединение элементов

Соединение двух и более элементов называется **параллельным,** если они связаны между собой *только двумя* узловыми точками.

Все элементы, входящие в параллельный набор, находятся под действием одного и того же напряжения. На рис. 1.5а показано параллельное соединение n резистивных элементов.

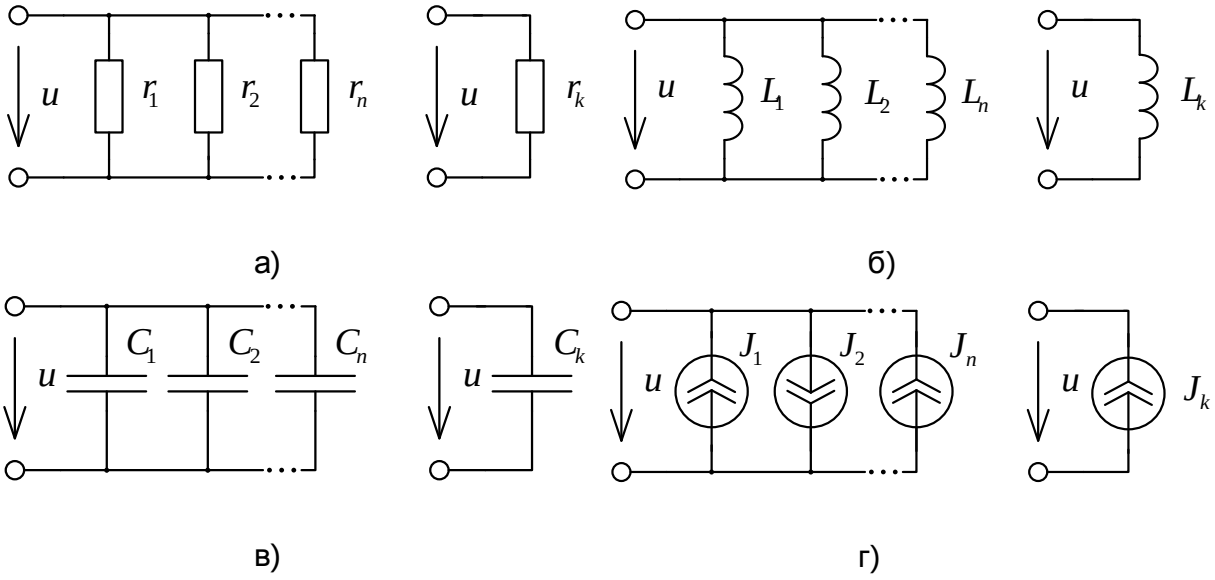


Рис. 1.5 Параллельные соединения однотипных элементов; а) резисторов; б) индуктивностей; в) ёмкостей; г) источников тока.

Его можно заменить эквивалентным, используя одну из формул:

$$r_K = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{r_i}} \quad \text{или} \quad g_k = \sum_1^n g_i \tag{1.9}$$

Для параллельного соединения двух сопротивлений (см. рис. 1.6), присоединённых к источнику энергии, имеем

$$r_K = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{или} \quad g_k = g_1 + g_2 \tag{1.10}$$

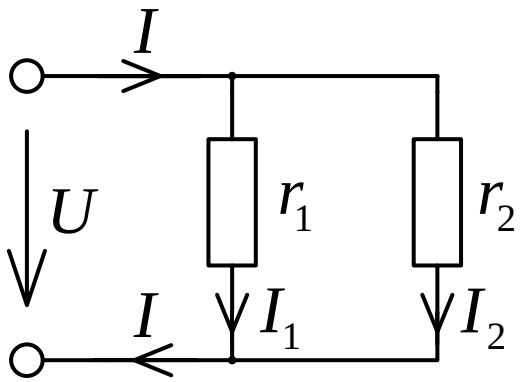


Рис. 1.6 Параллельное соединение двух резистивных сопротивлений.

С формулой (1.10) связано **правило деления тока на части**, которое определяет значения токов I_1 и I_2 в каждой параллельной ветви по известному значению тока источника I:

$$I_1 = I\frac{r_2}{r_1 + r_2} \qquad \text{и} \qquad I_2 = I\frac{r_1}{r_1 + r_2} \tag{1.11}$$

Токи делятся обратно пропорционально сопротивлениям параллельно соединённых ветвей – чем больше сопротивление ветви, тем меньше в ней ток. Правильность написания формул можно проверить, используя уравнения равновесия электрической цепи (1.2) и (1.4). Формулы (1.10) и (1.11) часто встречаются в расчетах, их рекомендуется помнить.

Для параллельного соединения индуктивных, ёмкостных элементов и источников тока (рис. 1.5б, в, г) имеем соответственно:

$$L_K = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{L_i}}; \qquad C_k = \sum_1^n C_i; \qquad J_k = \sum_1^n J_i. \tag{1.12}$$

В последней сумме предполагается *алгебраическое* суммирование слагаемых.

Параллельное соединение источников ЭДС не рассматривается из-за его противоречивости (Какое напряжение считать истинным?). При обнаружении такого участка цепи следует уточнить модельную схему замещения, включив туда дополнительные сопротивления; это могут быть, например, внутренние сопротивления источников.

Смешанное соединение элементов

В разветвлённых электрических цепях можно выделить фрагменты последовательно и параллельно соединённых элементов. Такое соединение называется **смешанным.** Постепенно, шаг за шагом, заменой отдельных групп элементов на эквивалентные, можно все однотипные элементы заменить одним, присоединённым к источнику питания. Если такое преобразование осуществляется с резистивными элементами, то конечный результат называется **входным сопротивлением со стороны источника питания.**

Пример 1.

На рис. 1.7а показана схема смешанного соединения резистивных элементов, присоединённых к источнику питания. Определим входное сопротивление r_k.

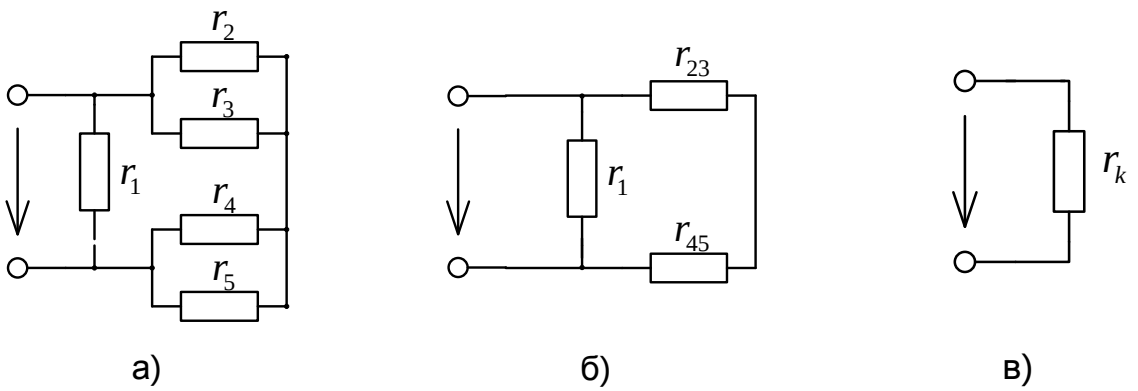


Рис. 1.7. Пример смешанного соединения резистивных сопротивлений: а) исходная схема; б) промежуточная схема; в) резистивный эквивалент.

Решение рекомендуется начинать с удалённых от источника элементов. На первом этапе можно объединить параллельные соединения элементов r_2 и r_3, а также r_4 и r_5: $r_{23} = \dfrac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_4}$, $r_{45} = \dfrac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5}$ (см. 1.10). Схема принимает вид, представленный на рис. 1.7б. На втором этапе можно объединить последовательно соединённые сопротивления r_{23} и r_{45}: $r_{25} = r_{23} + r_{45}$, а затем параллельное соединение r_1 и r_{25}: $r_k = \dfrac{r_1 \cdot r_{25}}{r_1 + r_{25}}$, что и дает конечный результат.

Пример 2.

На рис. 1.8а показана схема смешанного соединения ёмкостных элементов, присоединённых к источнику питания. По структуре эта схема повторяет предыдущую задачу, однако процесс объединения элементов следует делать по *дуальным* формулам.

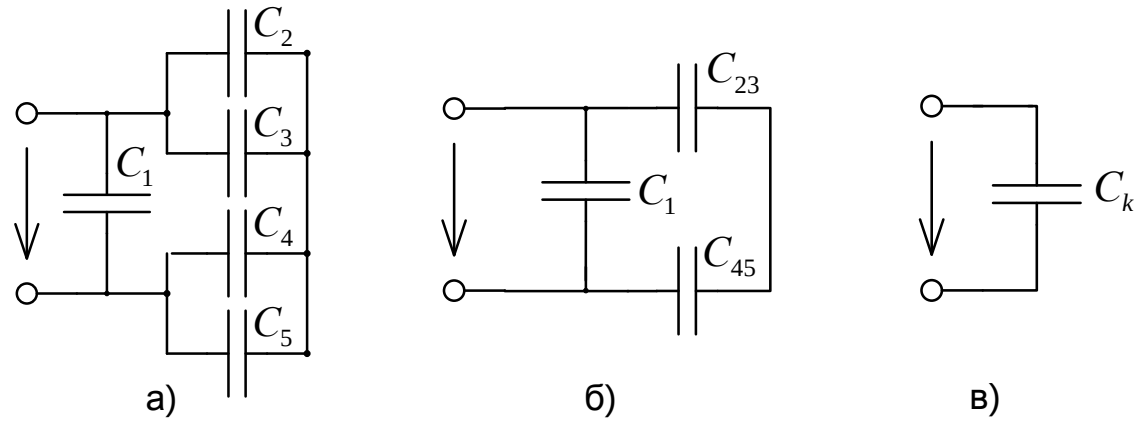


Рис. 1.8. Пример смешанного соединения ёмкостей: а) исходная схема; б) промежуточная схема; в) ёмкостной эквивалент исходной цепи.

Определим входной ёмкостной эквивалент.

Параллельно соединённые ёмкости суммируются: $C_{23} = C_2 + C_3$, $C_{45} = C_4 + C_5$, и схема принимает вид, представленный на рис. 1.8б. Затем можно объединить последовательно соединённые ёмкости C_{23} и C_{45}:

$$C_{25} = \frac{C_{23} \cdot C_{45}}{C_{23} + C_{45}}.$$

Окончательно получим

$$C_k = C_1 + C_{25}.$$

1.4. Расчет входных сопротивлений

Если цепь включает несколько источников энергии, то можно рассматривать и определять входное сопротивление со стороны каждого из них. Существует необходимость и в определении входного сопротивления относительно любой ветви пассивной цепи, которая получается после того, как из цепи *удалены и заменены резистивными эквивалентами все источники энергии.* Так как идеальный источник напряжения имеет внутреннее сопротивление $r_u = 0$, то источник напряжения следует заменить короткозамкнутой перемычкой (*режим короткого замыкания* – КЗ); соответственно источник тока, имеющий бесконечно большое внутреннее сопротивление, следует заменить разрывом цепи (*режим холостого хода* - ХХ). Алгоритм расчета входных сопротивлений включает следующие этапы:

- Разрывается ветвь, по отношению к которой требуется определить входное сопротивление. Зажимы обозначаются и маркируются;
- Исключаются все источники энергии. Источники напряжения замыкаются накоротко, источники тока замещаются разрывом;
- Последовательными шагами, упрощающими исходную схему объединением последовательно и параллельно соединённых элементов и т.п., сводят цепь к одному эквивалентному сопротивлению, которое и будет называться ***входным сопротивлением*** по отношению к обозначенным зажимам.

Пример 3.

На рис. 1.9а представлена схема, которая включает два источника энергии. Определим входные сопротивления для каждого из этих источников.

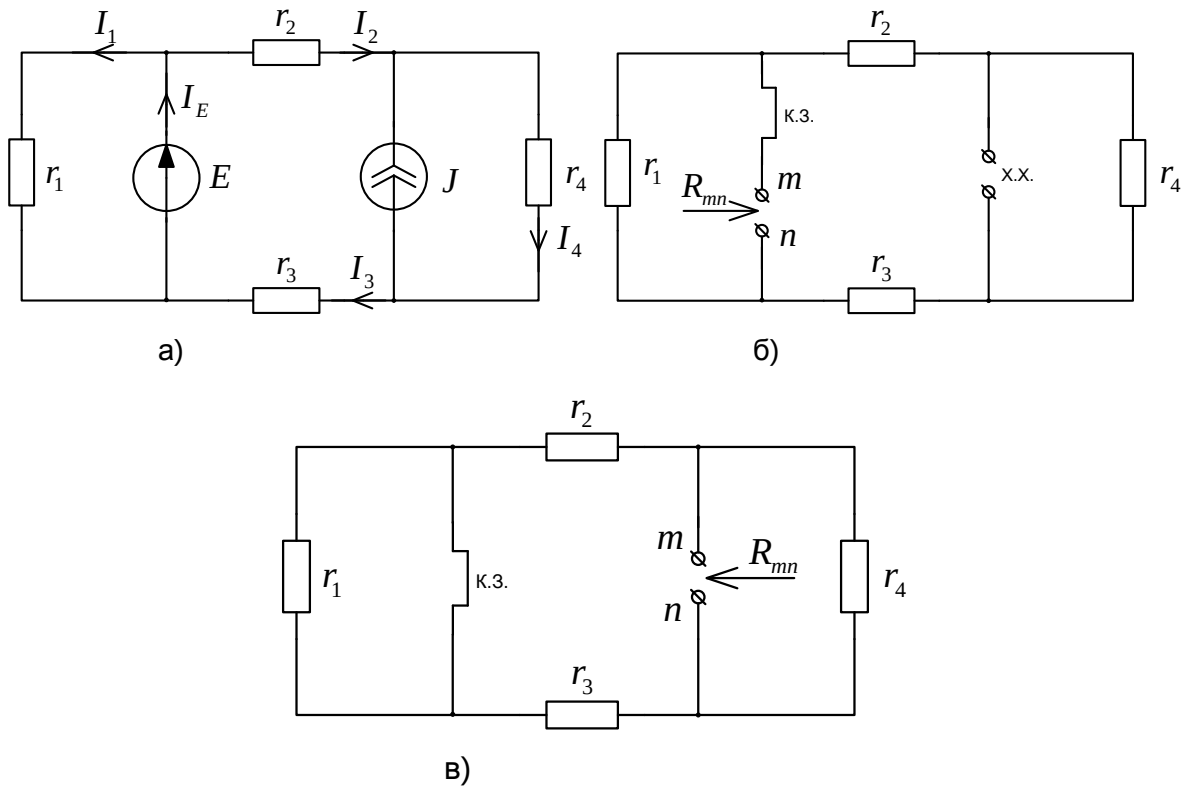


Рис. 1.9. Пример определения входных сопротивлений со стороны источников энергии: а) исходная схема; б) схема для определения $R_{вх.E}$; в) схема для определения $R_{вх.J}$.

На рис. 1.9б та же схема с исключёнными источниками, где источник напряжения заменён короткозамкнутой перемычкой, а источник тока – разрывом ветви. Здесь же отмечены зажимы m,n, по отношению к которым требуется определить входное сопротивление для ветви с источником напряжения. Так как сопротивления r_2, r_3 и r_4 соединены последовательно, а вся эта группа сопротивлений присоединена параллельно к сопротивлению r_1, то искомое входное сопротивление будет определяться выражением

$$R_{mn} = R_{вх.E} = \frac{r_1 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}.$$

Схема для определения входного сопротивления со стороны источника тока показана на рис. 1.9в, где зажимы ХХ обозначены как m,n, а ветвь источника напряжения восстановлена как короткозамкнутая. В этой схеме сопротивления r_2, r_3 соединены последовательно, и вместе эта группа параллельна сопротивлению r_4. Сопротивление r_1 не оказывает

влияния на входное сопротивление, так как оно закорочено. Окончательно получим

$$R_{mn} = R_{вх.J} = \frac{r_4 \cdot (r_2 + r_3)}{r_2 + r_3 + r_4}.$$

1.5. Основные топологические понятия и определения

Ветвью электрической цепи называют *последовательное* соединение источников и приёмников электрической энергии, имеющее два зажима (концевых точек) для присоединения её к другим участкам цепи. Все элементы ветви связаны между собой *простыми узлами*. Число элементов в ветви может быть любым. Перед анализом цепи целесообразно её упростить, заменив каждую ветвь её *каноническим* аналогом, включающим минимальный набор элементов.

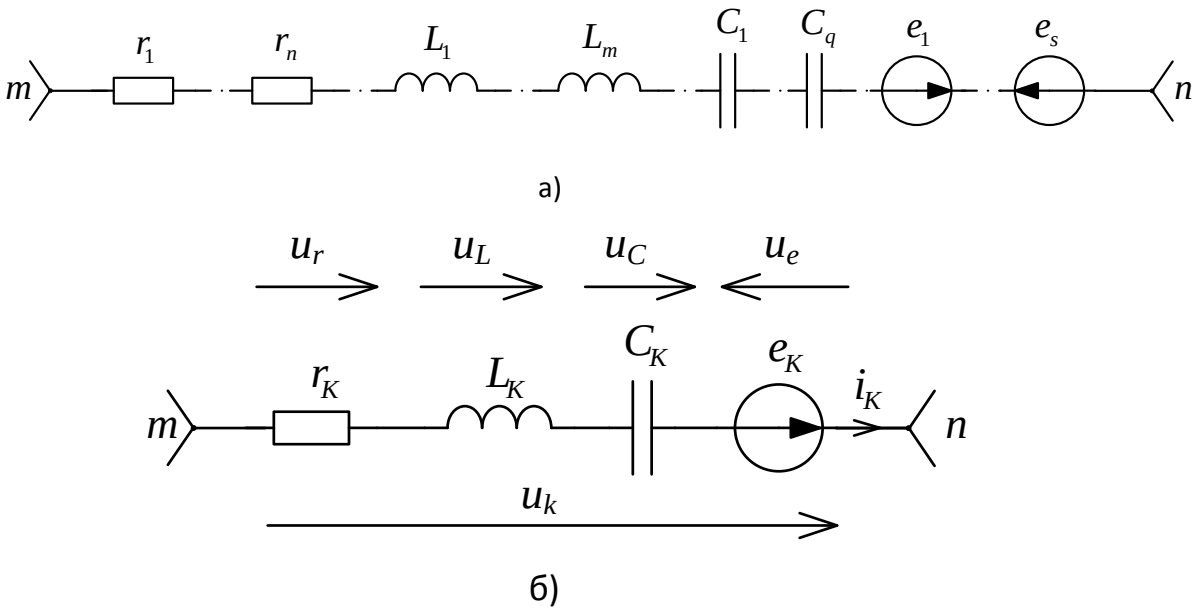


Рис. 1.10. Ветвь электрической цепи первого типа:
а) с полным набором элементов; б) каноническая.

На рис. 1.10а показана ветвь *первого типа*, содержащая источники напряжения и приёмники электрической энергии; на рис. 1.10б – её каноническая схема замещения, где эквивалентные элементы определяются известными формулами (1.6 – 1.8) *последовательно* соединённых элементов одного типа. Замена группы однотипных элементов на эквивалентные не зависит от того, в каком месте ветви расположен тот или иной элемент, так как величина тока одинакова в любом месте расположения измерительного прибора (амперметра). В

канонической ветви для определённости **направлены в одну и ту же сторону** ток, все напряжения и действие суммарной ЭДС.

Связь между током и напряжением для канонической ветви первого типа определяется уравнением равновесия участка цепи: $u_r + u_L + u_c - u_e - u_k = 0$, которое формируется на основании второго закона Кирхгофа, или

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k \cdot dt - e_k \,. \qquad (1.13)$$

Если в ветви отсутствуют элементы r_k, L_k, C_k, то в выражении (1.13) исключаются слагаемые для этих элементов, и выполняется ранее указанное условие (1.3) для идеального источника напряжения: $u_k = -e_k$, что имеет место при выборе одинаковых положительных направлений ЭДС и напряжения ветви.

При соединении крайних узловых точек m и n образуется простейшая одноконтурная электрическая цепь (замкнутый контур), в котором будет протекать ток под действием источника напряжения e_k. При этом напряжение $u_k = 0$, и уравнение равновесия цепи принимает вид:

$$r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k \cdot dt = e_k \,. \qquad (1.14)$$

Решение этого дифференциального линейного неоднородного уравнения в общем виде в этом пособии не рассматривается. Однако следует заметить, что ток и напряжения на отдельных участках в общем случае будут отличаться по форме друг от друга и от формы питающего эту цепь источника напряжения. Только в случае постоянного, экспоненциального или синусоидального воздействия ток и напряжение будут совпадать по форме.

2. Резистивные цепи

Резистивной цепью называется цепь, содержащая постоянные источники энергии – тока и напряжения – и резистивные сопротивления. Структура цепи включает узловые точки и замкнутые контура. Задачей настоящего пособия является знакомство с основными методами расчета электрических цепей, и проще всего это сделать, исследуя резистивные цепи. В теории электрических цепей показывается, что в случае других воздействий (синусоидальных, несинусоидальных периодических, импульсных и т.п.) методы анализа остаются такими же, изменяются только компонентные уравнения, которые связывают токи и напряжения в каждой ветви. Поэтому в дальнейшем преимущественно будут рассматриваться резистивные цепи.

Если цепь питается от одного источника энергии любой зависимости от времени: $e(t)$ или $j(t)$, то понятие резистивной цепи может быть расширено. В этом случае форма всех токов и напряжений ветвей будет совпадать с формой сигнала от источника энергии. Например, если к резистивной цепи приложено напряжение треугольной формы, то токи и напряжения ветвей также будут треугольными; постоянное во времени напряжение вызовет постоянный во времени ток и т.д. В дальнейшем будем рассматривать только постоянные воздействия. Токи и напряжения в отличие от общего случая будем, как правило, обозначать большими латинскими буквами.

2.1. Обобщённая форма закона Ома

Если k - тая ветвь находится в цепи **постоянного тока**, а элементы L и C отсутствуют (рис. 2.1а), то выражение (1.13) принимает вид:

$$U_k = r_k I_k - E_k \qquad (2.1а)$$

или $$I_k = g_k (U_k + E_k) \qquad (2.1б)$$

Эти выражения называют ***компонентными*** уравнениями, они определяют напряжение ветви по известному току, или наоборот, ток по известному напряжению. Ещё эти выражения называют *обобщённой формой закона Ома.* Если сопротивление $r_k = 0$, то ветвь первого типа становится *вырожденной* (рис. 2.1б), состоящей из идеального источника ЭДС, и выполняется условие $U_k = -E_k$, которое соответствует определению (1.3). (В выражении (1.3) напряжение на источнике и ЭДС направлены навстречу друг другу (рис. 1.2а), а в выражение (2.1а) записано при условии, что напряжение и ЭДС имеют одинаковое направление).

Другой случай, когда $E_k = 0$, имеем обычную форму закона Ома: $U_k = r_k \cdot I_k$ или $I_k = g_k U_k$. Следует ещё раз обратить внимание на то, что знаки в формулах (2.1) написаны при условии, что направления действия тока, напряжения и ЭДС направлены в одну и ту же сторону. Если изменить направление действия ЭДС на обратное, то следует изменить и знак у ЭДС. Поэтому схему рис. 2.1а можно считать *ключевой схемой ветви первого типа*, её всегда следует иметь в виду при написании компонентных уравнений.

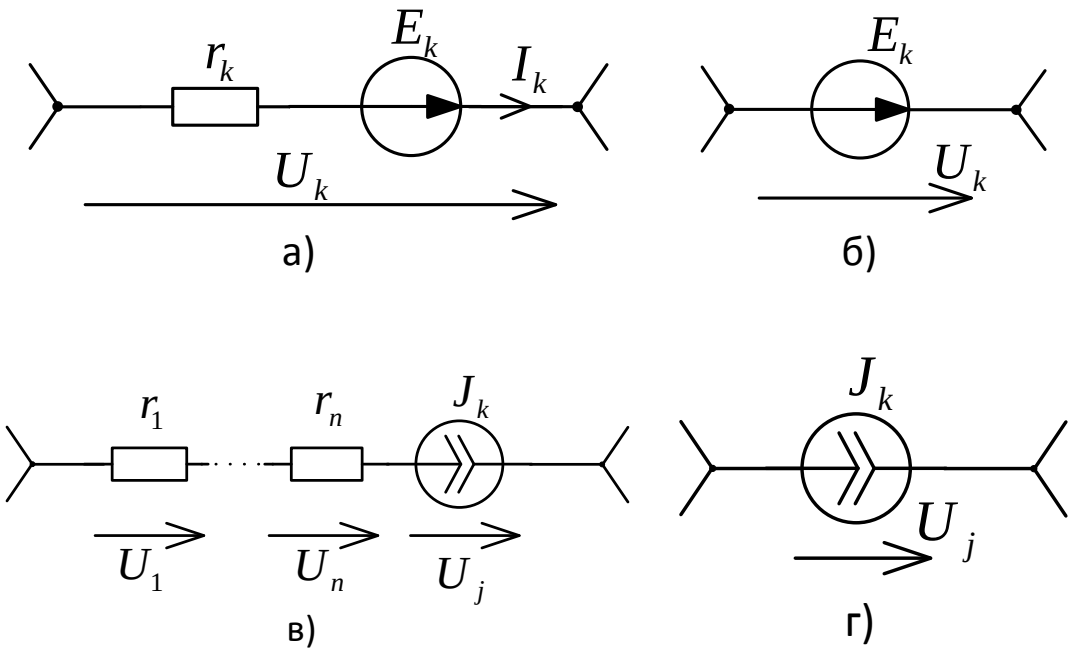


Рис. 2.1. Резистивная ветвь а) первого типа; в) второго типа; б) и г) вырожденные ветви.

На рис. 2.1в показана ветвь *второго типа*, которая включает один источник тока и набор последовательно включённых пассивных элементов цепи. Ток в ветви уже задан источником, что не требует его дополнительного определения. Сопротивление ветви изначально задано бесконечно большим сопротивлением самого источника и не зависит от величины дополнительных сопротивлений. Поэтому *каноническая* схема замещения такой ветви может состоять из одного источника тока (рис. 2.1г), так как на величину других токов исследуемой цепи величина дополнительных сопротивлений не оказывает никакого влияния. Однако напряжение на источнике тока определяется внешней цепью и в том числе напряжениями на дополнительных элементах этой ветви.

Ветвь второго типа не может включать двух и более источников тока, так как возникает неопределённость – (какой же ток считать истинным?). В этом случае физическая модель электрической цепи требует

дополнительного анализа, что, например, приходится делать при анализе переходных процессов.

Ветви, состоящие из *идеальных источников ЭДС или тока*, называются *вырожденными*; их компонентные уравнения содержат информацию лишь об одной из величин – u или i.

Переход от реальной схемы электрической цепи к эквивалентной, где каждая ветвь заменена на каноническую, не изменяет значений искомых токов в ветвях и напряжений между узлами. Следовательно, токи целесообразно находить путём анализа цепи, состоящей из канонических ветвей, а затем находить напряжения на отдельных элементах исходной (не преобразованной) цепи.

Для определения токов и напряжений ветвей необходима система независимых уравнений, которая может быть составлена на основании законов Кирхгофа. Остановимся подробно на особенностях составления уравнений равновесия цепи.

2.2. Уравнения равновесия электрической цепи

Законы Кирхгофа позволяют записать уравнения равновесия цепи. Но при этом возникает ряд вопросов: 1) какое общее число этих уравнений должно быть; 2) сколько уравнений следует составить по первому закону Кирхгофа и сколько по второму; 3) как в этих уравнениях учитываются ветви первого и второго типа и т.п. Чтобы ответить на них, проведём предварительное исследование на примере схемы рис. 2.2.

Первый закон Кирхгофа

Распределение токов в узлах резистивной электрической цепи подчиняется первому закону Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов ветвей цепи, подключённых к узлу, равна нулю*, т.е.

$$\sum_{1}^{n} I_k = 0 \qquad (2.2)$$

Этот закон является следствием первого уравнения Максвелла как *закон непрерывности* силовых линий полного тока. Условные положительные направления токов ветвей выбираются произвольно, и этот выбор сохраняется до конца решения задачи. Принято писать со знаком <+> токи, уходящие от узловой точки, и со знаком <–> токи, направленные к узлу. Решение прямой задачи – определение токов и напряжений ветвей – должно гарантировать одни и те же их численные значения (с точностью до знака) независимо от того, как первоначально направлены токи в ветвях.

Пример 4.

На рис. 2.2 показана схема цепи, состоящая из четырёх ветвей первого типа и одной ветви второго типа. Все ветви канонические, и схема не требует упрощения. Узловые точки пронумерованы. Указаны условные положительные направления токов ветвей, которые для ветвей первого типа выбраны произвольно, а для пятой ветви второго типа фиксированы направлением действия источника тока.

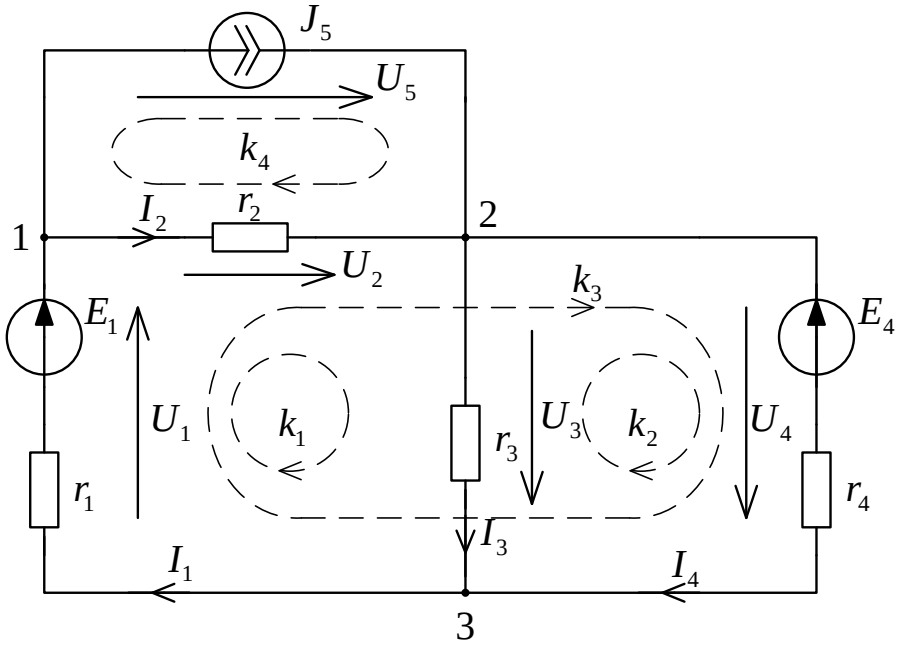


Рис. 2.2 Резистивная цепь с выбранными условными положительными направлениями токов, напряжений и контуров.

На основании первого закона Кирхгофа для узловых точек имеем:

$$\begin{aligned} &\text{узел 1} && -I_1 + I_2 + J_5 = 0; \\ &\text{узел 2} && -I_2 + I_3 + I_4 - J_5 = 0; \\ &\text{узел 3} && I_1 - I_3 - I_4 = 0. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Следует обратить внимание на то, что любое из этих соотношений является линейной комбинацией остальных. Например, уравнение для узла 3 получается суммированием первых двух и умножением этой суммы на (–1). Из этого следует, что если первые два уравнения уже включены в систему, то третье уравнение уже **нельзя** туда включать; оно не несёт никакой дополнительной информации о цепи, а при некоторых алгоритмах расчета приводит к неверным результатам (деление на ноль). В качестве лишнего – зависимого уравнения – можно выбрать любое из записанных трёх. В общем случае, если схема имеет N_Y узлов, то *независимых узлов*

будет на единицу меньше: $N_1 = N_Y - 1$. Для них и составляются уравнения по первому закону Кирхгофа. Последний по номеру узел обычно (но не обязательно) считается *зависимым узлом*, потенциал его принимается равным нулю.

Второй закон Кирхгофа

Правило распределения напряжений в *замкнутых* контурах подчиняется второму закону Кирхгофа: *алгебраическая сумма напряжений ветвей цепи для любого замкнутого контура равна нулю*, т.е.

$$\sum_{1}^{n} U_k = 0 \qquad (2.4)$$

Этот закон является следствием второго уравнения Максвелла при условии, что с большой степенью точности можно считать электрическое поле внутри цепи *потенциальным*: $\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$. Это положение выполняется для большинства цепей постоянного и переменного тока.

Положительные направления напряжений и токов ветвей совпадают, и этот выбор сохраняется до конца решения задачи. Указывается (произвольно) направление обхода контура. Принято писать со знаком <+> напряжения, совпадающие с направлением обхода контура, и со знаком <– > напряжения, направленные напротив. Независимо от того, как указаны положительные направления, задача имеет одно и то же решение для величин напряжений (с точностью до знака). Замкнутый контур может проходить как по ветвям цепи, так и вне его (по “воздуху”), т.е. объединять любые потенциальные точки внутри рассматриваемого контура.

На рис. 2.2 показаны напряжения ветвей. В ветвях первого типа – 1, 2, 3, 4 положительные направления напряжений совпадают с указанными положительными направлениями токов. В ветви с источником тока J_5 напряжение U_5 указывается произвольно (на схеме в сторону действия источника тока), оно является зависимым и определяется внешней цепью. Пунктиром показаны направления обхода различных контуров. Уравнения по второму закону Кирхгофа имеют вид:

контур $k1$ $\quad U_1 + U_2 + U_3 = 0;$

контур $k2$ $\quad -U_3 + U_4 = 0;$

контур $k3$ $\quad U_1 + U_2 + U_4 = 0;$

контур $k4$ $\quad -U_2 + U_5 = 0.$

Необходимо обратить внимание на то, что любое из первых трёх уравнений является линейной комбинацией двух остальных. Например, третье уравнение есть сумма первого и второго, и оно никакой дополнительной информации о цепи не несёт, из чего следует, что включать его в систему уравнений для определения напряжений не имеет смысла, если уже первые два уравнения включены в систему. Следовательно, из первых трёх уравнений в системе следует оставить любые два.

Уравнение для контура $k4$ выполняет вспомогательную роль, с его помощью определяется напряжение на источнике тока $U_5 = U_2$, и в систему его включать не следует; оно рассматривается уже после решения прямой задачи, т.е. после того как найдены все токи и напряжения ветвей. Окончательно, как основу для анализа, оставляем в системе четыре уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{узел } 1 & -I_1 + I_2 + J_5 = 0; \\ \text{узел } 2 & -I_2 + I_3 + I_4 - J_5 = 0; \\ \text{контур } k1 & U_1 + U_2 + U_3 = 0; \\ \text{контур } k2 & -U_3 + U_4 = 0; \end{array} \qquad (2.5)$$

Система связывает четыре неизвестных тока и четыре неизвестных напряжения. К ним следует добавить компонентные соотношения, основанные на обобщённой форме закона Ома (2.1а), которые связывают напряжение каждой ветви с током той же ветви, и тогда, после подстановки их в систему (2.5), она формируется в виде четырёх уравнений с искомыми токами. Чаще всего используют именно этот способ решения.

Второй путь решения системы (2.5) предполагает использование компонентных соотношений (2.1б), которые определяют токи по заданным напряжениям ветвей. Подстановка их в систему формирует ее в виде независимых уравнений относительно напряжений ветвей. Оба эти пути рассмотрены в следующем разделе.

2.3. Прямая задача анализа электрической цепи

Использование законов Кирхгофа

Прямой задачей анализа цепи называют расчет токов и напряжений ветвей при условии, что известны источники энергии и сопротивления ветвей. Такая задача для линейной цепи имеет единственное решение. Решить её можно, используя законы Кирхгофа. При расчете цепи необходимо составить систему таких независимых уравнений (необходимых и достаточных), чтобы задача имела **единственное**

решение. Проведённый выше анализ законов Кирхгофа показал, что из всех уравнений, которые могут быть составлены как уравнения равновесия цепи, только часть являются *линейно независимыми*; именно они должны включаться в систему. Предлагается следующий порядок формирования системы:

- Обозначаются и маркируются ветви электрической цепи. Целесообразно все элементы, принадлежащие данной k- той ветви, а также выбранные для неё положительные направления токов и напряжений маркировать одной цифрой. Пусть N_B общее число ветвей.
- Определяется число *неизвестных* токов как разность общего числа ветвей N_B и ветвей второго типа N_J (с источниками тока), для которых токи уже заданы условием задачи: $N = N_B - N_J$. Это число укажет общее количество уравнений в системе.
- Маркируются узловые точки. Последний по номеру узел считается *зависимым* узлом, для него уравнение по первому закону Кирхгофа **не составляется**. Если схема имеет N_Y узлов, то общее число уравнений по первому закону Кирхгофа $N_1 = N_Y - 1$.
- Указываются направления обходов *независимых* контуров и составляются уравнения по второму закону Кирхгофа. Число контуров определяется формулой: $N_2 = N - N_1 = N_B - N_J - (N_Y - 1)$. *Контур считается независимым, если он включает хотя бы одну новую ветвь.* Как было показано выше, каждый независимый контур должен состоять только из **ветвей первого типа.**

Контура обычно выбирают по ячейкам, не включая туда ветви с источниками тока. Для простых *планарных* цепей эта процедура не представляет труда. В качестве проверки необходимо убедиться, что все ветви первого типа вошли в тот или иной контур.

Для цепей сложных, имеющих десятки и сотни ветвей, процедура назначения независимых контуров представляет самостоятельную, довольно сложную задачу. Она рассмотрена далее в разделе 3, где понятие независимого контура связывается с топологией цепи.

Пример 5.

Для схемы цепи, представленной на рис. 2.2, имеем: $N_B = 5$, $N_J = 1$, $N = 4$, $N_Y = 3$, $N_1 = 2$, $N_2 = 2$. Из группы уравнений (2.3), составленных по первому закону Кирхгофа, оставляем первые два уравнения (или возможен любой набор из двух уравнений). Из группы уравнений (2.4), составленных по второму закону Кирхгофа, оставляем уравнения для контуров $k1$ и $k2$. Внешний контур $k3$, который включает ветви 1, 2 и 4, уже вошедшие в состав первого и второго контуров, будет тогда *зависимым* по отношению к ним.

Полная система независимых линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{узел } 1 & -I_1 + I_2 + J_5 = 0; \\ \text{узел } 2 & -I_2 + I_3 + I_4 - J_5 = 0; \\ \text{контур } k1 & U_1 + U_2 + U_3 = 0; \\ \text{контур } k2 & -U_3 + U_4 = 0; \end{array} \qquad (2.6)$$

В системе (2.6) восемь неизвестных. Чтобы решить эту систему следует либо выразить напряжения через токи, либо токи через напряжения. Рассмотрим эти два пути.

Первый путь решения.

Добавим к системе (2.6) компонентные уравнения, которые определяют напряжения ветвей по заданным токам в каждой отдельной ветви:

$$U_1 = r_1 I_1 - E_1; \qquad U_2 = r_2 I_2; \qquad U_3 = r_3 I_3; \qquad U_4 = r_4 I_4 + E_4. \qquad (2.7)$$

Подстановка выражений (2.7) в (2.6) приводит к другой форме записи системы, где слагаемые с неизвестными токами записаны в левой части системы уравнений, а слагаемые, характеризующие известные источники энергии, в правой:

$$\begin{array}{ll} \text{узел } 1 & -I_1 + I_2 = -J_5; \\ \text{узел } 2 & -I_2 + I_3 + I_4 = J_5 \\ \text{контур } k1 & r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_3 I_3 = E_1; \\ \text{контур } k2 & -r_3 I_3 + r_4 I_4 = -E_4. \end{array} \qquad (2.8)$$

На основании анализа уравнений для контуров можно сформулировать, как **следствие**, второй закон Кирхгофа в другом виде: ***Алгебраическая сумма падений напряжений на резистивных элементах ветвей контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в тот же контур.*** Слагаемые этих сумм записываются со знаком <+>, если токи и ЭДС совпадают с направлением обхода контура, и со знаком <–> при встречных направлениях:

$$\sum r_k I_k = \sum E_k \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) более удобна в использовании, исключает возможность ошибки при учёте знаков для ЭДС, входящих в контур. На

основании этой формулы уравнения типа (2.8) могут быть записаны сразу, минуя подстановку компонентных уравнений (2.7) в уравнения (2.6).

Система (2.8) может быть решена любым методом, например, с использованием теории определителей или какой - либо пакетной программы ПЭВМ. Предварительно система должна быть переписана в матричной форме, где функции источников оформляются в виде *вектора – столбца* в правой части равенства:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 & r_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_5 \\ J_5 \\ E_1 \\ -E_4 \end{bmatrix}$$

Задача решается численно при заданных параметрах ветвей и величин источников энергии. Пусть, например: $r_1 = 4$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$, $r_4 = 3$(Ом); $E_1 = 16$, $E_4 = 12$ (В); $J_5 = 6$ (А). Подставив числовые значения параметров, получим матричное уравнение цепи в виде

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 16 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Для решения можно воспользоваться программой универсального калькулятора *CALC.EXE*, которая применяется на кафедре ЭТиПЭМС СПб НИУ ИТМО, или использовать возможности пакета MathCAD (**см. Приложение**). В результате обращения к любой из этих программ находим искомые токи: $I_1 = 3.2$, $I_2 = -2.8$, $I_3 = 2.4$, $I_4 = 0.8$ (А). После подстановки токов в компонентные уравнения (2.7) находим напряжения ветвей: $U_1 = -3.2$, $U_2 = -11.2$, $U_3 = 14.4$, $U_4 = 14.4$, $U_5 = U_2 = -11.2$ (В). По закону Ома дополнительно определяем напряжения на резистивных элементах ветвей: $U_{r1} = r_1 I_1 = -3.2$, $U_{r4} = r_4 I_4 = 2.4$ (В).

Некоторые токи и напряжения получились со знаком минус; это значит, что их истинные положительные направления противоположны изначально выбранным. Однако **не следует изменять** направления токов и знаки в полученном решении, так как это в дальнейшем может привести к неверным результатам. Физически правильные результаты должны получиться при любых знаках найденных токов и напряжений. Например, легко проверить, что для всех узлов и замкнутых контуров выполняются уравнения равновесия цепи.

Полученное решение позволяет найти ряд следствий, которые представляют интерес в электротехнике:

а) Мощности, отдаваемые в цепь источниками: $P_{E1} = E_1 I_1 = 51.2$, $P_{E4} = -E_4 I_4 = 12(-0.8) = -9.6$, $P_{J5} = -J_5 U_5 = -6(-11.2) = 67.2$ (Вт). Из трёх источников энергии, действующих в цепи, два отдают энергию, а один – в четвёртой ветви – получает энергию за счёт других источников. Следует обратить внимание на то, что все найденные токи и напряжения подставляются в формулы для мощностей со своими знаками, и это обеспечивает физически правильный результат.

б) Мощности, потребляемые в резистивных элементах цепи: $P_{r1} = r_1 I_1^2 = 40.96$, $P_{r2} = r_2 I_2^2 = 31.36$, $P_{r3} = r_3 I_3^2 = 34.56$, $P_{r4} = r_4 I_4^2 = 1.92$ (Вт).

в) Проверка баланса мощностей – суммарная мощность, отдаваемая источниками энергии, должна равняться суммарной мощности, потребляемой в резистивных элементах цепи. Имеем баланс: $\sum P_E + \sum P_J = \sum r_k I_k^2 = 108.8$ (Вт).

Задача решена.

Второй путь решения задачи.

Предложенный выше порядок формирования системы уравнений не является единственным. Возможен второй путь решения задачи. Можно сформировать систему независимых уравнений, основываясь не на токах ветвей, а *на напряжениях* тех же *ветвей*. Для этого следует объединить уравнения равновесия цепи (2.6) с компонентными уравнениями, записанными в виде (2.1б). В отличие от первого пути здесь выполняется подстановка компонентных уравнений в уравнения равновесия, составленные по первому закону Кирхгофа, и таким образом формируется система уравнений для неизвестных напряжений ветвей. Решение системы даёт набор напряжений ветвей, а затем, используя те же компонентные уравнения (2.1б), находят токи. Покажем этот путь на примере предыдущей задачи (см. рис. 2.2 и входные данные Примера 5).

Компонентные уравнения имеют вид:

$$I_1 = g_1(U_1 + E_1), \quad I_2 = g_2 U_2, \quad I_3 = g_3 U_3, \quad I_4 = g_4(U_4 - E_4). \qquad (2.10)$$

После подстановки (2.10) в уравнения системы (2.6) получим:

$$\begin{bmatrix} -g_1 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_2 & g_3 & g_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_5 + g_1 E_1 \\ J_5 + g_4 E_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решение матричного уравнения найдём после подстановки численных значений параметров Примера 5, где проводимости ветвей определим как величины обратные сопротивлениям: $g_1 = 0.25$, $g_2 = 0.25$, $g_3 = 0.166666$, $g_4 = 0.33333$ (См); $E_1 = 16$, $E_4 = 12$ (В); $J_5 = 6$ (А). Решение задачи совпадает с ранее найденным набором напряжений ветвей: $U_1 = -3.2$, $U_2 = -11.2$, $U_3 = 14.4$, $U_4 = 14.4$, $U_5 = U_2 = -11.2$ (В). Токи рассчитаем по формулам (2.10), они совпадают с найденными ранее.

Второй путь решения задачи реже встречается в расчетах, так как он требует дополнительной процедуры перевода сопротивлений ветвей в проводимости.

Пример 6.

Схема цепи рис. 2.3 включает только ветви первого типа. Провод, связывающий точки 3 и 3', обеспечивает протекание в нём тока, но потенциалы этих точек одинаковы; поэтому режим работы цепи не изменится, если для расчета токов эти точки объединить в один узел под номером 3, а сам провод не считать ветвью. Тогда для цепи, представленной на рис. 2.3, имеем: $N_B = 5$, $N_J = 0$, $N = 5$, $N_Y = 3$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$.

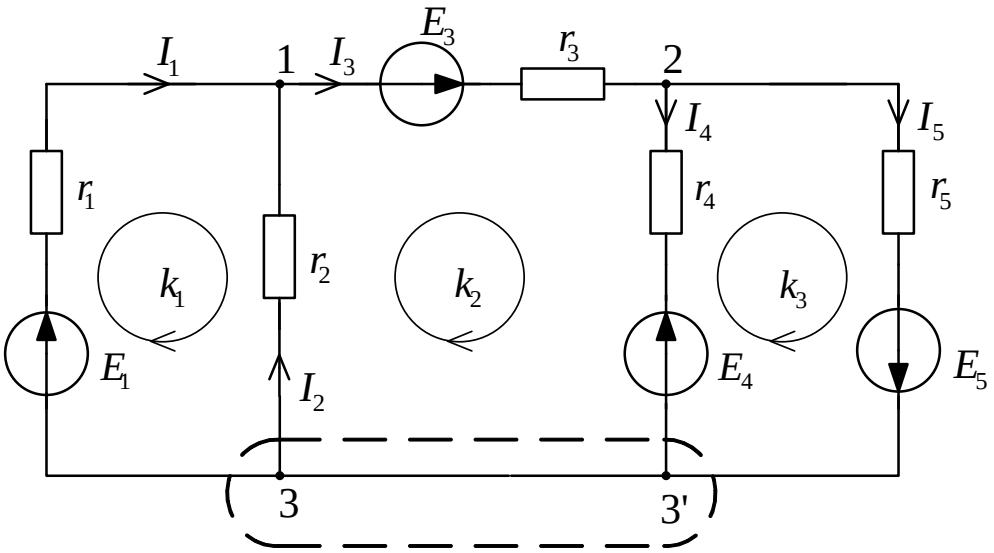


Рис. 2.3 Цепь с ветвями первого типа и с распределённой узловой точкой.

Положительные направления токов выбираются произвольно, с ними совпадают положительные направления напряжений ветвей (на схеме не показаны). Из трёх уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, выберем уравнения для первой и второй узловой точки. Последний третий узел считаем зависимым узлом. Независимые контура выбираем по ячейкам (сотам), которые видны на планарной электрической

цепи, их должно быть три. Обходы контуров выбираются произвольно. Система уравнений принимает вид:

$$\begin{array}{ll}
\text{узел } 1 & -I_1 - I_2 + I_3 = 0; \\
\text{узел } 2 & -I_3 + I_4 + I_5 = 0; \\
\text{контур } k_1 & r_1 I_1 - r_2 I_2 = E_1; \\
\text{контур } k_2 & r_2 I_2 + r_3 I_3 + r_4 I_4 = E_3 - E_4 \\
\text{контур } k_3 & -r_4 I_4 + r_5 I_5 = E_4 + E_5;
\end{array} \qquad (2.11)$$

Та же система в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ r_1 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & r_3 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_4 & r_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_3 - E_4 \\ E_4 + E_5 \end{bmatrix}$$

Пусть даны параметры сопротивлений ветвей и величины источников: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2.4$, $r_4 = 4$, $r_5 = 6$ (Ом); $E_1 = 12$, $E_3 = 12$, $E_4 = 24$, $E_5 = 18$(В).

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2.4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -12 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Подстановка численных данных в матричное уравнение с последующим обращением к программе *CALC.EXE* даёт следующий результат: $I_1 = 3.6$, $I_2 = -1.6$, $I_3 = 2$, $I_4 = -3$, $I_5 = 5$(А). Полученные значения токов, как следствие, позволяют определить ток в проводе, который соединяет точки 3 и $3'$: $I_{33'} = I_1 + I_2 = 2$ или $I_{33'} = I_4 + I_5 = 2$(А).

Напряжения ветвей: $U_1 = U_2 = -4.8$, $U_3 = -7.2$, $U_4 = U_5 = 12$(В). Каждое напряжение определяется на основании компонентного уравнения, которое рекомендуется проверить самостоятельно (см. 2.1а). Очевидно, что для любых контурных уравнений выполняется второй закон Кирхгофа, т.е. задача решена правильно.

2.4. Расчет разветвлённых цепей с одним источником энергии

Метод входного сопротивления

Протекание токов в ветвях цепи может обеспечить один источник энергии. Положительные направления токов и напряжений в ветвях заранее определены этим источником и при необходимости могут быть указаны на схеме. Особенность питания такой цепи позволяет выполнить расчет токов и напряжений ветвей, используя *метод входного сопротивления.* Понятие входного сопротивления рассмотрено в предыдущем разделе. Идея метода заключается в пошаговом упрощении схемы путём объединения последовательно и параллельно соединённых элементов или ветвей. Если в результате этих преобразований удаётся свести схему цепи к одному (входному) сопротивлению, то, используя закон Ома, можно найти ток в источнике напряжения или напряжение на источнике тока, а затем, по законам Кирхгофа и правилу деления тока на части, все остальные токи и напряжения. Метод хорошо работает для цепочечных схем, где указанные выше соединения легко выявить.

Пример 7.

Электрическая цепь (рис. 2.4а) питается от источника напряжения $E = 36\,(\text{В})$. Сопротивления ветвей: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$, $r_4 = 3$, $r_5 = 6$ (Ом). Требуется определить токи и напряжения ветвей цепочечной схемы, используя *метод входного сопротивления*.

Объединение сопротивлений ветвей следует начинать с наиболее удалённых от источника элементов. В схеме это сопротивления r_4 и r_5, которые соединены параллельно, и вместе эта группа соединена последовательно с сопротивлением r_3. Объединяя их в единый эквивалент, получим $R_\Sigma = r_3 + \dfrac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5} = 6\,(\text{Ом})$. Схема на рис. 2.4б является промежуточной, куда включено это сопротивление. Далее, используя ту же формулу, объединяем сопротивления r_1, r_2 и R_Σ до одного сопротивления (рис. 2.4в), которое и будет входным сопротивлением со стороны первой ветви $R_{вх.1} = r_1 + \dfrac{r_2 \cdot R_\Sigma}{r_2 + R_\Sigma} = 4$ (Ом).

Используя закон Ома и правило деления тока на части, найдём в амперах (А):

- Ток $I_1 = \dfrac{E}{R_{вх.1}} = 9;$
- Токи $I_2 = I_1 \dfrac{R_\Sigma}{r_2 + R_\Sigma} = 6$, $I_3 = I_1 \dfrac{r_2}{r_2 + R_\Sigma} = 3$ (или $I_3 = I_1 - I_2$);

- Токи $I_4 = I_3 \dfrac{r_5}{r_4 + r_5} = 2$, $I_5 = I_3 \dfrac{r_4}{r_4 + r_5} = 1$ (или $I_5 = I_3 - I_4$).

По закону Ома находим напряжения ветвей: $U_1 = 18$, $U_2 = 18$, $U_3 = 12$, $U_4 = U_5 = 6$ (В).

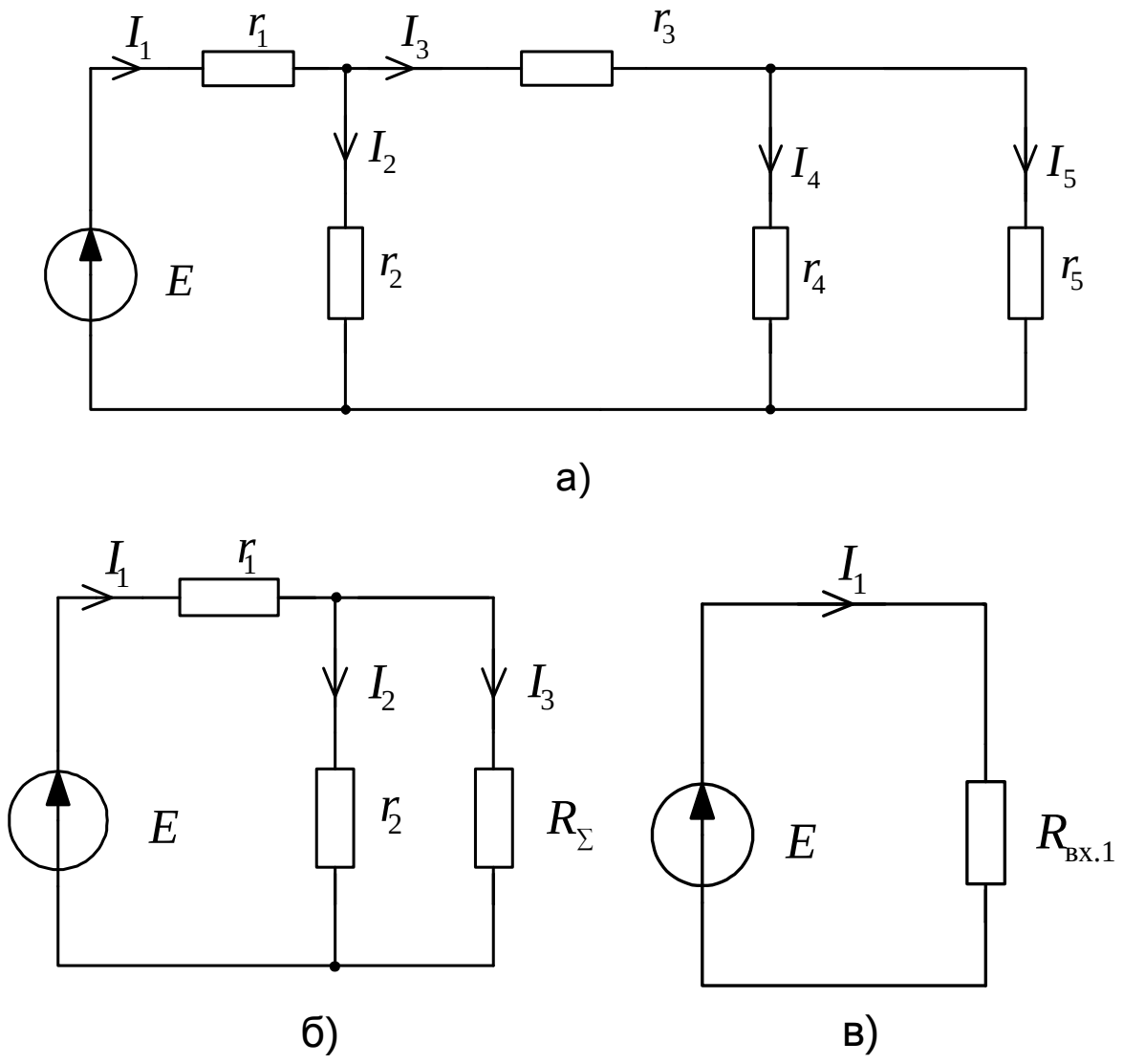


Рис. 2.4. Схема цепи
а) с одним источником энергии; б) промежуточная; в) эквивалентная.

Порядок расчета цепи не изменится, если вместо источника напряжения в схеме будет действовать источник тока.

Метод пропорциональных величин

Метод основан на свойстве *линейности электрической цепи*. Известно, что при увеличении (или уменьшении) величины действующего напряжения источника E в m раз во столько же раз увеличится (или уменьшится) напряжение U_k в любой ветви электрической цепи. Однако

коэффициент передачи напряжения, который определяется отношением этих величин, останется неизменным: $K_u = \frac{U_k}{E} = \frac{m \cdot U_k}{m \cdot E}$. Аналогичный вывод можно сделать и для цепи с источником тока, где рассматривается *коэффициент передачи тока*: $K_i = \frac{I_k}{J} = \frac{m \cdot I_k}{m \cdot J}$.

Используя эту особенность линейной электрической цепи, имеет смысл предварительно найти эти коэффициенты, а затем получить ответ по приведённым формулам: $U_k = K_u \cdot E$, или $I_k = K_i \cdot J$.

Коэффициенты передачи можно определять как результат решения ***обратной задачи***. Следует задать любое значение напряжения в искомой ветви (обычно это круглое число, например, $u_k = 1(\text{В})$), а затем, используя уравнения равновесия, найти численное значение напряжения источника e. Эта величина отличается от заданного значения E. Однако отношение найденных величин дает истинное значение коэффициента передачи: $K_U = \frac{u_k}{e}$.

Пример 8.

Для схемы рис. 2.4а, рассмотренной в предыдущем примере, найти коэффициент передачи напряжения для пятой ветви.

Решение.

Обратная задача включает несколько простых шагов, основанных на использовании законов Ома и Кирхгофа:

- Задаём произвольно величину напряжения на пятой ветви. Пусть это будет $u_5 = 1(\text{В})$. Очевидно, что $u_4 = u_5$;
- Определим токи $i_5 = \frac{u_5}{r_5} = \frac{1}{6}$, $i_4 = \frac{u_4}{r_4} = \frac{1}{3}$ (А);
- Ток и напряжение третьей ветви: $i_3 = i_4 + i_5 = 0.5(\text{А})$, $u_3 = r_3 i_3 = 2(\text{В})$;
- Напряжение и ток второй ветви: $u_2 = u_3 + u_5 = 3(\text{В})$, $i_2 = \frac{u_2}{r_2} = 1(\text{А})$;
- Ток и напряжение первой ветви: $i_1 = i_2 + i_3 = 1.5(\text{А})$, $u_1 = r_1 i_1 = 3(\text{В})$;
- ЭДС источника напряжения: $e = u_1 + u_2 = 6(\text{В})$;
- Коэффициент передачи напряжения: $K_U = \frac{u_5}{e} = \frac{1}{6}$.

Задача решена.

Если теперь необходимо определить напряжение при других номиналах напряжения источника, то следует воспользоваться обратным

соотношением: $U_5 = K_U E$. Пусть, например, напряжение источника $E = 36\,(\text{В})$, как это задано в предыдущем примере, тогда $U_5 = 6\,(\text{В})$. Все остальные токи и напряжения ветвей изменятся в той же пропорции.

В этой задаче можно определить и коэффициент передачи тока для пятой ветви, если предположить, что на входе действует источник тока. Тогда следует сравнить токи первой и пятой ветви и найти отношение: $K_i = \frac{i_5}{i_1} = \frac{1}{9}$. Это значит, что при любом источнике питания ток пятой ветви будет в девять раз меньше тока первой ветви. Аналогично можно найти коэффициенты передачи для других ветвей.

2.5. Метод наложения

Метод наложения (суперпозиции) применим к линейным цепям, в которых сопротивления элементов цепи не изменяются при изменении протекающего через них тока или приложенного к ним напряжения. Именно такие цепи рассматриваются в настоящем пособии, где физические процессы описываются системой линейных уравнений, основанных на законах Кирхгофа и компонентных уравнениях.

Метод основывается на независимом действии каждого источника энергии на электрическую цепь. В связи с этим токи в ветвях определяют от каждого источника отдельно, и эти токи называются *частичными*. Набор частичных токов находят из решения *составных задач*, где в каждой задаче действует только один источник энергии. Ток в каждой ветви является суммой частичных токов. Принят следующий порядок решения:

- Исходная электрическая цепь, содержащая n_e источников напряжений и n_J источников тока, заменяется набором цепей, где в каждой цепи действует только один источник напряжения или тока. Таких схем будет $n = n_e + n_J$.
- Каждая составная цепь предполагает исключение всех источников из исходной цепи кроме одного. При этом исключаемый источник напряжения (ЭДС) заменяется короткозамкнутой перемычкой (режим КЗ), а источник тока – разрывом цепи (режим ХХ). Это означает, что исключаемый источник энергии заменяется своим внутренним сопротивлением.
- В каждой составной цепи производится расчет *частичных* токов и напряжений. При этом необходимо указывать их положительные направления, что нетрудно сделать, так как в каждой составной цепи действует только один источник энергии, и путь движения положительных зарядов от высшего потенциала к низшему потенциалу легко проследить.

Расчет можно выполнить любым методом. Особо следует обратить внимание на методы, изложенные ранее (например, раздел 2.4).

Частичные токи обозначают двумя индексами: нижний указывает на номер ветви, а верхний – на номер источника, от которого находят частичный ток. Если источников немного, то на принадлежность составных токов к конкретному источнику можно отметить штрихами.

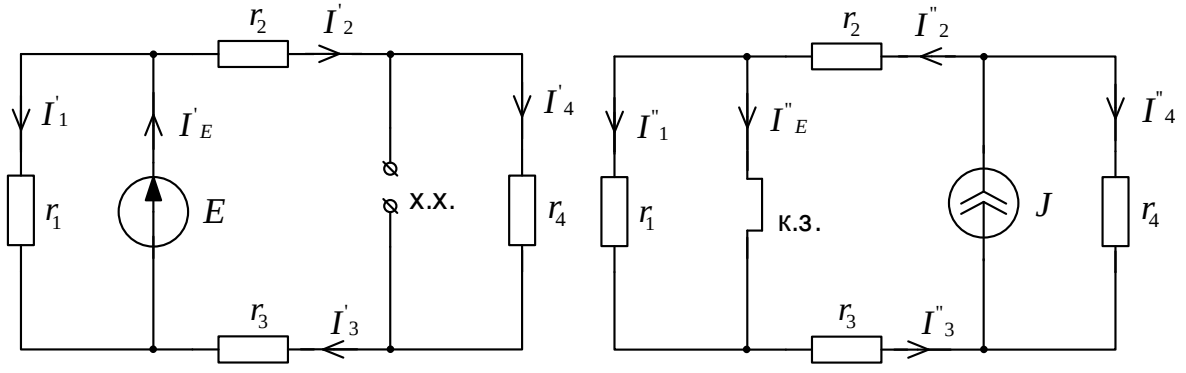
- Определяются токи ветвей исходной цепи как *алгебраическая* сумма частичных токов для каждой ветви, причём токи, направления которых совпадают с условными положительными направлениями, указанными в исходной цепи, следует брать со знаком плюс, а противоположно направленными – со знаком минус.
- Проверяется решение задачи путём составления уравнений равновесия цепи для суммарных токов и напряжений.

Пример 9.

Найти в общем виде выражения для расчета токов в цепи (рис. 1.9а), используя метод наложения.

Решение.

Исходная цепь содержит два источника энергии, и для каждого из них изображены составные схемы (рис. 2.5а и рис. 2.5б). В каждой из них показаны положительные направления токов, которые указывают действия источников по переносу положительных зарядов от плюса к минусу. Здесь нельзя произвольно указывать эти направления, так как это может привести к ошибке за счёт появления знака минус в законе Ома и не учёта этого знака в дальнейшем.



а) б)

Рис. 2.5. Составные схемы а) для источника напряжения; б) для источника тока.

В первой схеме (рис. 2.5а) – с источником напряжения E – токи левой и правой части определяются только величиной ЭДС и не зависят друг от друга:

$$I_1' = \frac{E}{r_1}, \qquad I_2' = I_3' = I_4' = \frac{E}{r_2 + r_3 + r_4}, \qquad I_E' = I_1' + I_2'.$$

Во второй схеме (рис. 2.5б) ток источника тока J устанавливается в правой и левой ветви по правилу деления тока на части. При этом короткозамкнутая перемычка, замещающая источник напряжения, шунтирует сопротивление r_1, и частичный ток, обусловленный действием источника тока, через него не течет. Имеем

$$I_1'' = 0, \qquad I_2'' = I_3'' = I_E'' = J\frac{r_4}{r_2 + (r_3 + r_4)}, \qquad I_4'' = J\frac{r_2 + r_3}{r_2 + (r_3 + r_4)}.$$

Окончательно суммируем алгебраически частичные токи, сравнивая их направления с условными положительными направлениями токов в исходной цепи (рис. 1.9а): $I_1 = I_1' + I_1''$, $I_2 = I_2' - I_2''$, $I_3 = I_3' - I_3''$, $I_4 = I_4' + I_4''$, $I_E = I_E' - I_E''$.

Можно проверить, что первый закон Кирхгофа для узловых точек выполняется.

Пример 10.

Найти токи в цепи (рис. 2.6) методом наложения. Параметры цепи: $r_1 = r_4 = 3$, $r_2 = r_3 = 6$ (Ом); $E_5 = 12$, $E_6 = 24$(В).

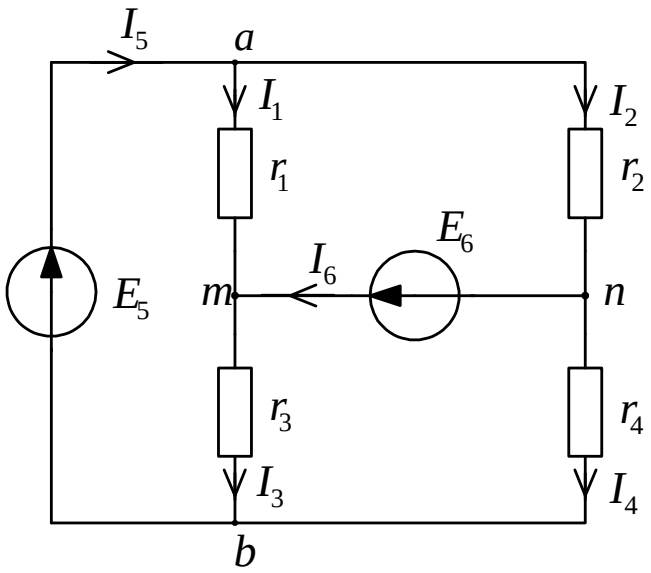


Рис. 2.6. Схема с идеальными (вырожденными) источниками напряжения.

Решение.

На рис. 2.7а и 2.8а изображены составные схемы, которые получены после исключения из исходной цепи соответственно источников

напряжения E_6 и E_5. Каждый из них заменен короткозамкнутой перемычкой – КЗ.

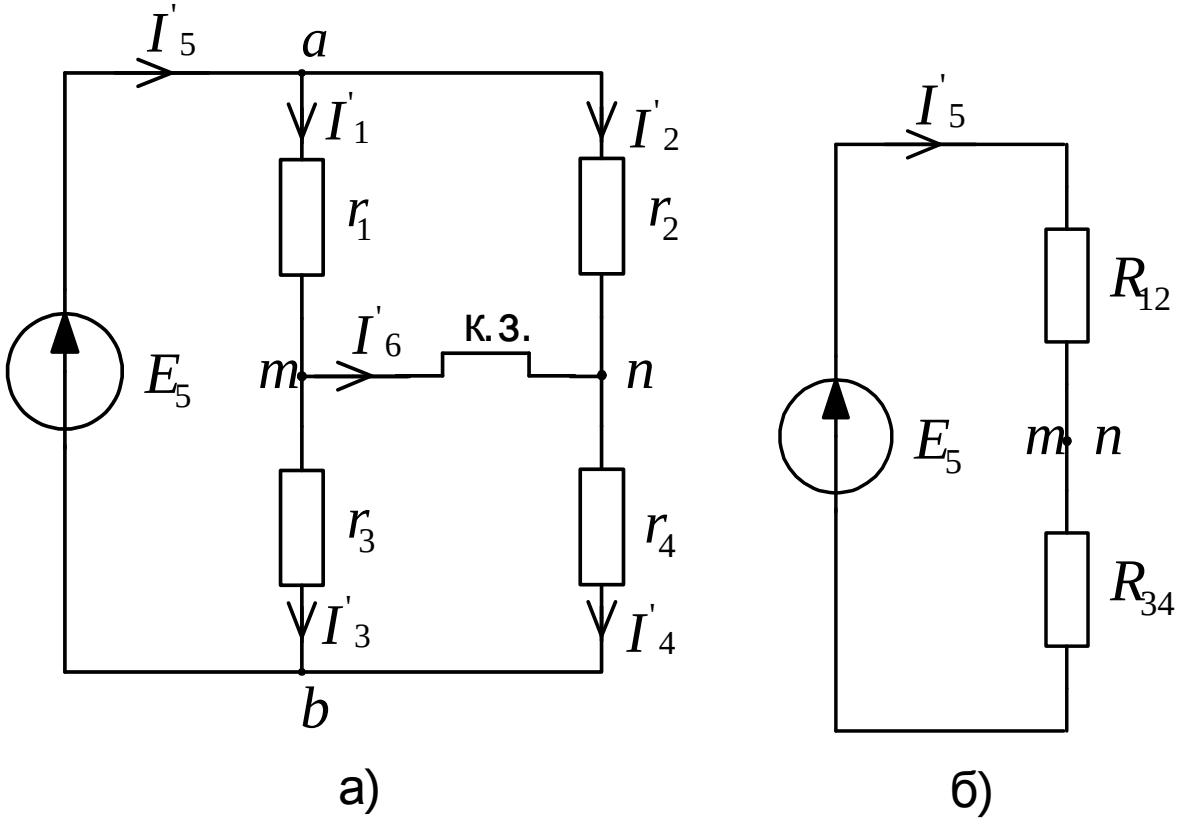


Рис. 2.7. Составная схема а) для источника E_5 б) эквивалентная схема.

Анализ схемы (рис. 2.7а) показывает, что после исключения источника E_6 узловые точки m и n объединились в единый узел, и в схеме образовались две группы параллельных сопротивлений, которые в свою очередь включены последовательно (рис. 2.7б). Их эквиваленты:

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 2, \qquad R_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = 2, \qquad R_{вх.5} = R_{12} + R_{34} = 4.$$

По направлению действия источника E_5 указываем положительные направления токов в ветвях. В короткозамкнутой ветви mn направление тока произвольно. Используя найденное входное сопротивление для пятой ветви, найдём частичный ток $I_5^{'} = \frac{E_5}{R_{вх.5}} = 3(\text{А})$. Остальные токи определяем по правилу деления тока на части:

$$I_1^{'} = I_5^{'}\frac{r_2}{r_1+r_2} = 2, \quad I_2^{'} = I_5^{'}\frac{r_1}{r_1+r_2} = 1, \quad I_3^{'} = I_5^{'}\frac{r_4}{r_3+r_4} = 1, \quad I_4^{'} = I_5^{'}\frac{r_3}{r_3+r_4} = 2.$$

Ток в короткозамкнутой ветви найдём по первому закону Кирхгофа:

$$I_6^{'} = I_1^{'} - I_3^{'} = 1.$$

В схеме (рис. 2.8а) положительные направления токов также согласованы с направлением действия источника E_6, за исключением короткозамкнутой ветви ab, где направление указывается произвольно. На рис. 2.8б та же схема перерисована ещё раз, где точки a и b объединены. По сравнению с предыдущей схемой сопротивления цепи объединяются в новые параллельные группы: r_1, r_3 и r_2, r_4. Аналогично определяем входное сопротивление со стороны шестой ветви и ее частичный ток: $R_{вх.6} = \frac{r_1 r_3}{r_1+r_3} + \frac{r_2 r_4}{r_2+r_4} = 4\,(\text{Ом}), \quad I_6^{"} = \frac{E_6}{R_{вх.6}} = 6\,(\text{А})$. Используя правило деления тока на части, найдём частичные токи ветвей: $I_1^{"} = 4, \quad I_2^{"} = 2, \quad I_3^{"} = 2, \quad I_4^{"} = 4\,(\text{А})$. Ток в короткозамкнутой перемычке ab определим как $I_5^{"} = I_1^{"} - I_2^{"} = 2$.

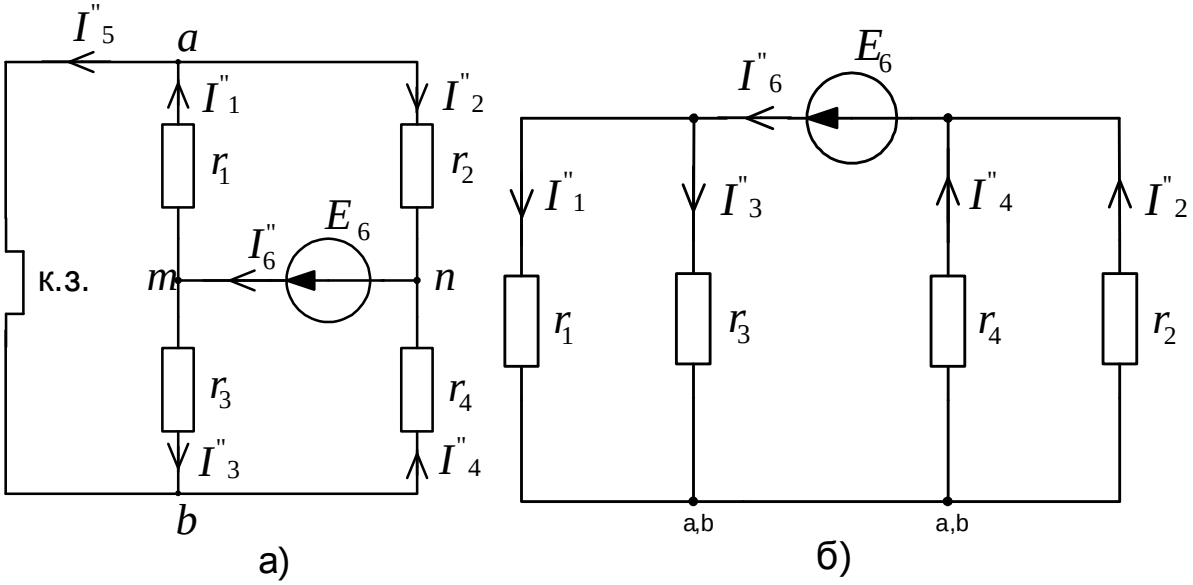


Рис. 2.8. Составная схема а) для источника E_6 б) эквивалентная схема.

Теперь осталось *алгебраически* просуммировать частичные токи в каждой ветви, сравнивая их с направлениями токов, указанными в исходной цепи. Имеем: $I_1 = I_1^{'} - I_1^{"} = -2, \quad I_2 = I_2^{'} + I_2^{"} = 3, \quad I_3 = I_3^{'} + I_3^{"} = 3,$

$I_4 = I_4^{'} - I_4^{''} = -2$, $I_5 = I_5^{'} - I_5^{''} = 1$, $I_6 = -I_6^{'} + I_6^{''} = 5\,(\text{A})$. Напряжения ветвей: $U_1 = -6$, $U_2 = 18$, $U_3 = 18$, $U_4 = -6\,(\text{В})$.

Проверку правильности решения задачи можно выполнить по уравнениям равновесия цепи. Например, $I_6 = I_2 - I_4 = 3 - (-2) = 5\,(\text{A})$, или $E_5 = U_1 + U_3 = -6 + 18 = 12\,(\text{В})$. Другие уравнения также справедливы.

Задача решена.

Рассмотренные примеры показывают, что при исключении из цепи идеальных источников напряжения схема цепи упрощается за счёт объединения узловых точек, а при исключении источников тока – за счёт уменьшения числа ветвей. Однако объём расчетного материала увеличивается пропорционально общему числу источников энергии, действующих в цепи.

2.6. Особенности составления уравнений цепи при наличии ветвей с идеальными источниками

Предыдущий анализ показывает, что расчет токов и напряжений даже в сравнительно простых цепях требует составления системы уравнений большой размерности. Ставится задача уменьшения числа уравнений в системе. Один из путей решения этой задачи связан с исключением из схемы ветвей с идеальными источниками энергии, заменой их действия некоторыми эквивалентами. Рассмотрим, что в этой связи можно сделать с идеальным источником напряжения.

Преобразования ветвей с идеальными источниками напряжения

Схема (рис. 2.9а) содержит ветвь с *идеальным источником напряжения* E. Уравнения равновесия цепи:

$$
\begin{array}{ll}
\text{узел 1} & -I_1 - I_2 + I_3 = 0; \\
\text{узел 2} & -I_3 + I_4 + J = 0; \\
\text{узел 3} & +I_1 + I_2 - I = 0; \\
\hline
\text{контур } k1 & U_{r1} - U_{r2} = 0; \\
\text{контур } k2 & U_{r2} + U_{r3} + U_{r4} = E; \\
\text{контур } k3 & -U_4 + U_J = 0;
\end{array}
\qquad (2.12)
$$

Схемы (рис. 2.9б, в, г) описываются **той же** системой уравнений и, следовательно, дают тот же набор искомых токов! Изменяются только напряжения ветвей, которые включают источник напряжения E, а напряжения на резистивных сопротивлениях этих ветвей остаются неизменными за счёт сохранения величин токов ветвей.

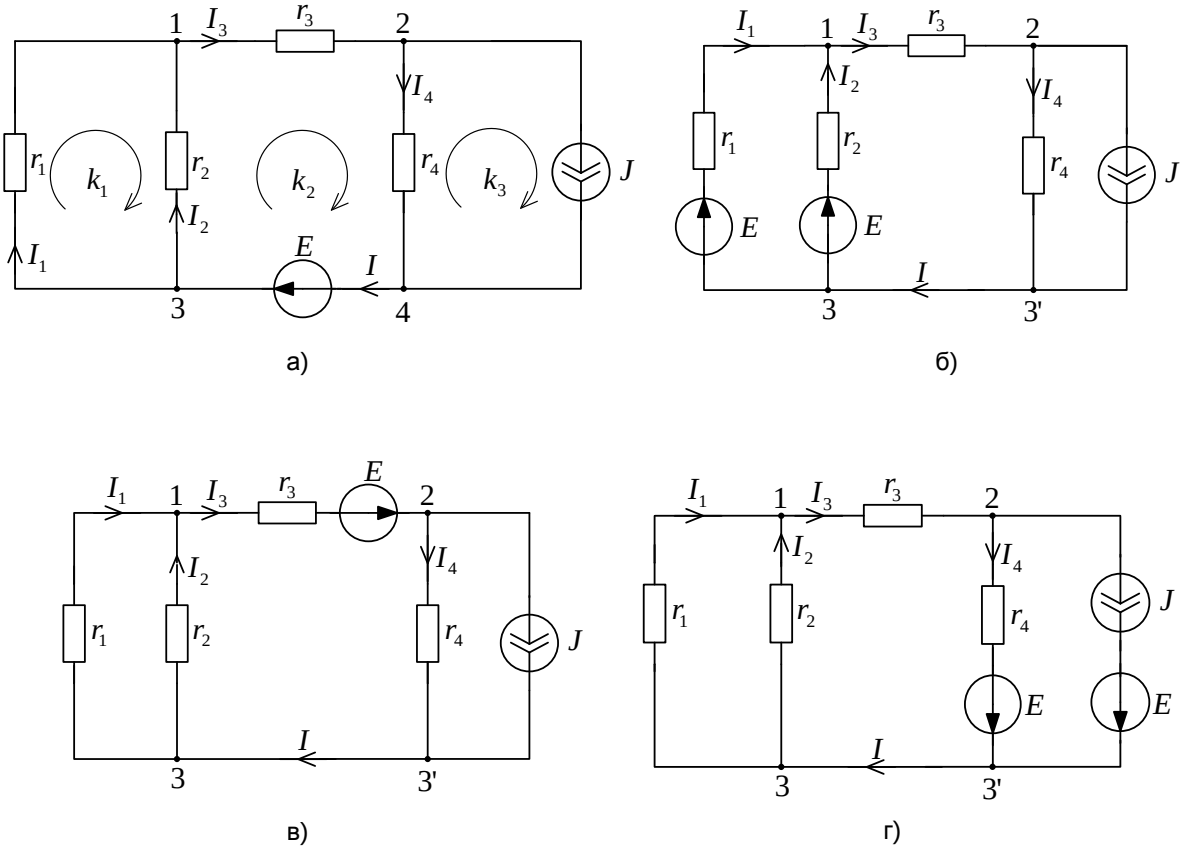


Рис. 2.9. Взаимно эквивалентные схемы:
а) исходная, б) с переносом источника напряжения E в ветви 1 и 2,
в) с переносом E в ветвь 3, г) с переносом E в ветви 4 и J.

Эти схемы получены процедурой **переноса источника напряжения** E соответственно через узловые точки 3,1,2 по часовой стрелке. При переносе источника через узел необходимо включать этот источник в каждую ветвь, присоединённую к рассматриваемому узлу. При переносе источника через узел 3 он появляется в первой и во второй ветви, затем – в третьей, далее в четвёртой и в ветви с источником тока.

При переносе идеального источника ветвь, из которой взят источник, превращается в **короткозамкнутый отрезок провода**, находящийся под действием одного потенциала. Этот провод можно убрать из цепи, заменив его одной узловой точкой. Схема упрощается, так как общее число ветвей уменьшается на единицу, уменьшается и число уравнений в системе, которые составляются по первому закону Кирхгофа. Используя этот приём, можно, например, упростить схему цепи (рис. 2.10), содержащую ветвь с идеальным источником напряжения E_1 на схему, изображенную на рис. 2.11, где узлы 1 и 3 объединены в один узел, а в ветвях 4 и 5 появились дополнительные, перенесённые против часовой стрелки через узел 3 источники ЭДС. (Очевидно, что тот же источник можно перенести

через узел 1 в ветви 2 и 3). Если схема имеет несколько идеальных источников напряжения, то всегда есть возможность уменьшить общее число ветвей и независимых узлов исходной цепи на это число путём *переноса источников в смежные ветви*.

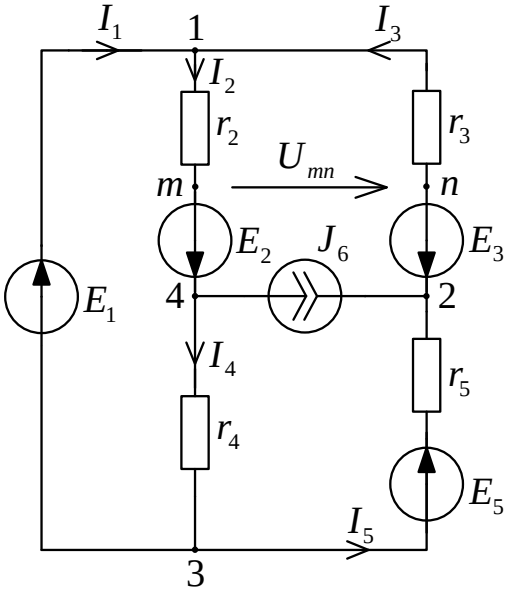


Рис. 2.10 Схема с источником напряжения E_1.

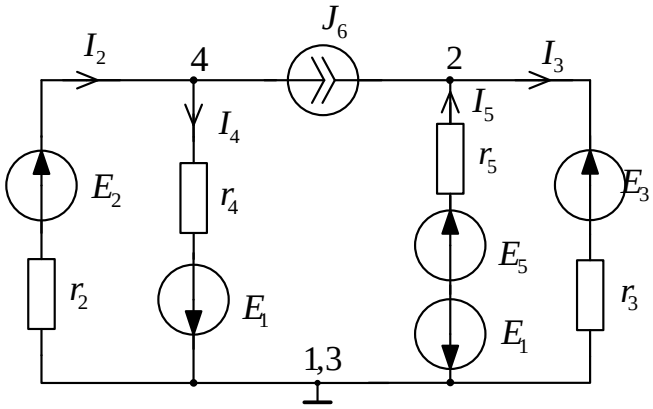


Рис. 2.11 Перенос источника E_1. в четвертую и пятую ветвь

Преобразования ветвей с источниками тока

Цепь с *идеальным источником тока* можно преобразовать в эквивалентный источник напряжения, если к нему присоединено параллельно резистивное сопротивление (рис. 1.3б), что не всегда имеет место. На рис. 2.12а изображен фрагмент цепи, где для источника тока нет параллельно присоединённого резистора, а на рис. 2.12б фрагмент эквивалентной к ней цепи, где тот же источник присоединён к каждому сопротивлению смежного контура. Очевидно, что уравнения по первому закону Кирхгофа для узловых точек обеих цепей записываются одинаково. Следовательно, эти схемы взаимно эквивалентны. Но источники тока в схеме рис. 2.12б уже можно преобразовать в эквивалентные источники напряжения по формулам, рассмотренным в разделе 1.1, что и показано на рис. 2.12в. В результате такого преобразования сокращается число контуров, а, следовательно, и число уравнений в системе.

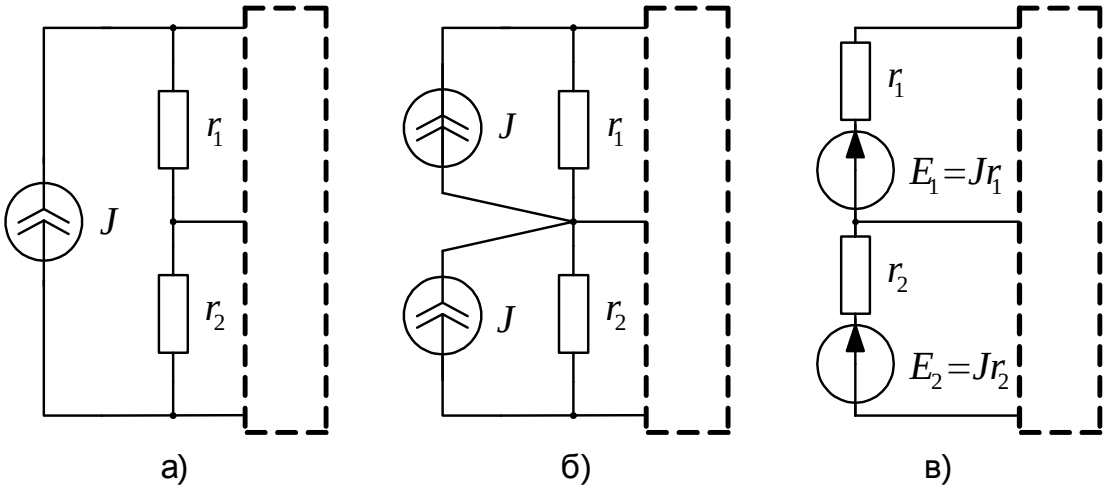


Рис. 2.12 Фрагмент цепи: а) с идеальным источником тока J ; б) с двумя эквивалентными источниками J ; в) с эквивалентно преобразованными источниками напряжения E_1 и E_2.

Пример 11.

Схема (рис. 2.13а) включает два идеальных источника энергии, что позволяет выбрать два пути преобразования схемы: 1) перенести источник напряжения E через любой ближайший узел и объединить узловые точки; 2) заменить источник тока J двумя источниками напряжения $E_1 = r_1 J$ и $E_2 = r_2 J$. Второй путь показан на рис. 2.13б и 2.13в.

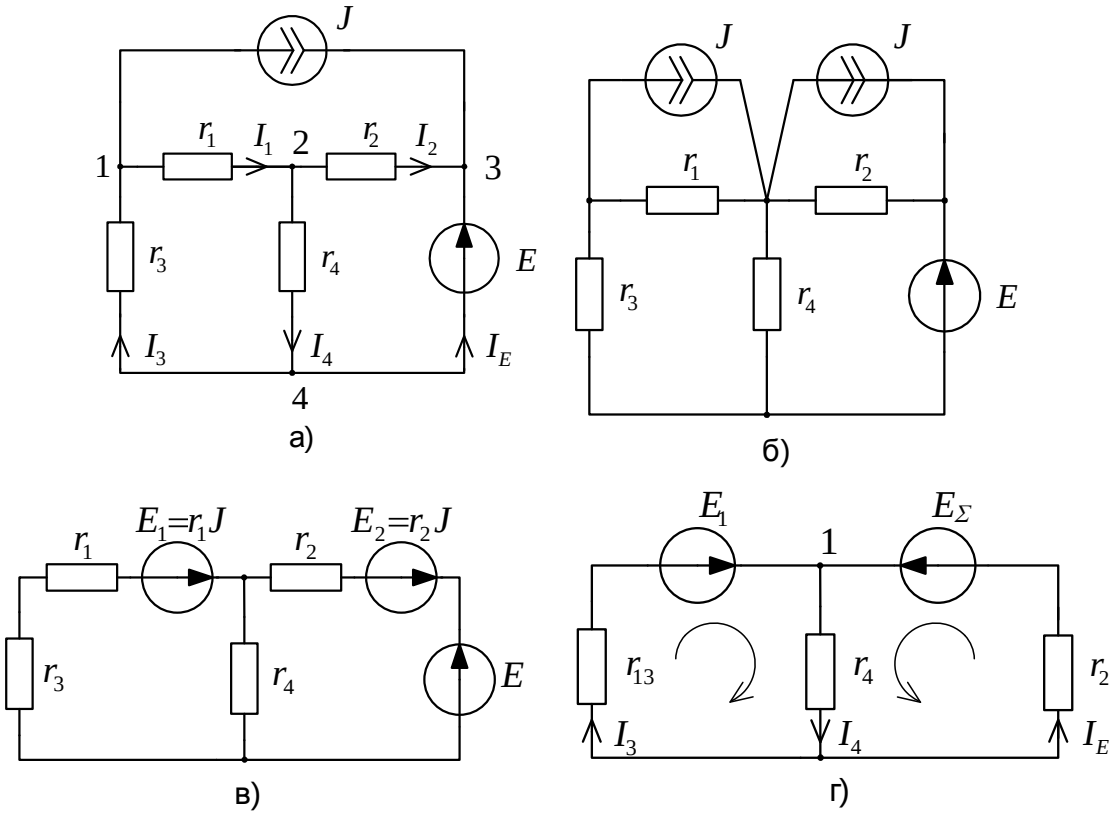


Рис. 2.13 Пример упрощения цепи: а) с идеальным источником тока; б), в), г) замещающие эквивалентные схемы.

В результате этих преобразований исходная цепь трансформируется в двухконтурную схему (рис. 2.13г), где $E_1 = r_1 J$, $E_\Sigma = E - r_2 J$, $r_{13} = r_1 + r_3$. Для расчета токов в преобразованной цепи достаточно составить три уравнения:

$$-I_3 - I_E + I_4 = 0;$$
$$r_{13} I_3 + r_4 I_4 = E_1;$$
$$r_4 I_4 + r_2 I_E = E_\Sigma.$$

В отличие от этого, анализ токов в исходной цепи требует решения системы пяти уравнений. Токи I_3, I_4 и I_E, которые можно найти в исходной и преобразованной цепи, будут иметь одинаковые численные значения. Возвращаясь к анализу исходной цепи, найдём через них недостающие токи: $I_1 = I_3 - J$, $I_2 = -J - I_E$.

2.7. Метод контурных токов

Из рассмотренного выше следует, что решение прямой задачи электротехники посредством законов Кирхгофа даже для простых задач требует составления и решения системы с большим числом уравнений. Поэтому далее будут рассмотрены методы, которые решают ту же задачу через систему уравнений меньшей размерности. Для этого используют некоторые ***формализованные переменные.***

В этом разделе рассмотрен метод *контурных токов* – МКТ, где в качестве формализованных переменных используются контурные токи. Под **контурными токами** понимают токи **независимых** контуров. Предполагается, что все контурные токи протекают (замыкаются) только в своих контурах. Чтобы не ошибиться с выбором независимых контуров, целесообразно указывать направление тока, обтекающего контур, а, следовательно, и обхода контура по ячейкам (или сотам). В этом случае каждый контур будет содержать минимальный набор элементов, а сама процедура назначения контуров позволит на каждом шаге подключать хотя бы одну новую ветвь. В отличие от ранее рассмотренного, будем считать, что независимый контур может включать как ветви первого, так и второго типа (с источниками тока). Число уравнений в системе равно числу контурных токов.

Приведенное здесь определение контурного тока не даёт гарантии, что система уравнений будет сформирована правильно, но для простых задач оно используется. Более точное определение контурного тока будет дано в разделе 3 настоящего пособия.

Метод контурных токов для цепей с ветвями первого типа

Пусть электрическая цепь включает только ветви *первого типа*, а ветви с источниками тока отсутствуют $(N_J = 0)$. Тогда число независимых контуров и, следовательно, и контурных токов определится формулой: $n = N_2 = N_B - (N_Y - 1)$. Система формализованных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + ... + R_{1n}I_{kn} &= \sum_1 E \\ R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + ... + R_{2n}I_{kn} &= \sum_2 E \\ R_{n1}I_{k1} + R_{n2}I_{k2} + ... + R_{nn}I_{kn} &= \sum_n E \end{aligned} \qquad (2.13)$$

В этой системе:

- $I_{k1}, I_{k2}, ..., I_{kn}$ – *контурные* токи, число которых совпадает с числом независимых контуров – n. Обходы по контурам совпадают с направлением действия контурных токов, которые **указываются произвольно**. Каждый ток замыкается в **собственном** контуре $(i = 1, 2, ..., n)$.
- R_{ii} – *собственное* сопротивление i- го контура. Складывается из всех сопротивлений ветвей, принадлежащих этому контуру. В систему (2.13) записывается всегда со знаком плюс <+>.
- $R_{ij} = R_{ji}$ – *взаимное* сопротивление i - го и j- го контуров $(i \neq j)$. Складывается из сопротивлений **всех ветвей**, которые лежат на границе этих контуров. В систему (2.13) записывается со знаком плюс <+>, если контурные токи в смежных ветвях совпадают по направлению, и со знаком минус <–>, если токи направлены встречно. Если контура не имеют общих ветвей, то это сопротивление приравнивается нулю.
- $\sum_i E$ – *контурная* ЭДС i- го контура. Складывается алгебраически из всех ЭДС, принадлежащих i-тому контуру. Знаки слагаемых согласуются с направлением действия контурного тока.
- Решается система уравнений, определяются контурные токи.
- Рассчитываются токи ветвей как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих в каждой ветви.

Пример 12.

Рассмотрим простую разветвленную цепь (рис. 2.14), содержащую ветви первого типа. Схема цепи имеет три независимых контура, а, следовательно, и три контурных тока – I_{k1}, I_{k2} и I_{k3}. Обходы по контурам

выбираются произвольно. Направление действия каждого контурного тока совпадает с обходом независимого контура.

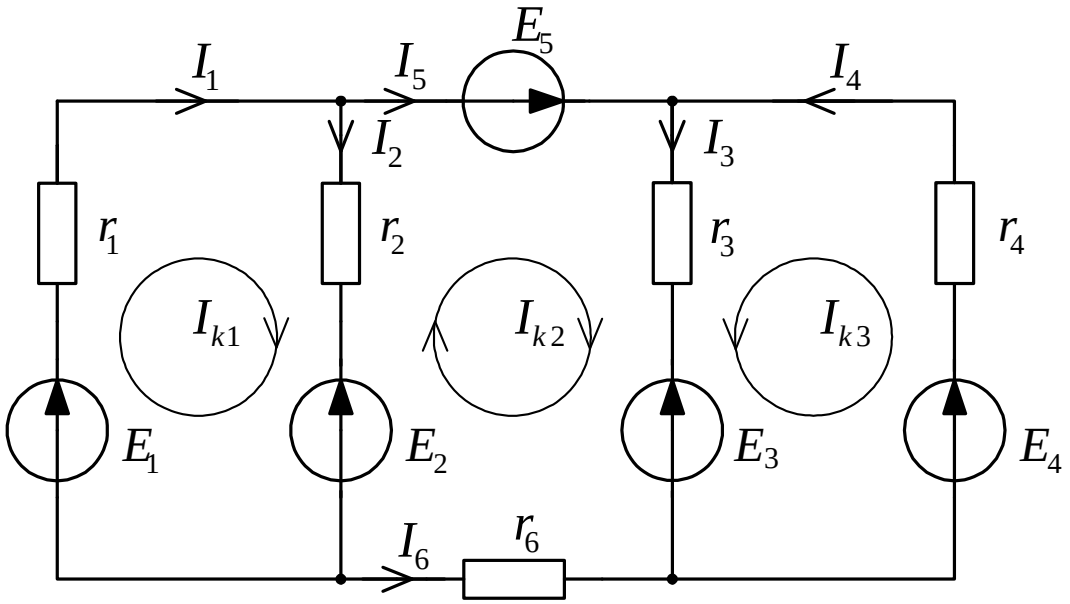


Рис. 2.14 Независимые контура и контурные токи для цепи с ветвями первого типа.

Используя алгоритм составления контурных уравнений, запишем систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{1} E \\ \sum\limits_{2} E \\ \sum\limits_{3} E \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

где $R_{11} = r_1 + r_2$, $R_{22} = r_2 + r_3 + r_6$, $R_{33} = r_3 + r_4$, $R_{12} = R_{21} = -r_2$, $R_{13} = R_{31} = 0$, $R_{23} = R_{32} = r_3$; $\sum\limits_{1} E = E_1 - E_2$, $\sum\limits_{2} E = E_2 - E_3 + E_5$, $\sum\limits_{3} E = E_4 - E_3$.

Следует заметить, что при решении этой задачи посредством законов Кирхгофа пришлось бы составить шесть уравнений.

Пусть параметры цепи имеют численные значения: $r_1 = 8$, $r_2 = 8$, $r_3 = 6$, $r_4 = 6$, $r_6 = 5$ (Ом); $E_1 = 36$, $E_2 = 12$, $E_3 = 9.6$, $E_4 = 38.4$, $E_5 = 6$ (В).

Тогда матричное уравнение (2.14) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 19 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8.4 \\ 28.8 \end{bmatrix}$$

Решение системы: $I_{k1} = 1.75$, $I_{k2} = 0.5$, $I_{k3} = 2.15$ (А).

Токи ветвей определяем как алгебраическую сумму контурных токов, протекающих в каждой ветви. При этом направления токов в ветвях указываются произвольно, что может быть сделано как до, так и **после** определения контурных токов. Для решенной задачи и выбранных направлений имеем: $I_1 = I_{k1} = 1.75$, $I_2 = I_{k1} - I_{k2} = 1.25$, $I_3 = I_{k2} + I_{k3} = 2.65$, $I_4 = I_{k3} = 2.15$, $I_5 = I_{k2} = 0.5$, $I_6 = -I_{k2} = -0.5$ (А).

Правильность решения можно проверить, определив напряжения ветвей и составив уравнения равновесия по второму закону Кирхгофа: $U_1 = r_1 I_1 - E_1 = -22$, $U_2 = r_2 I_2 + E_2 = 22$, $U_3 = r_3 I_3 + E_3 = 25.5$, $U_4 = r_4 I_4 - E_4 = -25.5$, $U_6 = r_6 I_6 = -2.5$ (В). Легко проверить, что уравнения равновесия имеют место для любых замкнутых контуров, т.е. решение верно.

Метод контурных токов для цепей с ветвями первого и второго типа

Метод контурных токов применим и для электрических цепей, состоящих как из ветвей первого, так и второго типа. В учебной литературе этот вопрос либо не рассматривается, либо рекомендуется пользоваться эквивалентным преобразованием ветвей второго типа в ветви первого типа (раздел 1.1). Однако любое преобразование исходной цепи не всегда возможно, да и требует обратного возврата к исходной цепи, что значительно увеличивает время анализа. Поэтому эквивалентными преобразованиями следует пользоваться в крайних случаях.

Уточним понятие *независимого контура*, под которым ранее считался контур, образованный ветвями только первого типа. Токи ветвей второго типа включались в уравнения, которые составлялись по первому закону Кирхгофа, и через эти уравнения учитывалось их влияние на распределение токов в цепи. В методе контурных токов число уравнений в системе меньше, чем число неизвестных токов, и, следовательно, есть необходимость дополнительно включить информацию об источниках тока в эту систему. **Независимыми контурами в методе контурных токов будем считать контура, которые образованы как ветвями первого, так и второго типа**. Число уравнений в системе будет определено выражением: $n = N_B - (N_Y - 1)$, где N_B – общее число ветвей первого и второго типа.

Выбор контуров следует начинать с ветвей первого типа, затем – второго, и так, чтобы **в каждой ветви второго типа протекало бы не**

более одного контурного тока. Если таких токов окажется два и больше, то будет неопределённость: (Какой же ток на самом деле будет протекать в данной ветви второго типа?).

Первоначально систему уравнений можно записать по типу системы (2.13), т.е. по числу независимых контуров. Но некоторые контурные токи уже известны – это токи ветвей с уже заданными источниками тока. Поэтому каждое уравнение, которое записано для контура, управляемого ветвью второго типа, следует переписать как простое равенство: $I_{ki} = J_i$, где $i = 1,..., N_q$, (N_q – число ветвей с источниками тока). Если выполнить эту подстановку и слагаемые с известными токами перенести в правую часть уравнений, то порядок системы можно уменьшить на число известных контурных токов, и задача упростится.

Пример 13.

Решить прямую задачу электротехники Примера 5 (рис. 2.2) методом контурных токов.

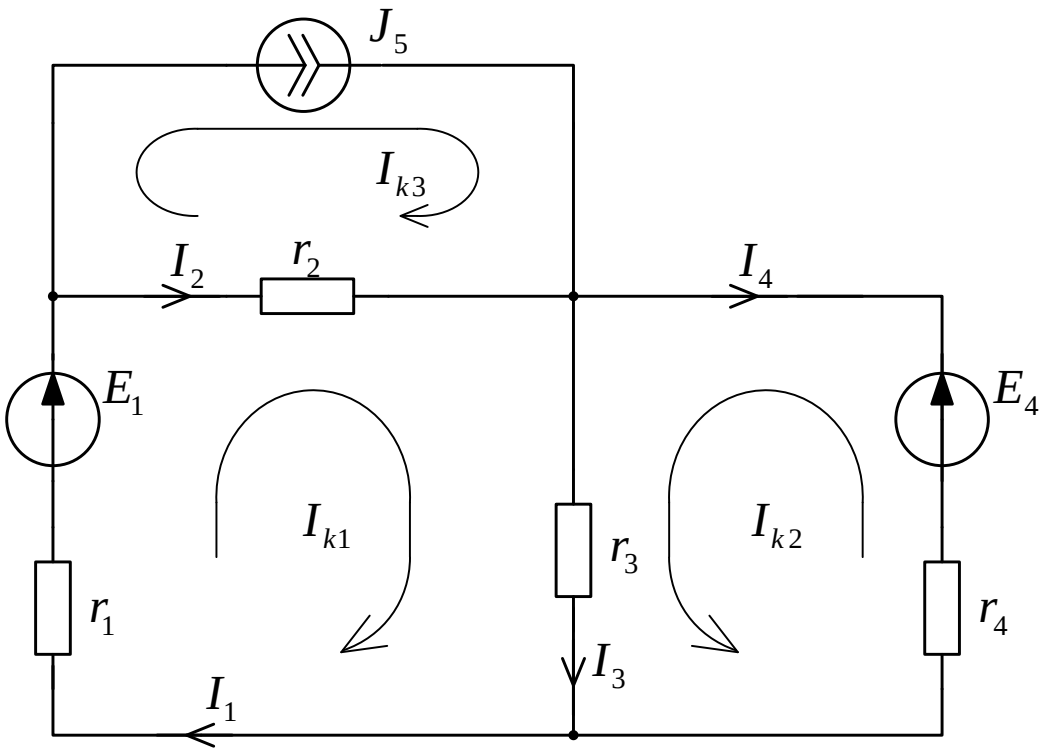


Рис. 2.15. Контурные токи для цепи с ветвями первого и второго типа.

Решение.

На рис. 2.15 изображена схема исследуемой цепи, где показана система независимых контуров. Третий контурный ток совпадает с известным током пятой ветви: $I_{k3} = J_5$ и кроме ветви с источником тока он

протекает также во второй ветви. Первые два контурных тока замыкаются в ветвях первого типа. Изначально можно записать систему трех уравнений вида (2.13):

$$\begin{aligned} R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + R_{13}I_{k3} &= \sum_1 E; \\ R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + R_{23}I_{k3} &= \sum_2 E; \\ R_{31}I_{k1} + R_{32}I_{k2} + R_{33}I_{k3} &= \sum_3 E. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Однако третье уравнение, которое составлено для третьего контурного тока, следует заменить уже известным равенством $I_{k3} = J_5$, после чего матричное уравнение системы принимает вид:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1 E \\ \sum_2 E \\ J_5 \end{bmatrix},$$

где $R_{11} = r_1 + r_2 + r_3 = 14$, $R_{22} = r_3 + r_4 = 9$, $R_{12} = R_{21} = r_3 = 6$, $R_{13} = -r_2 = -4$, $R_{23} = 0\,(\text{Ом})$; $\sum_1 E = E_1 = 16$, $\sum_2 E = E_4 = 12\,(\text{В})$, $J_5 = 6\,(\text{А})$.

Решение системы: $I_{k1} = 3.2$, $I_{k2} = -0.8$, $I_{k3} = J_5 = 6$ (А).

Токи ветвей находим как алгебраическую сумму контурных токов для каждой ветви, предварительно указав для них условные положительные направления: $I_1 = I_{k1} = 3.2$, $I_2 = I_{k1} - I_{k3} = -2.8$, $I_3 = I_{k1} + I_{k2} = 2.4$, $I_4 = -I_{k2} = 0.8\,(\text{А})$. Найденные здесь значения токов равны полученным ранее в Примере 5.

Задача решена.

Рассмотренные примеры и сам метод показывают, что введение контурных токов дает возможность исключить из системы уравнений Кирхгофа все уравнения, составленные по первому закону, и сохранить уравнения только для контуров. Следовательно, этот метод особенно выгоден для цепей с большим числом узлов и относительно малым числом контуров. Альтернативой этому методу служит *метод узловых потенциалов* (напряжений), который рассмотрен далее.

2.8. Метод узловых потенциалов

В методе *узловых потенциалов* в качестве вспомогательных ***формализованных переменных*** используют потенциалы узловых точек. Так как токи ветвей определяются не потенциалами узлов, а разностью потенциалов, т.е. напряжениями ветвей, то потенциал любого узла (обычно последнего по номеру) приравнивается нулю. Этот узел считается *базисным – зависимым узлом*, и тогда вместо потенциалов узлов можно говорить о напряжениях, которые будут иметь место между узловыми точками и базисным узлом. Все эти напряжения можно измерить с помощью вольтметра или осциллографа. Число уравнений в системе равно числу независимых узлов: $n = N_Y - 1$. Метод узловых потенциалов (или метод узловых напряжений) целесообразно применять для сложных цепей с большим числом ветвей и небольшим числом узлов.

Система линейных уравнений для искомых потенциалов узлов имеет вид

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - \ldots - G_{1n}\varphi_n &= \sum_1 J + \sum_1 Eg \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - \ldots - G_{2n}\varphi_n &= \sum_2 J + \sum_2 Eg \\ -G_{n1}\varphi_1 - G_{n2}\varphi_2 + \ldots + G_{nn}\varphi_n &= \sum_n J + \sum_n Eg \end{aligned} \qquad (2.16)$$

В этой системе:

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – искомые потенциалы, число которых совпадает с числом независимых узлов: $n = N_Y - 1$. Нумерация узлов и потенциалов произвольна. Последний по номеру $(n+1)$ узел считается зависимым (базисным) узлом, его потенциал приравнивается нулю.
- G_{ii} – *собственная* проводимость i - го узла. Складывается из всех проводимостей ветвей, присоединенных к этому узлу. В систему (2.16) записывается всегда со знаком плюс <+>.
- $G_{ij} = G_{ji}$ – *взаимная* проводимость i - го и j - го узла $(i \neq j)$. Складывается из проводимостей всех ветвей, которые непосредственно связывают эти узловые точки. В систему (2.16) записывается всегда со знаком минус <–>, и этот **знак заранее включён в систему.**

Таким образом, все диагональные члены должны быть положительными, а вне диагонали – отрицательными.

- $\sum_i J$ – первая составляющая *узлового тока* для i - того узла, обусловленная ветвями **второго** типа. Складывается алгебраически из всех заданных источников токов, присоединённых к i - тому узлу.

- $\sum_i Eg$ – вторая составляющая *узлового тока* для i- того узла, обусловленная ветвями **первого** типа, которые присоединены к i - тому узлу. Складывается алгебраически из произведений ЭДС на собственную проводимость для всех ветвей, присоединённых к i- тому узлу.

Обе составляющие *узлового тока* записываются со знаком плюс <+>, если источники энергии направлены в узел, и со знаком <–>, если от узла.

- Решается система уравнений, определяются *потенциалы независимых узлов*. Эти потенциалы **не всегда совпадают** с напряжениями реальных ветвей; любой из них следует понимать как напряжение, измеряемые вольтметром между данным узлом и базисным (зависимым) узлом, потенциал которого принят за ноль.
- Определяются напряжения ветвей как разность потенциалов смежных узловых точек, связанных между собой ветвями первого или второго типа:

$$U_k = U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j .$$

В этом выражении предполагается, что потенциал узла i выше потенциала узла j, что автоматически предполагает выбор положительного направления напряжения для k- той ветви $U_k = U_{ij}$ от i - того узла к j- тому. Соответственно и положительное направление тока автоматически указывается в ту же сторону. Это исключает появление знака минус <–> в обобщённой форме закона Ома, с помощью которого определяются токи ветвей (знак может меняться только у ЭДС E_k).

- По обобщённой форме закона Ома определяют токи в ветвях первого типа:

$$I_k = g_k(U_k + E_k) = g_k(\varphi_i - \varphi_j + E_k) .$$

Токи ветвей второго типа уже заданы источниками тока и не требуют дополнительного анализа, а напряжения ветвей уже определены предыдущим пунктом.

Пример 14.

Решим задачу по расчету напряжений и токов в цепи (рис. 2.16) *методом узловых потенциалов*.

Так как в этом методе в качестве расчетных переменных используют потенциалы, то *условные положительные направления токов ветвей следует указывать в конце расчета, согласуя их с уже выбранными положительными направлениями напряжений ветвей.*

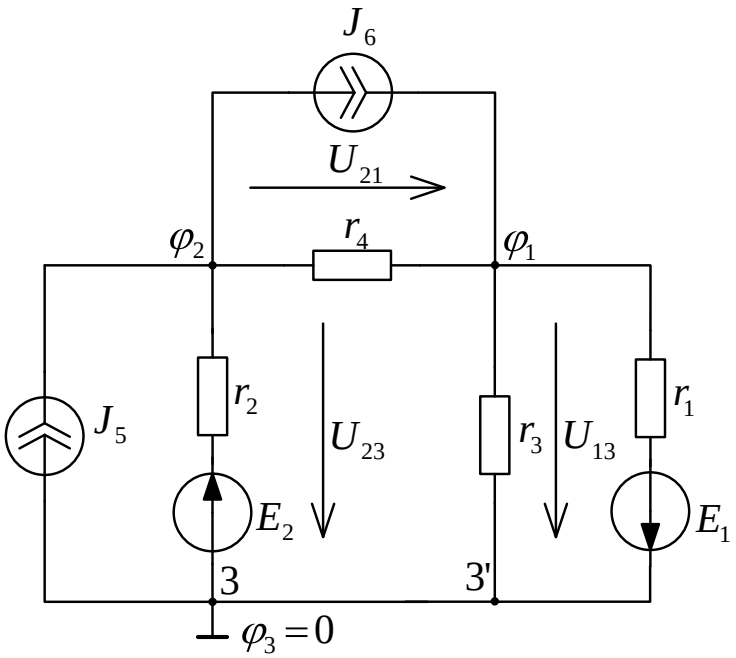


Рис. 2.16. Узловые потенциалы (или напряжения) для разветвлённой цепи с источниками двух типов.

Схема имеет три узловые точки, потенциал последнего по номеру (базисного) узла полагаем нулевым: $\varphi_3 = 0$. Требуется определить потенциалы узлов φ_1 и φ_2.

Систему уравнений формируем по указанному выше правилу:

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 &= \sum_1 J + \sum_1 Eg \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 &= \sum_2 J + \sum_2 Eg \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Здесь $G_{11} = g_1 + g_3 + g_4 + g_6$, $G_{22} = g_2 + g_4 + g_5 + g_6$, $G_{12} = G_{21} = g_4 + g_6$; $\sum_1 J + \sum_1 Eg = J_6 - E_1 g_1$, $\sum_2 J + \sum_2 Eg = J_5 - J_6 + E_2 g_2$.

Пусть параметры цепи имеют численные значения: $r_1 = 4$, $r_2 = 1$, $r_3 = 4$, $r_4 = 5$(Ом); $E_1 = 8$, $E_2 = 16$(В); $J_5 = 8$, $J_6 = 4$ (А). Проводимости ветвей определяем как величины обратные сопротивлениям: $g_1 = 0.25$, $g_2 = 1$, $g_3 = 0.25$, $g_4 = 0.2$ (См), а $g_5 = 0$, $g_6 = 0$ (См), т.к. проводимость идеального источника тока равна нулю. Тогда матричное уравнение для системы (2.17) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Решение системы: $\varphi_1 = 8$, $\varphi_2 = 18$ (В). *Напряжения ветвей* (не путать с потенциалами и узловыми напряжениями) найдём как разность потенциалов соответствующих узловых точек. Для этого укажем их положительные направления (произвольно). На схеме они показаны стрелкой. Имеем $U_{13} = U_1 = U_3 = \varphi_1 - \varphi_3 = 8$, $U_{21} = U_4 = U_6 = \varphi_2 - \varphi_1 = 10$, $U_{23} = U_2 = U_5 = \varphi_2 - \varphi_3 = 18$ (В).

Теперь, когда напряжения ориентированы и вычислены, можно найти токи ветвей по обобщённой форме закона Ома, предполагая, естественно, что токи совпадают с указанными направлениями напряжений (на схеме не отмечены): $I_1 = g_1(U_1 + E_1) = 4$, $I_2 = g_2(U_2 - E_2) = 2$, $I_3 = g_3 U_3 = 2$, $I_4 = g_4 U_4 = 2$ (А).

Правильность решения задачи можно проверить по первому закону Кирхгофа для любой узловой точки. Например, для узла 1: $I_1 + I_3 - I_4 - J_6 = 2 + 4 - 2 - 4 = 0$.

Задача решена.

Пример 15.

Решим прямую задачу электротехники по расчету напряжений и токов для цепи (рис. 2.17) *методом узловых потенциалов*. Особенностью этой задачи является наличие ветви с идеальным источником ЭДС, проводимость которой равна бесконечности. В этом случае можно предложить два пути решения задачи.

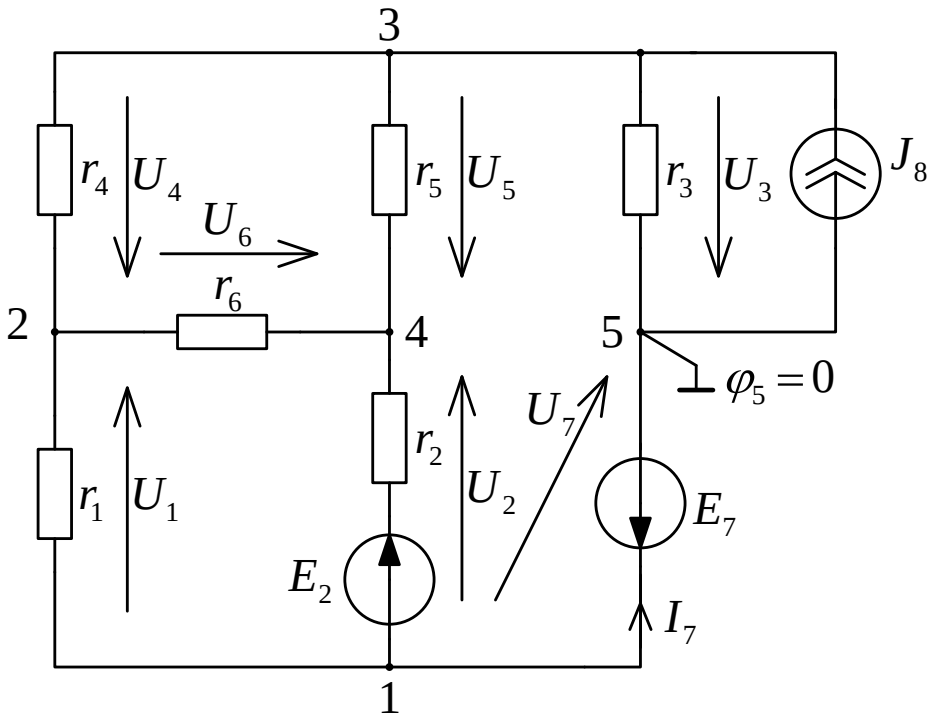


Рис. 2.17. К примеру 15. Метод узловых потенциалов (первый путь решения).

Первый путь заключается в замене уравнений равновесия для потенциалов узловых точек, к которым присоединена вырожденная ветвь первого типа, на другое условие, где проводимость этой ветви не участвовала бы в решении. Если, например, в качестве зависимого узла с нулевым потенциалом считать узел 5, то потенциал первого узла будет иметь потенциал $\varphi_1 = E_7$, и это равенство должно заменить уравнение в системе, которое составляется для первой узловой точки. Остальные уравнения не имеют особенностей и составляются по общему правилу:

$$\begin{aligned} 1\cdot\varphi_1 &= E_7 \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - G_{24}\varphi_4 &= \sum_2 J + \sum_2 Eg \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 - G_{34}\varphi_4 &= \sum_3 J + \sum_3 Eg \\ -G_{41}\varphi_1 - G_{42}\varphi_2 - G_{43}\varphi_3 + G_{44}\varphi_4 &= \sum_4 J + \sum_4 Eg \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Здесь $G_{21} = g_1$, $G_{22} = g_1 + g_4 + g_6$, $G_{23} = G_{32} = g_4$, $G_{24} = G_{42} = g_6$, $G_{31} = 0$, $G_{33} = g_3 + g_4 + g_5$, $G_{34} = G_{43} = g_5$, $G_{41} = g_2$, $G_{44} = g_2 + g_5 + g_6$, $\sum_2 J + \sum_2 Eg = 0$, $\sum_3 J + \sum_3 Eg = J_8$, $\sum_4 J + \sum_4 Eg = E_2 g_2$.

С учётом известного потенциала $\varphi_1 = E_7$ можно понизить (но не обязательно) порядок системы на единицу, если выполнить эту подстановку и перенести известные слагаемые в правую часть уравнений:

$$\begin{aligned} G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - G_{24}\varphi_4 &= \sum_2 J + \sum_2 Eg + E_7 G_{21} \\ -G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 - G_{34}\varphi_4 &= \sum_3 J + \sum_3 Eg + E_7 G_{31} \\ -G_{42}\varphi_2 - G_{43}\varphi_3 + G_{44}\varphi_4 &= \sum_4 J + \sum_4 Eg + E_7 G_{41} \end{aligned}$$

Пусть, например, известны параметры цепи: $r_1 = r_2 = r_3 = 2$, $r_4 = r_5 = r_6 = 4\,(\text{Ом})$; $E_2 = E_7 = 6\,(\text{В})$; $J_8 = 3\,(\text{А})$. Соответственно определяются проводимости ветвей: $g_1 = g_2 = g_3 = 0.5$, $g_4 = g_5 = g_6 = 0.25$ (См). После подстановки расчетных данных в (2.18), или эквивалентную ей систему, получим решение: $\varphi_1 = 6$, $\varphi_2 = 7.2$, $\varphi_3 = 7.2$, $\varphi_4 = 9.6$, $\varphi_5 = 0$ (В). Напряжения ветвей находим как разность потенциалов с учётом их условных положительных направлений, которые следует указать после определения потенциалов узлов: $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2 = -1.2$, $U_2 = \varphi_1 - \varphi_4 = -3.6$,

$U_3 = \varphi_3 - \varphi_5 = 7.2$, $U_4 = \varphi_3 - \varphi_2 = 0$, $U_5 = \varphi_3 - \varphi_4 = -2.4$, $U_6 = \varphi_2 - \varphi_4 = -2.4$ (В). Напряжение на резисторе второй ветви $U_{r2} = U_2 + E_2 = 2.4$ (В).

Токи ветвей определим по обобщённой форме закона Ома (2.1б): $I_1 = g_1 U_1 = -0.6$, $I_2 = g_2(U_2 + E_2) = 1.2$, $I_3 = g_3 U_3 = 3.6$, $I_4 = g_4 U_4 = 0$, $I_5 = g_5 U_5 = -0.6$, $I_6 = g_6 U_6 = -0.6$, $I_7 = -I_1 - I_2 = J_8 - I_3 = -0.6$ (А).

Следует иметь в виду, что направление тока I_7 в вырожденной ветви выбирается произвольно, здесь оно выбрано совпадающим с направлением для напряжения U_7.

Правильность решения можно проверить по первому закону Кирхгофа, составив балансные уравнения для узловых точек. Например, для третьего узла имеем $-J_8 + I_3 + I_4 + I_5 = -3 + 3.6 + 0 - 0.6 = 0$. Справедливы также и уравнения равновесия, составленные для контуров.

Второй путь решения задачи методом *узловых потенциалов* при наличии ветвей с идеальными источниками ЭДС заключается в переносе действия этих источников через узловые точки в смежные ветви, что в конечном итоге приводит к исключению вырожденных ветвей из исследуемой цепи. Этот приём описан в разделе 2.6 настоящего пособия. При этом число узловых точек уменьшается на число вырожденных ветвей, а, следовательно, уменьшается и порядок системы уравнений. В цепи (рис. 2.17) источник E_7 можно перенести через узел 1 в первую и во вторую ветвь, тогда узлы 1 и 5 можно объединить. Получим эквивалентную для анализа схему (рис. 2.18), где $E_1' = E_7$, $E_2' = E_2 + E_7$.

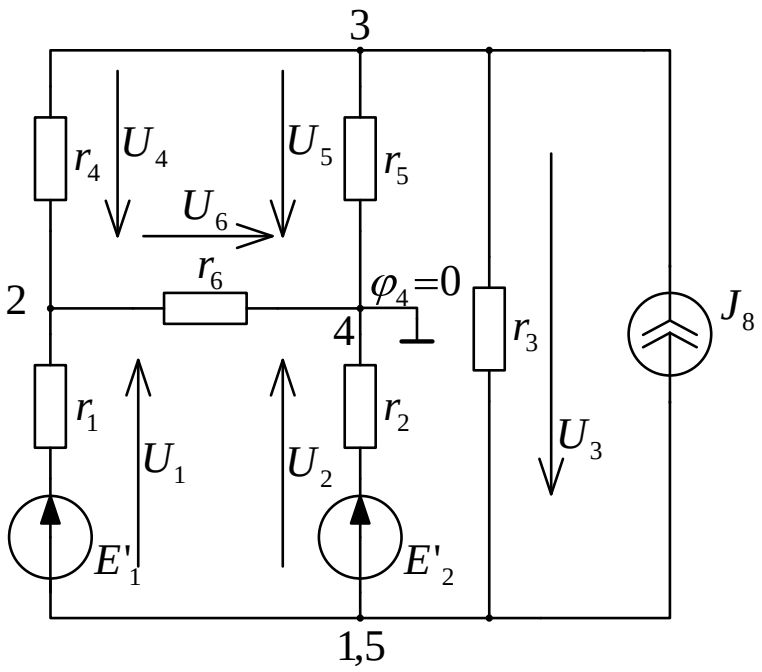


Рис. 2.18. К примеру 15 для метода узловых потенциалов (второй путь решения).

В качестве зависимого узла (с нулевым потенциалом) будем считать узел 4: $\varphi_4 = 0$. Тогда система уравнений примет вид:

$$
\begin{aligned}
(g_1 + g_2 + g_3)\varphi_1 - g_1\varphi_2 - g_3\varphi_3 &= -J_8 - g_1E_1' - g_2E_2' \\
-g_1\varphi_1 + (g_1 + g_4 + g_6)\varphi_2 - g_4\varphi_3 &= g_1E_1' \\
-g_3\varphi_1 - g_4\varphi_2 + (g_3 + g_4 + g_5)\varphi_3 &= J_8 .
\end{aligned}
$$

После подстановки численных значений параметров получим решение: $\varphi_1 = -9.6$, $\varphi_2 = -2.4$, $\varphi_3 = -2.4$ (В).

Напряжения ветвей находим после указания их условных положительных направлений: $U_1 = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -7.2$, $U_2 = U_{14} = \varphi_1 - \varphi_4 = -9.6$, $U_3 = U_{31} = \varphi_3 - \varphi_1 = 7.2$, $U_4 = U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = 0$, $U_5 = U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4 = -2.4$, $U_6 = U_{24} = \varphi_2 - \varphi_4 = -2.4$ (В). По сравнению с ранее приведённым решением напряжения первой и второй ветви изменились численно, что обусловлено структурным изменением этих ветвей по сравнению с исходной задачей. Однако напряжения на резистивных сопротивлениях этих ветвей, а, следовательно, и токи остались прежними: $U_{r1} = U_1 + E_1' = -1.2$, $U_{r2} = U_2 + E_2' = 2.4$ (В).

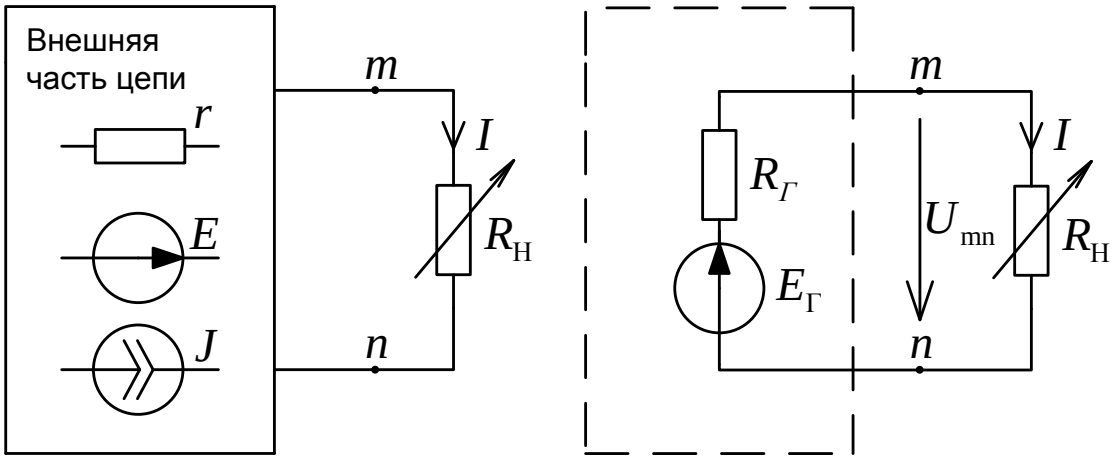
Положительные направления токов ветвей совпадают с напряжениями ветвей (на схеме рис. 2.18 не показаны). Токи численно совпадают с ранее полученным решением: $I_1 = g_1(U_1 + E_1') = -0.6$, $I_2 = g_2(U_2 + E_2') = 1.2$, $I_3 = g_3U_3 = 3.6$, $I_4 = g_4U_4 = 0$, $I_5 = g_5U_5 = -0.6$, $I_6 = g_6U_6 = -0.6$ (А).

Задача решена.

2.9. Метод эквивалентного генератора

Метод основан на замене любого участка цепи эквивалентной схемой замещения, которая включает источник напряжения и некоторое внутреннее сопротивление. Необходимость такой замены возникает при расчете величины тока в каком – либо одном элементе электрической цепи, которое называют сопротивлением нагрузки R_H (рис. 2.19а). Предполагается, что это сопротивление может изменяться в широких пределах при неизменных значениях параметров остальной части цепи.

В теории электрических цепей доказывается, что при решении такого рода задач можно заменить внешнюю часть цепи последовательной схемой замещения (рис. 2.19б), включающей источник напряжения E_Γ и внутреннее сопротивление R_Γ. В совокупности эта схема называется *эквивалентным генератором*.



а) б)

Рис. 2.19. Фрагмент сложной цепи: а) с выделенным сопротивлением нагрузки; б) с эквивалентным генератором и одноконтурной цепью.

Если удается найти параметры E_Γ и R_Γ, то ток в одноконтурной цепи находится по формуле:

$$I = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_H}. \qquad (2.19)$$

Уравнение равновесия цепи имеет вид: $E_\Gamma = U_{mn} + R_\Gamma I$ или $E_\Gamma - U_{mn} = R_\Gamma I$. Напряжение нагрузки $U_{mn} = R_H I$ может изменяться от нуля, когда $R_H = 0$ (режим короткого замыкания) и до значения $U_{mn} = E_\Gamma$, когда $R_\Gamma = \infty$ (режим холостого хода). Проведённый анализ позволяет предложить опытный способ определения параметров эквивалентного генератора: 1) разрывается цепь нагрузки (режим ХХ) и измеряется с помощью вольтметра напряжение на разомкнутых зажимах, которое равно ЭДС эквивалентного генератора: $E_\Gamma = U_{mnXX}$; 2) сопротивление нагрузки замыкается накоротко (режим КЗ) и с помощью амперметра измеряется ток короткого замыкания – I_K, что даёт возможность вычислить сопротивление $R_\Gamma = \frac{E_\Gamma}{I_K}$.

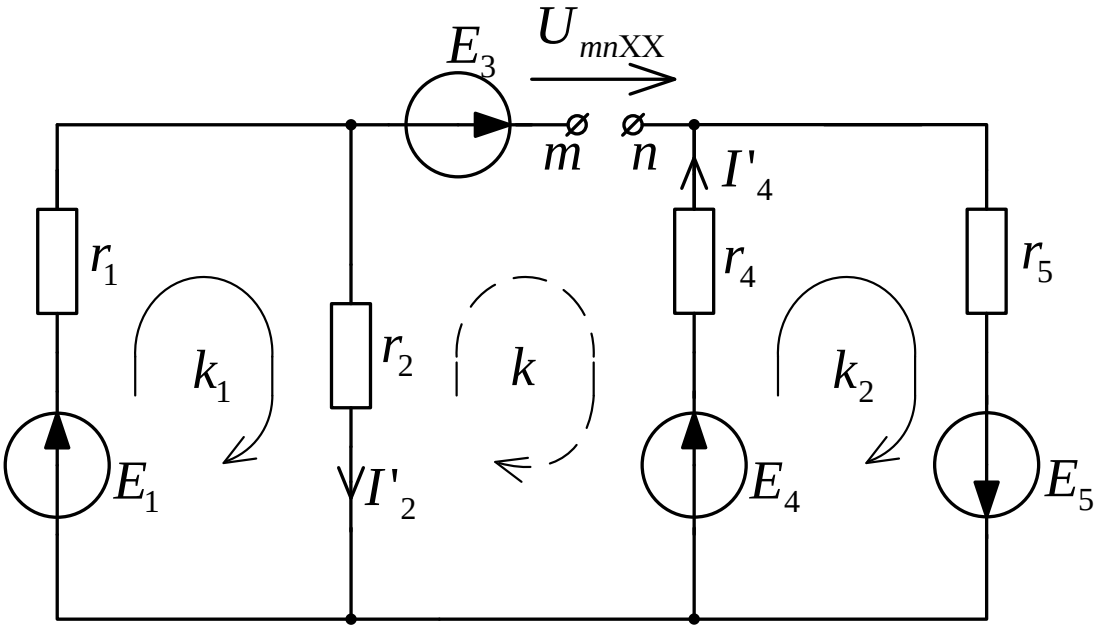
Параметры эквивалентного генератора можно рассчитать, исследуя схему электрической цепи. Для этого предлагается следующий порядок действий:

- Исключают из цепи ветвь с сопротивлением нагрузки, заменяя его разомкнутыми зажимами.
- Разомкнутые зажимы маркируют символами m, n (или другими).

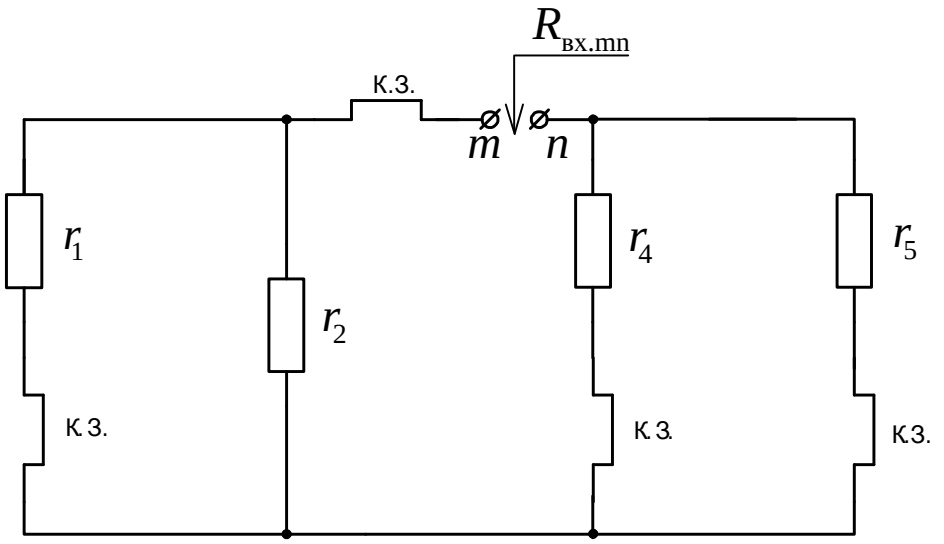
- Используя любой расчетный метод, определяют напряжение холостого хода на зажимах m,n, которое численно равно ЭДС генератора: $E_\Gamma = U_{mnXX}$.
- Исключают из исследуемой цепи все источники энергии: источники напряжения замыкают накоротко, источники токов – разрывают.
- Объединяя последовательно и параллельно соединённые резистивные сопротивления, находят входное сопротивление внешней части цепи $R_{вх.mn}$ со стороны разомкнутых зажимов m,n. Это сопротивление и будет равно сопротивлению генератора: $R_\Gamma = R_{вх.mn}$.
- По формуле (2.19) определяют ток в нагрузке, где сопротивление R_H может принимать любые значения, а параметры генератора, замещающего внешнюю цепь, остаются неизменными.

Пример 16.

В цепи (рис. 2.3) определить ток третьей ветви I_3 методом эквивалентного генератора. Численные данные параметров цепи взять из Примера 6: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2.4$, $r_4 = 4$, $r_5 = 6$ (Ом); $E_1 = 12$, $E_3 = 12$, $E_4 = 24$, $E_5 = 18$ (В).



а)



б)

Рис. 2.20. К примеру 16: а) расчета ЭДС эквивалентного генератора; б) расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора.

Решение.

Схема цепи (рис. 2.20а) повторяет схему (рис. 2.3), где вместо сопротивления третьей ветви r_3 изображены разомкнутые зажимы m,n, на которых следует определить напряжение холостого хода U_{mnXX}. Это напряжение можно найти из любого контура, составив уравнение равновесия по второму закону Кирхгофа. В примере выбран контур k, показанный на схеме пунктиром. Имеем:

$$U_{mnXX} - r_2 I_2^{'} - r_4 I_4^{'} = E_3 - E_4 \quad \text{или} \quad E_\Gamma = U_{mnXX} = r_2 I_2^{'} + r_4 I_4^{'} + E_3 - E_4. \quad (2.20)$$

Здесь $I_2^{'}$ и $I_4^{'}$ расчетные токи, которые протекают в преобразованной цепи. После размыкания третьей ветви исходная цепь распалась на два независимых контура, в каждом из них протекает свой расчетный ток, определяемый только внутренними источниками самого контура и входящих в него сопротивлений: $I_2^{'} = \dfrac{E_1}{r_1 + r_2} = 2.4$ и $I_4^{'} = \dfrac{E_4 + E_5}{r_4 + r_5} = 4.2$ (А). После подстановки численных данных в уравнение (2.20) получим: $E_\Gamma = U_{mnXX} = 12$ (В).

Определение *внутреннего сопротивления* эквивалентного генератора R_Γ следует начинать с удаления всех источников энергии из преобразованной цепи. В задаче это источники напряжения, их заменяем короткозамкнутыми перемычками (рис. 2.20б). Входное сопротивление со стороны разомкнутых зажимов, которое численно равно R_Γ, находим как

$$R_{\Gamma} = R_{вх.mn} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = 3.6 \text{ (Ом)}.$$

После подстановки полученных значений в формулу (2.19) найдём ток третьей ветви: $I_3 = \dfrac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + r_3} = 2$ (А). Такой же результат получен в Примере 6. Задача решена правильно.

Пример 17.

В цепи (рис. 2.2) определить ток четвёртой ветви I_4 методом эквивалентного генератора. Численные данные параметров цепи взяты из Примера 5: $r_1 = 4$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$, $r_4 = 3$(Ом); $E_1 = 16$, $E_4 = 12$ (В); $J_5 = 6$ (А).

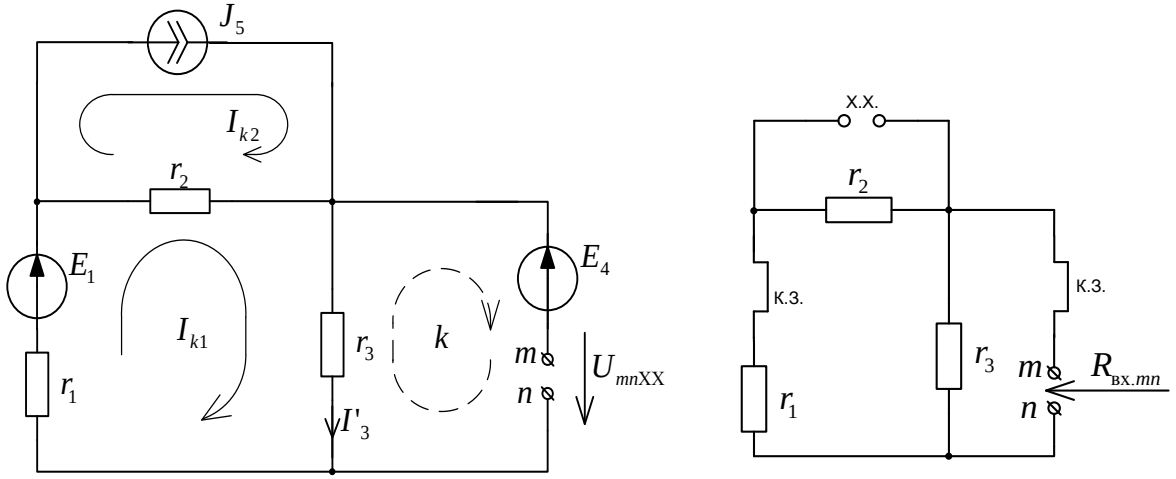


Рис. 2.21. К примеру 17: а) расчета ЭДС эквивалентного генератора; б) расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора.

Решение.

Схема цепи (рис. 2.21а) повторяет схему (рис. 2.2), где вместо сопротивления четвёртой ветви r_4 изображены разомкнутые зажимы m,n, на которых следует определить напряжение холостого хода U_{mnXX}. Это напряжение, численно равное ЭДС эквивалентного генератора E_{Γ}, можно найти из любого контура, составив уравнение равновесия по второму закону Кирхгофа. В примере выбран контур k, показанный на схеме пунктиром. Имеем:

$$U_{mnXX} - r_3 I_3^{'} = -E_4 \qquad \text{или} \qquad E_{\Gamma} = U_{mnXX} = r_3 I_3^{'} - E_4 . \qquad (2.21)$$

Здесь $I_3^{'}$ *расчетный* ток, который протекает в преобразованной цепи. После размыкания четвёртой ветви этот ток можно найти любым известным методом, например, *методом контурных токов*. В преобразованной цепи (рис. 2.21а) указаны два независимых контура, где протекают контурные токи I_{k1} и I_{k2}. Второй контурный ток определён источником тока J_5, и тогда оставшееся уравнение для первого контурного тока принимает вид:

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} = \sum_1 E\,,$$

где $I_{k2} = J_5 = 6\,(\text{А}),$ $R_{11} = r_1 + r_2 + r_3 = 14\,(\text{Ом}),$ $R_{12} = -r_2 = -4\,(\text{Ом}),$ $\sum_1 E = E_1 = 16\,(\text{В}).$ Искомый ток $I_3^{'} = I_{k1} = \dfrac{E_1 + r_2 J_5}{r_1 + r_2 + r_3} = \dfrac{20}{7}\,(\text{А}).$ После подстановки численных данных в уравнение (2.21) получим: $E_\Gamma = U_{mnXX} = \dfrac{36}{7}(\text{В}).$

Определение внутреннего сопротивления эквивалентного генератора R_Γ начнём с удаления всех источников энергии из преобразованной цепи. В задаче это источники напряжения E_1 и E_4, их заменяем короткозамкнутыми перемычками, а источник тока разрываем (рис. 2.21б). Входное сопротивление со стороны разомкнутых зажимов, которое численно равно внутреннему сопротивлению эквивалентного генератора R_Γ, находим как

$$R_\Gamma = R_{вх.mn} = \frac{(r_1 + r_2)r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{24}{7}\ (\text{Ом}).$$

После подстановки полученных значений в формулу (2.19) найдём ток четвёртой ветви: $I_4 = \dfrac{E_\Gamma}{R_\Gamma + r_4} = 0.8$ (А). Такой же результат получен в Примере 5. Задача решена правильно.

Приведённые примеры использования метода эквивалентного генератора показывают, что метод хорошо работает для сравнительно простых задач. Расчетная цепь при этом упрощается, как минимум, на один независимый контур. Иногда, как это показано в Примере 16, расчетная цепь распадается на два независимых друг от друга участка цепи, в каждом из которых определяются необходимые токи по упрощённому алгоритму.

Заключение

1. Решение прямой задачи электротехники, расчет токов и напряжений, действующих в цепи, возможен в результате составления и решения системы алгебраических уравнений, которые называются уравнениями равновесия. Даже для сравнительно простых задач число уравнений в системе может быть большим.

2. Специальные методы расчета, использующие формализованные переменные – *контурные токи* или *узловые потенциалы*, позволяют понизить число уравнений в системе. Однако организация алгоритма построения этих уравнений не всегда очевидна в случае наличия в цепи идеальных источников тока или напряжения.

3. Перед записью алгебраических уравнений равновесия, следует всегда помнить о взаимном соответствии положительных направлений токов и напряжений в цепи и знаков <+> и <-> у слагаемых, входящих в систему уравнений. **Достаточно ошибиться в одном знаке, и задача будет решена неправильно!**

3. Расчет электрических цепей средней сложности

3.1. Основные топологические понятия

Как было рассмотрено выше, прежде чем записать уравнения равновесия цепи, необходимо правильно определить число узловых точек и независимых контуров.

Для простых цепей, схемы которых имеют планарное (без пересечений элементов или ветвей) изображение, подсчёт узлов и независимых контуров не представляется сложным: контура выбираются по ячейкам, а узлы также находятся в видимой области исследования. Однако для цепей более сложных, имеющих десятки и сотни ветвей, этот анализ редко приводит к правильным результатам. Чтобы гарантировать правильное осуществление этого этапа исследования, следует более чётко определить основные *топологические* (геометрические) понятия: *независимый узел, независимое сечение, независимый контур*. Поскольку для определения этих понятий требуется знать только способ соединения ветвей, целесообразно убрать из рассмотрения внутреннее наполнение исследуемой цепи, заменив каждую реальную *ветвь* структурной ветвью *ориентированного графа*.

Условное упрощённое изображение схемы, в которой каждая ветвь заменяется отрезком прямой или кривой линии, называют **графом** электрической цепи. Граничные точки ветви графа называют **узлами графа**. Ветвям графа даётся определённая ориентация, указанная стрелкой. Обычно ветви графа ориентируют по выбранным условным положительным направлениям токов или напряжений ветвей.

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей N_B, числом узлов N_Y и способом соединения ветвей.

На рис. 3.1 изображен граф для цепи (рис. 2.10). Ориентация ветвей графа совпадает с выбранными произвольно направлениями токов в ветвях цепи за исключением вырожденной ветви с источником напряжения. Её ориентация должна совпадать с напряжением ветви, т.е. противоположно действию ЭДС (см. направление ветви 1 графа).

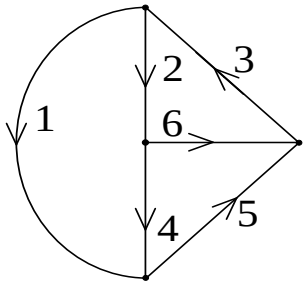


Рис. 3.1. Ориентированный (направленный) граф электрической цепи.

Ветви графа, замещающие ветви с источниками тока, ориентируются по направлению действия источников тока (см. направление ветви 6 графа).

Подграфом называют часть графа. **Деревом связного графа** (схемы) называют *связный подграф* (подсхему), содержащий все узлы графа, но ни одного замкнутого контура. Если граф (схема) имеет N_Y узлов, то число **ветвей дерева** будет на единицу меньше, что точно соответствует числу уравнений, которые следует составить по первому закону Кирхгофа: $N_D = N_1 = N_Y - 1$. Выбор дерева графа произволен. Можно выбрать дерево, например, в виде пути, соединяющего все узловые точки. Такой алгоритм используется в пакетных программах анализа цепей любой сложности, и как составную часть включает поиск дерева графа посредством ЭВМ. Для задач средней сложности построение дерева не представляет труда и, практически, исключает появление ошибки. Для анализа конкретной цепи достаточно остановиться на одном дереве.

Ветви графа, которые дополняют дерево до исходного графа, называют **ветвями связи** (дополнением дерева). Ветви связи образуют тоже связный подграф. Число ветвей связи определяется естественным равенством: $N_C = N_B - N_D$, и это число соответствует числу главных независимых контуров.

Вместо уравнений по первому закону для узлов можно составить уравнения по первому закону Кирхгофа для *сечений* (замкнутых поверхностей). **Сечением** называют любую **замкнутую поверхность,** рассекающую схему цепи (или его графа) на две части – внешнюю и внутреннюю. В частном случае радиус такой поверхности можно считать бесконечно большим, тогда замкнутая поверхность в видимой области графа будет выглядеть как *разрез*. За *положительное направление сечения* принимают направления токов из замкнутых поверхностей. Это правило повторяет аналогичное правило для узлов, т.е. любое *сечение* можно рассматривать как *обобщённый узел*, из которого вытекают токи (со знаком <+>) или втекают внутрь (со знаком минус <–>).

Главным сечением называют сечение, которое рассекает *одну ветвь дерева* и *неограниченное число ветвей связи*. Все *главные сечения независимы*, так как они включают одну новую ветвь дерева. Поэтому система уравнений, составленная для главных сечений, *автоматически будет независимой,* а число уравнений в точности соответствует числу уравнений, которые следует составить по первому закону Кирхгофа. Можно считать, что ветвь дерева управляет уравнением равновесия для токов! **За положительное направление сечения обычно принимают направление ветви дерева, и с ним сравнивают направления других ветвей, пересекающих поверхность сечения.**

Алгоритм выбора главных сечений используется при расчете сложных цепей на ЭВМ, так как он приводит всегда к правильному результату. Следует заметить, что использование узловых точек для написания уравнений равновесия для токов не поддаётся алгоритмизации, так как эти точки могут быть разнесены в изображённой схеме, и есть большая вероятность ошибки: одну и ту же точку посчитать за узел несколько раз (смотри, например, рис. 2.3).

Присоединение любой ветви связи к ветвям дерева образует с ветвями дерева замкнутый контур, который называется **главным контуром**. Все *главные контура независимы*, так как каждый из них включает новую ветвь связи. Можно считать, что каждая ветвь связи управляет своим главным контуром!

При изображении графа цепи есть необходимость различать ветви дерева и ветви связи. Кроме этого необходимо отдельно выделить ветви графа, замещающие ветви второго типа - с источниками тока. В *дерево графа* принято включать **только ветви первого типа**, а *ветвями связи* могут быть как ветви первого, так и второго типа. В дальнейшем будем изображать **ветви дерева двойной сплошной** линией; **ветви связи – одинарной сплошной линией –** для ветвей первого типа и **пунктирной** – для ветвей второго типа.

Планарным (плоским) называется такой граф, который в результате *изоморфных преобразований* может быть изображён на плоскости без пересечения ветвей. Так граф, изображенный на рис. 3.2а, содержит две пересекающиеся ветви, однако он является планарным, так как существует изоморфный ему граф, не имеющий пересечений ветвей (рис. 3.2б). Можно убедиться, что все графы, содержащие не более четырёх узлов, являются планарными.

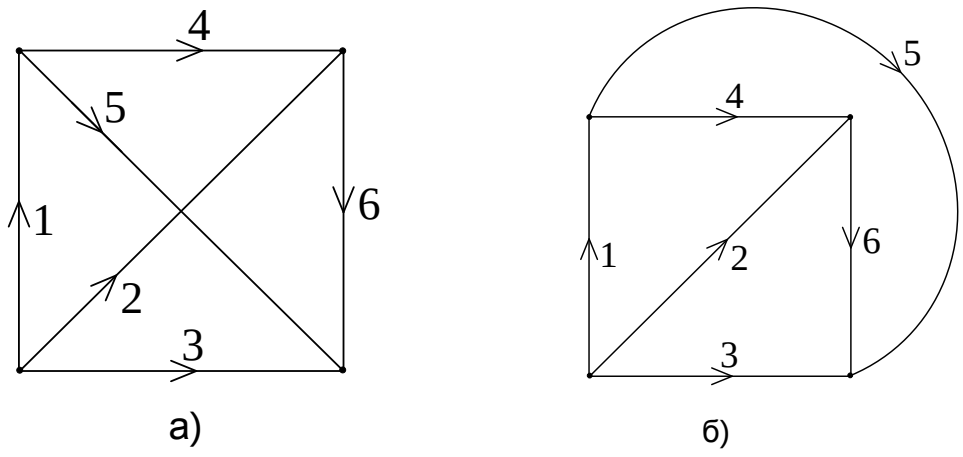


Рис. 3.2. Устранение пересечений ветвей графа с помощью изоморфных преобразований:
а) непланарный граф; б) планарный граф.

Непланарный (объёмный) граф не может быть изображен на плоскости без пересечений ветвей. *Полный пятиугольник* и *двудольный граф* (рис. 3.3) являются такими графами, их называют графами Понтрягина – Куратовского. При удалении из них любой ветви они после изоморфных преобразований становятся планарными.

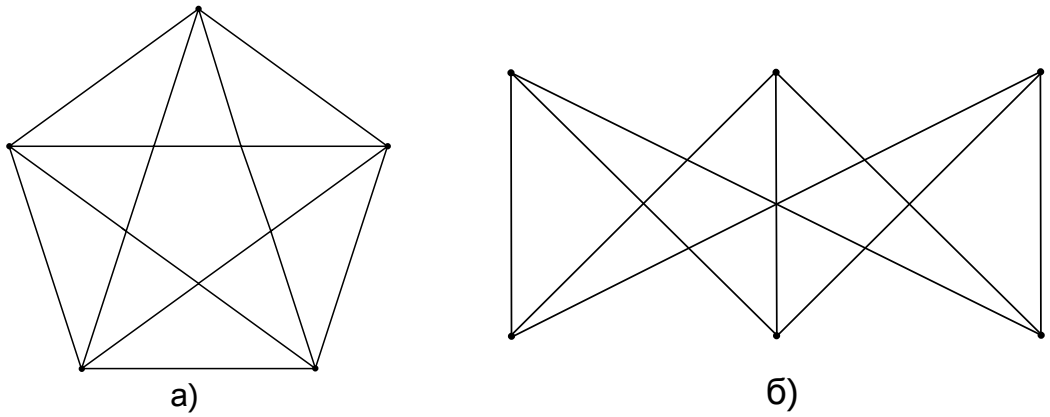


Рис. 3.3. Графы Понтрягина – Куратовского: а) полный пятиугольник; б) двудольный.

3.2. Расчет цепей с помощью топологического графа

Для первичного знакомства с методами расчета цепей, использующих понятия главных сечений и главных контуров, рассмотрим решение простой задачи, анализируя цепь, которая уже была рассмотрена ранее.

Пример 18.

На рис. 3.1 изображён граф для электрической цепи, представленной на рис. 2.10. Направления ориентации ветвей графа совпадают с условными положительными направлениями токов в ветвях цепи. В первой вырожденной ветви с заданным источником ЭДС ветвь графа *ориентируется по напряжению ветви, т.е. в обратную сторону по отношению к ЭДС*.

На рис. 3.4 представлен тот же граф с выбранным (произвольно) **деревом** – ветви 2,4,5 и **ветвями связи** – 1,3,6. Главные сечения показаны в виде замкнутых поверхностей, рассекающих схему цепи (графа) на две части, внешнюю и внутреннюю. Видно, что все *сечения независимы*, так как каждое из них пересекает одну новую ветвь дерева.

На рис. 3.5 показана система трёх главных контуров цепи (графа). Каждый главный контур образован *присоединением* ветви связи к ветвям дерева и *управляется* этой ветвью, т.е. обход каждого контура согласуется с направлением этой ветви связи. Шестая ветвь может быть только ветвью

связи, и она определяет третий главный контур, куда кроме неё входят ветви 4 и 5. Все *главные контура взаимно независимы*.

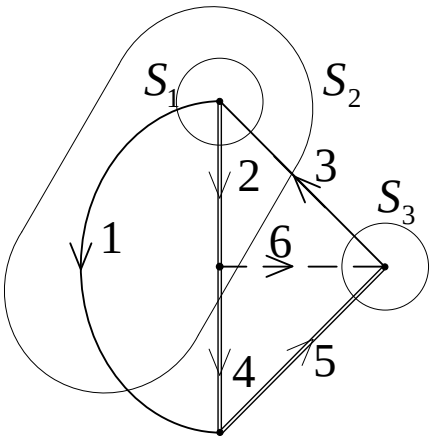


Рис. 3.4. К примеру 18.
Главные сечения.

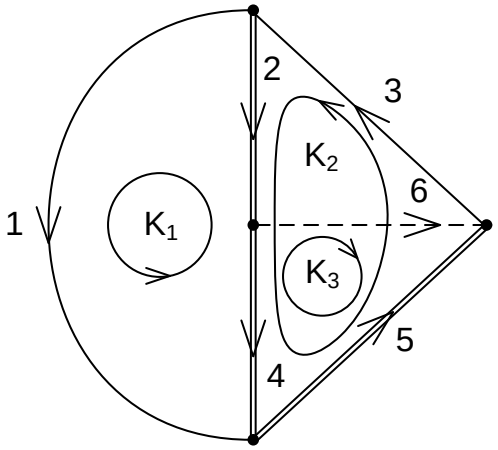


Рис. 3.5. К примеру 19.
Главные контура.

Используя образовавшиеся главные сечения и контура, можно составить уравнения равновесия цепи по законам Кирхгофа, где на первом этапе не обязательно учитывать внутреннее наполнение каждой ветви, а достаточно исследовать только граф цепи. Всего имеем 5 уравнений, из которых три уравнения составляются по первому закону Кирхгофа – для главных сечений, и два по второму закону – для главных контуров, управляемых только *ветвями первого типа:*

сечение S1	$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$
сечение S2	$I_1 - I_3 + I_4 + J_6 = 0;$
сечение S3	$I_3 - I_5 - J_6 = 0$
контур $k1$	$U_1 - U_2 - U_4 = 0;$
контур $k2$	$U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 0.$

Система уравнений получается полной и автоматически правильной!

Компонентные уравнения, которые связывают ток и напряжение в каждой отдельной ветви, записываются на основе анализа исходной цепи (рис. 2.10): $U_1 = E_1$; $U_2 = r_2 I_2 - E_2$; $U_3 = r_3 I_3 + E_3$; $U_4 = r_4 I_4$; $U_5 = r_5 I_5 - E_5$.

После подстановки в систему компонентных уравнений и записи функций источников в правой части получим систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -r_2 & 0 & -r_4 & 0 \\ 0 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_6 \\ J_6 \\ -E_1 - E_2 \\ E_2 - E_3 + E_5 \end{bmatrix}$$

Задача решается численно при заданных параметрах ветвей и величин источников энергии.

Пусть: $r_2 = 2$, $r_3 = 4$, $r_4 = 3$, $r_5 = 3$ (Ом); $E_1 = 4$, $E_2 = 6$, $E_3 = 8$, $E_5 = 2\,(\text{В})$; $J_6 = 1\,(\text{А})$. Подставив численные значения параметров элементов, получим решение матричного уравнения: $I_1 = -3.6$, $I_2 = 2.6$, $I_3 = -1$, $I_4 = 1.6$, $I_5 = -2\,(\text{А})$.

В рассмотренном примере набор независимых контуров сформировался естественным образом – присоединением ветвей связи к ветвям дерева, и этот процесс можно продолжать достаточно долго пока все ветви связи не войдут в состав какого-либо главного контура. Алгоритм этого процесса достаточно прост, он включён в пакетные программы исследования электрических цепей.

Пример 19.

Задачу, рассмотренную в Примере 18, решим **методом контурных токов**. Следует обратить внимание на то, что каждый контурный ток равен соответствующему току ветви связи, которая управляет этим контуром. Итак, можно считать, что *контурный ток – это ток ветви связи*! Таким образом, в методе контурных токов в качестве **независимых переменных** используются ***токи ветвей связи***, которые протекают как в ветвях первого, так и второго типа. Их число определяется равенством: $n = N_C = N_B - N_D$. В задаче $n = N_C = 3$.

Базисную систему уравнений записываем, ориентируясь только на граф цепи:

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + R_{13}I_{k3} = \sum_1 E;$$
$$R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + R_{23}I_{k3} = \sum_2 E;$$
$$R_{31}I_{k1} + R_{32}I_{k2} + R_{33}I_{k3} = \sum_3 E,$$

где третий контурный ток равен току источника тока: $I_{k3} = J_6 = 1\,(\text{А})$, и это равенство заменяет третье уравнение системы. После подстановки его в оставшиеся два уравнения, получим

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} = \sum_1 E - R_{13}J_6;$$
$$R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} = \sum_2 E - R_{23}J_6,$$

где $R_{11} = r_2 + r_4 = 5$, $R_{22} = r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 12$, $R_{12} = R_{21} = -r_2 - r_4 = -5$, $R_{13} = r_4 = 3$, $R_{23} = -r_4 - r_5 = -6$ (Ом); $\sum_1 E = -E_1 - E_2 = -10$ (В), $\sum_2 E = E_2 - E_3 + E_5 = 0$.

Решение системы: $I_{k1} = -3.6$, $I_{k2} = -1$ (А). Токи ветвей находим как алгебраическую сумму контурных токов, протекающих в каждой ветви: $I_1 = I_{k1} = -3.6$, $I_2 = -I_{k1} + I_{k2} = 2.6$, $I_3 = I_{k2} = -1$, $I_4 = -I_{k1} + I_{k2} - I_{k3} = 1.6$, $I_5 = I_{k2} - I_{k3} = -2$, $I_6 = I_{k3} = 1$ (А). Найденные значения токов в точности соответствуют тем же значениям Примера 18. Напряжения на ветвях первого типа: $U_2 = r_2I_2 - E_2 = -0.8$, $U_3 = r_3I_3 + E_3 = 4$, $U_4 = r_4I_4 = 4.8$, $U_5 = r_5I_5 - E_5 = -8$ (В).

<u>Как следствие найдём</u>:

а) Напряжения между любыми двумя точками. Например, напряжение между точками m и n (рис. 2.10), которое находим из контура: $U_{r2} + U_{r3} + U_{mn} = 0$.

$$U_{mn} = -r_2I_2 - r_3I_3 = -1.2\,(\text{В})$$

б) Напряжение на источнике тока, которое можно найти из любого контура, включающего это напряжение. Например, для контура $k3$: $-U_4 - U_5 + U_6 = 0$.

$$U_6 = U_4 + U_5 = -3.2\,(\text{В}).$$

в) Мощности, отдаваемые в цепь источниками: $P_{E1} = E_1(-I_1) = 14.4$, $P_{E2} = E_2I_2 = 15.6$, $P_{E3} = E_3(-I_3) = 8$, $P_{E5} = E_5I_5 = -4$, $P_{J6} = -J_6U_6 = 3.2$ (Вт).

Из пяти источников энергии, действующих в цепи, четыре отдают энергию, а один – в пятой ветви – получают энергию за счёт энергии других источников. Следует обратить внимание на то, что все найденные численные значения *токов* и *напряжений* подставляются в формулы для мощностей *со своими знаками*, и это обеспечивает физически правильный результат.

г) Мощности, потребляемые в резистивных элементах цепи: $P_{r2} = r_2I_2^2 = 13.52$, $P_{r3} = r_3I_3^2 = 4$, $P_{r4} = r_4I_4^2 = 7.68$, $P_{r5} = r_5I_5^2 = 12$ (Вт).

д) Проверка баланса мощностей – суммарная мощность, отдаваемая источниками энергии, должна равняться суммарной мощности, потребляемой в резисторах. Для решённой задачи имеем: $\sum P_E + \sum P_J = \sum r_k I_k^2 = 37.2\,(\text{Вт})$.

Пример 20.

Рассмотрим более сложную цепь (рис. 3.6), которая содержит несколько источников энергии, из них три источника тока. Топологию такой цепи с определением независимых контуров уже трудно оценить, не исследуя топологический граф цепи (рис. 3.7). Такую задачу можно считать задачей средней сложности.

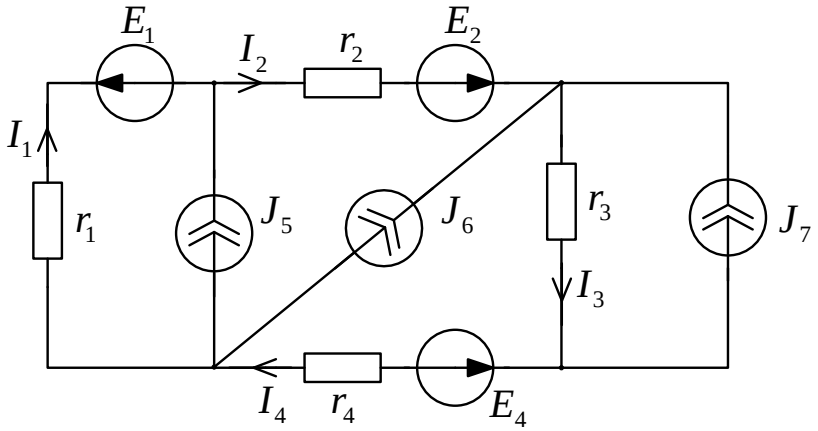


Рис. 3.6. К примеру 20. Цепь средней сложности.

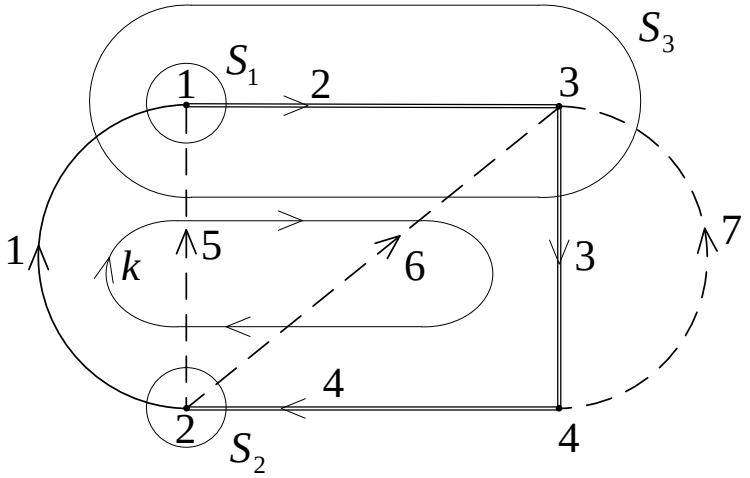


Рис. 3.7. К примеру 20. Главные сечения и независимый контур графа.

Анализ графа даёт первичные топологические характеристики: $N_B = 7$, $N_J = 3$, $N_D = 3$, $N_C = 4$, $n = N_B - N_J = 4$ $N_1 = N_D = 3$, $N_2 = n - N_1 = 1$. В качестве *ветвей дерева* выбраны ветви первого типа – 2, 3, 4; остальные ветви – 1, 5, 6, 7 будут *ветвями связи*. Всего следует составить 4 уравнения, из которых три – по первому закону Кирхгофа для

независимых узлов – 1,2,3 или сечений – S_1, S_2, S_3, и одно по второму закону для единственного главного контура k, образованному ветвью связи 1 и всеми ветвями дерева. Уравнения для сечений и единственного главного контура имеют вид:

сечение S1	$-I_1 + I_2 - J_5 = 0;$
сечение S2	$-I_1 + I_4 - J_5 - J_6 = 0$
сечение S3	$-I_1 + I_3 - J_5 - J_6 - J_7 = 0;$
контур k	$r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_3 I_3 + r_4 I_4 = -E_1 + E_2 - E_4$

Здесь за положительное направление сечения принято направление ветви дерева, и с ним сравнивают направления других ветвей, пересекающих поверхность сечения.

Вместо уравнений для сечений можно использовать уравнения для независимых узлов:

узел 1	$-I_1 + I_2 - J_5 = 0;$
узел 2	$I_1 - I_4 + J_5 + J_6 = 0;$
узел 3	$-I_2 + I_3 - J_6 - J_7 = 0;$

Предлагается самостоятельно убедиться, что та и другая система даёт один и тот же результат, например, для следующих исходных данных: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 1$, $r_4 = 3\,(\text{Ом})$, $E_1 = 12$, $E_2 = 6$, $E_4 = 18\,(\text{В})$, $J_5 = 2$, $J_6 = 1$, $J_7 = 2\,(\text{А})$. Решение задачи: $I_1 = -4.6$, $I_2 = -2.6$, $I_3 = 0.4$, $I_4 = -1.6\,(\text{А})$.

Пример 21.

Определим токи в цепи (рис. 3.6) **методом контурных токов**. Топологический граф цепи (рис. 3.8) повторяет рис. 3.7, где вместо главных сечений здесь изображена система главных контуров.

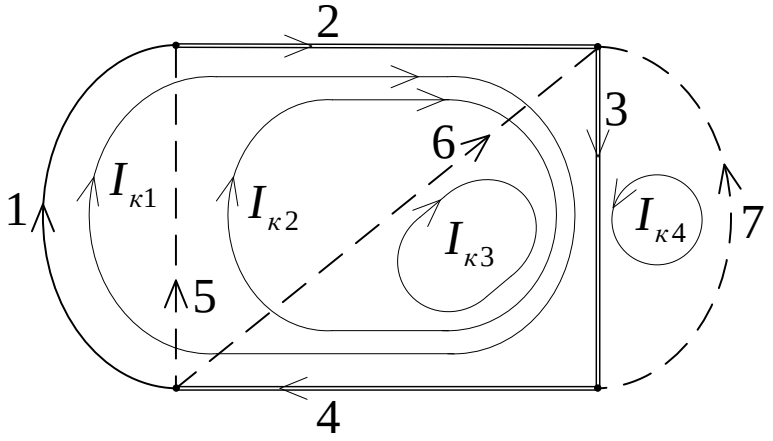


Рис. 3.8. К примеру 21. Контурные токи для главных контуров.

Для метода контурных токов анализ топологии цепи упрощается: $N_B = 7$, $N_D = 3$, $N_C = N_B - N_D = 4$.

Легко проследить, как присоединение очередной *ветви связи* образует с *ветвями дерева* главный контур. При этом каждая ветвь связи второго типа входит в контур один раз, задаёт величину и направление обхода контурного тока. В результате этой последовательности действий, независимо от сложности исследуемой цепи, автоматически формируются независимые контура и исключаются возможные ошибки. В рассматриваемой задаче четыре контурных тока, из которых известны три: $I_{k2} = J_5$, $I_{k3} = J_6$, $I_{k4} = J_7$, а первый контурный ток, совпадающий с током первой ветви, связан с остальными контурными токами единственным уравнением:

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + R_{13}I_{k3} + R_{14}I_{k4} = \sum_1 E,$$

где $R_{11} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 10$, $R_{12} = r_2 + r_3 + r_4 = 8$, $R_{13} = r_3 + r_4 = 4$, $R_{14} = r_3 = 1$(Ом); $\sum_1 E = -E_1 + E_2 - E_4 = -24$ (В).

Определяем первый контурный ток:

$$I_{k1} = \frac{\sum_1 E - R_{12}J_5 - R_{13}J_6 - R_{14}J_7}{R_{11}} = -4.6\,(\text{А}).$$

Токи в ветвях первого типа находим как алгебраическую сумму контурных токов в каждой отдельной ветви: $I_1 = I_{k1} = -4.6$, $I_2 = I_{k1} + I_{k2} = -2.6$, $I_3 = I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} + I_{k4} = 0.4$, $I_4 = I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} = -1.6\,(\text{А})$. Численные значения токов, найденные здесь и в предыдущем примере, совпадают. Напряжения на ветвях первого типа находим по обобщённой форме закона Ома: $U_1 = r_1I_1 + E_1 = 2.8$, $U_2 = r_2I_2 - E_2 = -16.4$, $U_3 = r_3I_3 = 0.4$, $U_4 = r_4I_4 + E_4 = 13.2\,(\text{В})$. Напряжение на каждом источнике тока можно найти из любого контура, включающего это напряжение. Например, из контура $k3$ найдём напряжение на источнике тока J_6, полагая, что это напряжение совпадает по направлению с действием источника: $U_6 = -U_3 - U_4 = -13.6$ (В). Если последовательно с источником тока было бы включено дополнительное сопротивление, то напряжение на источнике определялось бы с учётом падения напряжения на этом сопротивлении, в котором и протекает ток этого источника.

Мощность, которую отдаёт источник в цепь $P_6 = J_6(-U_6) = 13.6\,(\text{Вт})$. Остальные источники тока также отдают свою энергию. Предлагается

самостоятельно убедиться в этом, а также установить, какие из источников напряжения отдают (или получают) энергию.

Задача решена.

3.3. Рекомендации по формированию уравнений равновесия цепи

Как следует из рассмотренного материала, все изложенные методы формирования уравнений равновесия цепей обладают примерно одинаковыми возможностями, но имеют различную трудоёмкость. Наибольшие возможности для анализа дают уравнения равновесия, записанные на основании законов Кирхгофа, однако в этом случае требуется решение системы большого числа уравнений. Методы контурных токов – КТ и узловых потенциалов (напряжений) – УП обладают меньшей трудоёмкостью и позволяют сократить число уравнений в системе.

На практике для формирования уравнений равновесия используется тот метод, который позволяет обойтись меньшим числом независимых переменных; для метода КТ это число определено числом *ветвей связи*, а для метода УП – числом *ветвей дерева* (или числом *независимых узлов*). Если число одновременно решаемых уравнений примерно одинаково, то предпочтение следует отдать методу УП, который не требует применения достаточно трудоёмкой (особенно в случае сложных, в частности непланарных, цепей) операции по выбору системы независимых контуров. Более того, для метода УП даже не требуется исследовать граф цепи, если все независимые узлы явно выражены, т.е. не являются распределёнными, и находятся в видимой области исследования.

Пример 22.

Рассмотрим возможности исследования электрической цепи, топологические свойства которой характеризуются непланарным графом – *полным пятиугольником* (рис. 3.3а).

Если внешние ветви графа соответствуют ветвям первого типа, то в качестве *ветвей дерева* можно выбрать **путь**, соединяющий все узловые точки: например, путь, состоящий из ветвей – 7,8,9,10 (рис. 3.9). Тогда все остальные ветви – 1,2,3,4,5,6 – будут *ветвями связи*, и по ним строится система главных контуров, число которых равно числу контурных токов.

Здесь $N_B = 10$, $N_D = 4$, $n = N_C = N_B - N_D = 6$. Присоединяя ветви связи к ветвям дерева, получим набор главных контуров, а, следовательно, и систему шести контурных уравнений. На рис. 3.9 показаны два контура I_{k2} и I_{k3}, образованные присоединением ветвей связи 2 и 3 к ветвям дерева.

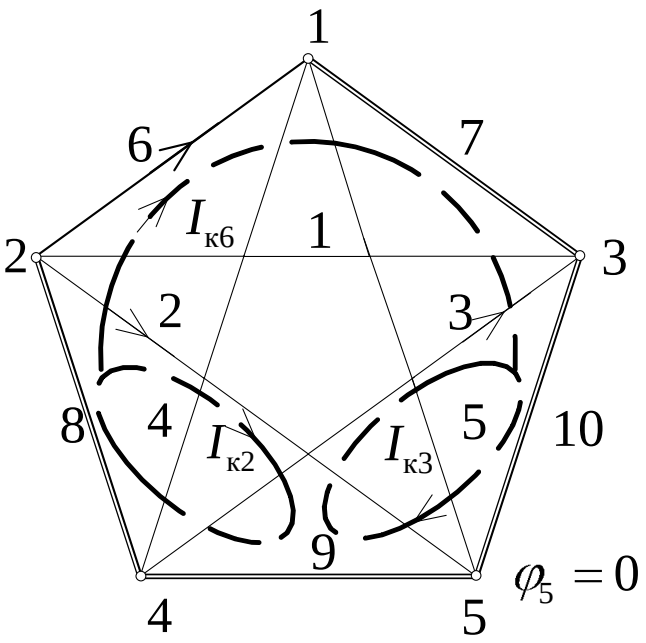


Рис. 3.9. Пример выбора дерева графа для непланарной цепи.

Легко проследить, как образуются другие главные контура, например, с контурным током I_{k6}. Собственные и взаимные сопротивления, например, для контуров 2 и 3 определяются выражениями: $R_{22} = r_2 + r_8 + r_9$, $R_{33} = r_3 + r_9 + r_{10}$, $R_{23} = R_{32} = r_9$. Предлагается самостоятельно найти другие сопротивления для системы контурных уравнений. Конечно, возможны и другие варианты выбора дерева и ветвей связи. Предлагается рассмотреть некоторые из них.

В методе узловых потенциалов – УП число уравнений в системе равно числу независимых узлов, равное числу ветвей дерева графа. Для рассматриваемого примера $N_D = 4$. Последний по номеру узел можно считать зависимым узлом с нулевым значением потенциала: $\varphi_5 = 0$, и определять потенциалы остальных узлов из системы четырёх уравнений. В этой системе, например, $G_{33} = g_1 + g_3 + g_7 + g_{10}$, $G_{23} = G_{32} = g_1$ и т.д. Предлагается самостоятельно записать эту систему уравнений в общем виде.

На примере этой задачи видно, что метод УП менее трудоёмкий, не требует анализа графа и обеспечивает решение прямой задачи электротехники меньшим числом уравнений. Однако следует проследить за тем, чтобы в исходной цепи не было бы вырожденных ветвей первого типа с бесконечно большой проводимостью. Иначе придётся использовать метод КТ, он не имеет ограничений. Анализ задачи закончен.

Во всех рассмотренных методах формирования сокращенной системы уравнений равновесия в качестве независимых переменных

выбирались величины, имеющие одинаковую размерность, – токи или напряжения. В ряде случаев при анализе электрических цепей с управляемыми источниками энергии оказывается более эффективным применение другого набора переменных, в число которых входили бы одновременно и токи, и напряжения. Такие переменные назначаются, например, при исследовании электронных цепей или переходных процессов *методом переменных состояния*, где набор независимых переменных определяется числом и свойствами реактивных энергоёмких элементов (индуктивностей и ёмкостей). В пособии эти вопросы не рассматриваются. Однако все рассмотренные здесь методы формирования уравнений равновесия цепи и их решения имеют универсальное применение и являются основой специализированных пакетных программ исследования теоретических и практических задач электротехники и электроники.

4. Анализ цепей при синусоидальных воздействиях

4.1. Основные понятия и определения

Синусоидальными сигналами или воздействиями называются переменные напряжения и токи источников, которые аналитически можно записать с помощью синусоидальной функции: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, где U_m и I_m – амплитудные значения напряжения и тока; $\gamma = \omega t + \psi$ – фаза колебаний; $\omega = \dfrac{d\gamma}{dt}$ – угловая частота или скорость изменения фазы от времени; ψ_u и ψ_i – начальные фазы колебаний (измеряются в пределах от $-\pi$ и до $+\pi$). Опытным путём установлено, что при питании линейной электрической цепи от источников энергии, действующих с одинаковой частотой ω, токи и напряжения во всех ветвях будут тоже синусоидальными и изменяться с той же частотой.

Угловая частота ω (рад/с) связана с частотой f (Гц) и периодом колебания T (с) выражением $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$.

В электротехнике любое синусоидальное воздействие (например, напряжение) принято сопоставлять с проекцией на мнимую (или вещественную) ось временного вектора, вращающегося с угловой частотой ω против часовой стрелки:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \mathrm{Im}[U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}] = \mathrm{Im}[U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\dot{U}_m e^{j\omega t}], \quad (4.1)$$

где $\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\psi_U}$ – *комплексная амплитуда* напряжения, $e^{j\omega t}$ – вращающий множитель или *оператор вращения*, представляющий собой вектор единичной длины, аргумент которого изменяется по линейному закону. Чтобы записать изображение (т.е. комплексное выражение), по его оригиналу (т.е. по временному выражению), следует максимальное значение синусоидальной функции времени представить в виде модуля комплексного выражения, а фазный угол (начальную фазу) – в виде аргумента. Получившееся при этом комплексное выражение называется **комплексной амплитудой**. Если оригинал зависит от времени и обозначается маленькой буквой $u(t)$, то соответствующее ему комплексное выражение – большой буквой с точкой наверху. Комплексная амплитуда не включает время и является величиной постоянной!

Мнимая единица в электротехнике обозначается буквой $j = \sqrt{-1}$. Следует использовать и показательную форму записи мнимой единицы: $\pm j = e^{\pm j 90^0} = e^{\pm j 0.5\pi}$, которая основана на формуле Эйлера:

$e^{\pm j\alpha} = \cos(\alpha) \pm j \cdot \sin(\alpha)$. С помощью этой формулы делают переход от показательной к алгебраической форме записи комплексного числа. Полезно также иметь в виду, что $1 = e^{j0^0}$, $-1 = j^2 = e^{\pm j180^0} = e^{\pm j\pi}$.

Пример 1. Если, например, напряжение в цепи $u(t) = 10\sin(\omega t - 30^0)$, то $\dot{U}_m = 10e^{-j30^0} = 10\cos(-30^0) + j \cdot 10\sin(-30^0) = 10 \cdot 0.87 - j \cdot 10 \cdot 0.5 = 8.7 - j5$. В этом выражении использованы три формы записи комплексного числа: *показательная, тригонометрическая* и *алгебраическая*. Каждая из них находит применение в зависимости от требований задачи. Следует обратить внимание на то, что угловая частота ω не участвует в определении комплексной амплитуды, а находит применение лишь для определения комплексных параметров цепи и обратного перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению (оригиналу).

Пример 2. Пусть в результате решения задачи найдена комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = 5e^{j37^0}$. Тогда $i(t) = 5\sin(\omega t + 37^0)$, что соответствует процедуре взятия мнимой части от комплексной амплитуды, умноженной на вращающий множитель. Этот переход достаточно очевиден, и процесс взятия мнимой части может лишь подразумеваться, но записывать его не обязательно.

4.2. Уравнения равновесия цепи

Равновесное энергетическое состояние цепи имеет место для любых моментов времени, и это находит отражение в законах Кирхгофа, которые являются **тождественными** равенствами. Соответственно эти уравнения выполняются и для цепей синусоидального тока:

$$\sum_1^n i_k(t) = \mathrm{Im}[\sum_1^n \dot{I}_{mk} e^{j\omega t}] \equiv 0; \qquad \sum_1^q u_k(t) = \mathrm{Im}[\sum_1^q \dot{U}_{mk} e^{j\omega t}] \equiv 0 .$$

Для значения $t = 0$ эти уравнения превращаются в алгебраические уравнения для комплексных амплитуд:

$$\sum_1^n \dot{I}_{mk} = 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_1^q \dot{U}_{mk} = 0 . \tag{4.2}$$

Уравнения (4.2) называются *законами Кирхгофа в комплексной форме*. Вместо функций времени – синусоид – проще работать с комплексными числами, выполняя простейшие алгебраические операции – сложение, вычитание, умножение, деление. Этот метод называется *символическим методом* или методом *комплексных амплитуд.* При

использовании символического метода все расчеты производят не над самими оригиналами – синусоидами, а над их символами (изображениями), которые есть комплексные числа. По окончании всех операций над изображениями записывают оригинал, используя исходное выражение типа (4.1).

Уравнения (4.2) формально соответствуют уравнениям равновесия для резистивных цепей (2.2) и (2.4), которые связывают вещественные значения токов и напряжений. Но эти уравнения, как было показано ранее, являлись основой для всех методов расчета простых и сложных резистивных цепей. Используя эту формальную аналогию, можно утверждать, что те же методы могут быть использованы для расчета цепей синусоидального тока.

Задача расчета цепи будет полностью поставлена, если к уравнениям равновесия цепи добавить *компонентные уравнения*, которые связывают токи и напряжения в элементах и ветвях электрической цепи. Эти уравнения также следует переписать в комплексной форме.

Резистивный элемент. Пусть в резисторе r протекает синусоидальный ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Компонентное уравнение, связывающее линейным соотношением ток и напряжение в элементе, определено законом Ома: $u = r \cdot i$. Это означает, что при синусоидальном токе напряжение в резисторе будет также синусоидальным: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = rI_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$. Сравнивая амплитуды и начальные фазы, найдём: $U_m = rI_m$, $\psi_u = \psi_i$. Переходя от синусоид к комплексным амплитудам, окончательно получим:

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m \qquad (4.3)$$

Выражение (4.3) устанавливает связь как для амплитуд тока и напряжения, так и для их начальных фаз: амплитуды связаны законом Ома, а фазы тока и напряжения совпадают. Это выражение можно переписать, используя понятие проводимости:

$$\dot{I}_m = g\dot{U}_m,$$

где $g = 1/r$.

Индуктивный элемент. В индуктивном элементе (индуктивности) ток и напряжение связаны линейным дифференциальным соотношением:

$u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$. Если ток изменяется по синусоидальному закону $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то и напряжение будет меняться по тому же закону:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = \omega L \cdot I_m cos(\omega t + \psi_i) = \omega L \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^0) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Сравнивая амплитуды и начальные фазы, получим: $U_m = \omega L \cdot I_m = x_L I_m$, $\psi_u = \psi_i + 90^0$, т.е. амплитуды тока и напряжения связаны линейным соотношением типа закона Ома, а напряжение опережает ток на угол 90^0. Переход к комплексным амплитудам позволяет объединить эти физические особенности протекания синусоидального тока в индуктивности в едином комплексном соотношении:

$$\dot{U}_m = j\omega L \cdot \dot{I}_m = jx_L \cdot \dot{I}_m = Z_L \dot{I}_m, \qquad (4.4)$$

где $Z_L = jx_L = j\omega L$ – *комплексное индуктивное сопротивление.* Аналогично можно получить выражение для *комплексной индуктивной проводимости*:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jb_L.$$

Тогда

$$\dot{I}_m = Y_L \dot{U}_m = -jb_L \cdot \dot{U}_m. \qquad (4.5)$$

Ёмкостной элемент. В ёмкостном элементе (ёмкости) при действии синусоидального тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ напряжение также будет меняться по синусоидальному закону, так как связь между ними описывается линейным интегральным соотношением $u_c = \dfrac{1}{C}\int i_c \cdot dt$. Имеем

$$u_c = \frac{1}{C}\int i_c \cdot dt = -\frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cos(\omega t + \psi_i) = x_C I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^0) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Сравнивая амплитуды и фазы, найдём $U_m = x_C I_m = \dfrac{1}{\omega C} \cdot I_m$, $\psi_u = \psi_i - 90^0$, т.е. амплитуды тока и напряжения связаны линейным соотношением типа закона Ома, а начальная фаза напряжения отстаёт от

начальной фазы тока на угол 90^0. Переход к комплексным амплитудам позволяет объединить эти физические особенности протекания синусоидального тока в ёмкости в едином комплексном соотношении:

$$\dot{U}_m = \frac{-j}{\omega C} \cdot \dot{I}_m = -jx_C \cdot \dot{I}_m = Z_C \dot{I}_m, \qquad (4.6)$$

где $Z_C = -jx_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$ – *комплексное ёмкостное сопротивление*.

Аналогично можно получить выражение для *комплексной ёмкостной проводимости*:

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jb_C .$$

Тогда

$$\dot{I}_m = Y_C \dot{U}_m = jb_C \cdot \dot{U}_m . \qquad (4.7)$$

4.3. Обобщённая форма закона Ома

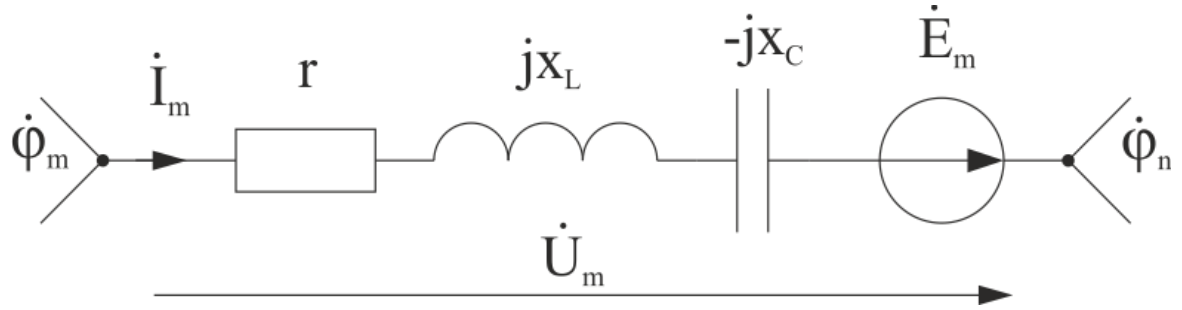
В цепи синусоидального тока, как и ранее, можно рассматривать два типа ветвей – ветви *первого* и *второго* типа. Ветвь первого типа содержит источники напряжения и набор пассивных элементов: резисторов, индуктивностей и ёмкостей, которую путём объединения элементов можно свести к упрощённой канонической ветви (рис. 1.10б).

Уравнение равновесия для напряжений ветви описывается тождественным равенством (1.13). Если в цепи действуют источники энергии одной и той же частоты ω, то все токи и напряжения в ней будут изменяться с той же частотой, что позволяет перейти к анализу этого режима *методом комплексных амплитуд*. Для этого в канонической ветви следует выполнить ряд замен, которые следуют из предыдущего анализа:

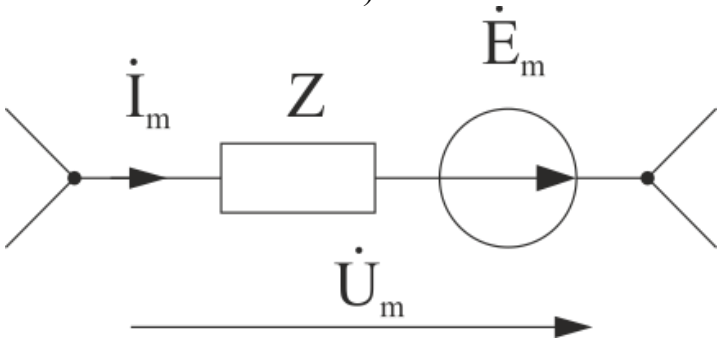
- Вместо мгновенных синусоидальных функций $u_k(t), i_k(t), e_k(t)$ следует перейти к комплексным амплитудам $\dot{U}_{mk}, \dot{I}_{mk}, \dot{E}_{mk}$. Часть из этих комплексных констант задана условиями задачи, другая – определяется из решения задачи.
- Резистивное сопротивление r на основании выражения (4.3) переходит в комплексную схему замещения без изменения.

- Индуктивность L на основании выражения (4.4) замещается комплексным сопротивлением $Z_L = jx_L = j\omega L$ (или комплексной проводимостью $Y_L = -jb_L = -j\dfrac{1}{\omega L}$).
- Ёмкость C на основании выражения (4.6) замещается комплексным сопротивлением $Z_C = -jx_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{j\omega C}$ (или комплексной проводимостью $Y_C = jb_C = j\omega C$).
- Потенциалы концевых узловых точек ветви m и n также следует считать комплексными константами $\dot{\varphi}_m$ и $\dot{\varphi}_n$.

Комплексная схема замещения ветви представлена на рис. 4.1а, где резистор и реактивные элементы сохраняют своё первичное изображение (графическое представление), и это изображение часто используется в учебной литературе. Однако в дальнейшем целесообразно перейти к единообразному обозначению комплексных сопротивлений, так как расчет такой цепи производится методами цепей постоянного тока, где уже взаимодействуют не вещественные числа, а формализованные комплексные константы.



а)



б)

Рис. 4.1. Ветвь первого типа в электрической цепи синусоидального тока: а) с полным набором элементов; б) каноническая.

На рис. 4.1б показана каноническая ветвь, где комплексные сопротивления элементов ветви объединены по формуле последовательного соединения резистивных элементов (1.6) в виде суммы комплексных параметров

$$Z = r + jx_L - jx_C = r + j(x_L - x_C) = r + jx\,.$$

Эту сумму называют *комплексным сопротивлением ветви* (или двухполюсника).

Используя аналогию с цепями постоянного тока (см. выражения (2.1а и 2.1б)), получим *обобщённую форму закона Ома*:

$$\dot{U}_m = Z \cdot \dot{I}_m - \dot{E}_m\,, \qquad (4.8а)$$

$$\text{или} \quad \dot{I}_m = Y(\dot{U}_m + \dot{E}_m)\,. \qquad (4.8б)$$

Здесь $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = g - jb$ называется *комплексной проводимостью ветви*, где $g = \frac{r}{r^2 + x^2}$, $b = \frac{x}{r^2 + x^2}$ - соответственно *резистивная и реактивная составляющие комплексной проводимости* ветви.

В электротехнике кроме мгновенных значений – функций времени – измеряют и рассчитывают такие инженерные характеристики как показания измерительных приборов: вольтметров, амперметров, ваттметров, фазометров, так и силовые взаимодействия в электродвигателях и других механизмах, принцип работы которых основан на взаимодействии электромагнитных полей. Все эти характеристики численно определяются не мгновенными значениями токов и напряжений, а их *действующими значениями*: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Поэтому расчеты чаще выполняют, используя эти переменные. Для них уравнения равновесия цепи (4.2) и компонентные уравнения (4.8) принимают вид:

$$\sum_1^q \dot{U}_k = 0\,, \qquad \sum_1^n \dot{I}_k = 0 \qquad (4.9)$$

$$\dot{U}_k = Z_k \cdot \dot{I}_k - \dot{E}_k\,, \qquad \dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{E}_k)\,. \qquad (4.10)$$

Уравнения (4.9) и (4.10) *формально* выглядят так же, как и исходные уравнения равновесия цепей постоянного тока. Следовательно, ещё раз

можно убедиться в том, что все методы расчета цепей постоянного тока применимы и для исследования цепей синусоидального тока.

4.4. Простая разветвлённая цепь с одним источником энергии

Пример 3. На рис. 4.2 показана электрическая цепь, образованная ветвями первого типа. На входных зажимах цепи действует источник синусоидального напряжения, начальную фазу которого можно принять равным нулю: $u = 100\sqrt{2}\sin 10^4 t$ (В). Параметры элементов: $r_1 = 150$, $r_2 = 200$ (Ом), $L_1 = 5$, $L_3 = 10$ (мГн), $C_1 = 0.667$, $C_2 = 1$ (мкФ).

Определить мгновенные значения токов ветвей i_1, i_2, i_3, действующие значения токов I_1, I_2, I_3, построить векторную диаграмму токов и напряжений.

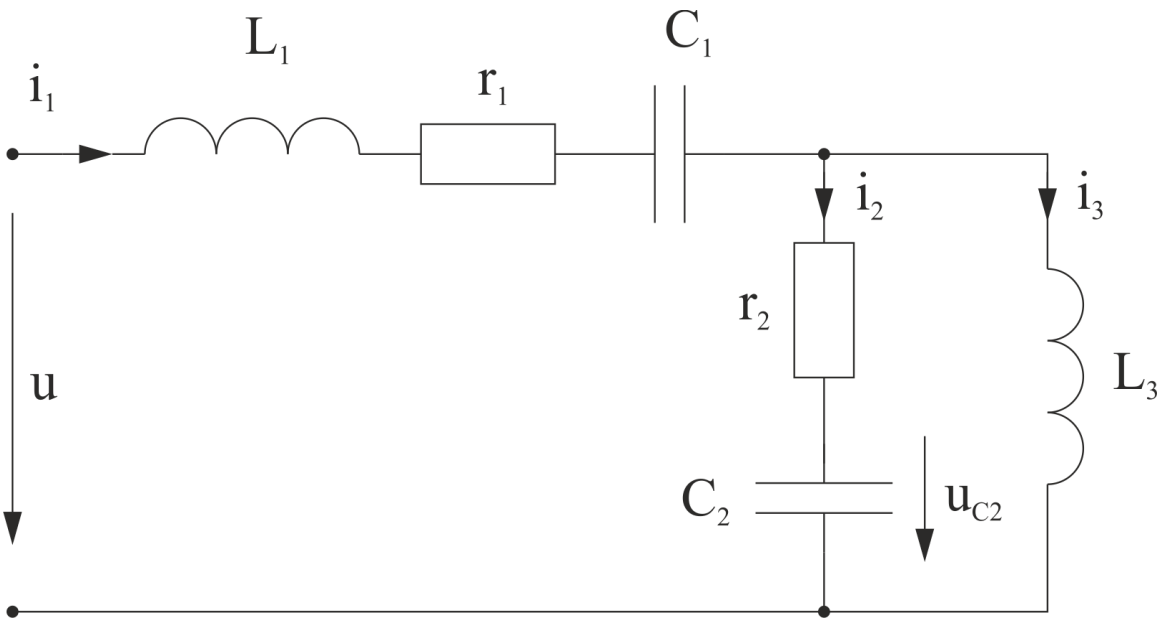


Рис. 4.2. Разветвлённая цепь синусоидального тока с одним источником напряжения

Решение.

Следует придерживаться алгоритма, рассмотренного выше. В отличие от резистивных цепей постоянного тока необходимо предварительно подготовить комплексную расчетную цепь, и тогда уже выбрать метод расчета, который позволил бы быстрее получить ответ. Осуществим последовательно несколько очевидных шагов:

- Определение кажущихся *реактивных сопротивлений* элементов ветвей для угловой частоты источника питания $\omega = 10^4$ (рад/с):

$x_{L1} = \omega L_1 = 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 50$, $x_{L3} = \omega L_3 = 100$ (Ом),

$x_{C1} = \dfrac{1}{\omega C_1} = \dfrac{10^6}{10^4 \cdot 0.667} = 150$, $x_{C2} = \dfrac{1}{\omega C_2} = 100$ (Ом). Необходимо следить за тем, чтобы все сопротивления измерялись в (Ом) или других одинаковых для задачи кратных единицах.

- Определение комплексных параметров цепи:

а) комплексные сопротивления элементов ветвей: $Z_{L1} = jx_{L1} = j50$, $Z_{L3} = jx_{L3} = j100$, $Z_{C1} = -jx_{C1} = -j150$, $Z_{C2} = -jx_{C2} = -j100$ (Ом).

б) суммарные комплексные сопротивления ветвей: $Z_1 = r_1 + Z_{L1} + Z_{C1} = 150 - j100$, $Z_2 = r_2 + Z_{C2} = 200 - j100$, $Z_3 = Z_{L3} = j100$ (Ом);

в) комплексная амплитуда напряжения источника: $\dot{U}_m = 100\sqrt{2} \cdot e^{j0^0} = 100\sqrt{2}$ (В);

с) комплексное действующее значение напряжения – $\dot{U} = \dot{U}_m / \sqrt{2} = 100$ (В).

- Комплексная схема замещения исходной цепи представлена на рис. 4.3, где реальные элементы исходной цепи уже заменены комплексными расчетными эквивалентами (действующими значениями напряжений и токов), напоминающими изображение цепей постоянного тока. На схеме указаны положительные направления токов и напряжений, где, как и в цепях постоянного тока, напряжения и токи в пассивных элементах цепи направлены одинаково.

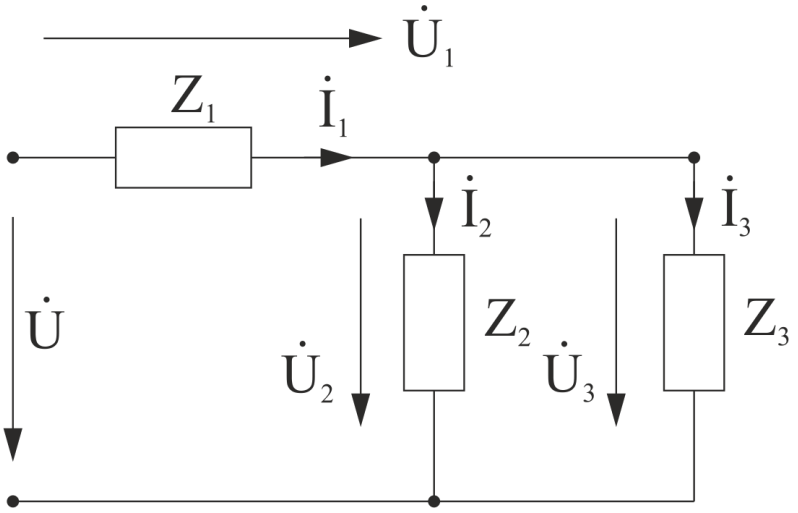


Рис. 4.3. Комплексная схема замещения расчетной цепи

- Схема подготовлена к расчету. Задача может быть решена любым методом. При действии одного источника целесообразно выбрать метод эквивалентного входного сопротивления. В цепи сопротивления Z_2 и Z_3

соединены параллельно, и вместе эта группа элементов соединена последовательно с сопротивлением Z_1. Имеем

$$Z_\Sigma = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = 150 - j100 + \frac{(200 - j100)\, j100}{200 - j100 + j100} = 200\,(\text{Ом}).$$

- Определяем комплексную амплитуду тока источника напряжения

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_m}{Z_\Sigma} = 0.5\sqrt{2}\,(\text{A}).$$

Начальная фаза тока совпадает с начальной фазой входного напряжения; следовательно, в цепи имеет место резонанс напряжений.

- Действующее значение тока первой ветви: $\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_{m1}}{\sqrt{2}} = 0.5\,(\text{A}).$
- Амплитуды токов второй и третьей ветви определим по правилу деления тока на части (1.11):

$$\dot{I}_{m2} = \dot{I}_{m1} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = j0.25\sqrt{2}\ \ (\text{A}),$$

$$\dot{I}_{m3} = \dot{I}_{m1} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = 0.5\sqrt{2} - j0.25\sqrt{2}\ \ (\text{A}).$$

Их комплексные действующие значения:

$$\dot{I}_2 = j0.25\ \ (\text{A}),$$

$$\dot{I}_3 = 0.5 - j0.25 = \sqrt{(0.5)^2 + (0.25)^2}\, e^{j\,\mathrm{arc}\,ctg(-0.5)} = 0.559 e^{-j26.56^0}\ \ (\text{A}).$$

- Найденные комплексы токов позволяют найти действующие значения токов, которые равны показаниям амперметров, если бы они были включены в каждую из ветвей: $I_1 = \mathrm{mod}\,\dot{I}_1 = 0.5$, $I_2 = \mathrm{mod}\,\dot{I}_2 = 0.25$, $I_3 = \mathrm{mod}\,\dot{I}_3 = 0.559\,(\text{A}).$
- Комплексные действующие значения напряжений на сопротивлениях ветвей находим по закону Ома (4.10):

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 = (150 - j100) \cdot 0.5 = 75 - j50\ \ (\text{В}),$$

$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 = Z_2 \dot{I}_2 = Z_3 \dot{I}_3 = 25 + j50$ (В).

Эти значения также можно переписать в показательной форме и определить далее действующие значения, модули которых указывали бы на показания вольтметров. Предлагается сделать это самостоятельно.

- Сравнение амплитуд и начальных фаз найденных токов и напряжений принято делать с помощью **векторных диаграмм**, которые изображают на комплексной плоскости. Следует помнить, что масштаб изображения длин векторов для токов и напряжений различен, и эти диаграммы можно рисовать отдельно с учётом выбранных масштабов.

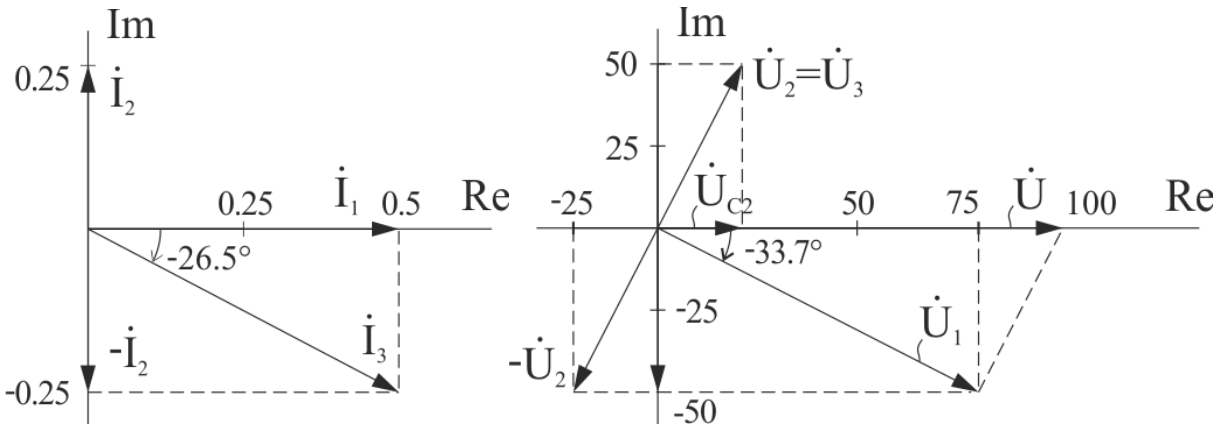


Рис. 4.4. Векторные диаграммы: а) токов (одно деление 0.25А);
б) напряжений (одно деление 25В).

На рис. 4.4а изображена диаграмма действующих значений токов, а на рис. 4.4б диаграмма напряжений; для каждой из них по осям координат указан свой масштаб измерения соответствующей физической величины.

Построение векторных диаграмм непосредственно согласуется с уравнениями равновесия цепи, записанными по законам Кирхгофа. Для данной задачи имеем: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ (или $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$); далее $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ (или $\dot{U}_1 = \dot{U} - \dot{U}_2$). Эти построения показаны на рисунках.

Из решения задачи и диаграмм видно, что суммируются только комплексные токи (или, как следствие, вектора), но никак не их модули!

Действительно, $I_1 = I_2 + I_3 = 0.25 + 0.559 = 0.809$, **что неверно**! На самом деле $I_1 = \mathrm{mod}(\dot{I}_2 + \dot{I}_3) = 0.5\,(\mathrm{A})$. Именно это значение покажет амперметр, включенный в первую ветвь. Аналогично для напряжений:

$U_1 = \mathrm{mod}(\dot{U} - \dot{U}_2) = 90.14\,(\mathrm{В})$, **что правильно**, но не $U_1 = U - U_2 = 100 - 90.14 = 9.86$, **что неправильно!**

На диаграмме могут быть показаны напряжения на отдельных элементах ветви. Так, например, напряжение на ёмкости C_2 будет равно $\dot{U}_{C2} = Z_{C2}\dot{I}_2 = 25\,(\mathrm{В})$, и соответствующий вектор будет направлен по вещественной оси.

Для сравнения начальных фаз токов и напряжений их векторные диаграммы объединяют, не всегда соблюдая масштаб.

- Мгновенные значения токов – функций времени – запишем на основании формулы (4.1), использующей процедуру взятия мнимой части от комплексных временных векторов. При этом следует предварительно перевести действующие значения токов и напряжений в комплексные амплитуды, используя множитель $\sqrt{2}$. Имеем:

$$i_1 = 0.5\sqrt{2}\cdot\sin(10^4 t)\ \ (\mathrm{A}),$$
$$i_2 = 0.25\sqrt{2}\cdot\sin(10^4 t + 90^0)\ \ (\mathrm{A}),$$
$$i_3 = 0.559\sqrt{2}\cdot\sin(10^4 t - 26.56^0)\ \ (\mathrm{A}).$$

Ток i_3 имеет отрицательную ординату в момент времени $t = 0$ и ближайший “ноль” функции справа от начала координат. Ток i_1 имеет ту же нулевую начальную фазу, что и напряжение u (в цепи резонанс), ток i_2 опережает напряжение на 90^0, а ток i_3 отстаёт по фазе от входного напряжения на угол $\varphi = -26.56^0$. Графическое изображение мгновенных значений токов предлагается сделать самостоятельно (см. Приложение).

Задача решена.

4.5. Разветвлённая цепь с двумя источниками энергии

На рис. 4.5 показана электрическая цепь, образованная ветвями первого типа с включением идеального (вырожденного) источника напряжения $e(t)$ и ветви второго типа с источником тока $j(t)$. Оба источника имеют нулевую начальную фазу: $u(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t\,(\mathrm{В})$, $j(t) = \sqrt{2}\sin\omega t\,(\mathrm{А})$. Параметры элементов: $r_3 = x_{L1} = x_{C4} = 5\,(\mathrm{Ом})$, $x_{L2} = 10\,(\mathrm{Ом})$.

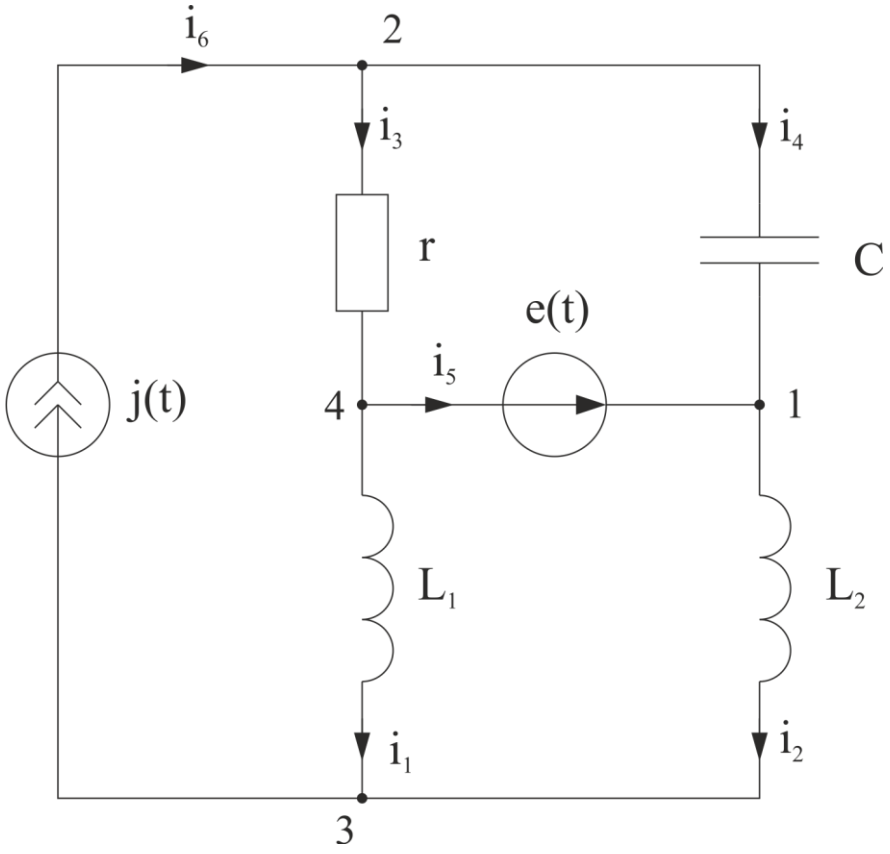


Рис. 4.5. Разветвлённая цепь синусоидального тока с идеальными источниками тока и напряжения.

Определим токи и напряжения ветвей, используя методы, рассмотренные в первой части настоящего пособия: законы Кирхгофа – ЗК, метод контурных токов – МКТ, метод наложения – МН, метод узловых потенциалов – МУП, метод эквивалентного генератора – МЭГ, преобразования схемы с исключением вырожденных источников энергии. Исследуем инженерные электротехнические характеристики цепи.

Предварительное исследование условий задачи.

В задании не указана величина угловой частоты ω. Она может быть любой, так как эта величина уже вошла в определение кажущихся реактивных сопротивлений ветвей x_{L1}, x_{L2}, x_{C4}, и при необходимости может быть рассчитана по известным значениям параметров L_1, L_2 или C_4, которые здесь не указаны. Например, $\omega = \dfrac{x_{L1}}{L_1}$, или $\omega = \dfrac{1}{C_4 \cdot x_{C4}}$.

Комплексная расчетная схема представлена на рис. 4.6, на которой показаны независимые контура и пронумерованы узловые точки.

- Комплексные сопротивления ветвей: $Z_1 = jx_{L1} = j5$, $Z_2 = jx_{L2} = j10$, $Z_3 = r = 5$, $Z_4 = -jx_{C4} = -j5$ (Ом).

- Комплексные амплитуды источников энергии: $\dot{E}_m = 10\sqrt{2}\,(\text{В})$, $\dot{J}_m = \sqrt{2}\,(\text{А})$.
- Комплексные действующие значения входных воздействий: $\dot{E} = 10\,(\text{В})$, $\dot{J} = 1(\text{А})$.
- Схема имеет шесть ветвей и пять неизвестных токов. Топологические характеристики цепи: $N_B = 6$, $N_J = 1$, $n = N_B - N_J = 5$, $N_Y = 4$, $N_1 = N_Y - 1 = 3$, $N_2 = n - N_1 = 2$.

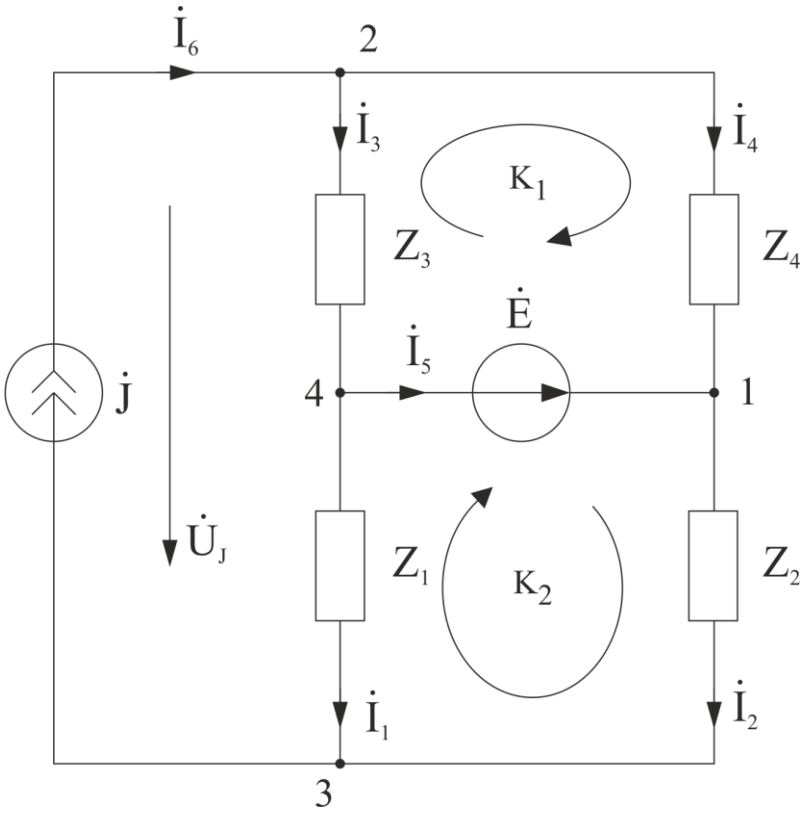


Рис. 4.6. Комплексная расчетная схема.

Пример 4. Решение задачи посредством законов Кирхгофа.

Число уравнений в системе совпадает с числом неизвестных токов: $n = 5$. Из них по первому закону Кирхгофа следует составить три уравнения $(N_1 = 3)$, а по второму закону – два $(N_2 = 2)$. Уравнения для независимых узлов и контуров принимают вид:

узел 1	$\dot{I}_2 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0$,	контур $k1$	$-Z_3\dot{I}_3 + Z_4\dot{I}_4 = -\dot{E}$,
узел 2	$\dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \dot{J}$,	контур $k2$	$-Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = \dot{E}$,
узел 3	$-\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -\dot{J}$.		

Система уравнений, записанная в матричной форме, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_3 & Z_4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{J} \\ -\dot{J} \\ \dot{E} \\ -\dot{E} \end{bmatrix},$$

или после подстановки численных данных задачи:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -j5 & j10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -j5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

- Используя пакетную программу *CALC.EXE* или функцию *lsolve* (см. Приложение), найдём искомые токи:

$$\dot{I}_1 = 0.94280e^{j45^0} = \frac{2}{3} + j\frac{2}{3} \text{ (A)},$$

$$\dot{I}_2 = 0.74535e^{-j63.43^0} = \frac{1}{3} - j\frac{2}{3} \text{ (A)},$$

$$\dot{I}_3 = 1.5811e^{j18.43^0} = 1.5 + j0.5 \text{ (A)},$$

$$\dot{I}_4 = 0.70710e^{-j135^0} = -0.5 - j0.5 \text{ (A)},$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_E = 0.84983e^{-j11.31^0} = \frac{5}{6} - j\frac{1}{6} \text{ (A)}.$$

Программа позволяет получать решение, как в алгебраической, так и в показательной форме.

- Напряжения ветвей находим по обобщённой форме закона Ома (4.10):

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 = 4.7104 e^{j135^0} = -\frac{10}{3} + j\frac{10}{3} \text{ (В)},$$

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 = 7.4535 e^{j26.56^0} = \frac{20}{3} + j\frac{10}{3} \text{ (В)},$$

$$\dot{U}_3 = Z_3 \dot{I}_3 = 7.9056 e^{j18.43^0} = 7.5 + j2.5 \text{ (В)},$$

$$\dot{U}_4 = Z_4 \dot{I}_4 = 3.5355 e^{j135^0} = -2.5 + j2.5 \text{ (В)},$$

$$\dot{U}_6 = \dot{U}_J = \dot{U}_2 + \dot{U}_4 = \dot{U}_1 + \dot{U}_3 = 7.1686 e^{j54.46^0} = \frac{25}{6} + j\frac{35}{6} \text{ (В)}.$$

Любое комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме в зависимости от того, какой практический результат следует получить на основе этого числа.

Задача решена.

Следствия решения задачи.

- **Проверка правильности решения задачи** основана на сопоставлении численных данных решения с уравнениями равновесии цепи. Например, можно убедиться, что $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \dot{I}_6 = 1(\text{А})$, или $-\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_3 - \dot{U}_4 = \dot{E} = 10(\text{В})$. Эту же проверку можно осуществить с помощью векторной диаграммы.
- **Действующие значения токов (показания амперметров)**: $I_1 = \operatorname{mod}\dot{I}_1 = 0.94280$, $I_2 = 0.74535$, $I_3 = 1.5811$, $I_4 = 0.70710$, $I_5 = \operatorname{mod}\dot{I}_5 = 0.84983(\text{А})$.
- **Действующие значения напряжений (показания вольтметров):** $U_1 = \operatorname{mod}\dot{U}_1 = 4.7140$, $U_2 = 7.4535$, $U_3 = 7.9056$, $U_4 = 3.5355$, $U_6 = 7.1686(\text{В})$.
- **Проверка баланса активной и реактивной мощности**.

Из физики работы электрической цепи следует, что электрическая энергия, вырабатываемая источниками энергии, частично тратится на преобразование этой энергии в другие виды, например, в тепло в резистивных элементах, или запасается в реактивных элементах цепи в виде энергии электрического или магнитного поля. Первый тип энергии характеризуется **активной мощностью**, которая вычисляется по формуле**:**

$$P = \sum_{1}^{n_R} r_k I_k^2,$$

где n_R – число резистивных элементов цепи. Активная мощность измеряется в ваттах (Вт), она характеризует ту долю энергии электромагнитного поля, которая переходит в другие виды энергии.

Второй тип энергии характеризуется **реактивной мощностью**. Она делится на две части: первая часть указывает на энергию магнитного поля, запасаемую в индуктивностях:

$$Q_L = \sum_1^{n_L} x_{Lk} I_k^2,$$

где n_L – число индуктивностей; вторая часть определяет энергию электрического поля, запасаемую в ёмкостях:

$$Q_C = \sum_1^{n_C} x_{Ck} I_k^2,$$

где n_C – число ёмкостей. Реактивная мощность измеряется в реактивных вольт-амперах (вар).

Общая реактивная мощность определяется разностью: $Q = Q_L - Q_C$ **!**

Каждый потребитель энергии забирает столько активной и реактивной мощности, чтобы обеспечивался суммарный баланс как активной, так и реактивной мощности.

Источник напряжения генерирует **полную мощность**, которую определяют по формуле:

$$\tilde{S}_E = \dot{E} \cdot \overset{*}{I} = P_E + jQ_E,$$

где $\overset{*}{I}$ – комплексно-сопряженное значение тока, протекающего в источнике. В этом выражении имеется информация о доле каждой мощности: активной $P_E = \mathrm{Re}\,\tilde{S}_E = \mathrm{Re}(\dot{E} \cdot \overset{*}{I})$ и реактивной $Q_E = \mathrm{Im}\,\tilde{S}_E = \mathrm{Im}(\dot{E} \cdot \overset{*}{I})$. Знак плюс <+> в этих формулах пишут, если действие ЭДС и положительное направление тока совпадают. Знак минус <–> следует писать в случае, если за счёт действия других источников, действующих в цепи, ток в источнике напряжения будет направлен в противоположную сторону.

Энергия, вырабатываемая **источником тока**, определяется аналогично:

$$\tilde{S}_J = \dot{U}_J \cdot \overset{*}{J} = P_J + jQ_J, \quad P_J = \mathrm{Re}\,\tilde{S}_J = \mathrm{Re}(\dot{U}_J \cdot \overset{*}{J}), \quad Q_J = \mathrm{Im}\,\tilde{S}_J = \mathrm{Im}(\dot{U}_J \cdot \overset{*}{J}).$$

Знак плюс <+> в этих выражениях следует писать, если действие источника тока и выбранное положительное направление напряжения на источнике имеют противоположные направления, при совпадении направлений следует писать знак минус <–>. Полная мощность $\tilde{S}$ измеряется в вольт-амперах $(B \cdot A)$.

Можно записать два балансных уравнения:

для активной мощности – $\sum_1^{n_E} P_{Ek} + \sum_1^{n_J} P_{Jk} = \sum_1^{n_R} r_k I_k^2$,

для реактивной мощности – $\sum_1^{n_E} Q_{Ek} + \sum_1^{n_J} Q_{Jk} = \sum_1^{n_L} x_{Lk} I_k^2 - \sum_1^{n_C} x_{Ck} I_k^2$.

В задаче имеем:

$$\tilde{S}_E = \dot{E} \cdot \overset{*}{I}_5 = P_E + jQ_E = 10 \cdot (\frac{5}{6} + j\frac{1}{6}) = 8.33333 + j1.66666 \text{ (ВА)},$$

$$\tilde{S}_J = \dot{U}_J \cdot \overset{*}{J} = P_J + jQ_J = \frac{25}{6} + j\frac{35}{6} = 4.16666 + j5.83333 \text{ (ВА)},$$

$$P = rI_3^2 = 12.5 \text{ (Вт)},$$

$$Q_{L1} = x_{L1} I_1^2 = 4.44444, \; Q_{L2} = x_{L2} I_2^2 = 5.55555, \; Q_C = x_C I_4^2 = 2.49999 \text{ (вар)}.$$

Проверяем балансные уравнения:

$P_E + P_J = P$, что соответствует равенству активных мощностей – $8.33333 + 4.16666 = 12.5 (\text{Вт})$. Мощность, потребляемая резистором, обеспечивается на 2/3 источником напряжения и на 1/3 источником тока.

Далее должно выполняться равенство: $Q_E + Q_J = (Q_{L1} + Q_{L2}) - Q_C$. Действительно: $1.66666 + 5.83333 = (4.4444 + 5.55555) - 2.49999 = 7.5$ (вар). Происходит обмен энергией между источниками и реактивными элементами L и C. Частично реактивные элементы обмениваются энергией между собой, что наиболее ярко проявляется, когда цепь находится в состоянии резонанса.

Задача решена.

Пример 5. Решение задачи методом контурных токов

Решение задачи (рис. 4.6) начинается с определения числа независимых контуров и указания направлений контурных токов. Число независимых контуров определяется топологией цепи: $N_k = N_B - N_Y = 3$. Контура включают как ветви первого, так и второго типа. Возможен различный вариант выбора независимых контурных токов, один из них показан на (рис. 4.7).

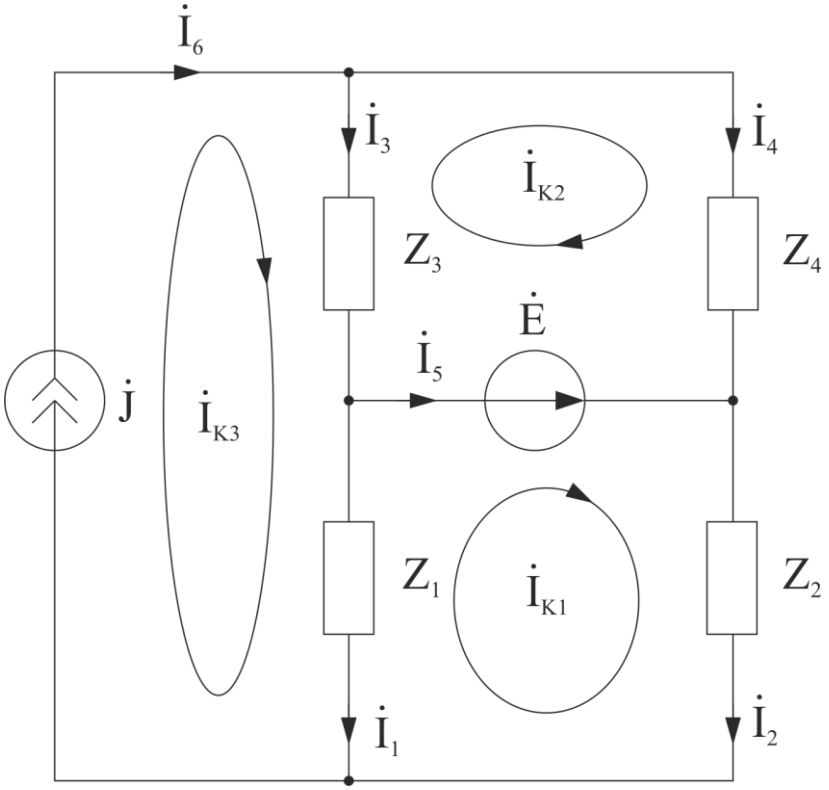


Рис. 4.7. Комплексная расчетная схема с выбранными контурными токами.

Для простых задач контура видны сразу, а для сложных цепей они определяются после исследования топологического графа цепи с выделением ветвей *дерева* и *ветвей связи*. Система уравнений имеет вид

$$Z_{11}\dot{I}_{k1} + Z_{12}\dot{I}_{k2} + Z_{13}\dot{I}_{k3} = \sum_1 \dot{E}$$

$$Z_{21}\dot{I}_{k1} + Z_{22}\dot{I}_{k2} + Z_{23}\dot{I}_{k3} = \sum_2 \dot{E}$$

$$Z_{31}\dot{I}_{k1} + Z_{32}\dot{I}_{k2} + Z_{33}\dot{I}_{k3} = \sum_3 \dot{E}$$

Третий контурный ток совпадает по величине с током шестой ветви, который в свою очередь равен известному току источника тока: $\dot{I}_{k3} = \dot{J}$. Поэтому последнее уравнение следует заменить на это равенство. Тогда задача будет сведена к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_{k1} + Z_{12}\dot{I}_{k2} &= \sum_{1}\dot{E} - Z_{13}\dot{J} \\ Z_{21}\dot{I}_{k1} + Z_{22}\dot{I}_{k2} &= \sum_{2}\dot{E} - Z_{23}\dot{J} \end{aligned} \qquad (4.11)$$

где $Z_{11} = Z_1 + Z_2 = j15$, $Z_{12} = Z_{21} = 0$, $Z_{13} = -Z_1 = -j5$, $Z_{22} = Z_3 + Z_4 = 5 - j5$, $Z_{23} = -Z_3 = -5$; $\sum_{1}\dot{E} - Z_{13}\dot{J} = \dot{E} - Z_{13}\dot{J} = 10 + j5$, $\sum_{2}\dot{E} - Z_{23}\dot{J} = -\dot{E} - Z_{23}\dot{J} = -5$.

Так как выполняется условие $Z_{12} = Z_{21} = 0$, то контурные токи $\dot{I}_{k1}$ и $\dot{I}_{k2}$ определяются независимо друг от друга: $\dot{I}_{k1} = \dfrac{\dot{E} + Z_1\dot{J}}{Z_1 + Z_2} = \dfrac{10 + j5}{j15} = \dfrac{1}{3} - j\dfrac{2}{3}$, $\dot{I}_{k2} = \dfrac{-\dot{E} + Z_3\dot{J}}{Z_3 + Z_4} = \dfrac{-5}{5 - j5} = -0.5 - j0.5\,(\text{A})$.

Эти значения совпадают с ранее найденными токами, где $\dot{I}_2 = \dot{I}_{k1}$, $\dot{I}_4 = \dot{I}_{k2}$. Остальные токи определяются как алгебраическая сумма контурных токов для каждой ветви: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{k3} - \dot{I}_{k1}$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_{k3} - \dot{I}_{k2}$, $\dot{I}_5 = \dot{I}_{k1} - \dot{I}_{k2}$. Предлагается проверить это самостоятельно.

Задача решена.

Примечание. Та же система уравнений (4.11) будет характеризовать токи в цепи, представленной на рис. 4.8, которая получается из исходной цепи (рис. 4.6) после эквивалентной замены источника тока двумя источниками напряжения $\dot{E}_1 = Z_1\dot{J}$ и $\dot{E}_2 = Z_3\dot{J}$ (раздел 2.6 и рис. 2.12 настоящего пособия). При этом токи в ветвях, не тронутых преобразованием: I_2, I_4, I_5, сохраняют те же значения.

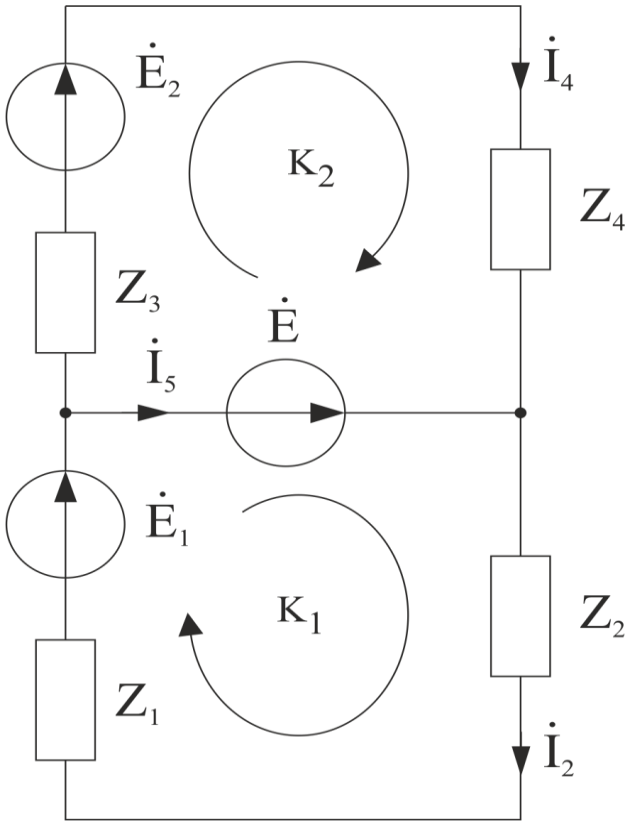


Рис. 4.8. Комплексная расчетная схема после эквивалентной замены источника тока двумя источниками напряжения.

Пример 6. Решение задачи методом узловых потенциалов

Решение задачи (рис. 4.6) начинается с определения числа независимых узлов, которое совпадает с числом уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа: $N_1 = N_Y - 1 = 3$. Последний по номеру узел считается зависимым узлом, потенциал его принимается равным нулю.

- Нумерация узлов произвольна. На рис. 4.9 показана комплексная схема замещения исследуемой цепи, где потенциалы узловых точек помечены и пронумерованы, а потенциал четвёртого узла принят равным нулю: $\dot{\varphi}_4 = 0$.
- Комплексные сопротивления ветвей заменены комплексными проводимостями, которые измеряются в сименсах (См):

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{j5} = -j0.2, \qquad Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j10} = -j0.1, \qquad Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{5} = 0.2,$$

$$Y_4 = \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{-j5} = j0.2,\ Y_5 = \infty,\ Y_6 = 0.$$

Комплексные источники энергии сохраняют прежние значения:

$\dot{E} = 10\,(\text{В}),\ \dot{J} = 1(\text{А}).$

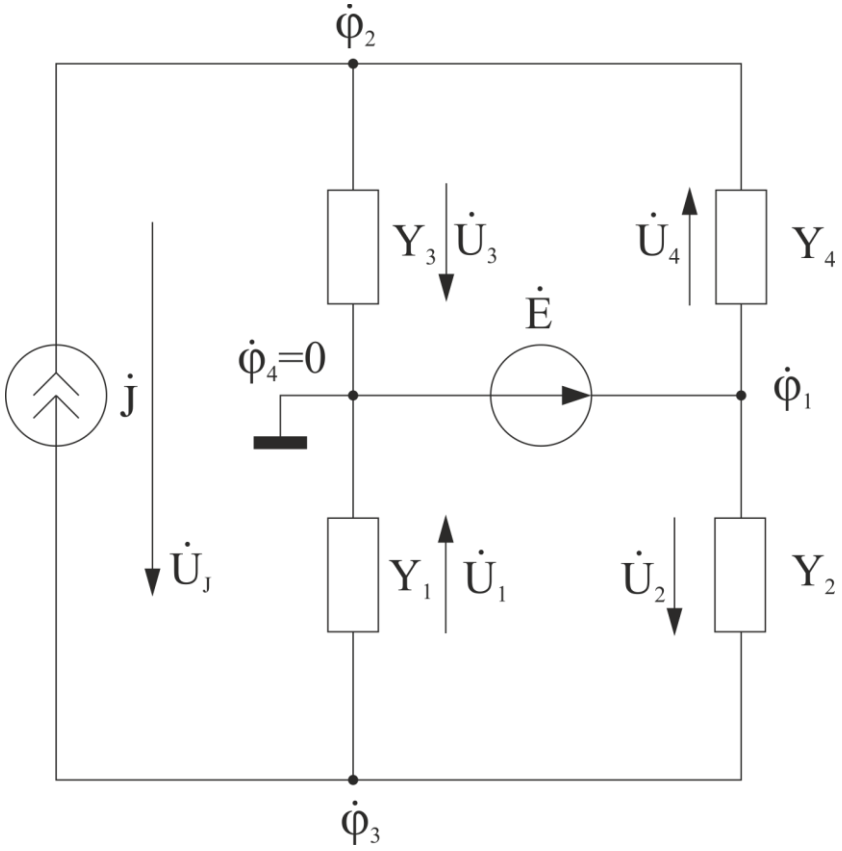


Рис. 4.9. Комплексная расчетная схема с указанием потенциалов независимых узлов и условных положительных напряжений ветвей.

- Система уравнений для определения потенциалов независимых узлов имеет вид:

$$\dot{Y}_{11}\dot{\varphi}_1-\dot{Y}_{12}\dot{\varphi}_2-\dot{Y}_{13}\dot{\varphi}_3=\sum_1\dot{J}+\sum_1\dot{E}\dot{Y}$$

$$-\dot{Y}_{21}\dot{\varphi}_1+\dot{Y}_{22}\dot{\varphi}_2-\dot{Y}_{23}\dot{\varphi}_3=\sum_2\dot{J}+\sum_2\dot{E}\dot{Y}$$

$$-\dot{Y}_{31}\dot{\varphi}_1-\dot{Y}_{32}\dot{\varphi}_2+\dot{Y}_{33}\dot{\varphi}_3=\sum_3\dot{J}+\sum_3\dot{E}\dot{Y},$$

где потенциал $\dot{\varphi}_1=\dot{E}$ отсчитывается от нулевой точки и определен только источником напряжения. Это условие полностью заменяет первое уравнение в системе, его следует подставить во второе и третье уравнение и затем объединить со слагаемыми правой части. При условии, что проводимость ветви второго типа равна нулю, получим: $Y_{21}=Y_4=j0.2$,

$Y_{22} = Y_3 + Y_4 + 0 = 0.2 + j0.2$, $Y_{23} = Y_{32} = 0$, $Y_{31} = Y_2 = -j0.1$,

$Y_{33} = Y_1 + Y_2 + 0 = -j0.3$; $\sum_2 \dot{J} + \sum_2 \dot{E}Y = \dot{J} = 1$, $\sum_3 \dot{J} + \sum_3 \dot{E}Y = -\dot{J} = -1$.

После подстановки численных значений получим систему двух уравнений

$$(0.2 + j0.2)\dot{\varphi}_2 - 0\dot{\varphi}_3 = 1 + j2$$
$$-0\dot{\varphi}_2 - j0.3\dot{\varphi}_3 = -1 - j1,$$

где каждый потенциал определяется собственным независимым уравнением:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1 + j2}{0.2 + j0.2} = 7.5 + j2.5 = 7.90569e^{j18.43^0} \text{ (В)},$$
$$\dot{\varphi}_3 = \frac{-1 - j1}{-j0.3} = \frac{10}{3} - j\frac{10}{3} = 4.71045e^{-j45} \text{ (В)}.$$

- Напряжения ветвей найдём как разность потенциалов, предварительно указав их условные положительные направления:

$$\dot{U}_1 = \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4 = 4.7104e^{-j45^0} \text{ (В)},$$
$$\dot{U}_2 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 = 7.4535.e^{j26.56^0} \text{ (В)},$$
$$\dot{U}_3 = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4 = 7.5 + j2.5 = 7.9056e^{j18.43^0} \text{ (В)},$$
$$\dot{U}_4 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 2.5 - j2.5 == 3.5355e^{-j45^0} \text{ (В)},$$
$$\dot{U}_6 = \dot{U}_J = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3 = 4.1666 + j5.8333 \text{ (В)}.$$

Все найденные здесь модули напряжений имеют такие же численные значения, что и рассчитанные ранее в Примерах 4 и 5. Однако напряжения $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_4$ имеют другой аргумент, отличающийся от прежних значений на величину $+180^0$ или -180^0. Это объясняется тем, что напряжения $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_4$ в методе УП ориентированы в противоположную сторону по сравнению с направлениями, указанными ранее. Смена условного положительного направления напряжения (или тока) влечёт за собой умножение комплекса, характеризующего это напряжение, на (-1), что эквивалентно изменению

аргумента на $\pm 180^0$. Действительно, множитель $-1 = e^{\pm j180^0}$. Применительно к сравнительному анализу рассматриваемых примеров **следует считать каждое из решений правильным !**

- Токи ветвей определим по обобщённой форме закона Ома (4.10). Они совпадают с ранее найденными значениями токов. Предлагается проверить это самостоятельно. Конечно следует помнить, что положительные направления токов должны совпадать с указанными здесь направлениями напряжений ветвей! Направления токов на схеме не показаны, так как в этом методе они вторичны и являются лишь следствием решённой задачи.

Задача решена.

Пример 7. Решение задачи методом наложения

В методе наложения исходная схема цепи (рис. 4.6) разбивается на ряд составных схем, где в каждой из них действует один источник энергии. На рис. 4.10 показана схема, в которой оставлен источник напряжения, а вместо источника тока – разрыв (режим ХХ), характеризующий внутреннее сопротивление источника тока. На рис. 4.11 изображена схема, в которой действует источник тока, а источник напряжения заменён короткозамкнутой перемычкой (режим КЗ), которая характеризует внутреннее сопротивление источника напряжения. Расчет каждой цепи производится независимо, определяются *составные токи*.

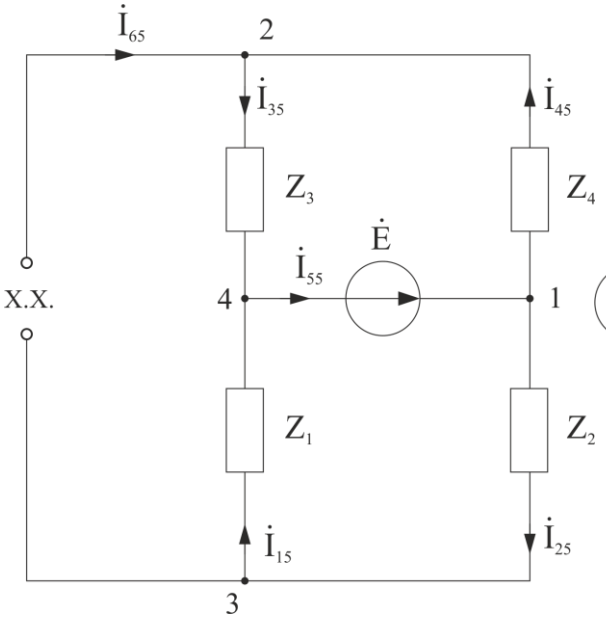


Рис. 4.10. Составная расчетная схема с источником напряжения.

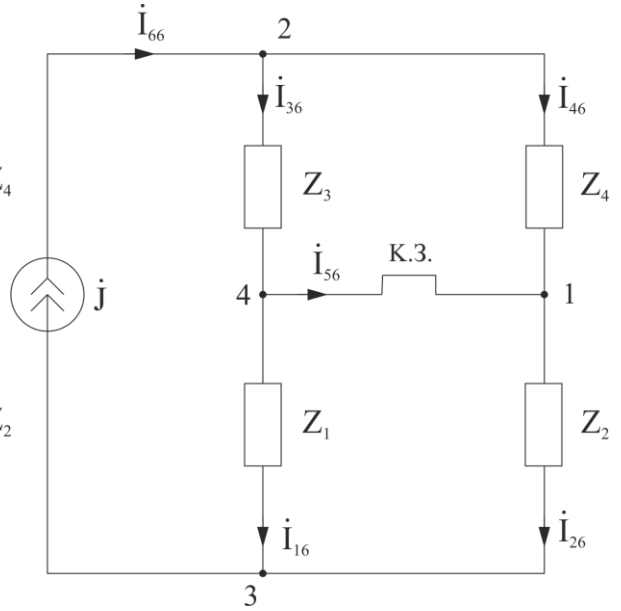


Рис. 4.11. Составная расчетная схема с источником тока.

В цепи рис. 4.10 действует идеальный источник ЭДС $\dot{E}$, он определяет напряжение между узловыми точками 1 и 4. Изменилась топология цепи, узловые точки 2 и 3 при исключении источника тока превратились в простые узлы. Выбор положительных направлений составных токов очевиден. Считаем, что первый индекс указывает на номер ветви, второй – на номер ветви с действующим источником энергии. Задача упростилась, токи $\dot{I}_{15}$ и $\dot{I}_{25}$ определяются независимо от токов $\dot{I}_{35}$ и $\dot{I}_{45}$. Имеем

$$\dot{I}_{15} = \dot{I}_{25} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_2} = \frac{10}{j15} = -j\frac{2}{3}, \quad \dot{I}_{35} = \dot{I}_{45} = \frac{\dot{E}}{Z_3 + Z_4} = \frac{10}{5 - j5} = 1 + j1,$$

$$\dot{I}_{55} = \dot{I}_{15} + \dot{I}_{35} = 1 + j\frac{1}{3}, \qquad \dot{I}_{65} = 0 \text{ (А)}.$$

В цепи рис. 4.11 действует источник тока, а источник напряжения заменён короткозамкнутой перемычкой, вследствие чего узловые точки 1 и 4 объединились и находятся под действием одного и того же потенциала. Топология цепи изменилась, образовались две группы параллельно соединённых элементов: Z_1, Z_2 и Z_3, Z_4. Находим составные токи, используя правило деления тока на части (1.11) и первый закон Кирхгофа:

$$\dot{I}_{16} = \dot{J}\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2}{3}, \qquad \dot{I}_{26} = \dot{J}\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{3}, \qquad \dot{I}_{36} = \dot{J}\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\dot{I}_{46} = \dot{J}\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, \quad \dot{I}_{56} = \dot{I}_{36} - \dot{I}_{16} = -\frac{1}{6} - j\frac{1}{2}, \quad \dot{I}_{66} = \dot{J} = 1 \text{ (А)}.$$

Алгебраически суммируем составные токи для каждой ветви, сравнивая их направления с условными положительными направлениями, указанными на рис. 4.6:

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_{15} + \dot{I}_{16} = \frac{2}{3} + j\frac{2}{3}, \qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_{25} + \dot{I}_{26} = \frac{1}{3} - j\frac{2}{3}, \qquad \dot{I}_3 = \dot{I}_{35} + \dot{I}_{36} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2},$$

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_{45} + \dot{I}_{46} = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}, \qquad \dot{I}_5 = \dot{I}_{55} + \dot{I}_{56} = \frac{5}{6} - j\frac{1}{6}, \qquad \dot{I}_6 = \dot{I}_{65} + \dot{I}_{66} = 1 \text{ (А)}.$$

Получены те же значения искомых токов.

Задача решена.

Пример 8. Решение задачи методом эквивалентного генератора

Метод позволяет определить ток в какой-либо одной ветви. Предположим, что в исследуемой цепи (рис. 4.5) представляет интерес поведение источника напряжения, который изменяет свою амплитуду и начальную фазу в какие-то моменты времени. Кроме того может меняться сопротивление пятой ветви, которое в исходной задаче принято равным нулю. Для того чтобы не повторять однотипные расчеты по анализу новых установившихся режимов синусоидальных токов, целесообразно привести всю неизменную часть цепи по отношению к исследуемой пятой ветви к эквивалентной схеме замещения, включающей последовательное соединение источника напряжения (ЭДС генератора) – $\dot{E}_{\Gamma}$ и его внутреннего сопротивления – Z_{Γ}.

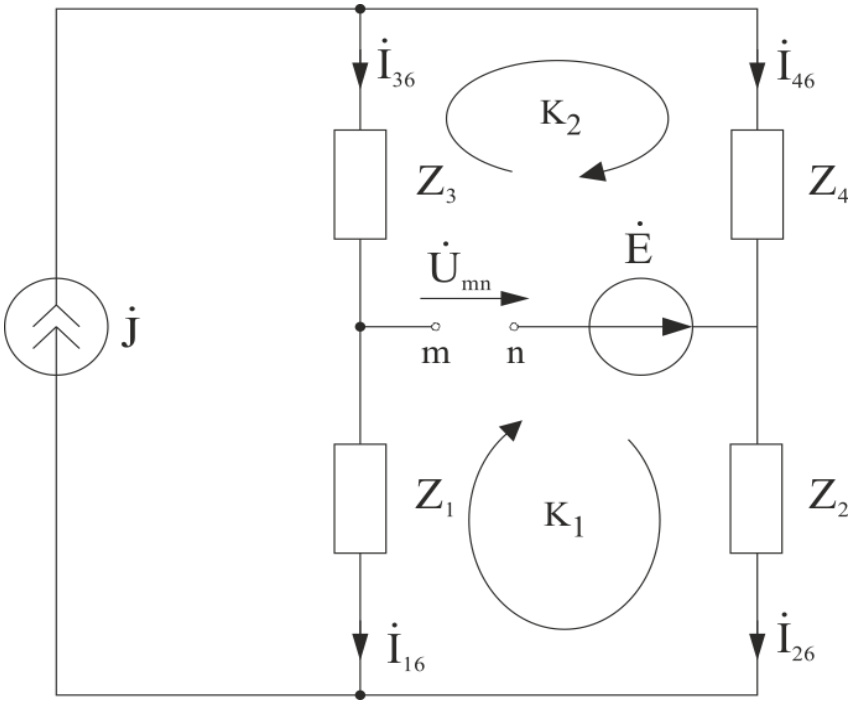


Рис. 4.12. Комплексная расчетная схема для определения ЭДС эквивалентного генератора.

Последовательность анализа изложена ранее в разделе 2.9 настоящего пособия:

- Разрывается пятая ветвь (рис. 4.12). Разомкнутые зажимы обозначаются (символы m и n), указывается условное положительное направление напряжения на разомкнутых зажимах $\dot{U}_{mn}$.
- Исходная схема цепи упростилась (разрыв ветви), ток пятой ветви стал равен нулю, и источник напряжения $\dot{E}$ уже не влияет на

распределение токов в цепи. Следовательно, узлы 1 и 4 (см. рис. 4.5) можно считать *простыми узлами*, а ветви 1 и 3 (а также 2 и 4) соединёнными последовательно. Токи в ветвях определяются только источником тока $\dot{J}$, их можно найти любым известным методом. Воспользуемся правилом деления тока на части (1.11):

$$\dot{I}_{16} = \dot{I}_{36} = \dot{J}\frac{(Z_2 + Z_4)}{(Z_1 + Z_3) + (Z_2 + Z_4)} = \frac{2}{5} + j\frac{1}{5},$$

$$\dot{I}_{26} = \dot{I}_{46} = \dot{J}\frac{(Z_1 + Z_3)}{(Z_1 + Z_3) + (Z_2 + Z_4)} = \frac{3}{5} - j\frac{1}{5}.$$

- Напряжение на разомкнутых зажимах определим из уравнения равновесия цепи по второму закону Кирхгофа для любого контура, включающего это напряжение. Например, для контура $k1$ имеем: $\dot{U}_{mn} - Z_1\dot{I}_{16} + Z_2\dot{I}_{26} = \dot{E}$. Откуда после подстановки численных данных получим $\dot{U}_{mn} = 7 - j4 = 8.06225 \cdot e^{-j29.74^0}$ (В). Это напряжение равно по величине ЭДС эквивалентного генератора, направление действия которого совпадает с выбранным направлением $\dot{U}_{mn}$. Тот же результат получим, если составить уравнение равновесия для контура $k2$. Если сделать обратный переход от комплексного действующего значения $\dot{E}_\Gamma = \dot{U}_{mn}$ к мгновенному значению напряжения, то получим исходные характеристики эквивалентного синусоидального источника:

$$e_\Gamma(t) = 8.06225\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 29.74^0) \text{ (В).}$$

- Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора определим как входное сопротивление цепи со стороны разомкнутых зажимов m и n. Схема для расчета представлена на рис. 4.13, в ней источник тока заменён разрывом, после чего узловые точки 2 и 3 стали простыми узлами, а источник напряжения замкнут накоротко.

$$\text{Имеем } Z_\Gamma = \frac{(Z_1 + Z_2) \cdot (Z_3 + Z_4)}{(Z_1 + Z_2) + (Z_3 + Z_4)} = R_\Gamma + jX_\Gamma = 9 - j3 \text{(Ом).}$$

Этот результат следует понимать как последовательное соединение резистора $R_\Gamma = 9\,(\text{Ом})$ и ёмкости с реактивным сопротивлением $X_\Gamma = 3\,(\text{Ом})$.

- Задача свелась к одноконтурной цепи (рис. 4.14), где по условию задачи $Z_5 = 0$.

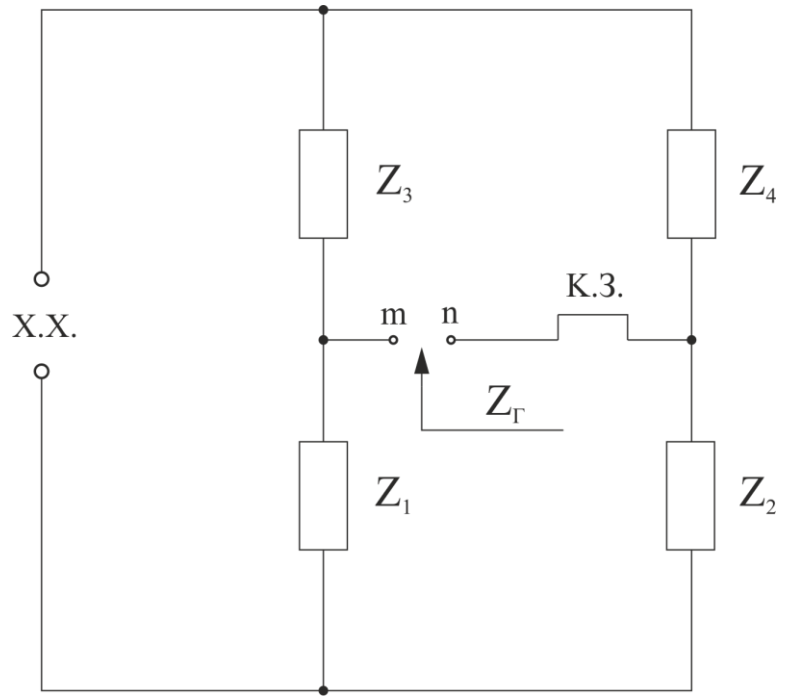


Рис. 4.13. Комплексная расчетная схема для определения внутреннего сопротивления эквивалентного источника напряжения.

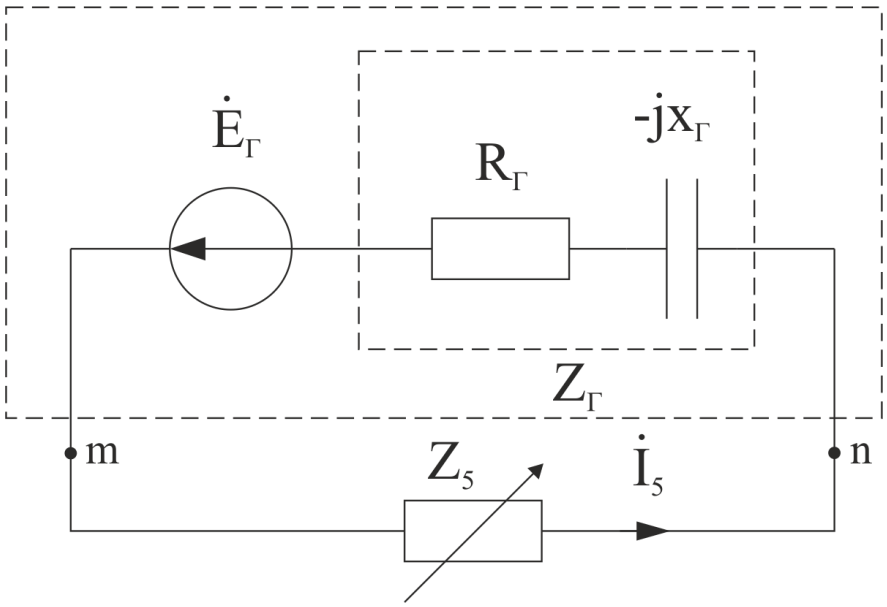


Рис. 4.14. Одноконтурная расчетная схема, преобразованная по отношению к пятой ветви.

Ток в пятой ветви определяется в общем случае формулой:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}_\Gamma}{Z_\Gamma + Z_5}. \qquad (4.12)$$

После подстановки численных данных получим

$$\dot{I}_5 = \frac{7 - j4}{9 - j3 + 0} = \frac{5}{6} - j\frac{1}{6} \text{ (A)}.$$

Это значение совпадает с ранее найденными решениями того же тока.

- Формула (4.12) универсальна, ей можно пользоваться для любых значений Z_5, так как остальные два параметра остаются неизменными. Более того, если кроме сопротивления Z_5 предположить возможность изменения ЭДС пятой ветви $\dot{E}$, то этот источник можно внести обратно в эту ветвь. Тогда эквивалент действия внешней цепи сведётся к источнику $\dot{E}'_\Gamma = \dot{E}_\Gamma - \dot{E} = 7 - j4 - 10 = -3 - j4 = 5e^{-j126.86^0}$. В этом случае в последовательной цепи будут действовать два синусоидальных источника: стационарный источник $e'_\Gamma(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 126.86^0)$ и источник пятой ветви $e(t) = 10\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t)$, амплитуда и начальная фаза которого может изменяться. Тогда эквивалентная комплексная схема замещения будет иметь вид (рис. 4.15).

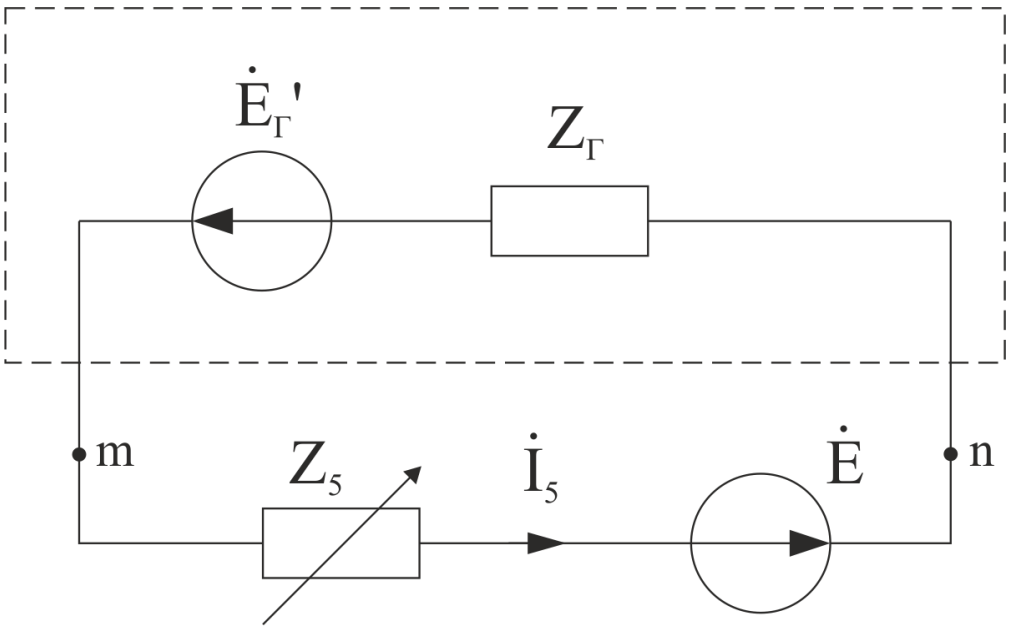


Рис. 4.15. Комплексная расчетная схема с эквивалентным генератором и выделенным источником пятой ветви.

Задача решена.

Заключение

1. Рассмотрены различные методы расчета разветвлённых электрических цепей синусоидального тока. Показано, что правильный выбор метода позволяет сократить время анализа. Особенно это важно при решении сложных задач, когда число ветвей и контуров более десяти.

2. Показано, что методы расчета имеют универсальный характер, и могут с равным успехом применяться как к цепям постоянного тока, так и к цепям синусоидального тока.

3. Оптимальный путь аналитического исследования цепи, практически исключающий ошибки, возможен только с предварительным анализом топологии (графа цепи), что включает процедуру выбора дерева графа и ветвей связи. Эта процедура достаточно проста, и может быть легко алгоритмизирована для ПЭВМ.

4. Следует обратить внимание на метод эквивалентного генератора, посредством которого есть возможность представить какую-либо часть электрической цепи в виде простой эквивалентной схемы замещения. Таких частей в исследуемой цепи может быть несколько.

Приложение

Операции с комплексными числами в пакете MathCAD

Пакет MathCAD воспринимает комплексные числа в алгебраической форме $a+bi$, где a и b – обычные действительные числа. Можно использовать букву j вместо i, как это принято в электротехнике. В результате вычислений MathCAD возвращает их в алгебраической форме, сопровождаемые символом i.

При вводе комплексных чисел нельзя использовать просто i или j сами по себе. Нужно всегда писать $1i$ или $1j$, иначе MathCAD их использует как переменную.

Возможно задание комплексных чисел в показательной форме $re^{(i\theta)}$, где аргумент θ должен быть задан в радианах. Если, например, по условию задачи аргумент θ задан в градусах, то для перевода в радианы необходимо домножить это его значение на множитель $(\frac{\pi}{180^\circ})$. Рекомендуется эту операцию сделать заранее.

Имена переменных вводятся в рабочем поле пакета MathCAD с клавиатуры. Через операцию присваивания := этим переменным задаются численные значения или функции. Знак присваивания вводится путем нажатия комбинации клавиш «Shift» и «:».

Пример 1. Например, r = 2, $\theta^\circ = 135^\circ$, $\theta = 135^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{4}\pi = 0,75\pi$ (рад).

В пакете MathCAD эти же исходные данные можно представить следующим образом:

$$\mathbf{r := 2} \qquad \mathbf{\theta град := 135} \qquad \mathbf{\theta рад := 135 \cdot \frac{\pi}{180}}$$

MathCAD возвращает эти числа как

$$\mathbf{r = 2} \qquad \mathbf{\theta рад = 2.356}$$

Можно записать через оператор присваивания $Z := re^{(i\theta)}$. Если вычислить это число, то MathCAD вернёт его в алгебраической форме:

$$\mathbf{Z := r \cdot e^{(\theta рад \cdot i)}} \qquad \mathbf{Z = -1.414 + 1.414i}$$

Операторы для работы с комплексными числами в MathCAD: *Re(Z)* – вещественная часть *Z*, *Im(Z)* – мнимая часть *Z*, $|Z|$ – модуль *Z*, *arg(Z)* – аргумент *Z* (возвращает результат в пределах $\pm\pi$ радиан). Указанные

операции вводятся в MathCAD вручную с клавиатуры, за исключением операции определения модуля.

Если переменная задана, то для определения её модуля следует кликнуть на ней левой кнопкой мыши и нажать комбинацию клавиш «Shift» и «|».

Комментарий: *Для определения модуля переменной можно также задействовать соответствующую операцию на панели Калькулятора (**Calculator Toolbar**). Панель Калькулятора появляется при нажатии левой кнопкой мыши на соответствующей иконке панели инструментов* *или её можно вызвать через меню View\Toolbars\Calculator. На панели Калькулятора следует кликнуть левой кнопкой мыши операцию определения модуля –* $|x|$.

Для рассматриваемого примера в MathCAD имеем:

$$\mathrm{Re}(Z) = -1.414 \qquad \mathrm{Im}(Z) = 1.414 \qquad |Z| = 2 \qquad \arg(Z) = 2.356$$

Пакет MathCAD может выводить результат любых алгебраических выражений с комплексными числами, представляя ответ в алгебраической форме. Продемонстрируем это на примере.

Пример 2. Введем переменную $Z_Э$ и определим ее как результат вычисления эквивалентного входного комплексного сопротивления цепи изображенной на рисунке 4.3 (см. пример 3, стр. 85) в пакете MathCAD:

$$Zэ := 150 - 100j + \frac{(200 - 100j)\cdot 100j}{200 - 100j + 100j} \qquad Zэ = 200$$

Пакет производит упрощение и выдает конечный результат в алгебраической форме. В данном примере $Z_Э$ имеет только не нулевую вещественную часть. При вводе переменной $Z_Э$ использована буква *j* вместо *i*, что допустимо как было сказано ранее.

Решение системы уравнений в пакете MathCAD

В пакете MathCAD системы уравнений записываются в матричной форме. Любая матрица представляет собой массив чисел. В электротехнике это квадратная матрица параметров элементов цепи и одностолбцовая матрица – вектор, который характеризует действующие в цепи источники энергии.

Имена матриц предварительно вводятся в рабочем поле пакета MathCAD с клавиатуры, после чего для каждой вводится символ присваивания :=.

а) Решение начинается с вызова окна вставки матрицы нажатием комбинации клавиш «Ctrl» и «M», где указывается число строк (rows) и столбцов (columns) матричной формы записи системы уравнений.

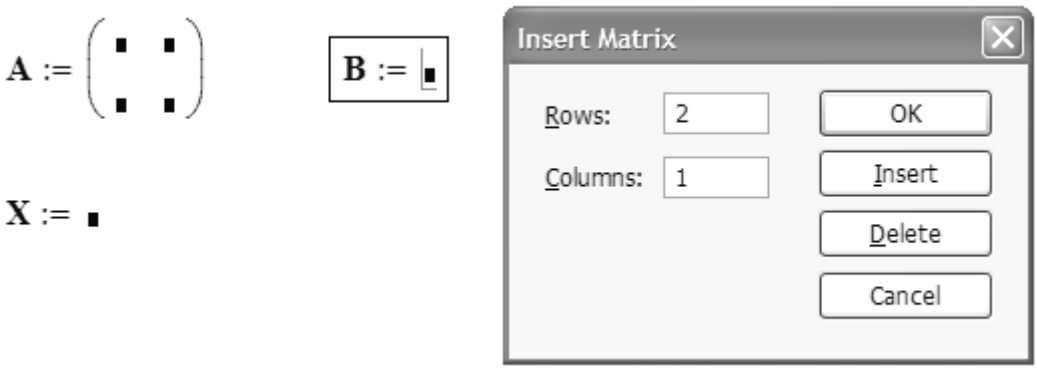
б) Каждый элемент матрицы можно задать предварительно через оператор присваивания :=. Если это сравнительно простые числа, то эту операцию можно сделать непосредственно, записав известные значения в матрицу (см. далее пример 3). Для цепей постоянного тока – это вещественные числа, для цепей синусоидального тока – комплексные числа, которые можно задавать как в алгебраической, так и в показательной форме.

в) Для решения системы линейных уравнений $AX=B$ можно использовать функцию *lsolve* или воспользоваться процедурой получения обратной матрицы A^{-1}.

Первый способ предполагает задание параметров квадратной матрицы A и вектора правых частей B (в электротехнике это заданные источники энергии), затем обращение к функции *lsolve*. Вектор решения X такой, что выполняется равенство $AX=B$.

Второй способ предполагает использование обратной матрицы A^{-1} и умножение её на вектор правых частей B, в результате чего определяется вектор решения $X = A^{-1}B$.

Пример 3. Решим первым способом систему уравнений второго порядка из примера 14 (стр. 52) с постоянными воздействиями. В рабочем поле пакета MathCAD с клавиатуры введём имена квадратной матрицы A, векторов правых частей B и решения X. Зададим их с помощью оператора присваивания :=. Вызов окна вставки матрицы осуществляется нажатием комбинации клавиш «Ctrl» и «M».



Для квадратной матрицы A число строк и столбцов равно двум, для вектора правых частей B число строк (rows) задаем – два, столбец

(columns) – один. Непосредственно записываем известные значения в матрицы, для цепей постоянного тока – это вещественные числа. Вектор решения *X* задаём через обращение к функции *lsolve*. Пакет выдает требуемый вектор решения *X*.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 1.2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} := \mathrm{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

В пакете MathCAD для комплексных параметров системы уравнений имеем возможность вводить параметры элементов ветвей и входных воздействий как в алгебраической, так и в показательной формах.

Пример 4. Пусть необходимо решить систему уравнений:

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{E}_1$$

$$Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{E}_2$$

где $Z_{11} = 4 + j4 = 4\sqrt{2}e^{j45^0} = 4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$, $Z_{12} = Z_{21} = -j2 = 2e^{-j90^0} = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$,

$Z_{22} = 2 - j6 = 2\sqrt{10}e^{jarctg(-3)}$, $\dot{E}_1 = j10 = 10e^{j90^0} = 10e^{j\frac{\pi}{2}}$, $\dot{E}_2 = 6e^{j30^0} =$

$= 6e^{j\frac{\pi}{6}} = 6\cos 30^0 + j6\sin 30^0 = 6\frac{\sqrt{3}}{2} + j6\frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + j3.$

Первый приём ввода комплексных параметров в алгебраической форме в пакете MathCAD:

$$\mathbf{Z11} := 4 + 4\mathrm{j} \qquad \mathbf{Z12} := -2\mathrm{j} \qquad \mathbf{Z21} := -2\mathrm{j} \qquad \mathbf{Z22} := 2 - 6\mathrm{j}$$

$$\mathbf{e1} := 10\mathrm{j} \qquad \mathbf{e2} := 3\sqrt{3} + 3\mathrm{j}$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} \mathbf{Z11} & \mathbf{Z12} \\ \mathbf{Z21} & \mathbf{Z22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{e1} \\ \mathbf{e2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} := \mathrm{lsolve}(\mathbf{Z}, \mathbf{E}) \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.939 + 1.262\mathrm{i} \\ -0.598 + 0.645\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0.939 + 1.262\mathrm{i} \\ -0.598 + 0.645\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Для решения системы линейных уравнений *ZX=E* использованы оба способа с применением функции *lsolve* и через процедуру получения обратной матрицы Z^{-1}. Ответы, найденные обоими способами, совпадают.

Второй приём ввода комплексных параметров в показательной форме в пакете MathCAD:

$$Z11 := 4\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}j} \qquad Z12 := 2e^{-\frac{\pi}{2}\cdot j} \qquad Z21 := 2e^{-\frac{\pi}{2}\cdot j} \qquad Z22 := 2\sqrt{10}\,e^{\operatorname{atan}(-3)\cdot j}$$

$$e1 := 10\cdot e^{\frac{\pi}{2}j} \qquad e2 := 6\cdot e^{\frac{\pi}{6}j}$$

$$Z := \begin{pmatrix} Z11 & Z12 \\ Z21 & Z22 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \end{pmatrix}$$

$$X := \operatorname{lsolve}(Z, E) \qquad X = \begin{pmatrix} 0.939 + 1.262i \\ -0.598 + 0.645i \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1}\cdot E = \begin{pmatrix} 0.939 + 1.262i \\ -0.598 + 0.645i \end{pmatrix}$$

Для решения системы линейных уравнений *ZX=E* также использованы оба способа с применением функции *lsolve* и через процедуру получения обратной матрицы Z^{-1}.

Оба способа введения исходных данных дают один и тот же конечный результат.

Пакет MathCAD выдаёт комплексный вектор решения *X* в алгебраической форме. Эти значения в электротехнике означают комплексные амплитудные или действующие значения токов или напряжений ветвей. Такая форма записи является промежуточной. Следует вектор *X* переписать в показательной форме, воспользовавшись операциями нахождения модуля и аргумента.

Можно для каждого элемента вектора решения *X* использовать известную процедуру перевода комплексного числа из алгебраической формы в показательную: $a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}e^{j\arctg(b/a)}$, которая выполняется вручную. Однако целесообразно выполнить эту процедуру с помощью операторов MathCAD для всех элементов вектора решения *X*.

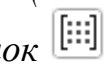
Для определения **вектора модулей** элементов решения *X* следует выполнить подряд **две операции**. Вначале даём имя *M* вектору модулей, а вектор решения *X* возьмем из рассмотренного выше примера 4. Вводим в рабочем поле MathCAD *M:* = *X*, используя операцию присваивания. Кликнем на *X* левой кнопкой мыши и нажимаем комбинацию клавиш

«Shift» и «|». Затем следует выполнить операцию векторизации каждого элемента вектора-столбца посредством нажатия комбинации клавиш «Ctrl» и «–». Пакет автоматически выполняет операцию векторизации. MathCAD выдаёт вектор модулей:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.939 + 1.262\mathrm{i} \\ -0.598 + 0.645\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} := \overrightarrow{|\mathbf{X}|} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1.573 \\ 0.88 \end{pmatrix}$$

Здесь *X* – исходный вектор-столбец, а *M* – полученный вектор модулей элементов.

Комментарий: *Для векторизации можно также задействовать соответствующую операцию на панели Матриц (**Matrix Toolbar**). Панель Матриц появляется при нажатии левой кнопкой мыши на соответствующей иконке панели инструментов* *или её можно вызвать через меню View\Toolbars\Matrix. На панели Матриц следует кликнуть левой кнопкой мыши операцию векторизации (vectorize) –* . *Отметим, что на этой же панели располагается значок*  *вызова окна вставки матриц.*

Для нахождения **вектора аргументов** достаточно выполнить операцию взятия аргумента от найденного вектора решения *X*. Например, дадим вектору аргументов имя ARG*x*, затем определим значения элементов матрицы посредством операции *arg*. Поскольку аргумент выдаётся MathCAD в радианах, то при необходимости перевода в градусы следует домножить его на множитель $(180^\circ / \pi)$.

$$\mathbf{ARGx} := \arg(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{ARGx} = \begin{pmatrix} 0.931 \\ 2.319 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ARGx_град} := \frac{180}{\pi}\arg(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{ARGx_град} = \begin{pmatrix} 53.334 \\ 132.848 \end{pmatrix}$$

Теперь для вектора решения *X* определены его модули и аргументы, которые пользователь должен самостоятельно объединить в комплексное выражение в показательной форме.

Рассмотрим решение в пакете MathCAD системы линейных уравнений более высокого порядка.

Пример 5. Возьмем данные примера 5 (стр. 28), в котором рассмотрена цепь с постоянными воздействиями, где требуется решить систему линейных уравнений четвертого порядка. В рабочем поле пакета MathCAD с клавиатуры введём имена квадратной матрицы *A*, векторов правых частей *B* и решения *X*. Зададим их с помощью оператора

присваивания :=. Вызов окна вставки матрицы осуществляется нажатием комбинации клавиш «Ctrl» и «M». Для квадратной матрицы *A* число строк и столбцов равно четырем, для вектора правых частей *B* число строк задаем также четыре, столбец – один. Непосредственно записываем известные значения в матрицы, для цепей постоянного тока – это вещественные числа. Вектор решения *X* задаём через обращение к функции *lsolve*. Пакет выдает требуемый вектор решения *X*.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad X := \text{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 3.2 \\ -2.8 \\ 2.4 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Пример 6. Возьмем данные примера 4 (стр. 90), в котором рассмотрена цепь с синусоидальными воздействиями, где требуется решить систему линейных уравнений пятого порядка. В рабочем поле пакета MathCAD с клавиатуры введём имена квадратной матрицы *A*, векторов правых частей *B* и решения *X*. Зададим их с помощью оператора присваивания :=. Вызов окна вставки матрицы осуществляется нажатием комбинации клавиш «Ctrl» и «M». Для квадратной матрицы *A* число строк и столбцов равно пяти, для вектора правых частей *B* число строк задаем также пять, столбец – один. Непосредственно записываем известные значения в матрицы, для цепей синусоидального тока это комплексные числа. Вектор решения *X* задаём через обращение к функции *lsolve*. Пакет выдает требуемый вектор решения *X*. Следует вектор *X* переписать в показательной форме, воспользовавшись операциями нахождения модуля и аргумента *X*, описанными выше.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5j & 10j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5j & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad X := \text{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 0.667 + 0.667i \\ 0.333 - 0.667i \\ 1.5 + 0.5i \\ -0.5 - 0.5i \\ 0.833 - 0.167i \end{pmatrix}$$

$$MODx := \overrightarrow{|X|} \qquad MODx = \begin{pmatrix} 0.943 \\ 0.745 \\ 1.581 \\ 0.707 \\ 0.85 \end{pmatrix} \qquad ARGx := \arg(X) \qquad ARGx = \begin{pmatrix} 0.785 \\ -1.107 \\ 0.322 \\ -2.356 \\ -0.197 \end{pmatrix}$$

$$ARGx_град := \frac{180}{\pi} \arg(X) \qquad ARGx_град = \begin{pmatrix} 45 \\ -63.435 \\ 18.435 \\ -135 \\ -11.31 \end{pmatrix}$$

Построение векторных диаграмм в пакете MathCAD

В результате решения системы линейных уравнений определяются комплексные амплитудные или действующие значения токов и напряжений ветвей и записываются в показательной форме. Довольно часто требуется отобразить на комплексной плоскости найденные вектора или построить в масштабе векторные диаграммы токов для выбранного узла электрической цепи и напряжений в заданном контуре.

Опишем в рабочем поле MathCAD функцию, задающую вектор из начала координат.

$$\mathbf{v(x)} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Re(x)} & \mathbf{Im(x)} \end{pmatrix}$$

Здесь в прямоугольной системе координат *X*-*Y* нулевой вектор-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Re}(x) \end{pmatrix}$ матрицы *v(x)* определяет проекцию вектора *x* на ось *X*, первый вектор-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Im}(x) \end{pmatrix}$ матрицы *v(x)* определяет проекцию вектора *x* на ось *Y*. Используя функцию *v(x)* можно отображать заданные векторы из начала координат в виде отрезков на плоскости.

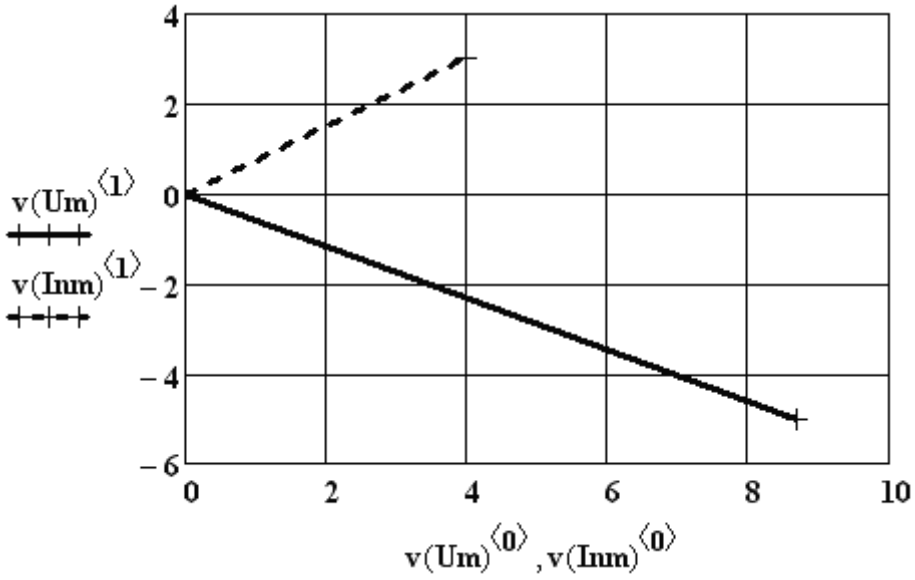
Пример 7. Рассмотрим пример отображения на плоскости векторов напряжения и тока в пакете MathCAD. Возьмём данные примеров 1 и 2 (стр. 77) и введём в рабочем поле пакета MathCAD комплексную амплитуду напряжения $\dot{U}_m = 8.7 - j5$ в алгебраической форме. Комплексную амплитуду тока $\dot{I}_m = 5e^{j37^0}$ введём в показательной форме, при этом предварительно определим начальную фазу, переведя её из градусов в радианы.

$$\mathbf{Um} := \mathbf{8.7 - 5j} \quad \mathbf{(B)} \qquad \boldsymbol{\psi} := \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{180}}\boldsymbol{\pi} \qquad \mathbf{Inm} := \mathbf{5 \cdot e^{\psi \cdot j}} \quad \mathbf{(A)}$$

Примечание: *В данном примере комплексной амплитуде тока нельзя присвоить имя Im поскольку в MathCAD это, как уже говорилось, операция, выполняющая выделение мнимой части вектора.*

Отобразим на плоскости вектора напряжения и тока с присвоенными именами переменных *Um* и *Inm*. Для создания нового двумерного графика (X-Y Plot) следует нажать комбинацию клавиш «Shift» и «@». С применением функции *v(x)* по оси абсцисс графика откладываются

нулевые вектор-столбцы соответственно *v(Um)* и *v(Inm)*, по оси ординат графика первые вектор-столбцы соответственно *v(Um)* и *v(Inm)*. Для ввода вектор-столбцов следует использовать комбинацию клавиш «Ctrl» и «6».

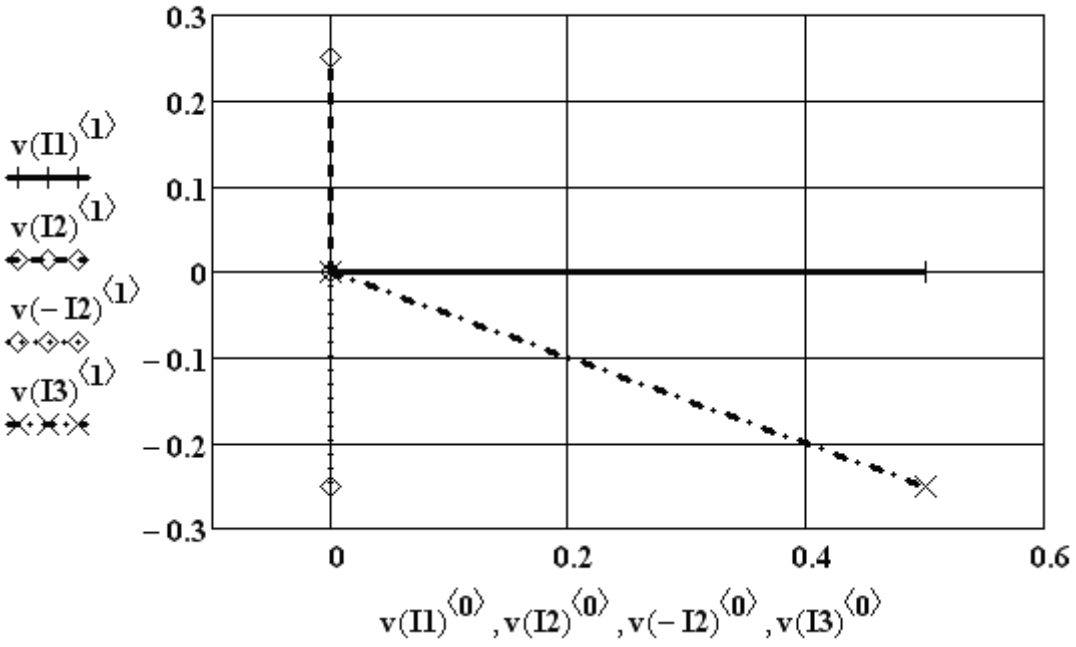


Выделим график, кликнув на нём левой кнопкой мыши, и, затем, нажмём правую кнопку мыши. В открывшемся окне находим строку – формат (Format) и выбираем её. Попадаем в соответствующее окно форматирования выбранного графика, в котором отражены настройки графика, которые можно редактировать по усмотрению пользователя.

Пример 8. Рассмотрим пример построения в масштабе векторных диаграмм токов для выбранного узла электрической цепи и напряжений в заданном контуре. Возьмем данные примера 3 (см. рис. 4.4, стр. 86), в котором выполнен расчет комплексных действующих значений токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и напряжений ветвей $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ и они записаны в алгебраической форме.

- В рабочем поле MathCAD задаём имена комплексных токов и напряжений. Введём значения токов в алгебраической форме записи, а напряжения переведём в показательную форму записи.
- Отобразим на одной графике векторную диаграмму токов, а на другом векторную диаграмму напряжений. Для создания нового двумерного графика (X-Y Plot) следует нажать комбинацию клавиш «Shift» и «@».
- С применением функции *v(x)* по оси абсцисс графиков откладываются нулевые вектор-столбцы токов или напряжений, по оси ординат графиков первые вектор-столбцы токов или напряжений. Для ввода вектор-столбцов следует использовать комбинацию клавиш «Ctrl» и «6».

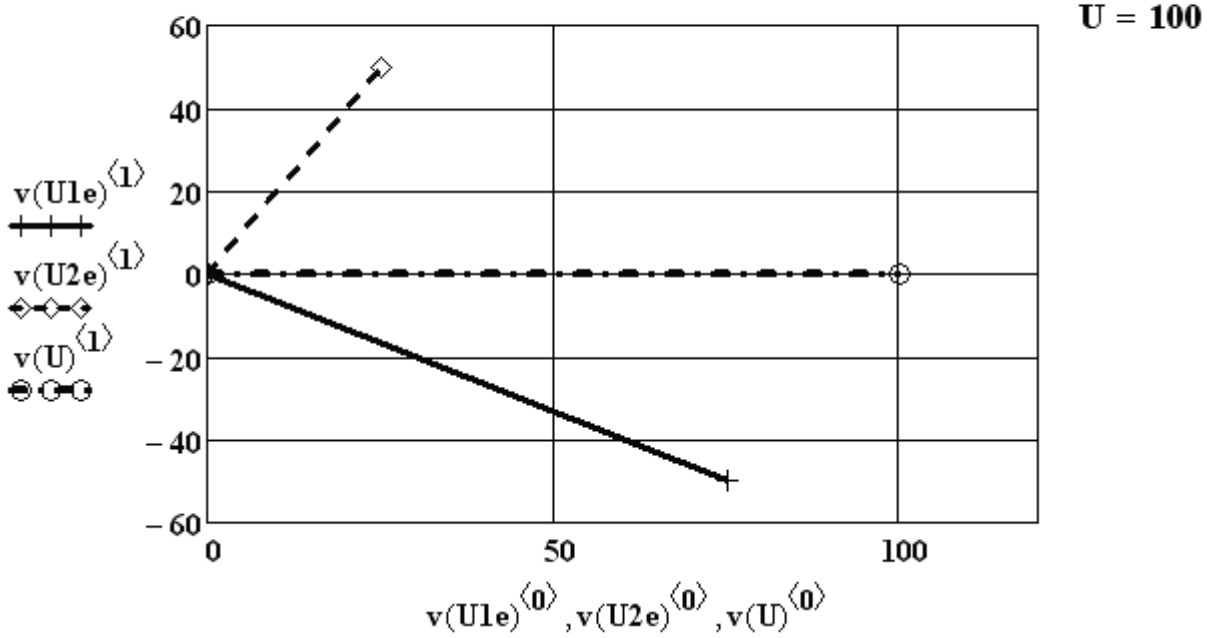
$I1 := 0.5 \qquad I2 := 0.25j \qquad I3 := 0.5 - 0.25j$



$U1 := 75 - 50j \qquad U2 := 25 + 50j$

$U1e := |U1| \cdot e^{\arg(U1)j} \qquad U2e := |U2| \cdot e^{\arg(U2)j} \qquad U := U1e + U2e$

$U = 100$



На последнем рисунке вектор напряжения источника $\dot{U}$ найден как результирующий вектор от сложения векторов $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. Таким образом, используя возможности пакета MathCAD и функцию *v(x)* можно также отобразить результирующий вектор без непосредственного суммирования составляющих векторов.

Отображение сложения и вычитания векторов в пакете MathCAD

Опишем в рабочем поле MathCAD функцию, задающую один вектор из конца другого вектора:

$$\mathbf{v1}(\mathbf{x0}, \mathbf{x1}) := \begin{pmatrix} \mathbf{Re(x0)} & \mathbf{Im(x0)} \\ \mathbf{Re(x0)} + \mathbf{Re(x1)} & \mathbf{Im(x0)} + \mathbf{Im(x1)} \end{pmatrix}$$

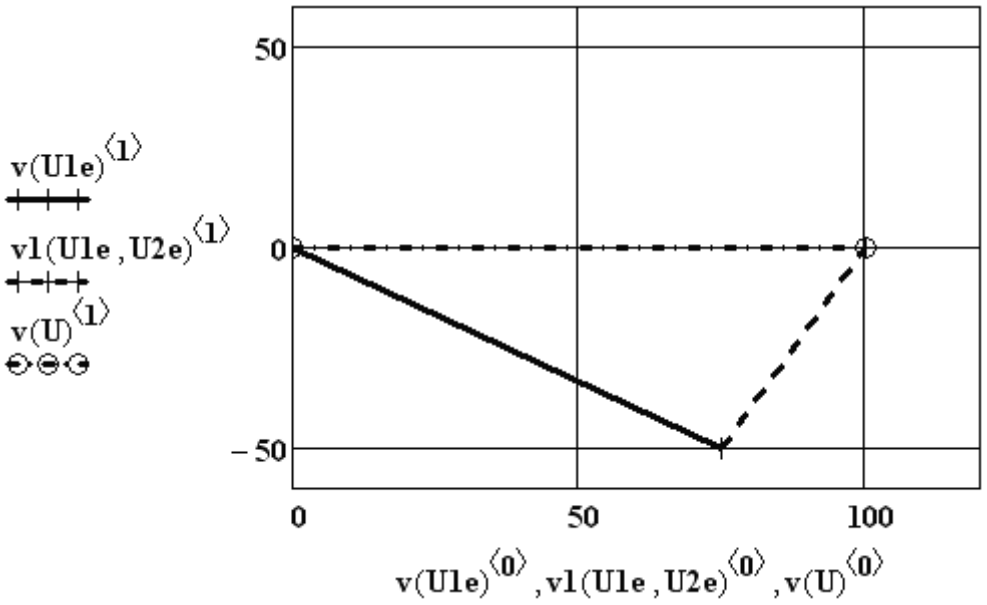
Здесь в прямоугольной системе координат *X*-*Y* нулевой вектор-столбец $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(x0) \\ \mathrm{Re}(x0) + \mathrm{Re}(x1) \end{pmatrix}$ матрицы $v1(x0, x1)$ определяет проекцию вектора *x1* на ось *X* из конца проекции вектора *x0* на ту же ось, первый вектор-столбец $\begin{pmatrix} \mathrm{Im}(x0) \\ \mathrm{Im}(x0) + \mathrm{Im}(x1) \end{pmatrix}$ матрицы $v1(x0, x1)$ определяет проекцию вектора *x1* на ось *Y* из конца проекции вектора *x0* на ту же ось. Используя функцию $v1(x0, x1)$ можно отображать заданный вектор из конца другого вектора в виде отрезка на плоскости.

Пример 9. В рассмотренном ранее примере 8 вектор напряжения источника $\dot{U}$ найден как результирующий вектор от сложения векторов $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. Функция $v1(x0, x1)$ позволяет наглядно отобразить, что результатом сложения векторов $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ действительно является вектор напряжения источника $\dot{U}$.

Используем, введенные в предыдущем примере, имена и значения комплексных напряжений в показательной форме.

- Создадим новый двумерный график (X-Y Plot) нажатием комбинации клавиш «Shift» и «@».
- Отобразим на нём последовательно вектор $\dot{U}_1$ через функцию *v(x)*, затем, с применением функции $v1(x0, x1)$, построим из его конца вектор $\dot{U}_2$. Также выведем на график вектор напряжения источника $\dot{U}$, найденный через функцию *v(x)*.
- Результаты построения наглядно отражают, что вектор напряжения источника получен в результате векторного суммирования $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$.

Отметим, что если вектор *x1* введён в функцию $v1(x0, x1)$ со знаком плюс, то это будет соответствовать операции векторного сложения *x0* и *x1*. Если же вектор *x1* введён в функцию $v1(x0, x1)$ со знаком минус, то это будет соответствовать операции векторного вычитания *x1* из *x0*.



Отметим, что используя предложенный подход можно отображать на комплексной плоскости вектора или строить в масштабе векторные диаграммы напряжений и токов в <u>трехфазных системах!</u>

Построение графиков мгновенных функций в пакете MathCAD

В результате решения довольно часто требуется перейти от комплексов обратно к мгновенным функциям (мгновенным значениям токов или напряжений ветвей) и их изобразить. Параметры мгновенных значений могут быть заданы как величины амплитуд и их начальных фаз.

Информация о параметрах синусоиды заложена в показательной форме записи комплексных амплитуд токов и напряжений.

Пример 10. Рассмотрим пример построения мгновенных функций напряжения и тока из примеров 1 и 2 (стр. 77), где комплексная амплитуда напряжения $\dot{U}_m = 8.7 - j5$ задана в алгебраической форме, а комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = 5e^{j37^0}$ в показательной форме. Как составную часть задачи необходимо указать переход от алгебраической формы записи вектора напряжения к показательной форме.

Будем строить графики мгновенных функций напряжения и тока в радианной мере. На рисунке отражен листинг программы построения мгновенных функций напряжения $u(\alpha)$ и тока $i(\alpha)$ в пакете MathCAD.

В начале программы осуществляется перевод комплексной амплитуды напряжения в показательную форму, после чего комплексные параметры становятся известными. Далее указывается радианный интервал изменения графиков от нуля до $\alpha_k = 4\pi$ (или 2π) и число точек на

графике n = 200. Создаём новый двумерный график (X-Y Plot) нажатием комбинации клавиш «Shift» и «@», в котором по оси абсцисс указывается переменная α, а по оси ординат функции мгновенных значений.

$Um := 8.7 - 5j$ (В) $\quad \psi := \frac{37}{180}\pi \quad Inm := 5 \cdot e^{\psi \cdot j}$ (А)

$U_m := |Um|$ амплитуда напряжения, В

$\psi u := \arg(Um)$ начальная фаза напряжения, рад

$I_m := |Inm|$ амплитуда тока, А

$\psi i := \arg(Inm)$ начальная фаза тока, рад

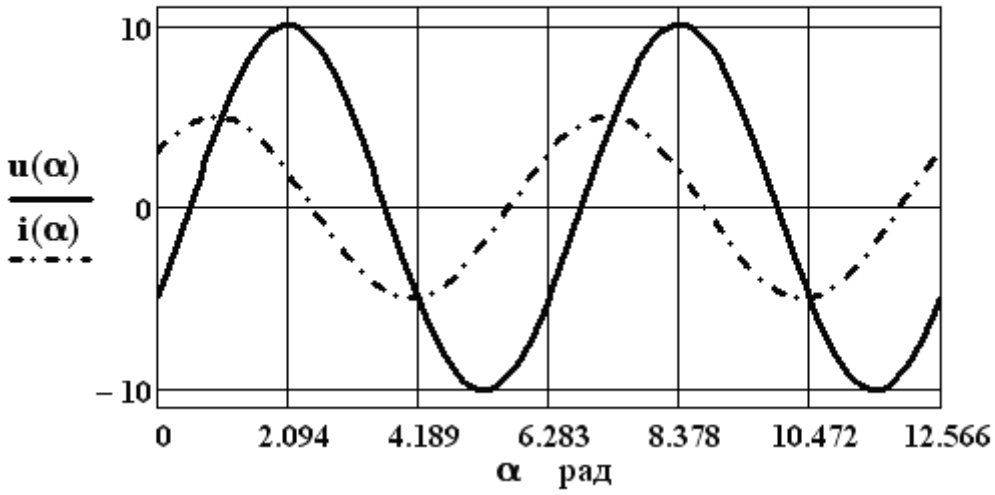
$n := 200$ число расчетных точек

$\alpha k := 4\pi$ рад

$\alpha := 0, \frac{\alpha k}{n} .. \alpha k$ расчетный интервал, рад

$u(\alpha) := U_m \sin(\alpha + \psi u)$ мгновенная функция напряжения, В

$i(\alpha) := I_m \sin(\alpha + \psi i)$ мгновенная функция тока, А



Пользователь может самостоятельно указать на оси абсцисс графика вместо радианной меры градусную.

Если есть необходимость построить график в зависимости от времени, то необходимо знать период изменения функции T (с) и переписать мгновенные значения как $u(t) := U_m \cdot \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi_u)$, $i(t) := I_m \cdot \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi_i)$ и задать расчётный интервал как $t := 0, \frac{2T}{n} .. 2T$.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1978 (и др. издания).

2. Ионкин П.А. ТОЭ, том 1. Основы теории линейных цепей. М., Высшая школа , 1976.

3. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.- М.: Высшая школа, 1980 (и др. издания).

4. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986.

5. Новгородцев А.Б. 30 лекций по теории электрических цепей. Учебник для вузов. - СПб.: Политехника, 1995 (и др. издания).

6. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. Курс лекций. – СПб.: ”КОРОНА принт”, 2000.

7. Попов В.П. Основы теории цепей. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. (и др. издания).

8. Башарин С.А., Фёдоров В.В. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля. Учебное пособие. – М.: Издательский центр “Академия” , 2004.

9. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в упражнениях и задачах: Практическое пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001.

10. Осипов Ю.М., Петров Е.А. Анализ разветвленных цепей постоянного и переменного тока. Учебное пособие. - СПбГИТМО(ТУ), 1998 (2002).

11. Осипов Ю.М. Частотный и временной анализ стационарных и переходных характеристик линейных электрических цепей. Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ. Ч.2. – СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2002.

12. Половко А. М., Ганичев И. В. Mathcad для студента. – СПб.: БХВ - Петербург, 2006.

Оглавление

Введение…….. 3
1. Основные понятия и определения…… 4
1.1. Элементы электрической цепи ……... 4
Резистивное сопротивление……... 4
Индуктивный элемент…… 6
Ёмкостной элемент……. 6
Источник напряжения…… 7
Источник тока…….. 9
1.2. Основные задачи и законы электрических цепей……. 10
1.3. Преобразования цепей с элементами одного типа……... 11
Последовательное соединение элементов…… 11
Параллельное соединение элементов……... 12
Смешанное соединение элементов……... 14
1.4. Расчет входных сопротивлений……. 16
1.5. Основные топологические понятия и определения…….. 18
2. Резистивные цепи……... 20
2.1. Обобщённая форма закона Ома…….. 20
2.2. Уравнения равновесия электрической цепи…….... 22
Первый закон Кирхгофа…… 22
Второй закон Кирхгофа…….. 24
2.3. Прямая задача анализа электрической цепи……. 25
Использование законов Кирхгофа……. 25
2.4. Расчет разветвлённых цепей с одним источником энергии……... 32
Метод входного сопротивления…… 32
Метод пропорциональных величин…….. 33
2.5. Метод наложения……. 35
2.6. Особенности составления уравнений цепи при наличии ветвей с идеальными источниками…… 40
Преобразования ветвей с идеальными источниками напряжения……. 40
Преобразования ветвей с источниками тока…… 42
2.7. Метод контурных токов…….. 44
Метод контурных токов для цепей с ветвями первого типа…….. 45
Метод контурных токов для цепей с ветвями первого и второго типа……. 47
2.8. Метод узловых потенциалов…….. 50
2.9. Метод эквивалентного генератора…… 56
3. Расчет электрических цепей средней сложности…… 63
3.1. Основные топологические понятия……... 63
3.2. Расчет цепей с помощью топологического графа…… 66
3.3. Рекомендации по формированию уравнений равновесия цепи…….. 73
4. Анализ цепей при синусоидальных воздействиях…….. 76
4.1. Основные понятия и определения…….. 76
4.2. Уравнения равновесия цепи…… 77
4.3. Обобщённая форма закона Ома…….... 80
4.4. Простая разветвлённая цепь с одним источником энергии……. 83
4.5. Разветвлённая цепь с двумя источниками энергии…….. 87
Заключение…… 105
Приложение…… 106
Литература…….. 119

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ПРЕЦИЗИОННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.С.ТОМАСОВ

При реорганизации **в 1930 году** техникума точной механики и оптики в учебный комбинат, состоящий из института, техникума и ФЗУ в системе Всесоюзного объединения оптико-механической промышленности, руководство комбинатом уделяло достаточно большое внимание качеству преподавания дисциплин электротехнического цикла, приглашая на работу известных ленинградских профессоров-электротехников.

В те годы электротехническую подготовку в нашем институте проводили кафедры «Электротехники» и «Электроизмерительные приборы». Кафедрой «Электротехники» руководил профессор Салтыков Лев Николаевич, а кафедрой «Электроизмерительные приборы» профессор Шишелов Л.П.

С 21 ноября 1937 года до эвакуации института кафедрой заведовал Александр Александрович Солодовников, который являлся в те годы известным специалистом в области электротехники и электроизмерительных приборов.

Во время войны при эвакуации ЛИТМО в г. Черепаново и после возвращения из эвакуации кафедрой руководил доцент, кандидат технических наук Березниковский Сергей Федорович.

В послевоенные годы в Ленинграде, да и в целом по стране, ощущался острый дефицит опытных преподавателей высшей школы, и руководство институтом принимает решение о приглашении в институт для работы по совместительству и исполнения обязанностей заведующего кафедрой «Общей и специальной электротехники» известного ученого, педагога и методиста Людвига Марианович Пиотровского, в то время заведующего аналогичной кафедрой в Политехническом институте и автора известных монографий: «Электрические машины» в двух частях 1957 и 1958 года издания, написанная в соавторстве с академиком АН СССР Костенко М.П., позднее дважды переизданная в 1965 и 1973 годах, «Трансформаторы» 1934 года издания, «Испытания электрических машин» в двух частях 1937 и 1938 года издания, «Электрические машины» (для учащихся техникумов) 1949 года и т.д.

В 1948 году на базе бывшей кафедры «Общей и специальной электротехники» образуются три кафедры: «Общей электротехники и электрических машин», зав.каф. доцент Березниковский С.Ф., «Теоретических основ электротехники», зав. каф. профессор Слепян Л.Б., «Электроизмерительных приборов» и.о. зав. каф. профессор Слепян Л.Б., но в том же 1948 году кафедра «Электроизмерительных приборов» расформируется и ее штаты передаются на кафедру «Автоматики и телемеханики».

В 1951 году кафедры «Электротехники» и «ТОЭ» объединяют в единую кафедру «Электротехники и ТОЭ» в составе Радиотехнического факультета, под руководством доцента Березниковского С.Ф.

В 1956 году в составе Радиотехнического факультета вновь образуются две кафедры – «ТОЭ» зав. каф. доцент Сочнев А.Я., «Электрических машин» зав.каф. доцент Березниковский С.Ф.

В 1961 году в связи со смертью доцента Березниковского С.Ф. в ЛИТМО приглашают проф. Сахарова А.П. , который в мае этого же года избирается на должность зав. каф. «Электрических машин».

В 1965 году на должность заведующего кафедрой «Электрические машины» избирается доцент, к.т.н. Глазенко Т.А. и в 1968 году приказом Министра Высшего и Среднего образования СССР № 854 от 29 ноября кафедры «ТОЭ» и «Электрических машин» объединяются в единую кафедру «Электротехники».

Профессор Глазенко Т.А. являлась одним из наиболее ярких воспитанников Ленинградской электротехнической школы, она **в 1948 году** с отличием закончила энергетический факультет Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта и начала работать в институте механизации и электрификации сельского хозяйства на кафедре общей и теоретической электротехники. После прохождения одногодичной аспирантуры **в декабре 1953 года** защитила диссертацию и

получила степень кандидата технических наук, а **в 1966 году** докторскую диссертацию и более **25 лет** возглавляла кафедру.

Татьяной Анатольевной Глазенко в эти годы по существу была создана ленинградская школа силовой электроники, специалисты которой успешно решали задачи определения электрофизических параметров силовых приборов, задачи по созданию высокоэффективных алгоритмов коммутации в современных системах электропривода и источниках питания.

В 1990 году на должность заведующего кафедрой избирается профессор, д.т.н. Герман - Галкин Сергей Германович. **С 1991 года** кафедрой руководит доцент, кандидат технических наук, Томасов Валентин Сергеевич.

В связи с тем, что кафедра стала совмещать преподавание специальных дисциплин с традиционными для нее, электронно-электротехническими дисциплинами общетехнического цикла для базовых направлений университета: оптотехника и приборостроение, она была **в 1996 году** переименована **в кафедру электротехники и прецизионных электромеханических систем (ЭТ и ПЭМС).**

С 1992 по 2005 годы на кафедре работал заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, действительный член Международной Энергетической академии, профессор, д.т.н., Сабинин Ю.А. Сегодня на кафедре работают: профессор, д.т.н. Овчинников И.Е.; доценты, к.т.н.: Осипов Ю.М., Петров Е.А., Толмачев В.А., Усольцев А.А., Губанов Н.Н., Денисова А.В., Лукичев Д.В., Никитина М.В., Борисов П.А.; доцент Гурьянов В.А.; ст. преподаватели Махин И.Е., Денисов К.М.; ассистенты: Серебряков С.А., Жданов И.Н.

Осипов Юрий Михайлович, Борисов Павел Александрович

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 14.03.2012
Заказ № 2451
Тираж 150 экз.
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49