Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский
Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики

Кафедра систем управления и информатики

В.Ю. Тертычный-Даури

ДИНАМИКА РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2012

УДК 517.977, 519.95, 531.8.

Тертычный-Даури В.Ю. Динамика робототехнических систем. Учебное пособие. — СПб.: НИУ ИТМО, 2012. — 128 с.

В пособии излагаются основы механики робототехнических систем применительно к управляемым манипуляторам и шагающим устройствам. Вначале рассматривается динамика систем твердых тел со связями в тензорном (индексном) изложении, которая затем апробируется на примерах плоского манипулятора при пространственном движении, антропоморфном механизме и автоматическом шагающем аппарате со многими конечностями. Везде осуществлен вывод управлений движения. Пособие предназначено для студентов старших курсов факультета компьютерных технологий и управления НИУИТМО, специализирующихся по направлению подготовки “Мехатроника и робототехника” (с профилем подготовки “Интеллектуальные технологии в робототехнике”).

Илл. 8, список литературы — 100 наим.

Рецензенты:
д. физ.-мат. н., профессор Шориков А.Ф.
д. физ.-мат. н., профессор Граничин О.Н.
Одобрено на заседании кафедры СУиИ, протокол № 2 от 05.04.2012
Одобрено Ученым советом факультета КТиУ, протокол № 7 от 11.09.2012

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория "Национальный исследовательский университет". Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009-2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование “Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики”.

В.Ю. Тертычный-Даури. Динамика робототехнических систем. СПб.: НИУ ИТМО, 2012. — 128 с.

Оглавление

Введение

Пособие посвящено изложению основ динамического описания движения различных робототехнических систем (РС). Материал пособия служит учебным задачам разработки модельных образцов роботов-манипуляторов и шагающих аппаратов, оборудованных встроенными средствами вычислительной техники.

Увеличение надежности и эффективности функционирования пространственных РС можно связать с переходом на новые качественные методы их использования и синтеза, совершенствованием технологии их аналитического конструирования, применением различных вычислительных устройств и процедур программирования.

Однако основные качества и особенности работы этих систем закладываются на самой первой стадии проектирования при выборе структурной схемы и кинематических параметров. Целесообразно поэтому при создании новых образцов робототехники уделять больше внимания этапу математического, а затем и компьютерного моделирования.

Рациональным выбором структуры и параметров РС можно не только повысить надежность и долговечность, но и существенно уменьшить размеры, массу, увеличить результативность применения этих систем в практической деятельности.

Достигаемые при этом положительные результаты часто связаны с дополнительными теоретическими исследованиями и численным моделированием, для проведения которых требуются глубокие знания проектировщиков в области аналитической механики, теории машин и механизмов, теории управления компьютерных технологий. Данное учебное пособие призвано служить именно этим целям: дополнить основные сведения по механике, содержащиеся

в систематических учебных курсах и которых оказывается явно недостаточно для решения практических робототехнических задач всевозрастающей степени сложности.

Глава 1 посвящена механике систем (агрегатов) твердых тел (СТТ) с упором на тензорный (индексный) способ записи управлений движения и управлений связей. Такой подход позволяет в наиболее удобной и сжатой форме подготавливать все необходимые динамические соотношения для автоматического вывода управлений движения СТТ с целью дальнейшей компьютерной реализации.

В главе 2 особое внимание уделяется проверке данного аналитического подхода применительно к пространственному движению плоского четырехзвенного манипулятора.

В главе 3 речь идет об организации управляемого локомоционного (шагающего) движения, совершаемого антропоморфными многозвенными шарнирными механизмами. Эти устройства снабжены подвижными конечностями, с помощью которых возможно перемещение подобных механизмов на местности. Первостепенное значение придается изучению различных методов формирования управляющих воздействий в шарнирах шагающих механизмов. Анализируются фазы ходьбы и их особенности. Представлены целостные концепции синтеза локомоций при импульсных воздействиях, при осуществлении комфортабельной ходьбы и при заданной синергии, когда изначально определяется тип ходьбы.

В главе 4 собраны результаты по механике управляемых СТТ применительно к локомоционным робототехническим устройствам со многими конечностями. Сюда вошли разделы по аналитическому проектированию кинематической и динамической моделей локомоционных систем (ЛС), проанализированы их особенности.

В Приложении рассматривается метод динамических возмущений для ЛС со свободными конечностями и решаются задачи стабилизации движения корпуса шагающего аппарата при наличии этого вида конечностей.

Глава 1

Введение в механику систем твердых тел

Интерес к механическим агрегативным системам твердых тел (СТТ) и особенно к управляемым СТТ обусловлен развитием современной науки и техники и в первую очередь развитием средств вычислительной техники, позволяющей быстро и эффективно регулировать движение сложных робототехнических, космических и других управляемых агрегативных СТТ.

Вместе с тем, по-прежнему остается востребованным общий формализм математического описания движения СТТ в наиболее удобной для численных и аналитических исследований форме. Имеется много разработок решения различных задач динамики и управления СТТ, например, сошлемся в этой связи на известные учебные курсы, книги и статьи [20–22, 27, 40, 42, 54–56, 72, 74, 95] по механике систем твердых тел.

В качестве основы для главы 1 послужили результаты работ [40, 42], в которых излагается тензорная методика в индексных обозначениях решения динамических задач механики применительно к СТТ. Представляется, что тензорный метод является одним из наиболее общих и наиболее удобных для автоматического вывода уравнений движения и уравнений связей, а также для численной обработки и реализации данных анализа.

Использование тензорных сверток в этом методе позволяет уменьшать (сжимать) число уравнений движения в исходных избыточных опорных координатах. Приведенный здесь метод сжатия является общим и в смысле одинаковой применимости его как к разомкнутым, так и к замкнутым или иным типам СТТ.

В § 1.1 поясняется концепция динамического описания неуправляемой системы точек с голономными и неголономными связями. Упор сделан на неклассический тензорный способ вывода уравнений движения. По внешнему виду эти уравнения отличаются от классических уравнений Лагранжа и Аппеля, хотя по сути своей им тождественны.

§ 1.2, посвященный системам твердых тел, является естественным продолжением предыдущего параграфа. Вывод уравнений движения систем твердых тел основан на выборе опорных тел и записи уравнений движения в опорных координатах. Показано, что классические уравнения движения Лагранжа второго рода для агрегата твердых тел представляют собой линейную комбинацию уравнений движения опорных тел.

Результаты и выводы § 1.1, § 1.2 апробируются в главе 2 на схеме получения уравнений движения плоского четырехзвенного манипулятора, совершающего пространственное движение. Ковариантные уравнения движения манипулятора записаны в явном развернутом виде.

1.1 Система материальных точек со связями

Рассмотрим вначале в методических упрощающих целях задачу вывода уравнений движения материальных точек при наличии ограничивающих связей. Отметим сразу же, что вывод уравнений классическими методами и выписывание их в явном виде представляет собой достаточно сложную и трудоемкую процедуру.

Вывод уравнений движения с помощью неклассических тензорных методов [40, 42, 81] при использовании индексной записи значительно упрощает и унифицирует схему получения уравнений, которые по своему виду отличаются от классических уравнений Лагранжа второго рода и Аппеля, хотя на самом деле являются теми же самыми уравнениями, но представленными в тензорной форме.

1.1.1 Система точек с голономными связями.

Будем опираться на обозначения да уравнений движения, имеющиеся в работах [40, 42].

Пусть задана система M материальных точек. Введем обозначения: $x_{\mu i}$ — декартовы координаты точек в неподвижной системе Ox_i, $i = 1, 2, 3$, $F_{X\mu i}$ — равнодействующая всех внешних и внутренних сил, действующих на μ–ю точку. Уравнения движения всех точек системы тогда запишутся в виде

$$(m\ddot{x}_i)_\mu = F_{X\mu i}, \tag{1.1}$$

где представлены $3M$ декартовых координат $x_{\mu i}$ и $3M$ уравнений.

Возьмем затем эти декартовы координаты в качестве опорных координат системы и обозначим их через ξ^p, $p = \overline{1, 3M}$. Отметим, что под *опорными координатами* точки понимаются три линейных координаты ее положения в пространстве, а твердого тела — соответственно шесть координат (по три) линейного и углового положения. Имеем для системы точек

$$\begin{array}{cccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & ... & x_{M1} & x_{M2} & x_{M3} \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & ... & \xi^{(3M-2)} & \xi^{(3M-1)} & \xi^{(3M)}. \end{array}$$

Обозначим силы через X_p, $p = \overline{1, 3M}$:

$$\begin{array}{cccccccc} F_{X11} & F_{X12} & F_{X13} & ... & F_{XM1} & F_{XM2} & F_{XM3} \\ X_1 & X_2 & X_3 & ... & X_{(3M-2)} & X_{(3M-1)} & X_{(3M)}. \end{array}$$

Тогда уравнения (1.1) запишутся в виде

$$b_{pq}\,\ddot{\xi}^q = X_p, \qquad b_{pq} = \operatorname{diag}(m_1, ..., m_M), \qquad p, q = \overline{1, 3M}. \tag{1.2}$$

При наложении на систему S голономных склерономных (не зависящих явно от времени) связей число степеней свободы системы точек становится равным $N = 3M - S$. Пусть η^λ, $\lambda = \overline{1, N}$, — обобщенные координаты системы, связанные с координатами ξ^p уравнениями связей

$$\xi^p = \xi^p(\eta^\lambda). \tag{1.3}$$

Дифференцируя уравнения (1.3) по времени, найдем

$$\dot{\xi}^p = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\,\dot{\eta}^\lambda, \tag{1.4}$$

где *структурная матрица* (*матрица Якоби*) системы точек $\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda$ удовлетворяет с учетом равенств (1.4) важному кинематическому соотношению

$$\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} = \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \dot{\eta}^\lambda}. \tag{1.5}$$

Для того, чтобы написать уравнения движения системы со связями (1.3), в правой части уравнений свободной системы (1.1) надо ввести дополнительные силы реакций связей $R_{X\mu i}$ (в силу *принципа освобождаемости от связей* это сделать можно)

$$\left(m\ddot{x}_i\right)_\mu = F_{X\mu i} + R_{X\mu i}. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.6) описывают движение системы точек при наличии связей. Для использования уравнений (1.2) обозначим реакции связей через Z_p, $p = \overline{1, 3M}$:

$$\begin{array}{cccccccc} R_{X11} & R_{X12} & R_{X13} & ... & R_{XM1} & R_{XM2} & R_{XM3} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & ... & Z_{(3M-2)} & Z_{(3M-1)} & Z_{(3M)}. \end{array}$$

Тогда уравнения движения системы со связями в опорных координатах примут вид

$$b_{pq}\,\ddot{\xi}^q = X_p + Z_p. \tag{1.7}$$

После умножения уравнения (1.7) на структурную матрицу с помощью свертки по индексу p будем иметь

$$b_{pq}\,\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\,\ddot{\xi}^q = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\,X_p + \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\,Z_p. \tag{1.8}$$

Нетрудно показать, что уравнения (1.8) представляют собой уравнения Лагранжа 2–го рода движения системы с голономными связями (1.8) в обобщенных координатах η^λ. С этой целью вначале ограничим класс рассматриваемых связей множеством *идеальных связей*, удовлетворяющих тождеству

$$\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} Z_p \equiv 0,$$

т.е. подчиняющихся *аксиоме идеальности связей Лагранжа*, по которой работа сил реакций идеальных связей на любом возможном перемещении системы равна нулю. Написанное здесь соотношение этому утверждению равносильно.

С учетом применения аксиомы идеальности связей получим

$$b_{pq} \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} \ddot{\xi}^q = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} X_p. \tag{1.9}$$

В уравнениях (1.9) выражения $(\partial \xi^p / \partial \eta^\lambda) X_p$ — это обобщенные силы, входящие в правую часть уравнений Лагранжа, для которых введем обозначение Y_λ :

$$Y_\lambda = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} X_p.$$

Поскольку правые части уравнений (1.9) и Лагранжа совпадают, значит, должны совпадать и левые части этих уравнений. Другими словами, уравнения (1.9) — это уравнения Лагранжа 2–го рода для системы материальных точек в обобщенных координатах.

Чтобы не было каких-либо в этом сомнений, преобразуем левую часть уравнений (1.9), выражая ее через кинетическую энергию T системы, к левой части уравнений Лагранжа. Имеем для T :

$$T = \frac{1}{2} b_{pq} \dot{\xi}^p \dot{\xi}^q.$$

Вместе с тем, составляющие левой части уравнений Лагранжа с учетом симметрии матрицы b_{pq} имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}^\lambda} = b_{pq} \dot{\xi}^q \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \dot{\eta}^\lambda} = b_{pq} \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} \dot{\xi}^q,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}^\lambda} = b_{pq} \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} \ddot{\xi}^q + b_{pq} \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \eta^\lambda} \dot{\xi}^q.$$

При записи этих соотношений использовалась перестановочность операций полного дифференцирования по времени и частного дифференцирования по обобщенной координате.

Применение симметрии матрицы b_{pq} приводит к выражению

$$\frac{\partial T}{\partial \eta^\lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta^\lambda} \left(\frac{1}{2} b_{pq} \dot{\xi}^p \dot{\xi}^q \right) = b_{pq} \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \eta^\lambda} \dot{\xi}^q.$$

Следовательно, можем написать

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \eta^\lambda} = b_{pq} \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} \ddot{\xi}^q,$$

т.е. видим, что левая часть уравнений (1.9) совпадает с левой частью классических уравнений Лагранжа 2–го рода. Видно также отсюда, что уравнения Лагранжа являются линейной комбинацией элементарных уравнений движения свободной системы.

Проведенный анализ без особого ущерба можно перенести на случай реономных связей вида

$$\xi^p = \xi^p \left(\eta^\lambda, t\right). \tag{1.10}$$

После дифференцирования этих уравнений по t получим

$$\dot{\xi}^p = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda} \dot{\eta}^\lambda + \frac{\partial \xi^p}{\partial t}. \tag{1.11}$$

Понятно, что и в этом случае равенство (1.5) остается в силе и уравнения Лагранжа сохраняют свой вид (1.9). Разница в самих уравнениях для двух этих случаев проявится лишь при записи уравнений Лагранжа в обобщенных координатах η^λ в явном виде.

Если уравнения связей заданы в неразрешенной относительно ξ^p форме

$$f_q(\xi^p) = \varphi_q(\eta^\lambda), \qquad p, q = \overline{1, 3M}, \qquad \lambda = \overline{1, N}, \tag{1.12}$$

то и тогда соотношение (1.5) остается справедливым.

Действительно, после дифференцирования по t уравнений (1.12) получим

$$\frac{\partial f_q}{\partial \xi^p} \dot{\xi}^p = \frac{\partial \varphi_q}{\partial \eta^\lambda} \dot{\eta}^\lambda. \tag{1.13}$$

Обозначим через $\Delta = \det\left(\partial f_q/\partial\xi^p\right)$ в системе (1.13), а через Δ^p_λ — определитель, получаемый из Δ заменой p–го столбца столбцом $\partial\varphi_q/\partial\eta^\lambda$. При $\Delta \neq 0$ по правилу Крамера, разрешая систему (1.13) относительно $\dot\xi^p$, найдем

$$\dot\xi^p = \frac{\Delta^p_\lambda}{\Delta}\,\dot\eta^\lambda, \tag{1.14}$$

т.е. в соотношении (1.13) имеем

$$\frac{\partial f_q}{\partial\xi^p}\,\frac{\Delta^p_\lambda}{\Delta} = \frac{\partial\varphi_q}{\partial\eta^\lambda}.$$

Вместе с тем, дифференцируя уравнения (1.12) частным образом, получим

$$\frac{\partial f_q}{\partial\xi^p}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda} = \frac{\partial\varphi_q}{\partial\eta^\lambda}.$$

Сравнение двух последних выражений приводит к зависимости

$$\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda} = \frac{\Delta^p_\lambda}{\Delta}.$$

Отсюда будет следовать справедливость соотношения (1.5). А это значит, что схема вывода уравнений движения системы со связями остается прежней.

1.1.2 Система точек с неголономными связями

На этот раз будем считать, что связи задаются уравнениями

$$\dot\xi^p = \dot\xi^p\left(\dot\eta^\lambda, \eta^\mu, t\right), \tag{1.15}$$

где по-прежнему ξ^p — опорные координаты, η^λ — обобщенные координаты системы точек. Если уравнения (1.15) нельзя получить путем прямого дифференцирования уравнений (1.3) или (1.10), то связи с уравнениями (1.15) называются неголономными.

После дифференцирования по t уравнений (1.15) придем к уравнениям

$$\ddot\xi^p = \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,\ddot\eta^\lambda + \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\dot\eta^\lambda + \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial t}.$$

Отсюда будут вытекать равенства

$$\frac{\partial\ddot\xi^p}{\partial\ddot\eta^\lambda} = \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}, \tag{1.16}$$

где матрица $\partial\dot\xi^p/\partial\dot\eta^\lambda$ для неголономной системы является структурной матрицей, подобно тому, как матрица $\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda$ является структурной для голономной системы. Правда, в неголономном случае равенства (1.5) не выполняются.

И для связей (1.15) возникают в уравнениях движения дополнительные силы реакций, а сами уравнения движения со связями имеют вид (1.7). Поэтому, умножая уравнения (1.7) на структурную матрицу $\partial\dot\xi^p/\partial\dot\eta^\lambda$ со сверткой по индексу p, получим

$$b_{pq}\,\frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,\ddot\xi^q = \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,X_p + \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,Z_p. \tag{1.17}$$

Будем считать, что связи (1.15) удовлетворяют условию

$$\frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,Z_p = 0,$$

которое можно рассматривать как некоторый равносильный аналог условия Четаева в неголономной механике [82], означающего идеальность связей в аксиоматике Четаева. В этом случае уравнения движения принимают вид

$$b_{pq}\,\frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,\ddot\xi^q = \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,X_p. \tag{1.18}$$

Можно показать, что уравнения (1.18) представляют собой *уравнения Аппеля*. В самом деле, правые части уравнений (1.18) и Аппеля совпадают. Отсюда должно вытекать равенство и левых частей. Покажем это. В силу равенств (1.16) уравнения (1.18) запишутся так:

$$b_{pq}\,\frac{\partial\ddot\xi^p}{\partial\ddot\eta^\lambda}\,\ddot\xi^q = \frac{\partial\dot\xi^p}{\partial\dot\eta^\lambda}\,X_p.$$

Поскольку *энергия ускорений Аппеля* A для данной системы равна: $A = (1/2)\,b_{pq}\,\ddot\xi^p\ddot\xi^q$, то с учетом симметрии матрицы b_{pq} имеем

$$\frac{\partial A}{\partial\ddot\eta^\lambda} = b_{pq}\,\frac{\partial\ddot\xi^p}{\partial\ddot\eta^\lambda}\,\ddot\xi^q.$$

Стало быть, уравнения (1.18) можно записать в форме уравнений Аппеля, а именно:
$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{\eta}^\lambda} = \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \dot{\eta}^\lambda} X_p.$$
Итак, можем заключить, что уравнения (1.18) дают уравнения Аппеля, но в другой форме записи. Становится ясно, что уравнения Аппеля являются линейной комбинацией элементарных уравнений движения.

Если неголономные связи задаются уравнениями
$$\dot{\xi}^p = \dot{\xi}^p\left(\dot{\eta}^\lambda, \eta^\mu, \xi^q, t\right), \tag{1.19}$$
то тогда, дифференцируя эти уравнения по времени, получим
$$\ddot{\xi}^p = \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \dot{\eta}^\lambda}\ddot{\eta}^\lambda + \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \eta^\lambda}\dot{\eta}^\lambda + \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \xi^q}\dot{\xi}^q + \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial t}.$$
Видно, что и в этом случае равенства (1.16) имеют место. Значит, уравнения (1.18) останутся уравнениями движения системы.

Укажем на разницу в использовании уравнений связей (1.15) и (1.19). При подстановке выражений (1.15) в уравнения движения (1.18) опорные координаты ξ^p в эти уравнения не входят. Иное будет происходить при подстановке выражений (1.19): в уравнения Аппеля войдут опорные координаты ξ^p. Чтобы в этом случае найти закон движения системы, надо рассматривать совокупность уравнений (1.18), (1.19) и затем решать ее совместно.

1.2 Система твердых тел со связями

Рассмотрим систему из M твердых тел (см. Рис. 1.1). Для опорных, не связанных друг с другом тел этой системы имеем для каждого тела следующие уравнения движения:
$$\left(m\ddot{x}_{Ci}\right)_\mu = F_{X\mu i}, \quad \left(g_{ik}\ddot{\psi}_k + \Gamma_{i,kl}\,\dot{\psi}_k\dot{\psi}_l\right)_\mu = \overline{M}_{\mu i}, \tag{1.20}$$
где обозначено: $\overline{M}_{\mu i} = \left(M_{ZCk}\,\varphi_{Zki}\right)_\mu$, M_{ZCk} — проекции главного момента внешних сил на оси связанной с телом системы координат Cz_k.

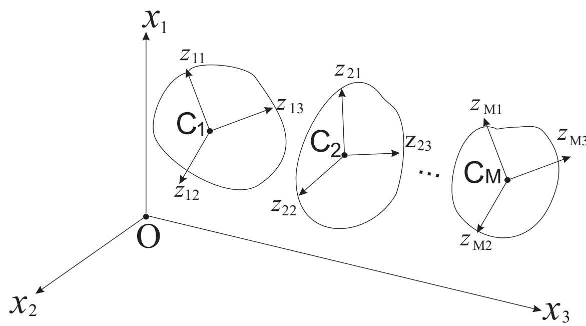

Рис. 1.1. Система твердых тел

Скажем несколько слов относительно уравнений (1.20) движения твердого тела в центральных осях инерции, где C — центр инерции тела. Для кинетической энергии по *формуле Кенига* имеем выражение
$$T = \frac{1}{2}\,m\dot{x}_{Ci}^2 + \frac{1}{2}\,g_{ik}\,\dot{\psi}_i\dot{\psi}_k.$$
Здесь $g_{ik} = I_{Clm}\,\varphi_{li}\varphi_{mk}$, I_{Clm} — тензор инерции тела, когда начало связанной с телом системы координат находится в центре инерции тела. Составляя уравнения Лагранжа, получим
$$m\ddot{x}_{Ci} = F_{Xi}, \qquad g_{ik}\,\ddot{\psi}_k + \Gamma_{i,kl}\,\dot{\psi}_k\dot{\psi}_l = M_{ZCk}\,\varphi_{Zki},$$
где *трехиндексный символ Кристоффеля* имеет вид
$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \psi_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial \psi_i}\right).$$

В обозначениях работ [40,42] ψ_i — эйлеровы углы: $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \theta$, $\psi_3 = \gamma$; C_{zi} — оси связанной с телом системы координат с центром в точке C (см. Рис. 1.2). Здесь система координат (СК) Cx'_p параллельна Ox_p. Эйлеровы углы ψ, θ и γ (прецессии, нутации и собственного вращения) вводятся с помощью трех поворотов: 1) СК Cx'_p поворачивается вокруг оси Cx'_1 на угол ψ, при этом получается СК Cz'_p; 2) СК Cz'_p поворачиваем вокруг оси Cz'_2 на угол θ, при

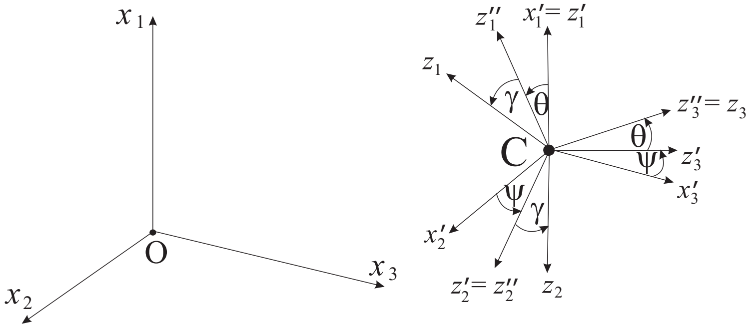

Рис. 1.2. Эйлеровы углы

этом получается СК Cz_p''; 3) СК Cz_p'' поворачиваем вокруг оси Cz_3'' на угол γ, при этом получается СК Cz_p.

Выражение угловой скорости тела в подвижной системе через эйлеровы углы с помощью матрицы

$$\varphi_{Zik} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\theta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

записывается так: $\omega_{Zi} = \varphi_{Zik}\,\dot{\psi}_k$.

Для опорных координат системы $\xi^p,\ p = \overline{1, 6M}$, введены следующие обозначения:

$$\begin{array}{cccccc} x_{1C1} & x_{1C2} & x_{1C3} & \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 & \xi^6 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{MC1} & x_{MC2} & x_{MC3} & \psi_{M1} & \psi_{M2} & \psi_{M3} \\ . & . & . & . & . & \xi^{(6M)} \end{array}$$

Тогда система уравнений (1.20) в опорных координатах запишется так:

$$b_{pq}\,\ddot{\xi}^q + B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = X_p, \qquad (1.21)$$

где

$$b_{pq} = \mathrm{diag}\big(m_1,\, m_1,\, m_1,\, (g_{1ik}),\, ...,\, m_M,\, (g_{Mik})\big), \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Здесь $(g_{ik})_\mu$ — 3×3–матрица для тела μ, $\mu = \overline{1, M}$, преобразования соответствующего тензора инерции со структурой, указанной ранее.

Трехиндексный символ $B_{p,qr}$ образуется следующим образом. Для первой шестерки уравнений (1.21) имеем

$$B_{p,qr} = \mathrm{diag}\big(0,\, 0,\, 0,\, (\Gamma_{1i,kl})\big), \qquad p, q, r = \overline{1, 6},$$

для второй шестерки уравнений

$$B_{p,qr} = \mathrm{diag}\big(0,\, 0,\, 0,\, (\Gamma_{2i,kl})\big), \qquad p, q, r = \overline{7, 12},$$

и т.д.

Силы X_p задаются так:

$$\begin{array}{cccccc} F_{X11} & F_{X12} & F_{X13} & \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & \overline{M}_{13} \\ X^1 & X^2 & X^3 & X^4 & X^5 & X^6 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ F_{XM1} & F_{XM2} & F_{XM3} & \overline{M}_{M1} & \overline{M}_{M2} & \overline{M}_{M3} \\ . & . & . & . & . & X^{(6M)} \end{array}$$

Наложим, к примеру, на систему опорных тел голономные склерономные связи вида (1.3): $\xi^p = \xi^p\left(\eta^\lambda\right),\ \lambda = \overline{1, N}$, где η^λ — обобщенные координаты. Дифференцируя по времени уравнения (1.3), получим соотношения (1.4), откуда вновь придем к равенствам (1.5).

Поскольку при наличии связей в уравнениях движения появляются силы и моменты сил реакций связей, надо в качестве уравнений движения вместо уравнений (1.20) рассмотреть систему

$$\left(m\,\ddot{x}_{Ci}\right)_\mu = F_{X\mu i} + R_{X\mu i},$$

$$\left(g_{ik}\,\ddot{\psi}_k + \Gamma_{i,kl}\,\dot{\psi}_k\dot{\psi}_l\right)_\mu = \overline{M}_{\mu i} + \overline{L}_{\mu i}.$$

Тогда уравнения (1.21) заменятся уравнениями

$$b_{pq}\,\ddot{\xi}^q + B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = X_p + Z_p. \qquad (1.22)$$

Стоит указать, что в местах соединения тел друг с другом появляются силы и моменты сил реакций связей. Однако для записи уравнений движения в опорных координатах, куда входят координаты центров инерции этих тел, надо привести систему сил и моментов реакций к центру инерции тела. Следовательно, $R_{X\mu i}$ и $\overline{L}_{\mu i}$ — это главные векторы сил и моментов сил реакций, полученные в результате приведения к центру инерции.

Далее, для получения уравнений Лагранжа 2–го рода для системы (агрегата) твердых тел умножим уравнения (1.22) на структурную матрицу $\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda$ со сверткой по индексу p. При учете аксиомы идеальности связей в виде $(\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda)\, Z_p \equiv 0$ будем иметь уравнения движения

$$b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\ddot{\xi}^q + \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,X_p. \tag{1.23}$$

Проверим здесь, что справедливы равенства

$$B_{p,qr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, b_{pq}}{\partial\xi^r} + \frac{\partial\, b_{pr}}{\partial\xi^q} - \frac{\partial\, b_{qr}}{\partial\xi^p}\right). \tag{1.24}$$

Например, для первого тела (первой шестерки уравнений) в опорных координатах имеем

$$g_{1pq}\,\ddot{\xi}^q + \Gamma_{1p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = X_p,$$

или

$$b_{pq}\,\ddot{\xi}^q + B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = X_p,$$

где $p, q, r = \overline{1,6}$. Известно при этом, что

$$\Gamma_{1p,qr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1pq}}{\partial\xi^r} + \frac{\partial g_{1pr}}{\partial\xi^q} - \frac{\partial g_{1qr}}{\partial\xi^p}\right),$$

и поэтому для первого тела (первой шестерки уравнений (1.21)) соотношение (1.24) верно. Аналогично можно проверить остальные шестерки уравнений (1.21).

Нетрудно показать, что уравнения (1.23) представляют собой преобразованные уравнения Лагранжа для системы тел. Действительно, найдем выражения левых частей уравнений (1.23) с помощью кинетической энергии T системы: $T = (1/2)\, b_{pq}\,\dot{\xi}^p\dot{\xi}^q$.

Для составления уравнений Лагранжа вычислим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}^\lambda} &= b_{pq}\,\frac{\partial\dot{\xi}^p}{\partial\dot{\eta}^\lambda}\,\dot{\xi}^q = b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\dot{\xi}^q,\\
\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}^\lambda} &= b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\ddot{\xi}^q + b_{pq}\,\frac{\partial\dot{xi}^p}{\partial\eta^\lambda}\,\dot{\xi}^q + \frac{\partial b_{pq}}{\partial\xi^r}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r,\\
\frac{\partial T}{\partial\eta^\lambda} &= b_{pq}\,\frac{\partial\dot{\xi}^p}{\partial\eta^\lambda}\,\dot{\xi}^q + \frac{1}{2}\,\frac{\partial b_{pq}}{\partial\xi^r}\,\frac{\partial\xi^r}{\partial\eta^\lambda}\,\dot{\xi}^p\dot{\xi}^q,
\end{aligned}$$

откуда будет следовать, что

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial\eta^\lambda} = b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\ddot{\xi}^q + \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r.$$

Таким образом, убеждаемся в том, что уравнения (1.22) это действительно уравнения Лагранжа 2–го рода для системы твердых тел. Они представлены в виде линейной комбинации уравнений движения образующих систему опорных тел.

Для реономных связей (1.10) уравнения (1.23) сохраняют свой вид, причем разница в уравнениях Лагранжа появится только при записи этих уравнений в обобщенных координатах η^λ в явном виде.

В уравнениях (1.23) сделаем переход к обобщенным координатам. Для этого воспользуемся уравнениями связей (1.3). Имеем для склерономных связей

$$\ddot{\xi}^p = \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\ddot{\eta}^\lambda + \frac{\partial^2\xi^p}{\partial\eta^\lambda\,\partial\eta^\mu}\,\dot{\eta}^\lambda\dot{\eta}^\mu. \tag{1.25}$$

Подставляя выражения (1.3), (1.25) в уравнения движения (1.23), получим

$$c_{\lambda\mu}\,\ddot{\eta}^\mu + C_{\lambda,\mu\nu}\,\dot{\eta}^\mu\dot{\eta}^\nu = Y_\lambda, \tag{1.26}$$

где применены обозначения

$$\begin{aligned}
c_{\lambda\mu} &= b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\frac{\partial\xi^q}{\partial\eta^\mu},\\
C_{\lambda,\mu\nu} &= b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\frac{\partial^2\xi^q}{\partial\eta^\mu\,\partial\eta^\nu} + \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\frac{\partial\xi^q}{\partial\eta^\mu}\,\frac{\partial\xi^r}{\partial\eta^r}\,B_{p,qr},\\
Y_\lambda &= \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,X_p.
\end{aligned}$$

Итак, уравнения (1.26) — это дифференциальные уравнения движения СТТ, записанные в обобщенных координатах η^λ. Именно к такому виду преобразуются уравнения Лагранжа с учетом ограничивающих голономных склерономных связей.

В рассматриваемом случае подобно соотношению (1.24) имеет место равенство

$$C_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial \eta^\nu} + \frac{\partial c_{\lambda\nu}}{\partial \eta^\mu} - \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial \eta^\lambda}\right).$$

Здесь $c_{\lambda\mu}$ — это ковариантный метрический тензор системы тел, а $C_{\lambda,\mu\nu}$ — ее трехиндексный символ Кристоффеля 1–го рода.

Для практических целей численного разрешения системы уравнений (1.26) их преобразуют к уравнениям, разрешенным относительно вторых производных $\ddot\eta^\mu$. С этой целью введем контравариантный метрический тензор системы $c^{\lambda\mu}$, который образуется из элементов матрицы, обратной матрице тензора $c_{\lambda\mu}$, т.е. $c^{\lambda\sigma}\,c_{\sigma\mu} = \delta^\lambda_\mu$ — *символ Кронекера* (при $\lambda \neq \mu$ его элементы равны нулю, при $\lambda = \mu$ — равны единице).

Алгоритм преобразования уравнений (1.26) выглядит так. Заменим в них индекс λ на σ :

$$c_{\sigma\mu}\,\ddot\eta^\mu + C_{\sigma,\mu\nu}\,\dot\eta^\mu\dot\eta^\nu = Y_\sigma.$$

После этого полученные уравнения умножим на $c^{\lambda\sigma}$ со сверткой по индексу σ. Имеем

$$c^{\lambda\sigma}\,c_{\sigma\mu}\,\ddot\eta^\mu + c^{\lambda\sigma}\,C_{\sigma,\mu\nu}\,\dot\eta^\mu\dot\eta^\nu = c^{\lambda\sigma}\,Y_\sigma.$$

Здесь воспользуемся равенствами

$$c^{\lambda\sigma}\,c_{\sigma\mu}\,\ddot\eta^\mu = \delta^\lambda_\mu\,\ddot\eta^\mu = \ddot\eta^\lambda,$$

и тогда окончательно получим

$$\ddot\eta^\lambda + C^\lambda_{\mu\nu}\,\dot\eta^\mu\dot\eta^\nu = Y^\lambda, \tag{1.27}$$

где введены обозначения

$$C^\lambda_{\mu\nu} = c^{\lambda\sigma}\,C_{\sigma,\mu\nu}, \qquad Y^\lambda = c^{\lambda\sigma}\,Y_\sigma.$$

Таким образом, получены контравариантные уравнения (1.27), разрешенные относительно старших производных, где $C^\lambda_{\mu\nu}$ — трехиндексный символ Кристоффеля 2–го рода, Y^λ — контравариантная обобщенная сила.

Остальную часть параграфа посвятим задаче определения сил реакций связей. В уравнениях (1.22) в правых частях активные силы X_p, как правило, задаются заранее и считаются известными. Силы реакций Z_p определяются самим движением системы тел и поэтому заранее не могут быть определены. Значит, в динамической задаче (1.22) неизвестных $12\,M$: ξ^p и Z_p, если считать, что система состоит из M тел, где ξ^p — $6\,M$ опорных координат. Следовательно, $6\,M$ уравнений движения недостаточно для нахождения сил реакций.

В работе [42] предложены два способа определения реакций. Первый из них заключается в численном решении уравнений Лагранжа (1.27), результатом чего будет нахождение зависимости: $\eta^\lambda = \eta^\lambda(t)$. Затем с помощью уравнений связей (1.3) получим соотношение $\xi^p = \xi^p(t)$, а также найдем $\dot\xi^p(t)$, $\ddot\xi^p(t)$. После этого в силу уравнений (1.22) будем иметь выражения для реакций связей в виде явных функций времени:

$$Z_p(t) = b_{pq}\,\ddot\xi^q + B_{p,qr}\,\dot\xi^q\dot\xi^r - X_p.$$

Во втором способе получим выражения реакций связей как функций $\eta^\lambda, \dot\eta^\lambda$, где η^λ — обобщенные координаты системы. Проверим это. После двойного дифференцирования уравнений связей (1.3) по времени получим

$$\ddot\xi^p = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\,\ddot\eta^\lambda + \psi^p, \tag{1.28}$$

где обозначено

$$\psi^p = \frac{\partial^2 \xi^p}{\partial \eta^\lambda\,\partial \eta^\mu}\,\dot\eta^\lambda\dot\eta^\mu.$$

Если теперь подставить сюда выражения для $\ddot\xi^p$ из уравнений (1.22), то получим уравнения, куда будут входить реакции связей и вторые производные обобщенных координат. Исключая эти вторые производные, придем к уравнениям относительно реакций связей. Такова общая схема действий.

Для определения $\ddot{\xi}^p$ надо уравнения (1.22) разрешить относительно этих производных. С этой целью введем величины b^{pq}, составленные из элементов матрицы, обратной матрице b_{pq}, которые удовлетворяют равенству: $b^{ps}\, b_{sq} = \delta^p_q$.

Следующий шаг: замена в уравнениях (1.22) индексов p на s, а именно

$$b_{sq}\, \ddot{\xi}^q + B_{s,qr}\, \dot{\xi}^q \dot{\xi}^r = X_s + Z_s.$$

После умножения этих уравнений на b^{ps} со сверткой по индексу s получим

$$b^{ps}\, b_{sq}\, \ddot{\xi}^q + b^{ps}\, B_{s,qr}\, \dot{\xi}^q \dot{\xi}^r = b^{ps}\, X_s + b^{ps}\, Z_s,$$

где имеет место соотношение

$$b^{ps}\, b_{sq}\, \ddot{\xi}^q = \delta^p_q\, \ddot{\xi}^q = \ddot{\xi}^p.$$

Тогда в обозначениях

$$B^p_{qr} = b^{ps}\, B_{s,qr}, \qquad X^p = b^{ps}\, X_s, \qquad Z^p = b^{ps}\, Z_s$$

уравнения движения системы в опорных координатах приобретают вид

$$\ddot{\xi}^p + B^p_{qr}\, \dot{\xi}^q \dot{\xi}^r = X^p + Z^p.$$

Найденные из этих уравнений значения $\ddot{\xi}^p$ подставим в соотношения (1.28). Будем иметь

$$\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\, \ddot{\eta}^\lambda = Z^p + \Psi^p, \tag{1.29}$$

где обозначено

$$\Psi^p = X^p - B^p_{qr}\, \dot{\xi}^q \dot{\xi}^r - \psi^p.$$

Система из M тел с S связями в нашем случае описывается $6\,M$ уравнениями (1.29) относительно N величин η^λ, где $N = 6\,M - S$. Так как уравнений имеем больше, чем неизвестных, то подчиним уравнения (1.29) следующим условиям совместности. Возьмем некоторые $N+1$ уравнений из системы уравнений (1.29). Для них условия совместности означают равенство нулю определителя расширенной матрицы системы, что дает одно линейное уравнение

относительно реакций. Всего таким образом получим S линейных уравнений вида

$$\alpha_{\kappa p}\, Z^p + \alpha_{\kappa 0} = 0, \qquad \kappa = \overline{1, S},$$

относительно $6\,M$ неизвестных реакций Z^p.

Остальные N уравнений можно получить из условий идеальности связей: $(\partial \xi^p / \partial \eta^\lambda)\, Z_p \equiv 0$, которые теперь надо записать в виде

$$\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^\lambda}\, g_{ps}\, Z^s = 0.$$

В результате получим $6\,M$ линейных уравнений, разрешив которые найдем реакции Z^p как функции η^λ и $\dot{\eta}^\lambda$. Чтобы найти Z^p в виде явных функций времени, надо уравнения Лагранжа (1.27) проинтегрировать.

Глава 2

Динамика плоского манипулятора при пространственном движении

В книге [42] подробно описана кинематика и динамика плоского манипулятора при пространственном движении. Приведем лишь схему вывода уравнений движения манипулятора из этой работы, пользуясь результатами предыдущего параграфа.

2.1 Уравнения движения опорных тел

Манипулятор состоит из четырех тел, причем первое тело вращается вокруг вертикальной оси. К первому телу крепится собственно сам манипулятор, представляющий трехзвенник, плоскость которого поворачивается вместе с первым телом.

Полная система уравнений движения опорных тел содержит 24 уравнения. С помощью структурной матрицы эти уравнения можно свернуть и исключить из уравнений все реакции связей. Но можно применить *метод сжатия* системы уравнений, производя вначале

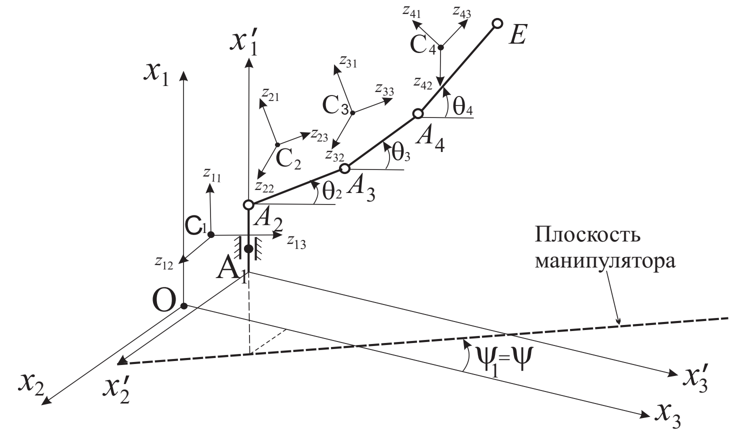

Рис. 2.1. Плоский манипулятор

только частичное исключение связей. В этом случае можно взять систему опорных тел и наложить на них связи, обеспечивающие вращательное движение системы в собранном манипуляторе.

Для обозначения опорных координат используем ξ. Первое опорное тело движется так, что два его эйлеровых угла $\theta = \gamma = 0$. Остальные тела во время движения имеют одинаковые углы рыскания и углы крена, равные нулю (см. Рис. 2.1).

Перейдем к записи уравнений движения первого опорного тела. Обозначим: m_1 — масса тела, A_1, B_1, C_1 — главные центральные моменты инерции, x_{1Ci} — координаты центра инерции, $(\psi_1, \theta_1, \gamma_1) = (\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13})$ — эйлеровы углы, F_{X1i} — главный вектор внешних сил, $\overline{M}_{1i}$ — главный момент внешних сил, R_{X1i} — главный вектор сил реакций, $\overline{L}_{1i}$ — главный момент сил реакций. Черта в обозначениях моментов указывает на преобразование, проведенное в системе уравнений (1.20).

Выпишем уравнения движения первого звена до наложения связей

$$m_1\,\ddot{x}_{1Ci} = F_{X1i}, \qquad g_{1ik}\,\ddot{\psi}_{1k} + \Gamma_{1i,kl}\,\dot{\psi}_{1k}\dot{\psi}_{1l} = \overline{M}_{1i},$$

где метрический тензор g_{1ik} и трехиндексный символ Кристоффеля $\Gamma_{1i,kl}$ имеют следующий вид (индекс 1 для простоты записи опущен):

$$g_{44} = I_{C11}\,\varphi_{11}\varphi_{11} + I_{C22}\,\varphi_{21}\varphi_{21} + I_{C33}\,\varphi_{31}\varphi_{31} = \\ = I_{C11}\cos^2\theta\cos^2\gamma + I_{C22}\cos^2\theta\sin^2\gamma + I_{C33}\sin^2\theta$$

с обозначениями для главных центральных осей

$$I_{C11} = A, \qquad I_{C22} = B, \qquad I_{C33} = C.$$

Тогда

$$g_{44} = \left(A\cos^2\gamma + B\sin^2\gamma\right)\cos^2\theta + C\sin^2\theta.$$

Проводя аналогичные выкладки, получим для других элементов метрического тензора выражения

$$g_{45} = g_{54} = (A - B)\cos\theta\sin\gamma\cos\gamma,$$

$$g_{46} = g_{64} = C\sin\theta, \qquad g_{55} = A\sin^2\gamma + B\cos^2\gamma,$$

$$g_{56} = g_{65} = 0, \qquad g_{66} = C.$$

Следовательно,

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ g_{54} & g_{55} & 0 \\ g_{64} & 0 & g_{66} \end{pmatrix}.$$

Для элементов трехиндексного символа Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{1,vw} = \Gamma_{2,vw} = \Gamma_{3,vw} = 0.$$

Не равные нулю элементы записываются так:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{4,45} = \Gamma_{4,54} = \left[\,C - (A\cos^2\gamma + B\sin^2\gamma)\,\right]\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma_{4,46} = \Gamma_{4,64} = (B - A)\cos^2\theta\sin\gamma\cos\gamma,\\
&\Gamma_{4,55} = (B - A)\sin\theta\sin\gamma\cos\gamma,\\
&\Gamma_{4,56} = \Gamma_{4,65} = (1/2)\,\left[\,C + (A - B)(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\,\right]\cos\theta,\\
&\Gamma_{5,44} = -\,\left[\,C - (A\cos^2\gamma + B\sin^2\gamma)\,\right]\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma_{5,46} = \Gamma_{5,64} = (1/2)\,\left[\,(A - B)(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) - C\,\right]\cos\theta,\\
&\Gamma_{5,56} = \Gamma_{5,65} = (A - B)\sin\gamma\cos\gamma,\\
&\Gamma_{6,44} = (A - B)\cos^2\theta\sin\gamma\cos\gamma,\\
&\Gamma_{6,45} = \Gamma_{6,54} = (1/2)\,\left[\,C - (A - B)(\cos^2\gamma - \sin^2\Gamma)\,\right]\cos\theta,\\
&\Gamma_{6,55} = (B - A)\sin\gamma\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Кроме того, в уравнениях движения

$$\overline{M}_1 = (M_1\cos\gamma - M_2\sin\gamma)\cos\theta + M_3\sin\theta,$$

$$\overline{M}_2 = M_1\sin\gamma + M_2\cos\gamma, \qquad \overline{M}_3 = M_3,$$

где положено $M_i = M_{ZCi}$.

Далее запишем пять уравнений связей

$$x_{1Ci} = \mathrm{const}, \qquad \theta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 0.$$

Отсюда получим

$$g_{11} = A_1, \qquad g_{22} = B_1, \qquad g_{33} = C_1,$$

причем остальные элементы g_{ik} равны нулю. Для символа Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{1,23} = \frac{1}{2}\,(C_1 + A_1 - B_1), \qquad \Gamma_{2,13} = \frac{1}{2}\,(A_1 - B_1 - C_1),$$

$$\Gamma_{3,12} = \frac{1}{2}\,(C_1 - A_1 + B_1),$$

а остальные элементы $\Gamma_{i,kl}$ равны нулю. Кроме того, написанные три не равных нулю элементов дают в уравнениях движения слагаемые: $\Gamma_{1,23}\,\dot\theta_1\dot\gamma_1$, $\Gamma_{2,13}\,\dot\psi_1\dot\gamma_1$, $\Gamma_{3,12}\,\dot\psi_1\dot\theta_1$, которые равны нулю в силу того, что $\dot\theta_1 = 0$, $\dot\gamma_1 = 0$.

Так как центр инерции первого тела не движется, его ускорение $\ddot x_{1Ci} = 0$. Значит, можем написать шесть уравнений движения первого опорного тела

$$0 = F_{X1i} + R_{X1i},$$

$$A_1\,\ddot\psi_1 = \overline{M}_{11} + \overline{L}_{11}, \qquad 0 = \overline{M}_{12} + \overline{L}_{12}, \qquad 0 = \overline{M}_{13} + \overline{L}_{13}.$$

Здесь пять уравнений позволяют определить реакции R_{X1i}, $\overline{L}_{12}$, $\overline{L}_{13}$. Реакция $\overline{L}_{11}$ подлежит исключению по методу множителей Лагранжа. С этой целью запишем связи, наложенные на вращательное движение

$$f_1\,(\psi_1,\,\theta_1,\,\gamma_1), \qquad f_2\,(\psi_1,\,\theta_1,\,\gamma_1) = 0,$$

откуда

$$\overline{L}_{11} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1}.$$

Поскольку $\partial f_1/\partial\psi_1 = 0$, $\partial f_2/\partial\psi_1 = 0$, то $\overline{L}_{11} = 0$. Следовательно, движение первого опорного тела до соединения в общую систему тел описывается одним уравнением движения

$$A_1\,\ddot{\psi}_1 = \overline{M}_{11} = M_{11}.$$

Рассмотрим теперь движение остальных трех опорных тел (самого манипулятора) при крене, равном нулю. То есть, надо найти уравнения вращательного движения твердого тела при наложении одной связи: $\gamma = 0$.

Метрический тензор каждого тела (индекс тела опускаем) записывается в виде

$$g_{11} = A\cos^2\theta + C\sin^2\theta, \qquad g_{13} = g_{31} = C\cos\theta,$$

$$g_{22} = B, \qquad g_{33} = C,$$

причем остальные элементы равны нулю. Не равные нулю элементы трехиндексного символа Кристоффеля имеют вид

$$\begin{aligned} &\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = (C - A)\sin\theta\cos\theta,\\ &\Gamma_{2,11} = -\,(C - A)\sin\theta\cos\theta,\\ &\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} = (1/2)\,(C - A + B)\cos\theta. \end{aligned}$$

Для обобщенной силы ее составляющие:

$$\overline{M}_1 = M_1\cos\theta + M_3\sin\theta, \qquad \overline{M}_2 = M_2, \qquad \overline{M}_3 = M_3.$$

Связь $\gamma = 0$ порождает возникновение в уравнениях движения реакций. Чтобы их исключить, воспользуемся методом множителей Лагранжа. Эту связь запишем в виде уравнения $f(\psi,\theta,\gamma) = 0$, откуда

$$\overline{L}_1 = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial\psi} = 0, \qquad \overline{L}_2 = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial\theta} = 0, \qquad \overline{L}_3 = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial\gamma} = \lambda.$$

Следовательно, имеем нижеследующие уравнения движения тела с нулевым креном:

$$\begin{aligned} (A\cos^2\theta + C\sin^2\theta)\,\ddot{\psi} + 2\,(C - A)\sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}\dot{\theta} &= \overline{M}_1,\\ B\,\ddot{\theta} - (C - A)\sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}^2 &= \overline{M}_2,\\ C\sin\theta\,\ddot{\psi} + (C - A + B)\cos\theta\,\dot{\psi}\dot{\theta} &= \overline{M}_3 + \overline{L}_3. \end{aligned}$$

В эти уравнения входят три неизвестных: $\psi, \theta, \overline{L}_3$. Исключая из первого и третьего уравнений $\ddot{\psi}$, найдем выражение для $\overline{L}_3$, не содержащее вторых производных. Значит, первые два уравнения можно интегрировать независимо и определять из них ψ и θ; третье уравнение служит для нахождения $\overline{L}_3$. Те же уравнения можно получить также при помощи уравнений Лагранжа 2–го рода, если воспользоваться выражением

$$T = \frac{1}{2}\,\left(A\cos^2\theta + C\sin^2\theta\right)\,\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\,B\,\dot{\theta}^2$$

для кинетической энергии вращательного движения твердого тела с $\gamma = 0$.

2.2 Уравнения вращательного движения системы твердых тел

Рассмотрим уравнения вращательного движения системы твердых тел с одинаковым углом рыскания ψ (системы, но не агрегата твердых тел, т.е. рассматривается система твердых тел, когда тела системы не соединены между собой и не имеют общих точек). Первое тело системы движется с $\theta = 0$, $\gamma = 0$, а три остальных — с $\gamma = 0$.

Уравнения вращательного движения системы имеют вид

$$A_1\,\ddot{\psi}_1 = \overline{M}_{11} + \widetilde{L}_{11},$$

$$(A_2\cos^2\theta_2 + C_2\sin^2\theta_2)\,\ddot{\psi}_2 + 2\,(C_2 - A_2)\sin\theta_2\cos\theta_2\,\dot{\psi}_2\dot{\theta}_2 = \overline{M}_{21} + \widetilde{L}_{21},$$

$$B_2\,\ddot{\theta}_2 - (C_2 - A_2)\sin\theta_2\cos\theta_2\,\dot{\psi}_2^2 = \overline{M}_{22} + \widetilde{L}_{22},$$

$$(A_3\cos^2\theta_3 + C_3\sin^2\theta_3)\,\ddot{\psi}_3 + 2\,(C_3 - A_3)\sin\theta_3\cos\theta_3\,\dot{\psi}_3\dot{\theta}_3 = \overline{M}_{31} + \widetilde{L}_{31},$$

$$B_3\,\ddot\theta_3-(C_3-A_3)\sin\theta_3\cos\theta_3\,\dot\psi_3^2=\overline{M}_{32}+\widetilde{L}_{32},\tag{2.1}$$

$$(A_4\cos^2\theta_4+C_4\sin^2\theta_4)\,\ddot\psi_4+2\,(C_4-A_4)\sin\theta_4\cos\theta_4\,\dot\psi_4\dot\theta_4=\overline{M}_{41}+\widetilde{L}_{41},$$

$$B_4\,\ddot\theta_4-(C_4-A_4)\sin\theta_4\cos\theta_4\,\dot\psi_4^2=\overline{M}_{42}+\widetilde{L}_{42}.$$

Поскольку опорные тела здесь еще не соединены в агрегат, реакции $\widetilde{L}_{\mu i},\ \mu=1,2,3,4$, возникли из-за наложения на систему связей

$$\psi_1-\psi_2=0,\qquad \psi_2-\psi_3=0,\qquad \psi_3-\psi_4=0,$$

которые можно записать в виде: $f_j\,(\psi_\mu)=0,\ j=1,2,3$.

Применение метода множителей приводит к тому, что реакции в уравнениях для θ_μ равны нулю: $\widetilde{L}_{22}=\widetilde{L}_{32}=\widetilde{L}_{42}=0$. Для остальных реакций имеем

$$\widetilde{L}_{\mu 1}=\lambda_1\,\frac{\partial f_1}{\partial\psi_\mu}+\lambda_2\,\frac{\partial f_2}{\partial\psi_\mu}+\lambda_3\,\frac{\partial f_3}{\partial\psi_\mu},$$

откуда будет следовать

$$\widetilde{L}_{11}=\lambda_1,\qquad \widetilde{L}_{21}=-\,\lambda_1+\lambda_2,\qquad \widetilde{L}_{31}=-\,\lambda_2+\lambda_3,\qquad \widetilde{L}_{41}=-\,\lambda_3.$$

Значит, для исключения реакций из уравнений движения системы надо сложить все уравнения (2.1) кроме второго, четвертого и шестого. Тогда, обозначая общий угол рыскания системы через ψ, где $\psi=\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4$, получим относительно ψ одно дифференциальное уравнение

$$D_1\,\ddot\psi+D_2\,\dot\theta_2\dot\psi+D_3\,\dot\theta_3\dot\psi+D_4\,\dot\theta_4\dot\psi=\overline{M}_0,$$

где обозначено

$$D_1=A_1+(A_2\cos^2\theta_2+C_2\sin^2\theta_2)+\tag{2.2}$$
$$+\,(A_3\cos^2\theta_3+C_3\sin^2\theta_3)+(A_4\cos^2\theta_4+C_4\sin^2\theta_4),$$
$$D_2=2\,(C_2-A_2)\sin\theta_2\cos\theta_2,\qquad D_3=2\,(C_3-A_3)\sin\theta_3\cos\theta_3,$$
$$D_4=2\,(C_4-A_4)\sin\theta_4\cos\theta_4,\qquad \overline{M}_0=\overline{M}_{11}+\overline{M}_{21}+\overline{M}_{31}+\overline{M}_{41}.$$

Итак, уравнения вращательного движения системы тел до соединения в общий агрегат будут иметь вид

$$B_k\,\ddot\theta_k-(C_k-A_k)\sin\theta_k\cos\theta_k\,\dot\psi^2=\overline{M}_{k2},\qquad k=2,3,4,\tag{2.3}$$
$$D_1\,\ddot\psi+(D_2\,\dot\theta_2+D_3\,\dot\theta_3+D_4\,\dot\theta_4)\,\dot\psi=\overline{M}_0.$$

2.3 Уравнения движения манипулятора в опорных и обобщенных координатах

С учетом того, что центр инерции первого опорного тела неподвижен, имеем следующие уравнения движения манипулятора:

$$0=F_{X1i}+R_{X1i},\qquad m_k\,\ddot x_{kCi}=F_{Xki}+R_{Xki},$$

$$B_k\,\ddot\theta_k-(C_k-A_k)\sin\theta_k\cos\theta_k\,\dot\psi^2=\overline{M}_{k2}+\overline{L}_{k2},\tag{2.4}$$

$$D_1\,\ddot\psi+(D_2\,\dot\theta_2+D_3\,\dot\theta_3+D_4\,\dot\theta_4)\,\dot\psi=\overline{M}_0+\overline{L}_0,$$

где $k=2,3,4,\ i=1,2,3$.

Важно отметить, что на этот раз реакции вызваны уже соединением опорных тел в агрегат (в манипулятор). Поэтому в уравнениях (2.4) реакции $\overline{L}_{22}$, $\overline{L}_{32}$, $\overline{L}_{42}$, $\overline{L}_0$ имеют другой смысл, чем реакции, представленные в уравнениях (2.1). Эти последние реакции уже исключены из уравнений движения и, следовательно, в уравнениях (2.3) их нет.

Всего в системе уравнений (2.4) записано 16 уравнений. Первые три уравнения служат для нахождения реакций. Остальные 13 уравнений можно сжато записать так:

$$b_{pq}\,\ddot\xi^q+B_{p,qr}\,\dot\xi^q\dot\xi^r=X_p+Z_p,\qquad p,q,r=\overline{1,13},\tag{2.5}$$

где опорные координаты ξ^p и силы X_p обозначены следующим образом:

x_{2C1}	x_{2C2}	x_{2C3}	...	x_{4C3}	θ_2	θ_3	θ_4	ψ
ξ^1	ξ^2	ξ^3	...	ξ^9	$\xi^{(10)}$	$\xi^{(11)}$	$\xi^{(12)}$	$\xi^{(13)}$

F_{X21}	F_{X22}	F_{X23}	...	F_{X43}	$\overline{M}_{22}$	$\overline{M}_{32}$	$\overline{M}_{42}$	$\overline{M}_0$
X_1	X_2	X_3	...	X_9	$X_{(10)}$	$X_{(11)}$	$X_{(12)}$	$X_{(13)}$

причем $b_{pq}\in R^{13}\times R^{13}$ имеет вид

$$b_{pq}=\mathrm{diag}\;(m_2,\,m_2,\,m_2,\,...,\,m_4,\,B_2,\,B_3,\,B_4,\,D_1)\,,$$

где все элементы постоянны и только один элемент D_1 зависит согласно соотношениям (2.2) от координат.

Запишем также не равные нулю элементы трехиндексного символа $B_{p,qr}$:

$$B_{(k+8),\,(13)(13)} = -(C_k - A_k)\sin\theta_k\cos\theta_k, \qquad k = 2,3,4,$$

$$B_{(13),\,(k+8)(13)} = B_{(13),\,(13)(k+8)} = D_k/2.$$

Перейдем к составлению уравнений движения манипулятора в обобщенных координатах η^λ, которые введем так:

$$\begin{array}{cccc} \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \psi \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 & \eta^4 \end{array}$$

Для получения уравнений движения манипулятора в обобщенных координатах следует умножить уравнения (2.5) на матрицу $\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda$ со сверткой по индексу p. В результате будем иметь

$$b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\ddot{\xi}^q + \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,B_{p,qr}\,\dot{\xi}^q\dot{\xi}^r = \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,X_p, \qquad p,q,r = \overline{1,13}.$$

Отметим, что для составления структурной матрицы $\partial\xi^p/\partial\eta^\lambda$ надо записать склерономные связи $\xi^p = \xi^p\,(\eta^\lambda)$, $\lambda = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= b_1 + l_1 + k_2 l_2 \sin\theta_2, \qquad\qquad (2.6)\\
\xi^2 &= b_2 - k_2 l_2 \cos\theta_2 \sin\psi,\\
\xi^3 &= b_3 + k_2 l_2 \cos\theta_2 \cos\psi,\\
\xi^4 &= b_1 + l_1 + l_2\sin\theta_2 + k_3 l_3 \sin\theta_3,\\
\xi^5 &= b_2 - (l_2\cos\theta_2 + k_3 l_3\cos\theta_3)\sin\psi,\\
\xi^6 &= b_3 + (l_2\cos\theta_2 + k_3 l_3\cos\theta_3)\cos\psi,\\
\xi^7 &= b_1 + l_1 + l_2\sin\theta_2 + l_3\sin\theta_3 + k_4 l_4\sin\theta_4,\\
\xi^8 &= b_2 - (l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 + k_4 l_4\cos\theta_4)\sin\psi,\\
\xi^9 &= b_3 + (l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 + k_4 l_4\cos\theta_4)\cos\psi,\\
\xi^{(10)} &= \theta_2 = \eta^1,\ \xi^{(11)} = \theta_3 = \eta^2,\ \xi^{(12)} = \theta_4 = \eta^3,\ \xi^{(13)} = \psi = \eta^4,
\end{aligned}$$

где $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ — углы поворота соответствующего звена манипулятора относительно оси пересечения плоскости манипулятора и неподвижной плоскости x_2x_3 системы $Ox_1x_2x_3$; l_1, l_2, l_3, l_4 — длины звеньев, b_1, b_2, b_3 — координаты точки крепления первого опорного звена в неподвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ (ось x_1 направлена вертикально вверх), k_2, k_3, k_4 — некоторые заданные постоянные, определяющие положение центра масс звена, ψ — угол между плоскостью манипулятора и вертикальной плоскостью x_1x_3 неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$.

В случае применения замены переменных в соответствии с выражениями (2.6) получим четырехмерные уравнения движения в обобщенных координатах:

$$c_{\lambda\mu}\,\ddot{\eta}^\mu + C_{\lambda,\mu\nu}\,\dot{\eta}^\mu\dot{\eta}^\nu = Y_\lambda, \qquad (2.7)$$

где для введенной ранее диагональной матрицы b_{pq} имеем

$$c_{\lambda\mu} = b_{pq}\,\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,\frac{\partial\xi^q}{\partial\eta^\mu}, \qquad Y_\lambda = \frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\lambda}\,X_p,$$

$$C_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,c_{\lambda\mu}}{\partial\eta^\nu} + \frac{\partial\,c_{\lambda\nu}}{\partial\eta^\mu} - \frac{\partial\,c_{\mu\nu}}{\partial\eta^\lambda}\right).$$

Чтобы найти уравнения (2.7) в явном виде, надо найти явные выражения для участвующих в них $c_{\lambda\mu}$, $C_{\lambda,\mu\nu}$, Y_λ. Вначале вычислим элементы метрического тензора $c_{\lambda\mu}$. По причине диагональности b_{pq} имеем

$$\begin{aligned}
c_{\lambda\mu} &= \\
&= b_{11}\,\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^\mu} + b_{22}\,\frac{\partial\xi^2}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^2}{\partial\eta^\mu} + \ \ldots\ + b_{(13)(13)}\,\frac{\partial\xi^{(13)}}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^{(13)}}{\partial\eta^\mu} = \\
&= m_2\,\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^\mu} + m_2\,\frac{\partial\xi^2}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^2}{\partial\eta^\mu} + m_2\,\frac{\partial\xi^3}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^3}{\partial\eta^\mu} + \\
&+ m_3\,\frac{\partial\xi^4}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^4}{\partial\eta^\mu} + m_3\,\frac{\partial\xi^5}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^5}{\partial\eta^\mu} + m_3\,\frac{\partial\xi^6}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^6}{\partial\eta^\mu} + \\
&+ m_4\,\frac{\partial\xi^7}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^7}{\partial\eta^\mu} + m_4\,\frac{\partial\xi^8}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^8}{\partial\eta^\mu} + m_4\,\frac{\partial\xi^9}{\partial\eta^\lambda}\frac{\partial\xi^9}{\partial\eta^\mu} +
\end{aligned}$$

$$+ B_2 \frac{\partial \xi^{(10)}}{\partial \eta^\lambda} \frac{\partial \xi^{(10)}}{\partial \eta^\mu} + B_3 \frac{\partial \xi^{(11)}}{\partial \eta^\lambda} \frac{\partial \xi^{(11)}}{\partial \eta^\mu} + B_4 \frac{\partial \xi^{(12)}}{\partial \eta^\lambda} \frac{\partial \xi^{(12)}}{\partial \eta^\mu} +$$

$$+ D_1 \frac{\partial \xi^{(13)}}{\partial \eta^\lambda} \frac{\partial \xi^{(13)}}{\partial \eta^\mu}.$$

Остается произвести прямые вычисления. В итоге получим

$$\begin{aligned}
&c_{11} = (m_2 k_2^2 + m_3 + m_4)\, l_2^2 + B_2,\\
&c_{12} = c_{21} = (m_3 k_3 + m_4)\, l_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2),\\
&c_{13} = c_{31} = m_4 k_4 l_2 l_4 \cos(\theta_4 - \theta_2),\\
&c_{14} = c_{41} = 0, \qquad c_{22} = (m_3 k_3^2 + m_4)\, l_3^2 + B_3,\\
&c_{23} = c_{32} = m_4 k_4 l_3 l_4 \cos(\theta_4 - \theta_3), \qquad c_{24} = c_{42} = 0,\\
&c_{33} = m_4 k_4^2 l_4^2 + B_4, \qquad c_{34} = c_{43} = 0,\\
&c_{44} = m_2 k_2^2 l_2^2 \cos^2\theta_2 + m_3 (l_2 \cos\theta_2 + k_3 l_3 \cos\theta_3)^2 +\\
&\qquad + \ m_4 (l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3 + k_4 l_4 \cos\theta_4)^2 + D_1.
\end{aligned}$$

Результатом этих выкладок является метрический тензор следующего вида:

$$c_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Можно пойти еще дальше в плане унификации записи $c_{\lambda\mu}$. Для этого введем симметрический объект с элементами $B_{ik},\ i,k = 1,2,3:$

$$\begin{aligned}
&B_{11} = (m_2 k_2^2 + m_3 + m_4)\, l_2^2 + B_2, \qquad B_{12} = B_{21} = (m_3 k_3 + m_4)\, l_2 l_3,\\
&B_{13} = B_{31} = m_4 k_4 l_2 l_4, \qquad B_{22} = (m_3 k_3^2 + m_4)\, l_3^2 + B_3,\\
&B_{23} = B_{32} = m_4 k_4 l_3 l_4, \qquad B_{33} = m_4 k_4^2 l_2^2 + B_4.
\end{aligned}$$

В терминах этого объекта метрический тензор $c_{\lambda\mu}$ запишется так:

$$c_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\cos(\theta_3 - \theta_2) & B_{13}\cos(\theta_4 - \theta_2) & 0\\ B_{21}\cos(\theta_3 - \theta_2) & B_{22} & B_{23}\cos(\theta_4 - \theta_3) & 0\\ B_{31}\cos(\theta_4 - \theta_2) & B_{32}\cos(\theta_4 - \theta_3) & B_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что элементы метрического тензора можно определить стандартным способом с помощью вычисления кинетической энергии T рассматриваемой связанной в агрегат системы твердых тел: ведь коэффициенты квадратичной формы T являются элементами метрического тензора. Имеем: $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, где $T_\lambda,\ \lambda = 1,2,3,4,$ — кинетическая энергия звеньев манипулятора. Для $\gamma = 0$ получим

$$\begin{aligned}
&T_1 = \frac{1}{2} A_1 \dot\psi^2,\\
&T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot x_{2Ci}^2 + \frac{1}{2} (A_2 \cos^2\theta_2 + C_2 \sin^2\theta_2)\, \dot\psi^2 + \frac{1}{2} B_2 \dot\theta_2^2,\\
&T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot x_{3Ci}^2 + \frac{1}{2} (A_3 \cos^2\theta_3 + C_3 \sin^2\theta_3)\, \dot\psi^2 + \frac{1}{2} B_3 \dot\theta_3^2,\\
&T_4 = \frac{1}{2} m_4 \dot x_{4Ci}^2 + \frac{1}{2} (A_4 \cos^2\theta_4 + C_4 \sin^2\theta_4)\, \dot\psi^2 + \frac{1}{2} B_4 \dot\theta_4^2,
\end{aligned}$$

где координаты центров инерции звеньев определяются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}
&x_{1C1} = b_1 + k_1 l_1, \qquad x_{1C2} = b_2, \qquad x_{1C3} = b_3,\\
&x_{2C1} = b_1 + l_1 + k_2 l_2 \sin\theta_2,\\
&x_{2C2} = b_2 - k_2 l_2 \cos\theta_2 \sin\psi,\\
&x_{2C3} = b_3 + k_2 l_2 \cos\theta_2 \cos\psi,\\
&x_{3C1} = b_1 + l_1 + l_2 \sin\theta_2 + k_3 l_3 \sin\theta_3,\\
&x_{3C2} = b_2 - (l_2 \cos\theta_2 + k_3 l_3 \cos\theta_3) \sin\psi,\\
&x_{3C3} = b_3 + (l_2 \cos\theta_2 + k_3 l_3 \cos\theta_3) \cos\psi,\\
&x_{4C1} = b_1 + l_1 + l_2 \sin\theta_2 + l_3 \sin\theta_3 + k_4 l_4 \sin\theta_4,\\
&x_{4C2} = b_2 - (l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3 + k_4 l_4 \cos\theta_4) \sin\psi,\\
&x_{4C3} = b_3 + (l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3 + k_4 l_4 \cos\theta_4) \cos\psi.
\end{aligned}$$

Продолжая, пользуясь этими равенствами, вычисление T, получим

$$T = (1/2)\ \Big\{ [\,(m_2 k_2^2 + m_3 + m_4)\, l_2^2 + B_2\,]\, \dot\theta_2^2 + [\,(m_3 k_3^2 + m_4)\, l_3^2 + B_3\,]\, \dot\theta_3^2 +$$

$$+ \ (m_4 k_4^2 l_4^2 + B_4)\, \dot\theta_4^2 + 2\,(m_3 k_3 + m_4)\, l_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2)\, \dot\theta_2 \dot\theta_3 +$$

$$+ 2m_4k_4l_2l_4\cos(\theta_4-\theta_2)\,\dot\theta_2\dot\theta_4 + 2m_4k_4l_3l_4\cos(\theta_4-\theta_3)\,\dot\theta_3\dot\theta_4 + \\ + [\,A_1 + (A_2\cos^2\theta_2 + C_2\sin^2\theta_2) + (A_3\cos^2\theta_3 + C_3\sin^2\theta_3) + \\ + (A_4\cos^2\theta_4 + C_4\sin^2\theta_4) + m_2k_2^2l_2^2\cos^2\theta_2 + \\ + m_3(l_2\cos\theta_2 + k_3l_3\cos\theta_3)^2 + \\ + m_4(l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 + k_4l_4\cos\theta_4)^2\,]\,\dot\psi^2 \Big\}.$$

Сравнение коэффициентов найденной квадратичной формы T с элементами метрического тензора убеждает в их совпадении.

Для вычисления трехиндексного символа Кристоффеля возьмем написанный ранее тензор $c_{\lambda\mu}$, куда входят элементы B_{ik}. Имеем в итоге следующие не равные нулю компоненты $C_{\lambda,\mu\nu}$:

$$C_{1,22} = -B_{12}\sin(\theta_3-\theta_2), \qquad C_{1,33} = -B_{13}\sin(\theta_4-\theta_2),$$
$$C_{1,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_2},$$
$$C_{2,11} = B_{21}\sin(\theta_3-\theta_2), \qquad C_{2,33} = -B_{23}\sin(\theta_4-\theta_3),$$
$$C_{2,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_3},$$
$$C_{3,11} = B_{31}\sin(\theta_4-\theta_2), \qquad C_{3,22} = B_{32}\sin(\theta_4-\theta_3),$$
$$C_{3,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_4},$$
$$C_{4,14} = \frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_2}, \qquad C_{4,24} = \frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_3}, \qquad C_{4,34} = \frac{1}{2}\frac{\partial c_{44}}{\partial\theta_4}.$$

Осталось получить выражения для обобщенной силы. Пользуясь структурной матрицей для связей (2.6), будем иметь

$$Y_1 = (k_2F_{21} + F_{31} + F_{41})_X\,l_2\cos\theta_2 + \\ + (k_2F22 + F_{32} + F_{42})_X\,l_2\sin\theta_2\sin\psi - \\ - (k_3F_{23} + F_{33} + F_{43})_X\,l_2\sin\theta_2\cos\psi + \overline{M}_{22},$$
$$Y_2 = (k_3F_{31} + F_{41})_X\,l_3\cos\theta_3 + \\ + (k_3F_{32} + F_{42})_X\,l_3\sin\theta_3\sin\psi - \\ - (k_3F_{33} + F_{43})_X\,l_3\sin\theta_3\cos\psi + \overline{M}_{32},$$
$$Y_3 = k_4F_{X41}l_4\cos\theta_4 + k_4F_{X42}l_4\sin\theta_4\sin\psi - \\ - k_4F_{X43}l_4\sin\theta_4\cos\psi + \overline{M}_{33},$$

$$Y_4 = -k_2F_{X22}l_2\cos\theta_2\cos\psi - k_2F_{X23}l_2\cos\theta_2\sin\psi - \\ - F_{X32}(l_2\cos\theta_2 + k_3l_3\cos\theta_3)\cos\psi - \\ - F_{X33}(l_2\cos\theta_2 + k_3l_3\cos\theta_3)\sin\psi - \\ - F_{X42}(l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 + k_4l_4\cos\theta_4)\cos\psi - \\ - F_{X43}(l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 + k_4l_4\cos\theta_4)\sin\psi + \overline{M}_0.$$

Запишем теперь ковариантные уравнения движения манипулятора

$$c_{11}\ddot\eta^1 + c_{12}\ddot\eta^2 + c_{13}\ddot\eta^3 + C_{1,22}(\dot\eta^2)^2 + C_{1,33}(\dot\eta^3)^2 + C_{1,44}(\dot\eta^4)^2 = Y_1,$$
$$c_{21}\ddot\eta^1 + c_{22}\ddot\eta^2 + c_{23}\ddot\eta^3 + C_{2,11}(\dot\eta^1)^2 + C_{2,33}(\dot\eta^3)^2 + C_{2,44}(\dot\eta^4)^2 = Y_2,$$
$$c_{31}\ddot\eta^1 + c_{32}\ddot\eta^2 + c_{33}\ddot\eta^3 + C_{3,11}(\dot\eta^1)^2 + C_{3,22}(\dot\eta^2)^2 + C_{3,44}(\dot\eta^4)^2 = Y_3,$$
$$c_{44}\ddot\eta^4 + C_{4,14}\dot\eta^1\dot\eta^4 + C_{4,24}\dot\eta^2\dot\eta^4 + C_{4,34}\dot\eta^3\dot\eta^4 = Y_4,$$

где все компоненты этих уравнений выше были представлены в развернутом виде. Отметим также, что агрегативная схема составления уравнений движения плоского трехзвенного манипулятора подробно описана в работе [81].

Глава 3

Динамика антропоморфных механизмов

Под *локомоционным движением* понимают передвижение динамических (биологических, механических) управляемых систем в пространстве с помощью конечностей. Интерес к такого рода передвижению возник давно [10, 11, 57, 100], однако в последние годы, благодаря бурному развитию средств вычислительной техники, проблема синтеза локомоций исследовалась главным образом в связи с теоретическими и практическими разработками по созданию шагающих роботов с элементами искусственного интеллекта (среди обилия работ по этой тематике укажем лишь на некоторые известные публикации [2, 4–8, 12–16, 18, 19, 23, 28–30, 34–36, 41, 50, 59, 61, 64, 67, 75, 84, 85, 90–94, 97, 99].

Сложные задачи организации систем управления шагающих робототехнических устройств представляют значительный интерес с точки зрения моделирования и конструирования различных средств протезирования конечностей (экзоскелетоны), проникновения в труднодоступные, опасные или зараженные места, освоения иных планетарных пространств.

В главе 3 в основном рассматриваются задачи управления

движением шагающих многозвенных аппаратов и методы синтеза управляющих воздействий в шарнирах локомоционных механизмов, использующие результаты теорий оптимального, стабилизационного, адаптивного и др. управлений.

Это рассмотрение носит чисто обзорный характер, поскольку призвано продемонстрировать типичные подходы при решении указанных задач. Знакомство с первоисточниками [7, 23, 64, 85] позволит изучить данные задачи детально и на более качественном уровне.

В § 3.1 рассматриваются задачи перемещения двуногих шагающих механизмов с использованием импульсного управления. Выписываются уравнения движения механизма и изучаются одноопорное и двухопорное движения антропоморфного робота при импульсных управляющих воздействиях, когда переносимая нога двигается по баллистической траектории.

В § 3.2 представлена концепция комфортабельной двуногой ходьбы в смысле равномерного и прямолинейного движения некоторой точки корпуса шагающего аппарата. Анализируются энергетические затраты при комфортабельных локомоциях, а сам принцип комфортабельности формулируется как оптимизационное условие. Кроме этого, исследуются особенности периодической комфортабельной ходьбы.

§ 3.3 посвящен методу заданной синергии, основная идея которого заключается в следующем: часть координат и сил, описывающих поведение локомоционной системы, задается явно, а остальная часть находится из уравнений движения и уравнений связей. Этот метод позволяет понизить размерность системы в общем иерархическом описании. Как правило, уровень движения конечностей здесь задается, а уровень движения корпуса определяется в силу динамических зависимостей.

3.1 Перемещение антропоморфных механизмов при импульсном управлении

Параграф посвящен управляемому движению локомоционного антропоморфного механизма с помощью импульсных управлений с

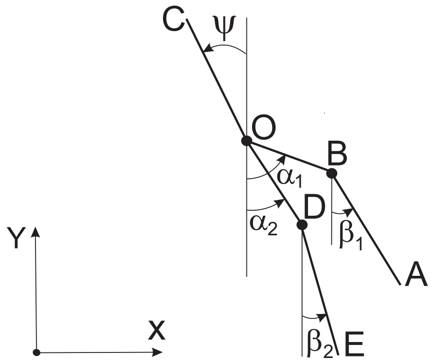

Рис. 3.1. Антропоморфный механизм

использованием в фазе переноса баллистических (инерционных) траекторий [85].

3.1.1 Уравнения движения

Ограничимся рассмотрением плоского механизма, состоящего из пяти шарнирно соединенных весомых звеньев: корпуса OC и двух двузвенных конечностей (ног) в виде звеньев бедра OB и OD и звеньев голени BA и DE. (см. Рис. 3.1).

Здесь шарнир O, соединяющий корпус OC с бедрами OB и OD, называется *тазобедренным суставом*, а шарниры B и D, соединяющие бедра OB и OD с голенями BA и DE, — *коленными суставами*. Предполагается, что все шарниры идеальные и трение в них отсутствует.

Пусть XY — неподвижная плоская система координат, где ось Y направлена вертикально вверх, ось X — горизонтально. Механизм расположен в вертикальной плоскости и имеет семь степеней свободы. Обозначим обобщенные координаты: x, y — координаты тазобедренного сустава O, ψ — угол между корпусом и вертикалью, α_1, α_2 — углы, которые образуют бедра с вертикалью, а β_1, β_2 — углы между голенями и вертикалью.

Для уравнений движения пятизвенника воспользуемся уравне-

ниями Лагранжа 2–го рода [52]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_s} = Q_s, \qquad s = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

где z_s — обобщенная координата, Q_s — обобщенная неконсервативная сила, $L = T - V$ — функция Лагранжа, T — кинетическая энергия, V — потенциальная энергия системы, $n = 7$.

Чтобы вычислить кинетическую энергию каждого звена, будем пользоваться формулой [52]:

$$T = \frac{1}{2}\left[mv^2 + 2m\left((v \times \omega), \rho\right) + \theta\omega^2 \right], \tag{3.2}$$

где v — скорость полюса (фиксированной точки звена), ω — угловая скорость вращения звена, ρ — радиус-вектор центра масс звена с началом в полюсе, m — масса звена, θ — момент инерции звена относительно полюса.

Для звеньев OC, OB и OD за полюс возьмем точку O. Кинетическая энергия корпуса T_{OC} равна

$$T_{OC} = \frac{1}{2}\left[m_k\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) - 2K_r\dot\psi\left(\dot x\cos\psi + \dot y\sin\psi\right) + J\dot\psi^2 \right], \tag{3.3}$$

где $K_r = m_k r,\ m_k$ — масса корпуса, r — расстояние от точки O до центра масс корпуса, J — момент инерции корпуса относительно точки O.

Кинетическая энергия бедра OB равна

$$T_{OB} = \frac{1}{2}\left[m_a\left(\dot x^2+\dot y^2\right) + 2m_a a\dot\alpha_1\left(\dot x\cos\alpha_1 + \dot y\sin\alpha_1\right) + J_a^0\dot\alpha_1^2 \right], \tag{3.4}$$

где m_a — масса бедра, a — расстояние от тазобедренного сустава до центра масс бедра, J_a^0 — момент инерции бедра относительно точки O; T_{OD} получим путем замены угла α_1 на α_2 в формуле (3.4).

Вычисляя кинетическую энергию голени BA, возьмем за полюс точку B (колено). Тогда

$$\begin{aligned} T_{BA} = \frac{1}{2}\Big\{ & m_b\left[\dot x^2+\dot y^2 + 2\dot\alpha_1 L_a(\dot x\cos\alpha_1+\dot y\sin\alpha_1)+\dot\alpha_1^2 L_a^2\right] + \\ & + 2K_b\dot\beta_1\left[\dot x\cos\beta_1+\dot y\sin\beta_1+\dot\alpha_1 L_a\cos(\alpha_1-\beta_1)\right]+J_b\dot\beta_1^2 \Big\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $K_b = m_b b$, m_b — масса голени, b — расстояние от коленного сустава (B) до центра масс голени, L_a — длина бедра, J_b — момент инерции голени относительно точки B; T_{DE} получим путем замены углов α_1, β_1 углами α_2, β_2.

Теперь с помощью оотношений (3.3) – (3.5) можем написать выражение для кинетической энергии всего пятизвенного механизма

$$\begin{aligned} T &= T_{OC} + T_{OB} + T_{OD} + T_{BA} + T_{DE} = \\ &= \frac{1}{2} M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2} J \dot{\psi}^2 - K_r \dot{\psi}\left(\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{1}{2} J_a \dot{\alpha}_i^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\beta}_i^2 + K_a \dot{\alpha}_i\left(\dot{x}\cos\alpha_i + \dot{y}\sin\alpha_i\right) + \\ &+ K_b \dot{\beta}_i\left(\dot{x}\cos\beta_i + \dot{y}\sin\beta_i\right) + J_{ab}\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i\cos\left(\alpha_i - \beta_i\right)\Big], \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $M = m_k + 2m_a + 2m_b$ — масса пятизвенника,

$$K_a = m_a a + m_b L_a, \qquad J_a = J_a^0 + m_b L_a^2, \qquad J_{ab} = K_b L_a = m_b b L_a.$$

Для потенциальной энергии V механизма имеем формулу

$$\begin{aligned} V = g\,\Big\{ & m_k(y + r\cos\psi) + \\ & + \sum_{i=1}^{2}\left[m_a(y - a\cos\alpha_i) + m_b\left(y - L_a\cos\alpha_i - b\cos\beta_i\right)\right]\Big\}, \end{aligned}$$

или в принятых обозначениях

$$V = g\left[M_y + K_r\cos\psi - \sum_{i=1}^{2}\left(K_a\cos\alpha_i + K_b\cos\beta_i\right)\right], \tag{3.7}$$

где g — ускорение свободного падения.

Укажем на внутренние неконсервативные силы, действующие на механизм (см. Рис. 3.2). Это u_1, u_2 — моменты сил, приложенных в коленных суставах, q_1, q_2 — моменты сил, приложенных между корпусом и бедрами. Внешние силы реакции опорной поверхности R_1, R_2 приложены к концам A и E ног; Π_1, Π_2 — моменты внешних сил, приложенных к голени. Силы R_1, R_2 имеют горизонтальные R_{1x}, R_{2x} и вертикальные R_{1y}, R_{2y} составляющие соответственно. Предполагается, что все шарниры, соединяющие звенья,

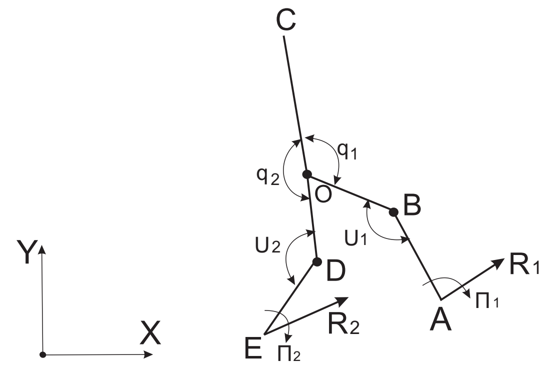

Рис. 3.2. Силы, действующие на механизм

идеальные, а моменты $u_1, u_2, q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2$ в шарнирах создаются приводами.

Приступим к составлению уравнений движения. Для этого надо знать семь обобщенных сил $Q_x, Q_y, Q_\psi, Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_2}, Q_{\beta_1}, Q_{\beta_2}$, которые можно найти, пользуясь выражением для элементарной работы δW всех сил, приложенных к системе:

$$\begin{aligned} \delta W = {} & (R_{1x} + R_{2x})\,\delta x + (R_{1y} + R_{2y})\,\delta y - (q_1 + q_2)\,\delta\psi + \\ & + \sum_{i=1}^{2}\big[(q_i - u_i)\delta\alpha_i + (u_i - \Pi_i)\delta\beta_i + R_{ix}\delta(L_a\sin\alpha_i + L_b\sin\beta_i) - \\ & - R_{iy}\delta(L_a\cos\alpha_i + L_b\cos\beta_i)\big] = \sum_{i=1}^{2}\big[R_{ix}\delta x + R_{iy}\delta y - q_i\delta\psi + \\ & + (q_i - u_i + R_{ix}L_a\cos\alpha_i + R_{iy}L_a\sin\alpha_i)\,\delta\alpha_i + \\ & + (u_i - \Pi_i + R_{ix}L_b\cos\beta_i + R_{iy}L_b\sin\beta_i)\,\delta\beta_i\big], \end{aligned} \tag{3.8}$$

где L_b — длина голени. Из формулы (3.8) найдем

$$\begin{gathered} Q_x = R_{1x} + R_{2x}, \qquad Q_y = R_{1y} + R_{2y}, \qquad Q_\psi = -\,(q_1 + q_2), \\ Q_{\alpha_i} = -\,u_i + q_i + L_a\left(R_{ix}\cos\alpha_i + R_{iy}\sin\alpha_i\right), \quad i = 1, 2, \qquad (3.9) \\ Q_{\beta_i} = u_i - \Pi_i + L_b\left(R_{ix}\cos\beta_i + R_{iy}\sin\beta_i\right), \quad i = 1, 2. \end{gathered}$$

С помощью выражений (3.6), (3.7), (3.9), вычисления $\partial L/\partial \dot z_s$, $\partial L/\partial z_s$, уравнения Лагранжа (3.1) запишутся в виде [85]:

$$M\ddot x - K_r\ddot\psi\cos\psi + K_a\ddot\alpha_1\cos\alpha_1 + K_a\ddot\alpha_2\cos\alpha_2 + K_b\ddot\beta_1\cos\beta_1 +$$

$$+ K_b\ddot\beta_2\cos\beta_2 + K_r\dot\psi^2\sin\psi - K_a\dot\alpha_1^2\sin\alpha_1 - K_a\dot\alpha_2^2\sin\alpha_2 -$$

$$- K_b\dot\beta_1^2\sin\beta_1 - K_b\dot\beta_2^2\sin\beta_2 = R_{1x} + R_{2x},$$

$$M\ddot y - K_r\ddot\psi\sin\psi + K_a\ddot\alpha_1\sin\alpha_1 + K_a\ddot\alpha_2\sin\alpha_2 + K_b\ddot\beta_1\sin\beta_1 +$$

$$+ K_b\ddot\beta_2\sin\beta_2 - K_r\dot\psi^2\cos\psi + K_a\dot\alpha_1^2\cos\alpha_1 + K_a\dot\alpha_2^2\cos\alpha_2 +$$

$$+ K_b\dot\beta_1^2\cos\beta_1 + K_b\dot\beta_2^2\cos\beta_2 = R_{1y} + R_{2y} - Mg,$$

$$- K_r\ddot x\cos\psi - K_r\ddot y\sin\psi + J\ddot\psi - gK_r\sin\psi = -q_1 - q_2,$$

$$K_a\ddot x\cos\alpha_i + K_a\ddot y\sin\alpha_i + J_a\ddot\alpha_i + J_{ab}\ddot\beta_i\cos(\alpha_i - \beta_i) +$$

$$+ gK_a\sin\alpha_i + J_{ab}\dot\beta_i^2\sin(\alpha_i - \beta_i) \ =$$

$$= \ -u_i + q_i + L_aR_{ix}\cos\alpha_i + L_aR_{iy}\sin\alpha_i, \quad i = 1, 2,$$

$$K_b\ddot x\cos\beta_i + K_b\ddot y\sin\beta_i + J_{ab}\ddot\alpha_i\cos(\alpha_i - \beta_i) + J_b\ddot\beta_i +$$

$$+ gK_b\sin\beta_i - J_{ab}\dot\alpha_i^2\sin(\alpha_i - \beta_i) \ =$$

$$= \ u_i - \Pi_i + L_bR_{ix}\cos\beta_i + L_bR_{iy}\sin\beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Эти уравнения движения пятизвенника можно переписать с учетом соответствующих обозначений (см. книгу [85]) в компактной векторно-матричной форме так:

$$B(z)\,\ddot z + gA\,f_1(z) + D(z)\,f_2(\dot z) = C(z)\,w, \tag{3.10}$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad f_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin\psi \\ \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \\ \sin\beta_1 \\ \sin\beta_2 \end{pmatrix}, \qquad f_2(\dot z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi^2 \\ \dot\alpha_1^2 \\ \dot\alpha_2^2 \\ \dot\beta_1^2 \\ \dot\beta_2^2 \end{pmatrix},$$

$$w^* = (u_1, u_2, q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y})\,,$$

где звездочкой сверху обозначено транспонирование. Вид матриц $B(z)$, A, $D(z)$ порядка 7×7 и матрицы $C(z)$ порядка 7×10 можно найти в работе [85].

Отметим, что симметрическая матрица $B(z) > 0$ — это положительно определенная матрица кинетической энергии, т.е.

$$T = T(z, \dot z) = \frac{1}{2}\,\dot z^*\,B(z)\,\dot z.$$

Значит, уравнение (3.10) можно разрешить относительно вектора старших производных:

$$\ddot z = -\,gB^{-1}(z)\,A\,f_1(z) - B^{-1}(z)\,D(z)\,f_2(\dot z) + B^{-1}(z)\,C(z)\,w.$$

Здесь A — диагональная постоянная матрица, а элементы матрицы $D(z)$ — суть символы Кристоффеля первого рода для матрицы $B(z)$.

3.1.2 Одноопорное движение.

Локомоционное передвижение механизма с двумя конечностями осуществляется в две фазы — *фазу одноопорного движения* (одна нога опирается, другая переносится) и *фазу двухопорного движения*. В процессе ходьбы эти фазы поочередно сменяются.

Уравнения (3.10) годятся для описания как одноопорного, так и для двухопорного движения — надо только соответственно включать в динамику R_1 или R_2, либо R_1 и R_2. Рассмотрим более подробно одноопорную фазу. Пусть опорная нога, например, OBA шарнирно опирается на поверхность. Этот шарнир будем называть *голеностопным суставом* и считать его идеальным.

Составим далее уравнения одноопорного движения, полагая точку A (конец ноги) закрепленной. Тогда механизм в целом имеет пять степеней свободы. За обобщенные координаты возьмем обозначенные выше углы: $\psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Уравнения движения пятизвенника с закрепленной точкой A получим, исходя из уравнений Лагранжа (3.1).

Связь координат (x, y) тазобедренного сустава O с координатами (x_A, y_A) голеностопного сустава A задается равенствами

$$x = x_A - L_a\sin\alpha_1 - L_b\sin\beta_1, \qquad y = y_A + L_a\cos\alpha_1 + L_b\cos\beta_1.$$

Для $x_A = \mathrm{const}$, $y_A = \mathrm{const}$ имеем отсюда

$$\dot{x} = -L_a\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 - L_b\dot{\beta}_1\cos\beta_1, \qquad \dot{y} = -L_a\dot{\alpha}_1\sin\alpha_1 - L_b\dot{\beta}_1\sin\beta_1.$$

Подставляя эти соотношения в формулы (3.6) и (3.7), найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий пятизвенника с закрепленной точкой соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(J_a - 2L_aK_a + L_a^2M\right)\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_a\dot{\alpha}_2^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left(J_b - 2L_bK_b + L_b^2M\right)\dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\beta}_2^2 + \\ & + L_aK_r\cos(\psi-\alpha_1)\,\dot{\psi}\dot{\alpha}_1 + L_bK_r\cos(\psi-\beta_1)\,\dot{\psi}\dot{\beta}_1 - \\ & - L_aK_a\cos(\alpha_1-\alpha_2)\,\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \\ & + (J_{ab} - L_aK_b - L_bK_a + +L_aL_bM)\cos(\alpha_1-\beta_1)\,\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 - \\ & - L_aK_b\cos(\alpha_1-\beta_2)\,\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_2 - L_bK_a\cos(\alpha_2-\beta_1)\,\dot{\alpha}_2\dot{\beta}_1 + \\ & + J_{ab}\cos(\alpha_2-\beta_2)\,\dot{\alpha}_2\dot{\beta}_2 - L_bK_b\cos(\beta_1-\beta_2)\,\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

а также

$$\begin{aligned} V = g\,[\, & My_A + K_r\cos\psi + (L_aM - K_a)\cos\alpha_1 - \\ & - K_a\cos\alpha_2 + (L_bM - K_b)\cos\beta_1 - K_b\cos\beta_2\,]\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Предположим, что на механизм действуют: реакция R_1 в опорной ноге, моменты u_1, u_2 в коленных суставах B и D, моменты q_1, q_2 в тазобедренном суставе O, моменты Π_1, Π_2 в голеностопных суставах A и E, а также некоторая сила R_2, приложенная в точке E переносимой ноги. Отметим здесь, что импульсные воздействия R_2, Π_2 можно создавать с помощью устройства типа стопы — переносимая нога в этом случае отталкивается от поверхности.

Чтобы найти выражения для пяти обобщенных сил $Q_\psi, Q\alpha_1, Q_{\alpha_2}$, Q_{β_1}, Q_{β_2}, составим выражение для элементарной работы δW всех сил, приложенных к системе. Подставим при этом в формулу (3.8) равенства связи

$$\delta x = -L_a\cos\alpha_1\cdot\delta\alpha_1 - L_b\cos\beta_1\cdot\delta\beta_1,$$

$$\delta y = -L_a\sin\alpha_1\cdot\delta\alpha_1 - L_b\sin\beta_1\cdot\delta\beta_1.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \delta W = {} & -(q_1+q_2)\,\delta\psi + \\ & + (q_1 - u_1 - R_{2x}L_a\cos\alpha_1 - R_{2y}L_a\sin\alpha_1)\,\delta\alpha_1 + \\ & + (q_2 - u_2 + R_{2x}L_a\cos\alpha_2 + R_{2y}L_a\sin\alpha_2)\,\delta\alpha_2 + \\ & + (u_1 - \Pi_1 - R_{2x}L_b\cos\beta_1 - R_{2y}L_b\sin\beta_1)\,\delta\beta_1 + \\ & + (u_2 - \Pi_2 + R_{2x}L_b\cos\beta_2 + R_{2y}L_b\sin\beta_2)\,\delta\beta_2, \end{aligned}$$

откуда последуют соотношения

$$\begin{aligned} Q_\psi &= -q_1 - q_2, \\ Q_{\alpha_1} &= q_1 - u_1 - L_a\,(R_{2x}\cos\alpha_1 + R_{2y}\sin\alpha_1), \\ Q_{\alpha_2} &= q_2 - u_2 + L_a\,(R_{2x}\cos\alpha_2 + R_{2y}\sin\alpha_2), \\ Q_{\beta_1} &= u_1 - \Pi_1 - L_b\,(R_{2x}\cos\beta_1 + R_{2y}\sin\beta_1), \\ Q_{\beta_2} &= u_2 - \Pi_2 + L_b\,(R_{2x}\cos\beta_2 + R_{2y}\sin\beta_2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Используя выражения (3.11) – (3.13), можно уравнения Лагранжа (3.1) представить в виде уравнения (3.10), где

$$z = \begin{pmatrix} \psi \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad f_1(z) = \begin{pmatrix} \sin\psi \\ \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \\ \sin\beta_1 \\ \sin\beta_2 \end{pmatrix}, \qquad f_2(\dot{z}) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}^2 \\ \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\beta}_1^2 \\ \dot{\beta}_2^2 \end{pmatrix},$$

$$w^* = (u_1, u_2, q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2, R_{2x}, R_{2y}),$$

$$B(z),\ A,\ D(z) \in R^5\times R^5, \qquad C(z) \in R^5\times R^8.$$

Вид соответствующих матриц представлен в книге [85].

Если $R_2 = 0$, то можно получить выражения для составляющих R_{1x}, R_{1y} реакции R_1 в опорной ноге. В самом деле, в этом случае уравнения движения центра масс (x_c, y_c) маханизма выглядят так:

$$M\ddot{x}_c = R_{1x}, \qquad M\ddot{y}_c = R_{1y} - Mg, \tag{3.14}$$

где имеем следующие выражения, определяющие x_c, y_c :

$$Mx_c = Mx_A - K_r\sin\psi + (K_a - L_aM)\sin\alpha_1 +$$

$$+ K_a \sin\alpha_2 + (K_b - L_b M)\sin\beta_1 + K_b \sin\beta_2,$$

$$My_c = My_A + K_r\cos\psi + (L_a M - K_a)\cos\alpha_1 -$$

$$- K_a\cos\alpha_2 + (L_b M - K_b)\cos\beta_1 - K_b\cos\beta_2,$$

откуда после дифференцирования по времени получим

$$\begin{aligned} M\dot{x}_c &= -K_r\dot{\psi}\cos\psi + (K_a - L_a M)\,\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 + \\ &+ K_a\dot{\alpha}_2\cos\alpha_2 + (K_b - L_b M)\,\dot{\beta}_1\cos\beta_1 + K_b\dot{\beta}_2\cos\beta_2, \\ M\dot{y}_c &= -K_r\dot{\psi}\sin\psi + (K_a - L_a M)\,\dot{\alpha}_1\sin\alpha_1 + \\ &+ K_a\dot{\alpha}_2\sin\alpha_2 + (K_b - L_b M)\,\dot{\beta}_1\sin\beta_1 + K_b\dot{\beta}_2\sin\beta_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

С помощью соотношений (3.14), (3.15) получим выражения для R_{1x}, R_{1y} :

$$R_{1x} = \sum_{i=1}^{5} a_{ii}\,\left(\ddot{z}_i\cos\,z_i - \dot{z}_i^2\sin\,z_i\right),$$

$$R_{1y} = Mg + \sum_{i=1}^{5} a_{ii}\,\left(\ddot{z}_i\sin\,z_i + \dot{z}_i^2\cos\,z_i\right).$$

через компоненты матрицы $A = \mathrm{diag}\,(a_{ii})$ и вектора $z = (z_i)$, $i = \overline{1,5}$.

3.1.3 Постановка задачи

Сначала рассмотрим одноопорную фазу в предположении, что в начальный момент времени $t = 0$ конфигурация механизма характеризуется вектором

$$z^*(0) = (\psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\,\Big|_{t=0}.$$

Пусть конфигурация механизма $z(T)$ в некоторый заданный момент врмени $t = T$ (время шага) совпадает с начальной с точностью до смены ног, т.е.

$$\begin{aligned} &\psi(T) = \psi(0), \qquad \alpha_1(T) = \alpha_2(0), \qquad \alpha_2(T) = \alpha_1(0), \\ &\beta_1(T) = \beta_2(0), \qquad \beta_2(T) = \beta_1(0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Очевидно, что можно указать сколь угодно большое число способов приведения пятизвенного механизма из состояния $z(0)$ в состояние $z(T)$. Будем считать, что в одноопорной фазе $R_2 = 0, \Pi_2 = 0$. Тогда в уравнении движения (3.10): $w \in R^5$, $C(z) \in R^5 \times R^5$, $\det C(z) \neq \neq 0$. Поэтому для заданной вектор-функции $z(t)$ управляющие моменты $u_1, .u_2, q_1, q_2, \Pi_1$ определяются однозначно (обратный метод построения одноопорного движения).

Поставим задачу следующим образом. Будем считать управляющие воздействия импульсными, которые подаются только в начальный и конечный моменты времени $t = 0, t = T$, т.е. тогда, когда переносимая нога находится на поверхности. Итак, рассматривается следующий класс управлений:

$$w(t) = E_0\,\delta(t) + E_T\,\delta(t - T), \tag{3.17}$$

где $\delta(t)$, $\delta(t - T)$ — дельта-функции Дирака, не равные нулю при $t = 0,\ t = T$; E_0, E_T — векторы интенсивностей импульсных воздействий при $t = 0$, $t = T$; для одноопорной фазы $E_0, E_T \in R^8$.

После подачи управления $w(t)$ (3.17) при $t = 0, t = T$ на интервале времени $t \in (0, T)$, когда $w(t) = 0$, механизм движется по инерции или, иначе, по баллистической траектории. Подставим в систему (3.10), $z \in R^5$, в правую часть w (3.17). Подача импульсов не вызовет изменения позиционных координат (вектора z), но приведет к скачку скоростей $\dot{z}$. В момент $t = 0$ этот скачок $\Delta\dot{z}(0)$ равен (см. уравнение (3.10) в разрешенной по $\ddot{z}$ форме)

$$\Delta\dot{z}(0) = \dot{z}(+0) - \dot{z}(-0) = B^{-1}[\,z(0)\,]\,C[\,z(0)\,]\,E_0, \tag{3.18}$$

или

$$B[\,z(0)\,]\,\Delta\dot{z}(0) = C[\,z(0)\,]\,E_0, \tag{3.19}$$

где $\dot{z}(-0)$, $\dot{z}(+0)$ — векторы угловых скоростей механизма до и после приложения импульсов.

При $t \in (0, T)$ имеем $w(t) = 0$, поэтому вектор $z(t)$ удовлетворяет однородной системе уравнений

$$B(z)\,\ddot{z} + gA\,f_1(z) + D(z)\,f_2(\dot{z}) = 0, \tag{3.20}$$

описывающей баллистическое движение механизма, или

$$\ddot{z} = -\,g\,B^{-1}(z)\,A\,f_1(z) - B^{-1}(z)\,D(z)\,f_2(\dot{z}),$$

где $\dot z(0) = \dot z(+0)$ и вектор $\dot z(+0)$ определяется соотношением (3.18).

В момент $t = T$ система (3.20) приходит в фазовую точку $z(T)$, $\dot z(T)$. Тогда к системе подается серия импульсов интенсивности E_T. Вектор $\dot z$ при этом претерпевает скачок $\Delta \dot z(T)$, равный

$$\Delta \dot z(T) = \dot z(T+0) - \dot z(T-0) = B^{-1}[\, z(T)\,]\, C[\, z(T)\,]\, E_T. \tag{3.21}$$

Формулу (3.21) можно переписать в виде

$$B[\, z(T)\,]\, \Delta \dot z(T) = C[\, z(T)\,]\, E_T. \tag{3.22}$$

Поскольку $\operatorname{rank} C(z) = 5\ \forall\, z$, то из формул (3.19), (3.22) следует, что импульсными воздействиями можно реализовать любой скачок скоростей, т.е. любое распределение скоростей звеньев механизма.

Поставим задачу. Пусть заданы начальная и конечная конфигурации механизма $z(0)$, $z(T)$ (3.16). Требуется найти управление (3.17), которое переводит механизм из $z(0)$ в $z(T)$, а именно надо найти такие векторы E_0 и E_T, когда решение $z(t)$ соответствующей системы (3.10) при управлении (3.17) в моменты времени $t = 0$, $t = T$ принимает значения $z(0)$, $z(T)$ соответственно.

Формулировку задачи можно упростить: требуется найти такое решение $z(t)$ системы (3.20), которое в моменты $t = 0$, $t = T$ принимает заданные значения $z(0)$, $z(T)$.

Если краевая задача для системы (3.20) решена и определен вектор $\dot z(+0)$, то тогда с учетом равенства (3.19) можно найти вектор E_0 интенсивностей импульсных воздействий. Пусть $\dot z(-0) = 0$, т.е. вектор угловых скоростей звеньев механизма $\dot z$ равен нулю. Тогда соотношение (3.19) дает запись

$$C[\, z(0)\,]\, E_0 = B[\, z(0)\,]\, \dot z(+0),$$

откуда в силу невырожденности матрицы $C(z)$ найдем единственное решение

$$E_0 = C^{-1}[\, z(0)\,]\, B[\, z(0)\,]\, \dot z(+0). \tag{3.23}$$

После приложения при $t = 0$ управляющих импульсов при баллистическом движении механизм в момент $t = T$ попадает в положение $z(T)$. Предполагая, что импульсные воздействия в момент

$t = T$ гасят угловые скорости звеньев: $\dot z(T+0) = 0$, из соотношения (3.22) получим

$$C[\, z(T)\,]\, E_T = -\, B[\, z(T)\,]\, \dot z(T-0),$$

откуда при $\det C(z) \neq 0$ найдем единственное решение

$$E_T = -\, C^{-1}[\, z(T)\,]\, B[\, z(T)\,]\, \dot z(T-0). \tag{3.24}$$

Далее по формулам (3.23), (3.24) однозначно определяются интенсивности импульсных моментов $u_1, u_2, q_1, q_2, \Pi_1$, необходимые для сообщения звеньям механизма угловых скоростей, решающих поставленную краевую задачу.

В конце параграфа остановимся кратко на задаче организации движения в двухопорной фазе. Смена конечностей при одноопорном движении предполагает наличие двухопорной фазы. Будем при этом считать время ее действия сколь угодно малым. Очевидно, что в таком случае перераспределение скоростей звеньев должно быть мгновенным, т.е. к звеньям должны быть приложены импульсные воздействия.

Рассмотрим способ вычисления импульсов, требуемых для желаемого перераспределения скоростей звеньев. Решение краевой задачи для системы (3.20) дает значения $\dot z(0)$, $\dot z(T)$. С помощью формул связи (см. раздел 3.1.2 можно найти компоненты $\dot x(0)$, $\dot y(0)$ и $\dot x(T)$, $\dot y(0)$ скорости тазобедренного сустава O в начале и конце одноопорной фазы ($t = 0$, $t = T$).

Выпишем желаемые скачки скорости тазобедренного сустава и угловой скорости корпуса

$$\Delta \dot x = \dot x(0) - \dot x(T), \qquad \Delta \dot y = \dot y(0) - \dot y(T), \qquad \Delta \dot\psi = \dot\psi(0) - \dot\psi(T),$$

затем скачки угловых скоростей бедра и голени передней ноги

$$\Delta \dot\alpha_1 = \dot\alpha_1(0) - \dot\alpha_2(T), \qquad \Delta \dot\beta_1 = \dot\beta_1(0) - \dot\beta_2(T),$$

а также скачки угловых скоростей бедра и голени задней ноги

$$\Delta \dot\alpha_2 = \dot\alpha_2(0) - \dot\alpha_1(T), \qquad \Delta \dot\beta_2 = \dot\beta_2(0) - \dot\beta_1(T).$$

Написанные формулы полностью определяют вектор $\Delta \dot z \in R^7$ скачков скоростей.

Мгновенное изменение скоростей достигается путем подачи импульсных воздействий

$$w(t) = E\,\delta(t-T), \tag{3.25}$$

где $\delta(t-T)$ — дельта-функция, равная нулю при $t \neq T$, $E \in R^{10}$ — вектор интенсивностей прикладываемых импульсов (по $u_1, u_2, q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$).

В момент двухопорной фазы ни одна из концевых точек конечностей не является закрепленной. Поэтому уравнения движения пятизвенного механизма (3.10) с одной закрепленной точкой, когда $z \in R^5$, $w \in R^8$, не могут быть использованы для описания фазы двойной опоры. Для описания двухопорной фазы надо воспользоваться уравнениями (3.10), когда $z \in R^7$, $w \in R^{10}$.

В момент времени $t = T$ управление (3.25) скачком изменяет $\dot z$, не меняя значения вектора позиционных координат z. Из уравнений (3.10) следует, что скачок скоростей $\Delta\dot z(T)$ в момент $t = T$ равен

$$\Delta\dot z(T) = B^{-1}[\,z(T)\,]\,C[\,z(T)\,]\,E, \qquad z \in R^7,\ E \in R^{10},\ C \in R^7 \times R^{10},$$

или

$$B[\,z(T)\,]\,\Delta\dot z(T) = C[\,z(T)\,]\,E. \tag{3.26}$$

В формуле (3.26) $\operatorname{rank} C(z) = 7\ \forall\, z$. Поэтому, рассматривая соотношение (3.26) как векторно-матричное уравнение относительно вектора $E \in R^{10}$, найдем его трехпараметрическое множество решений. Отсюда можно провести анализ различных ситуаций распределения прикладываемых сил и моментов, характерных для фазы двойной опоры.

3.2 Комфортабельность двуногой ходьбы

Под *комфортабельным движением* понимают такие локомоции двуногого шагающего механизма, при которых определенная точка корпуса аппарата движется равномерно и прямолинейно [7]. Саму точку называют *точкой комфортабельности* (комфортабельность точки подвеса ног, центра масс системы и т.д.).

Ввиду важности понятий комфортабельного и энергетически оптимального передвижения при ходьбе ниже будут рассмотрены некоторые результаты исследований [7] по изучению основных свойств соответствующего локомоционного движения.

3.2.1 Об энергетических затратах

Для начала запишем уравнение движения центра масс системы (пятизвенный плоский механизм) и уравнение изменения ее кинетического момента при ходьбе.

Введем обозначения: M — масса системы, r_c — радиус-вектор центра масс системы из полюса N неподвижной системы координат $NXYZ$, где ось Z направлена вертикально вверх, P — сила тяжести, R — сила реакции опоры, r_* — радиус-вектор *точки нуль-момента* (т0м), т.е. точки пересечения линии действия вектора R с поверхностью опоры, K — кинетический момент в осях Кенига. Тогда уравнения движения имеют вид

$$M\,\frac{d^2 z_c}{dt^2} = P + R, \qquad \frac{dK}{dt} = (r_* - r_c) \times R. \tag{3.27}$$

Для одноопорной ходьбы введем радиус-вектор r_ν конца опорной ноги со стопой: $r_* = r_\nu + \rho_*$, где ρ_* — радиус-вектор от конца опорной ноги к т0м. В этом случае $r_* - r_c = (r_\nu - r_c) + \rho_*$ и тогда $(r_* - r_c) \times R\ = =\ R \times (r_c - r_*) = R \times (r_c - r_\nu) - R \times \rho_*$, а значит, второе уравнение системы (3.27) можно переписать так:

$$\frac{dK}{dt} = R \times (r_c - r_\nu) + m, \qquad m \equiv \rho_* \times R. \tag{3.28}$$

Вводя обозначение $r = r_c - r_\nu$, получим для системы (3.27), (3.28) запись

$$M\,\frac{d^2 r}{dt^2} = P + R, \qquad \frac{dK}{dt} = R \times r + m, \tag{3.29}$$

где $m = 0$ для точечного контакта ноги с поверхностью.

Пусть модель шагающего устройства представляет некоторую материальную точку массой M, к которой крепятся две невесомые ноги. Имеем: $K \equiv 0$, $m = 0$ и согласно системе (3.29) $R \times r \equiv 0$, где

$R = R_s r / r_s$; здесь R_s, r_s — модули соответствующих векторов R и r. Запишем скалярно первое уравнение системы (3.29):

$$M\ddot{x} = \frac{R_s x}{r_s}, \qquad M\ddot{z} = -Mg + \frac{R_s z}{r_s}, \tag{3.30}$$

где x, z — координаты материальной точки, отсчитываемые от точки опоры ноги, $Mg = P$ — вес системы. При одноопорном движении смена ног происходит мгновенно. В системе (3.30) величина R_s опорной ноги не известна.

Для периодической ходьбы с длиной шага $L = 2x_0$, $x_0 > 0$ и длительностью шага $2T$ имеют место граничные условия применительно к системе (3.30), где $t = (2n \pm 1)\,T$, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$x \pm x_0, \qquad \dot{x} = V_0, \qquad z = h, \qquad \dot{z} = 0, \tag{3.31}$$

V_0, h — заданные числа.

В неподвижной системе координат $NXYZ$ координаты материальной точки задаются равенствами $X = x + x_\nu$, $Z = z + z_\nu$, где x_ν, z_ν — координаты опорных точек в виде заданных функций времени: $x_\nu = nL = 2x_0 n$, $z_\nu = 0$, $t \in [\,(2n-1)\,T,\,(2n+1)\,T\,]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Краевая задача (3.30), (3.31) может быть решена с помощью надлежащего выбора управляющей функции $R(t)$. Зададим с этой целью движение опорной ноги так, чтобы материальная точка находилась во время движения на высоте h от горизонтальной поверхности: $z \equiv h$, $\dot{z} \equiv 0$. Отсюда из второго уравнения (3.30) получим $R_s/r_s = Mg/h$, а из первого уравнения будет следовать соотношение

$$\ddot{x} - kx = 0, \tag{3.32}$$

где $k \equiv g/h$.

Краевая задача (3.32), (3.31) имеет следующее решение:

$$x = \frac{x_0}{\operatorname{sh}\sqrt{k}T}\operatorname{sh}\sqrt{k}\,(t - 2nT), \qquad \dot{x} = \frac{x_0}{\operatorname{sh}\sqrt{k}T}\sqrt{k}\operatorname{ch}\sqrt{k}\,(t - 2nT)$$

при условии, что $V_0 = (L/2)\sqrt{k}\operatorname{cth}\sqrt{k}T$. Это условие накладывает зависимость между величинами $L = 2x_0$, $2T$ и начальной скоростью движения V_0.

Затем, вычисляя среднюю скорость на шаге $V = (1/2T)\int_{-T}^{T}\dot{x}\,dt$, найдем, что $V = L/(2T)$. При вычислении работы управляемой силы реакции на шаге $A = \int_{-T}^{T}|\,(R_s/r_s)\,x\dot{x}\,|\,dt$, получим величину

$$A = \frac{MgL^2}{4h} = \frac{PL^2}{4h}. \tag{3.33}$$

Отметим, что эта величина может служить некоторой энергетической оценкой работы при ходьбе, которую шагающий аппарат с двумя конечностями затрачивает на одном шаге движения. Соответственно этому работа $\bar{A}$ на единице пути и мощность N двигателей механизма равны

$$\bar{A} = \frac{PL}{4h}, \qquad N = \frac{PLV}{4h}. \tag{3.34}$$

К примеру, для человека характерны параметры: $P = 70$ кгс, $L = 0{,}7$ м, $h = 0{,}8$ м, $V = 3{,}6$ км/ч $= 1$ м/с. Имеем по формулам (3.33), (3.34) экспериментально подтвержденные значения

$$A \approx 105 \text{ Дж}, \qquad \bar{A} \approx 150 \text{ Дж/м}, \qquad N \approx 150 \text{ Вт}.$$

В модели бега опорная фаза длится мгновенно и сам бег представляет собой чередование безопорных фаз, описываемых уравнениями (3.30), когда $R_s \equiv 0$. В качестве решений этих уравнений получим параболические траектории.

Имеем $V_0 = (\dot{x}_0, \dot{z}_0)$, T — время полетного участка, L — его длина. Величины $T, \dot{z}_0, L$ связаны формулами параболического движения

$$T = \frac{2\dot{z}_0}{g}, \qquad L = VT. \tag{3.35}$$

В конце полетного участка $V_k = (\dot{x}_k, \dot{z}_k)$. На гашение скорости $\dot{z}_k = -\dot{z}_0$ уходит работа $M\dot{z}_k^2/2$. Для продолжение бега надо приобрести скорость $\dot{z}_0$ и затратить работу $M\dot{z}_0^2/2$. Значит, на одном участке ("шаге") бега затрачивается работа $A = M\,(\dot{z}_k^2 + \dot{z}_0^2)/2 = M\dot{z}_0^2$, или, принимая в расчет формулы (3.35):

$$A = \frac{PgL^2}{4V^2}. \tag{3.36}$$

Сравнение выражений (3.36) и (3.33) показывает, что при скоростях $V > V_* = \sqrt{gh}$ выгодно с энергетической точки зрения перейти с ходьбы на бег: работа (3.36) при беге с такими скоростями меньше, чем работа (3.33), затрачиваемая на ходьбу. И наоборот, при $V < V_*$ ходьба становится энергетически выгоднее, чем бег. Например, если $h = 0,8$ м, то $V_* \approx 10$ км/ч; при $h = 1$ м имеем $V_* \approx 11$ км/ч, т.е. получим скорости спортивной ходьбы.

Мощность (3.34) тратится на поддержание веса механизма. Надо помимо этого учитывать мощность, которая идет на перенос ноги [5]: $\bar{N} = 4\mu PV^3/(gL)$, где $\mu = m_n/M_k$ — это отношение массы ноги к массе корпуса. Следовательно, с учетом формулы (3.34) общая мощность равна

$$N = \frac{PLV}{4h} + \frac{4\mu PV^3}{gL}, \tag{3.37}$$

откуда можно найти оптимальную длину шага $L_{\text{opt}} = 4V\sqrt{\mu/k}$. К примеру, для человека, когда $V = 4,5$ км/ч $= 1,25$ м/с, $h =$ 1 м, $\mu == 0,2$, имеем $L_{\text{opt}} = 0,7$ м.

Добавим к этому, что потребляемая мощность локомоционного аппарата со многими конечностями зависит от скорости по закону, схожему с законом (3.37): $N \approx c_1V + c_2V^3$, где в первом слагаемом мощность тратится на удержание веса аппарата, а во втором — на перенос всех конечностей.

3.2.2 Принцип комфортабельности

Этот принцип [7] формулируется как оптимизационное условие ходьбы со следующим критерием качества: движение двуногого локомоционного механизма осуществляется так, чтобы его центр масс испытывал наименьшее среднее ускорение, т.е. стремился к равномерному и прямолинейному движению.

Пусть имеется плоское одноопорное движение антропоморфного механизма, описываемое уравнениями (3.29) при $m = 0$. Введем в рассмотрение безразмерные величины

$$e = \frac{P}{Mg}, \qquad R^0 = \frac{R}{Mg} = \left(R_x^0,\, 0,\, R_z^0\right)^*, \tag{3.38}$$

$$\rho^0 = \frac{r}{gT^2} = (x, o, z)^*, \qquad K^0 = \frac{K}{Mg^2T^3} = (0, K^0, 0)^*,$$

где безразмерные координаты сохранили обозначения x, y, z. Время t также считается безразмерным, а за единицу времени взята величина T, где $2T$ — длительность шага.

Ниже потребуется вспомогательная переменная η, которая задается уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = K^0. \tag{3.39}$$

Добавим к безразмерной системе (3.29), (3.39) краевые условия

$$\rho^0(-1) = A\rho^0(1) = \rho_0^0 = (x_0, 0, z_0)^*, \tag{3.40}$$

$$\dot{\rho}^0(-1) = \dot{\rho}^0(1) = \dot{\rho}_0^0, \qquad K^0(-1) = K^0(1), \qquad \eta(-1) = \eta(1),$$

где $A = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$. Написанные условия (3.40) обеспечивают непрерывность координат, скоростей и кинетического момента, а также гарантируют периодичность положения при смене опорной ноги и ненакапливаемость кинетического момента.

Возьмем вектор реакции R^0 за управление. Надо найти R_x^0, R_z^0, удовлетворяющие *критерию комфортабельности*, при которых минимизируется функционал

$$J = \int_{-1}^{1} |\,\ddot{\rho}^0\,|^2\, dt = \int_{-1}^{1} \left[\, (R_x^0)^2 + (R_z^0 - 1)^2 \,\right]\, dt \tag{3.41}$$

с ограничением на управление: $R^0(-1) = R^0(1) = 0$, когда реакция равна нулю в моменты отрыва и постановки ноги. Отметим, что при $J \to \min$ движение центра масс минимально отклоняется от равномерного и прямолинейного движения.

Задачу (3.29), (3.38) – (3.41) будем решать с помощью *принципа максимума* для *функции Понтрягина*

$$H = \psi_1 v_x + \psi_2 R_x^0 + \psi_3 v_z + \psi_4\,(R_z^0 - 1) + \psi_5 K^0 +$$

$$+\ \psi_6\,(R_z^0 x - R_x^0 z) - (R_x^0)^2 - (R_z^0 - 1)^2.$$

Запишем далее систему (3.38) – (3.41) и сопряженную систему

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x, & \dot{\psi}_1 &= -\,\psi_6 R_z^0, & \dot{v}_x &= R_x^0, & \dot{\psi}_2 &= -\,\psi_1,\\
\dot{z} &= v_z, & \dot{\psi}_3 &= \psi_6 R_x^0, & \dot{v}_z &= R_z^0 - 1, & \dot{\psi}_4 &= -\,\psi_3,\\
\dot{K}^0 &= R_z^0 x - R_x^0 z, & \dot{\psi}_5 &= 0, & \dot{\eta} &= K^0, & \dot{\psi}_6 &= -\,\psi_5.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Из условия максимума функции H получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial R_x^0} &= \psi_2 - \psi_6 z - 2R_x^0 = 0,\\
\frac{\partial H}{\partial R_z^0} &= \psi_4 + \psi_6 x - 2\,(R_z^0 - 1) = 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Решение нелинейной оптимальной задачи (3.42), (3.43) сводится к интегрированию линейной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{R}_z^0 = C_1 x + C_3, \qquad \dot{R}_z^0 = \frac{1}{2}\left(C_1\,\frac{t^2}{2} + C_0 t\right) - C_1 z + C_2,\\
&\frac{d^3 x}{dt^3} + C_1 z = \frac{1}{2}\left(C_1\,\frac{t^2}{2} + C_0 t\right) + C_2, \qquad \frac{d^3 z}{dt^3} - C_1 x = C_3,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Ограничение на управление имеет место, если $C_1 \neq 0$. Тогда, решая систему (3.44), получим

$$\begin{aligned}
x &= D_1 \sin 2\tau - D_2 \cos 2\tau - D_3 E_\tau \sin\tau + D_4 E_\tau \cos\tau -\\
&\quad - D_5 E_{-\tau} \sin\tau + D_6 E_{-\tau}\cos\tau - C_3/C_1,\\
z &= D_1 \cos 2\tau + D_2 \sin 2\tau + D_3 E_\tau \cos\tau + D_4 E_\tau \sin\tau + D_5 E_{-\tau}\cos\tau +\\
&\quad + D_6 E_{-\tau}\sin\tau + T^2/4 + C_0 t/(2C_1) + C_2/C_1,\\
R_x^0 &= \bar{C}_1 \Big[-D_1 \sin 2\tau + D_2\cos 2\tau - D_3 E_\tau\,(\sqrt{3}\cos\tau + \sin\tau) -\\
&\quad - D_4 E_\tau\,(\sqrt{3}\sin\tau - \cos\tau) + D_5 E_{-\tau}\,(\sqrt{3}\cos\tau - \sin\tau) +\\
&\quad + D_6 E_{-\tau}\,(\sqrt{3}\sin\tau + \cos\tau)\Big],\\
R_z^0 &= \bar{C}_1 \Big[-D_1 \cos 2\tau - D_2 \sin 2\tau - D_3 E_\tau\,(\sqrt{3}\sin\tau - \cos\tau) +\\
&\quad + D_4 E_\tau\,(\sqrt{3}\cos\tau + \sin\tau) + D_5 E_{-\tau}\,(\sqrt{3}\sin\tau + \cos\tau) -\\
&\quad - D_6 E_{-\tau}\,(\sqrt{3}\cos\tau - \sin\tau)\Big] + 3/2,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

где введены обозначения

$$\tau = \frac{C_1^{1/3}}{2}\,t, \qquad \bar{C}_1 = \frac{C_1^{1/3}}{2}, \qquad E_\tau = e^{\sqrt{3}\tau}, \qquad E_{-\tau} = e^{-\sqrt{3}\tau},$$

D_1, ..., D_6 — произвольные постоянные.

Можно показать (подробности анализа и детали численных расчетов см. в работе [7]), что $\forall\, C_1 \neq 0$ функции $\dot{x}(t)$, $z(t)$, $R_z^0(t)$, $K^0(t)$ четны, а функции $x(t)$, $\dot{z}(t)$, $R_x^0(t)$ нечетны. Кроме того,

$$C_0 = C_3 = 0, \qquad D_3 = D_5, \qquad D_4 = -\,D_6, \tag{3.46}$$

и тогда из системы (3.42) с учетом соотношений (3.45), (3.46) будем иметь

$$K^0(t) = x\dot{z} - z\dot{x} + \frac{R_z^0}{C_1} + C_4.$$

Краевые условия (3.40) выполняются при выборе постоянной C_4 :

$$C_4 = -\int_{-1}^{1}\left(x\dot{z} - z\dot{x} + \frac{R_z^0}{C_1}\right)dt$$

и в силу свойств четности решений задачи. Отметим здесь же, что локальному (расчетному) минимуму функционала J будет отвечать и соответствующая комфортабельная локально минимальная длина шага L.

3.2.3 Периодическая комфортабельная ходьба

Рассмотрим комфортабельную походку в неподвижной системе координат $NXYZ$ твердого тела (корпуса) с весом $P = Mg$, к точке O которого подвешена пара многозвенных ног, состоящих из невесомых безинерционных звеньев, соединенных двухстепенными суставами [7]. Движение ног и точки подвеса задается кинематически, т.е. обеспечивается движение корпуса, не зависящее от движения ног. Динамика корпуса определяется только траекторией точки подвеса и *следовой дорожкой* — точками контакта опорных ног с поверхностью.

Пусть C — центр масс тела, r_c — радиус-вектор из N в C, r_0 — радиус-вектор из N в O, r_j — радиус-вектор из N в точку опоры

j–ой ноги $(j = 1, 2)$, ρ — радиус-вектор из O в C : $r_c = r_0 + \rho$, R_j — векторы сил реакции опоры, $R = R_1 + R_2$; здесь для переносной ноги $R_j = R_\pi = 0$, а для опорной ноги $R_j = R_\nu$ $(r_j = r_\nu)$.

Тогда теорема о движении центра масс системы (центра масс корпуса) может быть записана в виде

$$R = -P + M\,[\,\ddot{r}_0 + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)\,]\,,$$

где ω — вектор угловой скорости твердого тела, M — масса тела. Теорема об изменении количества движения относительно точки подвеса O может быть записана так:

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + M\rho \times \ddot{r}_0 = \rho \times P - \sum_{j=1}^{2} (r_0 - r_j) \times R_j,$$

где J — тензор инерции тела в точке O.

Чтобы эти уравнения представляли собой замкнутую систему, надо еще определить вектор реакции. Обозначая индекс опорной ноги через ν, для одноопорной ходьбы уравнения можно переписать в виде

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = [\,\rho + (r_0 - r_\nu)\,] \times (P - M\ddot{r}_0) -$$

$$- (r_0 - r_\nu) \times [\,\dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)\,]\,M.$$

Здесь движение точки подвеса ног определяется кинематикой движения ног и может считаться известным. Правые части этих уравнений для одноопорных походок являются разрывными вектор-функциями времени, так как $r_\nu(t)$ — кусочно-непрерывная, а $r_0(t)$ — непрерывная вектор-функции t.

Обозначим суставы каждой ноги индексом $i = 0, 1, 2, ...$ сверху $(i = 0$: сустав в точке O подвеса), r_j^i — радиус-вектор из N в i–й сустав j–ой ноги, u_j^i — вектор управляющего момента в i–ом суставе j–ой ноги, $r_j^0 \equiv r_0$.

Применяя теорему об изменении момента количества движения относительно i–го сустава к части ноги от точки опоры до i–го сустава, получим

$$u_\pi^i = 0, \qquad u_\nu^i = (r_\nu^i - r_\nu) \times R_\nu, \qquad i = 0, 1, 2, ...,$$

где на r_ν^i наложены связи: $|\,r_\nu^{i+1} - r_\nu^i\,| = l_i$ — длина i–го звена ноги. Эти формулы полностью решают задачу о вычислении управлений, обеспечивающих заданное движение точки подвеса O. Здесь перенос невесомой ноги осуществляется без затрат механической работы. При однозначном задании траекторий каждого сустава однозначно определяются и управления в них.

Будем считать, что точка подвеса ноги совпадает с центром масс тела и $\rho = 0$. Тогда уравнения движения рассматриваемой динамической системы (корпуса, твердого тела) и управления имеют вид

$$R = -P, \quad u_\nu^i = (r_\nu^i - r_\nu) \times (-P), \quad \frac{dK}{dt} = (r_0 - r_\nu) \times P, \qquad (3.47)$$

где K — вектор кинетического момента.

Для комфортабельной походки $r_0(t)$ — линейная вектор-функция времени, $r_0(t) - r_\nu(t)$ — кусочно-линейная вектор-функция. Пусть $\rho = 0$, а уравнения движения и управления описываются системой (3.47).

Определим траекторию $r_0(x, y, z)$ точки подвеса ног как

$$x = x^0 + Vt, \qquad y = 0, \qquad z = h, \qquad (3.48)$$

означающую, что точка O движется с постоянной скоростью V вдоль оси X на высоте $h = \text{const}$ от плоскости XY. Зададим также периодическое с периодом T движение ног формулами для следовой дорожки:

$$y_\nu(t) = \begin{cases} y_0, & t \in [\,iT/2,\ (i+1)\,T/2)\,, \\ -y_0, & t \in [\,(i+1)\,T/2,\ (i+2)\,T/2)\,, \end{cases}$$

$$x_\nu = x_\nu^0 + Vt_i, \qquad t \in [\,t_i,\ t_i + T/2 = t_{i+1}), \qquad z_\nu = 0, \qquad (3.49)$$

где $t_i = iT/2$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Движение локомоционного аппарата считается *осуществимым*, если оно не приводит к неограниченному увеличению угловой скорости корпуса. Для выполнения этого требования необходимо и достаточно, чтобы $|\,K\,| = K_s < \infty$.

Учитывая соотношения (3.48), (3.49), уравнения (3.47) скалярно запишем в виде

$$\dot{K}_x = Py_\nu, \qquad \dot{K}_y = P\,[\,V\,(t - t_i) - \alpha\,]\,, \qquad \dot{K}_z = 0, \qquad (3.50)$$

где $\alpha = x_\nu^0 - x^0$. Интегрирование системы (3.50) приводит к выдвижению условия: чтобы $K_s < \infty$, надо придать параметру α вполне конкретное значение, а именно: $\alpha = VT/4$.

При этом значении α система (3.50) имеет периодическое с периодом T решение; перемещение точки подвеса ног относительно опорной точки симметрично, так как в моменты начала и конца опорной фазы расстояния между этими точками одинаковы.

Вводя безразмерные величины

$$\tau = \frac{t - t_i}{T_0}, \qquad l_x = \frac{K_x}{Py_0T_0}, \qquad l_y = \frac{K_y}{PVT_0^2},$$

$$T_0 = T/4, \qquad l_x = l_x^0 + \Delta l_x, \qquad l_y = l_y^0 + \Delta l_y,$$

где l_x^0, l_y^0 — средние значения величин l_x, l_y, получим T-периодическое решение системы (3.50) в следующей параметрической форме:

$$\Delta l_x + 1 = \tau, \qquad \Delta l_y = \frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{2} - \tau,$$

где $\tau \in [\,0,\,2),\;\; t \in [\,t_i,\,t_i + T/2)$ и

$$\Delta l_x = 3 + \tau, \qquad \Delta l_y = \frac{1}{3} + \frac{(\tau - 2)^2}{2} - (\tau - 2),$$

где $\tau \in [\,2,\,4\,],\;\; t \in [\,t_i + T/2,\,t_i + T)$.

Анализ различных случаев [7] позволяет прийти к заключению, что соответствующим выбором параметров $l_x^0, l_y^0, K_z^0 \neq 0$ можно, по всей видимости, построить периодическое движение для любого заданного начального положения корпуса.

3.3 Метод заданной синергии

В локомоционной динамике широко используется *метод заданной синергии* (МЗС) [23], относящийся к классу полуобратных методов. Здесь часть обобщенных координат и сил задается явно, а остальная часть определяется из уравнений движения и уравнений связей. Важно иметь в виду, что МЗС позволяет использовать априорную информацию о движении системы и понижать ее размерность без

усложнения динамики. Программа движений, которая задается по части координат и сил называется *номинальной* или *искусственной синергией*, а закон движения, который определяется для оставшихся координат и сил, называется *компенсаторной синергией*.

Задавая различные искусственные синергии, можно получить адекватный набор компенсаторных синергий, а тем самым воплотить все динамические возможности системы в желаемом процессе ходьбы. Лаконично поясним суть МЗС, обратившись к системе уравнений (3.29). Зададим вначале движение ног. Тогда вектор r является функцией углового положения корпуса и в силу заданного движения ног — явной вектор-функцией времени. Вектор кинетического момента K есть функция движения корпуса и в силу заданного движения ног — явной вектор-функцией времени.

Исключая R с помощью двух уравнений системы (3.29), получим векторное дифференциальное уравнение, описывающее только движеие корпуса. Значит, дело сводится лишь к решению некоторой краевой задачи для движения корпуса, после решения которой можно определить в силу системы (3.29) реакцию R. Затем можно найти также явные выражения для суставных моментов.

Можно поступить иначе, задавая вектор $R = R(t)$ в виде явной вектор-функции времени. Интегрирование квадратурами системы (3.29) тогда приводит к явным зависимостям $r = r(t)$, $K = K(t)$. Возможны и другие способы задания синергии, например, с помощью уравнений сервосвязей для некоторых параметров системы или, например, из какого-либо оптимизационного критерия ходьбы.

Перейдем от словесного описания к математической записи МЗС [23]. Пусть G — вектор обобщенных движущих сил динамического процесса произвольного типа, ξ — вектор динамического состояния (положения) рассматриваемого процесса. Тогда этот процесс можно представить соответствующим набором нелинейных дифференциальных уравнений

$$A\ddot{\xi} + B\,(\dot{\xi}^2) + C\,(\dot{\xi}\dot{\xi}) + D = G, \tag{3.51}$$

где матрицы A, B, C и вектор D зависят от обобщенных координат ξ динамического процесса. В уравнении (3.51) запись $(\dot{\xi}^2,\,(\dot{\xi}\dot{\xi})$ означает векторы, компоненты которых представляют собой $\dot{\xi}_i^2,\ \dot{\xi}_i\dot{\xi}_j,\ i, j\ = =\ \overline{1, n}$, n — размерность системы.

Определим следующие три типа задач:

1. Задано движение всей системы. Тогда дифференциальные уравнения при неизвестных обобщенных силах преобразуются в алгебраические уравнения, с помощью которых можно найти необходимые управляющие воздействия.

2. Для определения движения по заданным управляющим воздействиям (обобщенным силам) надо выразить вектор $\ddot{\xi}$ из уравнения (3.51) в явном виде

$$\ddot{\xi} = A^{-1} \left(G - B\,(\dot{\xi}^2) - C\,(\dot{\xi}\dot{\xi}) - D \right),$$

либо решить (3.51) численно для начальных условий $\xi_0, \dot{\xi}_0$.

3. При комбинированном типе динамической задачи управления (обобщенные силы) G и движение ξ некоторой части системы известны. Известную (заданную) часть обозначим G_0, ξ_0, а неизвестную — G_x, ξ_x. Введем матрицы преобразования P и Q :

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_x \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_x \end{pmatrix}, \qquad (Q_0 \,|\, Q_x) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_x \end{pmatrix} = \xi,$$

позволяющие записать (3.51) в форме

$$\begin{pmatrix} G_0 \\ G_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_x \end{pmatrix} A \left(Q_0 \middle| Q_x\right) \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_0 \\ \ddot{\xi}_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ P_x \end{pmatrix} \left(B\,(\dot{\xi}^2) + C(\dot{\xi}\dot{\xi}) + D \right), \tag{3.52}$$

где

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_x \end{pmatrix} A \, (Q_0 \,|\, Q_x) = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{0x} \\ A_{x0} & A_{xx} \end{pmatrix}$$

с симметрическими подматрицами A_{0x}, A_{x0}.

Уравнение (3.52) допускает преобразование к явному виду относительно неизвестных $G_x, \ddot{\xi}_x$:

$$\begin{pmatrix} G_x \\ \ddot{\xi}_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & A_{0x} \\ I & A_{xx} \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \left[\begin{pmatrix} -I & A_{00} \\ 0 & A_{x0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ P_x \end{pmatrix} \left(B\,(\dot{\xi}^2) + C\,(\dot{\xi}\dot{\xi}) + D \right) \right]. \tag{3.53}$$

Система (3.53) представляет совокупность алгебраических и дифференциальных уравнений, разделяя которую на две подсистемы

с неизвестными обобщенными координатами и силами, получим в итоге

$$\ddot{\xi}_x = A_{0x}^{-1} \left[G_0 - A_{00}\ddot{\xi}_0 - P_0 \left(B\,(\dot{\xi}^2) + C\,(\dot{\xi}\dot{\xi}) + D \right) \right],$$

$$G_x = A_{xx}\ddot{\xi}_x + A_{x0}\ddot{\xi}_0 + P_x \left(B\,(\dot{\xi}^2) + C\,(\dot{\xi}\dot{\xi}) + D \right).$$

Отметим здесь, что система (3.53) является основной для синтеза номинальных динамических режимов в рамках МЗС.

Остановимся теперь на общем балансе сил и моментов в вопросе об учете сил реакции и трения опоры [23]. Предположим, что нога снабжена стопой и осуществляется одноопорная ходьба. Пусть реакция опорной поверхности R направлена вертикально вверх, P — сила тяжести, T — сила треня. Все эти силы составляют набор внешних сил. Тогда приращение количества движения J по некоторому направлению, задаваемому единичным вектором a, равно

$$\Delta_a\, J = \int (R + P + T)_a \, dt,$$

где $(R + P + T)_a = \mathrm{pr}_a\,(R + P + T) \cdot a$ — векторная компонента вектора $R + P + T$ на направлении a.

Для приращения момента количества движения I относительно центра масс имеем

$$\Delta_a\, I = \int (r \times R + r \times T + M_R + M_T)_a \, dt,$$

где r — радиус-вектор из центра масс в центр опорной поверхности стопы, M_R, M_T — соответственно момент сил реакции и сил трения после приведения этих сил к центру стопы.

Считаем векторы R и P коллинеарными, силу трения T им ортогональной. Отсюда, если вектор a горизонтален, то движение центра масс в направлении a будет определяться только силой трения, т.е. $\Delta_a\, J = \int T_a\, dt$. Аналогично $\Delta_a\, I$ относительно горизонтальной оси a будет определяться только реакцией опоры: $\Delta_a\, I = \int (r \times R + M_R)_a\, dt$, а поворот системы (момент количества движения относительно вертикальной оси a) определяется силами трения: $\Delta_a\, I = \int (r \times T + M_T)_a\, dt$.

Таким образом, отмечаем, что знание сил реакции и трения представляет собой важную информацию о движении системы, потребную при синтезе искусственной синергии. Если нога снабжена стопой, то очевидно, что при опоре на одну ногу точка нуль-момента (т0м) не может находиться вне опорной поверхности стопы; в двухопорной фазе т0м должна перемещаться между следами ног. При синтезе искусственной синергии используется главная идея, заключающаяся в том, что заранее определяются законы изменения сил реакции и трения. Например, задается закон движения т0м и точки приложения равнодействующей сил трения. Тем самым накладываются дополнительные связи в виде динамических ограничений на модель системы.

При приведении к т0м сил реакции опоры R горизонтальный момент M_R равен нулю: $M_R = 0$ и в проекциях на горизонтальные оси X и Y имеем: $M_{RX} = 0$, $M_{RY} = 0$. Для сил трения T можно положить, что M_T относительно некоторой вертикальной оси ζ, $\zeta \parallel Z$, равен нулю: $M_{T\zeta} = 0$, где ось ζ может проходить, например, через центр масс или центр опорной поверхности стопы, или т0м.

По принципу Даламбера система должна находиться в равновесии. Обозначим через F и M_F — силы и моменты сил инерции. Приведем их к т0м. Тогда с учетом двух уравнений связи ($M_{RX} = 0$, $M_{RY} = 0$) уравнения динамики можно записать в проекциях на оси X и Y так:

$$(M_P + M_F)_X = 0, \qquad (M_P + M_F)_Y = 0, \tag{3.54}$$

где M_P — суммарный момент сил тяжести относительно т0м, а с учетом того, что силы тяжести не дают момента относительно оси ζ и ввиду третьего уравнения связи ($M_{T\zeta} = 0$), получим уравнение динамики в проекции на ось ζ :

$$(M_F + \rho \times F)_\zeta = 0, \tag{3.55}$$

где ρ — вектор из т0м к точке пересечения оси ζ с опорной поверхностью. Пусть φ_i — обобщенные координаты шагающего механизма, где $\varphi_0 = 0$ означает, что стопа полностью опирается на поверхность опоры. Считается, что в общем случае векторы F и M_F можно представить в виде линейной формы от обобщенных ускорений и квадратичной формы относительно обобщенных скоростей:

$$F = A\ddot{\varphi} + B\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi}), \qquad M_F = C\ddot{\varphi} + D\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi}), \qquad \varphi = (\varphi_i)_{i=\overline{1,n}},$$

где матрицы A, B, C, D зависят от обобщенных координат φ_i, $(\dot{\varphi}\dot{\varphi})$ — вектор $\in R^n$ с элементами $\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j$, $i, j = \overline{1, n}$.

После подстановки этих выражений в (3.54), (3.55) получим

$$\begin{gathered}\left(M_P + C\ddot{\varphi} + D\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi})\right)_X = 0, \qquad \left(M_P + C\ddot{\varphi} + D\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi})\right)_Y = 0,\\ \left(C\ddot{\varphi} + D\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi}) + \rho \times A\ddot{\varphi} + \rho \times B\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi})\right)_\zeta = 0.\end{gathered} \tag{3.56}$$

Отметим здесь, что уравнения (3.56) не содержат информации о походке, а лишь задают некоторые условия на равновесное перемещение системы. Формирование искусственной синергии происходит так: для части координат задается жесткая программа движения в виде некоторого кинетического алгоритма, а законы изменения оставшихся координат определяются из (3.56).

Обозначим: φ_α — координаты, закон изменения которых задан, φ_β — координаты, закон изменения которых находится из уравнений (3.56); $\varphi = (\varphi_\alpha \,|\, \varphi_\beta)$. Преобразуем уравнения (3.56) к следующей матричной форме:

$$A_\beta\,\ddot{\varphi}_\beta + B_\beta\,\left(\dot{\varphi}_\beta\dot{\varphi}_\beta\right) + G = 0, \tag{3.57}$$

где матрицы A_β, B_β зависят от $\varphi_\alpha, \dot{\varphi}_\alpha, \ddot{\varphi}_\alpha$, а вектор G является вектор-функцией переменных $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dot{\varphi}_\alpha, \dot{\varphi}_\beta$.

К уравнениям (3.57) можно добавить условия повторяемости, которые для координат φ_β на полупериоде шага $T/2$ выглядят так:

$$\varphi_\beta(0) = \varphi_\beta(T/2), \qquad \dot{\varphi}_\beta(0) = \dot{\varphi}_\beta(T/2). \tag{3.58}$$

Таким образом, совокупная система уравнений (3.57), (3.58) позволяет определить закон изменения вектора φ_β, а значит, осуществить синтез компенсаторной синергии. Для решения этой системы можно привлечь итерационные методы решения краевых задач.

Целесообразно координаты φ_α взять как угловые переменные ног (нижняя часть), определяющие походку механизма; при этом координаты φ_β будут относится к корпусу (верхняя часть) модели.

При задании закона движения для координат φ_α (нижняя часть механизма) снижается тем самым размерность системы дифференциальных уравнений. Среди множества решений этой системы можно выделить некоторое подмножество, обеспечивающее заданное поведение т0м. Это подмножество описывается уравнением (3.57), которое характеризует конкретный вид движения корпуса (верхняя часть механизма).

Глава 4

Моделирование движения автоматического шагающего аппарата

Среди робототехнических систем, т.е. управляемых систем твердых тел, заметную роль играют шагающие устройства или, как их еще часто называют, локомоционные системы (ЛС). В отличие от манипуляционных локомоционные устройства представляют собой совокупность открыто-замкнутых цепей (конечностей), посредством которых осуществляется передвижение ЛС в пространстве. Наличие большого числа степеней подвижности ЛС делает задачу ее создания и управления намного более сложной, чем других видов робототехнических устройств.

Проблема построения искусственных шагающих систем, т.е. систем, перемещающихся в пространстве при помощи конечностей, издавна привлекала внимание ученых и конструкторов. Достаточно в этой связи упомянуть различные поделки инженеров прошлого в виде заводных кукол или “стопоходящую” машину П.Л. Чебышева.

Основная их особенность, и в этом, надо заметить, их главный

недостаток, заключалась в том, что двигаться они могли лишь по жесткой программе, исключающей всякую возможность изменения условий функционирования. Появление электронно-вычислительной техники с ее возможностями быстро производить расчет динамических режимов, параметров системы управления вновь возродило интерес к идее воплощения робототехнического шагающего устройства.

К этому надо добавить, что у ЛС не все степени подвижности управляемы. Сама локомоционная система представляет собой агрегат твердых тел, причем основная задача динамического синтеза системы управления заключается в стабилизации (отслеживании) движения корпуса шагающего устройства. Тем самым важная роль отводится выводу уравнений движения всех составляющих для последующего компьютерного воплощения.

В недалеком будущем с появлением мощных вычислительных комплексов появится реальная перспектива решения задачи создания искусственного интеллекта и управления сложными динамическими системами, среди которых выделяются робототехнические устройства.

Локомоционные системы, предназначенные для передвижения по местности со сложным рельефом, получили свое обоснование в работах ряда авторов. Однако наличие большого числа степеней свободы, учет инерционных характеристик, реакций опоры и некоторых других особенностей, присущих этим системам, по-прежнему делают актуальной задачу управления ЛС. В ней далеко не последнее место занимает решение прямой задачи динамики, а значит, и нахождение силовых воздействий, испытываемых корпусом и конечностями ЛС в процессе передвижения.

Укажем на библиографию по данной тематике. Общие сведения о манипуляционных и локомоционных устройствах можно найти, например, в работах [3, 9, 23–26, 32, 34, 37–44, 46, 47, 54, 58, 66, 68, 70, 72, 73, 83, 87, 88]. В работах [7, 17, 41, 48, 64, 84, 85, 89, 96, 98] содержится материал об особенностях построения систем управления локомоционных устройств. Математические модели шагающих аппаратов базируются на основных принципах механики, кинематическом и динамическом анализе систем твердых тел со связями (см. по этому поводу работы [22, 27, 31, 33, 42, 43, 51, 71, 74].

Важное значение в задаче синтеза управляемых ЛС придается выводу уравнений движения корпуса и конечностей в форме, удобной для реализации на ЭВМ [1, 2, 6, 7, 45, 49, 52, 60, 62, 63, 69, 86]. Сведения о некоторых походках и особенностях ходьбы ЛС можно почерпнуть из публикаций [23, 34, 53, 62].

В § 4.1 разрабатывается кинематическая схема или, иначе, геометрическая модель локомоционного аппарата, передвигающегося в пространстве при помощи конечностей. Исследование кинематических особенностей ЛС касается вводимых систем координат корпуса и конечностей, а также матриц преобразования координат, благодаря которым удается найти однозначное соответствие между положением корпуса и опорных конечностей шагающего устройства.

В § 4.2 главное внимание уделено выводу уравнений управляемого движения корпуса ЛС и ее конечностей. Под действием приложенных со стороны конечностей сил и моментов осуществляется перемещение корпуса в пространстве. При обосновании уравнений движения и исследовании динамических особенностей конечностей за основу взят кинетостатический принцип Даламбера о равенстве нулю суммы всех действующих на систему сил и моментов.

Последний § 4.3 главы посвящен некоторым задачам, возникающим при моделировании движения многоногого шагающего аппарата. В их число в качестве одних из основных попали: задача распределения реакций опоры и задача идентификации динамических параметров. Решение этих задач самым непосредственным образом сказывается на последующем формировании эффективной системы управления шагающим аппаратом.

4.1 Кинематическая модель шагающего робототехнического устройства

Локомоционное (шагающее) *устройство* представляет собой жесткий корпус с n конечностями (см. Рис. 4.1). Конечности могут находится в опорной, переносной и свободной фазах. Точки стоп обозначим H^i, колен (локтей) — S^i, бедер (плеч) — E^i, $i = \overline{1,n}$. Каждая из конечностей состоит из двух жестких звеньев, соединенных между собой одностепенным шарниром. К корпусу конечность крепится с помощью двухстепенного *шарнира Гука*. С кинематически-

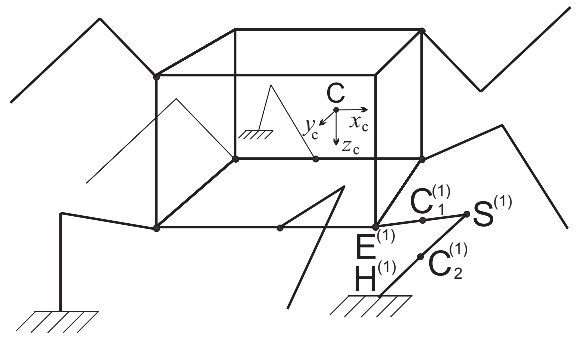

Рис. 4.1. Автоматический шагающий аппарат

ми характеристиками ЛС, геометрией конечностей более подробно можно ознакомиться по книге [81].

Принятая кинематическая схема типична для исследуемых в настоящее время шагающих аппаратов. Передвижение ЛС осуществляется сменой опорных конечностей по какой-либо известной программе (походке), причем начало фазы опоры одних конечностей соответствует началу фазы переноса для других конечностей и наоборот.

Предполагается также, что в точке контакта конечности с опорной поверхностью происходит шарнирное опирание с максимально возможным числом степеней подвижности. Движение аппарата реализуется путем приложения управляющих моментов вращения в сочленениях конечностей.

Далее будут рассматриваться различные системы координат (СК), связанные с теми или иными точками ЛС. Условимся о следующих обозначениях. Через C будем обозначать некоторую фиксированную точку корпуса аппарата. Отвечающая ей СК (C, σ_C) жестко связана с корпусом; здесь C — начало СК, σ_C — соответствующая правая тройка ортов (базис σ_C). Другие СК связаны с точками E^i бедер (плеч), C_1^i — верхнего звена, C_2^i — нижнего звена конечностей, $i = \overline{1,n}$, где C_1^i, C_2^i — центры инерции соответствующих звеньев.

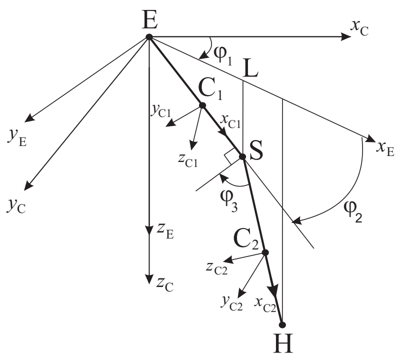

Рис. 4.2. Угловые переменные

Угловые переменные, определяющие положение звеньев конечностей (углы вращения шарниров конечностей) обозначим через φ_1^i, φ_2^i в бедре и через φ_3^i в колене, а их совокупность через $\varphi^i = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{i*}$; $*$ сверху означает знак транспонирования. Отметим, что векторные величины нигде не выделяются (см. Рис. 4.2).

По каждой из отмеченных степеней подвижности i–ой конечности действует управляющий момент вращения u_j^i, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2,3$. Пусть EL — линия пересечения плоскости $x_C y_C$ и плоскости конечности ESH. Здесь x_C, y_C, z_C — оси координат, определяемые ортами СК $(C,\, \sigma_C)$; точку C можно совместить с точкой E. Тогда СК (E, x_E, y_E, z_E) — правая, причем ось x_E направлена по прямой EL, а ось $z_E = z_C$; $(\widehat{x_C, x_E}) = \varphi_1$, $(\widehat{x_E, ES}) = \varphi_2$, $\angle ESH = \pi/2 + \varphi_3$. Через φ_3 обозначен угол вращения шарнира колена, который с точностью до $\pi/2$ совпадает с углом между звеньями конечности.

Системы координат конечностей образуют правые тройки векторов; оси z_E, z_{C_1}, z_{C_2} принадлежат плоскости ESH. Положение точек C_1 и C_2 конечности определяется следующим образом:

$$S_{C_1}^{\sigma_{C_1}} = \begin{pmatrix} l_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_{C_1}^{\sigma_{C_1}} = \begin{pmatrix} -l_1'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ H_{C_2}^{\sigma_{C_2}} = \begin{pmatrix} l_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ S_{C_2}^{\sigma_{C_2}} = \begin{pmatrix} -l_2'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда длины звеньев конечности соответственно равны: $l_1 = l_1' + l_1''$,

$l_2 = l_2' + l_2''$.

Запись $a_A^{\sigma_A}$ означает задание компонент вектора a в СК $(A,\, \sigma_A)$, т.е. с центром в точке A и с ортами σ_A. Предположим, что точки C_1 и C_2 совпадают с центрами инерции звеньев. Величины l_1', l_1'', l_2' и l_2'' будут, простоты ради, полагаться равными для всех конечностей. Наконец, задавая компоненты $E_C^{\sigma_C i}$ векторов E_C^i, $i = \overline{1,n}$, получим замкнутое кинематическое описание ЛС, позволяющее определить положение любой точки ЛС в любой из введенных выше СК, если задано положение этой точки в одной из них.

Поставим задачу: определить закон изменения углов вращения в бедрах и коленях конечностей, обеспечивающих перемещение корпуса ЛС по предписанному закону; другими словами, требуется найти некоторое соотношение для кинематического описания ЛС, определяющего ее геометрию в пространстве.

Положение корпуса в каждый момент времени полностью определяется заданием шести параметров, которые описывают положение в пространстве какой-нибудь точки корпуса и жестко связанной с корпусом СК. Векторный набор шести параметров, определяющих положение корпуса ЛС, будем обозначать через q.

Решение поставленной задачи реализуется в два этапа: на первом — вычисляется закон перемещения в абсолютной СК бедер опорных конечностей; на втором — определяются законы изменения во времени углов вращения конечностей, обеспечивающих заданное перемещение бедер. Для конечностей в переносной и свободной фазах закон изменения угловых переменных может при этом выбираться различными способами.

Рассмотрим радиус-вектор опорных стоп H^i, выраженный в двух различных СК $(C,\, \sigma_C)$ и $(E^i,\, \sigma_{C_1}^i) = (E,\, \sigma_{C_1})^i$. Имеем

$$H_C^{\sigma_C i} = T_\sigma^{\sigma_C}\,(H^{\sigma i} - C^\sigma), \tag{4.1}$$

где $T_\sigma^{\sigma_C}$ — матрица преобразования от базиса σ к базису σ_C, причем

$$T_{\sigma_C}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c}\cos\varphi\cos\psi- \\ -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi\end{array} & \begin{array}{c}-\sin\varphi\cos\psi- \\ -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi\end{array} & \sin\theta\sin\psi \\ \begin{array}{c}\cos\varphi\sin\psi+ \\ +\sin\varphi\cos\theta\cos\psi\end{array} & \begin{array}{c}\cos\varphi\cos\theta\cos\psi- \\ -\sin\varphi\sin\psi\end{array} & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Здесь φ, ψ, θ — *углы Эйлера*, $H^{\sigma i}$ — радиус-вектор стопы i–ой конечности, C^{σ} — радиус-вектор точки C корпуса в абсолютной СК $(O,\,\sigma)$. Аналогично

$$H_E^{\sigma_{C_1} i} = T_{\sigma_C}^{\sigma_{C_1} i}\,(H_C^{\sigma_C i} - E_C^{\sigma_C i}), \tag{4.2}$$

где

$$T_{\sigma_C}^{\sigma_{C_1} i} = (T_{\sigma_{C_1}}^{\sigma_C i})^* = (T_{\sigma_{C_1}}^{\sigma_C i})^{-1},$$

$$T_{\sigma_{C_1}}^{\sigma_C i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1^i\,\cos\varphi_2^i & \cos\varphi_2^i\,\sin\varphi_1^i & -\sin\varphi_2^i \\ -\sin\varphi_1^i & \cos\varphi_1^i & 0 \\ \sin\varphi_2^i\,\cos\varphi_1^i & \sin\varphi_2^i\,\sin\varphi_1^i & \cos\varphi_2^i \end{pmatrix}.$$

Для определения углов вращения φ^i необходимо задать матрицу преобразования $T_{\sigma_{C_2}}^{\sigma_{C_1} i}$:

$$T_{\sigma_{C_2}}^{\sigma_{C_1} i} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_3^i & 0 & \cos\varphi_3^i \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi_3^i & 0 & -\sin\varphi_3^i \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Приравнивая (4.1) к (4.2), получим

$$H_C^{\sigma_C i} - E_C^{\sigma_C i} = T_{\sigma_{C_1}}^{\sigma_C i}\,H_E^{\sigma_{C_1} i}. \tag{4.3}$$

Обозначим

$$T_{\sigma_{C_1}}^{\sigma_C i}\,H_E^{\sigma_{C_1} i} = R_E^{\sigma_C i},$$

где $R_E^{\sigma_C i}$ является функцией переменных $\varphi_1^i,\,\varphi_2^i,\,\varphi_3^i$. В СК $(O,\,\sigma)$ соотношение (4.3) преобразуется к виду

$$H^{\sigma i} - E^{\sigma i} = T_{\sigma_C}^{\sigma}\,R_E^{\sigma_C i}. \tag{4.4}$$

Из столбцов $H^{\sigma i}$, $E^{\sigma i}$, $R_E^{\sigma_C i}$ составим матрицы и обозначим их через H, E, R соответственно. Вид $H_E^{\sigma_{C_1} i}$, $R_E^{\sigma_C i}$, а также значения φ^i, $\dot\varphi^i$, определяющие геометрию конечности, находятся при помощи простых преобразований:

$$H_E^{\sigma_{C_1} i} = (l_1 + l_2\,\sin\varphi_3^i,\ 0,\ l_2\,\cos\varphi_3^i)^*,$$

$$R_C^{\sigma_C i} = \begin{pmatrix} [\,l_1\,\cos\varphi_2^i + l_2\,\sin(\varphi_2^i + \varphi_3^i)\,]\,\cos\varphi_1^i \\ [\,l_1\,\cos\varphi_2^i + l_2\,\sin(\varphi_2^i + \varphi_3^i)\,]\,\sin\varphi_1^i \\ l_2\,\cos(\varphi_2^i + \varphi_3^i) - l_1\,\sin\varphi_2^i \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (4.4) имеем

$$R^{\sigma_C i} = T_{\sigma}^{\sigma_C}\,(H^{\sigma i} - E^{\sigma i}),$$

или

$$R^{\sigma_C i} = \begin{pmatrix} t_{11}\,(h_{1i} - e_{1i}) + t_{21}\,(h_{2i} - e_{2i}) + t_{31}\,(h_{3i} - e_{3i}) \\ t_{12}\,(h_{1i} - e_{1i}) + t_{22}\,(h_{2i} - e_{2i}) + t_{32}\,(h_{3i} - e_{3i}) \\ t_{13}\,(h_{1i} - e_{1i}) + t_{23}\,(h_{2i} - e_{3i}) + t_{33}\,(h_{3i} - e_{3i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ r_{3i} \end{pmatrix},$$

$$T_{\sigma}^{\sigma_C} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}, \qquad H^{\sigma i} = \begin{pmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x^{\sigma} \\ H_y^{\sigma} \\ H_z^{\sigma} \end{pmatrix}^i,$$

$$E^{\sigma i} = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ e_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^{\sigma} \\ E_y^{\sigma} \\ E_z^{\sigma} \end{pmatrix}^i.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ r_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\,l_1\,\cos\varphi_2 + l_2\,\sin(\varphi_2 + \varphi_3)\,]\,\cos\varphi_1 \\ [\,l_1\,\cos\varphi_2 + l_2\,\sin(\varphi_2 + \varphi_3)\,]\,\sin\varphi_1 \\ l_2\,\cos(\varphi_2 + \varphi_3) - l_1\,\sin\varphi_2 \end{pmatrix}^i,$$

откуда следует

$$\varphi_1^i = \operatorname{arctg}\frac{r_{2i}}{r_{1i}}, \qquad \varphi_3^i = \arcsin\left[\,\frac{r_{2i}^2 + r_{3i}^2 - (l_1^2 + l_2^2)\,\sin^2\varphi_1^i}{2l_1 l_2\,\sin^2\varphi_1^i}\,\right],$$

$$\varphi_2^i = \arcsin\left\{\frac{1}{l_1^2 + 2l_1 l_2\,\sin\varphi_3^i + l_2^2}\,\Big[-r_{3i}\,(l_1 + l_2\,\sin\varphi_3^i)\,+\right.$$
$$\left. +\,l_2\,\cos\varphi_3^i\,(l_1^2 + 2l_1 l_2\,\sin\varphi_3^i - l_2^2 - r_{3i}^2)^{1/2}\,\Big]\right\}.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot\varphi_1^i = \cos^2\varphi_1^i\,(\dot r_{2i} r_{1i} - r_{2i}\dot r_{1i})/r_{1i}^2;$$

$$
\begin{gathered}
\dot\varphi_3^i = \frac{1}{2l_1l_2\,\cos\varphi_3^i\,\sin^4\varphi_1^i}\times\\
\times\left\{2\left[r_{2i}\dot r_{2i}+r_{3i}\dot r_{3i}-\frac{l_1^2+l_2^2}{2}\,\sin 2\varphi_1^i\dot\varphi_1^i\right]\sin^2\varphi_1^i-\right.\\
\left.-2\sin 2\varphi_1^i\dot\varphi_1^i\,\left[r_{2i}^2+r_{3i}^2-(l_1^2+l_2^2)\,\sin^2\varphi_1^i\right]\right\},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot\varphi_2^i = \frac{1}{\cos\varphi_2^i\,(l_1^2+2l_1l_2\,\sin\varphi_3^i+l_2^2)^2}\,\{\,[-\dot r_{3i}\,(l_1+l_2\,\sin\varphi_3^i)-\\
-\,r_{3i}l_2\,\cos\varphi_3^i\dot\varphi_3^i-l_2\,\sin\varphi_3^i\dot\varphi_3^i\,(l_1^2+2l_1l_2\,\sin\varphi_3^i+l_2^2-r_{3i}^2)^{1/2}+\\
+\,l_2\,\cos\varphi_3^i\,(l_1^2+2l_1l_2\,\sin\varphi_3^i+l_2^2-r_{3i}^2)^{-1/2}\times\\
\times\,(2l_1l_2\,\cos\varphi_3^i\dot\varphi_3^i-2r_{3i}\dot r_{3i})/2\,](l_1^2+2l_1l_2\,\sin\varphi_3^i+l_2^2)-\\
-\,2l_1l_2\,\cos\varphi_3^i\dot\varphi_3^i\,[\,-r_{3i}\,l_1+l_2\,\sin\varphi_3^i)+\\
+\,l_2\,\cos\varphi_3^i\,(l_1^2+2l_1l_2\,\sin\varphi_3^i+l_2^2r_{3i}^2)^{1/2}\,]\,\},
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{pmatrix}\dot r_{1i}\\ \dot r_{2i}\\ \dot r_{3i}\end{pmatrix} = \dot T_\sigma^{\sigma_C}\,(H^{\sigma i}-E^{\sigma i})+T_\sigma^{\sigma_C}\,(\dot H^{\sigma i}-\dot E^{\sigma i}).
$$

Докажем утверждение о кинематической однозначности ЛС.

Теорема 1.1. *С учетом выбора походки, при которой не менее трех конечностей находятся в фазе опоры, между переменными q корпуса и переменными опорных конечностей $\varphi^i = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{i*}$, где $-\pi/2 < \varphi_j^i < \pi/2$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2,3$, существует взаимнооднозначное соответствие.*

Доказательство. Из соотношения (4.4) выделим матрицу E :

$$
E = H - T_{\sigma_C}^{\sigma}\,R. \tag{4.5}
$$

Пусть элементы матрицы опорных стоп H заданы как функции времени. Для доказательства теоремы надо показать, что задание шести компонент вектора q (положение точки C в СК $(O,\,\sigma)$ и углов Эйлера, связывающих СК $(O,\,\sigma)$ и $(C,\,\sigma_C)$), ведет к заданию матрицы опорных бедер E. Тогда соотношение (4.5) однозначно определяет R как функцию вектора q :

$$
R = T_\sigma^{\sigma_C}\,(H-E).
$$

Обозначим через e_{ij}, $i,j = 1,2,3$, элементы матрицы E, а через t_{ij}, $i,j = 1,2,3$, — элементы матрицы $T_{\sigma_C}^{\sigma}$. Элементы t_{ij} суть направляющие косинусы двух СК $(C,\,\sigma_C)$ и $(O,\,\sigma)$, которые линейно зависят от элементов e_{ij}, т.е.

$$
\Phi x = y, \qquad \det\,\Phi \neq 0, \tag{4.6}
$$

где Φ — матрица числовых коэффициентов, x — вектор, составленный из элементов e_{ij}, y — вектор, составленный из элементов t_{ij} :

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= \frac{e_{11}-e_{13}}{\alpha_1}, & t_{21} &= \frac{2e_{12}-(e_{11}+e_{13})}{2\alpha_2},\\
t_{12} &= \frac{e_{21}-e_{23}}{\alpha_1}, & t_{22} &= \frac{2e_{22}-(e_{21}+e_{23})}{2\alpha_2},\\
t_{13} &= \frac{e_{31}-e_{33}}{\alpha_1}, & t_{23} &= \frac{2e_{32}-(e_{31}+e_{33})}{2\alpha_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{31} &= \frac{2C_x^\sigma}{\alpha_3}-\frac{e_{11}+e_{13}+2e_{12}}{2\alpha_3},\\
t_{32} &= \frac{2C_y^\sigma}{\alpha_3}-\frac{e_{21}+e_{23}+2e_{22}}{2\alpha_3},\\
t_{33} &= \frac{2C_z^\sigma}{\alpha_3}-\frac{e_{31}+e_{33}+2e_{32}}{2\alpha_3},
\end{aligned}
$$

где α_1, α_2, α_3 — конструктивные параметры корпуса ЛС, соответствующие длине, ширине и высоте корпуса.

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, можно определить элементы e_{ij}. Матрица Φ и вектор y в выражении (4.6) имеют вид

$$
\Phi = \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
-\frac12 & 1 & -\frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac12 & 1 & -\frac12 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac12 & 1 & -\frac12\\
\frac12 & 1 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac12 & 1 & \frac12 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 1 & \frac12
\end{pmatrix},\quad
y = \begin{pmatrix}
\alpha_1 t_{11}\\ \alpha_1 t_{12}\\ \alpha_1 t_{13}\\ \alpha_2 t_{21}\\ \alpha_2 t_{22}\\ \alpha_2 t_{23}\\ 2C_x^\sigma-\alpha_3 t_{31}\\ 2C_y^\sigma-\alpha_3 t_{32}\\ 2C_z^\sigma-\alpha_3 t_{33}
\end{pmatrix},
$$

откуда следует, что матрица Φ составлена из линейно независимых строк и столбцов. Соотношение (4.6) однозначно определяет элементы e_{ij} матрицы E как явные функции элементов t_{ij} матрицы $T^{\sigma}_{\sigma_C}$, которые, в свою очередь, зависят от компонент вектора q (углов Эйлера). Задание вектора r при известной кинематике ЛС полностью определяет задание вектора q, а тем самым и вектора x. Следовательно, указанные соотношения однозначно определяют матрицу R. Доказательство обратного утверждения проводится аналогично.

Замечание. Походка, при которой существует возможность, когда менее чем три конечности будут находиться в фазе опоры, вызовет недостаточность задания закона изменения угловых переменных конечностей для определения вектора q (при доказательстве теоремы в обратную сторону) из-за возможного вращения корпуса вокруг оси, проходящей через эти опорные бедра (случай двух или одной опорной конечности).

4.2 Динамическая модель шагающего робототехнического устройства

А теперь остановимся на динамических особенностях корпуса и конечностей локомоционного аппарата, а также определим закон формирования результирующих сил и моментов, действующих на корпус ЛС, при котором будет обеспечиваться сходимость с ростом t действительного значения вектора положения $q(t)$ к программному заданному движению $q_p()\ :\ \ q(t) \to q_p(t)$ при $t \to \infty$, либо $\overline{\lim}_{t\to t_1} \|\, q(t) - q_p(t)\,\| < \delta$ вне зависимости от начальных значений $q(t_0)$. Здесь t_1 — время окончания переходного процесса, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $\delta > 0$ — заданная точность отслеживания программного (номинального) движения.

Под действием силы F и момента M, приложенных в точке C корпуса как твердого тела, движение корпуса описывается динамическим уравнением

$$A(q)\,\ddot q + B(q,\,\dot q) = U, \qquad U = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $A(q) \in R^6 \times R^6$ — положительно определенная функциональная матрица, определяющая квадратичную форму скоростей в выражении для кинетической энергии корпуса; $B(q,\,\dot q)$, U — вектор-функции размерности 6×1, причем $\dot q$ входит в $B(q,\,\dot q)$ как элемент квадратичной зависимости. Матрица $A(q)$ и вектор $B(q,\,\dot q)$ в уравнении движения корпуса (4.7) определяются выбором точки C на корпусе и распределением масс.

Зададимся числами $\alpha, \beta > 0$ и будем формировать вектор U по принципу обратной связи:

$$U = U(q, \dot q, t) = B(q, \dot q) - A(q)\,[\,\dots], \tag{4.8}$$

где обозначено $[\,\dots] = [\,-\ddot q_p + \alpha\,(\dot q - \dot q_p) + \beta\,(q - q_p)\,]$.

Рассогласование между $q(t)$ и $q_p(t)$ может быть обусловлено неравенствами $q(t_0) \ne q_p(t_0)$, $\dot q(t_0) \ne \dot q_p(t_0)$ в начальный момент времени. Все инерционные и кинематические характеристики ЛС предполагаются известными. В силу предыдущего соотношения (4.8) уравнение движения корпуса примет вид

$$\ddot{\tilde q} + \alpha\dot{\tilde q} + \beta\tilde q = 0, \qquad \tilde q(t) = q(t) - q_p(t),$$

где $\tilde q$ — вектор-функция рассогласования. Отсюда, очевидно, получим: $q(t) \to q_p(t)$ $(t \to \infty)$. Отметим, что везде в дальнейшем главный вектор сил и моментов U будет задаваться именно в представленном выше виде.

Займемся выводом уравнений движения конечностей и найдем зависимость главного вектора сил F и моментов M, приложенных в точке C корпуса аппарата, от управляющих моментов в сочленениях конечностей. Уравнения кинетостатического равновесия будут записаны в проекциях на оси СК верхнего (нижнего) звена $(E,\,\sigma_{C_1})$ и $(S,\,\sigma_{C_2})$ соответственно. С помощью матричных преобразований эти уравнения могут быть записаны в СК $(C,\,\sigma_C)$ и $(O,\,\sigma)$. Далее будет показана линейная зависимость сил и моментов от управлений u^i и ускорений углов вращения $\ddot\varphi^i$, а также доказано утверждение о полноте задания движения всей локомоционной системы и вектора управлений.

Будем употреблять индекс 1(2) для обозначения векторов сил и моментов, приложенных к верхнему (нижнему) звену конечности. Пусть для i–ой конечности: u^i — вектор управляющих моментов

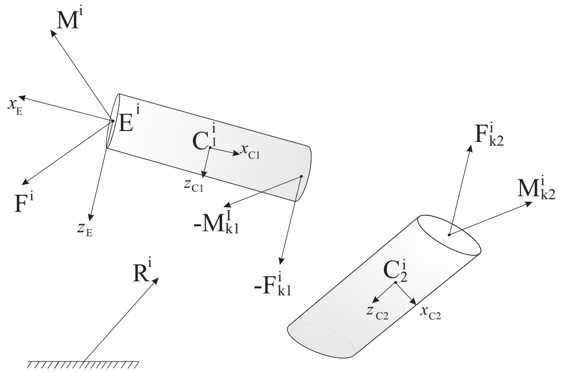

Рис. 4.3. Действие сил и моментов на конечность

вращения в шарнирных приводах, $P^i_{1(2)}$ — вектор силы тяжести верхнего (нижнего) звена, R^i — вектор силы реакции опоры, F^i — вектор силы реакции в шарнире бедра, M^i — вектор момента этой силы, $F^i_{k1(2)}$ — вектор силы реакции в шарнире колена ($F^i_{k1} = -F^i_{k2}$), $M^i_{k1(2)}$ — вектор момента этой силы ($M^i_{k1} = -M^i_{k2}$), $\hat{F}$ — вектор силы инерции тела массы m, $\hat{M}$ — вектор момента этой силы, $\hat{F}^i_{1(2)}$ — вектор силы инерции верхнего (нижнего) звена, $\hat{M}^i_{1(2)}$ — вектор момента этой силы.

Все указанные векторы имеют размерность 3×1. Векторы $\hat{F}^i_{1(2)}$, $\hat{M}^i_{1(2)}$ приведены к центрам инерции верхнего (нижнего) звеньев. Схематично действие указанных сил и моментов на конечность показано на Рис. 4.3

В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда $R^i_z \geq 0$. С учетом числа степеней подвижности шарниров в сочленениях в СК $(E,\, \sigma_{C_1})$ имеем

$$\begin{aligned} M^{\sigma_{C_1} i}_{k1(2)\,E} &= (M^{\sigma_{C_1} i}_{k1(2)\,Ex},\ 0,\ M^{\sigma_{C_1} i}_{k1(2)\,Ez})^* = (\tilde{u}_2,\ 0,\ \tilde{u}_3)^{i*}, \\ M^{\sigma_{C_1} i}_{E} &= (M^{\sigma_{C_1} i}_{Ex},\ 0,\ 0)^* = (\tilde{u}_1,\ 0,\ 0)^*. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Сила инерции $\hat{F}$ и момент силы инерции $\hat{M}$ для тела массы m

находятся из уравнений:

$$\hat{F} = -\,mw, \qquad \hat{M} = -\,J\dot{\omega} + \omega \times J\omega,$$

где w — ускорение центра тяжести тела, J — тензор инерции, ω — угловая скорость вращения тела.

Согласно *принципу Даламбера* о равенстве нулю суммы активных сил, сил реакций и силы инерции, а также равенстве нулю суммы моментов этих сил, обозначим их M^i_1 и M^i_2 соответственно, имеем для верхнего звена

$$F^i + F^i_{k1} + P^i_1 + \hat{F}^i_1 = 0, \qquad M^i_1 = 0 \tag{4.10}$$

и для нижнего звена

$$F^i_{k2} + P_2 + R^i + \hat{F}^i_2 = 0, \qquad M^i_2 = 0. \tag{4.11}$$

Вывод уравнений (4.10) и (4.11) в проекциях на оси подвижных СК верхнего и нижнего звеньев дан в следующем § 1.3. Там же приводятся значения ускорений и угловых скоростей для определения силы инерции и момента силы инерции, которые вычисляются по написанным выше формулам и в общем случае являются вектор-функциями следующих переменных:

$$\hat{F}^i_{1(2)} = \hat{F}^i_{1(2)}\,(m^i_{1(2)}, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varphi^i, \dot{\varphi}^i, \ddot{\varphi}^i),$$

$$\hat{M}^i_{1(2)} = \hat{M}^i_{1(2)}\,(m^i_{1(2)}, J^i_{1(2)}, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varphi^i, \dot{\varphi}^i, \ddot{\varphi}^i),$$

где $m^i_{1(2)}$ — масса верхнего (нижнего) звена i–ой конечности, $J^i_{1(2)}$ — соответствующий тензор инерции (диагональный) верхнего (нижнего) звена. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^{n} F^i, \qquad M = \sum_{i=1}^{n} M^i + \sum_{i=1}^{n} F^i \times d^i, \tag{4.12}$$

где d^i — радиус-вектор бедра i–ой конечности:

$$M^i = \begin{pmatrix} u_2\,\sin\varphi_1 - \tilde{u}_1\,\cos\varphi_1 \\ -\,u_2\,\cos\varphi_1 - \tilde{u}_1\,\sin\varphi_1 \\ -\,u_1 \end{pmatrix}^i, \tag{4.13}$$

где M^i — вектор-функция момента, создаваемого в шарнире бедра управляющими моментами u_1 и u_2 и ортогональным им моментом силы реакции в шарнире бедра $\tilde{u}_1$. Здесь $\varphi^i = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{i*}$ — вектор обобщенных координат i–ой конечности (углы подвижности). Выражения для F^i, M^i, R^i в функции управления и обобщенных координат даны в § 1.3. В общем случае они имеют вид

$$\begin{aligned} F^i &= \Omega_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Omega_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Omega_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \\ M_*^i &= \Xi_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Xi_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Xi_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \\ R^i &= Q_1(\varphi^i, q)\, u^i + Q_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + Q_3(\varphi^i, \ddot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}). \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $M_*^i = M^i + F^i \times d^i$. Размерность матриц $\Omega_1, \Omega_2, \Xi_1, \Xi_2, Q_1, Q_2$ — 3×3, а векторов Ω_3, Ξ_3, Q_3 — 3×1. В § 1.3 можно найти вид матриц Ω_1, Ξ_1, q_1. В соотношении (4.13) компонента $\tilde{u}_1^i$ имеет вид

$$\tilde{u}_1^i = a_1(\varphi^i, q)\, u_1^i + a_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + a_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}).$$

Здесь

$$a_1(\varphi^i, q) = \left(- \frac{t(q)\, l_1\, \sin\varphi_2}{l_1\, \cos\varphi_2 - l_2\, \cos(\varphi_2 + \varphi_3)} \right)^i,$$

где l_1, l_2 — длины звеньев конечности, $t(q)$ — соответствующий элемент матрицы преобразования $T^{\sigma}_{\sigma_C}$ от подвижной СК корпуса к неподвижной. Отметим также, что матрицы Ω_2, Ξ_2, Q_2 невырождены, так как они определяют кинетическую энергию системы. Углы $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{i*} \in \Phi$, где Φ — множество кинематических значений углов, при которых матрицы Ω_1, Ξ_1, Q_1 невырождены.

Для выяснения картины поведения движения конечности важно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.2. *Пусть уравнения движения конечности, состоящей из двух звеньев с общим числом степеней свободы, равным трем, описываются соотношениями* (4.10), (4.11), (4.14). *Тогда любая тройка линейно независимых уравнений задает движение всей системы, а любая другая тройка линейно независимых уравнений задает вектор управлений.*

Доказательство. Доказательство теоремы очевидно из чисто механических рассуждений. Пусть $\varphi^i = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{i*}$ — вектор обобщенных координат конечности, по которым осуществляется

управление $u^i = (u_1, u_2, u_3)^{i*}$. Запишем уравнения кинетостатического равновесия, используя принцип Даламбера для каждого звена конечности в отдельности в опорных координатах (положение центра масс и углы, определяющие положение подвижной СК). Получим в итоге двенадцать уравнений движения. Учитывая связи, эти уравнения запишем в функции φ и u. Отметим, что число неизвестных с учетом числа степеней свободы (4.3) также будет равно 12, ведь размерность векторов F^i, F_k^i, R^i, $\tilde{u}^i$ — 3×1.

Подставляя выражение опорных координат через обобщенные координаты, получим систему, аналогичную системе (4.14):

$$\begin{aligned} F^i &= \Omega_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Omega_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Omega_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \\ F_k^i &= S_1(\varphi^i, q)\, u^i + S_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + S_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \\ \tilde{u}^i &= K_1(\varphi^i, q)\, u^i + K_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + K_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \\ R^i &= Q_1(\varphi^i, q)\, u^i + Q_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + Q_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, \ddot{q}), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где каждый из четырех выписанных векторов представляет собой совокупность линейно независимых уравнений, $\tilde{u}^i = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^{i*}$. Поскольку $s = m - k$ $(3 = 12 - 9)$, где s — число степеней свободы, m — число уравнений в системе (4.15), k — количество связей, то в системе (4.15) лишь три линейно независимых уравнения. Остается задать какой-либо из векторов F^i, F_k^i, $\tilde{u}^i$, R^i для определения движения конечности φ^i в функции данного вектора и управления u^i. Далее, так как векторы u^i и φ^i независимы, для нахождения u^i следует взять другую тройку линейно независимых уравнений. Эти шесть уравнений в совокупности дадут (при заданных F^i, F_k^i, $\tilde{u}^i$, R^i) полное описание движения системы. Теорема доказана.

Замечания. 1. Из теоремы следует, что управлять ЛС можно самыми различными способами, осуществляя полную или частичную стабилизацию аппарата, когда задается определенный закон изменения реакции опоры с использованием механической избыточности системы.

2. Несколько слов скажем о задаче определения сил F^i и моментов M_*^i по заданным F и M (задача разложения), действующих на корпус ЛС и приложенных в точке C. Действие i–ой конечности на корпус ЛС определяется вектором $U^i = (F, M_*)^{i*}$. Будем, не

умаляя общности, считать, что $i = \overline{1,6}$ (широко распространенный вариант ЛС с шестью конечностями). В общем случае необходимо по шести известным значениям компонент F и M найти тридцать шесть компонент векторов F^i и M_*^i. Эту задачу, имеющую множество решений, можно решать в смысле физической оптимальности, что равносильно отсутствию: 1) усилий на сжатие (растяжение) корпуса в бедрах аппарата; 2) сгибающих (разгибающих) моментов в бедрах ЛС. Нетрудно видеть, что решение исходной задачи с учетом этих условий ищется в классе значений для F^i и M_*^i с одинаковым знаком в компонентах при разложении на оси СК в терминах псевдообратных матриц.

4.3 Задачи распределения реакций и идентификации

Ниже предлагаются вниманию результаты исследований, посвященных задаче моделирования и управления движением многоногих шагающих роботов [64]. Близко к тексту первоисточника и в реферативной форме анализируются: 1) задача распределения реакций опоры при движении шагающего аппарата; 2) задача идентификации его динамических характеристик. Эти задачи выбраны как одни из основных в общей проблеме моделирования движения автоматического многоногого локомоционного устройства.

4.3.1 Задача распределения реакций

Предполагается, что каждая нога аппарата опирается о поверхность в одной точке. Задача о рациональном распределении или выборе реакций опоры возникает ввиду наличия статической неопределенности: при заданной кинематике движения реакции в точках опоры определены зачастую неоднозначно. Они образуют некоторое множество; отсюда возникает возможность учета требований, выполнение которых желательно в процессе передвижения.

Для обеспечения движения шагающего механизма надо потребовать, чтобы реакции N_i в опорных точках удовлетворяли системе

уравнений кинетостатики

$$\sum_i N_i = N, \qquad \sum_i r_i \times N_i = M, \tag{4.16}$$

где r_i — радиус-вектор, проведенный из центра масс аппарата в i–ю точку опоры, N — сумма внешних известных сил, действующих на аппарат и взятых с обратным знаком (производная по времени от количества движения аппарата), M — сумма моментов внешних сил, взятых с обратным знаком (производная по времени от кинетического момента аппарата относительно его центра масс). Если движение корпуса и конечностей задано, то величины N и M полностью определены.

Условия попаданий реакций в *конус трения* задаются неравенствами

$$(\nu_i,\, N_i) \geq 0, \qquad \left| N_i - \nu_i\,(\nu_i,\, N_i) \right| \leq k_i\,(\nu_i,\, N_i), \tag{4.17}$$

где через (a, b) обозначено скалярное произведение векторов a и b; ν_i — единичный вектор внешней нормали к поверхности в i–ой точке опоры, k_i — коэффициенты трения. Неравенства (4.17) описывают особенности контакта ноги с поверхностью. Величины N, M, r_i, ν_i, k_i считаются известными, а соотношения (4.16), (4.17) рассматриваются в качестве системы уравнений и неравенств относительно N_i. Задача нахождения векторов N_i, удовлетворяющих соотношениям (4.16), (4.17), называется *задачей распределения реакций* (ЗРР).

При найденном решении этой задачи и заданном движении конечностей однозначно определено движение корпуса. Допуская, что число опорных точек больше двух и существует решение ЗРР, когда N_i находятся строго внутри своих конусов трения, получим сколь угодно большое множество решений ЗРР (это следует в силу избыточности числа неизвестных).

Решение ЗРР можно аппроксимировать решением *задачи линейного программирования* (ЗЛП). В самом деле, представляя конусы трения многогранными углами с ребрами в виде единичных векторов:

$$\nu_{ij} = \frac{\nu_i + k_i \mu_j}{\sqrt{1 + k_i^2}}, \tag{4.18}$$

где μ_j — единичные векторы, $j = \overline{1, l_i}$, $\mu_j \perp \nu_i$, годограф векторов μ_j образует правильный l_i–угольник, можно реакцию опоры в i–ой точке записать с помощью формулы

$$N_i = \sum_{j=1}^{l_i} \nu_{ij}\, N_{ij} \tag{4.19}$$

с числовыми коэффициентами $N_{ij} \geq 0$, так как N_i находится внутри или на границе конуса трения; в противном случае $N_{ij} < 0$.

После подстановки N_i (4.19) в уравнения (4.16) кинетостатики получим

$$\sum_i \sum_{j=1}^{l_i} \nu_{ij}\, N_{ij} = N, \qquad \sum_i \sum_{j=1}^{l_i} (r_i \times \nu_{ij})\, N_{ij} = M. \tag{4.20}$$

При существовании величин $N_{ij} \geq 0$, удовлетворяющих системе линейных (по N_{ij}) уравнений (4.20), будем иметь возможность решения ЗРР. Но именно в нахождении таких неизвестных (при наличии некоторого линейного оптимизационного критерия) и заключается ЗЛП.

По симплексному методу решения ЗЛП надо на начальном этапе итерационной процедуры выделить базисные переменные, т.е. разрешить систему уравнений относительно некоторых (базисных) величин N_{ij}, отправив остальные неизвестные (свободные) в правую часть уравнений.

При фиксированном i существуют три линейно независимых вектора $\nu_{i1}, \nu_{i2}, \nu_{i3}$, а остальные линейно зависят от них. Поэтому будем считать, что коэффициенты $N_{i1}, N_{i2}, N_{i3} \neq 0$, а остальные положим равными нулю.

Итак, для двух точек опоры имеем шесть базисных переменных N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}. Легко показать [64], что в этом случае определитель, составленный из коэффициентов для компонент N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}, равен нулю (аппарат не может создать момент M, параллельный прямой, соединяющей эти точки). В случае же трех точек опоры, не лежащих на одной прямой, возможно построение не равного нулю определителя шестого порядка из коэффициентов левых частей системы (4.20).

ЗРР подходящим преобразованием координат можно свести к задаче, когда заданные суммарные реакция N и момент M параллельны друг другу. К примеру, этого можно достичь с помощью замены

$$r_i' = r_i - R, \qquad R = \frac{N \times M}{N^2}, \tag{4.21}$$

так как из-за наличия сил тяжести $N \neq 0$.

Пусть все точки опоры находятся в плоскости, перпендикулярной вектору N. Реакции N_i представим в виде суммы

$$N_i = P_i + F_i, \tag{4.22}$$

где $P_i \parallel N$, $F_i \perp N$. Так же можно представить и векторы r_i' : $r_i' = r + \rho_i'$, где $r \parallel N$, $\rho_i' \perp N$. В случае опорной плоскости при $N \parallel M$ уравнения кинетостатики (4.16) распадаются на две независимые группы (по P_i и F_i) :

$$\sum_i P_i = N, \qquad \sum_i (P_i, \rho_i') = 0,$$
$$\sum_i F_i = 0, \qquad \sum_i \rho_i' \times F_i = M. \tag{4.23}$$

Тогда с учетом представления конуса трения, когда выполняются соотношения (4.18) и (4.19), будем иметь формулы

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{1+k_i^2}} \sum_{j=1}^{l_i} N_{ij}, \qquad F_i = \frac{k_i}{\sqrt{1+k_i^2}} \sum_{j=1}^{l_i} \mu_j\, N_{ij}.$$

Поясним суть уравнений (4.23). Составляющие реакций F_i, перпендикулярные опорной плоскости в сумме дают заданную реакцию N и нулевой момент относительно точки с радиусом-вектором R, где R удовлетворяет равенствам (4.21). Составляющие реакций F_i, лежащие в опорной плоскости, образуют замкнутый многоугольник и создают заданный момент M относительно оси, параллельной N и проходящей через точку с радиусом-вектором R.

Обозначим: ρ_i — радиусы-векторы из проекции центра масс аппарата на опорную плоскость в точки опоры. Тогда ρ_i' (4.21) имеют вид: $\rho_i' = \rho_i - R$, так как $R \perp N$.

В случае $M = 0$ задача о нахождении P_i, удовлетворяющих равенству (4.22), имеет распределение $P_i \geq 0$, $F_i = 0$, оптимальное в смысле критерия

$$\min \max_i \frac{\left| N_i - \nu\,(\nu,\, N_i) \right|}{(\nu,\, N_i)},$$

описывающего глубину вхождения реакций в конус трения, ν — единичная нормаль к опорной плоскости.

Задачу нахождения величин $P_i \geq 0$, удовлетворяющих системе уравнений (см. уравнения (4.23)):

$$\sum_i P_i = N, \qquad \sum_i (P_i,\, \rho_i) = 0,$$

называют *задачей распределения нормальных реакций*, а задачу поиска F_i, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_i F_i = 0, \qquad \sum_i \rho_i \times F_i = M,$$

где F_i, ρ_i — векторы параллельные опорной плоскости, называют *задачей распределения касательных реакций*.

4.3.2 Задача идентификации

В процессе передвижения локомоционного аппарата важно по результатам измерений его положения в пространстве и сил реакций опоры уметь идентифицировать массу, положение центра масс, тензор инерции корпуса, а также суммарные векторы сил и моментов сил, действующих на аппарат. Решение задачи идентификации позволяет осуществлять энергетически оптимальный и целенаправленный синтез системы управления шагающим аппаратом.

Полагая, что аппарат состоит из корпуса и n ног, свяжем жестко с корпусом систему координат $Oxyz$. Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ — неподвижная абсолютная система координат, а $O\xi\eta\zeta$ — подвижная система с осями, параллельными осям системы $O_1\xi\eta\zeta$.

Считается, что i–я опорная нога контактирует с поверхностью в точке, создавая силу реакции N_i. Предполагается, что движение ног в текущий момент времени за счет измерений известно, т.е. если i–я нога находится в опорном состоянии, то ее радиус-вектор точки опоры r_i^f в системе $Oxyz$ и скорость этой точки относительно корпуса v_i^f можно считать заданными величинами.

По теореме о сложении скоростей и условия равенства нулю абсолютной скорости точки опоры имеем

$$v_0 + \omega \times r_i^f + v_i^f = 0, \tag{4.24}$$

где v_0 — абсолютная скорость точки O, ω — угловая скорость движения корпуса относительно системы $O\xi\eta\zeta$.

Пусть имеется k опорных ног и соответственно k уравнений (4.24). Можно показать [64], что эти k уравнений однозначно разрешаются относительно векторов v_0 и ω только в том случае, если $k \geq 3$ и точки опоры не лежат на одной прямой.

Система (4.24) из $3k$ скалярных уравнений содержит шесть неизвестных: v_0 и ω. Это значит, что даже при минимальном $k = 3$, когда однозначно определяются v_0, ω, система (4.24) будет переопределенной.

Для регуляризации вычисления v_0, ω воспользуемся методом наименьших квадратов. С этой целью составим функцию

$$\Phi = \sum_{l=1}^{k} \left(v_0 + \omega \times r_{i_l}^f + v_{i_l}^f \right)^2,$$

где l — номер опорной ноги. Векторы v_0, ω доставляют абсолютный минимум Φ, а именно должны выполняться условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0, \quad \text{или} \quad k v_0 + \omega \times \sum_{l=1}^{k} r_{i_l}^f + \sum_{l=1}^{k} v_{i_l}^f = 0, \tag{4.25}$$

$$v_0 \times \sum_{l=1}^{k} r_{i_l}^f + \sum_{l=1}^{k} \left(\omega \times r_{i_l}^f \right) \times r_{i_l}^f + \sum_{l=1}^{k} v_{i_l}^f \times r_{i_l}^f = 0.$$

Первое уравнение (4.25) выражает равенство нулю абсолютной скорости центра масс системы точек с радиусами-векторами $r_{i_l}^f$ и единичными массами:

$$v_0 + \omega \times R = -V, \tag{4.26}$$

где R и V — относительные положение и скорость центра масс этой системы точек:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} r_{i_l}^f, \qquad V = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} v_{i_l}^f.$$

Второе уравнение (4.25):

$$\sum_{l=1}^{k}\left(v_0 + \omega\times r_{i_l}^f + v_{i_l}^f\right)\times r_{i_l}^f = 0$$

выражает равенство нулю абсолютного кинетического момента.

Отметим, что во втором уравнении (4.25) второе слагаемое представляет с точностью до знака кинетический момент от вращения опорного многоугольника вокруг точки O с угловой скоростью ω. Обозначим через J^f тензор инерции опорных точек в осях $Oxyz$ (опорного многоугольника). Тогда второе уравнение (4.25) запишется так:

$$k\,(R\times v_0) + J^f\,\omega = \sum_{l=1}^{k} v_{i_l}^f\times r_{i_l}^f, \tag{4.27}$$

где справа стоит относительный кинетический момент системы, взятый с обратным знаком.

Таким образом, система уравнений (4.26), (4.27) позволяет определить скорость v_0 и угловую скорость ω движения корпуса по измерениям относительных положений $r_{i_l}^f$ и скоростей $v_{i_l}^f$ опорных точек ног.

Далее зададим ориентацию корпуса в абсолютной системе координат с помощью ортогональной матрицы перехода A от системы $Oxyz$ к системе $O\xi\eta\zeta$. Для однозначного определения A надо иметь не меньше трех неколлинеарных точек опоры.

Введем обозначения: i_1, i_2, i_3 — номера опорных конечностей с относительными неколлинеарными радиусами-векторами $r_{i_1}^f, r_{i_2}^f, r_{i_3}^f$. Вычислим линейно независимые векторы ρ_{12} и ρ_{13} : $\rho_{12} = r_{i_2}^f - r_{i_1}^f$, $\rho_{13} = r_{i_3}^f - r_{i_1}^f$, а затем построим ортонормированную систему векторов e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = \frac{\rho_{12}}{|\,\rho_{12}\,|}, \qquad e_2 = \frac{\rho_{12}\times\rho_{13}}{|\,\rho_{12}\times\rho_{13}\,|}, \qquad e_3 = e_1\times e_2,$$

в системе координат, связанной с корпусом. Имеем: A_1 — ортогональная матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе с ортами e_1, e_2, e_3; A_2 — матрица перехода от системы $O\xi\eta\zeta$ к системе с ортами e_1, e_2, e_3; матрица A перехода от $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$ равна: $A = A_1 A_2^*$, где $*$ сверху означает транспонирование.

Отсюда можно найти положение точки O : в осях $O\xi\eta\zeta$ радиус-вектор центра масс системы опорных точек равен $\rho_R' = AR$, а в осях $O_1\xi\eta\zeta$ радиус-вектор центра масс равен ρ_R. Значит, положение точки O в абсолютном пространстве имеет радиус-вектор $\rho_0 = \rho_R - AR$. Итак, зная для любого момента времени относительные и абсолютные координаты точек опоры и их относительные скорости, можно однозначно определить в этот момент времени положение и ориентацию корпуса, а также поступательную и угловую скорости.

Рассмотрим теперь задачу об идентификации динамических параметров корпуса аппарата. Для этого будем исходить из теорем об изменении количества движения аппарата и его кинетического момента относительно точки O.

Из теоремы об изменении количества движения имеем

$$m\,\frac{dv_c}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{dv_i}{dt} = F + \sum_{l=1}^{k} N_{i_l}, \tag{4.28}$$

где v_c — абсолютная скорость центра масс корпуса, v_i — абсолютная скорость центра масс i–ой ноги, F — вектор суммы внешних сил, N_{i_l} — реакция в точке опоры ноги с номером i_l, m — масса корпуса, m_i — масса i–ой ноги.

Обозначим: ρ — радиус-вектор центра масс корпуса, постоянный в системе $Oxyz$, ρ_i — радиус-вектор и v_i^0 — относительная скорость центра масс i–ой ноги, определяемые по измеренному относительному движению i–ой ноги. Имеем

$$v_c = v_0 + \omega\times\rho, \qquad v_i = v_0 + \omega\times\rho_i + v_i^0. \tag{4.29}$$

Пусть d_*/dt — оператор дифференцирования по времени координат векторов, заданных в системе $Oxyz$. Тогда уравнение (4.28) в силу первого равенства (4.29) примет вид

$$m\left[\left(\frac{d_*v_0}{dt}+\omega\times v_0\right)+\frac{d_*\omega}{dt}\times\rho+\omega\times(\omega\times\rho)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{d_*v_i}{dt}+\omega\times v_i\right)=F+\sum_{l=1}^{k}N_{i_l}. \qquad (4.30)$$

Считается, что реакции N_{i_l} — это измеряемые векторные величины.

Из теоремы об изменении кинетического момента относительно центра масс аппарата имеем

$$\frac{d}{dt}\left(K+\sum_{i=1}^{n}K_i\right)=M_F+M_N, \qquad (4.31)$$

где K — кинетический момент корпуса, K_i — кинетический момент i–ой ноги, M_F — суммарный момент внешних сил, M_N — суммарный момент реакций в точках опоры.

Запишем выражения для кинетических моментов

$$K=J\omega+(\rho-\rho_a)\times mv_c, \qquad K_i=J_i\omega+(\rho_i-\rho_a)\times m_iv_i+K_i^0,$$

где ρ_a — радиус-вектор центра масс всего аппарата с началом в точке O, J — тензор инерции корпуса в его центре масс, J_i — тензор инерции ноги в ее центре масс, K_i^0 — кинетический момент движения ноги в системе $Oxyz$ относительно центра масс ноги. Для вектора ρ_a можем записать

$$\rho_a=\frac{m\rho+\sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i}{m+\sum_{i=1}^{n}m_i}. \qquad (4.32)$$

Здесь предполагается, что движение ног относительно корпуса известно, поэтому тензоры J_i и векторы ρ_i, K_i^0 в осях $Oxyz$ могут быть найдены как функции времени.

Запишем формулу для кинетического момента аппарата с учетом соотношений (4.29) и (4.32):

$$K+\sum_{i=1}^{n}K_i=J\omega+m_*wm\rho\times(\omega\times\rho)-wm\rho_*(\omega\times\rho)-$$

$$-w(m\rho+\rho_*)\times(\omega\times\rho_*+v_*)+K_*,$$

где введены обозначения

$$K_*=\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\rho_i\times(\omega\times\rho_i+v_i^0)+K_i^0\right], \qquad m_*=\sum_{i=1}^{n}m_i,$$

$$w=(m+m_*)^{-1}, \qquad \rho_*=\sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i, \qquad v_*=\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^0.$$

Поскольку в системе $Oxyz$ динамические параметры корпуса, которые надо идентифицировать, постоянны, то

$$\frac{d}{dt}\left(K+\sum_{i=1}^{n}K_i\right)=\frac{d_*}{dt}\left(K+\sum_{i=1}^{n}K_i\right)+\omega\times\left(K+\sum_{i=1}^{n}K_i\right). \qquad (4.33)$$

Здесь второе слагаемое в правой части преобразуется к виду

$$\omega\times\left(K+\sum_{i=1}^{n}K_i\right)=\omega\times J\omega-m_*mw\omega\times\rho(\omega,\rho)+$$
$$+wm\omega\times\rho(\omega,\rho_*)+\omega\times K_*-$$
$$-w\omega\times\left[(m\rho+\rho_*)\times(\omega\times\rho_*+v_*)\right]. \qquad (4.34)$$

Суммарный момент сил реакций опоры равен

$$M_N=\sum_{l=1}^{k}\left(r_{i_l}^f-\rho_a\right)\times N_{i_l}=\sum_{l=1}^{k}r_{i_l}^f\times N_{i_l}-$$
$$-w(m\rho-\rho_*)\times\sum_{l=1}^{k}N_{i_l}. \qquad (4.35)$$

Суммарный момент внешних сил M_F считаем постоянным в системе $Oxyz$, а суммарную внешнюю силу можно представить в виде: $F=A^*P$, где вектор F предполагается постоянным в системе $O_1\xi\eta\zeta$. Кроме того, векторы M_F, P считаются постоянными в системе $Oxyz$ — они подлежат определению вместе с массой, тензором инерции и положением центра масс корпуса.

Интегрирование уравнений (4.30), (4.31) с учетом соотношений (4.33) – (4.35) приводит к выражениям, куда искомые параметры входят вместе с функциональными величинами, зависящими только от относительных координат и их скоростей изменения.

Приложение

Метод динамических возмущений

При исследовании механической модели подвижных локомоционных систем (ЛС) основное внимание уделяется управлению опорными и переносными конечностями. Даже при рассмотрении двуногих систем в динамический анализ включают только эти конечности; при этом действием свободных конечностей (рук) полностью пренебрегают. Введение дополнительных конечностей (систем, агрегатов твердых тел), которые выполняли бы полезные перемещения и влияли определенным образом на движение всего аппарата в целом, открывает широкие возможности при создании самых различных устройств со сложным характером передвижения и маневра, в частности, при создании ЛС, использующей статически неустойчивые походки.

Такие конечности впредь будем называть *свободными*, а метод учета динамических особенностей со стороны этих конечностей на движение ЛС и формирование ее системы управления — *методом динамических возмущений* (МДВ). Ясно, что свободные конечности для шагающих устройств играют большую роль в качестве своеобразных динамических рулей: достаточно в этой связи представить локомоционный аппарат на поверхности с малым коэффициентом трения или, например, с малой площадью опоры (движение

по канату и т.д.).

Очевидно также, что свободные конечности непосредственно влияют на энергетические возможности передвижения: идти или бежать, скажем, “руками” значительно легче, чем “без рук”. Эти и ряд других вопросов, исследуемых в главе, приводят к необходимости наряду с задачей стабилизации движения корпуса ЛС решать также задачу выбора программного движения и выбора реакций опоры, которые определяют желаемый тип или режим ходьбы. Однако эти вопросы остаются вне рамок нашего рассмотрения: имеется много работ, где им уделяется должное внимание.

В главе решаются задачи, связанные с использованием особого вида конечностей — свободных. Подробно изучаются две разновидности метода динамических возмущений, когда система управления шагающего аппарата обеспечивает *полную стабилизацию объекта* в процессе передвижения. Подчеркивается эффективность и преимущество МДВ на тех типах задач, которые принципиально не могут быть решены без использования этого метода. МДВ развит в работах [77–80] и разумеется, что данная методика может быть обобщена и использована в самых различных управляемых механических устройствах, для действия которых необходимы определенный запас устойчивости и номинальный (программный) режим функционирования.

В § П.1 обосновывается прямой метод динамических возмущений (ПМДВ), когда по заданному движению корпуса определяется соответствующее движение конечностей. В § П.2, наоборот, разрабатывается обратный метод динамических возмущений (ОМДВ), когда задается такое движение конечностей, при котором достигается требуемое движение корпуса ЛС.

П.1 Прямой метод динамических возмущений

Параграф посвящен прямому методу динамических возмущений при реализации локомоционного движения. Для робототехнических локомоционных устройств важными являются задачи, связанные с определением динамических усилий со стороны свободных конечностей на корпус, влиянием этих конечностей на распределение сил реакций опоры, формированием системы управления свободными конечностями, при которой движение ЛС будет уравновешенным и стабилизируемым. Уточним в связи с этим понятие уравновешенного движения ЛС.

Определение П.1. *Пусть система управления локомоционного устройства такова, что выбором управляющих воздействий может быть реализована одна из наперед заданных функций времени:* 1) *каждая из нормальных компонент вектора реакции опоры* R^i; 2) *нормальная и какая-либо из касательных составляющих вектора реакции опоры;* 3) *все три составляющие вектора реакции опоры* i*–ой конечности. Тогда движение ЛС будем называть, соотвественно, нормально уравновешенным, частично уравновешенным и полностью уравновешенным.*

Отметим, что два последних случая требуют введения свободных конечностей, о чем будет более подробно сказано в дальнейшем. Задание $R^i(t)$ в виде некоторой вектор-функции времени $r(t)$ гарантирует неопрокидываемость и движение ЛС без проскальзывания.

Рассмотрим локомоционный аппарат как агрегат следующих твердых тел: корпус, n опорных, m переносных и s свободных конечностей. Для корпуса и конечностей введем соответственно векторы положения

$$q = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \\ \varphi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_o^i = \begin{pmatrix} \varphi_{1o} \\ \varphi_{2o} \\ \varphi_{3o} \end{pmatrix}^i, \quad \varphi_h^j = \begin{pmatrix} \varphi_{1h} \\ \varphi_{2h} \\ \varphi_{3h} \end{pmatrix}^j, \quad \varphi_c^k = \begin{pmatrix} \varphi_{1c} \\ \varphi_{2c} \\ \varphi_{3c} \end{pmatrix}^k,$$

где, как и прежде, $(C_x, C_y, C_z)^*$ — координаты центра системы координат, связанной с корпусом ЛС, в абсолютной системе координат; $(\varphi, \psi, \theta)^*$ — *углы Эйлера*, $*$ сверху означает знак транспонирования; φ_0^i, φ_h^j, φ_c^k — углы вращения *опорных, переносных и свободных конечностей* соответственно, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, s}$.

По каждой степени подвижности конечности действуют управляющие моменты вращения, которые обозначим соответственно

u_o^i, u_h^j, u_c^k. Динамика корпуса ЛС описывается уравнением

$$A(q)\,\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o + F_h + F_c \\ M_o + M_h + M_c \end{pmatrix}. \tag{П.1}$$

Динамика i–ой конечности описывается двенадцатью соотношениями, полученными из кинетостатического принципа Даламбера применительно к верхнему и нижнему звеньям

$$\begin{aligned} F^i &= \Omega_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Omega_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Omega_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + \Omega_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q}, \\ F_k^i &= S_1(\varphi^i, q)\, u^i + S_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + S_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + S_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q}, \\ \tilde{u}^i &= K_1(\varphi^i, q)\, u^i + K_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + K_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + K_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q}, \\ R^i &= Q_1(\varphi^i, q)\, u^i + Q_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + Q_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + Q_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q}, \end{aligned} \tag{П.2}$$

где F^i — сила, действующая со стороны i–ой конечности на корпус, $\tilde{u}^i = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^{i*}$ — момент реакции в шарнире бедра $\tilde{u}_1^i$ и колена $(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^{i*}$ i–ой конечности, F_k^i — сила реакции в шарнире колена, R^i — сила реакции опоры. В системе (П.2) любая пара уравнений является линейно независимой, о чем было сказано выше. Как следствие, алгебраический анализ этих уравнений приводит к выводу о том, что матрицы в выражениях для $\ddot{\varphi}$, u невырождены. Последнее обстоятельство будет часто использоваться в аналитических выкладках. Очевидно, что в уравнении (П.1):

$$F = F_o + F_h + F_c = \sum_{i=1}^{n+m+s} F^i, \tag{П.3}$$

$$M = M_o + M_h + M_c = \sum_{i=1}^{n+m+s} M_*^i, \quad M_*^i = M^i + F^i \times d^i,$$

где d^i — радиус-вектор бедра i–ой конечности, M^i — момент, создаваемый в шарнире бедра управляющими моментами u_1 и u_2 и ортогональным им моментом реакции $\tilde{u}_1$.

Наряду с системой уравнений (П.2), которую назовем полной, будем рассматривать систему уравнений, не включающую внутренние силовые и моментные характеристики в шарнире колена

$$
\begin{aligned}
F^i &= \Omega_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Omega_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Omega_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + \Omega_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q},\\
M_*^i &= \Xi_1(\varphi^i, q)\, u^i + \Xi_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + \Xi_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) + \Xi_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q},\\
R^i &= Q_1(\varphi^i, q)\, u^i + Q_2(\varphi^i, q)\, \ddot{\varphi}^i + Q_3(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}) +\\
&\quad + Q_4(\varphi^i, q)\, \ddot{q}. \qquad (\text{П.4})
\end{aligned}
$$

Систему уравнений (П.4) будем называть управляемой. Как полная система (П.2), так и управляемая система (П.4) не противоречат уравнению движения корпуса ЛС (П.1), т.е. составляют замкнутую систему уравнений. Это означает, что переменные q и φ^i удовлетворяют системам уравнений (П.1), (П.2), (П.3), а также уравнениям связей. Действительно, подставляя выражения (уравнения связей тогда будут учтены) для опорных координат верхнего q_1^i и нижнего q_2^i звеньев i–ой конечности

$$q_1^i = q_1^i(q, \varphi^i), \qquad q_2^i = q_2^i(q, \varphi^i)$$

и их производные в двенадцать уравнений для верхнего и нижнего звеньев, взятых как свободные твердые тела, получим в результате замкнутую систему уравнений для конечностей и корпуса.

При построении стабилизирующей системы управления (СУ) ЛС возможны два подхода (метода):

1. Главный вектор сил и моментов $(F,\, M)^*$ задается в виде

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = B(q, \dot{q}) - A(q)\,[\,\dots], \qquad (\text{П.5})$$

где $[\,\dots] = [\,-\ddot{q}_p + \alpha\,(\dot{q} - \dot{q}_p) + \beta\,(q - q_p)\,]$, $\alpha, \beta > 0$, $q_p(t)$ — программное заданное движение корпуса (о построении программных траекторий см., например, в работах [65, 69]), $q(t)$, $\dot{q}(t)$ — измеряемые $\forall\, t$ значения вектора состояния корпуса. Таким образом, рассмотрение движения шагающего устройства начинается с анализа движения корпуса. В этом случае в силу уравнения динамики корпуса имеем

$$A(q)\, \ddot{q} + B(q, \dot{q}) = B(q, \dot{q}) - A(q)\,[\,\dots],$$

либо

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, q_p, \dot{q}_p, \ddot{q}_p), \qquad (\text{П.6})$$

где через $G(\cdot)$ обозначена известная вектор-функция времени. Задание уравнения (П.6) полностью определяет движение корпуса. Подставляя далее уравнение (П.6) в уравнения динамики конечностей (П.4), будем управления для конечностей выбирать таким образом, чтобы движение конечностей обеспечивало желаемый закон движения корпуса (П.6). Этот метод построения СУ будем называть прямым методом динамических возмущений (ПМДВ).

2. В начале исследуется система уравнений (П.4), т.е. рассматривается движение конечностей. Управления в конечностях выбираются так, чтобы F^i и M_*^i были заданными вектор-функциями времени, а именно, чтобы при их суммировании главный вектор сил и моментов $(F,\, M)^*$ был равен правой части соотношения (П.5). При подстановке (П.5) в уравнение движения корпуса (П.1) получим $q(t) \to q_p(t)$ при $t \to \infty$. Этот метод построения СУ будем называть обратным методом динамических возмущений (ОМДВ) и ему будет посвящен следующий параграф. Подчеркнем, что между ПМДВ и ОМДВ существуют принципиальные различия, в основе которых лежит следующее естественное положение: одному и тому же движению корпуса соответствуют различные движения конечностей. Этот факт будет в дальнейшем обоснован теоретически, т.е. для двух методов будут найдены соответствующие законы движения и управления конечностями, приводящие к одинаковому движению корпуса ЛС.

Займемся исследованием прямого метода динамических возмущений. Подставляя закон (П.6) в полную (П.2) и управляемую (П.4) системы уравнений, получим соответственно

$$
\begin{aligned}
F^i &= \Omega_1^i u^i + \Omega_2^i \ddot{\varphi}^i + \Omega_{3*}^i(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, t),\\
F_k^i &= S_1^i u^i + S_2^i \ddot{\varphi}^i + S_{3*}^i(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, t),\\
\tilde{u}^i &= K_1^i u^i + K_2^i \ddot{\varphi}^i + K_{3*}^i(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, t),\\
R^i &= Q_1^i u^i + Q_2^i \ddot{\varphi}^i + Q_{3*}^i(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, q, \dot{q}, t), \qquad (\text{П.7})
\end{aligned}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
F^i &= \Omega_1^i u^i + \Omega_2^i \ddot{\varphi}^i + \Omega_{3*}^i,\\
M_*^i &= \Xi_1^i u^i + \Xi_2^i \ddot{\varphi}^i + \Xi_{3*}^i,\\
R^i &= Q_1^i u^i + Q_2^i \ddot{\varphi}^i + Q_{3*}^i. \qquad (\text{П.8})
\end{aligned}
$$

Укажем на следующие различия функций, выполняемых всеми видами конечностей:

1. *Опорная конечность.* Кинематика опорных конечностей такова, что

$$\varphi_o^i = \Phi^i(q,\, H^i), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{П.9}$$

где H^i — координаты i–ой стопы; итак, переменные опорных конечностей однозначно определяются положением корпуса и точек опоры.

2. *Переносная конечность.* В данном случае требуется отследить заданное программное движение переносной конечности $\varphi_{hp}^i(t)$.

3. *Свободная конечность.* На этот раз $\varphi_{cp}^i(t)$ не задается. Ставится для конечности в свободной фазе задача обеспечения (каждая конечность имеет три управляющих момента вращения):

$$F_c^i = f_1^i(t), \qquad R_c^i = 0, \tag{П.10}$$

либо

$$M_{*C}^i = f_2^i(t), \qquad R_c^i = 0, \tag{П.11}$$

где $f_1^i(t)$, $f_2^i(t)$ — некоторые заданные вектор-функции времени. Так как выполнение условия $\left\{ F_c^i = f_1^i(t),\ M_{*c}^i = f_2^i(t) \right\}$ противоречиво с выполнением условия $R_c^i = 0$, то в свободной фазе возможно выполнение соотношения (П.10) либо соотношения (П.11) (или их комбинации).

Рассмотрим систему уравнений (П.10) более подробно. Подставляя в нее выражения (П.8), получим

$$\begin{aligned} F_c^i &= f_1^i(t) = \Omega_1^i u_c^i + \Omega_2^i \ddot{\varphi}_c^i + \Omega_{3*}^i, \\ R_c^i &= 0 = Q_1^i u_c^i + Q_2^i \ddot{\varphi}_c^i + Q_{3*}^i. \end{aligned} \tag{П.12}$$

Покажем, что при выборе управления

$$u_c^i = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \, (f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i), \tag{П.13}$$

где $\ddot{\varphi}_c^i$ удовлетворяет соотношению

$$\ddot{\varphi}_c^i = -\, Q_2^{-1i} \, (Q_1^i u_c^i + Q_{3*}^i), \tag{П.14}$$

система (П.12) выполняется тождественно, т.е.

$$F_c^i = f_1^i(t), \qquad R_c^i = 0, \qquad M_{*c}^i = M_{*c}^i \, (f_1^i(t)).$$

В самом деле, из второго уравнения системы (П.12) имеем (П.14). Подставляя соотношения (П.13), (П.14) в выражение для F_c^i (П.12), получим

$$\begin{aligned} F_c^i &= \Omega_1^i u_c^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} \, (Q_1^i u_c^i + Q_{3*}^i) + \Omega_{3*}^i = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i) \, u_c^i \, - \\ &- \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i + \Omega_{3*}^i = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \, \times \\ &\times \, (f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i) - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i + \Omega_{3*}^i = f_1^i(t). \end{aligned}$$

Система уравнений (П.12) решается как система шести независимых уравнений относительно шести неизвестных $\ddot{\varphi}_c^i$, u_c^i при заданных F_c^i и R_c^i. Действуя аналогично, можно выбрать управление и движение с целью выполнения условий (П.11):

$$\begin{aligned} M_{*c}^i &= f_2^i(t) = \Xi_1^i u_c^i + \Xi_2^i \ddot{\varphi}_c^i + \Xi_{3*}^i, \\ R_c^i &= 0 = Q_1^i u_c^i + Q_2^i \ddot{\varphi}_c^i + Q_{3*}^i. \end{aligned}$$

Тогда при

$$u_c^i = (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \, (f_2^i(t) + \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Xi_{3*}^i), \tag{П.15}$$

где $\ddot{\varphi}_c^i$ удовлетворяет соотношению

$$\ddot{\varphi}_c^i = -\, Q_2^{-1i} \, (Q_1^i u_c^i + Q_{3*}^i), \tag{П.16}$$

будут выполняться соотношения

$$M_{*c}^i = f_2^i(t), \qquad R_c^i = 0, \qquad F_c^i = F_c^i \, (f_2^i(t)). \tag{П.17}$$

Найдем зависимость M_{*c}^i и F_c^i от $f_1^i(t)$ и $f_2^i(t)$ соответственно. Пусть u_c^i и $\ddot{\varphi}_c^i$ удовлетворяют соотношениям (П.13) и (П.14). Тогда, подставляя их в уравнение для момента M_{*c}^i (П.8), получим

$$\begin{aligned} M_{*c}^i &= \Xi_1^i \, (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} (f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i) \, - \\ &- \, \Xi_2^i Q_2^{-1i} \, \left\{ Q_1^i \, (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \, \times \right. \\ &\left. \times \, (f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i) + Q_{3*}^i \right\} + \Xi_{3*}^i, \end{aligned} \tag{П.18}$$

откуда вытекает

$$M_{*c}^i = \Phi_1^i f_1^i(t) + \Phi_2^i, \tag{П.19}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^i(\varphi_c^i, q) = (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1},\\
&\Phi_2^i(\varphi_c^i, \dot\varphi_c^i, q, \dot q, t) = (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \times\\
&\times\ (\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i) - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i + \Xi_{3*}^i.
\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя выражения (П.15) и (П.16) в уравнение для силы F_c^i (П.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
F_c^i = {}&\Omega_1^i\,(\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}\,(f_2^i(t) + \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Xi_{3*}^i) -\\
&-\ \Omega_2^i Q_2^{-1i}\,\big\{\,Q_1^i\,(\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \times\\
&\times (f_2^i(t) + \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Xi_{3*}^i) + Q_{3*}^i\,\big\} + \Omega_{3*}^i,
\end{aligned}$$

откуда следует

$$F_c^i = \Psi_1^i f_2^i(t) + \Psi_2^i, \tag{П.20}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
&\Psi_1^i(\varphi_c^i, q) = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1},\\
&\Psi_2^i(\varphi_c^i, \dot\varphi_c^i, q, \dot q, t) = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \times\\
&\times\ (\Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Xi_{3*}^i) - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i + \Omega_{3*}^i.
\end{aligned}$$

Прежде чем перейти к формированию системы управления свободными конечностями, рассмотрим агрегат: корпус, n опорных и m переносных конечностей. В опорной фазе в качестве исходных уравнений, использовав избыточность в управлении, возьмем выражения для реакций опоры. Подставляя в уравнения (П.8) для реакций опоры кинематические соотношения (П.9),связывающие опорные конечности и корпус, получим

$$R = Q_1(q)\,u_o + Q_2(q)\,\ddot q + Q_3(q, \dot q, t), \tag{П.21}$$

где векторы R и u_o имеют одинаковую размерность $3n \times 1$, а квадратная матрица $Q_1(q)$ имеет вид

$$Q_1(q) = \operatorname{diag}\,\left(Q_1^{i=1},\,...,\,Q_1^{i=n}\right), \quad R = \begin{pmatrix} R^1\\ \vdots\\ R^n \end{pmatrix}, \quad u_o = \begin{pmatrix} u_o^1\\ \vdots\\ u_o^n \end{pmatrix}.$$

Далее зададим программное движение корпуса $q_p(t)$ и вектор-функцию $r(t)$, равенство которой вектору R желательно, исходя из целей полной уравновешенности движения ЛС. Выберем закон управления в соотношении (П.21) в виде

$$\begin{aligned}
u_o = Q_1^{-1}(q)\,\{\,&r(t) + Q_2(q)\,[\,-\ddot q_p + \alpha\,(\dot q - \dot q_p) + \beta\,(q - q_p)\,] -\\
&-Q_3(q, \dot q, t)\,\}\,.
\end{aligned} \tag{П.22}$$

Подставляя выражение (П.22) в соотношение (П.21), получим

$$R = r(t) + Q_2(q)\ (\ddot q + [\,...\,])\,. \tag{П.23}$$

Отсюда, если обеспечивается стабилизация движения корпуса локомоционного аппарата, а именно

$$\ddot q + [\,...\,] = 0 \quad\Rightarrow\quad q(t) \to q_p(t) \quad (t \to \infty), \tag{П.24}$$

то будет выполняться соотношение

$$R(t) = r(t). \tag{П.25}$$

Равенство (П.25) выполняется тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (П.24). Вывод: система управления свободными конечностями должна выбираться с целью обеспечения условий (П.24). В дальнейшем будет показано, что при надлежащем выборе закона управления свободными конечностями этого можно вполне добиться.

Подставим управление (П.22) в выражение для силы и момента со стороны опорных конечностей. Для этого просуммируем от 1 до n первые шесть уравнений (П.8). Подставив затем в них выражение для опорных конечностей и используя уравнения (П.3), получим следующие шесть уравнений:

$$\begin{aligned}
F_o &= \Omega_1(q)\,u_o + \Omega_2(q)\,\ddot q + \Omega_3(q, \dot q, t),\\
M_o &= \Xi_1(q)\,u_o + \Xi_2(q)\,\ddot q + \Xi_3(q, \dot q, t).
\end{aligned} \tag{П.26}$$

При подстановке выражений (П.6) и (П.22) в систему уравнений (П.26) получим

$$F_o = D_1(q,\dot q,t) + D_2(q)\,[\,\dots],\quad M_o = E_1(q,\dot q,t) + E_2(q)\,[\,\dots], \quad (\text{П}.27)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} D_1(q,\dot q,t) &= \Omega_1(q)\,Q_1^{-1}(q)\,r(t) + \Omega_3(q,\dot q,t),\\ D_2(q) &= \Omega_1(q)\,Q_1^{-1}(q)\,Q_2(q) + \Omega_2(q),\\ E_1(q,\dot q,t) &= \Xi_1(q)\,Q_1^{-1}(q)\,r(t) + \Xi_3(q,\dot q,t),\\ E_2(q) &= \Xi_1(q)\,Q_1^{-1}(q)\,Q_2(q) + \Xi_2(q). \end{aligned}$$

Для конечностей в переносной фазе будем полагать, что закон движения известен, а сила F_h и момент M_h представляют собой известные вектор-функции времени

$$F_h = F_h(t), \qquad M_h = M_h(t). \quad (\text{П}.28)$$

В самом деле, уравнение переносной конечности

$$R_h^i = Q_1^i u_h^i + Q_2^i \ddot\varphi_h^i + Q_{3*}^i = 0.$$

Итак, пусть задано программное движение переносной конечности $\varphi_{hp}^i(t)$, которое необходимо отследить. Нетрудно показать, что при

$$u_h^i = Q_1^{-1i}\,\{\,-Q_{3*}^i + Q_2^i\,[\,-\ddot\varphi_{hp}^i + \gamma_1\,(\dot\varphi_h^i - \dot\varphi_{hp}^i) + \gamma_2\,(\varphi_h^i - \varphi_{hp}^i)\,]\,\},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, выполняется условие: $\varphi_h^i(t) \to \varphi_{hp}^i(t)$ при $t \to \infty$. Подставляя u_h^i в выражения для сил и моментов переносных конечностей и производя суммирование, получим соотношения (П.28).

Наконец, перейдем к рассмотрению свободных конечностей. Пусть имеются в распоряжении две свободные конечности, для которых главный вектор сил и моментов обозначим соответственно через U_c^1 и U_c^2. Для первой конечности будем задавать силу, для второй — момент в шарнире крепления с корпусом ЛС:

$$U_c^1 = \begin{pmatrix} F_c^1 \\ M_c^1 + F_c^1 \times d_c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_c^1(t) \\ M_c^1\,(f_c^1(t)) + f_c^1(t) \times d_c^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П}.29)$$

$$U_c^2 = \begin{pmatrix} F_c^2 \\ M_c^2 + F_c^2 \times d_c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c^2\,(f_c^2(t)) \\ f_c^2(t) + F_c^2\,(f_c^2(t)) \times d_c^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П}.30)$$

где зависимости $M_c^1\,(f_c^1(t))$ и $F_c^2\,(f_c^2(t))$ имеют вид (П.19) и (П.20); d_c^1, d_c^2 — радиусы-векторы бедер свободных конечностей. В дальнейшем, для простоты, будем считать, что $d_c^1 = d_c^2 = d_c$.

Движение свободных конечностей выберем из условия выполнения определенным образом составленных соотношений. А именно, потребуем выполнения равенств:

$$\begin{aligned} F_c = f_c^1 + F_c^2\,(f_c^2(t)) = -\,F_h(t) - \{\,D_1(q,\dot q,t) + D_2(q)\,[\,\dots]\,\} \;+\\ +\; B_F(q,\dot q) - A_F(q)\,[\,\dots], \end{aligned} \quad (\text{П}.31)$$

а также

$$\begin{aligned} M_c = M_c^1\,(f_c^1(t)) + f_c^1(t) \times d_c + f_c^2(t) + F_c^2\,(f_c^2(t)) \times d_c \;=\\ =\; -\,M_h(t) - \{\,E_1(q,\dot q,t) + E_2(q)\,[\,\dots]\,\} +\\ +\, B_M(q,\dot q) - A_M(q)\,[\,\dots], \end{aligned} \quad (\text{П}.32)$$

где $F_h(t)$, $M_h(t)$ вычисляются согласно уравнениям (П.28). Здесь обозначены: $B_F(q,\dot q)$, $A_F(q)$ — компоненты первых трех уравнений для сил, $B_M(q,\dot q)$, $A_M(q)$ — компоненты остальных трех уравнений для моментов в уравнении движения корпуса ЛС (П.1).

Таким образом, для выбора вектор-функций $f_c^1(t)$ и $f_c^2(t)$ имеем две системы уравнений (П.31) и (П.32). Разрешая их, получим

$$\begin{aligned} f_c^1(t) = -\,F_h(t) - \{\,D_1(q,\dot q,t) + D_2(q)\,[\,\dots]\,\} \;+\\ +\; B_F(q,\dot q) - A_F(q)\,[\,\dots] - F_c^2\,(f_c^2(t)). \end{aligned} \quad (\text{П}.33)$$

При подстановке выражения (П.33) в соотношение (П.32) будем иметь

$$\begin{aligned} &M_c^1\,(-\,F_h(t) - \{\,D_1(q,\dot q,t) + D_2(q)\,[\,\dots]\,\} + B_F(q,\dot q) \;-\\ &\quad -\,A_F(q)\,[\,\dots] - F_c^2\,(f_c^2(t))) + f_c^2(t) + [\,-\,F_h(t) \;-\\ &\quad -\,\{\,D_1(q,\dot q,t) + D_2(q)\,[\,\dots]\,\} + B_F(q,\dot q) - A_F(q)\,[\,\dots]\,] \times d_c \;=\\ &= -\,M_h(t) - \{\,E_1(q,\dot q,t) + E_2(q)\,[\,\dots]\,\} + B_M(q,\dot q)\\ &\quad -\,A_M(q)\,[\,\dots]. \end{aligned} \quad (\text{П}.34)$$

Обозначим в соотношении (П.34):

$$[\, - F_h(t) - \{\, D_1(q, \dot q, t) + D_2(q)\,[\,...\,]\} + B_F(q, \dot q) - A_F(q)\,[\,...\,]\,] \times$$
$$\times\, d_c \equiv \Delta(q, \dot q, t).$$

Тогда, используя зависимости (П.19) и (П.20), уравнения (П.33) и (П.34) можно представить в виде

$$f_c^1(t) = S_1(t) - \Psi_1(t)\, f_c^2(t) - \Psi_2(t), \tag{П.35}$$

где

$$\begin{aligned} F_c^2\,(f_c^2(t)) &= \Psi_1(t)\, f_c^2(t) + \Psi_2(t),\\ S_1(t) &= -\,F_h(t) - \{\, D_1(q, \dot q, t) + D_2(q)\,[\,...\,]\,\} +\\ &\quad + B_F(q, \dot q) - A_F(q)\,[\,...\,], \end{aligned}$$

$\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ — известные вектор-функции времени в соотношении (П.20). Подставляя соотношение (П.35) в выражение для момента (П.34): $M_c^1(t) = \Phi_1(t)\, f_c^1(t) + \Phi_2(t)$, найдем зависимость

$$\Phi_1(t)\, \left[\, S_1(t) - \Psi_1(t)\, f_c^2(t) - \Psi_2(t)\,\right] + \Phi_2(t) + f_c^2(t) + \Delta(q, \dot q, t) = S_2(t),$$

где

$$S_2(t) = -\,M_h(t) - \{\, E_1(q, \dot q, t) + E_2(q)\,[\,...\,]\,\} + B_M(q, \dot q) - A_M(q)\,[\,...\,],$$

$\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — известные вектор-функции времени, введенные ранее и вычисляемые в соотношении (П.19).

Окончательно получим

$$\begin{aligned} f_c^2(t) = (I\Phi_1(t)\,\Psi_1(t))^{-1}\, &(S_2(t) + \Phi_1(t)\,\Psi_2(t) -\\ &- \Phi_1(t)\, S_1(t) - \Phi_2(t) - \Delta(q, \dot q, t))\,, \end{aligned} \tag{П.36}$$

$$\begin{aligned} f_c^1(t) = S_1(t) - \Psi_1(t)\, &(I - \Phi_1(t)\,\Psi_1(t))^{-1}\, (S_2(t) + \Phi_1(t)\,\Psi_2(t) -\\ &- \Phi_1(t)\, S_1(t) - \Phi_2(t) - \Delta(q, \dot q, t)) - \Psi_2(t), \end{aligned} \tag{П.37}$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Складывая уравнения (П.27), (П.28), (П.31), (П.32), получим

$$\begin{aligned} F &= F_c + F_h + F_o = B_F(q, \dot q) - A_F(q)\,[\,...\,],\\ M &= M_c + M_h + M_o = B_M(q, \dot q) - A_M(q)\,[\,...\,]. \end{aligned} \tag{П.38}$$

Подставив выражения (П.38) в уравнение движения корпуса (П.1), получим

$$\begin{aligned} A_F(q)\,\ddot q + B_F(q, \dot q) &= B_F(q, \dot q) - A_F(q)\,[\,...\,],\\ A_M(q)\,\ddot q + B_M(q, \dot q) &= B_M(q, \dot q) - A_M(q)\,[\,...\,]. \end{aligned}$$

Сокращая, будем иметь

$$A(q)\,\left[\,\ddot q - \ddot q_p + \alpha\,(\dot q - \dot q_p) + \beta\,(q - q_p)\,\right] = 0.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то $q(t) \to q_p(t)$ при $t \to \infty$ и, кроме того (см. равенство (П.23)), $R(t) = r(t)$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема П.1. *Пусть заданы следующие вектор-функции времени* $q_p(t)$, $\dot q_p(t)$, $\ddot q_p(t)$, $q(t)$, $\dot q(t)$, $r(t)$, $U_h(t)$. *Тогда при выборе управлений*

$$\begin{aligned} u_o &= Q_1^{-1}(q)\, \{\, r(t) + Q_2(q)\,[\,...\,] - Q_3(q, \dot q, t)\,\}\,,\\ u_c^i &= (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}\, (f_c^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Omega_{3*}^i), \quad i = 1,\\ u_c^i &= (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}\, (f_c^i(t) + \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_{3*}^i - \Xi_{3*}^i), \quad i = 2, \end{aligned}$$

где $f_c^1(t)$, $f_c^2(t)$ *вычисляются по формулам* (П.36), $(2,37)$, *имеют место соотношения:* $R(t) = r(t)$, $q(t) \to q_p(t)$ $(t \to \infty)$.

Итак, из результатов параграфа вытекает, что главный вектор сил и моментов, действующих на корпус ЛС со стороны конечностей, следует задавать в виде

$$U = \begin{pmatrix} F\\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_F(q, \dot q) - A_F(q)\,[\,...\,]\\ B_M(q, \dot q) - A_M(q)\,[\,...\,] \end{pmatrix} \tag{П.39}$$

В этом случае соотношение (П.6) имеет вполне определенное выражение, причем выбор управлений опорных и свободных конечностей по теореме 2.1 приводит, во-первых, к формированию вектора U вида (П.39); во-вторых, к стабилизации корпуса ЛС и, в-третьих, к полностью уравновешенному движению аппарата.

П.2 Обратный метод динамических возмущений

Перейдем к обсуждению обратного метода динамических возмущений. Решаться будут те же самые задачи, что и в предыдущем параграфе, т.е. задачи, связанные с выбором системы управления ЛС, обеспечивающей стабилизируемое и полностью уравновешенное движение. Рассматривается аппарат, состоящий из корпуса, опорных, переносных и свободных конечностей с известными кинематическими и динамическими соотношениями. Основные уравнения: (П.1) — для корпуса и (П.4) — для управляемой системы. Уравнения (П.4), напомним, имеют вид

$$\begin{aligned} F^i &= \Omega_1^i u^i + \Omega_2^i \ddot{\varphi}^i + \Omega_3^i + \Omega_4^i \ddot{q}, \\ M_*^i &= \Xi_1^i u^i + \Xi_2^i \ddot{\varphi}^i + \Xi_3^i + \Xi_4^i \ddot{q}, \\ R^i &= Q_1^i u^i + Q_2^i \ddot{\varphi}^i + Q_3^i + Q_4^i \ddot{q} \end{aligned}$$

для конечностей. Основная особенность уравнений (П.4) состоит в том, что в них входит линейно $\ddot{q}$. Это обстоятельство вызывает определенные трудности при формировании СУ ЛС, так как управление в цепи обратной связи должно быть лишь функцией $q, \dot{q}$ и времени t. Эта сложность будет преодолеваться с помощью вводимого ниже правила подобия и учета динамических добавок, возникающих из-за применения этого правила.

Для свободных конечностей требуется выбрать управление u_c^i таким образом, чтобы выполнялась система условий (П.10) либо (П.11). В новой задаче уравнения (П.10) будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_c^i &= f_1^i(t) = \Omega_1^i u_c^i + \Omega_2^i \ddot{\varphi}_c^i + \Omega_3^i + \Omega_4^i \ddot{q}, \\ R_c^i &= 0 = Q_1^i u_c^i + Q_2^i \ddot{\varphi}_c^i + Q_3^i + Q_4^i \ddot{q}. \end{aligned} \tag{П.40}$$

Эту систему шести уравнений будем рассматривать как систему относительно шести неизвестных $\ddot{\varphi}_c^i$ и u_c^i. Из второго соотношения (П.40) получим

$$\ddot{\varphi}_c^i = -\,Q_2^{-1i}\,(Q_1^i u_c^i + Q_3^i + Q_4^i \ddot{q}). \tag{П.41}$$

Подставляя выражение (П.41) в первое уравнение системы (П.40), получим

$$\begin{aligned} (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)\, u_c^i = f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_3^i - \Omega_3^i + \\ + (\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i - \Omega_4^i)\, \ddot{q}, \end{aligned} \tag{П.42}$$

откуда будет следовать

$$\begin{aligned} u_c^i = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \left[\, f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_3^i - \Omega_3^i + \right. \\ \left. + (\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i - \Omega_4^i)\, \ddot{q} \,\right]. \end{aligned} \tag{П.43}$$

В правой части соотношения (П.43) стоит выражение, содержащее $\ddot{q}$, а между тем управление, как об этом уже было сказано, включает лишь элементы, зависящие от $q, \dot{q}$.

Определение П.2. *Правилом подобия будем называть правило построения системы управления конечностями для ОМДВ, когда СУ формируется:* 1) *исходя из вида обратной связи, зависящей от* $\ddot{q}(t)$, *а также* 2) *путем замены* $\ddot{q}$ *на выражение* $-[\,\ldots]$:

$$\ddot{q} \sim -[\,\ldots], \tag{П.44}$$

где $[\,\ldots] = -\,\ddot{q}_p + \alpha\,(\dot{q} - \dot{q}_p) + \beta\,(q - q_p),\ \ \alpha, \beta > 0,\ \ q_p(t)$ *— заданное программное движение корпуса ЛС.*

Согласно правилу подобия (П.44) управление u_c^i в соотношении (П.43) будем строить следующим образом:

$$\begin{aligned} u_c^i = (\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1} \left\{\, f_1^i(t) + \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_3^i - \Omega_3^i - \right. \\ \left. - (\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i - \Omega_4^i)\, [\,\ldots] \,\right\}. \end{aligned} \tag{П.45}$$

Аналогично тому, как это делалось в § П.1, можно показать, что при выборе u_c^i в виде (П.45) получим

$$\begin{aligned} F_c^i &= f_1^i(t) + (\Omega_4^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i)(\ddot{q} + [\,\ldots]), \\ M_c^i &= M_c^i\,(f_1^i(t)), \qquad R_c^i = 0. \end{aligned} \tag{П.46}$$

Отметим, что если квадратная скобка $[\,\ddot{q} - \ddot{q}_p + \alpha\,(\dot{q} - \dot{q}_p) + \beta\,(q - q_p)\,] = 0$, т.е. $q(t) \to q_p(t)$ при $t \to \infty$ и обеспечивается стабилизация корпуса, то в уравнении (П.46) имеем $F_c^i = f_1^i(t)$. Это делает оправданным применение правила подобия. Таким образом, основная задача движения свободных конечностей заключается в том, чтобы выбором управлений в них обеспечить выполнение равенства $[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]=0$.

Аналогично для момента M_c^i, где управление задается с целью обеспечения условий (П.11), получим

$$\begin{aligned} M_c^i &= f_2^i(t)=\Xi_1^i u_c^i+\Xi_2^i\ddot\varphi_c^i+\Xi_3^i+\Xi_4^i\ddot q,\\ R_c^i &= 0=Q_1^i u_c^i+Q_2^i\ddot\varphi_c^i+Q_3^i+Q_4^i\ddot q. \end{aligned}\tag{П.47}$$

Тогда при выборе закона управления

$$\begin{aligned} u_c^i=(\Xi_1^i-\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_1^i)^{-1}\,\{\,&f_2^i(t)+\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_3^i-\Xi_3^i-\\ &-(\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_4^i-\Xi_4^i)\,[\,...\,]\,\}\,, \end{aligned}\tag{П.48}$$

где $\ddot\varphi_c^i$ удовлетворяет соотношению (П.41) для соответствующего управления, будет выполняться система уравнений

$$\begin{aligned} M_c^i &= f_2^i(t)+(\Xi_4^i-\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_4^i)(\ddot q+[\,...\,]),\\ F_c^i &= F_c^i\,(f_2^i(t)),\qquad R_c^i=0. \end{aligned}\tag{П.49}$$

Здесь так же, как и в предыдущем случае (П.46), если

$$[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]=0,\qquad \text{то}\quad M_c^i=f_2^i(t).$$

Для опорной фазы имеем соотношение (П.21):

$$R=Q_1(q)\,u_o+Q_2(q)\,\ddot q+Q_3(q,\dot q,t)$$

и регулятор вида (П.22):

$$u_o=Q_1^{-1}(q)\,\{\,r(t)+Q_2(q)\,[\,...\,]-Q_3(q,\dot q,t)\,\}\,,$$

где $r(t)$ — заданная вектор-функция времени.

Справедливы также соотношения (П.23) – (П.25). Главный вектор сил и моментов, действующих на корпус со стороны опорных конечностей, задается согласно системе уравнений (П.26):

$$\begin{aligned} F_o &= \Omega_1(q)u_0+\Omega_2(q)\ddot q+\Omega_3(q,\dot q,t),\\ M_o &= \Xi_1(q)u_o+\Xi_2(q)\ddot q+\Xi_3(q,\dot q,t). \end{aligned}$$

Подставляя u_o (П.22) в систему (П.26), получим в новых обозначениях

$$\begin{aligned} F_o &= D_1(q,\dot q,t)+D_2(q)\,[\,...\,]+\Omega_2(q)\ddot q,\\ M_o &= E_1(q,\dot q,t)+E_2(q)\,[\,...\,]+\Xi_2(q)\ddot q. \end{aligned}\tag{П.50}$$

Для переносной фазы ставится задача отслеживания программного движения $\varphi_{hp}^i(t)$. Пользуясь уравнением движения для переносной конечности

$$R_h^i=0=Q_1^iu_h^i+Q_2^i\ddot\varphi_h^i+Q_3^i+Q_4^i\ddot q,$$

получим

$$u_h^i=-\,Q_1^{-1i}\,(Q_2^i\ddot\varphi_h^i+Q_3^i+Q_4^i\ddot q).$$

Применяя далее правило подобия, управление u_h^i зададим в виде

$$\begin{aligned} u_h^i=-\,Q_1^{-1i}\,\{\,&-Q_2^i\,[\,-\ddot\varphi_{hp}^i+\gamma_1\,(\dot\varphi_h^i-\dot\varphi_{hp}^i)+\gamma_2\,(\varphi_h^i-\varphi_{hp}^i)\,]\;+\\ &+Q_3^i-Q_4^i\,[\,-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]\,\}\,, \end{aligned}\tag{П.51}$$

где $\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\beta>0$.

При подстановке выражения (П.51) в уравнение для $R_h^i=0$ получим

$$\begin{aligned} 0=Q_2^i\,[\,&\ddot\varphi_h^i-\ddot\varphi_{hp}^i+\gamma_1\,(\dot\varphi_h^i-\dot\varphi_{hp}^i)+\gamma_2\,(\varphi_h^i-\varphi_{hp}^i)\,]\;+\\ &+\;Q_4^i\,[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]\,, \end{aligned}\tag{П.52}$$

откуда, если выполнено соотношение

$$\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)=0,$$

то, поскольку $\det Q_2^i\neq0,\ \det Q_4^i\neq0$, будем иметь

$$\ddot\varphi_h^i-\ddot\varphi_{hp}^i+\gamma_1\,(\dot\varphi_h^i-\dot\varphi_{hp}^i)+\gamma_2\,(\varphi_h^i-\varphi_{hp}^i)=0\implies\varphi_h^i(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\varphi_{hp}^i(t).$$

Из уравнения (П.52) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_h^i=-\,Q_2^{-1i}\,\{\,&Q_2^i\,[\,-\ddot\varphi_{hp}^i+\gamma_1\,(\dot\varphi_h^i-\dot\varphi_{hp}^i)+\gamma_2\,(\varphi_h^i-\varphi_{hp}^i)\,]\;+\\ &+Q_4^i\,[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]\,\}\,, \end{aligned}\tag{П.53}$$

т.е. $\ddot{\varphi}_h^i$ есть функция переменных $q, \dot{q}, \ddot{q}, \varphi_h^i, \dot{\varphi}_h^i$ и их программных движений. Наконец, подставляя управление (П.51) в выражение для силы и момента со стороны переносных конечностей и производя суммирование по i от 1 до m, получим

$$\begin{aligned} F_h &= G_1(\varphi_h, \dot{\varphi}_h, q, \dot{q}) + G_2(\varphi_h, q)\,\ddot{q} + G_3(\varphi_h, q)\,[\,...\,], \\ M_h &= J_1(\varphi_h, \dot{\varphi}_h, q, \dot{q}) + J_2(\varphi_h, q)\,\ddot{q} + J_3(\varphi_h, q)\,[\,...\,]. \end{aligned} \tag{П.54}$$

Рассмотрим теперь свободные конечности. Будем предполагать, что у ЛС имеются две свободные конечности с главным вектором сил и моментов U_c^1 и U_c^2 соответственно. Для первой из них будем задавать силу, а для второй — момент в шарнире крепления с корпусом аппарата (см. соотношения (П.29) и (П.30)). Имеем

$$F_c = F_c^1 + F_c^2, \qquad M_c^1 + M_c^2 + (F_c^1 + F_c^2) \times d_c.$$

Производя необходимые вычисления, можно получить зависимость M_c^i от $f_1^i(t)$ и F_c^i от $f_2^i(t)$ в системах (П.46) и (П.49) при подстановке выражений u_c^i и $\ddot{\varphi}_c^i$:

$$M_c^i = \Phi_1^i\, f_1^i(t) + \Phi_2^i \ddot{q} + \Phi_3^i\,[\,...\,] + \Phi_4^i, \tag{П.55}$$

$$F_c^i = \Psi_1^i\, f_2^i(t) + \Psi_2^i \ddot{q} + \Psi_3^i\,[\,...\,] + \Psi_4^i, \tag{П.56}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_1^i &= (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}, \\ \Phi_2^i &= \Xi_4^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i, \\ \Phi_3^i &= (\Xi_1^i + \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}(\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i - \Omega_4^i), \\ \Phi_4^i &= (\Xi_1^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)(\Omega_1^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_1^i)^{-1}(\Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_3^i - \Omega_3^i) - \\ &\quad - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_3^i + \Xi_3^i. \end{aligned}$$

В выражении (П.56) величины $\Psi_j^i,\ j = 1, 2, 3, 4$ вычисляются по тем же самым формулам, что и Φ_j^i с той лишь разницей, что величины Ω_j^i и Ξ_j^i меняются местами.

Окончательно, для свободных конечностей с учетом системы (П.55) и (П.56) получим

$$\begin{aligned} F_c^1 &= f_c^1(t) + P_1 \ddot{q} + P_1\,[\,...\,], \\ F_c^2 &= \Psi_1\, f_c^2(t) + \Psi_2 \ddot{q} + \Psi_3\,[\,...\,] + \Psi_4, \\ M_c^1 &= \Phi_1\, f_c^1(t) + \Phi_2 \ddot{q} + \Phi_3\,[\,...\,] + \Phi_4, \\ M_c^2 &= f_c^2(t) + P_2 \ddot{q} + P_2\,[\,...\,], \end{aligned} \tag{П.57}$$

где обозначено

$$P_1 = \Omega_4^i - \Omega_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i \quad (i = 1), \qquad P_2 = \Xi_4^i - \Xi_2^i Q_2^{-1i} Q_4^i \quad (i = 2).$$

Складывая выражения для сил и моментов всех конечностей (П.50), (П.54), (П.57) и подставляя их в уравнение движения корпуса ЛС, получим

$$\begin{aligned} A_F(q)\,\ddot{q} + B_F(q, \dot{q}) &= F_c + F_o + F_h \ = \\ &= \ f_c^1(t) + P_1 \ddot{q} + P_1\,[\,...\,] + \Psi_1\, f_c^2(t) + \Psi_2 \ddot{q} + \\ &\quad + \Psi_3\,[\,...\,] + \Psi_4 \ + D_1 + D_2\,[\,...\,] + \\ &\quad + \Omega_2 \ddot{q} + G_1 + G_2 \ddot{q} + G_3\,[\,...\,], \end{aligned} \tag{П.58}$$

а также

$$\begin{aligned} & A_M(q)\,\ddot{q} + B_M(q, \dot{q}) = M_c + M_o + M_h \ = \\ &= \ f_c^2(t) + P_2 \ddot{q} + P_2\,[\,...\,] + \Phi_1\, f_c^1(t) + \Phi_2 \ddot{q} + \Phi_3\,[\,...\,] + \Phi_4 \ + \\ &\quad + \ \big(f_c^1(t) + P_1 \ddot{q} + P_1\,[\,...\,] + \Psi_1\, f_c^2(t) + \Psi_2 \ddot{q} + \Psi_3\,[\,...\,] + \Psi_4\big) \times d_c \ + \\ &\quad + \ E_1 + E_2\,[\,...\,] + \Xi_2 \ddot{q} + J_1 + J_2 \ddot{q} + J_3\,[\,...\,]. \end{aligned} \tag{П.59}$$

В уравнении (П.58) выберем

$$\begin{aligned} f_c^1(t) + \Psi_1\, f_c^2(t) &= B_F(q, \dot{q}) - A_F(q)\,[\,...\,] - \\ &\quad - (P_1 + \Psi_3 + D_2 + G_3)[\,...\,]\Psi_4 - D_1 - G_1 + \\ &\quad + (P_1 + \Psi_2 + \Omega_2 + G_2)\,[\,...\,]. \end{aligned} \tag{П.60}$$

В уравнении (П.59) преобразуем правую часть, введя новые обозначения

$$\begin{aligned} & \big(f_c^1(t) + \Psi_1\, f_c^2(t)\big) \times d_c + (P_1 \ddot{q} + P_1\,[\,...\,] + \Psi_2 \ddot{q} + \Psi_3\,[\,...\,] + \Psi_4) \times \\ & \quad \times d_c = \Psi_{1*} + P_{1*} \ddot{q} + P_{1*}\,[\,...\,] + \Psi_{2*} \ddot{q} + \Psi_{3*}\,[\,...\,] + \Psi_{4*}. \end{aligned} \tag{П.61}$$

Тогда в уравнении (П.59) выберем

$$
\begin{aligned}
f_c^2(t) + \Phi_1 f_c^1(t) = B_M(q,\dot q) - A_M(q)\,[\,\dots]-\\
-(P_2+\Phi_3+P_{1*}\ +\Psi_{3*}+E_2+J_2)\,[\,\dots]-\\
-(\Phi_4+\Psi_{1*}+\Psi_{4*}+E_1+J_1)\ +\\
+\ (P_2+\Phi_2+P_{1*}+\Psi_{2*}+\Xi_2+J_2)\,[\,\dots]. \quad (\text{П.62})
\end{aligned}
$$

Заметим, что в уравнения (П.60) и (П.62) $\ddot q$ не входит. Эти уравнения суть уравнения для определения двух (пока неизвестных) вектор-функций $f_c^1(t)$ и $f_c^2(t)$. Разрешая эту систему, получим

$$
\begin{aligned}
f_c^2(t) &= (I-\Phi_1\Psi_1)^{-1}\,(W_2-\Phi_1W_1),\\
f_c^1(t) &= W_1-\Psi_1\,(I-\Phi_1\Psi_1)^{-1}\,(W_2-\Phi_1W_1), \qquad (\text{П.63})
\end{aligned}
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
W_1 &= B_F(q,\dot q)-A_F(q)\,[\,\dots]-\Psi_4-D_1-G_1+\\
&\quad +\ (\Psi_2+\Omega_2+G_2-\Psi_3-D_2-G_3)\,[\,\dots],\\
W_2 &= B_M(q,\dot q)-A_M(q)\,[\,\dots]-(\Phi_4+\Psi_{1*}+\Psi_{4*}+E_1+J_1)\ +\\
&\quad +\ (\Phi_2+\Psi_{2*}+\Xi_2+J_2-\Phi_3-\Psi_{3*}-E_2-J_3)\,[\,\dots].
\end{aligned}
$$

Наконец, подставим соотношения (П.60) и (П.62) в уравнения (П.58) и (П.59) соответственно. После суммирования будем иметь

$$
\begin{aligned}
A_F(q)\,\ddot q+B_F(q,\dot q) &= B_F(q,\dot q)-A_F(q)\,[\,\dots]+\\
&\quad +\ (P_1+\Psi_2+\Omega_2+G_2)\,\ddot q\ +\\
&\quad +\ (P_1+\Psi_2+\Omega_2+G_2)\,[\,\dots],\\
A_M(q)\,\ddot q+B_M(q,\dot q) &= B_M(q,\dot q)-A_M(q)\,[\,\dots]\ +\\
&\quad +\ (P_2+\Phi_2+P_{1*}+\Psi_{2*}+\Xi_2+\ J_2)\,\ddot q\ +\\
&\quad +\ (P_2+\Phi_2+P_{1*}+\Psi_{2*}+\Xi_2+J_2)\,[\,\dots],
\end{aligned}
$$

откуда получим

$$
\begin{aligned}
A_1(q)\,[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,] &= 0,\\
A_2(q)\,[\,\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,] &= 0, \qquad (\text{П.64})
\end{aligned}
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
A_1(q) &= A_F(q)-(P_1+\Psi_2+\Omega_2+G_2),\\
A_2(q) &= A_M(q)-(P_2+\Phi_2+P_{1*}+\Psi_{2*}+\Xi_2+J_2).
\end{aligned}
$$

Из уравнений (П.64) с учетом невырожденности матриц $A_1(q)$, $A_2(q)$ получим

$$
\ddot q-\ddot q_p+\alpha\,(\dot q-\dot q_p+\beta\,(q-q_p)=0 \quad\Longrightarrow\quad q(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} q_p(t).
$$

Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема П.2. *Пусть заданы следующие вектор-функции времени:* $q_p(t)$, $\varphi^i_{hp}(t)$, $r(t)$. *Тогда, выбирая управления в обратных связях ЛС по правилам*

$$
\begin{aligned}
u_o &= Q_1^{-1}(q)\ \{\,r(t)+Q_2(q)\,[\,\dots]-Q_3(q,\dot q,t)\,\}\,, \qquad \alpha,\beta>0,\\
u_h^i &=\ -\ Q_1^{-1i}\ \big\{-Q_2^i\ \big[-\ddot\varphi^i_{hp}+\gamma_1\,(\dot\varphi^i_h-\dot\varphi^i_{hp})+\gamma_2\,(\varphi^i_h-\varphi^i_{hp})\big]\ +\\
&\quad +\ Q_3^i-Q_4^i\,[\,\dots]\,\big\}\,, \qquad \gamma_1,\gamma_2>0,\\
u_c^i &= (\Omega_1^i-\Omega_2^iQ_2^{-1i}Q_1^i)^{-1}\ \{\,f_1^i(t)+\Omega_2^iQ_2^{-1i}Q_3^i-\Omega_3^i\ -\\
&\quad -\ (\Omega_2^iQ_2^{-1}Q_4^i-\Omega_4^i)\,[\,\dots]\,\} \qquad (i=1),\\
u_c^i &= (\Xi_1^i-\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_1^i)^{-1}\ \{\,f_2^i(t)+\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_3^i-\Xi_3^i\ -\\
&\quad -\ (\Xi_2^iQ_2^{-1i}Q_4^i-\Xi_4^i)\,[\,\dots]\,\} \qquad (i=2),
\end{aligned}
$$

где $f_c^1(t)$, $f_c^2(t)$ *вычисляются согласно системе* (П.63), $[\,\dots]\ =\ [\,-\ddot q_p\ +\ +\ \alpha\,(\dot q-\dot q_p)+\beta\,(q-q_p)\,]$, $\alpha,\beta>0$, *будем обеспечивать выполнение целевых условий:*

$$
R(t)=r(t),\quad F_c^i(t)=f_1^i(t)\quad (i=1),\qquad M_c^i(t)=f_2^i(t)\quad (i=2),
$$

$$
q(t)\to q_p(t),\qquad \varphi^i_h(t)\to\varphi^i_{hp}(t)\qquad (t\to\infty).
$$

Итак, выбором соответствующих управлений в двух свободных конечностях можно обеспечить стабилизируемое и полностью уравновешенное движение локомоционного аппарата. В качестве замечания (об этом, правда, говорилось и ранее) отметим, что при сравнении ПМДВ и ОМДВ обнаруживается следующее: система управлений и класс движений совпадают для корпуса и опорных конечностей (за счет наличия одинаковых точек опоры) и отличаются для переносных и свободных конечностей.

Литература

[1] *Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф.* Модель динамикм шагающего аппарата // Изв. АН СССР. Техн.кибернетика. — 1975. — № 3. — С. 72–80.

[2] *Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф.* Адаптивный алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1976. — № 5. — С. 56–64.

[3] *Алферов Г.В., Кулаков Ф.М.* Неокесарийский В.Н. Кинематические и динамические модели исполнительной системы робота. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, — 1983. — 80 с.

[4] *Артоболевский И.И., Кобринский А.Е.* Робототехника: современное состояние и проблемы // Вестник АН СССР. — 1974. — № 9. — С. 32-45.

[5] *Артоболевский И.И., Умнов Н.В.* Некоторые проблемы создания шагающих машин // Вестник АН СССР. — 1969. — № 2. — С. 44–51.

[6] *Белецкий В.В.* Динамика двуногой ходьбы. I, II // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1975. — № 3, 4. — С. 3–14, 3–13.

[7] *Белецкий В.В.* Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. — М.: Наука, 1984. — 288 с.

[8] *Белецкий В.В., Кирсанова Т.С.* Плоские линейные модели двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 4. — С. 51–62.

[9] *Белянин П.Н.* Промышленные роботы и их применение. — М.: Машиностроение, 1983. — 311 с.

[10] *Бернштейн Н.А.* О построении движений. — М.: Медгиз, 1947. — 254 с.

[11] *Бернштейн Н.А.* Очерки по физиологии движений и физиологии активности. — М.: Медицина, 1966. — 3494 с.

[12] *Бессонов А.П., Умнов Н.В.* К вопросу о системе походок шагающих машин // Машиноведение. — 1975. — № 6. — С. 23–30.

[13] *Богданов В.А., Гурфинкель В.С.* Биомеханика локомоций человека // Физиология движений. — Л.: Наука, 1976. — С. 276–315.

[14] *Богданов В.А., Гурфинкель В.С.* Остапчук В.Г. Динамическое управление шарнирами экзоскелетона // Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — С. 114–122.

[15] *Болотин Ю.В.* О разделении движения в задлаче стабилизации двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1979. — № 4. — С. 48–53.

[16] *Болотин Ю.В., Новожилов И.В.* Управление походкой двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1977. — № 3. — С. 47–52.

[17] *Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г.* Задачи управления шагающими аппаратами. — Киев: Наукова думка, 1985. — 263 с.

[18] *Васенин В.А.* Об импульсивном управлении движением инерционной ноги в фазе переноса // Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — С. 35–51.

[19] *Васенин В.А., Велерштейн Р.А., Формальский А.М.* Передвижение антропоморфных механизмов при импульсных воздействиях // Динамика управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1979. — С. 53–71.

[20] *Верещагин А.Ф.* Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1974. — № 6. — С. 89–94.

[21] *Верещагин А.Ф.* Метод динамического анализа на ЦВМ сложных механизмов роботов и манипуляторов // Тр. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Вопросы теории и проектирования автоматических систем. — № 200. — 1976. — С. 74–78.

[22] *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980. — 296 с.

[23] *Вукобратович М.* Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. — М.: Мир, 1976. — 541 с.

[24] *Вукобратович М., Христич Д.* Управление антропоморфическими системами // Управление в пространстве. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — С. 180–187.

[25] *Вукобратович М.*, Стокич Д. Управление манипуляцилнными роботами: теория и приложения. — М.: Наука, 1985. — 383 с.

[26] *Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н.* Неодаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. — М.: Мир, 1989. — 376 с.

[27] *Гупта В.* Динамический анализ систем твердых тел // Тр. амер. общ-ва инж.-мех. — Конструирование и технология машиностроения. — 1974. — Серия В, № 3. — С. 102–113.

[28] *Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л.* Регуляция позы человека. — М.: Наука, 1965. — 256 с.

[29] *Гурфинкель В.С., Фомин С.В., Штилькинд Т.К.* Определение суставных моментов при локомоции // Биофизика. — 1970. — Т. 15, Вып. 2. — С. 380–383.

[30] *Гурфинкель В.С., Осовец С.М.* Динамика равновесия вертикальной позы человека // Биофизика. — 1972. — Т. 17, Вып. 3. — С. 478–485.

[31] *Диментберг Ф.М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. — М.: Наука, 1982. — 335 с.

[32] Дистанционно управляемые роботы-манипуляторы / *Под ред. Е.П. Попова, М.Б. Игнатьева.* — М.: Мир, 1976. — 462 с.

[33] *Зубов В.И.* Аналитическая динамика систем тел. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, — 1983. — 344 с.

[34] *Игнатьев М.Б., Кулаков Ф.М., Покровский А.М.* Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. — Л.: Машиностроение, 1972. — 248 с.

[35] *Калинин В.В.* Управление ходьбой четырехного шагающего аппарата // Тр. Московск. энергетического ин-та. — 1977. — Вып. 331. — С. 85–92.

[36] *Карпинский Ф.Г.* Выбор программы движения двуногого шагающего аппарата // Физико-технические приложения краевых задач. — Киев: Наукова думка, 1978. — С. 201–216.

[37] Клиническая биомеханика / *Под ред. В.И. Филатова.* — Л.: Медицина, 1980. — 200 с.

[38] *Кобринский А.А., Кобринский А.Е.* Манипуляционные системы роботов. — М.: Наука, 1985. — 343 с.

[39] *Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юревич Е.И.* Динамика управления роботами. — М.: Наука, 1984. — 336 с.

[40] *Коренев Г.В.* Цель и приспособляемость движения. — М.: Наука, 1974. — 528 с.

[41] *Коренев Г.В.* Введение в механику человека. — М.: Наука, 1977. — 264 с.

[42] *Коренев Г.В.* Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. — М.: Наука, 1979. — 448 с.

[43] *Коренев Г.В.* Очерки механики целенаправленного движения. — М.: Наука, 1980. — 192 с.

[44] *Крутько П.Д., Попов Е.П.* Построение алгоритмов управления движением манипуляционных роботов // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 255, № 1. — С. 40–43.

[45] *Кулаков Ф.М., Новаченко С.И., Павлов В.А.* Динамическая модель робота-манипулятора // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. — С. 156–161.

[46] *Кулаков Ф.М.* Супервизорное управление манипуляционными роботами. — М.: Наука, 1980. — 448 с.

[47] *Кулешов В.С., Лакота Н.А.* Динамика систем управления манипуляторами. — М.: Энергия, 1971. — 304 с.

[48] *Ларин В.Б.* Передвижение двуногих систем маятникового типа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 2. — С. 58–61.

[49] *Ларин В.Б.* Стабилизация двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 5. — С. 4–13.

[50] *Ларин В.Б.* Управление шагающими аппаратами. — Киев: Наукова думка, 1980. — 168 с.

[51] *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1982. — Т. 1. — 352 с., 1983. — Т. 2. — 640 с.

[52] *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

[53] *Макги Р.Б., Чу-Чень-Сан* О выборе типа движения для шагающей системы // Управление в пространстве. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — С. 187–195.

[54] *Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С.* Системы управления манипуляционных роботов. — М.: Наука, 1978. – 416 с.

[55] *Мееров М.В.* Системы многосвязного регулирования. — М.: Наука, 1965. — 384 с.

[56] *Морозовский В.Т.* Многосвязные системы автоматического регулирования. — М.: Энергия, 1970. — 288 с.

[57] Научное наследие П.Л. Чебышева. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. — Вып. 2. Теория механизмов. — 192 с.

[58] Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики / *Под ред. Е.А. Девянина и А.В. Ленского.* — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — 148 с.

[59] *Новожилов И.В.* Управление ногой шагающего аппарата в фазе опоры // Биомеханика. — Рижск. НИИ травматологии и ортопедии, 1975. — С. 634–639.

[60] *Окамото К.* Алгоритм управления многозвенными манипуляторами // Интегр. роботы. — М.: Мир, 1975. — С. 305–322.

[61] *Охоцимский Д.Е., Платонов А.К.* Алгоритмы управления шагающим аппаратом, способным преодолевать препятствия // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1973. — № 5. — С. 3–10.

[62] *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А.* Алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — С. 207–217.

[63] *Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Кугушев Е.И.* Мини-ЭВМ в контуре управления шагающим аппаратом // Динамика управляемых систем. - Новосиб.: Наука, 1979. — С. 209–216.

[64] *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. — М.: Наука, 1984. — 312 с.

[65] *Павлов В.А., Тимофеев А.В.* Об одном методе управления роботом-манипулятором, способным обходить препятствия. — М.: Наука, 1974. — С. 170–180.

[66] *Петров Б.А.* Манипуляторы. — Л.: Машиностр., 1984. — 238 с.

[67] *Питкин М.Р.* Кинематический и динамический анализ ходьбы человека // Биомеханика. — Рижск. НИИ травматологии и ортопедии, 1975. — С. 279–282.

[68] Подводные роботы / *Под ред. В.С. Ястребова.* — Л.: Судостроение, 1977. — 368 с.

[69] *Пол Р.* Управление траекторией руки с помощью вычислительных машины // Интегральные роботы. — М.: Мир, 1973. — С. 326–338.

[70] *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-монипулятора. — М.: Наука, 1976. — 104 с.

[71] *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, — 1985. — 536 с.

[72] *Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л.* Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[73] Промышленная робототехника / *Под ред. Я.А. Шифрина.* — М.: Машиностроение, 1982. — 415 с.

[74] *Раус Э.Дж.* Динамика систем твердых тел. — М.: Наука, 1983. — Т. 1. — 464 с., Т. 2. — 544 с.

[75] *Рубанович Е.М., Формальский А.М.* Антропоморфный механизм с управляемыми стопами при импульсных воздействиях // Исследование робототехнических систем. — М.: Наука, 1982. — С. 181–194.

[76] *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Мир, 1987. — 256 с.

[77] *Тертычный В.Ю., Фомин В.Н.* Равновесие локомоционного аппарата в процессе передвижения // Колебания и устойчивость механических систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, — 1981. — Вып. 5. — С. 106–114.

[78] *Тертычный В.Ю.* Оптимальное решение краевой задачи для фазы переноса локомоционной системы // Тр. IV Всесоюзн. Конф. По оптимальному управлению в механических системах. — М.: Наука, 1982. — С. 175–176.

[79] *Тертычный В.Ю.* Обратный метод динамических возмущений в задаче синтеза локомоций // Вестник Ленингр. ун-та. — 1984. — № 7. — С. 44–50.

[80] *Тертычный В.Ю., Фомин В.Н.* Стабилизация и полная уравновешенность движения локомоционного аппарата // Динамика и устойчивость механических систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, — 1984. — Вып. 6. — С. 43–52.

[81] *Тертычный В.Ю.* Синтез управляемых механических систем. — СПб.: Политехника, 1993. — 336 с.

[82] *Тертычный-Даури В.Ю.* Разнообразная механика. — М.: Факториал Пресс, 2006. — 272 с.

[83] *Тимофеев А.В.* Роботы и искусственный интеллект. — М.: Наука, 1978. — 192 с.

[84] *Формальский А.М.* Движение антропоморфного механизма при импульсном воздействии // Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — С. 17–34.

[85] *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. — М.: Наука, 1982. — 368 с.

[86] *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника. - М.: Мир, 1989. — 624 с.

[87] *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. — М.: Наука, 1989. — 368 с.

[88] *Янг Д.* Робототехника. — Л.: Машиностроение, 1979. — 300 с.

[89] *Ястребов В.С., Филатов А.М.* Системы управления движением робота. — М.: Машиностроение, 1979. — 176 с.

[90] *Bresler B., Frankel J.P.* The force and moments in the leg during level walking // Trans. ASME. — 1950. — V. 72, № 1. — P. 27–36.

[91] *Cappozzo A., Leo T., Pedotti A.* A general computing method for human locomotion analysis // J. of Biomechanics. — 1975. — V. 8, № 5. — P. 307–320.

[92] *Chow C.K., Jacobson D.H.* Studies of human locomotion via optimal programming // Mathem. Biosciences. — 1971. — V. 10, № 3/4. — P. 239–306.

[93] *Hemami H., Camana P.C.* Nonlinear feedback in simple locomotion systems // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1976. — V. 21, № 6. — P. 855–860.

[94] *Hemami H., Cvetkovic V.S.* Postural stability of two biped models via Lapunov second method // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1977. — V. 22, № 1. — P. 66–70.

[95] *Litvin F.L.* Simplification of the matrix of linkage by division of a mechanism into unclosed kinematic chains // Mechanism and machine Theory. — 1975. — V. 10. — P. 315–326.

[96] *McGhee R.B., Orin D.E.* A mathematical programming approach to control of joint positions and torques in legged locomotion systems // Second CISM-IFTOMM Simposium. Poland. — 1976. — P. 231–239.

[97] *McGhee R.B.* Control of legged locomotion systems // Proc. of Joint Automatic Control Conference, USA. — 1977. — P. 1–11.

[98] *Orin D.E., McGhee R.B., Jaswa V.C.* Interactive computer-control of a six-legged robot vechicle with optimization of stability and energy // Proc. Of 1976 IEEE Conf. on Decision and Control. — 1976. — P. 381–390.

[99] *Vukobratovic M., Frank A.A., Juricic D.* On the stability of biped locomotion // IEEE Trans. on Biomedical Engineering. — 1970. — V. 17, № 1. — P. 25–36.

[100] *Weber W., Weber E.* Mechanik der menschlichen Gehwerkzenge. — Gottingen, 1836. — 426 s.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория “Национальный исследовательский университет”. Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009-2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование “Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики”.

КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра Систем Управления и Информатики (до 2001 г. кафедра Автоматики и Телемеханики) факультета Компьютерных Технологий и Управления была основана в 1945 г. на базе факультета Электроприборостроения ЛИТМО. На кафедру Автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Первый выпуск молодых инженеров состоялся в 1948 г. и составил 17 человек. Первым заведующим кафедры был крупный специалист в области систем телеизмерений, профессор Марк Львович Цуккерман.

В 1955 г. при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 г. по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана доцент Ефимий Аполлонович Танский. За время его руководства в научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения, что привело к длительному научно-техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса “Газета-2”.

С 1970 по 1990 г., за время руководства кафедрой известного в стране специалиста в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктора технических наук, профессора Юрия Алексеевича Сабинина, заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам "Теория автоматического регулирования и следящие системы", "Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы", "Элементы автоматики" и "Телемеханика" были добавлены дисциплины: "Теоретические основы кибернетики", "Локальные системы управления", "САПР систем управления" и другие. Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов.

С 1990 г. научно-исследовательская работа кафедры велась по федеральным целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивным систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 г. образована научная Лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 г. существенно расширились международные контакты кафедры, участие в самых престижных международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. С 1998 г. на базе кафедры в университете ежегодно проводится Международная студенческая олимпиада по автоматическому управлению, а с 2009 года проводится Всероссийский Фестиваль Мехатроники и Робототехники.

В 2001 г. кафедра была переименована и получила название "Кафедра Систем управления и информатики". В 2010 г. кафедру возглавил доктор технических наук, профессор Бобцов Алексей Алексеевич, работающий в то время уже в должности декана факультета Компьютерных технологий и управления. Профессор Бобцов А.А. является председателем советов молодых ученых Санкт-Петербурга и Северо-Западного Федерального Округа. В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области систем автоматического управления, робототехники и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI столетия.

Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

ДИНАМИКА РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка — А.А. Пыркин, В.Ю. Тертычный-Даури
Дизайн обложки и иллюстраций — Н.А. Шурпо, В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО — Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 05.04.2012
Заказ №
Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе